Chapter 1

常数项级数

Chapter 2

函数项级数

Chapter 3

n维Euclid空间

Chapter 4

多元函数微分学

4.1 多元函数的定义与极限

4.1.1 多元函数的定义

设$m, n \leqslant 1$为整数，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$为非空集合，定义映射$\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为定义在Ω上的**n元向量值函数**，当$n = 1$时，f可以简称为**n元函数**。设$X = (x_1, \cdots, x_n)$，$Y = (y_1, \cdots, y_m)$，则对于$\forall i, 1 \leqslant i \leqslant m$，则$y_i = f_i(X)$，因此n元向量值函数等价于m个n元函数，也就是

$$\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_m)$$

与一元函数类似，多元向量值函数也可以进行一些运算。

$$(\lambda \boldsymbol{f} + \mu \boldsymbol{g})(X) = \lambda \boldsymbol{f}(X) + \mu \boldsymbol{g}(X)$$

$$(g\boldsymbol{f})(X) = g(X)\boldsymbol{f}(X)$$

$$(\frac{\boldsymbol{f}}{g})(X) = \frac{\boldsymbol{f}(X)}{g(X)}$$

$$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(X) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(X))$$

4.1.2 多元函数的极限

设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$，$X_0 \in \mathbb{R}^n$是$\Omega$的极限点，$A \in \mathbb{R}^m$。若对于$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得$\forall X \in \Omega$，当$0 < ||X - X_0||_n < \delta$时，有$||\boldsymbol{f}(X) - A||_m < \varepsilon$；或者

说$\forall X \in \mathring{B}(X_0,\delta)\cap\Omega$，都有$\boldsymbol{f}(X)\in B(A,\varepsilon)$，则称当$X$趋于$X_0$时，$\boldsymbol{f}(X)$收敛于$A$，以$A$为极限，记作

$$\lim_{\Omega\ni X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)=A$$

如果X_0是$\Omega\cup\{X_0\}$的内点，极限符号也可以简记为

$$\lim_{X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)=A$$

n元向量值函数的极限具有下面的性质：

(1)记$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，$A=(a_1,\cdots,a_m)$，则对于$\forall 1\leqslant i\leqslant m$，都有

$$\lim_{\Omega\ni X\to X_0}f_i(X)=a_i$$

(2)同一元函数极限一样，多元向量值函数的极限也具有唯一性、四则运算（加、减、（数）乘）、复合运算、序列、Cauchy定理等。

(3)对于多元函数，由于可以比较大小，因此具有保序性、保号性、夹逼定理等。

(4)对于二重极限，假如$f(x,y)$在$(x,y)\to(x_0,y_0)$时极限存在，且在x_0某去心邻域内，$f(x,y)$关于y的极限存在，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$$

由此可以得到推论：若二重极限与某一个累次极限存在，则二者必然相等；若两个累次极限存在而不等，则二重极限不存在。

4.2 多元函数的连续性

4.2.1 多元函数连续性的定义

设$\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\supseteq\Omega\to\mathbb{R}^m$，$X_0\in\Omega$，若

$$\lim_{\Omega\ni X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)=\boldsymbol{f}(X_0)$$

则称函数$\boldsymbol{f}$在X_0处连续。若$\boldsymbol{f}$在Ω上任一点都连续，则称$\boldsymbol{f}$在Ω 上连续，记为$\boldsymbol{f}\in C(\Omega;\mathbb{R}^m)$。

连续函数有下面的简易性质：

(1)连续函数进行加、减、（数）乘、复合运算后结果仍为连续函数。

(2)设$\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\supseteq\Omega\to\mathbb{R}^m$，则$\boldsymbol{f}$连续当且仅当对$\mathbb{R}^m$任意开（闭）集$G$，其原像集$\boldsymbol{f}^{-1}(G)$也是开（闭）集。

4.2.2 最值定理与介值定理

由于涉及到大小的比较，下面的函数都是针对多元函数而言的。

最值定理 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$为闭集合，$f \in C(\Omega)$，则$f$在$\Omega$上有最大值和最小值。

介值定理 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$为弧连通集合（集合内任意两点都可以用弧线连接），$f \in C(\Omega)$，则$\forall X_1, X_2 \in \Omega$，以及$\forall \mu$介于$f(X_1)$与$f(X_2)$之间，总$\exists X_0 \in \Omega$，使得$f(X_0) = \mu$。

4.3 多元函数的导数

4.3.1 偏导数

多元函数

假设$f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$，$\mathbb{R}$的基底为$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots \boldsymbol{e}_n\}$，$f$在$X_0$的一个邻域内有定义，设$1 \leqslant i \leqslant n$如果极限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(X_0 + h\boldsymbol{e}_i) - f(X_0)}{h}$$

存在，则我们将上面表达式的值称为f在X_0关于变量x_i的**偏导数**，则积分可以记作

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \quad 或者 \quad \partial_{x_i} f(X_0)$$

如果f在点X_0处关于所有变量的偏导数均存在，则称f在X_0是**可导的**。

采取行向量、列向量的表示方法，如果f是可微的，则可以表示为如下形式

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \mathrm{d}X = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix}$$

向量值函数

现在我们考虑$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^m$，则考虑对各个分量的偏导数即可。下面考虑其微分表达形式。我们有

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \dots & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix}$$

我们将$(\partial_{x_j} f_i)_{m\times n}$称为$\boldsymbol{f}$的Jacobi矩阵，记作

$$\boldsymbol{J_f} \quad 或者 \quad \frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

这样函数$\boldsymbol{f}$的微分就可以表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{J_f}\mathrm{d}X$$

特别地，如果$m=n$，此时Jacobi矩阵是方阵，因而有行列式，称为Jacobi行列式，记作

$$\frac{D(f_1,\cdots,f_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)} = \det \boldsymbol{J_f} = \det \frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

4.3.2 高阶导数

如果某一个偏导数是可导的，就可以再次求导，得到**高阶偏导数**。

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

对于函数f，先对x_i求导，再对x_j求导，可以得到一个偏导数；如果交换求导顺序，可以得到另一个偏导数。如果两个偏导数在定义域内的X_0点连续，则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)$$

4.3.3 复合函数、隐函数、反函数的求导

复合函数

设$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{g}$可以构成复合函数$\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$，我们设

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{J_f}\mathrm{d}X$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{J_g}\mathrm{d}Y$$

则有

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{J_g}\boldsymbol{J_f}\mathrm{d}X$$

也就是说$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{J_g}\boldsymbol{J_f}$

反函数

根据

$$\mathrm{d}Y = \boldsymbol{J_f}\mathrm{d}X$$

则

$$\mathrm{d}Y = \boldsymbol{J_f}^{-1}\mathrm{d}Y$$

也就是说

$$\boldsymbol{J_{f^{-1}}} = \boldsymbol{J_f}^{-1}$$

隐函数

首先考虑从$F(X,y)=0$中解出$y=f(X)$。

设$X_0 \in \mathbb{R}^n$，$y_0 \in \mathbb{R}$。给定函数$F : B((X_0,y_0),r) \to \mathbb{R} \in C^{(1)}$，满足$F(X_0,y_0) = 0$，且$\partial_y F(X_0,y_0) \neq 0$。那么，就存在从$X$到$y$的隐函数。也就是说，$\exists \delta, \eta$

$$B(X_0,\delta) \times B(y_0,\eta) \subset B((X_0,y_0),r)$$

对于$\forall X \in B(X_0,\delta)$，$\exists! y \in B(y_0,\eta)$，使得$F(X,y) = 0$。这样我们就找到了从$X$到$y$的函数$f : B(X_0,\delta) \to B(y_0,\eta) \in C^{(1)}$，且

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial_{x_i} F}{\partial_y F}$$

下面考虑从$\boldsymbol{F}(X,Y)=0$解出$Y=\boldsymbol{f}(X)$。

设$X_0 \in \mathbb{R}^n$，$Y_0 \in \mathbb{R}^m$。给定函数$\boldsymbol{F} : B((X_0,Y_0),r) \to \mathrm{R} \in C^{(1)}$，满足$\boldsymbol{F}(X_0,Y_0) = 0$，且$\det \boldsymbol{J_y F} \neq 0$。那么，就存在从$X$到$Y$的隐函数。也就是说，$\exists \delta, \eta$

$$B(X_0,\delta) \times B(Y_0,\eta) \subset B((X_0,y_0),r)$$

对于$\forall X \in B(X_0,\delta)$，$\exists! Y \in B(Y_0,\eta)$，使得$\boldsymbol{F}(X,Y) = 0$。这样我们就找到了从$X$到$Y$的函数$\boldsymbol{f} : B(X_0,\delta) \to B(y_0,\eta) \in C^{(1)}$，且

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} = -\left(\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right)^{-1}\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$\boldsymbol{J_x f} = -\frac{\boldsymbol{J_x F}}{\boldsymbol{J_y F}}$$

Chapter 5

含参积分

5.1 含参积分的定义与性质

5.1.1 含参积分的定义

在函数连续的基础上，我们定义函数的一致连续性。设$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，若对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得$\forall X,Y\in\Omega$，当$||X-Y||_n<\delta$时，都有$|f(X)-f(Y)|<\varepsilon$，则称$f$在$\Omega$上是**一致连续**的。

一致连续的函数必然连续，连续函数未必一致连续。但是闭集上的连续函数必然是一致连续的。

定义函数$f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$，如果对于$\forall y\in[c,d]$

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

有定义，则将$I(y)$称为以y为变量的**含参积分**。

5.1.2 含参积分的性质

积分与极限可交换性 如果f是连续函数，则I也是连续函数，也就是说

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}x$$

如果将$[c,d]$换成(c,d)，结论依然成立。

积分与导数可交换性 如果f连续可导，则I也是连续可导的，并且

$$I'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x$$

如果将$[c,d]$换成(c,d)，结论依然成立。

设$\alpha,\beta:[c,d]\to[a,b]$可导，则定义

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

我们有

$$J'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x+f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$$

积分与积分可交换性 如果f连续，我们有

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

5.2 广义含参积分

5.2.1 广义含参积分的定义

假设$f:[a,w)\times[c,d]\to\mathbb{R}$为连续函数，其中$w\in\mathbb{R}_\infty$。若$y_0\in[c,d]$使得广义积分

$$\int_a^w f(x,y_0)\mathrm{d}x=\lim_{A\to w^-}\int_a^A f(x,y_0)\mathrm{d}x$$

收敛，则称广义积分在y_0处**收敛**，否则在该点**发散**。

如果广义积分在$[c,d]$上每一点都收敛，我们就得到了函数

$$I(y)=\int_a^w f(x,y)\mathrm{d}x$$

如果$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0\in[a,w)$，使得$\forall A\in[A_0,w)$以及$\forall y\in[c,d]$，均有

$$\left|\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x-I(y)\right|<\varepsilon$$

则称广义积分在区间$[c,d]$上**一致收敛**到函数$I(y)$。

5.2.2 广义积分收敛性质的判断

Cauchy准则 广义积分在$[c,d]$上一致收敛当且仅当$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0\in[a,w)$使得$\forall A',A''\in[A_0,w)$，$\forall y\in[c,d]$，都有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

Weierstrass判别法 假设$f:[a,w)\times[c,d]\to\mathbb{R}$为连续函数，函数$F:[a,w)\to[0,+\infty)$使得对于$\forall(x,y)\in[a,w)\times[c,d]$都有$|f(x,y)|\leqslant F(x)$，如果积分

$$\int_a^w F(x)\mathrm{d}x$$

收敛，则

$$\int_a^w f(x,y)\mathrm{d}x$$

关于$y\in[c,d]$一致收敛。

Abel判别法 设$f,g:[a,w)\times[c,d]\to\mathbb{R}$，对于$\forall y\in[c,d]$，$f(x,y)$和$g(x,y)$个在$[a,w)$任意闭子区间都可积，如果$f(x,y)$的广义积分关于$y\in[c,d]$一致收敛，而$g$有界并且关于$x$单调，则

$$\int_a^w f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$$

关于$y\in[c,d]$一致收敛。

Dirichlet判别法 设f,g，其可积性与上一段的叙述相同。对于$\forall y\in[c,d]$以及$\forall A\in[a,w)$，定义

$$F(A,y)=\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x$$

如果F有界，g关于x单调，且当$x\to w^-$时$g(x,y)\to 0$一致成立，则

$$\int_a^w f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$$

一致收敛。

5.2.3 广义含参积分的性质

极限与积分可交换性 设$f:[a,w)\times[c,d]\to\mathbb{R}\in C$，若广义积分

$$I(y)=\int_a^w f(x,y)\mathrm{d}x$$

关于$y\in[c,d]$一致收敛，则I在$[c,d]$上连续。将$[c,d]$换成开区间也成立。

求导与积分可交换性 设$f\in C$，若$I(y)$在$[c,d]$收敛，$\partial_y f\in C$且相应广义含参积分一致收敛，则I在$[c,d]$上连续可导，并且

$$I'(y)=\int_a^w \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x$$

积分与积分可交换性 设$f\in C$，若$I(y)$一致收敛，则$I\in R[c,d]$，且

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^w f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^w \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

5.3 Gamma函数与Beta函数

5.3.1 Gamma函数

Gamma函数的定义为

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

通过变量代换，可以得到Gamma函数的其他表示方式，例如

$$\Gamma(s)=2\int_0^{\infty}x^{2s-1}e^{-x^2}\mathrm{d}x\quad,s>0$$

$$\Gamma(s)=a^s\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-ax}\mathrm{d}x\quad,s>0,a>0$$

Gamma函数有下面的性质：

(1)$\Gamma(s)$在$(0,+\infty)$上收敛且连续，并且有任意阶连续导数。

(2)$\forall s>0$，$\Gamma(s)>0$，且$\Gamma(1)=1$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$。

(3)$\forall s>0$，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，若n是自然数，则$\Gamma(n+1)=n!$

(4)$\ln\Gamma(s)$是$(0,+\infty)$上的凸函数。

(5)定义在$(0,\infty)$上的函数$f(s)$若满足性质(2)—(4)，则f必然是Gamma函数。

(6)（余元公式）对于$\forall p\in(0,1)$，有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

5.3.2 Beta函数

Beta函数的定义为

$$B(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

通过变量代换，可以得到Beta函数的其他表示方式，例如用三角函数，以及下面的

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t\quad,p>0,q>0$$

Beta函数有下面的性质

(1)$B(p,q)$在$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$上收敛、连续，并且有各阶连续偏导数。

(2)$\forall(p,q)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$，都有$B(p,q)=B(q,p)$。

(3)
$$B(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(p,q)$$
。

(4)
$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Chapter 6

重积分

6.1 重积分的定义与性质

6.1.1 重积分的定义

首先，我们考虑最理想的情形，积分区域是一个立方体。我们定义n维平行体

$$I = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

并定义其体积

$$|I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

以及上面的函数

$$f : I \to \mathbb{R}$$

现在，将其分割成一系列更小的立方体，得到的一系列立方体构成I的一个分割

$$P = \{I_i\}_{i=1}^{k}$$

从每一个小的立方体上选取一个点$\boldsymbol{\xi}_i \in I_i$，对应一个函数值$f(\boldsymbol{\xi}_i)$，定义Riemann和

$$\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i) |I_i|$$

定义分割P的步长为

$$\lambda(P) = \max_{J \in P} d(J)$$

如果极限

$$A=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{k}f(\boldsymbol{\xi}_i)|I_i|$$

存在，我们称f在I上**Riemann可积**，将A称为f在I上的**n重积分**，记作

$$\int\limits_I f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

或者

$$\int\cdots\int_I f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

下面考虑一般的积分区域，假设$\Omega\in I$，可以定义

$$\tilde{f}(\boldsymbol{X})=\begin{cases}f(\boldsymbol{X}), & \boldsymbol{X}\in\Omega\\ 0, & \boldsymbol{X}\in In\Omega\end{cases}$$

如果$\tilde{f}(X)$在I上Riemann可积，则$f(X)$在Ω上Riemann可积，并且我们有

$$\int\limits_\Omega f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\int\limits_I\tilde{f}(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

下面则是一些有关测度的内容。定义Ω上的示性函数$I:\Omega\to\{0,1\}$如下：

$$I(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{X}\in\Omega\\ 0, & \boldsymbol{X}\notin\Omega\end{cases}$$

如果Ω是有界集并且使得$I(\boldsymbol{X})$Riemann可积，我们称Ω是**Jordan可测集**，并定义集合Ω的测度为

$$|\Omega|=\int\limits_\Omega I(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

如果有界闭集Ω是Jordan可测集，且定义在上面的f连续，则f在Ω上Riemann可积。Ω上Riemann可积函数的全体记作$R(\Omega)$。

6.1.2 重积分的性质

首先是一些关于被积函数的性质。下面的性质都是针对Jordan可测集而言的。

有界性　若$f\in R(\Omega)$，则f有界。

线性　若$f_1,f_2\in R(\Omega)$，$a,b\in\mathbb{R}$，则$af_1+bf_2\in R(\Omega)$，并且

$$\int\limits_\Omega(af_1+bf_2)\mathrm{d}\boldsymbol{X}=a\int\limits_\Omega f_1\mathrm{d}\boldsymbol{X}+b\int\limits_\Omega f_2\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

保号性　若$\forall \boldsymbol{X} \in \Omega$，有$f(\boldsymbol{X}) \geqslant 0$，则

$$\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} \geqslant 0$$

严格保号性　若$\forall \boldsymbol{X} \in \Omega$，$f(\boldsymbol{X}) \geqslant 0$，而$\exists \boldsymbol{X}_0 \in \Omega$使得$f(\boldsymbol{X}_0) \neq 0$，则

$$\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} > 0$$

保序性　若$\forall \boldsymbol{X} \in \Omega$，都有$f(\boldsymbol{X}) \geqslant g(\boldsymbol{X})$，则

$$\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} \geqslant \int\limits_{\Omega} g(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

绝对值不等式　如果$f \in R(\Omega)$，则$|f| \in \Omega$，且

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}\right| \leqslant \int\limits_{\Omega} |f(\boldsymbol{X})|\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

上下界估计　如果$M = \sup(f)$，$N = \inf(f)$则

$$m|\Omega| \leqslant \int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} \leqslant M|\Omega|$$

中值定理　如果Ω是有界闭连通集合，则$\exists \boldsymbol{X}_0 \in \Omega$，使得

$$\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} = f(\boldsymbol{X}_0)|\Omega|$$

由此可以得到推论，对于$\forall \boldsymbol{Y} \in \mathring{\Omega}$，我们有

$$f(\boldsymbol{Y}) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|\bar{B}(\boldsymbol{Y}, r)|} \int_{\bar{B}(\boldsymbol{Y}, r)} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

下面是一些关于积分区域的性质。下面的性质都是针对Jordan可测集而言的。

区域可加性　如果$\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$是Jordan可测集，$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$，且$\Omega_1$与$\Omega_2$没有公共内点，则$f \in R(\Omega)$当且仅当$f \in R(\Omega_1)$且$f \in R(\Omega_2)$。此时有

$$\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \int\limits_{\Omega_1} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} + \int\limits_{\Omega_2} f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

坐标变换 若$\Omega_1,\Omega_2 \in \mathbb{R}^n$，其中$\Omega_1 = \{(x_1,\cdots,x_n)\}$，$\Omega_2 = \{(y_1,\cdots,y_n)\}$，$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$是将$\Omega_1$变换到$\Omega_2$的双射，即$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})$，也就是

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(\boldsymbol{X}) \\ \cdots \\ y_n = \varphi_n(\boldsymbol{X}) \end{cases}$$

设$D_1 \subset \Omega_1$，经过变换后得到$D_2 = \boldsymbol{\varphi}(D_1) \subset \Omega_2$。如果$\boldsymbol{\varphi}$和其逆映射$\boldsymbol{\varphi}^{-1}$都是连续可导的，$D_1$是Jordan可测集，则$D_2$也是Jordan可测集，并且对$\forall f \in C$，有

$$\int\limits_{D_2} f(\boldsymbol{Y})\mathrm{d}\boldsymbol{Y} = \int\limits_{D_1} f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}))\left|\frac{D(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\right|\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

6.2 二重积分的计算

6.2.1 二重积分的一般计算方法

X型区域 将积分区域记为Ω，设f_1，f_2在$[a,b]$上连续，且$\forall x \in [a,b]$，都有$f_1(x) \leqslant f_2(x)$，则区域可以表示为

$$\Omega = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$$

这个区域是Jordan可测的。如果$f:\Omega \to \mathbb{R}$是连续函数，则

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

Y型区域 将积分区域记为Ω，设g_1，g_2在$[c,d]$上连续，且$\forall y \in [c,d]$，都有$g_1(y) \leqslant g_2(y)$，则区域可以表示为

$$\Omega = \{(x,y)|c \leqslant y \leqslant d, \quad g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\}$$

这个区域是Jordan可测的。如果$f:\Omega \to \mathbb{R}$是连续函数，则

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

6.2.2 极坐标变换

如果积分区域与圆有关，或者积分表达式中涉及x^2+y^2之类的项，可以考虑极坐标变换。设$D_1=\{(\rho,\varphi)\}$，$D_2=\{(x,y)\}$，$\boldsymbol{\varphi}:D_1\to D_2$，则

$$\begin{cases} x=\varphi_1(\rho,\varphi)=\rho\cos\varphi \\ y=\varphi_2(\rho,\varphi)=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right|=|\rho|$$

因此一般选取$\rho\geqslant 0$，从而使得$|\det\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\rho,\varphi)|=\rho$。这样就从直角坐标系变换到了极坐标系。我们有

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

如果D_1的形式为

$$D_1=\{(\rho,\varphi)|\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta,\quad \rho_1(\varphi)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\varphi)\}$$

那么

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$$

如果D_1的形式为

$$D_1=\{(\rho,\varphi)|a\leqslant\rho\leqslant b,\quad \varphi_1(\rho)\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2(\rho)\}$$

那么

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}\rho\int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\varphi$$

对于椭圆，可能会涉及到伸缩后的极坐标变换$(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$

$$\begin{cases} x=\varphi_1(\rho,\varphi)=a\rho\cos\varphi \\ y=\varphi_2(\rho,\varphi)=b\rho\sin\varphi \end{cases}$$

此时相应有

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right|=|ab\rho|$$

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab\iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

6.2.3 其他计算方法

二重积分的计算还可以用一些特殊方法。

利用对称性 如果积分区域Ω关于x轴对称，则若$f(x,-y)=-f(x,y)$，则

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

若$f(x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Omega,half} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若区域关于y轴对称，则可以推出类似的结论。若区域关于原点对称，且$f(-x,-y)=-f(x,y)$，则

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

有时交换$f(x,y)$中的x和y，也是一种求解的方法。

作特殊变换 除了极坐标变换外，也可以对(x,y)作其他变换。例如

$$\begin{cases} x=\varphi_1(u,v) \\ y=\varphi_2(u,v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\phi_1(x,y) \\ v=\phi_2(x,y) \end{cases}$$

如果积分区域是由这些曲线围成的不规则区域，可以尝试作上述变换，使其变成规则的区域甚至矩形区域。

但是进行坐标变换时要注意：（1）在计算Jacobi行列式时，注意是否取倒数；（2）在进行变换时，Jacobi行列式需要取绝对值。

6.3 三重积分的计算

6.3.1 三重积分的一般计算方法

X-Y型区域 设积分区域为Ω，在xOy平面的投影为D_{xy}，如果D_{xy}是Jordan可测的，连续函数z_1，z_2满足：对于$\forall(x,y)\in D_{xy}$，都有$z_1(x,y)\leqslant z_2(x,y)$，则区域$\Omega$是Jordan可测的，且可以表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_{xy},\quad z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\}$$

这时对于$\forall f \in C$，$f:\Omega \to \mathbb{R}$，有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Y-Z型区域　仿照上面一种类型，我们有

$$\Omega = \{(x,y,z)|(y,z) \in D_{yz}, \quad x_1(y,z) \leqslant x \leqslant x_2(y,z)\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{yz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x$$

X-Z型区域　仿照上面一种类型，我们有

$$\Omega = \{(x,y,z)|(x,z) \in D_{xz}, \quad y_1(x,z) \leqslant y \leqslant y_2(x,z)\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xz}} \mathrm{d}x\mathrm{d}z \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}y$$

6.3.2 柱坐标与球坐标变换

柱坐标变换　我们直接考虑伸缩后的广义柱坐标变换，$D_1 = \{(\rho,\varphi,h)\}$，$D_2 = \{(x,y,z)\}$，$a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$，作变换

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \qquad\qquad (\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi) \\ z = h \end{cases}$$

这时我们有

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,h)}\right| = ab\rho$$

因此

$$\iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{D_1} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi, h)ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}h$$

球坐标变换　接下来考虑球坐标变换，$D_1 = \{(\rho,\theta,\varphi)\}$，$D_2 = \{(x,y,z)\}$。则

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \qquad\qquad (\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi) \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2\sin\theta$$

那么

$$\iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{D_1} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

6.4 重积分的应用

6.4.1 计算面积

二重积分可以计算平面图形的面积：在xOy平面上D区域的面积为

$$S = |D| = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二重积分可以计算空间曲面的面积。假设空间曲面是以参数方程的形式定义的

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) & \qquad (u,v)\in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

如果D是Jordan可测的，x，y，z是连续函数，则$r(\boldsymbol{J}(x,y,z)) = 2$。其在两个方向的切向量为

$$\boldsymbol{T}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\boldsymbol{T}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

两个切向量构成平行四边形的面积就是面积微元的大小，即$||\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v||$。下面我们计算它的值，展开并化简可以得到

$$\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$$

$$||\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v||^2 = ||\boldsymbol{T}_u||^2||\boldsymbol{T}_v||^2 - (\boldsymbol{T}_u\cdot\boldsymbol{T}_v)^2$$

我们记

$$E = \boldsymbol{T}_u\cdot\boldsymbol{T}_u$$

$$G = \boldsymbol{T}_v\cdot\boldsymbol{T}_v$$

$$F = \boldsymbol{T}_u\cdot\boldsymbol{T}_v$$

则面积微元

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

因此曲面的面积为

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

如果曲面是按照$z = z(x, y)$的形式给出，代入上面的公式，我们有

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{T}_u = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\boldsymbol{T}_v = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

因此，曲面的面积为

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对于$x = x(y, z)$和$y = y(x, z)$，情形是类似的。

6.4.2 计算体积

二重积分可以计算曲顶柱体的体积：在xOy平面上的D区域，$z = 0$和$z = f(x, y)$之间的部分构成曲顶柱体，其体积为

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

三重积分可以计算封闭几何体的体积：对于三维区域Ω，其体积为

$$V = |\Omega| = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

6.4.3 计算质心

在三维区域Ω中，有密度分布$\rho(\boldsymbol{X})$，则这个几何体的质量为

$$M = \iiint\limits_{\Omega} \rho(\boldsymbol{X})\mathrm{d}V$$

设其**质心**为$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$，则有

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} x\rho(\boldsymbol{X})\mathrm{d}V$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} y\rho(\boldsymbol{X})\mathrm{d}V$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} z\rho(\boldsymbol{X})\mathrm{d}V$$

若令$\rho(\boldsymbol{X}) \equiv 1$，则得到的点$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$称为几何体的**几何中心**。

注意以下两点：（1）这种计算方法可以推广到任意维度；（2）这种方法只适用于直角坐标系，如果直接用(ρ, φ)代替(x, y)，会得到错误的结果。

Chapter 7

曲线与曲面积分

7.1 第一型曲线积分

7.1.1 第一型曲线积分的定义

我们称$L \subset \mathbb{R}^3$为一条空间曲线，L开始于A，结束于B。定义映射$f : L \to \mathbb{R}$。对曲线L进行分割，形成若干弧P_0P_1，P_1P_2，...，$P_{n-1}P_n$，且$A = P_0$，$B = P_n$，将这个分割称为τ。定义τ的步长

$$d = \max_i |P_{i-1}P_i|$$

在弧$P_{i-1}P_i$上任意选取一点P_i^*，对应有函数值$f(P_i^*)$。若极限

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)|P_{i-1}P_i|$$

存在，我们称极限值I为函数$f(x,y,z)$在曲线L上的**第一型曲线积分**，记作

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l \quad or \quad \int_A^B f(x,y,z)\mathrm{d}l$$

7.1.2 第一型曲线积分的性质

如果L分段光滑，f连续，则积分存在。

曲线的长度可以表示为

$$\int_A^B 1\mathrm{d}l$$

对于二维曲线$L \subset \mathbb{R}^2$，依然可以定义曲线积分

$$\int\limits_L f(x,y)\mathrm{d}l$$

它表示曲线L上位于$z=0$和$z=f(x,y)$之间的柱面的面积。

对于被积函数，有界性、线性、保号保序性等依然存在。这里只介绍关于路径的性质：无向性。

$$\int_A^B f(x,y,z)\mathrm{d}l = \int_B^A f(x,y,z)\mathrm{d}l$$

7.1.3 第一型曲线积分的计算

如果曲线L是按照参数方程的形式定义的

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{cases}$$

则

$$\mathrm{d}l = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

因此我们有

$$\int\limits_L f(x,y,z)\mathrm{d}l = \int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

7.2 第一型曲面积分

7.2.1 第一型曲面积分的定义

我们定义空间曲面$S \subset \mathbb{R}^3$，并定义上面的映射$f: S \to \mathbb{R}$。现在我们可以对将曲面分为更小的曲面S_1，S_2，…，S_n。在每一个小曲面上取点$X_i \in S_i$，则每个点对应函数值$f(X_i)$。我们定义这个分割的直径

$$\mathbb{D} = \max_{1 \le i \le n} d(S_i)$$

我们在前面定义了直径的概念：

$$d(S) = \sup_{i \ne j, X_i, X_j \in S} ||X_i - X_j||$$

如果极限

$$I=\lim_{\mathbb{D}\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(X_i)|S_i|$$

存在，那么我们将I称为函数$f(x,y,z)$在曲面S上的**第一型曲面积分**，记作

$$I=\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma$$

7.2.2 第一型曲面积分的性质

如果S分片光滑，f连续，则积分存在。

曲面S的面积可以表示为

$$\iint_S 1\mathrm{d}\sigma$$

对于二维空间由曲线围成的平面，仍然可以定义第一型曲面积分，并且

$$\iint_S f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_S f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们已经知道，这个积分表示平面S上位于$z=0$和$z=f(x,y)$之间的曲顶柱体的体积。

7.2.3 第一型曲面积分的计算

假设曲面S是用参数方程的形式定义的

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\qquad (u,v)\in\Omega$$

我们定义

$$\boldsymbol{T}_u=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)^T$$

$$\boldsymbol{T}_v=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)^T$$

$$E=\boldsymbol{T}_u\cdot\boldsymbol{T}_u$$

$$G=\boldsymbol{T}_v\cdot\boldsymbol{T}_v$$

$$F=\boldsymbol{T}_u\cdot\boldsymbol{T}_v$$

则面积微元可以表示为

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

那么

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

特别的，如果曲面直接用$z=f(x,y)$的形式表示，，且$(x,y)\in\Omega$则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7.3 第二型曲线积分

7.3.1 第二型曲线积分的定义

我们定义空间曲线$L\subset\mathbb{R}^3$，起点为A，终点为B。定义向量值函数$\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,F_3)^T$，$\boldsymbol{F}:L\to\mathbb{R}^3$。现在对曲线$L$进行分割，得到弧线$P_0P_1$，$P_1P_2$，...，$P_{n-1}P_n$。在每一个弧线上取点$\boldsymbol{X}_i^*$，得到函数值$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_i^*)$。

计算弧线起点终点构成的向量与函数值的内积

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_i^*) = F_1(\boldsymbol{X}_i^*)(x_i-x_{i-1})+F_2(\boldsymbol{X}_i^*)(y_i-y_{i-1})+F_3(\boldsymbol{X}_i^*)(z_i-z_{i-1})$$

定义分割的步长

$$d=\max_i|P_{i-1}P_i|$$

如果极限

$$I=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_i^*)$$

存在，则将极限值称为函数F沿路径L从A到B的**第二型曲线积分**，若定义$\boldsymbol{l}=(x,y,z)$，则积分可以记作

$$I=\int_A^B\boldsymbol{F}(\boldsymbol{l})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

。

如果路径L是闭合的，则其起点和终点可以任意选取，且将其逆时针环绕一周的方向定义为**正方向**。此时的积分可以记作

$$\oint_{L^+}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{l})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

7.3.2 第二型曲线积分的性质

关于被积函数的性质，这里不再赘述。下面是几条关于积分路径的性质。

积分路径的有向性：

$$\int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_B^A \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

积分路径的可加性：

$$\int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_A^C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_C^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

环形积分路径可加性：

$$\oint\limits_{L^+} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint\limits_{L_1^+} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint\limits_{L_2^+} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

7.3.3 第二型曲线积分的计算

由于$F = (F_1, F_2, F_3)$，$\boldsymbol{l} = (x, y, z)$，可以对积分进行展开：

$$\int\limits_L \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int\limits_L (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

所以

$$\int\limits_L \boldsymbol{F}(\boldsymbol{l}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int\limits_L F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z$$

第二型曲线积分也经常表示成上面的形式。

如果曲线是按照参数方程的形式定义的

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad\qquad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{cases}$$

那么积分就可以表示为

$$\int_\alpha^\beta F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t)\mathrm{d}t + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t)\mathrm{d}t + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

7.3.4 第一型曲线积分与第二型曲线积分的关系

对于空间曲线$\boldsymbol{l}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，在某一点处的单位切向量为

$$\boldsymbol{\tau}^0(t)=\frac{\boldsymbol{\tau}(t)}{||\boldsymbol{\tau}(t)||}=(\cos\alpha(t),\cos\beta(t),\cos\gamma(t))$$

$$\boldsymbol{\tau}(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$$

$$||\boldsymbol{\tau}(t)||=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

因此

$$\mathrm{d}x(t)=x'(t)\mathrm{d}t=\cos\alpha(t)\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}y(t)=y'(t)\mathrm{d}t=\cos\beta(t)\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}z(t)=z'(t)\mathrm{d}t=\cos\gamma(t)\mathrm{d}l$$

也就是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{\tau}^0\mathrm{d}l$$

所以

$$\int_A^B F(\boldsymbol{l})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_A^B F(\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\tau}^0\mathrm{d}l$$

7.4 第二型曲面积分

7.4.1 第二型曲面积分的定义

设$S\subset\mathbb{R}$是光滑连通的曲面，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，曲面的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v) & \qquad (u,v)\in D\\ z=z(u,v)\end{cases}$$

那么就可以得到两个法向量

$$\boldsymbol{n}_+=+\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v$$

$$\boldsymbol{n}_-=-\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v$$

设$\boldsymbol{P}_0\in S$，则过这一点有法向量$\boldsymbol{n}$，如果在过$\boldsymbol{P}_0$的任意曲线上，$\boldsymbol{n}$是连续的，则称曲面S是**可定向的**，否则是**不可定向的**。例如莫比乌斯环就是不可定向的。对于连通光滑曲面，其可定向的充要条件是法向量永不为零。

在定义了可定向后，就可以定义第二型曲面积分。假设开集$\Omega \in \mathbb{R}^3$，$S \subset \Omega$，选取S的正方向S^+。上面定义有向量值函数$\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$。将$S$分为若干小曲面$S_1$，$\cdots$，$S_n$，并取点$\boldsymbol{X}_i$，定义有向面积

$$\boldsymbol{S}_i = |S_i| \boldsymbol{n}^0(\boldsymbol{X}_i)$$

进一步可以定义Riemann和

$$\sum_{i=1}^{n} F(\boldsymbol{X}_i) \cdot \boldsymbol{S}_i$$

定义步长

$$D = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d(S_i)$$

如果极限

$$I = \sum_{i=1}^{n} F(\boldsymbol{X}_i) \cdot \boldsymbol{S}_i$$

存在，则称I为F在S上的**第二型曲面积分**，记为

$$\iint_{S^+} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

如果S是封闭曲面，往往取从内向外为正方向，并把积分记作

$$\oiint_{S^+} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

7.4.2 第二型曲面积分的性质

如果S分片光滑，F分段连续，则积分存在。同样，下面是关于积分区域的性质。

有向性 我们有

$$\iint_{S^+} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S^-} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

可加性 如果S由S_1，S_2组成，后者由S的定向诱导，则

$$\iint_{S^+} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_1^+} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{S_2^+} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

7.4.3 第一型曲面积分和第二型曲面积分的联系

从前文中，我们可以看到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}^0 \mathrm{d}S$$

由此可以得到两类曲面积分的联系

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}^0)\mathrm{d}S$$

我们记

$$\boldsymbol{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

则根据两类积分的关系，$\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$，我们有

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

进一步，我们记

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \cos\alpha \mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \cos\beta \mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \cos\gamma \mathrm{d}S$$

那么积分可以表示为

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

7.4.4 第二型曲面积分的计算

我们已经知道其法向量的求法

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$$

$$||\boldsymbol{n}|| = \sqrt{EG - F^2}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}^0 \mathrm{d}S = \boldsymbol{n}^0 \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \boldsymbol{n}^0 ||\boldsymbol{n}||\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \boldsymbol{n}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

上面的式子成立的条件是法向量与曲面的方向一致。如果相反，需要在结果前加上负号。这样我们就有

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pm \iint\limits_{S} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}u)\mathrm{d}v$$

进一步展开，我们有

$$\pm\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=\pm\left[P(u,v)\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+Q(u,v)\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+R(u,v)\frac{D(z,y)}{D(u,v)}\right]$$

也可以写成行列式的形式

$$\pm\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=\pm\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$

综上所述，我们有

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint\limits_{D} P(u,v)\left(\pm\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\iint\limits_{S^+} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint\limits_{D} Q(u,v)\left(\pm\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} R(u,v)\left(\pm\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中正负号的判据有下面两点：（1）如果法向量与曲面定向同向，取正号，相反则取负号；（2）Jacobi行列式一项的符号应该与法向量相应分量（方向角余弦）的符号相同。

7.5 Green公式 Gauss公式 Stokes公式

7.5.1 Green公式

我们定义$\mathbb{R}^2$中的**单连通集合**为：对于$D\subset\mathbb{R}^2$，如果D中任意封闭曲线包围的区域仍然在D中，称D是单连通的；否则是复连通的。

假设Ω是单连通的有界闭区域，边界$\partial\Omega$分段光滑，设$\boldsymbol{n}^0$是边界的单位外法向量。定义上面的向量值函数

$$\boldsymbol{F}=(F_1,F_2)\in C^{(1)}(\Omega;\mathbb{R}^2)$$

那么

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^0)\mathrm{d}l=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

假设在一点P处的切向量为$\boldsymbol{\tau}^0=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则外法向量为$n^0=(\sin\alpha,-\cos\alpha)$，我们有$\cos\alpha\mathrm{d}l=\mathrm{d}x$，$\sin\alpha\mathrm{d}l=\mathrm{d}y$，那么我们可以得到

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} F_1\mathrm{d}y-F_2\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们对函数名称进行代换，可以得到另一种形式

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} F_1\mathrm{d}x+F_2\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将上面两种形式总结一下，我们可以得到下面的两个公式。这个公式可以拓宽到复连通区域，此时对于正方向的定义是：沿着正方向前进，区域一直在左手边。

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7.5.2 Gauss公式

设Ω是$\mathbb{R}^3$中的有界闭区域，其边界$\partial\Omega$分片光滑可定向，并记外侧为正向，设

$$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)\in C^{(1)}(\Omega;\mathbb{R}^3)$$

那么

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega^+}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Gauss公式与Green公式是很相似的，可以看成是Green公式的三维情形。

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^0)\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

7.5.3 Stokes公式

假设Ω是非空开集，其中S是分片光滑曲面，边界∂S是分段光滑闭曲线，S^+与∂S^+满足右手螺旋法则，设向量值函数$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)\in C^{(1)}$，则

$$\oint\limits_{\partial S^+}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint\limits_{S^+}\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

其中

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

7.6 场论初步

7.6.1 梯度、散度与旋度

在研究场时，经常用到nabla算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

首先考虑标量场，设$\boldsymbol{p} = (x, y, z)$，定义在$\Omega \in \mathbb{R}^3$上的标量场$F = F(\boldsymbol{p})$实际上就是一个多元函数。对于标量场，我们经常用梯度来研究，并定义**梯度**

$$\mathbf{grad}F = \nabla F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F)$$

其次考虑向量场，定义在Ω上的向量场$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) = (P, Q, R)$实际就是一个向量值函数。我们定义其**散度**为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R$$

同时定义其**旋度**为

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_z P)$$

借助这些符号，Gauss定理和Stokes定理可以表示为

$$\oiint\limits_{\partial S^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{S} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\oint\limits_{\partial S^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint\limits_{S^+} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

7.6.2 保守场

保守场是场论中一种重要的场，保守场与一种具有特定性质的函数相联系。

首先考虑二维情况，对于二维空间的单连通开区域，上面定义有函数$\boldsymbol{F}$，下面四种描述是等价的。

(1)对于区域内任意一点，都有

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

(2)对于区域内任意两点A，B，下面的第二型曲线积分只与两点的坐标有关，而与具体的路径无关，也就是

$$\int\limits_{\forall L}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\equiv C$$

(3)对于区域内任意一个闭合路径，都有

$$\oint\limits_{L^+}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\equiv 0$$

(4)存在二元函数U，满足

$$\mathrm{d}U=F_1\mathrm{d}x+F_2\mathrm{d}y$$

也就是

$$\frac{\partial U}{\partial x}=F_1$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=F_2$$

满足上面的向量值函数，其第二型曲线积分与积分路径无关，而$U(\pm C)$称为微分表达式的原函数，此时从A到B的积分有下面的记法，并且满足

$$\int_A^B F\cdot\mathrm{d}L=U\Big|_A^B$$

现在将情形推广到三维，此时我们有类似的四个等价表述，其中$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$

(1)对于区域内任意一点，都有

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$$

(2)对于区域内任意两点A，B，下面的第二型曲线积分只与两点的坐标有关，而与具体的路径无关，也就是

$$\int\limits_{\forall L} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \equiv C$$

(3)对于区域内任意一个闭合路径，都有

$$\oint\limits_{L^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \equiv 0$$

(4)存在标量场ϕ，满足

$$\nabla \phi = \boldsymbol{F}$$

也就是$\partial_x \phi = P$，$\partial_y \phi = Q$，$\partial_y \phi = R$。

满足上述四个条件的向量场称为**保守场**、**无旋场**或者**有势场**，而ϕ称为这个场的**势函数**。固定一点A，则$\boldsymbol{p}$点的势函数可以用下面的方法得到

$$\phi(\boldsymbol{p}) = \int_A^p F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

这就是有势场和势函数的互相转换关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{F} = \nabla \phi \\ \phi = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \end{cases}$$