Chapter 1

静电场

1.1 电荷 Coulomb定律 电场 叠加原理

1.1.1 电荷

自然界只有正、负两种电荷，电荷物理量用符号Q或者q表示，单位是库仑（C）。Milikan实验表明，电荷量是一个最小电荷量的整数倍，这个最小电荷量称为元电荷，取值为

$$e = 1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$$

类比密度的概念，可以定义电荷密度（体密度、面密度、线密度）

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

1.1.2 Coulomb定律

Coulomb定律用于描述**真空中**两个**静止的点电荷**之间的相互作用力。设两个点电荷以及其带电量为q_1，q_2，后者相对于前者的位矢为$\boldsymbol{r}_{21}$，q_1对q_2的作用力为$\boldsymbol{F}_{21}$，则

$$\boldsymbol{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{21}$$

其中$k = 9 \times 10^9\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$，$\varepsilon_0$被称为**真空介电常数**，取值为$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2$。

1.1.3 电场

电荷之间的作用力被理解为：一个电荷激发出**电场**，处在电场中的电荷会受到相应的电场力，电场也可以对其做功。但是电荷不会受到自身激发的电场的作用。电场具有动量和能量，并且可以脱离电荷、电流而存在。若点电荷q在某处受到电场力为$\boldsymbol{F}$，则该处电场的定义为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q}$$

由此可得点电荷在$\boldsymbol{r}$处激发的电场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{kq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

1.1.4 叠加定理

根据两个点电荷之间的作用力规律，可以推出多个点电荷、连续带电体的静电力规律：只需将各个电荷产生的作用力或者电场按照矢量运算规则相加即可，这就是叠加定理。

离散电荷的电场力与电场：

$$\boldsymbol{F}=\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0q_i}{r_i^2}\hat{\boldsymbol{r}}_i$$

$$\boldsymbol{E}=\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{\boldsymbol{r}}_i$$

连续带电体的电场力与电场（以体密度为例）：

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V\frac{\rho\mathrm{d}V}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

1.2 电通量 Gauss定理

1.2.1 电通量

电场线可以描述电场的大小与方向，电场线越稠密的地方，电场强度越大。静电场的电场线有头有尾，不相交，不闭合。可以用通过一曲面的电场线的“条数”来描述电场强度，这就是**电通量**。对于一面积为S的平面，电场线方向与之正交，强度为$\boldsymbol{E}$，则电通量

$$\Phi=ES$$

对于一般情况，对于曲面Σ，取面积微元$\mathrm{d}S$，其法向量约定为$\hat{\boldsymbol{n}}$，则可以定义面积矢量

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}}$$

进而就可以定义电通量微分

$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

则通过曲面Σ的电通量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}\Phi = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1.2.2 Gauss定理

对于闭合曲面Ω，相应也有电通量的定义

$$\Phi = \oiint_{\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

其中面元矢量的方向定义为从内到外。对此有Gauss定理：

$$\oiint_{\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{i,in} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho_{in} \mathrm{d}V$$

注意，这里的电荷以及电荷密度特指曲面包围内部的电荷，外部电荷对于闭合曲面的电通量没有影响。

1.3 典型带电系统的电场分布

在前面两节的基础上，可以利用Coulomb定律和叠加定理求得带电体的电场分布。对于带电分布有明显对称性的，可以考虑采用Gauss定理。

1.3.1 电偶极子

电量大小相同、电性相反的两个点电荷构成一对电偶极子，定义电偶极矩$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$，其中$\boldsymbol{l}$的方向是从正电荷指向负电荷。

在电偶极子的中垂线上，距离中点位矢为$\boldsymbol{r}$时，若满足$r >> l$，则电场强度

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

在电偶极子连线的延长线上，距离终点位矢为$\boldsymbol{r}$时，若满足$r >> l$，则电场强度

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

在原子物理中，常用的电偶极矩单位是Debay，简记为D，与SI单位C·m的换算关系是

$$1\mathrm{D} = 3.33564 \times 10^{-30}\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}$$

1.3.2 带电细棒

有一根长为L的带电细棒，电荷密度λ，带电量为q。一位置与此细棒的垂直距离为x，沿着细棒建立数轴y，此点与两端连线的倾斜角记为θ_1，θ_2。则垂直于棒的电场分布为

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

特别地，当垂足位于棒的中点时，我们有

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2\sqrt{1+\frac{L^2}{4x^2}}}$$

$$E_y = 0$$

若$x << L$，则可以视为**无限长细棒**，此时电场强度

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

若$x >> L$，则可以视为点电荷，电场强度

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

1.3.3 带电圆环

有一带电圆环，半径为R，带电量为q，则其轴线上距离圆环中心x处的场强为

$$E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

当$x = 0$时，场强$E = 0$；当$x >> R$时，圆环可以视作点电荷。

1.3.4　带电圆盘

有一带电圆盘，半径为R，面电荷密度为σ，则其轴线上距离圆盘中心x处的场强为

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$$

当$x << R$时，圆盘可以视作**无限大带电平面**，此时场强

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

当$x >> R$时，圆盘可以视作点电荷。

1.3.5　带电球壳

有一内径为R_1，外径为R_2，带电量为q，电荷密度为ρ的球壳，其距离球心距离为r处的场强为：

当$0 < r < R_1$时：

$$E(r) = 0$$

当$R_1 < r < R_2$时：

$$E(r) = \frac{r^3 - R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\rho$$

当$r > R_2$时：

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

当$R_1 \to R_2$时，就是带电薄球壳的情形。当$R_1 = 0$时，就是带电球体的情形。

1.4　环路定理　电势

1.4.1　环路定理

对于真空中的点电荷q，以其为原点建系，对于一路径L，起点为$\boldsymbol{r}_1$，终点为$\boldsymbol{r}_2$。考虑路径积分

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} E \cdot \mathrm{d}l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

也就是结果只与起点和终点有关。根据叠加定理，我们得到静电场环路定理

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

即静电场的路径积分只与起点和终点的位置有关，静电力是一种保守力。

1.4.2 电势能与电势

与保守力相对应，电场做功与电势能相联系。

根据势能的特点，电场力做正功，电势能下降；电场力做负功，电势能下降。电场力从一处到另一处做的功，等于前者到后者的电势能差。

$$A_{1\to 2} = \int_{(1)}^{(2)} q\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -(E_2 - E_1) = E_1 - E_2 = E_{12}$$

电势能差除以电量就是电势差。

$$E_{12} = q\phi_{12} = q(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

场力从某处到势能零点处做的功就是这一点的势能。也就是

$$A_{1\to 0} = \int_{(1)}^{(0)} q\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 = E_1 - E_0 = E_1$$

$$\int_{(1)}^{(0)} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 = \phi_1 - \phi_0 = \phi_1$$

电势是标量，可以根据标量运算法则进行叠加。

1.4.3 电势与电场强度的相互转换

从电场到电势的转换为

$$\int_{(1)}^{(2)} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \phi_1 - \phi_2 = -\Delta\phi$$

从电势到电场的转换为

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{l}} = -\nabla\phi$$

电场的方向就是电势下降最快的方向。

电场线用来描述电场，等势面则描述电势，二者是正交的。等势面密的地方，其电场强度越大；沿着电场线的方向，电势逐渐下降。

1.5 典型带电体的电势与电势能

1.5.1 点电荷

点电荷的电势分布为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

1.5.2 电偶极子

电偶极矩为$\boldsymbol{p}$的电偶极子在匀强电场$\boldsymbol{E}$中的能量为

$$W = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

当l与E同向时，电势能最小，电偶极子最稳定。

1.5.3 无限长带电细棒

对于电荷密度为λ的无限长带电细棒而言，选取距离细棒距离为r_0的地方为势能零点，则在距离为r处，电势

$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

1.5.4 带电球壳

对于带电量为q，半径为R的球壳，其电势分布为

$$\phi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & 0 \leqslant r < R \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

1.5.5 带电圆环

电荷量为q，半径为R的圆环，其轴线x处的电势为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

1.6 系统电能　电场能量

1.6.1 带电系统的电能

带电体的电能可以类比核能的概念：一些同号电荷从无穷远处聚集在一处，形成带电体，这个过程需要克服电场力做功，电势能增加。因为无穷远处电势能视作0，因此这增加的电势能就可以视作带电体的电能，也叫作自能。对于两个点电荷组成的系统，其自能为

$$W = \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2)$$

推广到一般带电体，则有

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\phi_i = \frac{1}{2}\int \phi \mathrm{d}q$$

1.6.2 电场能量

电能等于电势与电量之积，看来是电荷携带能量。但是电场可以脱离电荷而存在，这意味着电场自身也含有能量。电场能量密度定义为

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

因此在电场存在的空间内，电场能量为

$$W = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$$

Chapter 2

静电场中的导体

2.1 静电平衡及其唯一性

2.1.1 静电平衡的建立

将导体放在电场$\boldsymbol{E}_{out}$中，在这个电场的作用下，导体中的带电粒子会运动而改变分布，这些粒子也会构成一个电场$\boldsymbol{E}_{in}$，在导体内部，两个电场是相互抵消的。最后当导体内没有带电粒子的运动，即导体内部没有电场，或者导体是一个等势体，这时导体就达到了**静电平衡**。静电平衡的建立是一个迅速的过程。接着有

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_{out} + \boldsymbol{E}_{in}$$

在导体外部，我们有$\boldsymbol{E}' \neq \boldsymbol{E}_{out}$，即外部电场发生了改变；在导体所在区域有$\boldsymbol{E}' = 0$，即内部无电场。

2.1.2 唯一性定理及其应用

在给定的以导体为边界的区域中，若区域内电荷分布确定，且其边界按下列条件之一给定时，则域内的静电场的解必唯一：（1）给定每个导体的电量；（2）给定每个导体的电势；（3）给定一部分导体的电量和另一部分导体的电势。

唯一性定理可以用于设计电场，也可以用于分析静电平衡，例如电像法。比如，对于无限大导体平面，可以考虑镜面对称电荷；对于导体球，可以考虑球面对称电荷。

2.2 平衡导体的电场、电势、电荷分布

2.2.1 电场和电势分布

对于形成的$\boldsymbol{E}'$，在导体内部，电场为0；在导体表面，电场线和导体表面垂直。

而电势分布，整个导体处处电势相等，是一个等势体，导体表面则是等势面。这也说明不存在从导体的一处指向另一处的电场线。

2.2.2 电荷分布

静电平衡的导体，其电荷分布满足下面几条规律：

（1）导体内部无净电荷，所有电荷均分布在导体的表面。因为导体内部没有电场，因此有

$$\oiint_{\Omega} \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{in}$$

而$\boldsymbol{E}' = 0$，因此可以得到$q_{in} = 0$。

对于含有空腔的导体壳而言，作封闭曲面包围空腔，设空腔内部面电荷密度为σ_{in}，则有

$$\iint_{\Sigma} \sigma \mathrm{d}S = 0$$

如果面电荷密度不恒为0，那么将存在从一处指向另一处的电场线，导体不是等势体，与静电平衡条件矛盾。因此我们有

$$\sigma_{in} \equiv 0$$

（2）导体表面的面电荷密度与电场强度成正比。在表面处作一个药片形状的封闭曲面，则有

$$\oiint_{\Omega} \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E'\Delta S$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} q_{in} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

所以

$$E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

（3）导体表面处曲率越大（越尖锐）的地方，面电荷密度越大。其一个重要的应用就是尖端放电。

2.3 静电平衡的应用

2.3.1 静电场的分析

有导体存在时，静电场的分析和计算主要依据下面的规律：

（1）静电平衡条件，对电场有$E'_{in}=0$，对电势有$\phi\equiv C$，对电荷有：导体内部曲面包络内总电荷为0，导体表面电荷与电场强度成正比。

（2）电荷守恒定律，如果一个导体原先有电荷q_0，在静电场中，导体内部的电荷分布发生改变，但是仍有

$$\sum_i q_i = q_0$$

（3）Gauss定理与环路定理。

2.3.2 静电屏蔽

静电屏蔽有下面两种。

第一种，将封闭导体壳置于电场中，则壳内空腔无电场存在，外部电场不影响内部，从而达到静电屏蔽的效果。

第二种，将带电体置于封闭导体壳中，这时导体壳内表面会产生和带电体电量相同的电荷，同时会有一部分电荷分布在导体壳外表面。如果将外表面接地，则空间外部不会有电场存在，内部电场不影响外部，从而达到静电屏蔽的效果。

Chapter 3

静电场中的介质

3.1 介质的极化

3.1.1 介质的极化过程与描述

将介质放在电场中，构成介质的分子会发生变化。对于非极性分子，正负电荷中心会被电场拉开一段距离，形成电偶极子，这个过程称为**位移极化**；对于极性分子，其位移极化比较微弱，受到力矩的作用，$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$，主要表现为固有电偶极矩转向电场的方向，称为**转向极化**。这两种作用被统称为介质的极化。

我们用**电极化强度**来描述介质的极化程度。取定体积ΔV，对其大小的要求是：看上去“足够小”，但相对于介质分子又“足够大”，以至于可以容纳足够多的介质分子，其中有若干个极化形成的电偶极矩，则定义电极化强度为

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}$$

一般情况，若分子密度为n，电偶极子为(q, l)，则

$$\boldsymbol{P} = nq\boldsymbol{l}$$

当电场不是很强，介质是各向同性时，电极化强度与电场强度成正比，记为

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E}$$

我们记$\chi = \varepsilon_r - 1$，其中χ称为**电极化率**，则上面的式子还可以记作

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$$

其中，ε_r是介质的属性，称为介质的**相对介电常数**，实际上是介质的介电常数与真空介电常数的比值

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

3.1.2 介质极化对电荷与电场的影响

对电荷的影响 介质极化会产生**极化电荷**。在介质中作一个封闭曲面，考虑面内的极化电荷。完全位于面内部和外部的电偶极子不起作用，只有恰好穿过曲面的电偶极子才会对电荷有贡献。在这个曲面的一个面元$\mathrm{d}S$处，作一个厚度为l的盒子，则其体积

$$\Delta V = l\mathrm{d}S\cos\theta$$

若其中含有的分子数目为n，则电荷量为$qnl\mathrm{d}S\cos\theta$，那么

$$|\mathrm{d}q'| = |\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}|$$

如果正电荷留在外面，相当于给面内贡献了负电荷；如果负电荷留在了外面，相当于给面内贡献了正电荷，那么

$$\mathrm{d}q' = -\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

积分可得

$$q' = -\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

可以求得极化电荷密度

$$\rho' = -\frac{1}{\Delta V}\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

下面分别将这个结论应用于介质表面和介质内部。在各向同性的介质内部，极化电荷密度为0。在介质表面，有

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}S} = \frac{\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}S} = \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

如果是两种介质的界面，设为介质1、2，对介质2而言，曲面法向量指向介质1，有

$$\sigma' = P_{2n} - P_{1n}$$

其中，真空和导体的电极化强度为0。

对电场的影响 将介质放在外电场$\boldsymbol{E}_0$中，就会产生极化电荷，极化电荷激发出电场$\boldsymbol{E}'$，与原来的电场合在一起，会削弱电场强度（与导体不同，导体会使得电场直接为0），并且有

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{E}_0}{\varepsilon_r}$$

3.2 电位移矢量

在介质存在的情况下，原来的电场引起介质的极化，介质的极化会影响原来的电场，原来电场的改变又会改变介质的极化……为了求解这类问题，我们引入**电位移矢量**。

考虑有介质的高斯定律，封闭曲面中包含介质，极化电荷记为q'，最终的总电场记为$\boldsymbol{E}$，此时有

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_i q_i+\sum_j q'_j\right)$$

$$\sum_j q'_j=-\oiint \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

整理可得

$$\oiint(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$$

因此，我们定义电位移矢量

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$$

并得到了它的Gauss定理

$$\oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$$

进一步我们可以导出

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

这样，我们就有了求解电场的方法：

（1）依据$\boldsymbol{D}$的高斯定律，根据电场中的电荷（无需考虑极化电荷）求出电位移矢量；

（2）依据$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，求出电场强度。

（3）依据$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$求出电极化强度。

（4）依据$\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$，求出面电荷分布。

3.3 边值关系

当电场线或者电位移矢量线从一个介质到达另一种介质时，会像光一样发生折射。下面则是具体的边值关系。

3.3.1 法向关系

假设电位移矢量线从介质1进入介质2，两种介质的介电常数分别为ε_1，ε_2，作一个面积为ΔS的小扁盒，则有

$$\oiint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = (D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

所以$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$，当$\sigma_0 = 0$的时候，我们得到

$$D_{2n} = D_{1n}$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$$

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

也就是说，从一个介质到达另一个介质时，**电位移矢量的法向分量不变，电场强度的法向分量与介质的介电常数成反比。**

3.3.2 切向关系

在边界处作一个长度为Δl的小方框，则有

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (E_{2t} - E_{1t})\Delta l = 0$$

也就是说

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

也就是说，从一个介质到达另一个介质时，**电场强度的切向分量不变，电位移矢量的切向分量与介质的介电常数成正比。**

3.3.3 折射规律

经过上面两个小节的分析，我们就可以得到电场强度和电位移矢量的折射规律。

对于电场强度，假设其入射角为ϵ_1，出射角为ϵ_2，那么

$$\tan \epsilon_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}$$

$$\tan\epsilon_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\frac{\tan\epsilon_1}{\tan\epsilon_2} = \frac{E_{1t}}{E_{2t}}\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

对于电位移矢量，假设其入射角为δ_1，出射角为δ_2，那么

$$\tan\delta_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}}$$

$$\tan\delta_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}}$$

$$\frac{\tan\delta_1}{\tan\delta_2} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}}\frac{D_{2n}}{D_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

因此我们可以看出，无论是电场强度还是电位移矢量，其入射角和出射角都满足

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

而具体的数值则没有明确的规律，可以自行推导。

3.4 电容

3.4.1 电容器的构成

在两个电极之间夹上电介质，就形成了电容器。电容器形式上为开路，两段有电压，可以储存电荷。并定义其电容值为

$$C = \frac{Q}{U}$$

可以先假设存储的电荷为Q，进一步可以推算出电位移矢量$\boldsymbol{D}$和电场强度$\boldsymbol{E}$，从而计算得电压U，这样就可以算出电容C。下面是一些电容器的电容值：

平行极板电容：设极板面积为S，板间距为d，介质的介电常数为ε，那么

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

球形电容：设两个球内外半径R_1，R_2，那么

$$C = \frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

圆柱形电容：设两个圆柱内外半径R_1，R_2，长度为L，那么

$$C = 2\pi\varepsilon L\left(\ln\frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}$$

3.4.2 电容器的能量

当电容器充入的电量为Q时，其能量为

$$W_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

这个能量是储存在电场中的，我们可以得到

$$W_C = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V = w_e V$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED$$

由此可以看出，插入电介质增加了电容器的电场能量密度以及电场能量。

3.5 一些特殊的极化现象

3.5.1 击穿

当电场强度达到一定值的时候，分子的正负电荷中心进一步拉开，形成了自由移动的电荷，电介质的绝缘性被破坏，这种现象称为电介质的**击穿**。

电介质能承受的最大电场强度称为**击穿场强**或者**介电强度**。

3.5.2 铁电体

铁电体是一种特殊的电介质，电极化强度$\boldsymbol{P}$与电场强度$\boldsymbol{E}$是非线性关系，其图像称为电滞回线。铁电体相对介电常数很大，可以制作体积小的大电容器，并且是非线性的电容。

3.5.3 压电效应

铁电体和部分晶体在拉伸或者压缩时也会发生极化现象，称为**压电效应**。压电效应也有逆效应，外加电场时，沿着电场方向长度会发生变化，也就是**电致伸缩**，这种效应是非常微弱的。

压电效应可以将机械振动转化为电振动，逆压电效应可以将电振动转化为机械振动。

Chapter 4

稳恒电流

4.1 电荷、电场与电流

4.1.1 电流与电流密度

电荷运动形成电流。在导线连接的线路中，我们使用**电流（强度）**的概念来描述电流，对于导线中一个截面，单位时间内通过的电荷就是电流强度

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

假设导线截面积为S，载流子密度为n，单个载流子电荷量为q，载流子运动的平均速度为$\bar{v}$，则

$$I = nqS\bar{v}$$

对于大块导体中的电流分布，我们用**电流密度**来描述。单位时间流过单位垂直面积的电荷量就是电流密度，可以用**电流线**描述电流分布。

$$\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_\perp}\hat{n}_\perp$$

在前面的设定中，我们可以推导得到

$$\boldsymbol{j} = nq\bar{\boldsymbol{v}}$$

电流和电流密度可以互相导出

$$\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_\perp}\hat{n}_\perp$$

$$I = \iint \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

对于闭合曲面，我们有

$$\oiint \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$$

这也被称为电流连续性方程。

4.1.2 稳恒电流与稳恒电场

我们将电流密度不随时间变化的电流称为**稳恒电流**。稳恒电流满足

$$\oiint \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$$

稳恒电流的电流线是闭合的，满足KCL方程

$$\sum_i I_i=0$$

通有稳恒电流的电路中含有稳恒电场，由不随时间变化的电荷激发产生，这些电荷分布在导体的表面或界面，但是导体中是有电场以及电荷运动的。维持稳恒电场需要能量。稳恒电场也满足环路定理，因而满足KVL方程

$$\sum_i v_i=0$$

4.2 闭合电路

4.2.1 电阻

对于电阻，我们有**欧姆定律**

$$U=IR$$

其中

$$R=\rho\frac{L}{S}$$

$$G=\frac{1}{R}=\sigma\frac{S}{L}$$

在微观情形下，我们可以得到欧姆定律的微分形式

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$$

$$\sigma = \frac{ne\tau}{m}$$

同样我们也有焦耳定律

$$Q = I^2 R$$

其微分形式为

$$p = \sigma E^2$$

4.2.2 电动势

要维持稳恒电场，维持电势差，需要非静电力将正电荷从负极移到负极。非静电力对单位电荷做的功就是电动势

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}$$

如果从非静电力导出非静电场，那么电动势也可以定义为

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

4.2.3 欧姆定律

若电流I通过电阻为R的导体，则导体两端的电压为

$$U = IR$$

对于均匀柱状导体，其电阻满足

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

其对偶形式为

$$I = UG$$

$$G = \sigma \frac{S}{l}$$

σ被称为**电导率**，欧姆定律的微分形式为

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

Chapter 5

磁场　磁力

5.1　毕奥–萨伐尔定律　磁场的度量

5.1.1　毕奥–萨伐尔定律

电荷激发电场，电流激发磁场。假设有一电流元$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，则在距其位矢为$\boldsymbol{r}$处，产生的磁场的磁感应强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

其中μ_0被称为**真空磁导率**，取值为$4\pi \times 10^{-7}\mathrm{T \cdot m/A}$。电流元不会在自身方向上激发电场。

磁场同样满足叠加定律

$$\boldsymbol{B} = \sum_i \boldsymbol{B}_i = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B}$$

5.1.2　磁场的度量

磁感应强度的单位是Tesla，简记为T。此外还常用单位Gauss，$1\mathrm{Tesla} = 10^4\mathrm{Gauss}$。下面是三种度量磁场强弱的方式。

从运动的电荷受力度量　运动的电荷会受到洛伦兹力的作用，我们有

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

从电流元的受力度量　通电导线在磁场中受到安培力的作用，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

从磁矩受到的力矩度量 对于平面环形电流圈，设电流为I，面积矢量S，则定义其磁矩

$$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$$

其受到的磁场力矩为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

5.2 Gauss定理 环路定理

5.2.1 Gauss定理

类比于电场线，我们可以用磁感线来描述磁场。磁感线不相交，无头无尾，是闭合的环线，与电流线相互套连，符合右手定则（通电导线、载流圈、载流螺线圈等）。可以定义磁通量

$$\mathrm{d}\Phi=\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\Phi=\iint_\Omega\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

对于封闭曲面的磁通量，有Gauss定律

$$\oiint_\Omega\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

这也说明磁场是无散场

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

磁荷也是电磁学的一种观点，但是现在没有充足的证据表明磁荷的存在。

$$\iint_\Omega\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$$

5.2.2 环路定理

在恒定电流的磁场中，磁感应强度$\boldsymbol{B}$沿任何闭合路径L的积分等于路径L所环绕的电流强度的代数和的μ_0倍。这就是**安培环路定理**：

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_i I_i$$

其中，I指与闭合路径套连的电流，满足右手螺旋关系取正值，满足左手螺旋关系取负值，但是B的产生与空间中的电流都有关。同时这个定理说明磁场是非保守场，是有旋场。

5.3 典型磁场分布

可以利用毕奥–萨伐尔定律、安培环路定理求得空间的磁场分布。

5.3.1 通电直导线

按照电场中的角度设定，如果导线中通入电流I，则距离导线位置为d处，磁场大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

特别地，对于无线长导线而言

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

5.3.2 通电圆环

一个半径为R的圆环通有电流I，其轴线x处，与轴垂直的分量记为$B_\perp$，轴上的分量记为$B_{//}$，则有

$$B_\perp = 0$$

$$B_{//} = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi r^3}$$

在环心处，磁场强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

单个通电圆环的电场分布与一对电偶极子的电场分布是类似的，因此这个圆环又叫做磁偶极子，定义磁偶极矩

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S}$$

5.3.3 通电螺线管

现在有长为L，半径为R，缠绕n匝线圈，所通入电流为I的直螺线管，在轴线上一点处建系，设两端倾斜角分别为β_1，β_2，则轴线上这一点的磁场强度为

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

在螺线管中部，磁场近似为匀强磁场。当螺线管无限长的时候，内部磁场（不仅仅是轴线）

$$B = \mu_0 nI$$

不仅仅是螺线管，任意形状的线圈都有这样的特点，因而螺线管常用于形成匀强磁场。此外，亥姆霍兹线圈也常常用于产生匀强磁场。

5.3.4 匀速运动的点电荷的磁场

对于以速度$\boldsymbol{v}$运动的电荷，其在位矢$\boldsymbol{r}$处产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

5.4 磁力

下面介绍几种磁场的作用力。

5.4.1 洛伦兹力

电荷q以速度$\boldsymbol{v}$在磁场$\boldsymbol{B}$内运动时，受到的磁场作用力为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

假设v与B夹角为θ，则有

$$v_\perp=v\sin\theta$$

$$v_{//}=v\cos\theta$$

$$F=qv_\perp B=qvB\sin\theta$$

当速度与磁场方向相同时，粒子做匀速直线运动。当速度与磁场方向垂直时，粒子做匀速圆周运动，此时有

$$qv_\perp B=m\frac{v_\perp^2}{r}$$

$$r=\frac{mv_\perp}{qB}=\frac{p_\perp}{qB}$$

$$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

如果不是上面两种特殊情况，粒子将螺旋运动，设螺旋半径r，螺距l，则

$$r=\frac{mv\sin\theta}{qB}$$

$$h=Tv_{//}=\frac{2\pi mv\cos\theta}{qB}$$

带电粒子在磁场中的运动有很多应用，例如磁聚焦、磁瓶（磁镜）、磁约束、质谱仪、回旋加速器、磁流体发电等。其中一个重要的应用是**霍尔效应**。

载流子受到的洛伦兹力和电场力相等时，有

$$E_H q = qvB$$

$$E_H = vB$$

设导体的宽度（磁场方向）为b,高度（电场方向）为h，则有

$$I = nqSv = nqbhv$$

设霍尔电压为U_H，则有

$$U_H = E_H h = vBh = \frac{IB}{nqb}$$

定义霍尔系数K_H和霍尔电阻R_H，我们有

$$U_H = K_H \frac{IB}{b}$$

$$K_H = \frac{1}{nq}$$

$$U_H = R_H I$$

$$R_H = \frac{B}{nqb}$$

利用霍尔效应，可以辨别N型半导体和P型半导体，也可以用来测定磁场强度。

5.4.2 安培力

通电导线在磁场中的受力为

$$\boldsymbol{F} = \int_L I \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

如果通电直导线长度为L，电流为I，与磁场垂直，则

$$F = BIL$$

两根无限长平行导线，通入电流I_1，I_2，两根导线的距离为d，则电流同向时，导线相吸；电流反向时，导线相斥，作用力为

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

安培力的应用也有很多，例如电动机、电压表和电流表、电磁炮等。安培力也与单位制有关，SI中电流和电荷单位的规定就是依靠安培力作出的。当两

根电流大小相等、相距1m的导线产生的作用力大小为2×10^{-7}N时，导线中的电流大小定义为1A。

此外，对于真空介电常数ε_0，真空磁导率μ_0之间满足如下关系

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

而光速值一般是常数，我们**规定**μ_0的数值，就可以**计算**出ε_0的值。因此这两个值都不是靠测定获得的，而是人为规定的准确值。

Chapter 6

磁介质

6.1 介质的极化

6.1.1 介质的极化过程与描述

常见的磁介质可以分为**顺磁质**与**抗磁质**。在原子中，其电子具有轨道磁矩和自旋磁矩，原子核也具有磁矩（相比于电子磁矩较小），这些构成了原子的磁矩。而一个分子中所有原子磁矩的和则构成了分子磁矩，可以进一步等效为分子电流。

将介质放在磁场中，顺磁质和抗磁质都会极化。其中，顺磁质的分子磁矩不为0，称为**固有磁矩**。原本散乱的分子磁矩会在磁场的作用下排列整齐，方向与原来的磁场方向相同，因此会增强磁场。抗磁质的分子磁矩为0，但是会产生**感应磁矩**（原子磁矩进动导致），方向与原来的磁场相反，所以会削弱磁场。

我们用**磁化强度**M来描述介质受到极化的程度，其定义为

$$\boldsymbol{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{m}_i}{\Delta V}$$

与磁感应强度的关系是

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B}$$

其中μ_r称为相对磁导率，而$\mu = \mu_0\mu_r$称为介质的**磁导率**。对于顺磁质，$\mu_r >$，对于抗磁质，$\mu_r < 1$。定义磁极化率$\chi = \mu_r - 1$，则上面的式子可以写成

$$\boldsymbol{M} = \chi\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$

6.1.2 介质极化对电流与磁场的影响

对电流的影响 介质极化会产生极化电流，极化电流进一步产生极化磁场，并与原来的磁场叠加。在介质中，考虑矢量d$\boldsymbol{l}$，设分子数密度为n，单个分子极化电流为i'，则与之相较的总分子电流为

$$\mathrm{d}I' = n(\pi r^2 \mathrm{d}l\cos\theta)i'$$

那么

$$\mathrm{d}I' = \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$I' = \oint \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

在磁介质的表面，会产生磁化面电流，并定义面束缚磁化电流密度$\boldsymbol{j}'$，那么

$$j' = \frac{\mathrm{d}I'}{\mathrm{d}l} = \frac{M\mathrm{d}l\cos\theta}{\mathrm{d}l} = M\cos\theta$$

因此

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{M}\times\hat{\boldsymbol{n}}$$

对于均匀磁化的介质而言，其内部极化电流为0。

$$I' = \oint \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{M}\cdot\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

极化磁场与原来的磁场叠加得到新的磁场，与原来磁场的磁感应强度的关系为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}' = \mu_r\boldsymbol{B}_0$$

6.2 磁场强度

对应于电位移矢量，考虑一个环路，其中有传导电流I_i，也有磁介质产生的极化电流I'，那么根据磁场的环路定理，我们有

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\left(\sum_i I_i + \sum_j I'_j\right)$$

$$\sum_j I'_j = \oint \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

整理可得

$$\oint\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_i I_i$$

这样，我们定义**磁场强度$\boldsymbol{H}$**：

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$$

并得到了它的环路定理

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_i I_i$$

这样，在知道传导电流后，就可以求出磁场强度，进一步求出磁感应强度和磁化强度。磁感应强度、磁化强度与磁场强度的关系为

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_r - 1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_r \mu_0} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$

$$\boldsymbol{M} = (\mu_r - 1)\boldsymbol{H} = \chi \boldsymbol{H}$$

6.3 边值关系

假设磁力线或者磁场强度线从介质1进入介质2，两种介质的磁导率为μ_1，μ_2，下面我们考虑其边值关系。

6.3.1 切向关系

考虑磁场强度的环路定理，我们有

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_i I_i$$

这里如果传导电流为0，则有

$$H_{1t} = H_{2t}$$

同时我们有$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$，那么

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

也就是

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

因此，磁场从一个介质到另一个介质时，**磁场强度切向分量不变，磁感应强度切向分量与介质磁导率成正比。**

6.3.2 切向关系

考虑磁感应强度的Gauss定理，我们有

$$\oiint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

我们可以得到

$$B_{1n} = B_{2n}$$

考虑磁感应强度与磁场强度的关系，我们有

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

也就是说，磁场从一个介质到另一个介质时，**磁感应强度法向分量不变，磁场强度法向分量与介质磁导率成反比**。

6.3.3 折射规律

综合上面的讨论，现在考虑磁感应强度线的折射，假设入射角为β_1，出射角为β_2，那么

$$\frac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2} = \frac{B_{1t}}{B_{1n}}\frac{B_{2n}}{B_{2t}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}}\frac{B_{2n}}{B_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

考虑磁场强度线的折射，假设入射角为η_1，出射角为η_2，那么

$$\frac{\tan\eta_1}{\tan\eta_2} = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}\frac{H_{2n}}{H_{2t}} = \frac{H_{1t}}{H_{2t}}\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

也就是说，无论是磁感应强度还是磁场强度，都有

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

如果从空气进入铁磁质，那么我们有$\mu_1 \approx 1$，$\mu_2 \gg 1$，我们可以得到

$$\theta_2 \approx \frac{\pi}{2}$$

这意味着，磁场线在铁磁质中传播时与表面平行，铁磁质可以将磁场线集中在内部。

6.4 磁路

磁路理论类似于电路。假设有一介质圆环，其长度为l，截面积为S，磁导率为μ；其中有一段是另一种介质，其长度为l_0，截面积为S_0，磁导率为μ_0。圆环缠绕N匝线圈，通入电流为I，则根据磁场强度的环路定理，有

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = NI$$

也就是

$$Hl + H_0 l_0 = NI$$

其中H是μ对应的磁场强度值，而H_0则是μ_0对应的磁场强度值。我们还可以得到

$$\frac{B}{\mu}l + \frac{B_0}{\mu_0}l_0 = NI$$

我们将$\Phi = BS$称为磁通量，并**类比于电路理论中的电流**，则这个环路中的磁通都是相同的，那么

$$\frac{\Phi}{S\mu}l + \frac{\Phi}{S_0\mu_0}l_0 = NI$$

整理可得

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{1}{\mu}\frac{l}{S} + \frac{1}{\mu_0}\frac{l_0}{S_0}}$$

我们定义磁动势为

$$\mathcal{E}_m = NI$$

定义磁阻（与电阻很类似）

$$R_m = \frac{1}{\mu}\frac{l}{S}$$

$$R_{m0} = \frac{1}{\mu_0}\frac{l_0}{S_0}$$

最终得到

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m + R_{m0}}$$

这就是磁路中的**闭合电路欧姆定律**，相应于电路理论中

$$I = \frac{\mathcal{E}_e}{R_e + R_{e0}}$$

$$R_e = \rho\frac{l}{S}$$

6.5 一些特殊的极化现象

铁磁体是一种特殊的介质，在磁化时，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{H}$是非线性关系，与铁电体比较相似。关系曲线比较“胖”的材料，称之为“硬磁材料”，一般用来制作永久磁铁；关系曲线比较“瘦”的材料，称之为“软磁材料”，一般用来制作变压器、电磁铁等的铁芯。

铁磁体的这种效应与**磁畴**有关，是铁磁质中已经存在的许多自发的均匀磁化小区域。没有外磁场时，各磁畴的自发磁化方向杂乱，不显磁性。加外磁场时，磁畴发生变化。外磁场较弱时，和外磁场方向相同的磁畴体积扩大；外磁场较强时，每个磁畴的磁矩方向都程度不同地向外磁场方向靠拢，即取向。磁感应强度增加到一定值后，磁畴方向均指同一方向，铁磁质达到饱和。

Chapter 7

电磁感应

7.1 感生电动势与动生电动势

7.1.1 电磁感应定律

感应电流的磁通总是阻止原磁通的变化，这就是**楞次定律**。更精确地，我们可以得到**电磁感应定律**。对于单圈导线

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中，Φ的方向与导线中电流的方向应该成右手螺旋关系。对于多圈导线，有

$$\varepsilon = -\sum_i \frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \Phi_i$$

我们定义**全磁通**或者**磁链**Ψ为

$$\Psi = \sum_i \Phi_i$$

那么

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

对于通电螺线管，如果螺线管有N匝，单圈的磁通为Φ，则有

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

7.1.2 感生电动势

在磁场中放置导体回路，现在回路静止，磁场变化，则回路中会产生电流，进而说明回路中有电动势，有非静电力对载流子的作用。根据前面对闭合电路的介绍，可以根据非静电力建立非静电场，这就是**感生电场**，其形成的电动势称为**感生电动势**。感生电场与静电场的性质是不同的，其电场线是闭合曲线。我们有

$$\varepsilon = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因此

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

同时，因为感生电场的电场线是闭合的，我们有

$$\oiint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

7.1.3 动生电动势

在磁场中放置导体回路，现在磁场恒定，导体运动，则导体中会产生电流，这是因为产生了**动生电动势**，相应的非静电力是洛伦兹力。我们可以得到

$$\varepsilon = -Blv$$

相应的非静电场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

总结一下，无论是动生电动势，还是感生电动势，求电动势都有两种方法。

(1)根据电动势的定义。

$$\varepsilon = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \text{或者} \quad \int (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

(2)根据电磁感应定律。

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

7.2 互感与自感

7.2.1 互感

将两个线圈放置在一起，在线圈1中通入电流，则线圈1会相应产生磁场，这个磁场相应在线圈2形成磁链，记作$\Psi_{1\to 2}$，这个量与线圈1中的电流i_1成正比，定义

$$M_{1\to 2}=\frac{\Psi_{1\to 2}}{i_1}$$

称为线圈1对线圈2的**互感系数**。互感系数与i_1无关，与线圈大小、匝数、位置等有关。这样，我们有

$$\varepsilon_2=-\frac{\mathrm{d}\Psi_{1\to 2}}{\mathrm{d}t}=-M_{1\to 2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

7.2.2 自感

当一个线圈中的电流变化时，内部也会产生变化的电场，因而会产生感应电动势。我们有

$$\varepsilon=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

我们称L为**自感系数**。

7.3 电磁感应的应用

交流发电机

$$\varepsilon=-N\frac{\mathrm{d}(BS\cos\omega t)}{\mathrm{d}t}=NBS\omega\sin\omega t$$

$$\varepsilon_{max}=NBS\omega$$

感应加速器 磁场一方面让粒子做圆周运动，一方面让其加速。轨道磁场应该满足

$$B_{guide}(t)=\frac{1}{2}\bar{B}(t)$$

涡流 单位长度的热功率与半径的平方成正比，越外圈发热功率越大。有的时候需要减小涡流，例如变压器的铁芯使用绝缘硅钢片做的。涡流会产生一些机械效应，例如电磁阻尼和电磁驱动等。

7.4 磁场的能量

类比电容充电的过程，对电感线圈充电，我们可以得到电感储存的能量为

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\Psi^2}{L} = \frac{1}{2}\Psi I$$

进一步可以得到

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu}V = w_m V$$

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}BH$$

其中w_m称为**磁场能量密度**。那么磁场能量就可以表示为

$$W_m = \iiint w_m \mathrm{d}V = \iiint \frac{B^2}{2\mu}\mathrm{d}V$$

Chapter 8

Maxwell方程组与电磁辐射

8.1 位移电流

引入位移电流，一是建立了与“变化磁场产生电场”相应的“变化电场产生磁场”理论；二是解决了充电中的电容器其磁场强度环路定理以及KCL方程不成立的矛盾。

设定一个闭合曲面，我们知道电流连续性方程

$$\oiint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t} = 0$$

如果闭合曲面内部电荷没有变化，则电荷微分项为0，满足KCL方程。如果曲面内有电容一类元件，则存在电荷变化。这个时候我们有

$$\frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oiint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oiint \left(\boldsymbol{J}_c + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

这样我们就可以得到

$$I_c + I_d = 0$$

$$\sum_i i_{c,i} + \sum_j i_{d,j} = 0$$

Maxwell引入了**位移电流**的概念，在传统的传导电流之上加上位移电流，电流就是连续的了。加上位移电流，即使是正在充电的电容器，其KCL方程依然成立。同样，修正后磁场强度的环路定理为

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

位移电流假说实质上就是“电生磁”。其于传导电流的不同点在于：位移电流不产生焦耳热，可以存在与真空、介质、导体，而位移电流只能存在于导体中。

8.2 Maxwell方程组

对于电，我们主要用电场强度$\boldsymbol{E}$来描述，而在介质中，我们引入电位移矢量$\boldsymbol{D}$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

下面是描述电场性质的环路定理与Gauss定理。

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oiint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint \rho_0 \mathrm{d}V$$

对于磁，我们主要用磁感应强度$\boldsymbol{B}$来描述，而在介质中，我们引入磁场强度$\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$

下面是描述磁场性质的环路定理与Gauss定理。

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oiint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

这四个性质合在一起，就是**Maxwell方程组(积分形式)**

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oiint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oiint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint \rho_0 \mathrm{d}V$$

如果利用Gauss公式和Stokes公式

$$\oiint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V$$

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

就可以得到**Maxwell方程组(微分形式)**

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_0
\end{aligned}$$

8.3 电磁波

8.3.1 电磁场与波

Maxwell预言了变化的电磁场以波的形式传播，在各向同性介质中，若满足$\boldsymbol{J}_c = 0$，$\rho_0 = 0$，对于沿着x轴传播的电磁场，满足

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

参考波动方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

可以得到波速为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

8.3.2 电磁波的能量

真空中的电磁波满足

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{c}$$

一般情况下，光速可以换成电磁波的波速。我们知道电场和磁场的能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

代入$E = Bv$，可以得到$w_e = w_m$，因此电磁波的能量密度

$$w = w_e + w_m = \varepsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}$$

除了用能量密度外，也常用**Poynting矢量(能流密度矢量)**描述电磁波的能量。其方向与电磁波传播方向相同，其大小为：对于垂直传播方向的平面，单位时间内通过单位面积的能量大小。Poynting矢量的计算为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

整理可以得到Poynting矢量大小与能量密度的关系为

$$S = vw$$

此外，电磁波的动量可以表示为

$$p = \frac{w}{c}$$