多元函数 Multivariable Functions

本部分主要内容包括 - 高维度量空间、点集拓扑 - 多元函数、向量值函数的定义 - 极限和连续性 - 微分和偏导数

高维度量空间

Refs: - 《高等微积分教程（下）》1.1 - 卓里奇《数学分析（第一卷）》7.1，8.1

n 维 Euclid 空间的定义

对于一个集合 X，如果对于其中的任意两个元素 x_1 和 x_2 ，我们都能定义这两个元素之间的**距离** (distance) 或**度量** (metric) $d(x_1, x_2)$，且这个距离具有如下性质：- **正定性**：对任意两个元素，总有 $d(x_1, x_2) \geqslant 0$；且 $d(x_1, x_2) = 0$ 当且仅当 $x_1 = x_2$. - **对称性**：对任意两个元素，总有 $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$. - **三角不等式**：对任意三个元素，总有 $d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \geqslant d(x_1, x_3)$.

则称 $\langle X, d \rangle$ 构成了一个**度量空间** (metric space).

在线性代数中我们已经引入了 n 维实线性空间 $\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot \rangle$，$\mathbb{R}^n$ 中的元素可以表示为 $X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，可以称 X 为一个**点**或者**向量**。

> 关于 $\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot \rangle$ 空间的更详尽介绍可以参考线性代数部分的笔记。由于在微积分部分的笔记中我们不过多强调矩阵运算，所以后面将省略转置上标。

定义向量 X 的 p-**范数** (norm) 为

$$\|X\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

常用的范数包括 1-范数 $\|X\|_1 = \sum_i |x_i|$，2-范数 $\|X\|_2 = \sum_i |x_i|^2$ 和无穷范数 $\|X\|_\infty = \max_i |x_i|$. 我们使用 2-范数，又称为 **Euclid 距离**，来作为上述线性空间中的度量，并省略下标 2. 因此，$\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot \rangle$ 中两个点 X 和 Y 的距离定义为

$$d(X, Y) := \|X - Y\|$$

可以验证这一定义满足上面提到的三个条件，至此，我们已经完成了 n 维 Euclid 度量空间的定义 $\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot, d \rangle$.

空间上的点集拓扑

对于点 X_0 和实数 $\delta > 0$，定义点 X_0 的 δ-**邻域**和**去心** δ-**邻域**为

$$B(X_0, \delta) := \{X : \|X - X_0\| < \delta\}$$

$$B^\circ(X_0, \delta) := \{X : 0 < \|X - X_0\| < \delta\} = B(X_0, \delta) \backslash \{X_0\}$$

基于这一定义，我们可以对空间中点和集合的性质进行一些分类。考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的集合 E。则对于 $\mathbb{R}^n$ 中的点 X_0，定义

- X_0 是 E 的**内点**，如果存在 $\delta > 0$，满足 $B(X_0, \delta) \subset E$.
- X_0 是 E 的**外点**，如果存在 $\delta > 0$，满足 $B(X_0, \delta) \subset E^{\mathrm{c}}$.

- X_0 是 E 的**边界点**，如果它既不是 E 的内点，也不是 E 的外点. 也可以这样定义：对于 $\forall\delta>0$，$B(X_0,\delta)\cap E\neq\emptyset$ 且 $B(X_0,\delta)\cap E^{\mathrm{c}}\neq\emptyset$.

  从定义中可以看出：给定点 X_0 和集合 E，二者之间的关系必然居于上述三种情况之一。集合的内点一定属于该集合，外点一定不属于该集合，边界点不一定属于或不属于该集合。

基于对内点的定义，可以定义集合的开闭性：

- E 是**开集**，如果 E 中所有点都是它的内点.
- E 是**闭集**，如果 E^{c} 是开集.

  上述定义并不是二分的，一个集合可以既不是开集也不是闭集。类比于一维情形下的半开半闭区间，在高维空间中半开半闭的情形会更加复杂。

同时，也可以定义集合的内部、外部和边界：

- E 的所有内点构成 E 的**内部**，记为 $\mathrm{int}E$ 或 $\mathring{E}$.
- E 的所有外点构成 E 的**外部**，记为 $\mathrm{ext}E$.
- E 的所有边界构成 E 的**边界**，记为 ∂E.

基于对内部和边界的定义，可以定义一个集合的**闭包**. 一个集合 E 的闭包记为 $\mathrm{cl}E$ 或 $\bar{E}$ ，有如下几种等价的定义方式：

- $\bar{E}:=E\cup\partial E$.
- $\bar{E}$ 是集合 E 和它所有**极限点**构成的集合.

其中，**极限点**也称为**聚点**，同样也有几种不同但等价的定义方式：

- X_0 是集合 E 的聚点，如果 X_0 的任意邻域 $N(X_0)$ 都包含了 E 中无穷多个点.
- X_0 是集合 E 的聚点，如果 X_0 的任意邻域 $N(X_0)$ 都包含了 E 中至少一个相异于 X_0 的点.
- X_0 是集合 E 的聚点，如果 E 中存在一个各项互异的数列 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 收敛到 X_0.

  - 点 X 的**邻域** (neighbor) 指的是包含 X 的开集，可以记为 $N(X)$.
  - 一个集合的聚点可能是集合的内点，也可能是集合的边界点，但绝无可能是集合的外点。

下面介绍**紧集**. 有界闭集称为紧集. 称一个集合 E **有界**，如果存在 $0<M<\infty$，使得 $\forall X\in E$，都有 $\|X\|\leqslant M$. 同一维情形下的闭区间，有界闭集具有有限覆盖性质，即对于紧集 E 的任何一个开覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ ，$E\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}G_\alpha$，总能在其中找到其中有限个集合覆盖 E，即 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}G_{\alpha_i}$.

最后介绍集合的连通性。如果一个集合中任意两点均可用一条**折线段**连接，则称该集合为连通集，否则为不连通。连通开集称为**开区域**，开区域的闭包称为**闭区域**。

> 要注意此处闭区域的定义。闭区域**不等于**连通的闭集。要判定一个集合是否为闭区域，需要先检验其内部是否为开区域。一个反例是“8”字型集合，即两个闭集之间只有唯一的公共点。该集合的内部不包含该公共点，是不连通的。

n 维 Euclid 空间的完备性