数列极限与实数 Limits of Sequences & Real Numbers

数列极限的定义

对于数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果存在 $l \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，总能找到一个对应的 N，使得对于任意满足 $n > N$ 的 x_n，都有 $|x_n - l| < \varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **收敛**（到 l），或者说数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于 l，或称 l 是数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \quad \text{或} \quad x_n \to l, \quad n \to \infty$$

对于数列而言，在研究极限时仅考虑 $n \to \infty$ 的情形，这一点和后面要讲到的函数的极限是不同的。因此我们可以更精简地记为 $\lim x_n = l$ 和 $x_n \to l$.

- 直白地说，上面的定义是在描述：通过选择合适的 N，我们可以将 $|x_n - l|$ 控制到任意小. 即无论给定一个多么小的正数 ε，总能找到若干合适的 N_ε，从而将数列在超过 N_ε 的部分严格地控制在区间 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 以内.
- 我们用 N_ε 而不是 $N(\varepsilon)$，来澄清 N 和 ε 并不是一个严格的映射（函数）关系。对于每一个 ε，我们有不止一种选择 N 的方式。假如我们找到了一个合适的 $N_\varepsilon^\star$，则显然 $N_\varepsilon^\star + 1$、$N_\varepsilon^\star + 4$ 甚至 $N_\varepsilon^\star + 10000$ 等也可以作为 N_ε 的选取方式。

对于数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，只要能找到符合上述定义的 $l \in \mathbb{R}$，则称其为**收敛** (convergent) 的，否则是**发散** (divergent) 的。

无穷小量和无穷大量

无穷小量和无穷大量的概念

如果数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限是 0，则其又称为**无穷小量**，记作

$$x_n = o(1), \quad n \to \infty$$

因此，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛至 l 这一命题**等价于**：$x_n - l$ 是无穷小量。

> 不能把无穷小量视作数字 0（虽然有些场景下这样处理确实很爽，但有些场景则会出现 $0/0$ 或者 $0 \times \infty$ 的复杂情形）。无穷小量并不是一个静态的数字，而是一个动态的变量，一个被下标 n 调控的量。我们可以调控 n 以使得这个变量的值可以任意小，因而称为无穷小量。

如果数列 $\{x_n\}$ 满足：对任意的 $E > 0$，总存在 $N_E > 0$，使得对于任意 $n > N_E$，总有 $|x_n| > E$，则称数列 $\{x_n\}$ 为**无穷大量**。记为 $\lim x_n = \infty$ 或者 $x_n \to \infty$. 特别地，如果 x_n 在这一过程中保持符号，例如，对任意的 $E > 0$，总存在 $N_E > 0$，使得对于任意 $n > N_E$，总有 $x_n > E$ (**注意这里没有绝对值号**)，则记为 $\lim x_n = +\infty$ 或 $x_n \to +\infty$。如果 $\{x_n\}$ 满足 $-x_n \to +\infty$，则可以记作 $\lim x_n = -\infty$ 或 $x_n \to -\infty$.

- 上面的定义是在描述：通过选择合适的 N，我们可以将 $|x_n|$（或者 x_n，或者 $-x_n$）控制到任意大.
- 无穷大量同样也不是一个静态的数，而是一个变量。

无穷小量和无穷大量的性质

（1）**加法**：**有限个**无穷小量的和仍然是无穷小量，即 $o(1) + o(1) = o(1)$.

（2）**乘法**：若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{x_n\}$ 和一个无穷小量的积也是无穷小量。

（3）**倒数**：若 $\{x_n\}$ 是无穷大量，则 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小量；若 $\{x_n\}$ 是无穷小量且 $x_n \neq 0$，则 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷大量.

极限的相关性质 Properties of Limits

单个数列极限的性质

（1）**保序性、保号性**：假定 $\lim x_n = a$ 且 $a > p$，则从某一项开始（或者说，存在一个 N_p，使得对于任意的 $n > N_p$），总有 $x_n > p$。同理，若 $a < q$，则从某一项开始，总有 $x_n < q$。是为极限的**保序性**。

> 证明思路是很直接的：以 $a > p$ 为例，只需要取一个足够小的 ε 满足 $a - \varepsilon > p$（例如可以取 $\varepsilon = \dfrac{a-p}{2}$）。则对任意 $n > N_\varepsilon$，总有 $x_n > a - \varepsilon > p$。另一种情况同理。

特别地，当 $a > 0$ 时，可以取 $p = 0$；当 $a < 0$ 时，可以取 $q = 0$。即：若数列趋于一个正数，则从某一项开始数列恒正；若数列趋于一个负数，则从某一项开始数列恒负。是为数列的**保号性**。

（2）**有界性**：收敛数列必有界。即若 $\{x_n\}$ 收敛到 a，则存在 $M > 0$，使得对于**所有**x_n，均有 $|x_n| \leqslant M$.

> 任意取 ε 和一个对应的 N_ε，则对于 $n > N_\varepsilon$ 的部分，有 $|x_n| < |a| + \varepsilon$；对于 $1 \leqslant n \leqslant N_\varepsilon$ 的部分，这 N_ε 个有限的 $|x_n|$ 中总能照到一个最大值，令 $M = \max\left\{\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N_\varepsilon} |x_n|, |a| + \varepsilon\right\}$ 即可。

（3）**唯一性**：收敛数列有且仅有一个极限。即若 $x_n \to a$ 且同时 $x_n \to b$，则必然有 $a = b$。

多个数列极限的性质