数列极限与实数 Limits of Sequences & Real Numbers

数列极限的定义

对于数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果存在 $l \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，总能找到一个对应的 N，使得对于任意满足 $n > N$ 的 x_n，都有 $|x_n - l| < \varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **收敛**（到 l），或者说数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于 l，或称 l 是数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \quad \text{或} \quad x_n \to l, \quad n \to \infty$$

对于数列而言，在研究极限时仅考虑 $n \to \infty$ 的情形，这一点和后面要讲到的函数的极限是不同的。因此我们可以更精简地记为 $\lim x_n = l$ 和 $x_n \to l$.

- 直白地说，上面的定义是在描述：通过选择合适的 N，我们可以将 $|x_n - l|$ 控制到任意小. 即无论给定一个多么小的正数 ε，总能找到若干合适的 N_ε，从而将数列在超过 N_ε 的部分严格地控制在区间 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 以内.
- 我们用 N_ε 而不是 $N(\varepsilon)$，来澄清 N 和 ε 并不是一个严格的映射（函数）关系。对于每一个 ε，我们有不止一种选择 N 的方式。假如我们找到了一个合适的 $N_\varepsilon^\star$，则显然 $N_\varepsilon^\star + 1$、$N_\varepsilon^\star + 4$ 甚至 $N_\varepsilon^\star + 10000$ 等也可以作为 N_ε 的选取方式。

对于数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，只要能找到符合上述定义的 $l \in \mathbb{R}$，则称其为**收敛** (convergent) 的，否则是**发散** (divergent) 的。

无穷小量和无穷大量

无穷小量和无穷大量的概念

如果数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限是 0，则其又称为**无穷小量**，记作

$$x_n = o(1), \quad n \to \infty$$

因此，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛至 l 这一命题**等价于**：$x_n - l$ 是无穷小量。

> 不能把无穷小量视作数字 0（虽然有些场景下这样处理确实很爽，但有些场景则会出现 $0/0$ 或者 $0 \times \infty$ 的复杂情形）。无穷小量并不是一个静态的数字，而是一个动态的变量，一个被下标 n 调控的量。我们可以调控 n 以使得这个变量的值可以任意小，因而称为无穷小量。

如果数列 $\{x_n\}$ 满足：对任意的 $E > 0$，总存在 $N_E > 0$，使得对于任意 $n > N_E$，总有 $|x_n| > E$，则称数列 $\{x_n\}$ 为**无穷大量**。记为 $\lim x_n = \infty$ 或者 $x_n \to \infty$. 特别地，如果 x_n 在这一过程中保持符号，例如，对任意的 $E > 0$，总存在 $N_E > 0$，使得对于任意 \$n > N_E \$，总有 $x_n > E$ (**注意这里没有绝对值号**)，则记为 $\lim x_n = +\infty$ 或 $x_n \to +\infty$。如果 $\{x_n\}$ 满足 $-x_n \to +\infty$，则可以记作 $\lim x_n = -\infty$ 或 $x_n \to -\infty$.

- 上面的定义是在描述：通过选择合适的 N，我们可以将 $|x_n|$（或者 x_n，或者 $-x_n$）控制到任意大.
- 无穷大量同样也不是一个静态的数，而是一个变量。

无穷小量和无穷大量的性质

（1）**加法**：**有限个**无穷小量的和仍然是无穷小量，即 $o(1) + o(1) = o(1)$.

（2）**乘法**：若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{x_n\}$ 和一个无穷小量的积也是无穷小量。

（3）**倒数**：若 $\{x_n\}$ 是无穷大量，则 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小量；若 $\{x_n\}$ 是无穷小量且 $x_n \neq 0$，则 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷大量.

极限的相关性质 Properties of Limits

单个数列极限的性质

（1）**保序性、保号性**：假定 $\lim x_n = a$ 且 $a > p$，则从某一项开始（或者说，存在一个 N_p，使得对于任意的 $n > N_p$），总有 $x_n > p$。同理，若 $a < q$，则从某一项开始，总有 $x_n < q$。是为极限的**保序性**。

> 证明思路是很直接的：以 $a > p$ 为例，只需要取一个足够小的 ε 满足 $a - \varepsilon > p$（例如可以取 $\varepsilon = \dfrac{a-p}{2}$）。则对任意 $n > N_\varepsilon$，总有 $x_n > a - \varepsilon > p$。另一种情况同理。

特别地，当 $a > 0$ 时，可以取 $p = 0$；当 $a < 0$ 时，可以取 $q = 0$。即：若数列趋于一个正数，则从某一项开始数列恒正；若数列趋于一个负数，则从某一项开始数列恒负。是为数列的**保号性**。

（2）**有界性**：收敛数列必有界。即若 $\{x_n\}$ 收敛到 a，则存在 $M > 0$，使得对于**所有**x_n，均有 $|x_n| \leqslant M$.

> 任意取 ε 和一个对应的 N_ε，则对于 $n > N_\varepsilon$ 的部分，有 $|x_n| < |a| + \varepsilon$；对于 $1 \leqslant n \leqslant N_\varepsilon$ 的部分，这 N_ε 个有限的 $|x_n|$ 中总能照到一个最大值，令 $M = \max\left\{\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N_\varepsilon} |x_n|, |a| + \varepsilon\right\}$ 即可。

（3）**唯一性**：收敛数列有且仅有一个极限。即若 $x_n \to a$ 且同时 $x_n \to b$，则必然有 $a = b$。

多个数列极限的性质

（1-a）**保序性**：若 $x_n \to a$，$y_n \to b$，且 $a > b$，则从某一项开始，始终有 $x_n > y_n$.

（1-b）**保序性**：若 $x_n \to a$，$y_n \to b$，且从某一项开始始终有 $x_n \geqslant y_n$，则 $a \geqslant b$.

> 注意：在保序性 1-a 中，必须是严格大于的关系，如果换成大于等于则未必成立（等号很容易找到反例）。而在保序性 1-b 中，必须是大于等于的关系。因为即使 x_n 的每一项都严格大于 y_n，二者仍可能收敛到同一极限.

（2）**夹逼定理**：若数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 满足，从某一项开始始终有 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且 $\lim x_n = \lim z_n = a$，则 y_n 也收敛至 a.

（3）**四则运算**：若 $x_n \to a$ 且 $y_n \to b$，则 $cx_n \pm dy_n \to ca + db$, $x_n y_n \to ab$；如果能保证 $y_n \neq 0$ 和 $b \neq 0$，则还可以有 $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$.

> 注意：我们要求四则运算中的两个数列收敛到有限的数，即不包含无穷大量的情形。形如 $\dfrac{0}{0}$、$\dfrac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$、$\infty\pm\infty$ 的形式称为不定式，它们有可能是无穷小量，可能是无穷大量，可能收敛到一个非 0 实数，也可能根本就没有极限。

收敛数列的判据和极限的求法 Finding the Limits

本节介绍一些数列收敛性的常用判定依据，和一些求极限的方法。

（1）**根据定义**：使用 $\varepsilon - N$ 语言判据.

（2）**根据夹逼定理**：夹逼定理参考上一节针对数列进行左右两个方向的放缩，如果两个新的数列收敛到同一个极限，则原数列也必然收敛到这个值。

> 一个推论是，如果 $x_n \to +\infty$，且从某项开始 $y_n \geqslant x_n$，则 $y_n \to +\infty$。负无穷大的情况同理.

（3）**参考一些增长数列的大小关系**：粗略而言，我们有：

$$(\log n)^k \prec n \prec n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n, \quad k, a > 1$$

这里用 $\prec$ 表示一种近似的大小关系：当 n 足够大时，这种不等关系总是成立的。在这个关系链中，左边和右边的比值总是趋于 0，因此可以得到 $\dfrac{\log n}{n^k} \to 0$、$\dfrac{n^k}{n!} \to 0$、$\dfrac{a^n}{n^n} \to 0$ 等结论，进一步，可以得到 $\sqrt[n]{n} \to 1$ 等结论。