

# 多元函数 Multivariable Functions

本部分主要内容包括 - 高维度量空间、点集拓扑 - 多元函数、向量值函数的定义 - 极限和连续性 - 微分和偏导数

## 高维度量空间

Refs: - 《高等微积分教程（下）》1.1 - 卓里奇《数学分析（第一卷）》7.1, 8.1

### $n$ 维 Euclid 空间的定义

对于一个集合  $X$ ，如果对于其中的任意两个元素  $x_1$  和  $x_2$ ，我们都能定义这两个元素之间的距离 (distance) 或度量 (metric)  $d(x_1, x_2)$ ，且这个距离具有如下性质：- **正定性**：对任意两个元素，总有  $d(x_1, x_2) \geq 0$ ；且  $d(x_1, x_2) = 0$  当且仅当  $x_1 = x_2$ 。- **对称性**：对任意两个元素，总有  $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ 。- **三角不等式**：对任意三个元素，总有  $d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \geq d(x_1, x_3)$ 。

则称  $\langle X, d \rangle$  构成了一个度量空间 (metric space)。

在线性代数中我们已经引入了  $n$  维实线性空间  $\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot \rangle$ ， $\mathbb{R}^n$  中的元素可以表示为  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ ，可以称  $X$  为一个点或者向量。

关于  $\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot \rangle$  空间的更详尽介绍可以参考线性代数部分的笔记。由于在微积分部分的笔记中我们不过多强调矩阵运算，所以后面将省略转置上标。

定义向量  $X$  的  $p$ -范数 (norm) 为

$$\|X\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

常用的范数包括 1-范数  $\|X\|_1 = \sum_i |x_i|$ ，2-范数  $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$  和无穷范数  $\|X\|_\infty = \max_i |x_i|$ 。我们使用 2-范数，又称为 **Euclid 距离**，来作为上述线性空间中的度量，并省略下标 2。因此， $\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot \rangle$  中两个点  $X$  和  $Y$  的距离定义为

$$d(X, Y) := \|X - Y\|$$

可以验证这一定义满足上面提到的三个条件，至此，我们已经完成了  $n$  维 Euclid 度量空间的定义  $\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot, d \rangle$ 。

### 空间上的点集拓扑

对于点  $X_0$  和实数  $\delta > 0$ ，定义点  $X_0$  的  $\delta$ -邻域和去心  $\delta$ -邻域为

$$B(X_0, \delta) := \{X : \|X - X_0\| < \delta\}$$

$$B^\circ(X_0, \delta) := \{X : 0 < \|X - X_0\| < \delta\} = B(X_0, \delta) \setminus \{X_0\}$$

基于这一定义，我们可以对空间中点和集合的性质进行一些分类。考虑  $\mathbb{R}^n$  中的集合  $E$ 。则对于  $\mathbb{R}^n$  中的点  $X_0$ ，定义

- $X_0$  是  $E$  的内点，如果存在  $\delta > 0$ ，满足  $B(X_0, \delta) \subset E$ 。
- $X_0$  是  $E$  的外点，如果存在  $\delta > 0$ ，满足  $B(X_0, \delta) \subset E^c$ 。

- $X_0$  是  $E$  的**边界点**，如果它既不是  $E$  的内点，也不是  $E$  的外点。也可以这样定义：对于  $\forall \delta > 0$ ,  $B(X_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$  且  $B(X_0, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$ .

从定义中可以看出：给定点  $X_0$  和集合  $E$ ，二者之间的关系必然居于上述三种情况之一。集合的内点一定属于该集合，外点一定不属于该集合，边界点不一定属于或不属于该集合。

基于对内点的定义，可以定义集合的开闭性：

- $E$  是**开集**，如果  $E$  中所有点都是它的内点。
- $E$  是**闭集**，如果  $E^c$  是开集。

上述定义并不是二分的，一个集合可以既不是开集也不是闭集。类比于一维情形下的半开半闭区间，在高维空间中半开半闭的情形会更加复杂。

同时，也可以定义集合的内部、外部和边界：

- $E$  的所有内点构成  $E$  的**内部**，记为  $\text{int}E$  或  $\overset{\circ}{E}$ 。
- $E$  的所有外点构成  $E$  的**外部**，记为  $\text{ext}E$ 。
- $E$  的所有边界构成  $E$  的**边界**，记为  $\partial E$ 。

基于对内部和边界的定义，可以定义一个集合的**闭包**。一个集合  $E$  的闭包记为  $\text{cl}E$  或  $\bar{E}$ ，有如下几种等价的定义方式：

- $\bar{E} := E \cup \partial E$ 。
- $\bar{E}$  是集合  $E$  和它所有**极限点**构成的集合。

其中，**极限点**也称为**聚点**，同样也有几种不同但等价的定义方式：

- $X_0$  是集合  $E$  的聚点，如果  $X_0$  的任意邻域  $N(X_0)$  都包含了  $E$  中无穷多个点。
- $X_0$  是集合  $E$  的聚点，如果  $X_0$  的任意邻域  $N(X_0)$  都包含了  $E$  中至少一个相异于  $X_0$  的点。
- $X_0$  是集合  $E$  的聚点，如果  $E$  中存在一个各项互异的数列  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  收敛到  $X_0$ 。

- 点  $X$  的邻域 (neighbor) 指的是包含  $X$  的开集，可以记为  $N(X)$ 。
- 一个集合的聚点可能是集合的内点，也可能是集合的边界点，但绝无可能是集合的外点。

下面介绍**紧集**。有界闭集称为紧集。称一个集合  $E$  **有界**，如果存在  $0 < M < \infty$ ，使得  $\forall X \in E$ ，都有  $\|X\| \leq M$ 。同一维情形下的闭区间，有界闭集具有有限覆盖性质，即对于紧集  $E$  的任何一个开覆盖  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ ， $E \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$ ，总能在其

中找到其中有限个集合覆盖  $E$ ，即  $E \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}$ 。

最后介绍集合的连通性。如果一个集合中任意两点均可用一条**折线段**连接，则称该集合为连通集，否则为不连通。连通开集称为**开区域**，开区域的闭包称为**闭区域**。

要注意此处闭区域的定义。闭区域不等于连通的闭集。要判定一个集合是否为闭区域，需要先检验其内部是否为开区域。一个反例是“8”字型集合，即两个闭集之间只有唯一的公共点。该集合的内部不包含该公共点，是不连通的。

## $n$ 维 Euclid 空间的完备性