数列极限与实数 Limits of Sequences & Real Numbers

数列极限的定义

对于数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果存在 $l \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，总能找到一个对应的 N，使得对于任意满足 $n > N$ 的 x_n，都有 $|x_n - l| < \varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **收敛**（到 l），或者说数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于 l，或称 l 是数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \quad \text{或} \quad x_n \to l, \quad n \to \infty$$

对于数列而言，在研究极限时仅考虑 $n \to \infty$ 的情形，这一点和后面要讲到的函数的极限是不同的。因此我们可以更精简地记为 $\lim x_n = l$.

- 直白地说，上面的定义是在描述：通过选择合适的 N，我们可以将 $|x_n - l|$ 控制到**任意小**. 即无论给定一个多么小的正数 ε，总能找到若干合适的 N_ε，从而将数列在超过 N_ε 的部分严格地控制在区间 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 以内.
- 我们用 N_ε 而不是 $N(\varepsilon)$，来澄清 N 和 ε 并不是一个严格的映射（函数）关系。对于每一个 ε，我们有不止一种选择 N 的方式。假如我们找到了一个合适的 $N_\varepsilon^\star$，则显然 $N_\varepsilon^\star + 1$、$N_\varepsilon^\star + 4$ 甚至 $N_\varepsilon^\star + 10000$ 等也可以作为 N_ε 的选取方式。

对于数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，只要能找到符合上述定义的 $l \in \mathbb{R}$，则称其为**收敛** (convergent) 的，否则是**发散** (divergent) 的。

无穷小量和无穷大量

如果数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限是 0，则其又称为**无穷小量**，记作

$$x_n = o(1), \quad n \to \infty$$

因此，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛至 l 这一命题**等价于**：$x_n - l$ 是无穷小量。