随机过程的基本概念和分类 Fundamental concepts & classification

随机过程简介

在概率论中，我们对单个**随机变量**（random variables, r.v.）进行了研究。进一步地，由参数 t 作为“索引”的一组随机变量则称为**随机过程**（stochastic processes），记为 $X = \{X(t) : t \in T\}$. 这里 T 是指标集，对于指标集中的每一个 t，对应的 $X(t)$ 都是一个单独的随机变量。因此，随机过程就是往随机变量中引入了“空间”的概念。在大部分场合中，指标 t 经常代指“时间”。

随机过程有多种产生或描述方式。例如，一种常见的描述方式是 $X(t) \sim \mathcal{P}\left(\theta(t)\right)$，其中 $\mathcal{P}$ 是某个分布族，而 θ 是该分布族的参数。这表明在任意时间点 t，随机变量 $X(t)$ 服从分布 $\mathcal{P}$，且该分布的参数与 t 有关。

> 例如，随机过程 $X(t) \sim \mathcal{N}(t, 1)$，表明每一点 $X(t)$ 都服从正态分布，且均值就是 t。

还有一种方式是基于对某个确定函数的改造：给定一个确定的函数 $f : T \to \mathbb{R}$，和一个随机变量 $\xi \sim \mathcal{P}(\theta)$，定义 $X(t) = f(h(t, \xi))$，则这也是一个随机过程。

> 常见的例子就是随机相移：例如考虑 $f(t)$ 是一个确定函数，而 $u \sim \mathcal{U}[0, T_0]$，则 $f(t + u)$ 向原来的函数 f 引入了一个随机相移，这便是一个随机过程.

随机过程的数字特征

对于单个随机变量，其具有期望、方差等数字特征；对于多个随机变量，则具有协方差等数字特征。这些数字特征可以推广到随机过程中。

（1）**期望和方差**：每个时间点 t 处，$X(t)$ 是一个随机变量，因而具有期望 $\mathbf{E}[X(t)]$ 和方差 $\mathrm{var}(X(t))$。由此可以定义整个随机过程 X 的期望和方差：即对应时间点处随机变量的期望和方差。记随机过程 X 的期望为 $\mu_X(t)$，方差为 $\sigma_X^2(t)$，有：

$$\mu_X(t) : t \mapsto \mathbf{E}[X(t)]$$

$$\sigma_X(t) : t \mapsto \mathrm{var}[X(t)]$$

> 一个随机变量的期望和方差是一个确定的数；一个随机过程的期望和方差是一个确定的函数.

（2）**单个随机过程的二阶混合矩**：对于两个不同的时间点 t_1 和 t_2，$X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是两个不同的随机变量，因而可以定义他们的“协方差”，或者说，**二阶混合中心矩**与**二阶混合原点矩**。前者记为 $C_{XX}(t_1, t_2)$，而后者记为 $R_{XX}(t_1, t_2)$. 二阶混合中心矩定义为：

$$C_{XX}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right)\left(X(t_2) - \mu_X(t_2)\right)\right]$$

上式可以变形为 $C_{XX}(t_1, t_2) = \mathbf{E}[X(t_1)X(t_2)] - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$. 二阶混合原点矩定义为：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \mathbf{E}[X(t_1)X(t_2)]$$

> - 对于单个随机变量 X，定义其 k 阶矩为 $\mathbf{E}[(X - a)^k]$，当 a 取 $\mathbf{E}[X]$ 时称为 k 阶中心矩，当 a 取 0 时称为 k 阶原点矩. 例如，1 阶原点矩就是期望，2 阶中心距就是方差.

- 对于多个随机变量 $X_1, \cdots, X_n$，则 $\mathbf{E}[(X_1-a_1)^{k_1}(X_2-a_2)^{k_2}\cdots(X_n-a_n)^{k_n}]$ 称为 $(k_1+\cdots+k_n)$ 阶混合矩. 例如，两个随机变量的 2 阶混合中心距就是协方差.
- 关于 k 阶矩的更多内容可以参考《数理统计》课程.

随机过程分类