数理逻辑

户保田
e-mail:hubaotian@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2022年5月

推理部分

公理集合:

(1) A_1: $A \to (B \to A)$

(2) A_2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(3) A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

推理规则或分离规则（Modus Ponens）：

若有A和$A \to B$成立，则必有结论B成立，可形式化表示为:

$$r_{mp}: \frac{A,\ A \to B}{B}$$

证明

证明： 称下列公式序列为公式A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m(= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2, \cdots, m\}$， A_i 是PC中的公理，或是$A_j(j < i)$，或是$A_j, A_k(j, k < i)$用分离规则导出的。其中A_m就是公式A。

A_i 只能是以下三种中的其一：

（1）PC中的公理或已知定理

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中的某一个

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的

基本定理

定理1：$\vdash_{PC} A \to A$ √

定理2：如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ **（前件互换定理）** √

定理3：$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ **定理（2）的另一种形式** √

定理4：$\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ **（加前件定理）** √

定理5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ **（加后件定理）** √

定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$ √

定理7：$\vdash A \to (\neg A \to B)$ √

定理8：如果 $\vdash (A \to B)$，$\vdash (B \to C)$，那么$\vdash (A \to C)$ **（三段论定理）** √

定理9. $\vdash (\neg A \to A) \to A$ **（反证法）** √

定理10. $\vdash \neg\neg A \to A$ √

定理11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ **（反证法）** √

定理12. $\vdash A \to \neg\neg A$ √

基本定理

定理13：$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ **（公理A_3的逆命题）** √

定理14：$\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ √

定理15：$\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ √

定理16：$\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ **（反证法）** √

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$√

基本定理

定理18：$\vdash \neg A \to C$ ， $\vdash B \to C$当且仅当$\vdash (A \to B) \to C$

定理19：$\vdash A \to A \vee B$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$A \to A \vee B \;\Leftrightarrow\; A \to (\neg A \to B)$ （**等价于定理7**）

定理20：$\vdash A \to B \vee A$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$A \to B \vee A \;\Leftrightarrow\; A \to (\neg B \to A)$ （**等价于公理1**）

定理21：如果$\vdash P \to Q$, 且$\vdash R \to S$, 则$\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$

定理22：$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ 也即

$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ **（二难推理）**

定理18

定理18：$\vdash \neg A \to C$， $\vdash B \to C$当且仅当$\vdash (A \to B) \to C$

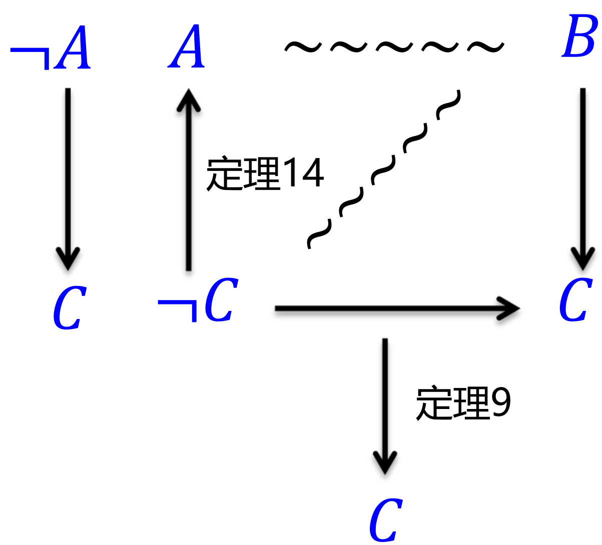
必要性：若$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$则$\vdash (A \to B) \to C$

充分性：若$\vdash (A \to B) \to C$, 则$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$

定理18必要性证明

必要性：若$\vdash \neg A \rightarrow C$，$\vdash B \rightarrow C$则$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$

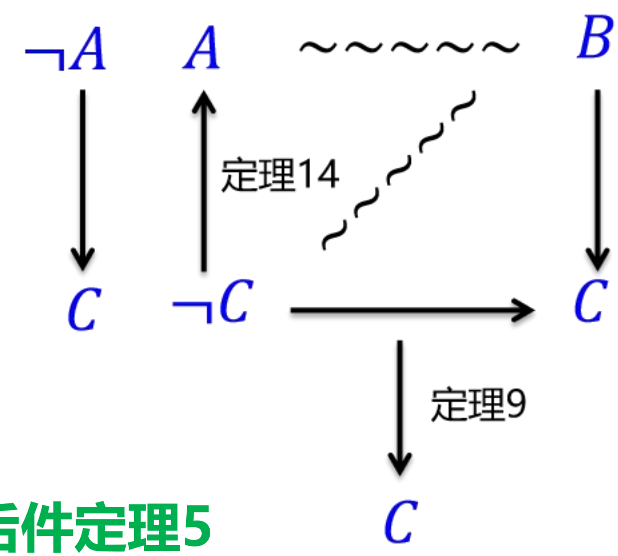
证明思路：



定理18必要性证明

定理18（必要性）：若$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$则$\vdash (A \to B) \to C$

证明（必要性）：



(1) $B \to C$ **已知定理**

(2) $\neg A \to C$ **已知定理**

(3) $(\neg A \to C) \to (\neg C \to A)$ **定理14**

(4) $\neg C \to A$ **(2)和(3)用rmp分离规则**

(5) $(\neg C \to A) \to ((A \to B) \to (\neg C \to B))$ **加后件定理5**

(6) $(A \to B) \to (\neg C \to B)$ **(4)和(5)用rmp分离规则**

(7) $(B \to C) \to ((\neg C \to B) \to (\neg C \to C))$ **加前件定理4**

(8) $(\neg C \to B) \to (\neg C \to C)$ **(1)和(7)用rmp分离规则**

(9) $(A \to B) \to (\neg C \to C)$ **(6)和(8)用三段论定理8**

(10) $(\neg C \to C) \to C$ **定理9**

(11) $(A \to B) \to C$ **(9)和(10)用三段论定理8**

定理18充分性证明

充分性：若 $\vdash (A \to B) \to C$, 则$\vdash \neg A \to C$ ，$\vdash B \to C$

证明思路：结合已知定理，利用三段论加以证明

证明：

(1) $(A \to B) \to C$ **已知定理**

(2) $\neg A \to (A \to B)$**定理6**

(3) $\neg A \to C$ **(2)和(1)用三段论定理8**

(4) $B \to (A \to B)$ **公理1**

(5) $B \to C$ **(4)和(1)用三段论定理8**

定理18的应用

定理18（必要性）若 $\vdash \neg A \to C$， $\vdash B \to C$，则$\vdash (A \to B) \to C$

例1.证明$((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：有了定理18的必要性，再证明该命题就简单很多了。

只需要证明$A \to A$ 和$\neg(A \to B) \to A$

证明：

(1)　$A \to A$　**定理1**

(2)　$\neg A \to (A \to B)$　**定理6**

(3)　$(\neg A \to (A \to B)) \to (\neg(A \to B) \to A)$**定理14**

(4)　$\neg(A \to B) \to A$　**(2)和(3)用rmp分离规则**

(5)　$((A \to B) \to A) \to A$　**(4) 和(1)用定理18**

定理19

定理19： $\vdash A \to A \vee B$， 其中$A \vee B$定义为$\neg A \to B$

$A \to A \vee B \Leftrightarrow A \to (\neg A \to B)$ （**等价于定理7**）

定理20

定理20： $\vdash A \to B \vee A$， 其中$A \vee B$定义为$\neg A \to B$

$$A \to B \vee A \quad \Leftrightarrow \quad A \to (\neg B \to A)$$ （**等价于公理1**）

定理21

定理21：如果$\vdash P \to Q$, 且$\vdash R \to S$, 则$\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$

证明：

(1) $P \to Q$ **已知定理**

(2) $R \to S$ **已知定理**

(3) $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$ **加后件定理5**

(4) $(Q \to R) \to (P \to R)$ **(1）和（3）用rmp分离规则**

(5) $(R \to S) \to ((P \to R) \to (P \to S))$ **加前件定理4**

(6) $(P \to R) \to (P \to S)$ **(2）和（5）用rmp分离规则**

(7) $(Q \to R) \to (P \to S)$ **(4）和（6）使用三段论定理8**

定理22

定理22: $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B) \to C))$ **(二难推理)**

也即 $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

证明思路1：运用定理18,

$$令Q = (B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C)$$

要证$(A \to C) \to Q$成立，根据定理18的必要性，只需证：

$$C \to Q和\neg A \to Q$$

也即：

$$C \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$

$$\neg A \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$

定理22

定理22: $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ **(二难推理)**

证明:

(1) $C \to ((\neg A \to B) \to C)$ **公理1**

(2) $(C \to ((\neg A \to B) \to C)) \to ((B \to C) \to (C \to ((\neg A \to B) \to C)))$ **公理1**

(3) $(B \to C) \to (C \to ((\neg A \to B) \to C))$ **(1)和(2)用rmp分离规则**

(4) $\boldsymbol{C \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))}$ **对(3)用前件互换定理2**

(5) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to B)$ **定理1**

(6) $\neg A \to ((\neg A \to B) \to B)$ **对(5)用前件互换定理2**

(7) $((\neg A \to B) \to B) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ **加后件定理5**

(8) $\boldsymbol{\neg A \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))}$ **(6)和(7)用三段论定理8**

(9) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ **(4) 和(8)用定理18**

定理22

定理22: $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ **(二难推理)**

也即 $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

证明思路2：要证$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$成立，只需证：

$$(\neg C \to \neg A) \to ((\neg C \to \neg B) \to (\neg C \to \neg(\neg A \to B)))$$ **（运用定理21）**

逆向用公理2，提取相同的前件$\neg C$，只需证：

$$(\neg C \to \neg A) \to (\neg C \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B)))$$

再次逆向用公理2，提取相同的前件$\neg C$，只需证：

$$\neg C \to (\neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B)))$$

去掉$\neg C$，只需证：

$$\neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$$

逆否命题，只需证：

$$\neg A \to ((\neg A \to B) \to B)$$

前件互换定理，只需证：

$$(\neg A \to B) \to (\neg A \to B)$$ **（定理1）**

基本定理

定理17： $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$√

定理18： $\vdash \neg A \to C$ ， $\vdash B \to C$当且仅当$\vdash (A \to B) \to C$√

定理19： $\vdash A \to A \vee B$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to A \vee B \;\Leftrightarrow\; A \to (\neg A \to B)$$ (**等价于定理7**)√

定理20： $\vdash A \to B \vee A$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to B \vee A \;\Leftrightarrow\; A \to (\neg B \to A)$$ (**等价于公理1**)√

定理21：如果$\vdash P \to Q$, 且$\vdash R \to S$, 则$\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$ √

定理22： $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ 也即

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$ **（二难推理）** √

基本定理

定理23：$\vdash A \wedge B \to C$ 当且仅当 $\vdash A \to (B \to C)$

定理24：$\vdash A \wedge B \to A$

定理25：$\vdash A \wedge B \to B$

定理26：$\vdash A \to (B \to (A \wedge B))$

定理27：$\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

定理28：$\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

定理29：$\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

定理23

定理23：$\vdash A\wedge B\rightarrow C$ 当且仅当$\vdash A\rightarrow(B\rightarrow C)$，$A\wedge B$定义为$\neg(A\rightarrow\neg B)$ 即

$\vdash\neg(A\rightarrow\neg B)\rightarrow C$ 当且仅当$\vdash A\rightarrow(B\rightarrow C)$

证明（必要性）：若$\vdash\neg(A\rightarrow\neg B)\rightarrow C$，则$\vdash A\rightarrow(B\rightarrow C)$

(1) $\neg(A\rightarrow\neg B)\rightarrow C$ **已知定理**

(2) $(\neg(A\rightarrow\neg B)\rightarrow C)\rightarrow(\neg C\rightarrow(A\rightarrow\neg B))$ **定理14**

(3) $\neg C\rightarrow(A\rightarrow\neg B)$ **由（1）和（2）用分离规则**

(4) $A\rightarrow(\neg C\rightarrow\neg B)$ **对（3）用前件互换定理2**

(5) $(\neg C\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow C)$ **公理3**

(6) $A\rightarrow(B\rightarrow C)$ **(4) 和（5）用三段论定理8**

定理23

定理23：$\vdash A \wedge B \rightarrow C$ 当且仅当$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$，$A \wedge B$定义为$\neg(A \rightarrow \neg B)$ 即

$\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$ 当且仅当$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

证明（充分性）：若 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$，则$\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ **已知定理**

(2) $(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ **定理13**

(3) $A \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ **由（1）和（2）使用三段论**

(4) $\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ **对（3）用前件互换定理2**

(5) $(\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C)$ **定理14**

(6) $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$ **由（4）和（5）用分离规则**

(7) $A \wedge B \rightarrow C$

定理24

定理24： $\vdash A \wedge B \rightarrow A$ ， $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

证明： $A \wedge B \rightarrow A \;\Leftrightarrow\; \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \;\Leftrightarrow\; \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

(取逆否命题)　等价于定理6

定理25

定理25：$\vdash A \wedge B \to B$

证明：$A \wedge B \to B \;\Leftrightarrow\; \neg(A \to \neg B) \to B \;\Leftrightarrow\; \neg B \to (A \to \neg B)$

(取逆否命题)　等价于公理1

定理26

定理26：$\vdash A \to (B \to (A \wedge B))$

证明思路1：由$\vdash A \wedge B \to A \wedge B$，使用定理23

证明思路2：

$$(A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$$ 定理1

$$\Big\downarrow \text{前件互换定理2}$$

$$A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$$

$$\Big\downarrow \text{定理15}$$

$$A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$$

$$\Big\downarrow \text{形式变换}$$

$$A \to (B \to (A \wedge B))$$

定理 27

定理27： $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \land C))$

证明思路: 发现三个蕴含式的前件都是一样的。

证明：

(1) $B \to (C \to (B \land C))$ **定理25**

(2) $(B \to (C \to (B \land C))) \to$

$((A \to B) \to (A \to (C \to (B \land C))))$**加前件定理2**

(3) $(A \to B) \to (A \to (C \to (B \land C)))$ **(1）和（2）用rmp分离规则**

(4) $((A \to (C \to (B \land C))) \to ((A \to C) \to (A \to (B \land C)))$ **公理2**

(5) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \land C)))$ **(3）和（4）用三段论**

定理27另一种证明方法

定理27：$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

证明：

(1) $B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))$ **定理26**

(2) $(B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))))$ **公理1**

(3) $(A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C)))) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))))$ **公理2**

(4) $(B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))) \rightarrow$

$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))))$ **(2)和（3）用三段论定理8**

(5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C)))$ **由（1）和（4）用分离规则**

(6) $((A \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C))) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$ **公理2**

(7) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$ **(5)和（6）用三段论定理8**

定理28

定理28： $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$, 其中$\vdash P \leftrightarrow Q$即$\vdash P \rightarrow Q$且$\vdash Q \rightarrow P$

证明： $A \vee B \rightarrow B \vee A \quad \Leftrightarrow \quad (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ 定理14

反向也是同理。

定理29

定理29：$\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A \Leftrightarrow \neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A)$

证明：

（1）$(B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$ 定理15

（2）$((B \to \neg A) \to (A \to \neg B)) \to$

$$(\neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A))$$ 定理13

（3）$\neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A)$ （1）和（2)用rmp分离规则

基本定理

定理23：$\vdash A \wedge B \rightarrow C$ 当且仅当 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$√

定理24：$\vdash A \wedge B \rightarrow A$ √

定理25：$\vdash A \wedge B \rightarrow B$ √

定理26：$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ √

定理27：$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$√

定理28：$\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$√

定理29：$\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$√