数理逻辑

户保田
e-mail:hubaotian@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2022年5月

命题逻辑表达知识的局限性

例 1：

北京是中国的城市。
上海是中国的城市。
天津是中国的城市。

例 2：

所有人都是要死的。
苏格拉底是人。
苏格拉底也是要死的。

例 3：

所有实数的平方都是非负的。
-3是一个实数。
-3的平方也是非负的。

谓词演算基本概念

个体词：用于表示研究对象的词。分个体常元和个体变元。用$a, b, c, \cdots$表示个体常元；用$x, y, z, \cdots$表示个体变元。

谓词：用于表示研究对象的性质或研究对象之间关系的词称为谓词，用大写的英文字母表示。

例：分析下列自然语言中的个体词和谓词并形式化

（1）$\sqrt{2}$是无理数

（2）张三和李四是计算机专业的学生

（3）实数x比实数y大

谓词演算基本概念

n元谓词：含有n个个体变元的谓词称为n元谓词。

个体域（论域）：个体变元的取值范围称为个体域，用D表示。

函词：用于描述一个个体域到另一个个体域的映射。用$f, g, h, \cdots$表示。含有n个变元的函词称为n元函词。

例：用谓词对命题“张三的父亲是工程师”进行形式化。

$$Eng(x)\text{: } x\text{是工程师}$$

$$Father(x)\text{: } x\text{的父亲}$$

$$Eng(Father(\text{张三}))$$

谓词演算基本概念

量词：用于限制个体词的数量，分为全称量词和存在量词。

全称量词：用符号∀表示，代表“任意的”或“所有的”。

存在量词：用符号∃表示，代表“至少有一个”。

例：用谓词$P(x)$ 表示“x是有理数”，那么

$\forall x P(x)$表示：对论域中的每个个体x都有性质P

$\exists x P(x)$表示：论域中一定有个体x满足性质P

谓词演算基本概念

量词之间的关系：

$\forall x P(x) = \neg \exists x \neg P(x)$ （不存在个体x不满足性质P）

$\exists x P(x) = \neg \forall x \neg P(x)$ （不是所有的个体x不满足性质P）

$\neg \forall x P(x) = \exists x \neg P(x)$

（不是所有个体x都满足性质P） （存在个体x不满足性质P）

$\neg \exists x P(x) = \forall x \neg P(x)$

（不存在个体x满足性质P） （所有的个体x都不满足性质P）

谓词演算基本概念

项：

（1）个体常元和个体变元是项。

（2）如果$f^{(n)}$为n元函词，且$t_1,t_2,\cdots,t_n$为项，那么$f^{(n)}(t_1,t_2,...t_n)$ 也为项。

（3）只有（1）和（2）经过有限次复合产生的结果才是项。

例：用 $father(x)$ 表示x的父亲，a表示张三，则：

$father(a)$，$father(father(a))$，$\cdots$都是项。

谓词演算基本概念

合式公式(递归定义)

（1）不含联接词的谓词即原子谓词公式是合式公式。

（2）若A为合式公式，则$\neg A$也是合式公式。

（3）若A, B是合式公式，则$A \vee B, A \wedge B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$都是合式公式。

（4）若A是合式公式，则$(\forall x)A, (\exists x)A$都是合式公式，其中$x$为变元符号

（5）只有有限次的应用1-4构成的符号串才是合式公式。

辖域： 量词所约束的范围。

约束变元： 受量词约束的个体称为约束变元。

自由变元： 不受量词约束的个体变元称为自由变元。

谓词演算基本概念

易名规则：变元更名，将量词变元以及该量词变元在其辖域中所有出现，更改为其他未在公式中出现的变元。

例：

变元更名的目的是为了保持变元的独立性！

$$\neg R(x,y,z) \wedge \forall x Q(x,y) \rightarrow \exists y P(y)$$

$$\Big\downarrow \text{易名}$$

$$\neg R(x,y,z) \wedge \forall u Q(u,y) \rightarrow \exists v P(v)$$

$$\forall v(P(v,y) \rightarrow Q(x))$$

$$\Big\downarrow \text{易名}$$

$$\forall w(P(w,y) \rightarrow Q(x))$$

自然语句的形式化

例： 将下列公式翻译成谓词公式：

（1）任意有理数都是实数。

（2）有的实数是有理数。

解： 定义谓词：

$Y(x)$ ：x是有理数

$R(x)$ ：x是实数

则（1）（2）可以表述为如下形式：

（1）$(\forall x)(Y(x) \rightarrow R(x))$

（2）$(\exists x)(Y(x) \wedge R(x))$

自然语句的形式化

例：“过平面中的两个不同点有且仅有一条直线通过”

解：定义谓词：

$D(x)$：x是为平面上的点。

$G(x)$：x为平面上的直线。

$L(x,y,z)$：z通过x,y。

$E(x,y)$：x与y相等

则上述自然语句可以表示为如下形式：

$$(\forall x \forall y)(D(x) \wedge D(y) \wedge \neg E(x,y) \rightarrow$$

$$\exists z(G(z) \wedge L(x,y,z) \wedge \forall u(G(u) \wedge L(x,y,u) \rightarrow E(u,z)))$$

自然语句的形式化

例： 将下列公式翻译成谓词公式：

（1）每个作家都写过作品。

（2）有的作家没写过小说。

（3）有的作品不是小说。

解： 定义谓词

$Writer(x)$：x是作家

$W(x,\ y)$：x写y

$N(x)$：x是小说

$P(x)$：x是作品

则上述自然语句可以表示为如下形式：

（1）$(\forall x)(Writer(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \land W(x,y)))$

（2）$(\exists x)(Writer(x) \land (\forall y)(N(y) \rightarrow \neg W(x,y)))$

（3）$(\exists x)(P(x) \land \neg N(x))$

自然语句的形式化

令u,v表示集合变元，a,b表示元素变元则：

- 存在空集，即存在没有元素的集合，可以形式化表示为。

$$\exists u \forall a \neg (a \in u)$$

- 两个集合相等的充分必要条件是他们包含的元素相同可以形式化表示为。

$$\forall u \forall v((u = v) \leftrightarrow \forall a(a \in u \leftrightarrow a \in v))$$

自然语句的形式化

群论中的例子：存在左单元，并且群的每个元素都有逆元素。

$$\exists x((\forall y(x \circ y = y)) \wedge (\forall y \exists z(z \circ y = x)))$$

奇怪的理发师：有一位理发师，他为且仅为那些不为自己理发的人理发。

解：定义如下谓词：

$P(x)$ ：x是理发师

$Q(x, y)$ ：x为y理发

则奇怪的理发师可以表示为如下形式：

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(x, y) \leftrightarrow \neg Q(y, y)))$$