1、将下列语句形式化为命题公式：

(1) 大学里的学生不是本科生就是研究生。

(2) 只要你接到超速罚单，你的车速就超过每小时 100 公里。

(3) 除非你年满 18 周岁，否则你没有选举权。

解：(1) p：该学生是大学里的学生，q：该学生是本科生，

r：该学生是研究生

$$p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$$

(2) p：你接到超速罚单，q：你的车速超过每小时100公里

$$p \rightarrow q$$

(3) p：你年满18岁，q：你没有选举权

$$\neg p \rightarrow q$$

2、判定下列逻辑蕴含和逻辑等价是否成立，其中 A,B,C,D 为任意公式：

(1) $A \Rightarrow B \to A$　　(2) $\neg A \to \neg B \Leftrightarrow B \to A$

(3) $A \to (B \to C) \Rightarrow (A \to B) \to (A \to C)$

(4) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow A \wedge B \to C$

(5) $A \vee B \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

(6) $\neg A \vee B, A \to B \wedge C, D \to B \Rightarrow \neg B \to C$

2.(1) 对于任意指派 v，如果 $A^v=1$，则：

$(B\to A)^v = 1-B^v+B^vA^v=1$

所以 $A \Rightarrow B \to A$ 成立

(2) 对任意的指派 v，

$(\neg A \to \neg B)^v = 1-(\neg A)^v+(\neg A)^v(\neg B)^v$

$=1-(1-A^v)+(1-A^v)(1-B^v)$

$=1-B^v+B^vA^v$

$=(B\to A)^v$

所以 $\neg A \to \neg B \Leftrightarrow B \to A$ 成立

(3) 对任意的指派 v，如果 $(A\to(B\to C))^v=1$，则：

$1-A^v+A^v(B\to C)^v=1$，即 $1-A^v+A^v(1-B^v+B^vC^v)=1$

即 $A^vB^vC^v=A^vB^v$

则 $((A\to B)\to(A\to C))^v$

$=1-(A\to B)^v+(A\to B)^v(A\to C)^v$

$=1-(1-A^v+A^vB^v)+(1-A^v+A^vB^v)(1-A^v+A^vC^v)$

$=1+A^vC^v-A^v+A^{v2}-A^{v2}C^v-A^{v2}B^v+A^{v2}B^vC^v$

$= 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v$

$= 1$

所以 $A \to (B \to C) \Longrightarrow (A \to B) \to (A \to C)$ 成立

(4) 对任意的指派 v

$(A \to (B \to C))^v$

$= 1 - A^v + A^v (B \to C)^v$

$= 1 - A^v + A^v (1 - B^v + B^v C^v)$

$= 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v$

$= 1 - (A \wedge B)^v + (A \wedge B)^v C^v$

$= (A \wedge B \to C)^v$

所以 $A \to (B \to C) \Longleftrightarrow A \wedge B \to C$ 成立

(5) 对任意的指派 v.

$(A \vee B \to C)^v$

$= 1 - (A \vee B)^v + (A \vee B)^v C^v$

$= 1 - (A^v + B^v - A^v B^v) + (A^v + B^v - A^v B^v) C^v$

$= 1 - A^v - B^v + A^v B^v + A^v C^v + B^v C^v - A^v B^v C^v$

$((A \to C) \wedge (B \to C))^v$

$= (A \to C)^v (B \to C)^v$

$= (1 - A^v + A^v C^v)(1 - B^v + B^v C^v)$

$= 1 - A^v - B^v + A^v B^v + A^v C^v + B^v C^v - 2A^v B^v C^v + A^v B^v C^{v2}$

$= 1 - A^v - B^v + A^v B^v + A^v C^v + B^v C^v - A^v B^v C^v$

所以 $(A \vee B \to C)^v = ((A \to C) \wedge (B \to C))^v$

所以 $A \vee B \to C \Longleftrightarrow A \to C \wedge B \to C$

(6) 对于任意指派 v，如果 $(\neg A\vee B)^v=1$，$(A\to B\wedge C)^v=1$，$(D\to B)^v=1$，那么：

$$\begin{cases}(\neg A)^v+B^v-(\neg A)^vB^v=1\\ 1-A^v+A^v(B\wedge C)^v=1\\ 1-D^v+D^vB^v=1\end{cases}\quad 即\begin{cases}A^vB^v=A^v\\ A^vB^vC^v=A^v\\ D^vB^v=D^v\end{cases}$$

则 $(\neg B\to C)^v$

$=1-(\neg B)^v+(\neg B)^vC^v$

$=1-(1-B^v)+(1-B^v)C^v$

$=B^v+C^v-B^vC^v$

对于指派 v 满足：$A^v=0$，$B^v=0$，$C^v=0$，$D^v=0$

则 $(\neg A\vee B)^v=(\neg A)^v+B^v-(\neg A)^vB^v=1$

$(A\to B\wedge C)^v=1-A^v+A^v(B\wedge C)^v$

$=1$

$(D\to B)^v=1-D^v+D^vB^v=1$

但 $(\neg B\to C)^v=1-(\neg B)^v+(\neg B)^vC^v$

$=1-(1-B^v)+(1-B^v)C^v$

$=0$

所以 $\neg A\vee B$，$A\to B\wedge C$，$D\to B\Rightarrow\neg B\to C$

不成立

3、求下列公式的合取范式和析取范式：

$(1)\ \neg(q \to p) \wedge (r \to \neg s)$

$(2)\ \neg p \wedge q \to r$

$(3)\ \neg(p \vee q) \leftrightarrow p \wedge q$

3. (1) $\neg(q \to p) \wedge (r \to \neg s)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg s)$

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg s)$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg p \wedge (\neg r \vee \neg s)$

合取范式为：$q \wedge \neg p \wedge (\neg r \vee \neg s)$

原式 $\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg s)$

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg s)$

析取范式为：$(q \wedge \neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg s)$

(2) $\neg p \wedge q \to r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow p \vee \neg q \vee r$

析取范式为：$p \vee \neg q \vee r$

合取范式为：$p \vee \neg q \vee r$

(3) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow p \wedge q$

$\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \wedge (p \wedge q)) \vee ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge p \wedge q) \vee ((p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q))$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

合取范式为：$(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$

原式 $\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge\neg p)\vee((p\vee q)\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow (q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)$

析取范式为 $(q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)$

4、求下列公式的主合取范式与主析取范式：

(1) $p \to p \wedge q$

(2) $p \vee q \to (q \to r)$

(3) $(p \to p \wedge q) \vee r$

4.(1) 真值表：

p	q	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

由此可知，该公式的弄假指派为：

$\alpha = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

弄假的极大项为 $\neg p \vee q$

该公式的弄真指派为：

$\beta_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\beta_3 = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

上述弄真指派弄真的极小项为：

$\neg p \wedge \neg q$，$\neg p \wedge q$，$p \wedge q$

所以原公式的主合取范式为：$\neg p \vee q$

主析取范式为：$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$

(2) 真值表：

p	q	r	$p \vee q$	$q \to r$	$p \vee q \to (q \to r)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

由此可知，该公式的成假指派为：

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

它们成假的极大项为：$p \vee \neg q \vee r$，$\neg p \vee \neg q \vee r$

该公式的成真指派为：

$\beta_1 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta_3 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta_4 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\beta_5 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta_6 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

它们成真的极小项为：$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$，$\neg p \wedge \neg q \wedge r$，
$\neg p \wedge q \wedge r$，$p \wedge \neg q \wedge \neg r$，$p \wedge \neg q \wedge r$，$p \wedge q \wedge r$

综上，原公式的主合取范式为：

$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

原公式的主析取范式为：

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

(3) 真值表为：

p	q	r	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$	$(p \to p \wedge q) \vee r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

由真值表知，原公式的成假指派为：$\alpha = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

它成假的极大项为：$\neg p \vee q \vee r$

原公式的成真指派为 $\beta_1 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta_3 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

$\beta_4 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta_5 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta_6 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\beta_7 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

它们成真的极小项为：

$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$，$\neg p \wedge \neg q \wedge r$，$\neg p \wedge q \wedge \neg r$，$\neg p \wedge q \wedge r$，$p \wedge \neg q \wedge r$，

$p \wedge q \wedge \neg r$，　$p \wedge q \wedge r$

综上，原公式的主合取范式为：$\neg p \vee q \vee r$

原公式的主析取范式为：

$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee$

$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$