FC系统证明思维

xyfJASON

概述

FC 系统本质是 PC 系统的扩展：在 PC 系统中，我们考虑的最小单元是原子公式 $p, q, r, \cdots$，然后用联结词 $\rightarrow, \neg$ 把它们组合起来得到公式。但是在 FC 系统中，原子公式被进一步细化为 $P^{(n)} t_1 t_2 \cdots t_n$，其中 $P^{(n)}$ 是 n 元谓词符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项；项又被细化为常元、变元和函词的组合；用联结词 $\rightarrow, \neg, \forall$ 把原子公式组合起来的到公式。因此，FC 系统确实比 PC 系统复杂了许多。

不过，正因如此，PC 系统中的所有定理在 FC 中自然成立，我们只需进一步研究 FC 中新引入的东西。又由于谓词、函词、常元是在给定实际背景后人为解释的，所以我们研究 FC 中的定理时，**就是在和 $\forall(\exists)$ 打交道**（其中 $\exists v A$ 定义为 $\neg \forall v \neg A$）。

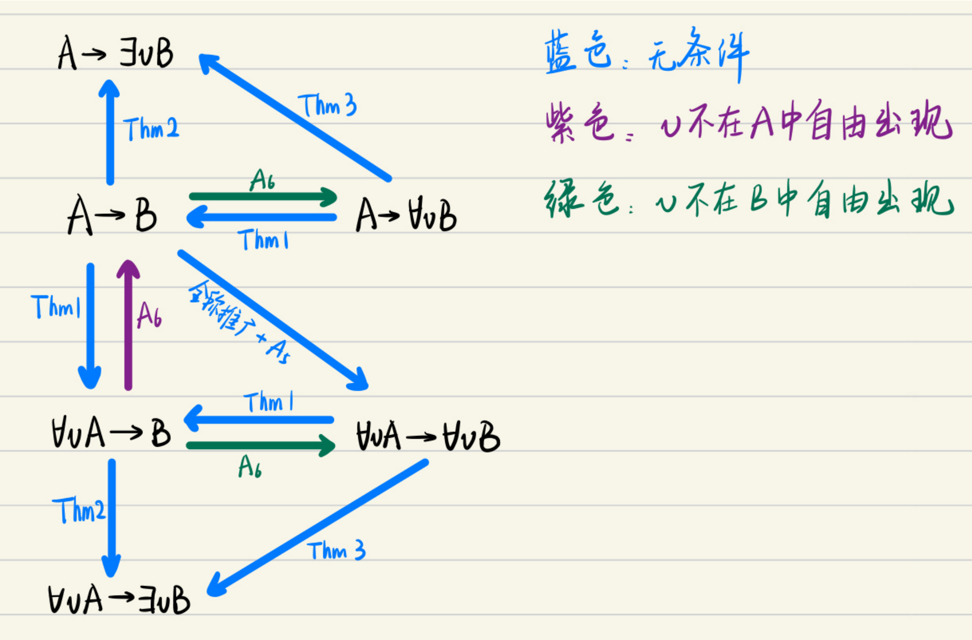
和 PC 与 ND 中的证明一样的，我们着重思维过程，证明过程倒着写即可。

另外，允许在证明 FC 的过程中用 ND 的推理规则。

公理与（有用的）定理

$$
\begin{array}{ll}
A_1: & A \to (B \to A) \\
A_2: & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
A_3: & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \\
A_4: & \forall v A \to A_t^v \\
A_5: & \forall v(A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B) \\
A_6: & A \to \forall v A \quad (v \text{ 在 } A \text{ 中无自由出现}) \\
\text{Thm 1:} & \vdash \forall v A \to A \\
\text{Thm 2:} & \vdash A \to \exists v A \\
\text{Thm 3:} & \vdash \forall v A \to \exists v A \\
\text{Thm 4:} & \text{if} \quad \vdash A, \quad \text{then} \quad \vdash \forall v A \\
\text{Thm 5:} & \text{if} \quad \Gamma \vdash A, \quad \text{then} \quad \Gamma \vdash \forall v A \quad (v \text{ 在 } \Gamma \text{ 中无自由出现}) \\
\text{Thm 10:} & \text{if} \quad \Gamma \vdash \exists v A \quad \text{and} \quad \Gamma; A \vdash B, \quad \text{then} \quad \Gamma \vdash B \quad (v \text{ 在 } \Gamma \text{ 和 } B \text{ 中无自由出现})
\end{array}
$$

关于 $A_5 \sim \text{Thm } 5$，可以概括为下图：



关于 Thm 10，其可以视为 ND 中析取消除规则的推广：考虑 $(\vee-)$ 规则，

$$
\frac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}
$$

意识到 $\exists v A$ 的本质就是一系列的或：$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$，故而我们可以推广得到：

$$
\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma \vdash \exists v A}{\Gamma \vdash B}
$$

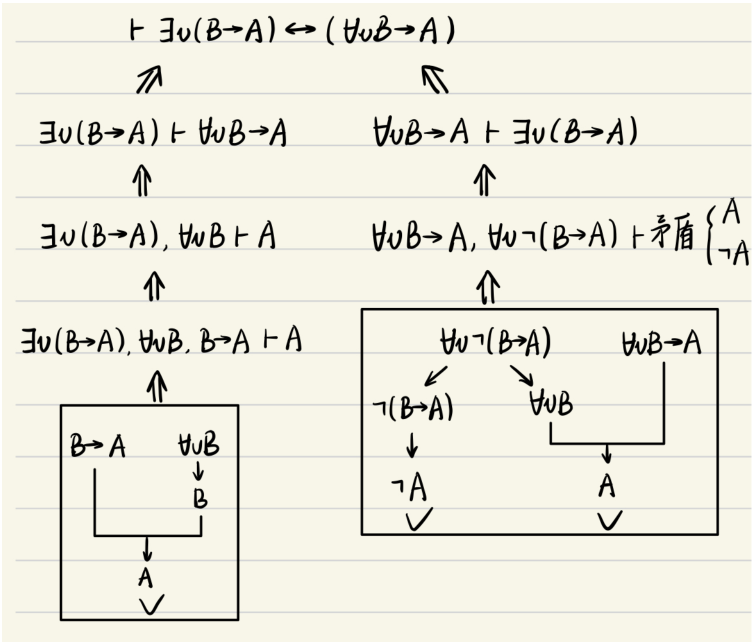
与 $(\vee-)$ 规则的作用类似，存在消除定理的用法是：当 $\exists$ 出现在 $\vdash$ 前时，即需要证明 $\Gamma; \exists A \vdash B$ 时，只需要证明 $\Gamma; \exists A, A \vdash B$ 即可。但是千万千万要注意 v 不能在 Γ（假设集）和 B（结论） 里面自由出现！

例题

例一（2019深圳）

求证：$\vdash_{FC} \exists v(B \to A) \leftrightarrow (\forall vB \to A)$，其中 v 在 A 中无自由出现。

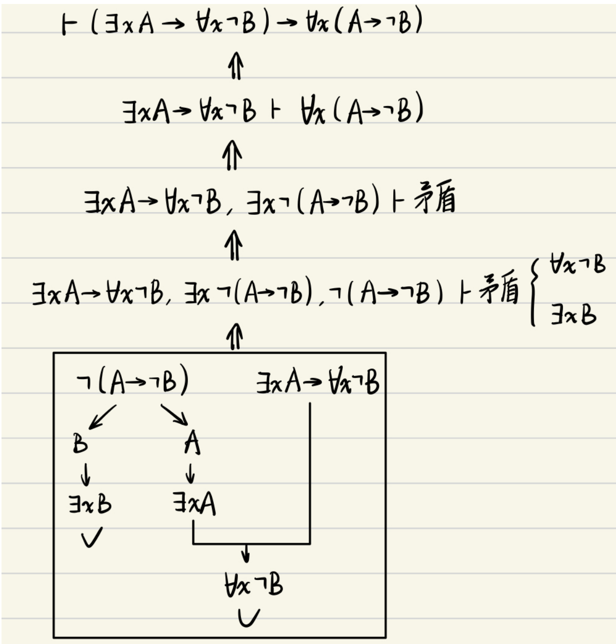
思维过程：



例二（2017本部）

求证：$\vdash_{FC} (\exists xA \to \forall x\neg B) \to \forall x(A \to \neg B)$

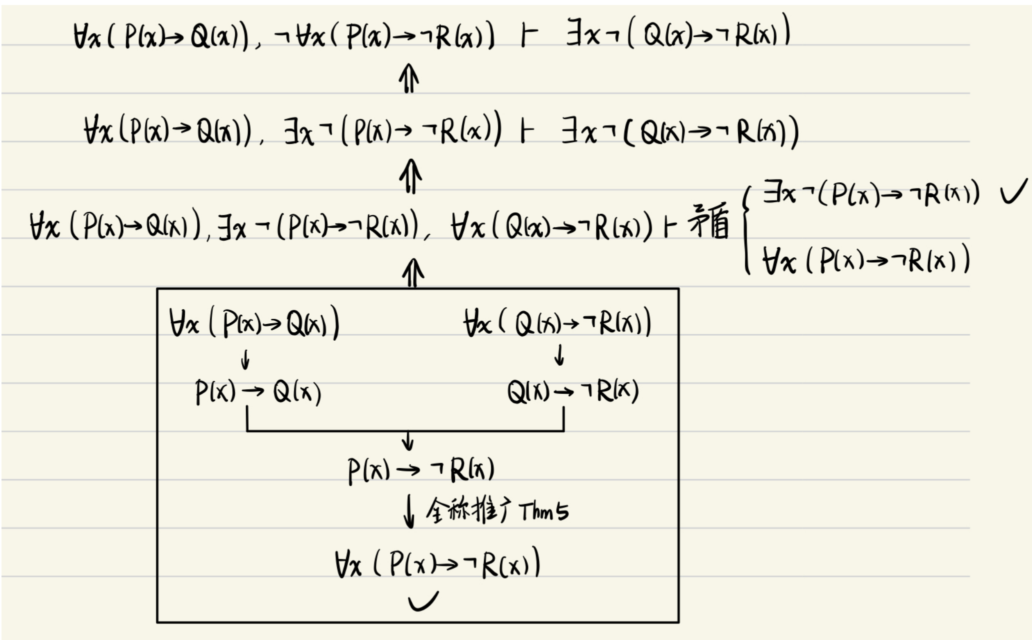
思维过程：



例三（2017本部）

求证：$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to \neg R(x)) \vdash_{FC} \exists x\neg(Q(x) \to \neg R(x))$

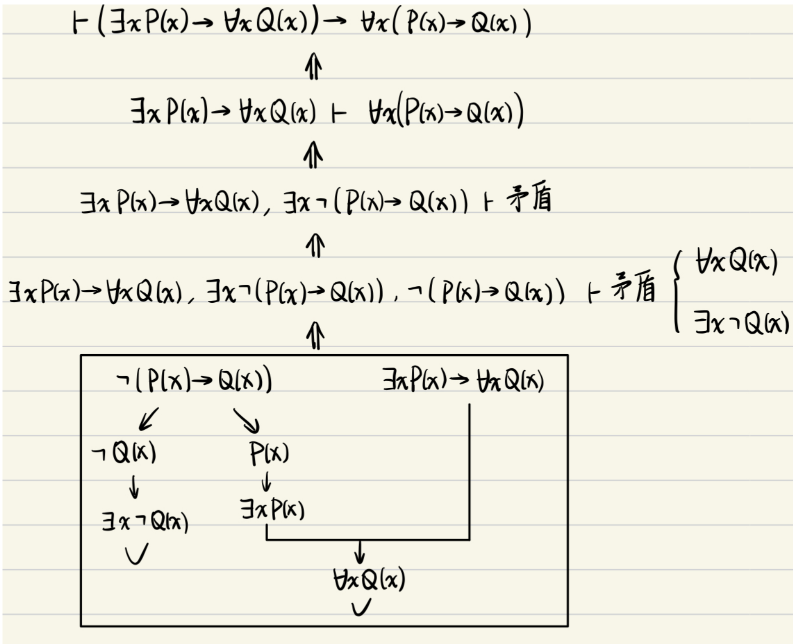
思维过程：



例四（2015本部）

求证：$\vdash_{FC} (\exists x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

思维过程：



例五（2015本部）

求证：$\forall x(P(x) \to \neg(Q(y) \to \neg R(x))) \vdash_{FC} \exists x P(x) \to Q(y)$

思维过程：