ND系统证明思维

xyfJASON

思维过程是证明序列的逆序，即「要证……只需证……」。拿到一道题，只要把思维过程理顺了，证明时倒着写就行了。有时候倒着想卡在某一步了，可以再正向推一下，两面夹击解决问题。

相比 PC 系统，ND 系统的推理规则比较符合人的思维，可能相对好做一点。

推理规则

$$r_1: \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B} \qquad (+)$$

$$r_2: \quad \frac{\Gamma; A \vdash B, \ \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \qquad (-)$$

$$r_3: \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \ \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (\vee+)$$

$$r_4: \quad \frac{\Gamma; A \vdash C, \ \Gamma; B \vdash C, \ \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \qquad (\vee-)$$

$$r_5: \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad (\wedge+)$$

$$r_6: \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \qquad (\wedge-)$$

$$r_7: \quad \frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad (\to +)$$

$$r_8: \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B} \qquad (\to -)$$

$$r_9: \quad \frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \qquad (\neg+)$$

$$r_{10}: \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} \qquad (\neg-)$$

$\neg\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 略去不表。

解题思路

【逆推的终点】一般是 $(\in)$ 或 $(\to -)$ 或 $(\neg -)$

【反证法】源自 $(\neg +)$。要证 $\Gamma \vdash \neg A$，只需把 $\neg A$ 取反放到 $\vdash$ 前面去，然后找矛盾，即只需证 $\Gamma; A \vdash B$ 并且 $\Gamma; A \vdash \neg B$；同理，要证 $\Gamma \vdash A$，只需证 $\Gamma; \neg A \vdash B$ 并且 $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$。

【分类讨论1】源自 $(\vee -)$。当 $\vee$ 出现在 $\vdash$ 前时，就把 $\vee$ 的两边拆开放进条件里分别推导（即分类讨论），然后用 $(\vee -)$ 规则。

【分类讨论2】源自 $(-)$，目的是添上对立的条件之后能推出相同的结论。典型用法有两个：

1. 证明 $\Gamma \vdash A \vee B$ 时，我们这样分类讨论：「当 C 成立时 A 成立，当 C 不成立时 B 成立，所以不管怎么说，$A \vee B$ 都成立」。具体地说，我们只需要证明 $\Gamma; C \vdash A$ 以及 $\Gamma; \neg C \vdash B$，然后使用 $(-)$ 规则即可得到 $\Gamma \vdash A \vee B$.
2. 证明 $A \to B \vdash B$ 时，我们这样分类讨论：「当 A 成立时 B 成立，当 A 不成立时我们可以从 $\neg A$ 推出 B，那么不管怎么说 B 都成立」。具体地说，我们只需要证明 $A \to B, A \vdash B$ 以及 $A \to B, \neg A \vdash B$，然后使用 $(-)$ 规则即可得到 $A \to B \vdash B$.

【$\to$ 前移】当 $\to$ 出现在 $\vdash$ 之后时，必然使用 $(\to +)$ 规则，即：「要证 $\Gamma \vdash A \to B$，只需证 $\Gamma; A \vdash B$」。

【$\to$ 后放】当 $\to$ 出现在 $\vdash$ 之前时，纵观所有 ND 中的推理规则，并没有处理 $\to$ 在 $\vdash$ 前的情况，因而我们只能一直把它保留在 $\vdash$ 前面。一种处理方法是前文的分类讨论，另一种处理方法是：

2. 使用 $(\in)$ 规则让 $\to$ 在 $\vdash$ 后面出现；
3. 想办法用上 $(\to -)$ 规则。

【拆开 $\wedge$】 而当 $\wedge$ 出现在 $\vdash$ 之前时，和 $\to$ 的情况一样，我们只能一直把它保留在 $\vdash$ 前面。要让它发挥作用，也采用类似的方法：

2. 使用 $(\in)$ 规则让 $\wedge$ 在 $\vdash$ 后面出现；
3. 使用 $(\wedge -)$ 规则。

事实上容易发现，条件中含有 $A \wedge B$ 和条件中含有 A, B 并没有本质区别，完全可以无视 $\wedge$。

【逐个击破】当 $\vdash$ 后面要演绎的内容是两个公式相 $\wedge$ 时，就用 $(\wedge +)$ 规则把题目一分为二分别证明。

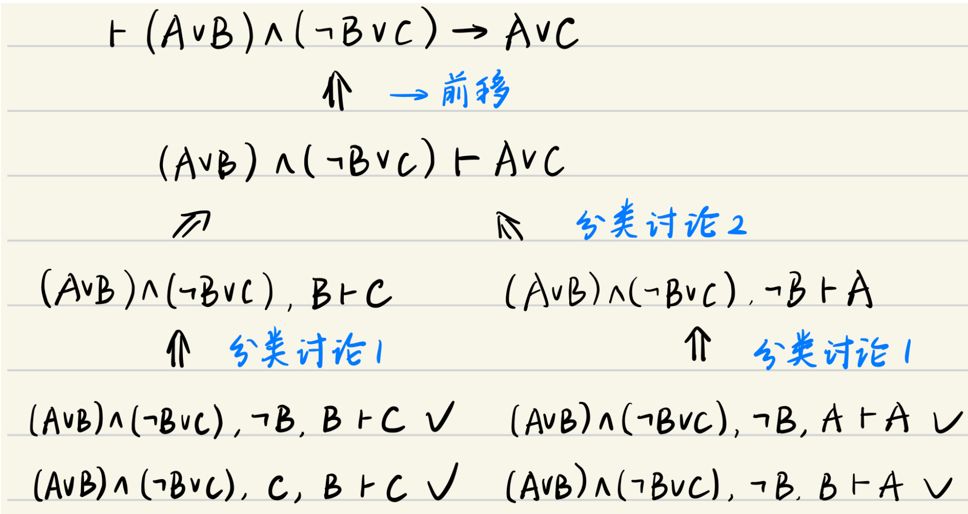
【丢条件】如果一个条件没用，就用 $(+)$ 规则把它直接丢掉。

例题

例一（2019深圳）

求证：$\vdash_{ND} (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to A \vee C$

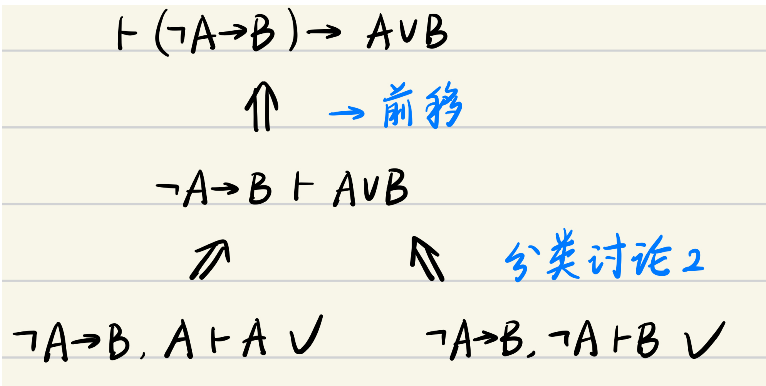
思维过程：



例二（2019深圳）

求证：$\vdash_{ND} (\neg A \to B) \to A \vee B$

思维过程：



例三（2017本部）

求证：$\vdash_{ND} ((A \to B) \to C) \to (B \to C)$

思维过程：

$$\vdash_{ND} ((A \to B) \to C) \to (B \to C)$$

$$\Uparrow \quad \to \text{前移}$$

$$(A \to B) \to C,\ B \vdash C$$

$$\Uparrow \quad \to \text{后放}$$

$$(A \to B) \to C,\ B \vdash A \to B$$

$$\Uparrow \quad \to \text{前移}$$

$$(A \to B) \to C,\ B,\ A \vdash B \quad \checkmark$$

例四（2017本部）

求证：$\vdash_{ND} (B \to \neg C) \to (\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to C)))$

思维过程：

$$\vdash (B \to \neg C) \to (\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to C)))$$

$$\Uparrow \quad \to \text{前移}$$

$$B \to \neg C,\ \neg A,\ B \vdash \neg(\neg A \to C)$$

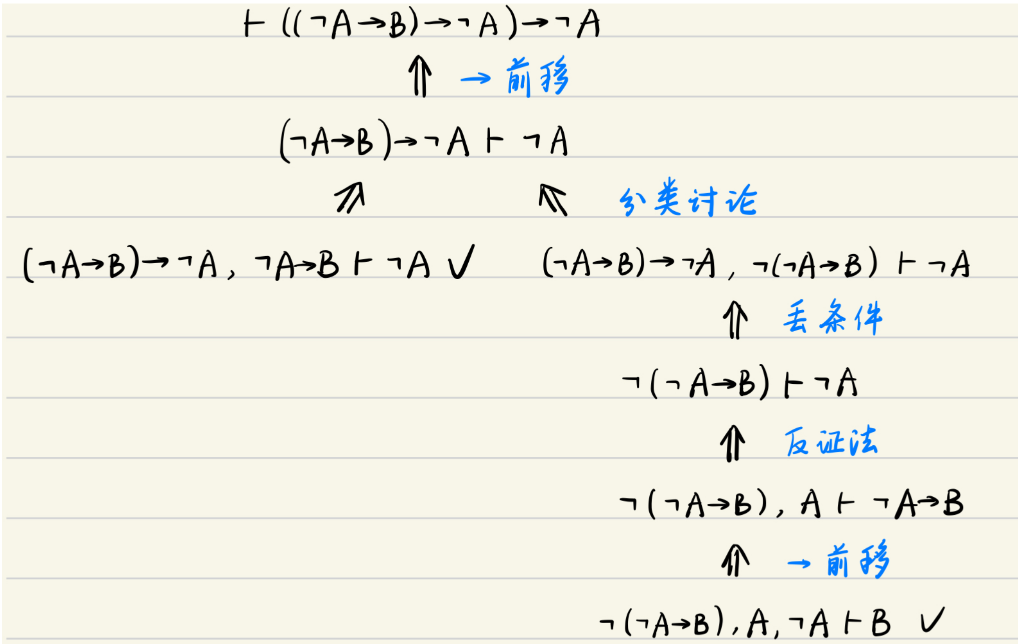
$$\Uparrow \quad \text{反证法}$$

$$B \to \neg C,\ \neg A,\ B,\ \neg A \to C \vdash \text{矛盾} \begin{cases} C \ \checkmark \\ \neg C \ \checkmark \end{cases}$$

例五（2016本部）

求证：$\vdash_{ND} ((\neg A \to B) \to \neg A) \to \neg A$

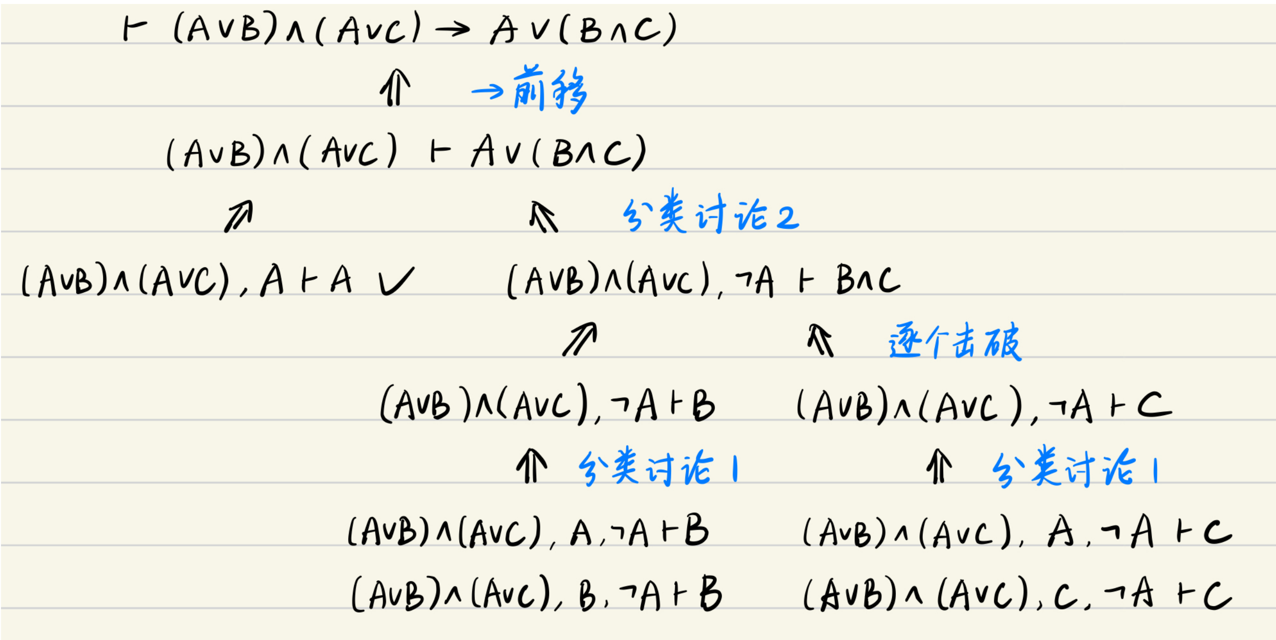
思维过程：



例六（2016本部）

求证：$\vdash_{ND} (A \vee B) \wedge (A \vee C) \to A \vee (B \wedge C)$

思维过程：



例七（2015本部）

求证：$\vdash_{ND} (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to (\neg A \vee C)$

和 2019 深圳的题目本质一样，此处不赘述。

例八（2015本部）

求证：$\vdash_{ND} (\neg A \to \neg(A \to \neg B)) \to A$

思维过程：

$\vdash (\neg A \to \neg(A \to \neg B)) \to A$

$\Uparrow$ $\to$前移

$\neg A \to \neg(A \to \neg B) \vdash A$

$\Uparrow$ 反证法

$\neg A \to \neg(A \to \neg B), \neg A \vdash$ 矛盾 $\begin{cases} \neg(A \to \neg B) \ \checkmark \\ A \to \neg B \end{cases}$

$\Uparrow$ 丢条件

$\neg A \vdash A \to \neg B$

$\Uparrow$ $\to$前移

$\neg A, A \vdash \neg B$ $\checkmark$