数理逻辑第五次作业

姓名	孙铎	班级	5 班	学号	200110503
第 1 题					
第 2 题					
第 3 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱：hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间：2022-06-30-24:00，超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生，应至少提前 1 小时与助教联系沟通（徐朕燃，QQ：1319282215，电话：13713994811 许天骁，QQ：1140931320，电话：18800415868）。 3. 作业文件名命名方式：第 x 次-学号-姓名-x 班（例：第 5 次-180110504-张三-5 班.pdf）；邮件主题为：第 x 次-学号-姓名-x 班（例：第 5 次-180110504-张三-5 班）。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1. P138 1. 设有如下推理语句：
   (1) 没有无知的教授
   (2) 所有无知者均爱虚荣
   (3) 则没有爱虚荣的教授

   试问由(1)和(2)能否推出(3)?

定义谓词：

$F(v)$：v是无知的

$G(v)$：v是教授

$Y(v)$：v爱虚荣

则(1)可表述为：$(\forall v)(G(v) \to \neg F(v))$

(2)可表述为：$(\forall v)(F(v) \to Y(v))$

(3)可表述为：$(\forall v)(G(v) \to \neg Y(v))$

现将v指派为不无知的但爱虚荣的教授，

显然v满足(1)和(2)，但不满足(3)，

所以不能由(1)和(2)推出(3)

2. P138 3.

P138 3. 设 A, B 为FC中的任意公式，变元 v 在 A 中无自由出现，试证：

(1) $\vdash (A \to \exists vB) \to \exists v(A \to B)$

(2) $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$

(3) $\vdash (\forall vB \to A) \to \exists v(B \to A)$

(4) $\vdash \exists v(B \to A) \to (\forall vB \to A)$

(1)

(1). $\vdash \neg A \to (A \to B)$　PC中定理6

(2). $\vdash (\neg A \to (A \to B)) \to (\neg(A \to B) \to A)$　PC中定理14

(3). $\vdash \neg(A \to B) \to A$　(1)和(2)用分离规则

(4). $\vdash \forall v\neg(A \to B) \to \neg(A \to B)$　FC中定理1

(5). $\vdash \forall v\neg(A \to B) \to A$　(3)和(4)用PC中三段论定理8

(6). $\vdash (\forall v\neg(A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg\forall v\neg(A \to B))$　PC中定理13

(7). $\vdash \neg A \to \neg\forall v\neg(A \to B)$　(5)和(6)用分离规则

(8). $\vdash B \to (A \to B)$　公理1

(9). $\vdash (B \to (A \to B)) \to (\neg(A \to B) \to \neg B)$　PC中定理13

(10). $\vdash \neg(A \to B) \to \neg B$　(8)和(9)用分离规则

(11). $\vdash \forall v(\neg(A \to B) \to \neg B)$　(10)使用全称推广定理4

(12). $\vdash \forall v(\neg(A \to B) \to \neg B) \to (\forall v\neg(A \to B) \to \forall v\neg B)$　公理5

(13). $\vdash \forall v\neg(A \to B) \to \forall v\neg B$　(11)和(12)用分离规则

(14). $\vdash (\forall v\neg(A \to B) \to \forall v\neg B) \to (\neg\forall v\neg B \to \neg\forall v\neg(A \to B))$　PC中定理13

(15). $\vdash \neg\forall v\neg B \to \neg\forall v\neg(A \to B)$　(13)和(14)用分离规则

(16). $\vdash \neg A \to \exists v(A \to B)$　(7)和量词之间的关系

(17). $\vdash \exists vB \to \exists v(A \to B)$　(15)和量词之间的关系

(18). $\vdash (A \to \exists vB) \to \exists v(A \to B)$　(16)和(17)用PC中定理18

(2)

(1). $\exists v(A \to B), A \vdash \exists v(A \to B)$　$(\in)$

(2). $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A \to B$　$(\in)$

(3). $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A$　$(\in)$

(4). $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash B$　(2)(3)$(\to -)$

(5). $\exists v(A \to B), A \vdash B$　(1)和(4)用FC中存在消除定理10

(6). $\exists v(A \to B), A \vdash B \to \exists vB$　FC中定理2

(7). $\exists v(A \to B), A \vdash \exists vB$　(5)(6)$(\to -)$

(8). $\exists v(A \to B) \vdash A \to \exists vB$　(7)用演绎定理

(9). $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$　(8)用演绎定理

(3)

$(1). \vdash A \to (B \to A)$　公理1

$(2). \vdash (A \to (B \to A)) \to (\neg(B \to A) \to \neg A)$　PC中定理13

$(3). \vdash \neg(B \to A) \to \neg A$　(1)和(2)用分离规则

$(4). \vdash \forall v(\neg(B \to A) \to \neg A)$　(3)用FC中全称推广定理4

$(5). \vdash \forall v(\neg(B \to A) \to \neg A) \to (\forall v \neg(B \to A) \to \forall v \neg A)$　公理5

$(6). \vdash \forall v \neg(B \to A) \to \forall v \neg A$　(4)和(5)用分离规则

$(7). \vdash \forall v \neg A \to \neg A$　FC中定理1

$(8). \vdash \forall v \neg(B \to A) \to \neg A$　(6)和(7)用PC中三段论定理8

$(9). \forall v \neg(B \to A) \vdash \neg A$　(8)用演绎定理

$(10). \forall vB \to A, \forall v \neg(B \to A) \vdash \neg A$　$(9)(+)$

$(11). \vdash \neg B \to (B \to A)$　PC中定理6

$(12). \vdash (\neg B \to (B \to A)) \to (\neg(B \to A) \to B)$　PC中定理14

$(13). \vdash \neg(B \to A) \to B$　(11)和(12)用分离规则

$(14). \vdash \forall v(\neg(B \to A) \to B)$　(13)用FC中全称推广定理4

$(15). \vdash \forall v(\neg(B \to A) \to B) \to (\forall v \neg(B \to A) \to \forall vB)$　公理5

$(16). \vdash \forall v \neg(B \to A) \to \forall vB$　(14)和(15)用分离规则

$(17). \forall vB \to A \vdash \forall v \neg(B \to A) \to \forall vB$　$(16)(+)$

$(18). \forall vB \to A, \forall v \neg(B \to A) \vdash \forall vB$　(17)用演绎定理

$(19). \forall vB \to A, \forall v \neg(B \to A) \vdash \forall vB \to A$　$(\in)$

$(20). \forall vB \to A, \forall v \neg(B \to A) \vdash A$　$(18)(19)(\to -)$

$(21). \forall vB \to A \vdash \neg \forall v \neg(B \to A)$　(10)和(20)用FC中反证法定理8

$(22). \forall vB \to A \vdash \exists v(B \to A)$　(21)和量词之间的关系

$(23). \vdash (\forall vB \to A) \to \exists v(B \to A)$　(22)用演绎定理

(4)

$(1). \exists v(B \to A), \forall vB \vdash \exists v(B \to A)$　$(\in)$

$(2). \exists v(B \to A), \forall vB, B \to A \vdash B \to A$　$(\in)$

$(3). \exists v(B \to A), \forall vB, B \to A \vdash \forall vB$　$(\in)$

$(4). \exists v(B \to A), \forall vB, B \to A \vdash \forall vB \to B$　FC中定理1

$(5). \exists v(B \to A), \forall vB, B \to A \vdash B$　$(3)(4)(\to -)$

$(6). \exists v(B \to A), \forall vB, B \to A \vdash A$　$(2)(5)(\to -)$

$(7). \exists v(B \to A), \forall vB \vdash A$　(1)和(6)用FC中存在消除定理10

$(8). \exists v(B \to A) \vdash \forall vB \to A$　$(7)(\to +)$

$(9). \vdash \exists v(B \to A) \to (\forall vB \to A)$　$(8)(\to +)$

3. P138 4.

P138 4. 在FC中证明:

（1） $\forall x(A \to B) \vdash\dashv A \to \forall xB$ $\quad x$ 在 A 中无自由出现

（2） $\forall x(A \to B) \vdash\dashv \exists xA \to B$ $\quad x$ 在 B 中无自由出现

（3） $\forall x(A \land B) \vdash\dashv \forall xA \land \forall xB$

（4） $\exists x(A \lor B) \vdash\dashv \exists xA \lor \exists xB$

（1）

$(1).\ \forall x(A \to B)$ 已知假设

$(2).\ \forall x(A \to B) \to (\forall xA \to \forall xB)$ 公理5

$(3).\ \forall xA \to \forall xB$ (1)和(2)用分离规则

$(4).\ A \to \forall xA$ 公理6

$(5).\ A \to \forall xB$ (3)和(4)用PC中三段论定理8

$(6).\ \forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$ (1)和(5)由演绎结果的定义

$(7).\ \forall xB \to B$ FC中定理1

$(8).\ (\forall xB \to B) \to ((A \to \forall xB) \to (A \to B))$ PC中加前件定理4

$(9).\ (A \to \forall xB) \to (A \to B)$ (7)和(8)用分离规则

$(10).\ A \to \forall xB \vdash A \to B$ (9)用演绎定理

$(11).\ A \to \forall xB \vdash \forall x(A \to B)$ (10)用全称推广定理5

$(12).\ \forall x(A \to B) \vdash\dashv A \to \forall xB$ (6)和(11)

（2）

$(1).\ \forall x(A \to B), \exists xA \vdash \exists xA$ $(\in)$

$(2).\ \forall x(A \to B), \exists xA, A \vdash A$ $(\in)$

$(3).\ \forall x(A \to B), \exists xA, A \vdash \forall x(A \to B)$ $(\in)$

$(4).\ \forall x(A \to B), \exists xA, A \vdash \forall x(A \to B) \to (A \to B)$ FC中定理1

$(5).\ \forall x(A \to B), \exists xA, A \vdash A \to B$ $(3)(4)(\to -)$

$(6).\ \forall x(A \to B), \exists xA, A \vdash B$ $(2)(5)(\to -)$

$(7).\ \forall x(A \to B), \exists xA \vdash B$ (1)和(6)用FC中存在消除定理10

$(8).\ \forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to B$ (7)用演绎定理

$(9).\ \exists xA \to B$ 已知假设

$(10).\ A \to \exists xA$ FC中定理2

$(11).\ A \to B$ (9)和(10)用PC中三段论定理8

$(12).\ \exists xA \to B \vdash A \to B$ (9)和(11)由演绎结果的定义

$(13).\ \exists xA \to B \vdash \forall x(A \to B)$ (12)用FC中的全称推广定理5

$(14).\ \forall x(A \to B) \vdash\dashv \exists xA \to B$ (8)和(13)

(3)

(1). $\vdash \forall x(A \wedge B) \to (A \wedge B)$　FC中定理1
(2). $\forall x(A \wedge B) \vdash A \wedge B$　(1)用演绎定理
(3). $\forall x(A \wedge B) \vdash A$　(2)$(\wedge -)$
(4). $\forall x(A \wedge B) \vdash B$　(2)$(\wedge -)$
(5). $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall x A$　(3)用FC中全称推广定理5
(6). $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall x B$　(4)用FC中全称推广定理5
(7). $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall x A \wedge \forall x B$　(5)(6)$(\wedge +)$
(8). $\forall x A \wedge \forall x B \vdash \forall x A \wedge \forall x B$　$(\in)$
(9). $\forall x A \wedge \forall x B \vdash \forall x A$　(8)$(\wedge -)$
(10). $\forall x A \wedge \forall x B \vdash \forall x B$　(8)$(\wedge -)$
(11). $\forall x A \to A$　FC中定理1
(12). $\forall x B \to B$　FC中定理1
(13). $\forall x A \wedge \forall x B \vdash A$　(9)和(11)用分离规则
(14). $\forall x A \wedge \forall x B \vdash B$　(10)和(12)用分离规则
(15). $\forall x A \wedge \forall x B \vdash A \wedge B$　(13)(14)$(\wedge +)$
(16). $\forall x A \wedge \forall x B \vdash \forall x(A \wedge B)$　(15)用FC中全称推广定理5
(17). $\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall x A \wedge \forall x B$　(7)和(16)

(4)

(1). $\exists x(A \vee B) \vdash \exists x(A \vee B)$　$(\in)$
(2). $\exists x(A \vee B), A \vee B \vdash A \vee B$　$(\in)$
(3). $\exists x(A \vee B), A \vee B, A \vdash A$　$(\in)$
(4). $\exists x(A \vee B), A \vee B, B \vdash B$　$(\in)$
(5). $A \to \exists x A$　FC中定理2
(6). $B \to \exists x B$　FC中定理2
(7). $\exists x(A \vee B), A \vee B, A \vdash \exists x A$　(3)(5)$(\to -)$
(8). $\exists x(A \vee B), A \vee B, B \vdash \exists x B$　(4)(6)$(\to -)$
(9). $\exists x(A \vee B), A \vee B, A \vdash \exists x A \vee \exists x B$　(7)$(\vee +)$
(10). $\exists x(A \vee B), A \vee B, B \vdash \exists x A \vee \exists x B$　(8)$(\vee +)$
(11). $\exists x(A \vee B), A \vee B \vdash \exists x A \vee \exists x B$　(2)(9)(10)$(\vee -)$
(12). $\exists x(A \vee B) \vdash \exists x A \vee \exists x B$　(1)和(11)用FC中存在消除定理10
(13). $\exists x A \vee \exists x B \vdash \exists x A \vee \exists x B$　$(\in)$
(14). $\exists x A \vee \exists x B, \exists x A \vdash \exists x A$　$(\in)$
(15). $\exists x A \vee \exists x B, \exists x B \vdash \exists x B$　$(\in)$
(16). $\exists x A \vee \exists x B, \exists x A, A \vdash A$　$(\in)$
(17). $\exists x A \vee \exists x B, \exists x B, B \vdash B$　$(\in)$
(18). $\exists x A \vee \exists x B, \exists x A \vdash A$　(14)和(16)用FC中存在消除定理10
(19). $\exists x A \vee \exists x B, \exists x B \vdash B$　(15)和(17)用FC中存在消除定理10
(20). $\exists x A \vee \exists x B, \exists x A \vdash A \vee B$　(18)$(\vee +)$
(21). $\exists x A \vee \exists x B, \exists x B \vdash A \vee B$　(19)$(\vee +)$
(22). $\exists x A \vee \exists x B \vdash A \vee B$　(13)(20)(21)$(\vee -)$
(23). $A \vee B \to \exists x(A \vee B)$　FC中定理2
(24). $\exists x A \vee \exists x B \vdash \exists x(A \vee B)$　(22)(23)$(\to -)$
(25). $\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists x A \vee \exists x B$　(12)和(24)