

ND系统证明思维

xyfjASON

推理规则

解题思路

例题

例一（2019深圳）

例二（2019深圳）

例三（2017本部）

例四（2017本部）

例五（2016本部）

例六（2016本部）

例七（2015本部）

例八（2015本部）

思维过程是证明序列的逆序，即「要证……只需证……」。拿到一道题，只要把思维过程理顺了，证明时倒着写就行了。有时候倒着想卡在某一步了，可以再正向推一下，两面夹击解决问题。

相比 PC 系统，ND 系统的推理规则比较符合人的思维，可能相对好做一点。

推理规则

$r_1 :$	$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}$	$(+)$
$r_2 :$	$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$	$(-)$
$r_3 :$	$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$	$(\vee+)$
$r_4 :$	$\frac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$	$(\vee-)$
$r_5 :$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$	$(\wedge+)$
$r_6 :$	$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$	$(\wedge-)$
$r_7 :$	$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$	$(\rightarrow +)$
$r_8 :$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$	$(\rightarrow -)$
$r_9 :$	$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$	$(\neg+)$
$r_{10} :$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$	$(\neg-)$

$\neg\neg$ 和 \leftrightarrow 略去不表。

解题思路

【逆推的终点】一般是 (\in) 或 $(\rightarrow -)$ 或 $(\neg -)$

【反证法】源自 $(\neg +)$ 。要证 $\Gamma \vdash \neg A$ ，只需把 $\neg A$ 取反放到 \vdash 前面去，然后找矛盾，即只需证 $\Gamma; A \vdash B$ 并且 $\Gamma; A \vdash \neg B$ ；同理，要证 $\Gamma \vdash A$ ，只需证 $\Gamma; \neg A \vdash B$ 并且 $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$ 。

【分类讨论1】源自 $(\vee -)$ 。当 \vee 出现在 \vdash 前时，就把 \vee 的两边拆开放进条件里分别推导（即分类讨论），然后用 $(\vee -)$ 规则。

【分类讨论2】源自 $(-)$ ，目的是添上对立的条件之后能推出相同的结论。典型用法有两个：

1. 证明 $\Gamma \vdash A \vee B$ 时，我们这样分类讨论：「当 C 成立时 A 成立，当 C 不成立时 B 成立，所以不管怎么说， $A \vee B$ 都成立」。具体地说，我们只需要证明 $\Gamma; C \vdash A$ 以及 $\Gamma; \neg C \vdash B$ ，然后使用 $(-)$ 规则即可得到 $\Gamma \vdash A \vee B$ 。
2. 证明 $A \rightarrow B \vdash B$ 时，我们这样分类讨论：「当 A 成立时 B 成立，当 A 不成立时我们可以从 $\neg A$ 推出 B ，那么不管怎么说 B 都成立」。具体地说，我们只需要证明 $A \rightarrow B, A \vdash B$ 以及 $A \rightarrow B, \neg A \vdash B$ ，然后使用 $(-)$ 规则即可得到 $A \rightarrow B \vdash B$ 。

【 \rightarrow 前移】当 \rightarrow 出现在 \vdash 之后时，必然使用 $(\rightarrow +)$ 规则，即：「要证 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ ，只需证 $\Gamma; A \vdash B$ 」。

【 \rightarrow 后放】当 \rightarrow 出现在 \vdash 之前时，纵观所有 ND 中的推理规则，并没有处理 \rightarrow 在 \vdash 前的情况，因而我们只能一直把它保留在 \vdash 前面。一种处理方法是前文的分类讨论，另一种处理方法是：

2. 使用 (\in) 规则让 \rightarrow 在 \vdash 后面出现；
3. 想办法用上 $(\rightarrow -)$ 规则。

【拆开 \wedge 】而当 \wedge 出现在 \vdash 之前时，和 \rightarrow 的情况一样，我们只能一直把它保留在 \vdash 前面。要让它发挥作用，也采用类似的方法：

2. 使用 (\in) 规则让 \wedge 在 \vdash 后面出现；
3. 使用 $(\wedge -)$ 规则。

事实上容易发现，条件中含有 $A \wedge B$ 和条件中含有 A, B 并没有本质区别，完全可以无视 \wedge 。

【逐个击破】当 \vdash 后面要演绎的内容是两个公式相 \wedge 时，就用 $(\wedge +)$ 规则把题目一分为二分别证明。

【丢条件】如果一个条件没用，就用 $(+)$ 规则把它直接丢掉。

例题

例一（2019深圳）

求证： $\vdash_{ND} (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \rightarrow A \vee C$

思维过程：

$\vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \rightarrow A \vee C$	
$\uparrow \rightarrow$ 前移	
$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee C$	
\nearrow	\nwarrow 分类讨论 2
$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash C$	$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), \neg B \vdash A$
\uparrow 分类讨论 1	\uparrow 分类讨论 1
$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), \neg B, B \vdash C \checkmark$	$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), \neg B, A \vdash A \checkmark$
$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), C, B \vdash C \checkmark$	$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), \neg B, B \vdash A \checkmark$

例二（2019深圳）

求证： $\vdash_{ND} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow A \vee B$

思维过程：

$\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow A \vee B$	
$\uparrow \rightarrow$ 前移	
$\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$	
\nearrow	\nwarrow 分类讨论 2
$\neg A \rightarrow B, A \vdash A \checkmark$	$\neg A \rightarrow B, \neg A \vdash B \checkmark$

例三 (2017本部)

求证: $\vdash_{ND} ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$

思维过程:

$\vdash_{ND} ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$
$\uparrow \rightarrow \text{前移}$
$(A \rightarrow B) \rightarrow C, B \vdash C$
$\uparrow \rightarrow \text{后放}$
$(A \rightarrow B) \rightarrow C, B \vdash A \rightarrow B$
$\uparrow \rightarrow \text{前移}$
$(A \rightarrow B) \rightarrow C, B, A \vdash B \quad \checkmark$

例四 (2017本部)

求证: $\vdash_{ND} (B \rightarrow \neg C) \rightarrow (\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C)))$

思维过程:

$\vdash (B \rightarrow \neg C) \rightarrow (\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C)))$
$\uparrow \rightarrow \text{前移}$
$B \rightarrow \neg C, \neg A, B \vdash \neg(\neg A \rightarrow C)$
$\uparrow \rightarrow \text{反证法}$
$B \rightarrow \neg C, \neg A, B, \neg A \rightarrow C \vdash \text{矛盾} \begin{cases} C \checkmark \\ \neg C \checkmark \end{cases}$

例五 (2016本部)

求证: $\vdash_{ND} ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$

思维过程:

$\vdash ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$
$\uparrow \rightarrow$ 前移
$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vdash \neg A$
$\nearrow \quad \nwarrow$ 分类讨论
$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A, \neg A \rightarrow B \vdash \neg A \quad \vee \quad (\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A, \neg(\neg A \rightarrow B) \vdash \neg A$
\uparrow 丢条件
$\neg(\neg A \rightarrow B) \vdash \neg A$
\uparrow 反证法
$\neg(\neg A \rightarrow B), A \vdash \neg A \rightarrow B$
$\uparrow \rightarrow$ 前移
$\neg(\neg A \rightarrow B), A, \neg A \vdash B \quad \vee$

例六 (2016本部)

求证: $\vdash_{ND} (A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow A \vee (B \wedge C)$

思维过程:

$\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow A \vee (B \wedge C)$
$\uparrow \rightarrow$ 前移
$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$
$\nearrow \quad \nwarrow$ 分类讨论 2
$(A \vee B) \wedge (A \vee C), A \vdash A \quad \vee \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C), \neg A \vdash B \wedge C$
$\uparrow \quad \nwarrow$ 逐个击破
$(A \vee B) \wedge (A \vee C), \neg A \vdash B \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C), \neg A \vdash C$
\uparrow 分类讨论 1 $\quad \uparrow$ 分类讨论 1
$(A \vee B) \wedge (A \vee C), A, \neg A \vdash B \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C), A, \neg A \vdash C$
$(A \vee B) \wedge (A \vee C), B, \neg A \vdash B \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C), C, \neg A \vdash C$

例七 (2015本部)

求证: $\vdash_{ND} (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \rightarrow (\neg A \vee C)$

和 2019 深圳的题目本质一样, 此处不赘述。

例八 (2015本部)

求证: $\vdash_{ND} (\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A$

思维过程:

$\vdash (\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A$
$\uparrow \rightarrow$ 前移
$\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A$
\uparrow 反证法
$\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B), \neg A \vdash \text{矛盾} \quad \left\{ \begin{array}{l} \neg(A \rightarrow \neg B) \checkmark \\ A \rightarrow \neg B \end{array} \right.$
\uparrow 丢条件
$\neg A \vdash A \rightarrow \neg B$
$\uparrow \rightarrow$ 前移
$\neg A, A \vdash \neg B \quad \checkmark$