数理逻辑

户保田
e-mail:hubaotian@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2022年5月

自然演绎系统ND的语言部分

字母表是集合：

$$\sum = \{(\,,\,)\,, \neg, \wedge\,, \vee\,, \longrightarrow\,, \longleftrightarrow\,, p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

注释：

（1）三个部分构成：助记符 + 联结词 + $Atom(L^p)$。

（2）$\{p, q, r, p_1, p_2, \cdots\}$ 就是 $Atom(L^p)$。

（3）$\{\neg, \wedge\,, \vee\,, \longrightarrow\,, \longleftrightarrow\}$是联结词。

（4）$\{(,)\}$是助记符。目的是体现公式的层次感。

自然演绎系统ND的语言部分

字母表： $\sum = \{(\,,\,)\,,\neg,\wedge\,,\vee\,,\longrightarrow\,,\longleftrightarrow\,,p,q,r,p_1,p_2,p_3,\ldots\}$

助记符+完备联结词组+ $Atom(L^p)$

ND的公式（递归定义）：

（1） $p,q,r,p_1,p_2,p_3,\ldots$为（原子）公式。

（2）如果 A、B 是公式，那么$\neg A$、$A \wedge B$、$A \vee B$、$A \rightarrow B$、$A \leftrightarrow B$也是公式。

（3）只有（1）和（2）确定的$\sum^*$的字符串才是公式。在不产生歧义的情况下，公式中最外层的括号可以省略。

自然演绎系统ND中的公理

公理模式：

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A \ (\in)$$

注释：

（1）ND中只有这一条公理

（2）Γ代表的是ND中的公式集合

（3）A代表的是ND中的公式

（4）该公理实际上表示了一个公理模板

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则1：假设引入规则，出自重言式$B \to (A \to B)$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B} \quad (+)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma \vdash B$，则可得以Γ为前提对$A \to B$的如下演绎序列：

$$B，B \to (A \to B)，A \to B$$

- 从而$\Gamma \vdash A \to B$，再由演绎定理知$\Gamma; A \vdash B$。

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则2：假设消除规则，出自重言式$\neg A \to (A \to B)$

$$\frac{\Gamma;A \vdash B，\Gamma;\neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad (-)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma; A \vdash B$，$\Gamma; \neg A \vdash B$，根据演绎定理知：$\Gamma \vdash A \to B$，$\Gamma \vdash \neg A \to B$
- 可构造以Γ为前提的如下演绎序列：
  (1) $A \to B$ 已知条件
  (2) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 定理13
  (3) $\neg B \to \neg A$ （1）和（2）用rmp分离规则
  (4) $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ 定理14
  (5) $\neg A \to B$ 已知条件
  (6) $\neg B \to A$ （5）和（4）用rmp分离规则
  (7) $(\neg B \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$ 定理16
  (8) $(\neg B \to \neg A) \to B$ （6）和（7）用rmp分离规则
  (9) B （3）和（8）用rmp分离规则
- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则3：析取引入规则，出自重言式$A \rightarrow A \vee B, B \rightarrow A \vee B$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\vee +)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma \vdash A$可以得到以Γ为前提的如下演绎序列：

$$A\ ,\ A \rightarrow A \vee B,\quad A \vee B$$

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash A \vee B$
- 由$\Gamma \vdash B$可以得到以Γ为前提的如下演绎序列：

$$B\ ,\ B \rightarrow A \vee B,\quad A \vee B$$

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash A \vee B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则4：析取消除规则，出自重言式$(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C) \to C$

$$\frac{\Gamma;A\vdash C,\quad \Gamma;B\vdash C,\quad \Gamma\vdash A\vee B}{\Gamma\vdash C}\ (\vee-)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma; A \vdash C$和$\Gamma; B \vdash C$，根据演绎定理知：$\Gamma \vdash A \to C$，$\Gamma \vdash B \to C$
- 可以构造以Γ为前提的如下演绎序列：

  （1） $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ 定理22二难推理

  （2） $A \to C$ 已知条件

  （3） $(B \to C) \to (A \vee B \to C)$ （2）和（1）用rmp分离规则

  （4） $B \to C$ 已知条件

  （5） $A \vee B \to C$ （4）和（3）用rmp分离规则

  （6） $A \vee B$ 已知条件

  （7） C （6）和（5）用rmp分离规

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash C$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则5：合取引入规则，出自重言式$A \to (B \to A \wedge B))$

$$\frac{\Gamma \vdash A,\quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad (\wedge+)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma \vdash A$、$\Gamma \vdash B$，可以构造以Γ为前提的如下演绎序列：

  (1) A 已知条件

  (2) B 已知条件

  (3) $A \to (B \to A \wedge B)$ 定理26

  (4) $B \to A \wedge B$ （1）和（3）用rmp分离规则

  (5) $A \wedge B$ （2）和（4）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash A \wedge B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则6：合取消除规则，出自重言式$A \wedge B \to A, A \wedge B \to B)$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \ (\wedge -)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma \vdash A \wedge B$可以构造以Γ为前提的如下演绎序列：

  （1） $A \wedge B$ 已知条件

  （2） $A \wedge B \to \mathrm{A}$ 定理24

  （3） A （1）和（2）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash A$
- 由$\Gamma \vdash A \wedge B$也可以构造以Γ为前提的如下演绎序列：

  （1） $A \wedge B$ 已知条件

  （2） $A \wedge B \to B$ 定理25

  （3） B （1）和（2）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则7：蕴含引入规则

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad (\to +)$$

证明(PC证明)：

由$\Gamma; A \vdash B$根据演绎定理知$\Gamma \vdash A \to B$。

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则8：蕴含消除规则

$$\frac{\Gamma \vdash A,\quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \quad (\rightarrow -)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma \vdash A$、$\Gamma \vdash A \rightarrow B$可以构造以$\Gamma$为前提的如下演绎序列：

  （1）A 已知条件

  （2）$A \rightarrow B$ 已知条件

  （3）B （1）和（2）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则9：¬引入规则

$$\frac{\Gamma;A\vdash B,\quad \Gamma;A\vdash\neg B}{\Gamma\vdash\neg A}\ (\neg+)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma; A \vdash B$，$\Gamma; A \vdash \neg B$根据演绎定理知：$\Gamma \vdash A \rightarrow B$，$\Gamma \vdash A \rightarrow \neg B$
- 可以构造以Γ为前提的如下演绎序列：

  (1) $A \rightarrow B$ 已知条件

  (2) $A \rightarrow \neg B$ 已知条件

  (3) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ 定理17

  (4) $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ （1）和（3）用rmp分离规则

  (5) $\neg A$ （2）和（4）用rmp分离规则
- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash \neg A$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则10： ¬消除规则，出自重言式 $A \to (\neg A \to B)$

$$\frac{\Gamma \vdash A,\quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}\ (\neg -)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A$，构造以$\Gamma$为前提的如下演绎序列：

  (1) A 已知条件

  (2) $\neg A$ 已知条件

  (3) $A \to (\neg A \to B)$定理7

  (4) $\neg A \to B$ （1）和（3）用rmp分离规则

  (5) B （2）和（4）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则11： ¬¬引入规则，出自重言式$A \to \neg\neg A$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\ (\neg\neg+)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma \vdash A$构造以Γ为前提的如下演绎序列：

  (1) A　已知条件

  (2) $A \to \neg\neg A$ 定理12

  (3) $\neg\neg A$　(1) 和 (2) 用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash \neg\neg A$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则12： ¬¬消除规则，出自重言式$\neg\neg A \rightarrow A$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ (\neg\neg-)$$

证明(PC证明)：

- 由$\Gamma \vdash \neg\neg A$构造以Γ为前提的如下演绎序列：

  （1） $\neg\neg A$　　已知条件

  （2） $\neg\neg A \rightarrow A$ 定理10

  （3） A （1）和（2）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash A$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则13： 等价引入规则，出自↔的定义

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B,\ \ \Gamma \vdash B \rightarrow A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}\ (\leftrightarrow +)$$

证明：根据↔的定义而得

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

推理规则14： 等价消除规则，出自↔的定义

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \to B}, \quad \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \to A} \ (\leftrightarrow-)$$

证明：根据↔的定义而得

自然演绎系统ND的推理规则

公理模式： $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ $(\in)$

推理规则1：假设引入规则， $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}$ $(+)$

推理规则2：假设消除规则， $\dfrac{\Gamma; A \vdash B,\quad \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$ $(-)$

推理规则3：析取引入规则， $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$ ， $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $(\vee+)$

推理规则4：析取消除规则， $\dfrac{\Gamma; A \vdash C,\quad \Gamma; B \vdash C,\quad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$ $(\vee-)$

推理规则5：合取引入规则， $\dfrac{\Gamma \vdash A,\quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$ $(\wedge+)$

推理规则6：合取消除规则， $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$ ， $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$ $(\wedge-)$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则7：→引入规则，$\dfrac{\Gamma;A\vdash B}{\Gamma\vdash A\to B}$ (→+)

推理规则8：→消除规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A,\quad \Gamma\vdash A\to B}{\Gamma\vdash B}$ (→−)

推理规则9：¬引入规则，$\dfrac{\Gamma;A\vdash B,\quad \Gamma;A\vdash \neg B}{\Gamma\vdash \neg A}$ (¬+)

推理规则10：¬消除规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A,\quad \Gamma\vdash \neg A}{\Gamma\vdash B}$ (¬−)

推理规则11：¬¬引入规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash \neg\neg A}$ (¬¬+)

推理规则12：¬¬消除规则，$\dfrac{\Gamma\vdash \neg\neg A}{\Gamma\vdash A}$ (¬¬−)

推理规则13：↔引入规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A\to B,\quad \Gamma\vdash B\to A}{\Gamma\vdash A\leftrightarrow B}$ (↔+)

推理规则14：↔消除规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A\leftrightarrow B}{\Gamma\vdash A\to B}$，$\dfrac{\Gamma\vdash A\leftrightarrow B}{\Gamma\vdash B\to A}$ (↔−)

自然演绎系统ND的演绎和定理

演绎结果:在ND 系统中称A为Γ的演绎结果，记为$\Gamma \vdash_{ND} A$，如果存在一个序列:

$$\Gamma_1 \vdash A_1, \ \Gamma_2 \vdash A_2, \ \ldots, \ \Gamma_m \vdash A_m \ (= \Gamma \vdash A)$$

对任意的$i = 1,2,\ldots,m$，$\Gamma_i \vdash A_i$ 都满足下列情况之一:

- $\Gamma_i \vdash A_i$ 公理
- $\Gamma_i \vdash A_i$ 是$\Gamma_j \vdash A_j$ $(j < i)$
- $\Gamma_i \vdash A_i$ 是$\Gamma_{j_1} \vdash A_{j_1}, \Gamma_{j_2} \vdash A_{j_2}, \ldots, \Gamma_{j_k} \vdash A_{j_k}$ $(j_1, j_2, \ldots, j_k < i)$使用推理规则导出

特别地，称A 为ND的定理，如果$\Gamma \vdash A$，并且$\Gamma = \emptyset$，即$\vdash A$。

自然演绎系统ND的基本定理

定理1：$\vdash_{ND} A \vee \neg A$

定理2：$\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

定理3：$\vdash_{ND} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

定理4: $\neg A \to B \vdash\dashv A \wedge \neg B$

定理5：$A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$

定理6：$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

定理7：PC的公理是ND的定理，即

(1) $\vdash_{ND} A \to (B \to A)$

(2) $\vdash_{ND} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(3) $\vdash_{ND} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

定理1

定理1： $\vdash_{ND} A \vee \neg A$

证明:

1. $A \vdash A$ $(\in)$
2. $A \vdash A \vee \neg A$ $(1)(\vee+)$
3. $\neg A \vdash \neg A$ $(\in)$
4. $\neg A \vdash A \vee \neg A$ $(3)(\vee+)$
5. $\vdash A \vee \neg A$ $(2)(4)(-)$

定理2

定理2：$\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

证明：先证 $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$

1. $\neg(A \vee B), A \vdash A$ $(\in)$
2. $\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B$ $(1)(\vee+)$
3. $\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)$ $(\in)$
4. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ $(2)(3)(\neg+)$
5. $\neg(A \vee B), B \vdash B$ $(\in)$
6. $\neg(A \vee B), B \vdash A \vee B$ $(5)(\vee+)$
7. $\neg(A \vee B), B \vdash \neg(A \vee B)$ $(\in)$
8. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$ $(6)(7)(\neg+)$
9. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$ $(4)(8)(\wedge+)$
10. $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$ $(9)(\rightarrow+)$

定理2

定理2：$\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

证明：再证 $\vdash \neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$

11. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A$ $(\in)$
12. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A \wedge \neg B$ $(\in)$
13. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A$ (12)$(\wedge -)$
14. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A \wedge \neg A$ (11)(13)$(\wedge +)$
15. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash B$ $(\in)$
16. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg A \wedge \neg B$ $(\in)$
17. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg B$ (16)$(\wedge -)$
18. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash A \wedge \neg A$ (15)(17)$(\neg -)$
19. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \vee B$ $(\in)$
20. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \wedge \neg A$ (14)(18)(19)$(\vee -)$
21. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A$ (20)$(\wedge -)$
22. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \neg A$ (20)$(\wedge -)$
23. $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ (21)(22)$(\neg +)$
24. $\vdash \neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$ (24)$(\to +)$
25. $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (10)(24) $(\leftrightarrow +)$

定理3

定理3： $\vdash_{ND} \neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow \neg \mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B}$

证明：先证 $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$

(1) $\neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A (\in)$

(2) $\neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A \vee \neg B$ $(1)(\vee+)$

(3) $\neg(A \wedge B), A, B \vdash A (\in)$

(4) $\neg(A \wedge B), A, B \vdash B$ $(\in)$

(5) $\neg(A \wedge B), A, B \vdash A \wedge B$ $(3)(4)(\wedge+)$

(6) $\neg(A \wedge B), A, B \vdash \neg(A \wedge B)$ $(\in)$

(7) $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg B$ $(5)(6)(\neg+)$

(8) $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg A \vee \neg B$ $(7)(\vee+)$

(9) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ $(8)(2)(-)$

(10) $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$ $(9)(\rightarrow+)$

定理3

定理3： $\vdash_{ND} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

证明：再证 $\vdash \neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$

(11) $\neg A \vee \neg B,\ A \wedge B, \neg A \vdash A \wedge B$ $(\in)$

(12) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg A \vdash A$ $(11)(\wedge -)$

(13) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

(14) $\neg A \vee \neg B,\ A \wedge B, \neg A \vdash A \wedge \neg A$ $(12)(13)(\wedge +)$

(15) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg B \vdash A \wedge B$ $(\in)$

(16) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg B \vdash B$ $(15)(\wedge -)$

(17) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg B \vdash \neg B$ $(\in)$

(18) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg B \vdash A \wedge \neg A$ $(16)(17)(\neg -)$

(19) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash \neg A \vee \neg B$ $(\in)$

(20) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash A \wedge \neg A$ $(14)(18)(19)(\vee -)$

(21) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash A$ $(20)(\wedge -)$

(22) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash \neg A$ $(20)(\wedge -)$

(23) $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ $(21)(22)(\neg +)$

(24) $\vdash \neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$ $(23)(\to +)$

(25) $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $(10)(24)(\leftrightarrow +)$

定理4

定理4:$\neg A \rightarrow B \vdash\dashv A \vee B$

证明：先证$\neg A \rightarrow B \vdash_{ND} A \vee B$

1: $\neg A \rightarrow B, A \vdash A$ $(\in)$

2: $\neg A \rightarrow B, A \vdash A \vee B$ $(1)(\vee+)$

3: $\neg A \rightarrow B, \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

4: $\neg A \rightarrow B, \neg A \vdash \neg A \rightarrow B$ $(\in)$

5: $\neg A \rightarrow B, \neg A \vdash B$ $(3)(4)(\rightarrow -)$

6: $\neg A \rightarrow B, \neg A \vdash A \vee B$ $(5)(\vee+)$

7: $\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B$ $(2)(6)(-)$

定理4

定理4:$\neg A \to B \vdash\dashv A \vee B$

证明：再证$A \vee B \vdash_{ND} \neg A \to B$

1：$A \vee B, \neg A, A \vdash A \quad (\in)$

2：$A \vee B, \neg A, A \vdash \neg A \quad (\in)$

3：$A \vee B, \neg A, A \vdash B \quad (1)(2)(\neg-)$

4：$A \vee B, \neg A, B \vdash B \quad (\in)$

5：$A \vee B, \neg A \vdash A \vee B \ (\in)$

6：$A \vee B, \neg A \vdash B \quad (3)(4)(5)(\vee-)$

7：$A \vee B \vdash \neg A \to B \quad (6)(\to+)$

定理5

定理5：$A \rightarrow B \vdash\dashv \neg A \vee B$

证明：先证$A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

(1) $A \rightarrow B, \neg A \vdash \neg A$ (∈)

(2) $A \rightarrow B, \neg A \vdash \neg A \vee B$ (1) (∨+)

(3) $A \rightarrow B, A \vdash A$ (∈)

(4) $A \rightarrow B, A \vdash A \rightarrow B$ (∈)

(5) $A \rightarrow B, A \vdash B$ (3) (4) (→−)

(6) $A \rightarrow B, A \vdash \neg A \vee B$ (5) (∨+)

(7) $A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$ (6) (2) (¬−)

定理5

定理5：$A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$

证明：再证$\neg A \vee B \vdash A \to B$

(1) $\neg A \vee B, A, \neg A \vdash A$ $(\in)$

(2) $\neg A \vee B, A, \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

(3) $\neg A \vee B, A, \neg A \vdash B$ (1) (2) $(\neg -)$

(4) $\neg A \vee B, A, B \vdash B$ $(\in)$

(5) $\neg A \vee B, A \vdash \neg A \vee B$ $(\in)$

(6) $\neg A \vee B, A \vdash B$ (3) (4) (5) $(\vee -)$

(7) $\neg A \vee B \vdash A \to B$ (6) $(\to +)$

(8) $A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$

定理6

定理6：$\vdash A \land (B \lor C) \leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$

证明：先证 $\vdash A \land (B \lor C) \rightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$

1：$A \land (B \lor C), B \vdash B$　($\in$)

2：$A \land (B \lor C), B \vdash A \land (B \lor C)$　($\in$)

3：$A \land (B \lor C), B \vdash A$　(2)($\land-$)

4：$A \land (B \lor C), B \vdash A \land B$　(3)(1)($\land+$)

5：$A \land (B \lor C), B \vdash (A \land B) \lor (A \land C)$　(4)($\lor+$)

6：$A \land (B \lor C), C \vdash C$　($\in$)

7：$A \land (B \lor C), C \vdash A \land (B \lor C)$　($\in$)

8：$A \land (B \lor C), C \vdash A$　(7)($\land-$)

9：$A \land (B \lor C), C \vdash A \land C$　(6)(8)($\land+$)

10：$A \land (B \lor C), C \vdash (A \land B) \lor (A \land C)$　(9)($\lor+$)

11：$A \land (B \lor C) \vdash A \land (B \lor C)$　($\in$)

12：$A \land (B \lor C) \vdash B \lor C$　(11)($\land-$)

13：$A \land (B \lor C) \vdash (A \land B) \lor (A \land C)$　(5)(10)(12)($\lor-$)

14：$\vdash A \land (B \lor C) \rightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$　(13)($\rightarrow+$)

定理6

定理6：$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

证明：再证 $\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$

15：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash A$ (∈)之上做(∧−)

16：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash B$ (∈)之上做(∧−)

17：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash B \vee C$ (16)(∨+)

18：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash A \wedge (B \vee C)$ (15)(17)(∧+)

19：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash A$ (∈)之上做(∧−)

20：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash C$ (∈)之上做(∧−)

21：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash B \vee C$ (20)(∨+)

22：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash A \wedge (B \vee C)$ (19)(21)(∧+)

23：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (∈)

24：$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$ (18)(22)(23)(∨−)

25：$\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$ (24)(→+)

26：$\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \leftrightarrow A \wedge (B \vee C)$ (14)(25)(↔+)

定理7

定理7：PC的公理是ND的定理，即

(1) $\vdash_{ND} A \to (B \to A)$

(2) $\vdash_{ND} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(3) $\vdash_{ND} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

(1) $\vdash A \to (B \to A)$

证明：

1： $A, B \vdash A$ $(\in)$

2： $A \vdash B \to A$ $(1)(\to+)$

3： $\vdash A \to (B \to A)$ $(2)(\to+)$

定理7

(2) $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

证明:

1: $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A$ $(\in)$

2: $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A \to B$ $(\in)$

3: $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A \to (B \to C)$ $(\in)$

4: $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash B$ $(1)(2)(\to -)$

5: $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash B \to C$ $(1)(3)(\to -)$

6: $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash C$ $(4)(5)(\to -)$

7: $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$ $(6)(\to +)$

8: $A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$ $(7)(\to +)$

9: $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ $(8)(\to +)$

定理7

(3) $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

证明:

1: $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash B$ $(\in)$

2: $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

3: $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg A \to \neg B$ $(\in)$

4: $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg B$ $(2)(3)(\to-)$

5: $\neg A \to \neg B, B \vdash \neg\neg A$ $(1)(4)(\neg+)$

6: $\neg A \to \neg B, B \vdash A$ $(5)(\neg\neg-)$

7: $\neg A \to \neg B \vdash B \to A$ $(6)(\to+)$

8: $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ $(7)(\to+)$

自然演绎系统ND的基本定理

定理1： $\vdash_{ND} A \vee \neg A$ √

定理2： $\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ √

定理3： $\vdash_{ND} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ √

定理4: $\neg A \to B \vdash\dashv A \wedge \neg B$ √

定理5： $A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$ √

定理6： $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ √

定理7： PC的公理是ND的定理，即 √

(1) $\vdash_{ND} A \to (B \to A)$

(2) $\vdash_{ND} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(3) $\vdash_{ND} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$