数理逻辑

户保田
e-mail:hubaotian@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2022年6月

FC的基本定理

定理1（定理5.2.1）：对于FC中的任何公式A，变元v: √

$$\vdash_{FC} \forall v A \rightarrow A$$

定理2（定理5.2.2）：对于FC中的任何公式A，变元v：√

$$\vdash_{FC} A \rightarrow \neg \forall v \neg A \quad （也即\vdash_{\mathrm{FC}} A \rightarrow \exists v A）$$

定理3（定理5.2.3）：对于FC中的任何公式A，变元v：√

$$\vdash_{FC} \forall v A \rightarrow \exists v A$$

定理4（定理5.2.4）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式A，变元v：√

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall v A$

定理5（定理5.2.5）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由出现的变元v：√

如果$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \vdash \forall v A$

FC的基本定理

定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）设Γ对于FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash B \text{当且仅当} \Gamma \vdash A \to B$$

定理7（定理5.2.7）：Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash \neg B \text{当且仅当} \Gamma; B \vdash \neg A$$

定理8（定理5.2.8）：（反证法） 如果FC中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，那么：

$$\Gamma \vdash \neg A$$

定理9（定理5.2.9）：设Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，变元v在Γ的任何公式里无自由出现，且$\Gamma; A \vdash B$，那么：

$$\Gamma; \forall v A \vdash B\text{、}\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$$

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）Γ为FC中的公式集合，A、B为FC中公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：

$$\text{由}\Gamma \vdash \exists v A\text{以及}\Gamma; A \vdash B\text{可以推出}\Gamma \vdash B$$

定理6

定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）设Γ对于FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash B \text{当且仅当} \Gamma \vdash A \to B$$

证明(充分性)：已知$\Gamma \vdash A \to B$，往证$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$

- 由$\Gamma \vdash A \to B$，则有演绎过程 $A_1, A_2, \cdots,\ A_m\ (= A \to B)$。
- 在此序列中加上公式A、B得到一个演绎过程 $A_1, A_2, \cdots,\ A_m\ (= A \to B), A, B$。该演绎序列是一个以$\Gamma \cup \{A\}$为前提对$B$的演绎过程。

定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）设Γ为FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash B\text{当且仅当}\Gamma \vdash A \to B$$

证明(必要性)：已知$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{FC}} B$，往证$\Gamma \vdash_{\mathrm{FC}} A \to B$。对$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{FC}} B$的演绎序列的长度$l$用第二数学归纳法。

- 当$l = 1$时，序列中只有B，那么B有如下可能：
  - B为公理，那么序列$\{B, B \to (A \to B), A \to B\}$构成了一个证明，从而$\Gamma \vdash A \to B$。
  - $B \in \Gamma$，那么序列$\{B, B \to (A \to B), A \to B\}$构成了一个以$\Gamma$为前提对$A \to B$的演绎过程，从而$\Gamma \vdash A \to B$。
  - $B = A$，由$A = B$知$A \to B$是一个定理（PC中定理1），从而$\Gamma \vdash A \to B$。
- 假设当演绎序列的长度$l < n$时结论成立
- 则当长度为$l = n$时，演绎序列为$A_1, A_2, \cdots$，$A_l(= B)$，那么B有如下可能：
  - B为公理或者为假设中的元素，可仿照$l = 1$的情形证明结论完全正确。
  - $B = A_j(j < n)$，则由$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$，知$\Gamma \cup \{A\} \vdash A_j$，由归纳假设知$\Gamma \vdash A \to A_j(= B)$。
  - B为A_j，$A_k(j, k < l)$用分离规则导出，不妨设$A_k = A_j \to B$，由$\Gamma \cup \{A\} \vdash A_j$，$\Gamma \cup \{A\} \vdash A_j \to B$，知$\Gamma \vdash A \to A_j$和$\Gamma \vdash A \to (A_j \to B)$。此两序列加上公式$(A \to (A_j \to B)) \to ((A \to A_j) \to (A \to B))$(公理2)，$(A \to A_j) \to (A \to B)$，$A \to B$，得到一个以$\Gamma$为前提对$A \to B$的一个演绎过程。从而$\Gamma \vdash A \to B$。

FC的演绎定理应用

例1： 证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$A$中无自由出现。

证明思路：

$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$

↓ 演绎定理6

$\forall x(A \to B), A \vdash \forall xB$

↓ 全称推广定理5，需要验证x在Γ中无自由出现

$\forall x(A \to B), A \vdash B$

↓ 演绎定理6

$\forall x(A \to B) \vdash A \to B$

↓ 演绎定理6

$\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to B)$ FC中的定理1

FC的演绎定理应用

例1： 证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$A$中无自由出现。

证明：

(1) $\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to B)$ 定理1

(2) $\forall x(A \to B) \vdash (A \to B)$ 对（1）演绎定理6

(3) $\forall x(A \to B), A \vdash B$ 对（2）演绎定理6

(4) $\forall x(A \to B), A \vdash \forall xB$ 对（3）用全称推广定理5

(5) $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$ 对（4）用演绎定理6

FC的演绎定理应用

例2： 证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$B$中无自由出现。

证明思路：

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB} \arrow[d, "\text{演绎定理6}"] & \\
 & \boxed{\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)} \arrow[d, bend right, "\text{FC定理1}"'] & \\
 & \boxed{(A \to B)} \arrow[u, bend right, "\text{FC中公理6和PC加前件定理4}"'] &
\end{tikzcd}
$$

FC的演绎定理应用

例2： 证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$B$中无自由出现

证明：

（1）$B \to \forall xB$　公理6

（2）$(B \to \forall xB) \to ((A \to B) \to (A \to \forall xB))$　PC中加前件定理4

（3）$(A \to B) \to (A \to \forall xB)$　(1)与(2)用rmp分离规则

（4）$\forall x(A \to B) \to (A \to B)$　FC中定理1

（5）$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)$　(4)与(3)用PC中三段论定理8

（6）$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$　对（5）用演绎定理6

定理7

定理7（定理5.2.7）：Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash \neg B\text{当且仅当}\Gamma; B \vdash \neg A$$

证明（必要性）：由$\Gamma; A \vdash \neg B$证$\Gamma; B \vdash \neg A$

（1）$\Gamma; A \vdash \neg B$ 已知

（2）$\Gamma \vdash A \to \neg B$ 对（1）用演绎定理6

（3）$(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ PC中定理15

（4）$\Gamma \vdash B \to \neg A$ （2）（3）用rmp分离规则

（5）$\Gamma; B \vdash \neg A$ 对（4）用演绎定理6

定理7

定理7（定理5.2.7）：Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash \neg B \text{当且仅当} \Gamma; B \vdash \neg A$$

证明（充分性）：由$\Gamma; B \vdash \neg A$证$\Gamma; A \vdash \neg B$

（1）$\Gamma; B \vdash \neg A$ 已知

（2）$\Gamma \vdash B \to \neg A$ 对（1）用演绎定理6

（3）$(B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$ PC中定理15

（4）$\Gamma \vdash A \to \neg B$ （2）（3）用rmp分离规则

（5）$\Gamma; A \vdash \neg B$ 对（4）用演绎定理6

定理8

定理8（定理5.2.8）：（反证法） 如果FC中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，那么：

$$\Gamma \vdash \neg A$$

证明：

(1) $\Gamma; A \vdash B$ 由$\Gamma \cup \{A\}$是不一致知

(2) $\Gamma; A \vdash \neg B$ 由$\Gamma \cup \{A\}$是不一致知

(3) $\Gamma \vdash A \to B$ 对（1）用演绎定理6

(4) $\Gamma \vdash A \to \neg B$ 对（2）用演绎定理6

(5) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ PC中定理17

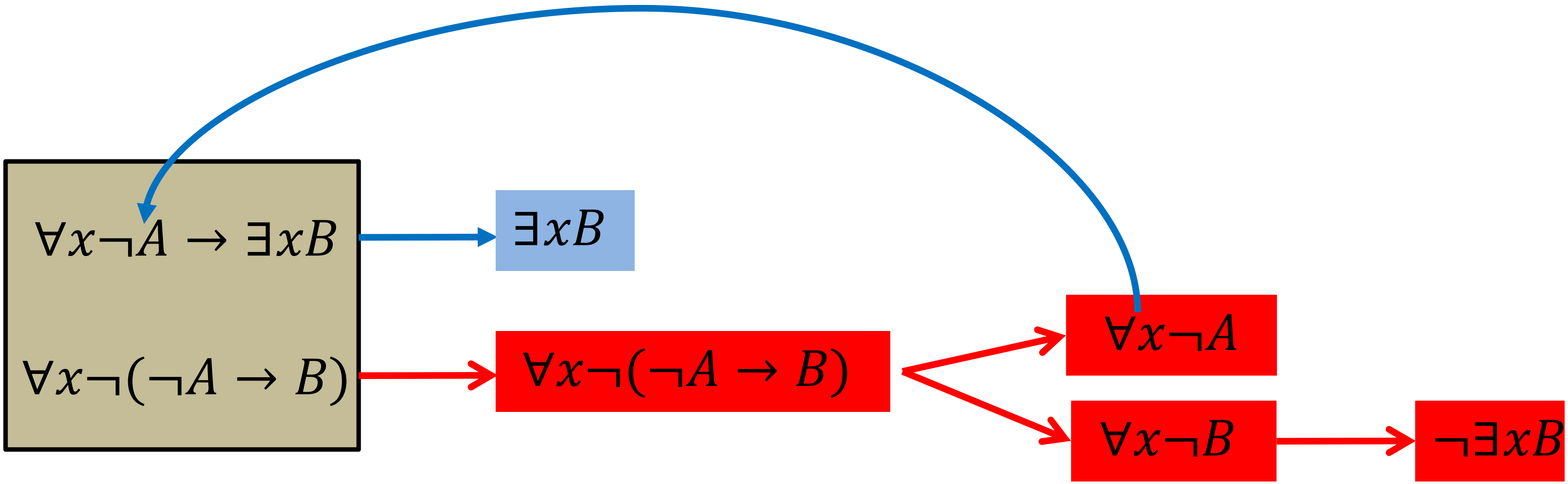
(6) $\Gamma \vdash (A \to \neg B) \to \neg A$ （3）（5）用rmp分离规则

(7) $\Gamma \vdash \neg A$ （4）（6）用rmp分离规则

定理8应用

.例4： 证明$\forall x \neg A \to \exists x B \vdash \exists x(\neg A \to B)$

证明思路：使用FC定理8反证法



定理8应用

例4：证明$\forall x \neg A \to \exists x B \vdash \exists x(\neg A \to B)$

证明：

> **定理8（定理5.2.8）：**（反证法） 如果 FC中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，那么：$\Gamma \vdash \neg A$

(1) $\neg(\neg A \to B) \to \neg A$　PC中定理7逆否

(2) $\neg(\neg A \to B) \to \neg B$　公理1逆否

(3) $\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg A)$　(1)用全称推广定理4

(4) $\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg B)$　(2)用全称推广定理4

(5) $\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg A) \to (\forall x \neg(\neg A \to B) \to \forall x \neg A)$　公理5

(6) $\forall x \neg(\neg A \to B) \to \forall x \neg A$　(3)与(5)用rmp分离规则

(7) $\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg B) \to (\forall x \neg(\neg A \to B) \to \forall x \neg B)$　公理5

(8) $\forall x \neg(\neg A \to B) \to \forall x \neg B$　(4)与(7)用rmp分离规则

(9) $\forall x \neg A \to \exists x B$　已知假设

(10) $\forall x \neg(\neg A \to B) \to \exists x B$　(6)与(9)用PC中三段论定理8

(11) $\forall x \neg A \to \exists x B,\ \forall x \neg(\neg A \to B) \vdash \forall x \neg B$　$(\neg \exists x B)$　(8)用演绎定理6

(12) $\forall x \neg A \to \exists x B,\ \forall x \neg(\neg A \to B) \vdash \neg \forall x \neg B$　$(\exists x B)$　(10)用演绎定理6

(13) $\forall x \neg A \to \exists x B \vdash \neg \forall x \neg(\neg A \to B)$　(11)(12)用FC中定理8反证法

(14) $\forall x \neg A \to \exists x B \vdash \exists x(\neg A \to B)$　定义式

定理9

定理9（定理5.2.9）：设Γ为FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，变元v在Γ的任何公式里无自由出现，且$\Gamma; A \vdash B$，那么：

$$\Gamma; \forall v A \vdash B，\ \Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$$

证明思路：

- 由$\Gamma; A \vdash B$及演绎定理可知：

$$\Gamma \vdash A \rightarrow B$$

- 由v不在Γ中自由出现，由全称推广定理5知

$$\Gamma \vdash \forall v(A \rightarrow B)$$

- 再由公理5：$\forall v(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall v A \rightarrow \forall v B)$，知：

$$\Gamma \vdash \forall v A \rightarrow \forall v B$$

- 从而再由演绎定理知：

$$\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$$

- 再由FC中定理1：$\forall v B \rightarrow B$知：

$$\Gamma; \forall v A \vdash B$$

定理9

定理9（定理5.2.9）：设Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，变元v在Γ的任何公式里无自由出现，且$\Gamma; A \vdash B$，那么：

$$\Gamma; \forall v A \vdash B、\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$$

证明：

(1) $\Gamma; A \vdash B$ 已知

(2) $\Gamma \vdash A \to B$ 对（1）用演绎定理6

(3) $\Gamma \vdash \forall v(A \to B)$ 对（2）用全称推广定理5

(4) $\forall v(A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B)$ 公理5

(5) $\Gamma \vdash \forall v A \to \forall v B$ （3）（4）用rmp分离规则

(6) $\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$ 对（5）用演绎定理6

(7) $\forall v B \to B$ FC中定理1

(8) $\Gamma; \forall v A \vdash B$ （6）（7）用rmp分离规则

定理10

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）设Γ为FC中的公式集合，A、B 为FC中的两个公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：

由$\Gamma \vdash \exists vA$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

证明思路：

- 由$\Gamma; A \vdash B$及演绎定理知：$\Gamma \vdash A \to B$
- 由PC中定理13：$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$知：$\Gamma \vdash \neg B \to \neg A$
- 再由演绎定理知：$\Gamma; \neg B \vdash \neg A$
- 由v在Γ及$\neg B$中无自由出现及全称推广定理5知：$\Gamma; \neg B \vdash \forall v \neg A$
- 再由演绎定理知：$\Gamma \vdash \neg B \to \forall v \neg A$
- 由PC中定理14：$(\neg B \to \forall v \neg A) \to (\neg \forall v \neg A \to B)$知：$\Gamma \vdash \neg \forall v \neg A \to B$
- 也即：$\Gamma \vdash \exists vA \to B$
- 再由已知条件$\Gamma \vdash \exists vA$知：$\Gamma \vdash B$

定理10应用

例5： 证明 $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$，其中$v$在$A$中无自由出现。

证明：

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）设Γ为FC中的公式集合，A、B 为FC中的两个公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：

由$\Gamma \vdash \exists vA$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

(1) $\exists v(A \to B), A \vdash \exists v(A \to B)$ $(\in)$

(2) $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A$ $(\in)$

(3) $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A \to B$ $(\in)$

(4) $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash B$ (2)(3)$(\to-)$

(5) $B \to \exists vB$ FC中定理2

(6) $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash \exists vB$ (4)(5)rmp分离规则

(7) $\exists v(A \to B), A \vdash \exists vB$ (6)(1)用FC中定理10

(8) $\exists v(A \to B) \vdash A \to \exists vB$ 对 (7)用演绎定理6

(9) $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$ 对 (8)用演绎定理6

在FC的证明中ND，PC，FC的公理，推理规则都可以用！

FC的基本定理

定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）设Γ对于FC中的任一公式集合，A、B为FC中的任意两个公式，那么：√

$$\Gamma; A \vdash B\text{当且仅当}\Gamma \vdash A \rightarrow B$$

定理7（定理5.2.7）：Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，那么：√

$$\Gamma; A \vdash \neg B\text{当且仅当}\Gamma; B \vdash \neg A$$

定理8（定理5.2.8）：（反证法） 如果FC中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，那么：√

$$\Gamma \vdash \neg A$$

定理9（定理5.2.9）：设Γ为FC中的任一公式集合，A、B 为FC中的任意两个公式，变元v在Γ的任何公式里无自由出现，且$\Gamma; A \vdash B$，那么：√

$$\Gamma; \forall vA \vdash B\text{、}\Gamma; \forall vA \vdash \forall vB$$

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）Γ为FC中的公式集合，A、B为FC中公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：√

由$\Gamma \vdash \exists vA$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

FC的基本定理

定理11（定理5.2.11）：（替换原理）设A, B为FC中的公式，且满足 $A \vdash\dashv B$，A是C的子公式，D是将C中A的若干出现换为公式B得到的公式，则$C \vdash\dashv D$。

定理12（定理5.2.12）：（改名定理）在FC中，若A'是A的改名式，且A'改用的变元不在A中出现，则$A \vdash\dashv A'$。

定理13（定理5.2.13）：

(1) $\exists x\neg A \vdash\dashv \neg\forall xA$

(2) $\forall x\neg A \vdash\dashv \neg\exists xA$

定理14（定理5.2.14）：

(1) $\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall xA \wedge \forall xB$

(2) $\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists xA \vee \exists xB$

定理15（定理5.2.15）：

(1) $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists xA \wedge \exists xB$

(2) $\forall xA \vee \forall xB \vdash \forall x(A \vee B)$

(3) $\exists x\forall yB(x, y) \vdash \forall y\exists xB(x, y)$

定理11

定理11（定理5.2.11）：（替换原理） 设A,B为FC中的公式，且满足 $A \vdash\dashv B$，A是C的子公式，D是将C中A的若干出现换为公式B得到的公式，则$C \vdash\dashv D$。

例6： $\forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to \exists xB$

证明：

(1) $A \to B \vdash\dashv \neg B \to \neg A$ PC中定理13和公理3

(2) $\forall x(A \to B) \vdash\dashv \forall x(\neg B \to \neg A)$ 由（1）使用替换原理

(3) $\forall x(\neg B \to \neg A) \to (\forall x\neg B \to \forall x\neg A)$ 公理5

(4) $\forall x(A \to B) \vdash \forall x\neg B \to \forall x\neg A$ （2）（3）用rmp分离规则

(5) $(\forall x\neg B \to \forall x\neg A) \to (\neg\forall x\neg A \to \neg\forall x\neg B)$ PC中定理13

(6) $\forall x(A \to B) \vdash \neg\forall x\neg A \to \neg\forall x\neg B$ （4）（5）用rmp分离规则

(7) $\forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to \exists xB$ 定义式

定理12

定理12（定理5.2.12）：（改名定理）在FC中，若A'是A的改名式，且A'改用的变元不在A中出现，则$A \vdash\dashv A'$。

例如： $\forall xA \vdash\dashv \forall yA_y^x$

定理13

定理13（定理5.2.13）：

(1) $\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$

(2) $\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$

证明： 先证 $\exists x \neg A \vdash \neg \forall x A$

(1) $A \to \neg\neg A$　　PC 中的定理12

(2) $\forall x(A \to \neg\neg A)$　对（1）用全称推广定理4

(3) $\forall x(A \to \neg\neg A) \to (\forall x A \to \forall x \neg\neg A)$　公理5

(4) $\forall x A \to \forall x \neg\neg A$　（2）（3）用rmp分离规则

(5) $(\forall x A \to \forall x \neg\neg A) \to (\neg \forall x \neg\neg A \to \neg \forall x A)$　PC中的定理13

(6) $\neg \forall x \neg\neg A \to \neg \forall x A$　（4）（5）用rmp分离规则

(7) $\exists x \neg A \to \neg \forall x A$　定义式

(8) $\exists x \neg A \vdash \neg \forall x A$　对（7）演绎定理6

定理13

定理13（定理5.2.13）：

(1) $\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$

(2) $\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$

证明： 再证$\neg \forall x A \vdash \exists x \neg A$

(1) $\neg\neg A \to A$ PC 中的定理10

(2) $\forall x(\neg\neg A \to A)$ 对（1）用全称推广定理4

(3) $\forall x(\neg\neg A \to A) \to (\forall x \neg\neg A \to \forall x A)$ 公理5

(4) $\forall x \neg\neg A \to \forall x A$ （2）（3）用rmp分离规则

(5) $(\forall x \neg\neg A \to \forall x A) \to (\neg \forall x A \to \neg \forall x \neg\neg A)$ PC中的定理13

(6) $\neg \forall x A \to \neg \forall x \neg\neg A$ （4）（5）用rmp分离规则

(7) $\neg \forall x A \to \exists x \neg A$ 定义式

(8) $\neg \forall x A \vdash \exists x \neg A$ 对（7）演绎定理6

定理14

定理14（定理5.2.14）：

(1) $\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall xA \wedge \forall xB$

(2) $\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists xA \vee \exists xB$

证明： 先证 $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA \wedge \forall xB$

(1) $\forall x(A \wedge B) \to A \wedge B$ FC中的定理1

(2) $\forall x(A \wedge B) \vdash A \wedge B$ 对（1）用演绎定理6

(3) $\forall x(A \wedge B) \vdash A$ (2) $(\wedge -)$

(4) $\forall x(A \wedge B) \vdash B$ (2) $(\wedge -)$

(5) $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA$ 对（3）用全称推广定理5

(6) $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xB$ 对（4）用全称推广定理5

(7) $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA \wedge \forall xB$ (5) (6) $(\wedge +)$

定理14

定理14（定理5.2.14）：

(1) $\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall xA \wedge \forall xB$

(2) $\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists xA \vee \exists xB$

证明： 再证$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall x(A \wedge B)$

(1) $\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xA \wedge \forall xB$ (∈)

(2) $\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xA$ (1) (∧−)

(3) $\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xB$ (1) (∧−)

(4) $\forall xA \to A$ FC中的定理1

(5) $\forall xB \to B$ FC中的定理1

(6) $\forall xA \wedge \forall xB \vdash A$ (2) (4) 用rmp分离规则

(7) $\forall xA \wedge \forall xB \vdash B$ (3) (5) 用rmp分离规则

(8) $\forall xA \wedge \forall xB \vdash A \wedge B$ (6) (7) (∧+)

(9) $\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall x(A \wedge B)$ 对（8）用全称推广定理5

定理15

定理15（定理5.2.15）：

(1) $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists xA \wedge \exists xB$

(2) $\forall xA \vee \forall xB \vdash \forall x(A \vee B)$

(3) $\exists x\forall yB(x,y) \vdash \forall y\exists xB(x,y)$

证明:

(1) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash A \wedge B$ $(\in)$

(2) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash A$ (1) $(\wedge -)$

(3) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash B$ (1) $(\wedge -)$

(4) $A \rightarrow \exists xA$ FC中的定理2

(5) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xA$ (2) (4) 用rmp分离规则

(6) $B \rightarrow \exists xB$ FC中的定理2

(7) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xB$ (3) (6) 用rmp分离规则

(8) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xA \wedge \exists xB$ (5) (7) $(\wedge +)$

(9) $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x(A \wedge B)$ $(\in)$

(10) $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists xA \wedge \exists xB$ 对（9）和（8）用存在消除10

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）设Γ为FC中的公式集合，A、B 为FC中的两个公式，变元v在Γ以及B中无自由出现，那么：

由$\Gamma \vdash \exists vA$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

FC的基本定理

定理11（定理5.2.11）：（替换原理） 设A, B为FC中的公式，且满足 $A \vdash\dashv B$，A是C的子公式，D是将C中A的若干出现换为公式B得到的公式，则$C \vdash\dashv D$。√

定理12（定理5.2.12）：（改名定理）在FC中，若A'是A的改名式，且A'改用的变元不在A中出现，则$A \vdash\dashv A'$。√

定理13（定理5.2.13）： √

(1) $\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$

(2) $\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$

定理14（定理5.2.14）： √

(1) $\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall x A \wedge \forall x B$

(2) $\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists x A \vee \exists x B$

定理15（定理5.2.15）： √

(1) $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x A \wedge \exists x B$

(2) $\forall x A \vee \forall x B \vdash \forall x(A \vee B)$

(3) $\exists x \forall y B(x, y) \vdash \forall y \exists x B(x, y)$