

数理逻辑

户保田

e-mail:hubaotian@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2022年5月



推理部分

公理集合：

$$(1) \quad A_1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(2) \quad A_2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(3) \quad A_3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

推理规则或分离规则 (Modus Ponens) :

若有 A 和 $A \rightarrow B$ 成立，则必有结论 B 成立，可形式化表示为：

$$r_{mp}: \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

证明

证明： 称下列公式序列为公式 A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, A_i 是PC中的公理, 或是 $A_j (j < i)$, 或是 $A_j, A_k (j, k < i)$ 用分离规则导出的。其中 A_m 就是公式 A 。

A_i 只能是以下三种中的其一：

- (1) PC中的公理或已知定理
- (2) 序列 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 中的某一个
- (3) 序列 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 中某两个用分离规则导出的



基本定理

定理1: $\vdash_{PC} A \rightarrow A$

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash_{PC} B \rightarrow (A \rightarrow C)$ **(前件互换定理)**

定理3: $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ **定理 (2) 的另一种形式**

定理4: $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ **(加前件定理)**

定理5: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ **(加后件定理)**

定理6: $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

定理7: $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

定理8: 如果 $\vdash (A \rightarrow B)$, $\vdash (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash (A \rightarrow C)$ **(三段论定理)**

定理9. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ **(反证法)**

定理10. $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$

定理11. $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ **(反证法)**

定理12. $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$

定理1

定理 1: $\vdash_{PC} A \rightarrow A$

证明思路：要证 $A \rightarrow A$ 是PC中的一个定理，即证 $A \rightarrow A$ 在PC中有一个证明，即有一个序列 $A_1, A_2, \dots, A_m (= A \rightarrow A)$ 。因此只要找到这样的一个序列即可。

证明：

(1) $A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ 公理1

(2) $(A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ 公理2

(3) $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (1) 和 (2) 用rmp分离规则

(4) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 公理1

(5) $A \rightarrow A$ (4) 和 (3) 用rmp分离规则

定理2

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash_{PC} B \rightarrow (A \rightarrow C)$ (前件互换定理)

证明思路: 由于 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 那么必有一个证明序列

- (1) A_1
- (2) A_2
- \vdots
- (m) $A_m = A \rightarrow (B \rightarrow C)$

要证 $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ 是 PC 中的一个定理, 只需在此证明序列的基础上, 继续推导, 找到一个证明序列 $A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots, A_n (= B \rightarrow (A \rightarrow C))$ 即可。

证明: 由 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 那么有一个序列

- (1) A_1
- (2) A_2
- \vdots
- (m) $A_m = A \rightarrow (B \rightarrow C)$

定理2

$$(m) \quad A_m = A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$(m+1) \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \text{公理2}$$

$$(m+2) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (m) \text{ 和 } (m+1) \text{ rmp分离规则}$$

$$(m+3) \quad ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \quad \text{公理1}$$

$$(m+4) \quad B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (m+2) \text{ 和 } (m+3) \text{ rmp分离规则}$$

$$(m+5) \quad (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))) \quad \text{公理2}$$

$$(m+6) \quad (B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (m+4) \text{ 和 } (m+5) \text{ rmp分离规则}$$

$$(m+7) \quad B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{公理1}$$

$$(m+8) \quad B \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (m+7) \text{ 和 } (m+6) \text{ rmp分离规则}$$

这个定理叫前件互换定理，很重要！！！！

证明序列中的 A_i 也可以是已知定理

证明： 称下列公式序列为公式 A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, A_i 是PC中的公理, 或是 $A_j (j < i)$, 或是 $A_j, A_k (j, k < i)$ 用分离规则导出的。其中 A_m 就是公式 A 。

A_i 只能是以下三种中的其一：

- (1) PC中的公理或已知定理
- (2) 序列 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 中的某一个
- (3) 序列 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 中某两个用分离规则导出的



证明序列中的 A_i 也可以是已知定理

因为 $\vdash_{PC} A$, 那么有一个公式序列

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m (= A)$$

如果 A_i 是PC中的定理, 那么 A_i 同样有一个公式序列:

$$B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n (= A_i)$$

那么

$$A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n (= A_i), \dots, A_m (= A)$$

因此, **证明序列中的 A_i 是PC中的已知定理也可以。**

定理2证明的简化形式

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash_{PC} B \rightarrow (A \rightarrow C)$ (前件互换定理)

- (1) $A_m = A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 已知定理
- (2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理2
- (3) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (1) 和 (2) rmp分离规则
- (4) $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ 公理1
- (5) $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (3) 和 (4) rmp分离规则
- (6) $(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)))$ 公理2
- (7) $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ (5) 和 (6) rmp分离规则
- (8) $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理1
- (9) $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ (8) 和 (7) rmp分离规则

定理3

定理3: $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ (定理 (2) 的另一种形式)

证明:

- (1) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理2
- (2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 对 (1) 式用前件互换定理2
- (3) $((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
 $\rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))))$ 公理1
- (4) $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (2) 和 (3) 用rmp分离规则
- (5) $(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))))$
 $\rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))))$ 公理2
- (6) $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (4) 和 (5) 用rmp分离规则
- (7) $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理1
- (8) $B \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (7) 和 (6) 用rmp分离规则
- (9) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ 对 (8) 用前件互换定理2

定理4

定理4: $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (加前件定理)

证明:

(1) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理2

(2) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ 公理1

$\rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$

(3) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (1) 和 (2) 用rmp分离规则

(4) $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$ 公理2

$\rightarrow (((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$

(5) $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (3) 和 (4) 用rmp分离规则

(6) $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ 公理1

(7) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (6) 和 (5) 用rmp分离规则

定理5

定理 5: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (加后件定理)

证明: 对定理4, 利用前件互换定理2得出。

(1) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 加前件定理4

(2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 对 (1) 用前件互换定理2

定理6

定理6. $\vdash_{PC} \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

证明:

(1) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理3

(2) $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)))$ 公理1

(3) $\neg A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$ (1) 和 (2) 用rmp分离规则

(4) $(\neg A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)))$
 $\rightarrow ((\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)))$ 公理2

(5) $((\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)))$ (3) 和 (4) 用rmp分离规则

(6) $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 公理1

(7) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (1) 和 (6) 用rmp分离规则

定理7

定理7. $\vdash_{PC} A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

证明:

(1) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6

(2) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 对 (1) 使用前件互换定理2

定理7的理解:

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$, 有 $\neg A \rightarrow B \Leftrightarrow A \vee B$, 那么定理7可以写成:

$$A \rightarrow (A \vee B)$$

因为 A 成立, 则必有 $A \vee B$ 成立, 进而有:

$$A \rightarrow (A \vee B)$$

那么有定理7成立。



定理8

定理8. 如果 $\vdash (A \rightarrow B)$, $\vdash (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash (A \rightarrow C)$ **(三段论定理)**

思路: 由 $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow C$, 要证 $A \rightarrow C$, 要想办法出现 $A \rightarrow C$ 。

证明:

(1) $A \rightarrow B$ **已知定理**

(2) $B \rightarrow C$ **已知定理**

(3) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ **加后件定理5**

(4) $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ **(1) 和 (3) 用rmp分离规则**

(5) $A \rightarrow C$ **(2) 和 (4) 用rmp分离规则**

定理8

定理8. 如果 $\vdash (A \rightarrow B)$, $\vdash (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash (A \rightarrow C)$ (三段论定理)

思路: 要出现 $A \rightarrow C$, 不仅有刚才用加后件定理5, 还可以用加前件定理4

证明:

(1) $A \rightarrow B$ 已知定理

(2) $B \rightarrow C$ 已知定理

(3) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 加前件定理4

(4) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (2) 和 (3) 用rmp分离规则

(5) $A \rightarrow C$ (1) 和 (4) 用rmp分离规则

定理9

定理9. $\vdash_{PC} (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

思路：匹配相近的公理或已知定理，作为切入点进行证明。这里我们尝试从定理6 $\vdash_{PC} \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 出发证明。

证明：

(1) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$ 定理6

(2) $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)))$ 公理2

(3) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$ (1) 和 (2) 用rmp分离规则

(4) $(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ 公理3

(5) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (3) 和 (4) 用三段论定理8

(6) $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow$

$((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ 公理2

(7) $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (5) 和 (6) 用rmp分离规则

(8) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ 定理1

(9) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ (8) 和 (7) 用rmp分离规则

定理10

定理10. $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

证明:

(1) $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ 定理6

(2) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理9

(3) $\neg\neg A \rightarrow A$ (1) 和 (2) 用三段论定理8



定理11

定理11. $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$

证明:

(1) $\neg\neg A \rightarrow A$ 定理10

(2) $(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg A))$ 加后件定理5

(3) $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg A)$ (1) 和 (2) 用rmp分离规则

(4) $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg A)) \rightarrow$

$((\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$ 加后件定理5

(5) $((\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$ (3) 和 (4) 用rmp分离规则

(6) $(\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ 定理9

(7) $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ (5) 和 (6) 用rmp分离规则

定理12

定理12. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

思路:对比定理11 $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ 和要证明的 $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

证明:

$$(1) (\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg A$$

定理11

$$(2) A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg A)$$

定理7

$$(3) A \rightarrow \neg\neg A$$

(2) 和 (1) 用三段论定理8



基本定理

定理1: $\vdash_{PC} A \rightarrow A$ ✓

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash_{PC} B \rightarrow (A \rightarrow C)$ (前件互换定理) ✓

定理3: $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ 定理 (2) 的另一种形式 ✓

定理4: $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (加前件定理) ✓

定理5: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (加后件定理) ✓

定理6: $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ ✓

定理7: $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ ✓

定理8: 如果 $\vdash (A \rightarrow B)$, $\vdash (B \rightarrow C)$, 那么 $\vdash (A \rightarrow C)$ (三段论定理) ✓

定理9. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ (反证法) ✓

定理10. $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$ ✓

定理11. $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ (反证法) ✓

定理12. $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$ ✓