哈尔滨工业大学（深圳）2019春数理逻辑参考答案

July 1, 2019

1. 求出公式 $(p \to q) \wedge (p \to r)$ 的主合取范式和主析取范式。

解： 做出公式的真值表如下:

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \wedge r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

由真值表可以直接写出公式的主合取范式和主析取范式如下:

主合取范式为: $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

主析取范式为: $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
$\vee (p \wedge q \wedge r)$

2. 分别用公式”$\uparrow$”和”$\downarrow$”表示公式 $p \vee q \to q \wedge r$。

解： (1)$p \vee q \to q \wedge r \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg(q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \vee q) \uparrow (q \uparrow r) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \uparrow (q \uparrow r) \Leftrightarrow (\neg p \uparrow \neg q) \uparrow (q \uparrow r) \Leftrightarrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (q \uparrow r)$

(2)$p \vee q \to q \wedge r \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \vee \neg(\neg q \vee \neg r) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \vee (\neg q \downarrow \neg r) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \vee ((q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r)) \Leftrightarrow \neg\neg((p \downarrow q) \vee ((q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r))) \Leftrightarrow \neg((p \downarrow q) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r))) \Leftrightarrow ((p \downarrow q) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r))) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r)))$

3. 判定下列逻辑蕴含式 $\{A \vee B \to C, B \vee C \to D, C \vee D \to E, \neg A\} \Rightarrow E \vee B$ 是否成立,给出理由。其中 A, B, C 是命题公式。(10分)

解： (1) 不成立。

对任意一个指派 α,如果 $(A \vee B \to C)^\alpha = 1$,那么 $1 - (A \vee B)^\alpha + (A \vee B)^\alpha C^\alpha = 1$,从而 $(A \vee B)^\alpha C^\alpha = (A \vee B)^\alpha$。同理我们有 $(B \vee C)^\alpha D^\alpha = (B \vee C)^\alpha, (C \vee D)^\alpha E^\alpha = (C \vee D)^\alpha$。

若 $(E \vee B)^\alpha = 0$,必有 $E^\alpha = 0$。由上面的式子知 $(C \vee D)^\alpha = 0$,必有 $C^\alpha = 0$ 和 $D^\alpha = 0$。再由上面的式子知道 $A^\alpha = B^\alpha = C^\alpha = 0$。

于是我们可以找到一个指派α,使得$A^\alpha = B^\alpha = C^\alpha = D^\alpha = E^\alpha = 0$,使得
$(A \vee B \to C)^\alpha = 1, (B \vee C \to D)^\alpha = 1, (C \vee D \to E)^\alpha = 1, (\neg A)^\alpha = 1$,但是$(E \vee B)^\alpha = 0$。

4. 在命题演算系统中PC证明:(20分)

(1)$\vdash_{PC} ((A \to B) \to A) \to (B \to A)$

证明: 1. $B \to (A \to B)$ 公理3

2. $(B \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to A) \to (B \to A))$ 加后件定理5

3. $((A \to B) \to A) \to (B \to A)$ (1)和(2)用分离规则

(2)$\vdash_{PC} ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$

证明: 1. $B \to (A \to B)$ 公理3

2. $(B \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C)))$ 加后件定理5

3. $((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$ (1)和(2)用分离规则

4. $(B \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$ 前件互换定理2

5. $((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$ (1)和(2)用三段论定理8

(3)$\vdash_{PC} (A \to C) \to ((B \to C) \to (((A \to B) \to B) \to C))$

证明: 由演绎定理可以证明$A \to C, B \to C, (A \to B) \to B \vdash C$ 1. $\neg A \to (A \to B)$ 定理6

2. $A \to C$ 假设

3. $B \to C$ 假设

4. $(A \to B) \to B$ 假设

5. $\neg A \to B$ (1)(4)三段论

6. $\neg A \to C$ (5)(3)三段论

7. $\neg C \to A$ (6)定理15以及分离规则

8. $\neg C \to C$ (7)(2)三段论

9. $(\neg C \to C) \to C$ 定理9

10. C (8)(9)及分离规则

(4)$\vdash_{PC} ((A \to B) \to C) \to ((A \to C) \to C)$

证明: 1. $C \to ((A \to C) \to C)$ 公理1

2. $\neg A \to (A \to B))$ 定理6

3. $\neg(A \to B) \to A$ (2)定理15以及分离规则

4. $(A \to C) \to (A \to C)$ 定理1

5. $A \to ((A \to C) \to C)$ (4)前件互换定理2

6. $\neg(A \to B) \to ((A \to C) \to C)$ (3)(5)三段论

7. $((A \to B) \to C) \to ((A \to C) \to C)$ (6)(1) 定理 17.5

5. 在 ND 中证明:(15 分)

(1) $\vdash_{ND} (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to A \vee C$

证明： 1. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B, \neg B \vdash B$ $(\in)$

2. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B, \neg B \vdash \neg B$ $(\in)$

3. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B, \neg B \vdash A \vee C$ (1)(2)$(\neg -)$

4. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B, C \vdash C$ $(\in)$

5. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B, C \vdash A \vee C$ (4)$(\vee +)$

6. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$ $(\in)$

7. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash \neg B \vee C$ (6)$(\wedge -)$

8. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash A \vee C$ (3)(5)(7)$(\vee -)$

9. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \vdash A$ $(\in)$

10. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \vdash A \vee C$ (9)$(\vee +)$

11. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$ $(\in)$

12. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee B$ (11)$(\wedge -)$

13. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee C$ (8)(10)(12)$(\vee -)$

14. $\vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to A \vee C$ (13)$(\to +)$

(2) $\vdash_{ND} (\neg A \to B) \to A \vee B$

证明： 1. $\neg A \to B, \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

2. $\neg A \to B, \neg A \vdash \neg A \to B$ $(\in)$

3. $\neg A \to B, \neg A \vdash B$ (1)(2)$(\to -)$

4. $\neg A \to B, \neg A \vdash A \vee B$ (3)$(\vee +)$

5. $\neg A \to B, A \vdash A$ $(\in)$

6. $\neg A \to B, A \vdash A \vee B$ (5)$(\vee +)$

7. $\neg A \to B \vdash A \vee B$ (4)(6)$(-)$

8. $\vdash \neg A \to B \to A \vee B$ (7)$(\to +)$

6. 在 FC 中证明:$\vdash_{FC} \exists v(B \to A) \leftrightarrow (\forall v B \to A)$,其中 v 在 A 中无自由出现。(15 分)

证明： 先证 $(\forall v B \to A) \to \exists v(B \to A)$

(1). $A \to (B \to A)$

(2). $(B \to A) \to \exists v(B \to A)$

(3). $A \to \exists v(B \to A)$

(4). $\neg B \to (B \to A)$

(5). $(\neg B \to (B \to A)) \to (\neg(B \to A) \to B)$

(6). $\neg(B \to A) \to B$

(7). $\forall v(\neg(B \to A) \to B)$

(8). $\forall v(\neg(B \to A) \to B) \to (\forall v\neg(B \to A) \to \forall vB)$

(9). $\forall v\neg(B \to A) \to \forall vB$

(10). $(\forall v\neg(B \to A) \to \forall vB) \to (\neg\forall vB \to \neg\forall v\neg(B \to A))$

(11). $\neg\forall vB \to \neg\forall v\neg(B \to A)$

(12). $\neg\forall vB \to \exists v(B \to A)$

(13). $(\forall vB \to A) \to \exists v(B \to A)$

再证$\exists v(B \to A) \to (\forall vB \to A)$

(1). $(B \to A) \to (B \to A)$

(2). $B \to ((B \to A) \to A)$

(3). $((B \to A) \to A) \to (\neg A \to \neg(B \to A))$

(4). $B \to (\neg A \to \neg(B \to A))$

(5). $\neg A \to (B \to \neg(B \to A))$

(6). $\neg A \vdash B \to \neg(B \to A)$

(7). $\neg A \vdash \forall v(B \to \neg(B \to A))$

(8). $\neg A \vdash \forall vB \to \forall v\neg(B \to A)$

(9). $\neg A \to (\forall vB \to \forall v\neg(B \to A))$

(10). $\forall vB \to (\neg A \to \forall v\neg(B \to A))$

(11). $\forall vB \to (\exists v(B \to A) \to A)$

(12). $\exists v(B \to A) \to (\forall vB \to A)$

7. 找出语义和指派使得$P(x, f(x, a)) \to Q(x)$为真。(10分)

解：令
$D = \{1, 2\}, \bar{a} = 1, \bar{f}(1, 1) = 1, \bar{f}(1, 2) = 1, \bar{f}(2, 1) = 1, \bar{f}(2, 2) = 1, \bar{P} = \{(1, 2)\}, \bar{Q} = \{1\}, \bar{x} = 1$，则有

$\overline{P(x, f(x, a))} = 1$ 当且仅当 $(\bar{x}, \overline{f(x, a)}) \in \bar{P}$

我们知道$\overline{f(x, a)} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{a}) = \bar{f}(1, 1) = 1$

而点$(\bar{x}, \overline{f(x, a)}) = (1, 1)$并不在$\bar{P} = \{(1, 2)\}$中。

所以$\overline{P(x, f(x, a))} = 0$，从而有$\overline{P(x, f(x, a)) \to Q(x)} = 1$

8. 将:”每个作家都写过作品,有的作家没写过小说,所以有的作品不是小说”这三句话符号化,并加以证明。(10分)

解: 令 $W(x,y)$ 表示 x 写 y。$N(x)$ 表示 x 是小说。

$A=(\forall x)(\exists y)W(x,y), B=(\exists x)(\forall u)(N(u)\rightarrow\neg W(x,u)), C=(\exists v)\neg N(v).$

只需证明 $\{A,B,\neg C\}\vdash contrary$

1. $(\forall x)(\exists y)W(x,y)$ 假设

2. $(\forall u)(N(u)\rightarrow\neg W(x,u))$ 假设

3. $\neg(\exists v)\neg N(v)$ 假设

4. $(\forall v)N(v)$ 假设变形

5. $(\forall v)N(v)\rightarrow N(y)$ 公理

6. $N(y)$ 分离

7. $(\forall u)(N(u)\rightarrow\neg W(x,u))\rightarrow(N(y)\rightarrow\neg W(x,y))$ 公理

8. $(N(y)\rightarrow\neg W(x,y))$ 分离

9. $\neg W(x,y))$ 分离

10. $(\forall y)\neg W(x,y))$ 全称推广

11. $(\forall y)\neg W(x,y)\rightarrow(\exists x)(\forall y)\neg W(x,y)$ 定理

12. $(\exists x)(\forall y)\neg W(x,y)$ 分离

从而

$\{(\forall x)(\exists y)W(x,y),(\exists x)(\forall u)(N(u)\rightarrow\neg W(x,u)),(\forall u)(N(u)\rightarrow\neg W(x,u)),\neg(\exists v)\neg N(v)\}\vdash$
$(\exists x)(\forall y)\neg W(x,y)$

但

$\{(\forall x)(\exists y)W(x,y),(\exists x)(\forall u)(N(u)\rightarrow\neg W(x,u)),(\forall u)(N(u)\rightarrow\neg W(x,u)),\neg(\exists v)\neg N(v)\}\vdash$
$(\forall x)(\exists y)W(x,y)$

所以由存在消除知

$\{(\forall x)(\exists y)W(x,y),(\exists x)(\forall u)(N(u)\rightarrow\neg W(x,u)),\neg(\exists v)\neg N(v)\}\vdash(\exists x)(\forall y)\neg W(x,y)$

但

$\{(\forall x)(\exists y)W(x,y),(\exists x)(\forall u)(N(u)\rightarrow\neg W(x,u)),\neg(\exists v)\neg N(v)\}\vdash(\forall x)(\exists y)W(x,y)$