

数理逻辑

户保田

e-mail:hubaotian@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2022年6月



FC形式系统的语义

- 个体常元、个体变元、函词、谓词、项等属于语法范畴的概念，**只是一些字符串，没有实际意义。**
- 要讨论谓词演算公式的真值，**就需要对函词和谓词进行指称，对个体常元和变元取值进行指派**，即对这些语法符号赋予一定的意义（一阶谓词的语义）。
- 一阶谓词逻辑中引入了量词、谓词、函词等概念，比命题公式的解释更加复杂。
- 一阶语言的语义解释是一个**数学结构**，包含**论域 U** 及对常元、函词、谓词进行指称的**解释 I** 。



FC形式系统的语义

例1：设 $\forall x Q(f(x, a), x)$ 为FC的公式，

- 假定论域 U 为实数集 R
- 二元谓词 $Q(x, y)$: $x = y$
- 常元 a 指派为 “0”
- 二元函词 $f(x, y) = x + y$

分析：

- 则此时 $\forall x Q(f(x, a), x)$ ，即为 $\forall x (x + 0 = x)$ ，为一个真命题。
- 但若将二元函词 $f(x, y) = xy$ ，则此时 $\forall x Q(f(x, a), x)$ ，即为 $\forall x (x * 0 = x)$ ，为一个假命题。



FC形式系统的语义

FC的一阶语言 $\mathcal{L}(FC)$ 的一个语义 \mathcal{U} 是一个结构 $\langle U, I \rangle$ ，该结构为： $\mathcal{U} = \langle U, I \rangle$

- 非空集合 U ，称为论域或者个体域。
- 一个称为解释的映射 I ， $I: L_a \cup L_f \cup L_p \rightarrow U \cup U_f \cup U_p$
- U_f 是 U 上的所有函数符号（一元，二元等等）构成的集合
- U_p 是 U 上的所有关系（一元，二元等等）构成的集合
- 对于任意常元 a ，映射 I 将常元 a 解释为论域上的一个元素， $I(a) \in U$ ，记为 \bar{a} 。
也可以写作： $a \in L_a$ ， $I(a) = \bar{a} \in U$
- 对于每一个 n 元函词 $f^{(n)}$ ， $I(f^{(n)})$ 为 U 上的一个 n 元函数，记为 $\bar{f}^{(n)}$ ，即 $\bar{f}^{(n)}: U^n \rightarrow U$ 。也可以写作： $f^{(n)} \in L_f$ ， $I(f^{(n)}) = \bar{f}^{(n)}: U^n \rightarrow U$
- 对于每一个 n 元谓词 $P^{(n)}$ ， $I(P^{(n)})$ 为 U 上的一个 n 元关系，记为 $\bar{P}^{(n)}$ ，即 $\bar{P}^{(n)} \subseteq U^n$ 。也可以写作： $P^{(n)} \in L_p$ ， $I(P^{(n)}) = \bar{P}^{(n)} \subseteq U^n$
- 当 $n = 1$ 时 $\bar{P}^{(1)}$ 为 U 的一个子集，当 $n = 0$ 时 $\bar{P}^{(0)}$ 为0或者1。

FC形式系统的语义

例2: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

- 令论域 $U = \{0,1\}$,
- P, Q 是一元谓词为论域 U 的一个子集, 令 $\bar{P} = \{0\}$, $\bar{Q} = \{1\}$
- 则: $\overline{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))} = \overline{P(0) \rightarrow Q(0)} \wedge \overline{P(1) \rightarrow Q(1)} = 0$

例3: $\forall xP(x) \rightarrow Q(x)$ FC公式由于含有自由变元, 在上述解释中无法判断真假。



指派及其扩展

- 一阶谓词演算中，一个指派（在确定了系统的语义的前提下）是指一个映射 $s: L_v \rightarrow U$ （对自由变元的解释）。
- 这个映射可以扩展到项的集合 L_t 到 U 的映射。对于任意的项 t

$$\bar{s}(t) = \begin{cases} s(v) & \text{当 } t \text{ 为变元 } v \text{ 时} \\ \bar{a} & \text{当 } t \text{ 为常元 } a \text{ 时} \\ \bar{f}^{(n)}(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) & \text{当 } t \text{ 为 } f^{(n)}(t_1, \dots, t_n) \text{ 时} \end{cases}$$

$\mathcal{L}(\text{FC})$ 的项 (L_t) :

- 变元和常元是项。
- 对任意正整数 n ，如果 t_1, t_2, \dots, t_n 为项， $f^{(n)}$ 为 n 元函词，那么 $f^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$ 也为项。
- 除了有限次数使用 1 和 2 得到的表达式以外，其余的都不是项。

FC形式系统的语义

公式 A 在语义 $\mathcal{U} = \langle U, I \rangle$ 和指派 s 下取值为真，记为 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 。反之 $\not\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 。

- $\models_{\mathcal{U}} A$ ：在语义 \mathcal{U} 中，对一切指派 s ， A 均为 T ，即 $\models_{\mathcal{U}} A[s] \forall s$ 。
- $\models_T A$ 或 $\models A$ ：公式 A 在任意语义 \mathcal{U} 中，均为 T ，这时称 A 永真。



复合公式的语义

公式 A 在语义 u 和指派 s 下取真值为 T ，也即 $\models_u A[s]$ 的严格定义如下：

- A 为原子公式 $P^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ 时，

$$\models_u A[s] \text{ 当且仅当 } \langle \bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \dots, \bar{s}(t_n) \rangle \in \bar{P}^{(n)}$$

- A 为公式 $\neg B$ 时，

$$\models_u A[s] \text{ 当且仅当 } \not\models_u B[s], \text{ 即 } \bar{A} = 1 \text{ 当且仅当 } \bar{B} = 0$$

- A 为公式 $B \rightarrow C$ 时，

$$\models_u A[s] \text{ 当且仅当 } \not\models_u B[s] \text{ 或者 } \models_u C[s]$$

$$\not\models_u A[s] \text{ 当且仅当 } \models_u B[s] \text{ 且 } \not\models_u C[s]$$

- A 为公式 $\forall v B$ 时，

$$\models_u A[s] \text{ 当且仅当对每一个 } d \in U \text{ 都有 } \models_u B[s(v|d)], \text{ 其中指派 } s(v|d) \text{ 表示除对变元 } v \text{ 指定元素 } d \text{ 外，对其他变元的指派与 } s \text{ 相同。}$$

$s(v|d)$ 与 s 的差别

其中 $s(v|d)$ 也是一个指派，它的定义如下：对于 L_v 中的任意一个元素 u ：

$$s(v|d)(u) = \begin{cases} s(u) & \text{当 } u \neq v \\ d & \text{当 } u = v \end{cases}$$

指派 $s(v|d)$ 表示除对变元 v 用指定元素 d 赋值外，对其他变元的指派与 s 相同。



例4：谓词公式 $A = \forall xP(x) \rightarrow Q(f(x))$ 其语义 $\mathcal{U} = \langle U, I \rangle$ 定义如下：

- $U = \{1, 2\}$
- $\bar{f}: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}, \bar{f}(1) = 2, \bar{f}(2) = 1$
- $\bar{P} = \{1\}, \bar{Q} = \{1\}$
- 自由变元 x 的指派为： $\bar{x} = s(x) = 2$

求 $\overline{\forall xP(x) \rightarrow Q(f(x))}$ 的真值

解：首先需要求出 $\overline{\forall xP(x)}$ 和 $\overline{Q(f(x))}$ ：

- $\overline{\forall xP(x)} = \overline{P(1)} \wedge \overline{P(2)} = T \wedge F = F$
- $\overline{f(x)} = \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(2) = 1 \in \bar{Q}, \overline{Q(f(x))} = T$
- 故 $\bar{A} = \forall xP(x) \rightarrow Q(f(x)) = 1$

附加的联结词和量词

如果使用联接词 \vee ， \wedge 和量词 \exists 的时候，可以进一步定义：

- $\models_u B \vee C[s]$ 当且仅当 $\models_u B[s]$ 或者 $\models_u C[s]$
- $\models_u B \wedge C[s]$ 当且仅当 $\models_u B[s]$ 并且 $\models_u C[s]$
- $\models_u \exists B[s]$ 当且仅当 存在 $d \in U$ 使得 $\models_u B[s(v|d)]$

例5：证明 $\models_u \neg \forall v \neg B[s]$ 当且仅当 $\models_u \exists v B[s]$ 。

证明： $\models_u \neg \forall v \neg B[s]$ 当且仅当 $\not\models_u \forall v \neg B[s]$

当且仅当 并非对 $\forall d \in U$ ，均有 $\models_u \neg B[s(v|d)]$

当且仅当 存在 $d' \in U$ ，使得 $\not\models_u \neg B[s(v|d')]$

当且仅当 存在 $d' \in U$ ，使得 $\models_u B[s(v|d')]$ ，即

当且仅当 $\models_u \exists v B[s]$

语义举例

例5：考虑以下的结构，它赋予只含有一个函词、一个谓词和一个常元的一阶谓词系统以下语义：

- $U = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, 即自然数集合
- $\bar{P}^{(2)}$ 为 N 上的 \leq 关系
- $\bar{f}_1^{(1)}$ 为 N 上的后继函数 $\bar{f}_1^{(1)}(x) = x + 1$
- $\bar{a}_1 = 0$

则有以下结论成立：

- $\models P_1^{(2)}(a_1, f_1^{(1)}(v_1))$
- $\models P_1^{(2)}(f_1^{(1)}(v_1), a_1)[s]$ 对任何指派 s 都不成立
- $\models \forall v_1 P_1^{(2)}(a_1, v_1)$

语义举例

证明:

$\models P_1^{(2)}(a_1, f_1^{(1)}(v_1))[s]$ 当且仅当 $(\overline{a_1}, \overline{f_1^{(1)}(v_1)}) \in \overline{P_1^{(2)}}$ (根据 $\models_u A[s]$ 的定义)

当且仅当 $\overline{a_1} \leq \overline{f_1^{(1)}(v_1)}$

当且仅当 $0 \leq \overline{f_1^{(1)}(v_1)} = \overline{v_1} + 1$, 故 $\models P_1^{(2)}(a_1, f_1^{(1)}(v_1))$ 成立。

$\models P_1^{(2)}(f_1^{(1)}(v_1), a_1)[s]$ 当且仅当 $(\overline{f_1^{(1)}(v_1)}, \overline{a_1}) \in \overline{P_1^{(2)}}$

当且仅当 $\overline{f_1^{(1)}(v_1)} \leq \overline{a_1}$

当且仅当 $\overline{f_1^{(1)}(v_1)} = \overline{v_1} + 1 \leq 0$, 故 $\models P_1^{(2)}(f_1^{(1)}(v_1), a_1)[s]$ 对

任何指派 s 都不成立。

$\models \forall v_1 P_1^{(2)}(a_1, v_1)[s]$ 当且仅当 $\models P_1^{(2)}(a_1, v_1)[s(v_1|d)]$ 对任一 $d \in U$ 都成立

当且仅当 $(\overline{a_1}, \overline{v_1}) \in \overline{P_1^{(2)}}$ (根据 $\models_u A[s]$ 的定义)

当且仅当 $0 \leq \overline{s(v_1|d)}(v_1) = d$

FC中公理的永真性

公理 A_1 : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

公理 A_2 : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

公理 A_3 : $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

公理1 (计算法) :

$$\begin{aligned}\overline{A \rightarrow (A \rightarrow B)} &= 1 - \bar{A} + \bar{A}(\overline{B \rightarrow A}) \\ &= 1 - \bar{A} + \bar{A}(1 - \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{A}) \\ &= 1 - \bar{A} + \bar{A} - \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{A} \\ &= 1\end{aligned}$$

公理1 (反证法) : 假设存在 u 和 s , 使得 $\not\models_u A \rightarrow (B \rightarrow A)[s]$

当且仅当 $\models_u A[s]$ 且 $\not\models_u (B \rightarrow A)[s]$

当且仅当 $\models_u A[s]$ 且 $\models_u B[s]$, $\not\models_u A[s]$ 产生矛盾,

故 $\models_u A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 。

FC中公理的永真性

公理 A_4 : $\forall v A \rightarrow A_t^v$ (t 对 A 中的变元 v 可代入)

证明：即证对于任何语义结构 \mathcal{U} 和指派 s ，有 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$ ，其中 t 对于 v 是可代入的。

因为 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 意味着对于任意的 $d \in U$ ，有 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$ ，令 $d = \bar{s}(t)$ ，于是 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$ ，而 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$ 就是 $\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$ ，如果 t 对于 v 是可代入的话。于是 $\models_{\mathcal{U}} \forall v A[s]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$ ，所以 $\models_{\mathcal{U}} (\forall v A \rightarrow A_t^v)[s]$ 。



FC中公理的永真性

公理 A_5 : $\forall v(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall vA \rightarrow \forall vB)$

证明：为了证明 $\forall v(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall vA \rightarrow \forall vB)$ ，只需证明由 $\models_u \forall v(A \rightarrow B)[s]$ 和 $\models_u \forall vA[s]$ 可以推出 $\models_u \forall vB[s]$ 成立即可。设 $d \in U$ ，那么 $\models_u (A \rightarrow B) [s(v|d)]$ ，所以 $\models_u A[s(v|d)]$ 或者 $\models_u B[s(v|d)]$ 。因为 $\models_u \forall vA[s]$ ，所以 $\models_u A[s(v|d)]$ ，从而对 $\forall d \in U$ 有 $\models_u B[s(v|d)]$ ，故 $\models_u \forall vB[s]$ 。



FC中公理的永真性

公理 $A_6: A \rightarrow \forall v A$ (v 在 A 中无自由出现)

证明：为了证明 $A \rightarrow \forall v A$ 永真，只需证明对于任意的 u 和 s ，只要 $\models_u A[s]$ 就有 $\models_u \forall v A[s]$ 。设 $\models_u A[s]$ ， d 为 U 中的任意一个元素，由于 A 中没有自由出现的 v ，指派 v 是 U 中的什么元素对公式 A 没有影响，所以 $\models_u A[s(v|d)]$ ，从而 $\models_u \forall v A[s]$ 。



逻辑蕴涵与逻辑等价

设 Γ 为FC的任意公式集， B 为FC的公式，若对任意使得 Γ 中每个公式均为真的结构 \mathcal{U} 及指派 s ，也使得 B 为真，即有 $\models_{\mathcal{U}} B[s]$ ，则称 Γ 逻辑蕴涵 B ，记为 $\Gamma \models B$ 。若 $\Gamma = \{A\}$ ，则有 $A \models B$ ，称做 A 逻辑蕴涵 B 。若同时有 $B \models A$ ，则称 A, B 逻辑等价。



总结

命题逻辑

- ① 命题与联结词
- ② 形式语言与命题公式
- ③ 范式
- ④ 联结词的扩充与归约
- ⑤ 命题演算形式系统PC
- ⑥ 命题演算形式系统PC的定理
- ⑦ 自然演绎推理系统

谓词逻辑

- ① 一阶谓词演算的基本概念
- ② 一阶谓词演算形式系统的定理