

## 数理逻辑第二次作业

姓名	孙铎	班级	5 班	学号	200110503
第 1 题					
第 2 题					
总分					
备注	1. 作业提交邮箱: hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间: 2022-06-07-24:00, 超过提交截止时间的作业视为无效。 2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生, 应至少提前 1 小时与助教联系沟通 (徐朕燃, QQ: 1319282215, 电话: 13713994811 许天骁, QQ: 1140931320, 电话: 18800415868)。 3. 作业文件名命名方式: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 2 次-180110504-张三-5 班.pdf); 邮件主题为: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 2 次-180110504-张三-5 班)。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。 4. 可手写拍照转为 PDF 格式。				

1. 分别用  $\downarrow$  和  $\uparrow$  等价表示下列公式

$$(1) \quad \neg p \vee q$$

$$(2) \quad p \wedge \neg q$$

$$(3) \quad \neg p \vee \neg q$$

$$(4) \quad p \leftrightarrow q$$

解:

先证明两个常用结论:

$$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$$

(1)

$$\neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \downarrow p) \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$$

$$\neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow p \uparrow \neg q$$

$$\Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$$

(2)

$$p \wedge \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg p \wedge \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \downarrow q$$

$$\Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow q$$

$$p \wedge \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \uparrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \uparrow (q \uparrow q))$$

$$\Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow q))$$

(3)

$$\neg p \vee \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \downarrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$$

$$\neg p \vee \neg q$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow p \uparrow q$$

(4)

$$p \leftrightarrow q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \downarrow \neg q) \vee (p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \vee (p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg(((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \vee (p \downarrow q))$$

$$\Leftrightarrow \neg(((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q))$$

$$\Leftrightarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q))$$

$$p \leftrightarrow q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \uparrow q) \wedge (\neg p \uparrow \neg q))$$

$$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (\neg p \uparrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q))$$

2. 在 PC 中证明下列事实（使用演绎定理证明不能超过 2 项）

- (1)  $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (3)  $A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$
- (5)  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$
- (7)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (9)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- (11)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$
- (13)  $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$

2. 解：

(1)

- a.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理6
- b.  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理1
- c.  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$  a和b用定理18

(3)

- a.  $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A$  已知定理
- b.  $(\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$  公理3
- c.  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$  a与c用分离规则
- d.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$  公理2
- e.  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$  c与d用分离规则
- f.  $A \rightarrow B$  已知定理
- g.  $A \rightarrow C$  e与f用分离规则

(5)

- a.  $(C \rightarrow D) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D))$  定理4
- b.  $((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$  定理4
- c.  $(C \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$  a和b用三段论定理8
- d.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$  对c用前件互换定理2

(7)

- a.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理6
- b.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$  定理14
- c.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  a和b用分离规则
- d.  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$  公理1
- e.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  c和d用三段论定理8
- f.  $(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$  定理1
- g.  $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$  e和f用定理18

(9)

- a.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理6
- b.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$  定理14
- c.  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  a与b用分离规则
- d.  $A \rightarrow A$  定理1
- e.  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  c和d用定理18

(11)

- a.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理6
- b.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C))$  定理5
- c.  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$  a和b用分离规则
- d.  $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$  定理14
- e.  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$  c和d用三段论定理8
- f.  $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$  定理5
- g.  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$  e和f用三段论定理8
- h.  $(\neg C \rightarrow C) \rightarrow C$  定理9
- i.  $((\neg C \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$  定理4
- j.  $((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  h和i用分离规则
- k.  $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$  g和j用三段论定理8

(13)

- a.  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理6
- b.  $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$  定理5
- c.  $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$  a和b用分离规则
- d.  $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \rightarrow$   
 $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$  定理5
- e.  $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C)$  c和d用分离规则
- f.  $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow$   
 $((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$  定理4
- g.  $((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C)) \rightarrow$   
 $((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$  e和f用分离规则
- h.  $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C))$  定理22
- i.  $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$  g和h用三段论定理8