数理逻辑

户保田
e-mail:hubaotian@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2022年5月

范式的定义

合取范式：命题公式B称为命题公式A的合取范式（conjunctive normal form），如果$B \Leftrightarrow A$，并且B呈如下形式：

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$$

其中 $C_i(i = 1,2,\cdots,m)$称为B的子句，它们形如：

$$L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n$$

L_j为原子公式或原子公式的否定，称L_j为子句的文字。

范式的定义

析取范式：命题公式B称为命题公式A的析取范式（disjunctive normal form），如果$B \Leftrightarrow A$，并且B呈如下形式：

$$C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m$$

其中 $C_i(i = 1,2, \cdots , m)$称为B的子句，它们形如：

$$L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n$$

L_j为原子公式或原子公式的否定，称L_j为子句的文字。

范式的定义

- 文字：命题变元及其否定（正文字和负文字）
- 子句：文字的析取式或合取式
- 子句的合取式：合取范式
- 子句的析取式：析取范式

范式定理

范式定理：对任意公式A，均可以做出它的合取（析取）范式

- 消去蕴含和等价
- 减少否定词的辖域
- 逐次使用合取对析取，析取对合取满足分配律，将公式化成合取或析取范式

常用的逻辑等价式

设A, B, C是任意的命题公式，分别用1和0表示重言式和矛盾式

1、(对合律) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

2、(幂等律) $A \wedge A \Leftrightarrow A; A \vee A \Leftrightarrow A$

3、(交换律) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A; A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

4、(结合律) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C); (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

5、(分配律) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C); A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6、(吸收律) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A; A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

7、(德摩根律) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B; \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

8、(同一律) $A \wedge 1 \Leftrightarrow A; A \vee 0 \Leftrightarrow A$

9、(零一律) $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0; A \vee 1 \Leftrightarrow 1$

10、(排中律) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0; A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

范式求解

- 消去蕴含和等价
  - $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
  - $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
  - $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg \mathrm{A} \vee B$

证明：对任意的的指派v有：

$$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))^{v} = (A \rightarrow B)^{v}(B \rightarrow A)^{v}$$

$$= (1 - A^{v} + A^{v}B^{v})(1 - B^{v} + A^{v}B^{v})$$

$$= A^{v}B^{v} + (1 - A^{v})(1 - B^{v})$$

$$= (A \leftrightarrow B)^{v}$$

故$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$成立。

范式求解

- 减少否定词的辖域
  - $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$（德摩根律）
  - $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$（德摩根律）
  - $\neg\neg A \Leftrightarrow A$（对合律）
- 逐次使用合取对析取，析取对合取满足分配律，将公式化成合取或析取范式
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$（分配律）
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$（分配律）

范式求解

例：做出$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$的合取范式和析取范式

解：$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee (\neg q \wedge r)$ （析取范式）

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ （合取范式）

主范式的定义

- 主范式：命题公式B称为命题公式A的主合取（主析取）范式，如果，
  - B是A的合取（析取）范式
  - B中的每一个子句均出现A中所有命题变元且仅出现一次
- 极大项：主合取范式中的合取项
- 极小项：主析取范式中的析取项

有关极大项的命题

- 含有n个命题变元的命题公式$A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$共有2^n个极大项
- 每个极大项有2^n种真值指派，但指派为”0“的只有一个
- 对同一指派，任意两个不同的极大项的真值取值不能同为”0“
- 所有2^n个极大项的合取式逻辑等价于”0“

有关极小项的命题

- 含有n个命题变元的命题公式$A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$共有2^n个极小项
- 每个极小项有2^n种真值指派，但指派为”1“的只有一个
- 对同一指派，任意两个不同的极小项的真值取值不能同为”1“
- 所有2^n个极小项的析取式逻辑等价于”1“

主范式的求解步骤

- 求解命题公式的合取（析取）范式
- 除去合取（析取）范式种所有永真、永假项
- 合并相同的变元与相同的项
- 对合取（析取）项缺少的变元r，通过析取（合取）永假式（永真式）$r\wedge\neg r$($r\vee\neg r$)并用分配律补齐

主范式的求解

例：求出$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$的主合取范式

解： $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg \mathrm{q}) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ (合取范式)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \mathrm{r}) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg \mathrm{r}) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \mathrm{r}) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg \mathrm{r})$ (主合取范式)

主范式的求解

例：求出$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$的主析取范式。

解：$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee (\neg q \wedge r)$ （析取范式）

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg q \wedge (p \vee \neg p)) \vee (\neg q \wedge r \wedge (p \vee \neg p))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$
$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge (r \vee \neg \mathrm{r})) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg \mathrm{r})) \vee (p \wedge \neg q \wedge (r$
$\vee \neg \mathrm{r})) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \mathrm{r}) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg \mathrm{r}) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \mathrm{r}) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg \mathrm{r})$
$\vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \mathrm{r}) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg \mathrm{r}) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \mathrm{r}) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge$
$\neg \mathrm{r}) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ （主析取范式）

弄假指派与范式

命题1：对于一个命题公式的任何一个指派，这个指派可以弄假一个子句，这个子句包含命题公式中的所有命题变元析取，且每个命题变元只被包含一次。在这类子句中，这个指派不能弄假任何其他的子句，也即这个指派弄真所有其他子句。

命题2：对于一个公式的任何一个弄假指派，则有该命题公式的一个主合取范式中的一个合取项，使得这一个指派弄假这个合取项，并且只弄假这个合取项。

弄假指派与范式

命题3：通过给定的任意命题公式的主合取范式可以直接写出该命题公式的弄假指派，这就是该命题公式的所有弄假指派。

证明：不妨假设任意命题公式 A的主合取范式为$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$

其中，C_1，C_2，$\cdots$，C_m为所有极大项，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$为对应极大项的弄假指派

- 如果存在$\alpha \neq \alpha_1, \alpha \neq \alpha_2, \cdots, \alpha \neq \alpha_m, A^\alpha = 0$。根据命题2则必有$C_1^\alpha = 1, C_2^\alpha = 1, \cdots, C_m^\alpha = 1$
- 从而$A^\alpha = (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m)^\alpha = 1$，这与$A^\alpha = 0$矛盾，故不存在除$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$外的弄假指派。

弄假指派与主合取范式

命题4：如果已知命题公式的所有弄假指派，则可以写出该命题公式的主合取范式。

例：求命题公式$A=(p\wedge q)\rightarrow(\neg q\wedge r)$的主合取范式

解：由真值表可知弄假指派有

$$\alpha=\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}，\ \beta=\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

上述弄假指派弄假的极大项为：$\neg p\vee\neg q\vee \mathrm{r}$，$\neg p\vee\neg q\vee\neg \mathrm{r}$

所以命题公式A的主合取范式为：$(\neg p\vee\neg q\vee \mathrm{r})\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg \mathrm{r})$

弄真指派与主析取范式

命题5：如果已知命题公式的所有弄真指派，则可以写出该命题公式的主析取范式。

例：求解命题公式$A = (p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$的主析取范式

解：由真值表可知公式A的弄真指派弄真的极小项为：

$$\neg p \wedge q \wedge \mathrm{r}，\neg p \wedge q \wedge \neg \mathrm{r}，\neg p \wedge \neg q \wedge \mathrm{r}$$

$$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg \mathrm{r}，p \wedge \neg q \wedge r，p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

所以命题公式A的主析取范式为:

$$(\neg p \wedge q \wedge \mathrm{r}) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg \mathrm{r}) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \mathrm{r}) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg \mathrm{r}) \vee$$

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

主范式与指派

定理1：永真式无主合取范式，永假式无主析取范式。

定理2：任一命题公式（非永真，非永假）都存在唯一与之等价的主合取范式和主析取范式。

主合取范式与主析取范式的关系

定理3：命题公式 A包含n个命题变元$p_1, p_2, \cdots, p_n$， n个命题变元的极大项全体为$M_1, M_2, \cdots, M_{2^n}$ ， A的主合取范式表示为$\wedge_{i\in I} M_i$，则A的主析取范式为$\neg \wedge_{i\in \bar{I}} M_i$ ， A的极大项与极小项的数目之和为2^n

主合取范式与主析取范式的关系

已知$A \Leftrightarrow \wedge_{i\in I} M_i$，求证$A \Leftrightarrow \neg\wedge_{i\in \bar{I}} M_i$

证明：即证对任意指派v，$(\wedge_{i\in I} M_i)^v = (\neg\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1 - (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v$

只需证：$(\wedge_{i\in I} M_i)^v + (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1$

设v弄假的极大项为M_k，即${M_k}^v = 0$，$(M_i)^v = 1 (i \neq k)$

若$k \in I$，$(\wedge_{i\in I} M_i)^v = 0$，$(\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1$

若$k \in \bar{I}$，$(\wedge_{i\in I} M_i)^v = 1$，$(\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 0$

故有$(\wedge_{i\in I} M_i)^v + (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1$

主合取范式与主析取范式的关系

对于命题公式$A = p \wedge q \to \neg q \wedge r$

p	q	r	极大项	极小项		A
0	0	0	$M_1\,(p \vee q \vee r)$	$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$	$\neg M_1$	1
0	0	1	$M_2\,(p \vee q \vee \neg r)$	$(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$	$\neg M_2$	1
0	1	0	$M_3\,(p \vee \neg q \vee r)$	$(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$	$\neg M_3$	1
0	1	1	$M_4\,(p \vee \neg q \vee \neg r)$	$(\neg p \wedge q \wedge r)$	$\neg M_4$	1
1	0	0	$M_5\,(\neg p \vee q \vee r)$	$(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$	$\neg M_5$	1
1	0	1	$M_6\,(\neg p \vee q \vee \neg r)$	$(p \wedge \neg q \wedge r)$	$\neg M_6$	1
1	1	0	$M_7\,(\neg p \vee \neg q \vee r)$	$(p \wedge q \wedge \neg r)$	$\neg M_7$	0
1	1	1	$M_8\,(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$	$(p \wedge q \wedge r)$	$\neg M_8$	0

主合取范$\Leftrightarrow M_7 \wedge M_8$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \mathrm{r}) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg \mathrm{r})$

主析取范式$\Leftrightarrow \neg M_1 \vee \neg M_2 \vee \neg M_3 \vee \neg M_4 \vee \neg M_5 \vee \neg M_6$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee$

$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

主范式的应用

例1：安排三个人p, q, r去完成一项任务，需满足以下条件:

- 若p去，则r也去。
- 若q去，则r不能去。
- 若r不去，则不是p去就是q去。

问p、q、r三人有几种合理的安排方案。

解:

1、分别用P、Q、R表示p、q、r去。

2、描述上述条件的命题公式:

$$(P \to R) \wedge (Q \to \neg R) \wedge (\neg R \to P \vee Q)$$

3、做出上述公式的主析取范式

主范式的应用

$$A = (P \to R) \land (Q \to \neg R) \land (\neg R \to P \lor Q)$$

P	Q	R	$P \to R$	$\neg R$	$P \lor Q$	$Q \to \neg R$	$\neg R \to P \lor Q$	A
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	0	1	0

极小项：$\neg P \land \neg Q \land R$， $\neg P \land Q \land \neg R$， $P \land \neg Q \land R$

A的主析取范式：$(\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \lor (P \land \neg Q \land R)$

p, q, r**三人有三种合理的安排方案！**