数理逻辑

户保田
e-mail:hubaotian@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院

2022年5月

语言部分

字母表：$\sum = \boldsymbol{L_v} \cup \boldsymbol{L_a} \cup \boldsymbol{L_f} \cup \boldsymbol{L_p} \cup \boldsymbol{L_l}$

- 个体变元L_v： $v_1, v_2, v_3, \cdots$
- 个体常元L_a： $a_1, a_2, a_3, \cdots$
- 函词L_f：
  - 一元函词： $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \cdots$
  - 二元函词： $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \cdots$
  - n元函词： $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}, \cdots$
- 谓词L_p：
  - 一元谓词： $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \cdots$
  - 二元谓词： $P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}, \cdots$
  - n元谓词： $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}, \cdots$
- 助记符以及联结词 L_l：
  - 联结词： $\rightarrow$, $\neg$
  - 量词： $\forall$
  - 助记符： (,)

FC中的项和公式

$\mathcal{L}(FC)$的项:

（1）变元和常元是项。

（2）如果$t_1, t_2, \cdots, t_n$为项，$f^{(n)}$为n元函词，那么$f^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$也为项。

（3）除了有限次数使用（1）和（2）得到的表达式以外，其余的都不是项。

$\mathcal{L}(FC)$的谓词公式:

（1）$t_1, t_2, \cdots, t_n$为项，$P^{(n)}$为n元谓词符号，那么$P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$为原子公式。

（2）若A, B 为公式，v为任意的变元符号，那么$(\neg A), (A \rightarrow B), (\forall v A)$都是公式。

（3）只有有限次数的使用（1）和（2）的表达式才是谓词公式。

FC中的项和公式

关于$\mathcal{L}(FC)$的说明：

（1）这里的符号是抽象的，并无特别的意义 。

（2）其它的联结词可以用$\rightarrow$，$\neg$来表示，存在量词$\exists$可以用$\neg,\forall$来表示。

$$\exists(x)P(x) \Leftrightarrow \neg\forall(x)\neg P(x)$$

（3）$\mathcal{L}(FC)$中没有等词 =，带有等词的以后展开。

（4）不含任何函词的系统称为纯谓词演算系统（$L_f=\phi$）。

（5）在$\mathcal{L}(FC)$中引入命题符号，或者0元谓词符号作为命题符号，这样命题演算系统PC就成了FC的一个子系统。

约定：

（1）用$f^{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$代替$f^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$，用$P^{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$代替$P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$。

（2）最外层的括号可以省略。并且$\forall v(\exists v)$的优先级高于所有的二元联结词和$\neg$同级。

与FC的项和公式相关的一些基本概念

量词的辖域：公式A称为量词$\forall v(\exists v)$的辖域，如果$\forall v(\exists v)$与A毗连并且A的任何真截断（如果$A = ww', w' \neq \epsilon$，那么我们称$w$为$A$的真截断）都不是公式。

例：

$$(\forall x)(P(x,y) \to Q(x,y)) \to R(x,y)$$

约束变元和自由变元：公式A中，变元v的某个出现叫做约束的出现，如果该变元为$\forall v(\exists v)$的指导变元，并且出现在$\forall v(\exists v)$的辖域内。否则该变元的出现为自由的出现。

A中约束出现的变元称为约束变元，自由出现的变元称为自由变元。

与FC的项和公式相关的一些基本概念

可代入：设v为谓词公式A中的自由变元，且项t中不含A中的约束变元符（若有可易名），则称t对v是可代入的。

例：

$$(\forall x)(P(x,y) \to Q(x,y)) \to R(x,y)$$

$$\Big\downarrow \text{将}y\text{用}f(z)\text{代入}$$

$$(\forall x)(P(x,f(z)) \to Q(x,f(z))) \to R(x,f(z))$$

与FC的项和公式相关的一些基本概念

代入：对公式A中的变元v的所有自由出现都代换为项t（t对A中的v是可代入的）的过程称为代入。代换后得到的公式A的代入实例记为A_t^v。如果A中没有v的自由出现则A_t^v就是A。用记号$A_{t_1,t_2,\cdots,t_n}^{v_1,v_2,\cdots,v_n}$表示对$A$中的变元$v_1,v_2,\cdots,v_n$同时做代入，$v_i$代入为$t_i$，它与顺次代入$(\cdots((A_{t_1}^{V_1})_{t_2}^{V_2})_{t_3}^{V_3}\cdots)_{t_n}^{V_n}$是不同的。

$$A=(\forall x)(P(x,y)\to Q(x,y))\to R(x,y)$$

$$\Big\downarrow \ y\text{用}f(z)\text{代入}$$

$$A_{f(z)}^{y}=(\forall x)(P(x,f(z))\to Q(x,f(z)))\to R(x,f(z))$$

子公式：公式B称为公式A的子公式，如果A形如wBw'的符号串，其中w,w'是符号串，B是公式。当w和w'中有一个不是空串，我们就把B称为A的真子公式。

与FC的项和公式相关的一些基本概念

全称化：设$v_1, v_2, \cdots, v_n$为公式A的所有的自由变元，那么公式$\forall v_{i_1}, \forall v_{i_2}, \cdots, \forall v_{i_r} A$称为$A$的全称化。其中$1 \le r \le n, 1 \le i_1, i_2, i_r \le n$，公式$\forall v_1 \forall v_2 \cdots \forall v_n A$称为公式$A$的全称封闭式。

当A无自由变元时，A的全程封闭式就是它本身。不含自由变元的公式称为命题，FC中的公式是命题当且仅当它是一个全称封闭式。

一阶谓词演算系统FC的推理部分

FC的理论部分称为一阶逻辑，用$\mathcal{J}(\mathrm{FC})$表示。

公理集合，由下列公式及其所有的全称化组成：

A_1: $A \to (B \to A)$

A_2: $A \to (B \to A) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

A_4: $\forall v A \to A_t^v$　（t对A中的变元v可代入）

A_5: $\forall v(A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B)$

A_6: $A \to \forall v A$　（v在A中无自由出现）

推理规则

$$r_{mp}: \frac{A\ ,\ A \to B}{B}$$

FC中的定理，证明以及演绎，演绎结果的定义与PC中是一样的！

FC的基本定理

定理1（定理5.2.1）：对于FC中的任何公式A，变元v:

$$\vdash_{FC}\forall vA \to A$$

定理2（定理5.2.2）：对于FC中的任何公式A，变元v：

$$\vdash_{FC}A \to \neg\forall v\neg A$$ （也即$\vdash_{\mathrm{FC}}A \to \exists vA$ ）

定理3（定理5.2.3）：对于FC中的任何公式A，变元v：

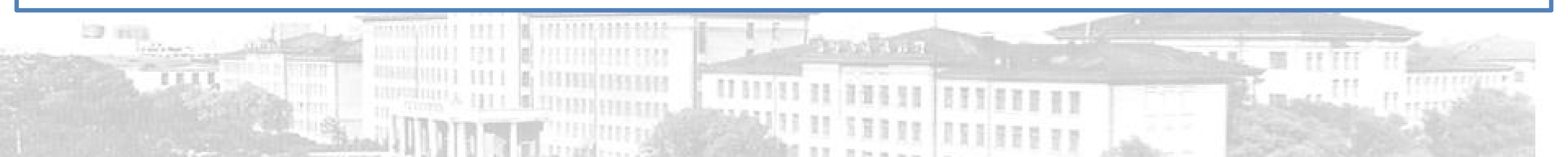
$$\vdash_{FC}\forall vA \to \exists vA$$

定理4（定理5.2.4）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式A，变元v：

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall vA$

定理5（定理5.2.5）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由出现的变元v：

如果$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \vdash \forall vA$



定理1

定理5.2.1：对于FC中的任何公式A，变元v:$\vdash_{FC}\forall vA \to A$

证明： $\forall vA \to A_t^v$ （公理4）

$\forall vA \to A$ （是公理4的一种特例，即令$t = v$，则$A_t^v = A_v^v = A$）

定理2

定理5.2.2：对于FC中的任何公式A，变元v：

$$\vdash_{FC} A \to \neg\forall v \neg A \quad \text{（也即} \vdash_{FC} A \to \exists v A\text{）}$$

证明：

（1）$\forall v \neg A \to \neg A$ FC中定理1

（2）$(\forall v \neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\forall v \neg A)$ PC中定理15

（3）$A \to \neg\forall v \neg A$ (1)(2)用rmp分离规则

（4）$A \to \exists v A$

定理3

定理5.2.3：对于FC中的任何公式A，变元v：

$$\vdash_{FC} \forall vA \rightarrow \exists vA$$

证明：

（1） $\forall vA \rightarrow A$　　FC中定理1

（2） $A \rightarrow \exists vA$　　FC中定理2

（3） $\forall vA \rightarrow \exists vA$　　(1)(2)用PC中三段论定理8

定理4

定理5.2.4：（全称推广定理）对于FC中的任何公式A，变元v：

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall vA$

证明：设$A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$是FC中公式$A$的证明序列，对该证明序列的长度$n$用归纳法。

（1）当$n = 1$时，A只能是公理。

- 若v在A中有自由出现，那么$\forall vA$是A的全称化，$\forall vA$也是公理；
- 若v在A中无自由出现，则$A \to \forall vA$为公理6，那么由A和$A \to \forall vA$通过rmp分离规则，知$\forall vA$为定理。

（2）假设A的证明序列长度小于n时，结论成立

（3）则当A的证明序列长度为n时：

- 若A是公理，则仿照（1）的证明知$\forall vA$为定理。
- 若A_n（$= A$）为A_j $(j < n)$,则由归纳假设知$\forall vA_j = \forall vA$为定理。
- 若A_n为$A_i, A_j (i, j < n)$分离而得，不妨设$A_j = A_i \to A$，则由归纳假设$\forall vA_i, \forall v(A_i \to A)$都是定理。再由公理5：$\forall v(A_i \to A) \to (\forall vA_i \to \forall vA)$，知$\forall vA_i \to \forall vA$为定理。再由$\forall vA_i$和$\forall vA_i \to \forall vA$使用分离规则，知$\forall vA$为定理。

定理5

定理5.2.5：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由出现的变元v：

如果$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \vdash \forall v A$

证明：设$A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$是FC中公式$A$的演绎序列，对该演绎序列的长度$n$用归纳法。

（1）当$n = 1$时

- 若A是公理，则参照前面的定理证明知$\forall v A$是定理,从而$\Gamma \vdash \forall v A$;
- 若$A \in \Gamma$，则v不在A中自由出现，$A \to \forall v A$为公理6，由rmp分离规则知$\Gamma \vdash \forall v A$。

（2）假设A的演绎序列长度小于n时，结论成立

（3）当A的演绎序列长度为n时

- 若A是公理或$A \in \Gamma$,则仿照（1）的证明知$\Gamma \vdash \forall v A$。
- 若A_n为$A_j (j < n)$，则由归纳假设知$\Gamma \vdash \forall v A_j = \forall v A$。
- 若A_n为$A_i, A_j (i, j < n)$推得，不妨设$A_j = A_i \to A$，则由归纳假设$\Gamma \vdash \forall v A, \Gamma \vdash \forall v (A_i \to A)$。再由公理5: $\forall v (A_i \to A) \to (\forall v A_i \to \forall v A)$知$\Gamma \vdash \forall v A_i \to \forall v A$。由分离规则知$\Gamma \vdash \forall v A$。

FC的基本定理

定理1（定理5.2.1）：对于FC中的任何公式A，变元v: √

$$\vdash_{FC} \forall vA \to A$$

定理2（定理5.2.2）：对于FC中的任何公式A，变元v：√

$$\vdash_{FC} A \to \neg\forall v\neg A \quad （也即\vdash_{\mathrm{FC}} A \to \exists vA）$$

定理3（定理5.2.3）：对于FC中的任何公式A，变元v：√

$$\vdash_{FC} \forall vA \to \exists vA$$

定理4（定理5.2.4）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式A，变元v：√

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall vA$

定理5（定理5.2.5）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由出现的变元v：√

如果$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \vdash \forall vA$

例1

例5.2.1：若$\vdash A \to B$，且v在B中无自由出现，则：

$$\vdash \exists v A \to B$$

证明思路：

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{A \to B} \arrow[r] & \boxed{\neg B \to \neg A} \arrow[r] & \boxed{\forall v(\neg B \to \neg A)} \arrow[r] & \boxed{\forall v \neg B \to \forall v \neg A} \\
 & & & \boxed{\neg B} \arrow[u] \arrow[u, dashed, bend right] \arrow[d] \\
 & & & \boxed{\neg \forall v \neg A \to B}
\end{tikzcd}
$$

例1

例5.2.1：若$\vdash A \to B$，且v在B中无自由出现，则$\vdash \exists v A \to B$。

证明：

（1） $A \to B$ 已知定理

（2） $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ PC中定理13

（3） $\neg B \to \neg A$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4） $\forall v(\neg B \to \neg A)$ 对（3）用FC中的（全称推广）定理4

（5） $\forall v(\neg B \to \neg A) \to (\forall v \neg B \to \forall v \neg A)$ 公理5

（6） $\forall v \neg B \to \forall v \neg A$ （4）和（5）用rmp分离规则

（7） $\neg B \to \forall v \neg B$ 公理6

（8） $\neg B \to \forall v \neg A$ （7）和（6）用PC中的三段论定理8

（9） $(\neg B \to \forall v \neg A) \to (\neg \forall v \neg A \to B)$ PC中定理14

（10） $\neg \forall v \neg A \to B$ （8）和（9）用rmp分离规则

（11） $\exists v A \to B$ 定义式

例2

例5.2.2：$\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$

证明思路：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\exists x \neg A} \arrow[r] & \boxed{\forall x B} \arrow[d] \\
\boxed{\neg A} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r, dashed] & \boxed{B}
\end{tikzcd}$$

例2

例5.2.2： $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$

证明：

（1） $\neg A \to \exists x \neg A$ 定理2

（2） $\forall x B \to B$ 定理1

（3） $(\neg A \to \exists x \neg A) \to ((\exists x \neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to \forall x B))$ PC中加后件定理5

（4） $(\exists x \neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to \forall x B)$ （1）和（3）用分离规则

（5） $(\forall x B \to B) \to ((\neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to B))$ PC中加前件定理4

（6） $(\neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to B)$ （2）和（4）用分离规则

（7） $(\exists x \neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to B)$ （4）和（6）用PC中的三段论定理8

（8） $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \neg A \to B$ PC中演绎推理

（9） $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$ FC中全称推广定理5