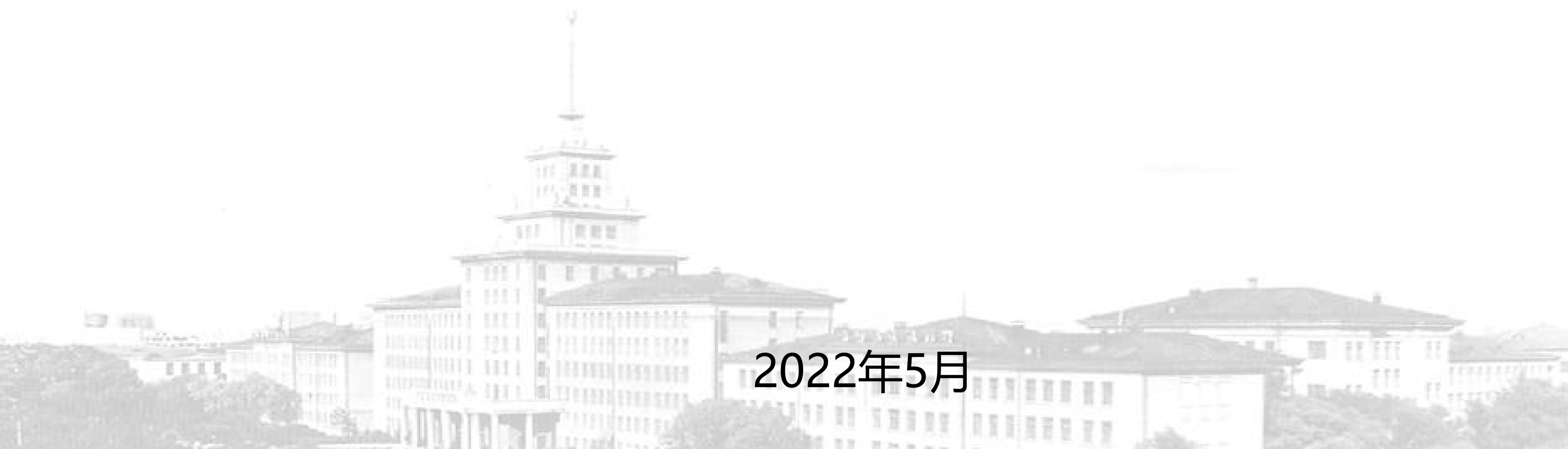
数理逻辑

户保田
e-mail:hubaotian@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机学院



2022年5月

推理部分

公理集合:

(1) A_1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(2) A_2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(3) A_3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

推理规则或分离规则（Modus Ponens）：

若有A和$A \rightarrow B$成立，则必有结论B成立，可形式化表示为:

$$r_{mp}: \frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

证明

证明： 称下列公式序列为公式A 在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2, \cdots, m\}$，A_i 是PC中的公理，或是$A_j (j < i)$，或是$A_j, A_k (j, k < i)$用分离规则导出的。其中A_m就是公式A。

A_i 只能是以下三种中的其一：

（1）PC中的公理或已知定理

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中的某一个

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的

基本定理

定理1：$\vdash_{PC} A \to A$ √

定理2：如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ **（前件互换定理）** √

定理3：$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ **定理（2）的另一种形式** √

定理4：$\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ **（加前件定理）** √

定理5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ **（加后件定理）** √

定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$ √

定理7：$\vdash A \to (\neg A \to B)$ √

定理8：如果 $\vdash (A \to B)$，$\vdash (B \to C)$，那么$\vdash (A \to C)$ **（三段论定理）** √

定理9. $\vdash (\neg A \to A) \to A$ **（反证法）** √

定理10. $\vdash \neg\neg A \to A$ √

定理11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ **（反证法）** √

定理12. $\vdash A \to \neg\neg A$ √

基本定理

定理13：$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ **(公理A_3的逆命题)**

定理14：$\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

定理15：$\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

定理16：$\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ **(反证法)**

定理13

定理13. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

证明思路:

（1）此定理是公理3：$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$的逆命题

（2）$(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$ （公理3）

（3） 若能证明出 $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$，利用三段论定理8，则得证。

- $\neg\neg A \to A$ （定理10）
- $B \to \neg\neg B$ （定理12）

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, squiggly, dash] & B \arrow[d, "\text{定理12}"] \\
\neg\neg A \arrow[u, "\text{定理10}"] \arrow[r, squiggly, dash] \arrow[ur, squiggly, dash] & \neg\neg B
\end{tikzcd}
$$

定理13

定理13. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

证明:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, phantom, "\sim\sim\sim\sim\sim\sim"] & B \arrow[d, "定理12"] \\
\neg\neg A \arrow[u, "定理10"] \arrow[r, phantom, "\sim\sim\sim\sim\sim\sim"] \arrow[ur, phantom, "\sim\sim\sim\sim\sim\sim"] & \neg\neg B
\end{tikzcd}
$$

(1) $\neg\neg A \to A$ **定理10**

(2) $B \to \neg\neg B$ **定理12**

(3) $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to B) \to (\neg\neg A \to B))$ **加后件定理5**

(4) $(A \to B) \to (\neg\neg A \to B)$ **(1）和（3）用rmp分离规则**

(5) $(B \to \neg\neg B) \to ((\neg\neg A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B))$ **加前件定理4**

(6) $(\neg\neg A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ **(2）和（5）用rmp分离规则**

(7) $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ **(4）和（6）用三段论定理8**

(8) $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$ **公理3**

(9) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (7）和（8）**用三段论定理8**

定理14

定理14. $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

证明:

(1) $B \to \neg\neg B$ 定理12

(2) $(B \to \neg\neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B))$ 对（1）用加前件定理4

(3) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B)$ （1）和（2）用rmp分离规则

(4) $(\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A)$ 公理3

(5) $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ （3）和（4）用三段论定理8

定理15

定理15. $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

证明:

(1) $\neg\neg A \to A$ **定理10**

(2) $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B))$ **加后件定理5**

(3) $(A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B)$ **(1)和(2)用rmp分离规则**

(4) $(\neg\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ **公理3**

(5) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ **(3)和(4)用三段论定理8**

定理16

定理16. $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ （反证法）

证明思路：要证$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$，只需证

$$(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$$ （逆否命题）

发现上式前件一致，利用公理2，只需证

$$\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))$$

利用前件互换定理2，只需证

$$B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$$

结合公理3证明 $(\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$ 的逆否命题，只需证

$$B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$$

利用前件互换定理2，只需证

$$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$$(公理3)

定理16

定理16. $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

证明:

(1) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ **公理3**

(2) $B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ **对（1）用前件互换定理2**

(3) $((\neg A \to \neg B) \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$**定理13**

(4) $B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$ **(2) 和（3）用三段论定理8**

(5) $\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))$ **对（4）用前件互换定理2**

(6) $(\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))) \to$

$((\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B)))$**公理2**

(7) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$ **（5）和（6）用rmp分离规则**

(8) $(\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B)) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$**公理3**

(9) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ **(7) 和（8）用三段论定理8**

基本定理

定理13：$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ **（公理A_3的逆命题）** √

定理14：$\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ √

定理15：$\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ √

定理16：$\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ **（反证法）** √

反证法思想的运用

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路(利用反证法)：

假设上述命题为假，则：一个蕴含式只有一种情况为假，就是前真后假，即:

$$(A \to B) \to A\text{为真，}A\text{为假}$$

那么，A为假并且使得$(A \to B) \to A$为真，则:

$$(A \to B)\text{一定为假。}$$

又已知A为假，则$(A \to B)$一定为真，

那么$(A \to B)$真假性就产生了矛盾。**根据假设可知上述定理是真。**

反证法思想的运用

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明（**反证法思想**）：

令$P = ((A \to B) \to A) \to A$

（1） $\neg((A \to B) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A)$ **定理6**

（2） $(\neg((A \to B) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A))$

$\to (\neg(((A \to B) \to A) \to A) \to ((A \to B) \to A))$ **定理14**

（3） $\boldsymbol{\neg P \to ((A \to B) \to A)}$**（1）和（2）用rmp分离规则而得**

（4） $A \to P$ 即 $A \to (((A \to B) \to A) \to A)$ **公理1**

（5） $(A \to P) \to (\neg P \to \neg A)$ **定理13**

（6） $\boldsymbol{\neg P \to \neg A}$ **（4）和（5）用rmp分离规则而得**

（7） $\boldsymbol{((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B))}$ **定理13**

（8） $\boldsymbol{\neg A \to (A \to B)}$ **定理6**

反证法思想的运用

（**接上页**）

(9) $\neg P \to (A \to B)$ **由(6)和(8)用三段论定理8**

(10) $(\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B)))$

$\to ((\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B)))$ **公理2**

(11) $\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B))$ **由(3)和(7)用三段论定理8**

(12) $(\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B))$ **(10)和(11)用rmp分离规则**

(13) $\neg P \to \neg(A \to B)$ **(6)和(12)用rmp分离规则**

(14) $(\neg P \to (A \to B)) \to ((\neg P \to \neg(A \to B)) \to P)$ **定理16**

(15) $(\neg P \to \neg(A \to B)) \to P$ **(9)和(14)用rmp分离规则**

(16) P **(13)和(15)用rmp分离规则而得**

总结：通过假定字符串P为假，那么其否定$\neg P$为真，推出$(\neg P \to Q)$和$(\neg P \to \neg Q)$都成立，再由定理16 $(\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$ 通过分离规则，分离得到P成立。

例1的其他证明方法（1）

例：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：用反证法的思想证明过程过于复杂，是否有更简化的证明方式？如果可证明$(\neg A \to \neg(A \to B)) \to A$成立，结合定理13：$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$，和三段论定理8，是否可以证明?

证明:

(1) $\neg A \to (A \to B)$ **定理6**

(2) $(\neg A \to (A \to B)) \to ((\neg A \to \neg(A \to B)) \to A)$**定理16**

(3) $(\neg A \to \neg(A \to B)) \to A$ **由(1) 和(2) 用分离规则**

(4) $(A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B)$ **定理13, 逆否命题**

(5) $((A \to B) \to A) \to A$ **(4) 和(3)用三段论定理8**

例1的其他证明方法（2）

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：这个公式与定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$ 形式上比较相似，是否可以从定理6出发证明，通过加后件构造出要证的公式。

证明:

（1）$\neg A \to (A \to B)$ **定理6**

（2）$(\neg A \to (A \to B))$

$\to (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$ **加后件定理5**

（3）$((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$ **由(1) 和 (2)用rmp分离规则**

（4）$(((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$

$\to (((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A))$ **加后件定理5**

（5）$((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A)$ **由(3) 和 (4)用rmp分离规则**

（6）$(\neg A \to A) \to A$ **定理9**

（7）$((A \to B) \to A) \to A$ **由(6) 和 (5)用rmp分离规则**

例1的其他证明方法（3）

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：这个公式与定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$ 形式上比较相似，从定理6出发，结合三段论定理证明。

证明：

(1) $\neg A \to (A \to B)$ **定理6**

(2) $(\neg A \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$ **加后件定理5**

(3) $((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$ **由(1) 和 (2)用rmp分离规则**

(4) $(\neg A \to A) \to A$ **定理9**

(5) $((A \to B) \to A) \to A$ **由(3) 和(4)用三段论定理8**

从例1的证明可以看出，命题的证明方法并不唯一，需要自己仔细分析找到切入点，用定理一步一步推理，所得的结果就都是正确的。

基本定理

定理17： $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

定理18： $\vdash \neg A \to C$， $\vdash B \to C$当且仅当$\vdash (A \to B) \to C$

定理19： $\vdash A \to A \vee B$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to A \vee B \Leftrightarrow A \to (\neg A \to B)$$ （**等价于定理7**）

定理20： $\vdash A \to B \vee A$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to B \vee A \Leftrightarrow A \to (\neg B \to A)$$ （**等价于公理1**）

定理21： $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ 也即

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$ **（二难推理）**

定理17

定理17： $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

证明思路： 要证$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$成立，因为定理15，只需证

$$(A \to B) \to (A \to \neg(A \to \neg B))$$

前件一致，逆向运用公理2，只需证

$$A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$$

只需证（逆否命题）

$$A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$$

前件互换定理2，只需证

$$(A \to \neg B) \to (A \to \neg B)\text{(定理1)}$$

定理17

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$（与定理16恰好相反）

证明:

(1) $(A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$ **定理1**

(2) $A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$**前件互换定理2**

(3) $((A \to \neg B) \to \neg B) \to (B \to \neg (A \to \neg B))$ **定理15**

(4) $A \to (B \to \neg (A \to \neg B))$ **由(2) 和(3)用三段论定理8**

(5) $(A \to (B \to \neg (A \to \neg B)))$

$\to ((A \to B) \to (A \to \neg (A \to \neg B)))$**公理2**

(6) $(A \to B) \to (A \to \neg (A \to \neg B))$ **(4) 和(5)用rmp 分离规则**

(7) $(A \to \neg (A \to \neg B)) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ **定理15**

(8) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ **由(6) 和(7)用三段论定理8**

定理17另一种证明方法

定理17：$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ （与定理16恰好相反）

证明：

(1) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg A))$ **加后件定理5**

(2) $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ **定理11**

(3) $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$

$\rightarrow (((B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A))$ **加前件定理4**

(4) $((B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$ **(2)和(3)用rmp分离规则**

(5) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$ **(1)和(4)用三段论定理8**

(6) $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ **定理15**

(7) $((A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$

$\rightarrow (((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$ **加后件定理5**

(8) $((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ **(6)和(7)用rmp分离规则**

(9) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ **(5)和(8)用三段论定理8**