

数理逻辑第三次作业

姓名	孙铎	班级	5 班	学号	200110503
第 1 题					
第 2 题					
总分					
备注	<p>1. 作业提交邮箱: hitsz_logic_2022@163.com。作业提交截止时间: <u>2022-06-20-24:00</u>, 超过提交截止时间的作业视为无效。</p> <p>2. 确因网络等特殊原因无法及时提交作业的学生, 应至少提前 1 小时与助教联系沟通 (徐朕燃, QQ: 1319282215, 电话: 13713994811; 许天骁, QQ: 1140931320, 电话: 18800415868)。</p> <p>3. 作业文件名命名方式: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 3 次-180110504-张三-5 班.pdf); 邮件主题为: 第 x 次-学号-姓名-x 班 (例: 第 3 次-180110504-张三-5 班)。缺少这些信息的作业将被酌情扣分。注意作业次数以阿拉伯数字命名。</p> <p>4. 可手写拍照转为 PDF 格式。</p>				

1. 利用演绎定理在 PC 中证明:

- (1) $\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$
- (2) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (3) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- (4) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

(1)

- (1). $B \rightarrow A$ 假设
- (2). $\neg A$ 假设
- (3). $(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ 定理13
- (4). $\neg A \rightarrow \neg B$ (1)和(3)用分离规则
- (5). $\neg B$ (2)和(4)用分离规则
- (6). $B \rightarrow A, \neg A \vdash \neg B$ 演绎结果的定义
- (7). $B \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \neg B$ 演绎定理
- (8). $\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ 演绎定理

(2)

- (1). $A \rightarrow B$ 假设
- (2). $B \rightarrow C$ 假设
- (3). A 假设
- (4). B (1)和(3)用分离规则
- (5). C (2)和(4)用分离规则
- (6). $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$ 演绎结果的定义
- (7). $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ 演绎定理
- (8). $A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 演绎定理
- (9). $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 演绎定理

(3)

- (1). $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ 假设
- (2). $\neg A \rightarrow A$ (1)用定理18
- (3). $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理9
- (4). A (2)和(3)用分离规则
- (5). $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$ 演绎结果的定义
- (6). $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ 演绎定理

(4)

- (1). $\neg(A \rightarrow B)$ 假设
- (2). B 假设
- (3). $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
- (4). $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 定理14
- (5). $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ (3)和(4)用分离规则
- (6). A (1)和(5)用演绎定理
- (7). $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A$ 演绎结果的定义
- (8). $\neg(A \rightarrow B) \vdash B \rightarrow A$ 演绎定理
- (9). $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 演绎定理

2. 将 PC 中公理 3 改成

$$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

记所得系统为 PC1。证明：

- (1) $\vdash_{PC} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$
- (2) $\vdash_{PC1} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

(1)

- (1). $\neg\neg A \rightarrow A$ 定理10
- (2). $A \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ 公理1
- (3). $\neg\neg A \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (1)和(2)用三段论定理8
- (4). $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 公理3
- (5). $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (4)用前件互换定理2
- (6). $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (3)和(5)用定理18

(2)

*PC*中定理1、2、3、4、5、8的证明并没有用到公理3，
所以显然*PC*中的定理1、2、3、4、5、8在*PC1*中同样成立。

- (1). $B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. 公理1
- (2). $(B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow (((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A))$ 加后件定理5
- (3). $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (1)和(2)用分离规则
- (4). $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ 公理3
- (5). $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$ (4)用前件互换定理2
- (6). $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (3)和(5)用三段论定理8