CUADERNO 1

FECHA

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA:

Prof. Myriam Gil y Tomas Sanchez Giugione

Comunicación y consultas x Miel. Leer condiciones de cursada y cronograma (pero vamos a tener cronograma propio que lo mandan).

1 unidad x semana. Hacer al menos 2 ej

Taller de consulta sábados de 13 a 16 hs.

En el examen se puede tener una hoja de fórmulas que esté en Miel.

UNIDAD 1: 19/8

1) **Experimentos** → experiencia debe ser repetible bajo ciertas condiciones
→ no se debe saber el resultado de antemano

2) **Espacio muestral** (S o E) → notación esp. mues.
↳ c/ exp. puede tener 1 o más espacios muestrales
↳ Conjunto de todos los resul. posibles del exp

Ej:

Exp_1: Tirar un dado y ver qué sale.

varios esp. mues. ←

$E_1 = \{$ "Sale el nº 1", ..., "Sale el nº 6" $\}$

$E_2 = \{$ "Sale un nº impar", "Sale un nº par" $\}$

$E_3 = \{$ "Sale un nº múltiplo de 3", ... $\}$

3) **Suceso** (D) → cualquier letra mayúscula (excepto S, E, P)
↳ Subconjunto del espacio muestral

D_1 = Sale el nº 1 → Así se define (con oraciones)

$E_1 = \{D_1, D_2, \dots, D_6\}$

NOTA

$P(D_1)$ → probabilidad de que salga el nº 1 →

3.1) Operaciones: (entre 2 o más sucesos) (sucesos)

- Unión
- Intersección
- Complemento.

Unión:

$E_1 = \{D_1, D_2, D_3 \dots D_6\}$ → del ej. de los dados

- A: Sale un número mayor a 4.

$A = D_5 \cup D_6$

↳ o

- B = Sale un número par.

$B = D_2 \cup D_4 \cup D_6$.

Intersección:

$A \cap B = D_6$ (siguiendo con lo anterior)

y

$= (D_5 \cup D_6) \cap (D_2 \cup D_4 \cup D_6)$

$= D_6$ → elemento común de ambos conjuntos

$\neq$

$A \cup B = (D_5 \cup D_6) \cup (D_2 \cup D_4 \cup D_6)$

$= (D_2 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6)$

Complemento: (1 único suceso)

$\overline{B}$ = Sale un n° impar $= (D_1 \cup D_3 \cup D_5)$

↓ lo contrario

$\overline{D_1} = \{D_2, D_3 \dots D_6\}$

↓ todo lo que no sea 1

→

NOTA

$\overline{B \cap A} = \overline{B} \cup \overline{A}$

$= (D_1 \cup D_3 \cup D_5) \cup (D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D$

$= D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5$

3.2) Sucesos disjuntos (para 2 o más sucesos)

A y B son disjuntos si:

- $\boxed{A \cap B = \emptyset}$ (no tienen elementos en común)

Ej:

H_x = la persona es hincha de x → suceso genérico.

$E_2 = \{ H_{BOCA}, H_{RACING}, \dots \}$

C = la persona es hincha de los 5 mejores equipos. → suceso particular.

$C = H_{BOCA} \cup H_{RACING} \cup H_{RIVER} \cup H_{SAN\,LOR.} \cup H_{indep.}$

$H_{BOCA} \cap H_{RIVER} = \emptyset$

4) Probabilidad

→ nº que va a representar la certeza/confianza de que un evento suceda.

→ Sobre los sucesos/eventos se calculan las probabilidades

→ es importante la inf. que tiene el observador.

Axiomas: (reglas que se toman x verdaderas)

- Sean A y B eventos (sucesos) de un E

1) $P(A) \geq 0$

la proba de que suceda A

2) $P(E) = 1$

la proba de que ocurra algún suceso del esp. muestral

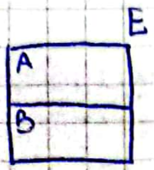
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

si A y B son disjuntos $(A \cap B = \emptyset)$

→

Consecuencias de los axiomas

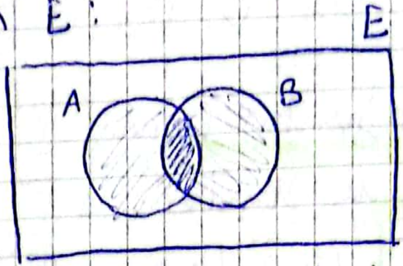
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Formas de graficar E:



$A \cap B = \emptyset$

↓

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



$A \cap B \neq \emptyset$

↓

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Regla de Laplace

$$\frac{\text{Casos favorables } ①}{\text{Casos Totales } ②}$$

① Cant. de casos que coinciden con un suceso

② Casos totales analizados

Ej de cálculo de probabilidad

Equiprobabilidad

1) Con los dados:

$E_1 = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$

$P(D_1) = \frac{1}{N} = \frac{1}{6}$ → en los resultados trabajamos con 3 decimales y la proba final se puede redondear a 2 decimales

1 → cantidad de los que cumplen los sucesos simultáneos (?)

N → cantidad total de sucesos del E

$P(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6) =$

$= P(D_1) + \dots + P(D_6)$

$= 1/6 + \dots + 1/6$

$= 1$

2) En el aula

A = El celular tiene instalado Instagram

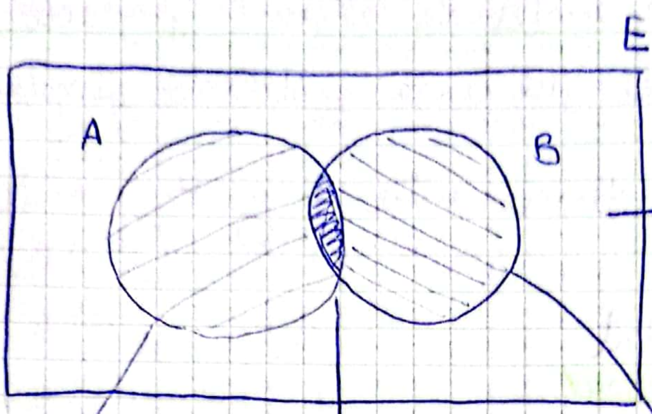
B = El celular tiene instalado TikTok

$P(A) = \frac{n.fav}{N} = \frac{19}{30}$ → cant de alumnos

$P(B) = \frac{8}{30}$

$P(A \cap B) = \frac{7}{30}$

NOTA



$P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$

$P(A \cap \bar{B})$

planteo

el celu tiene instagram y no tiene TikTok.

$= P(A) - P(A \cap B)$

$= 19/30 - 7/30$

$= 12/30$

$P(A \cap B) = 7/30$

$P(\bar{A} \cap B)$

$= P(B) - P(A \cap B)$

$= 8/30 - 7/30$

$= 1/30$

¿ $P(\overline{A \cap \bar{B}}) = P(\bar{A} \cap B)$? NO

$P(\overline{A \cap \bar{B}}) = P(\bar{A} \cup \bar{\bar{B}}) = P(\bar{A} \cup B)$

o

¿Cuál es la proba de que el celular tenga instalado 1 aplicación? Coloquialmente: que tenga instalado Instagram o TikTok.

$P((A \cap \bar{B}) \underset{\text{"o"}}{\cup} (\bar{A} \cap B))$

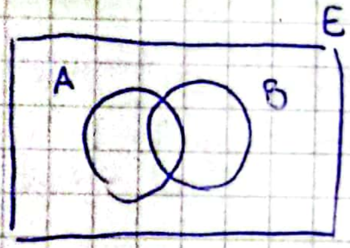
$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$

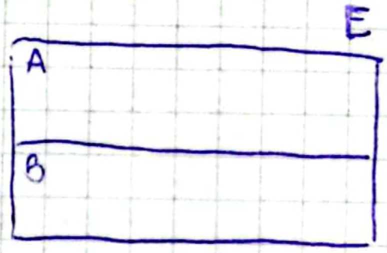
$= 12/30 + 1/30$

$= 13/30 = 0{,}433$ → la proba de que el celular tenga instalado 1 aplicación

Cálculo de probabilidad

- Unión entre sucesos
- Intersección entre sucesos
- Condicional
- Total





$A \cap B \neq \emptyset$

Sucesos no disjuntos

$A \cap B = \emptyset$

Sucesos disjuntos o excluyentes (independientes)

Proba. de la intersección entre sucesos A y B

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot \underbrace{P(B/A)}_{\text{Probabilidad condicional: El suceso A "ocurrió"}}}$$

equiv. a

$$= P(B) \cdot P(A/B)$$

$$= P(A) \cdot P(B)$$

NOTA

Independencia entre sucesos

Si A y B son sucesos independientes, se cumple:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A/B) = P(A)$
- $P(B/A) = P(B)$

Ejemplo / ejer:

Un cliente puede elegir alguna de las 3 marcas de amoladoras (Agwa, Black o Coach) con probabilidades de 0,65, 0,15 y 0,2 respectivamente. La probabilidad de que el cliente esté disconforme con la herramienta es del 0,05, 0,1 y 0,08 según la marca que haya comprado (Agwa, Black o Coach).
¿Cuál es la probabilidad de que el cliente esté disconforme con la amoladora que compró?

Definición de sucesos:

A = El cliente compra Agwa $P(A) = 0,65$
B = " " " Black $P(B) = 0,15$
C = " " " Coach $P(C) = 0,2$

La suma da 1. El E es de cajitas.

D = El cliente está disconforme con Agwa $P(D) = 0,05$
E = " " " Black $P(E) = 0,1$
F = " " " Coch $P(F) = 0,08$

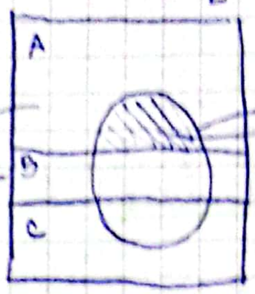
NO

↳ está disconforme y compró Agwa →

↳ está condicionado

Escaneado con CamScanner

Prob. Total:



compró Agua y está conforme

0,65

0,15

0,2

→ están disconformes

→ D (evento que está relacionado o condicionado a los otros eventos)

compró Agua y está disconforme

D = el cliente está disconforme $P(D) = ?$

debe estar explícito en el enunciado

"está disconforme" y "compró Agua"

$D \quad \cap \quad A$

↓ no es el caso del y.

está la palabra "según", es como un "si" en el enunciado (o "sabiendo")
(condicional)

$P(D/A) = 0,05$

$P(D/B) = 0,1$

$P(D/C) = 0,08$

Para calcular probabilidad total necesito tener:

- espacio muestral de sucesos disjuntos o excluyentes
- Un evento de probabilidad desconocida relacionado con el espacio muestral

$P(D) = P((A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D))$

↓ suma de los disconformidades (sin importar la marca)

$= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

$= 0,0325 + 0,015 + 0,016$

$= 0,0635$

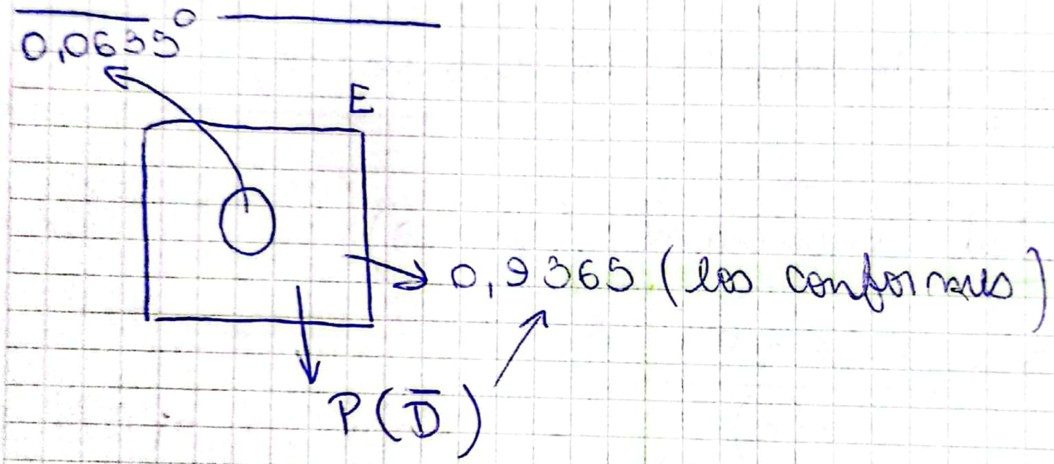
$= 6,3\%$ está disconforme

CA:

- $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A)$
  $= 0{,}65 \cdot 0{,}05$
  $= 0{,}0325$

- $P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D/B)$
  $= 0{,}15 \cdot 0{,}1$
  $= 0{,}015$

- $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D/C)$
  $= 0{,}2 \cdot 0{,}08$
  $= 0{,}016$



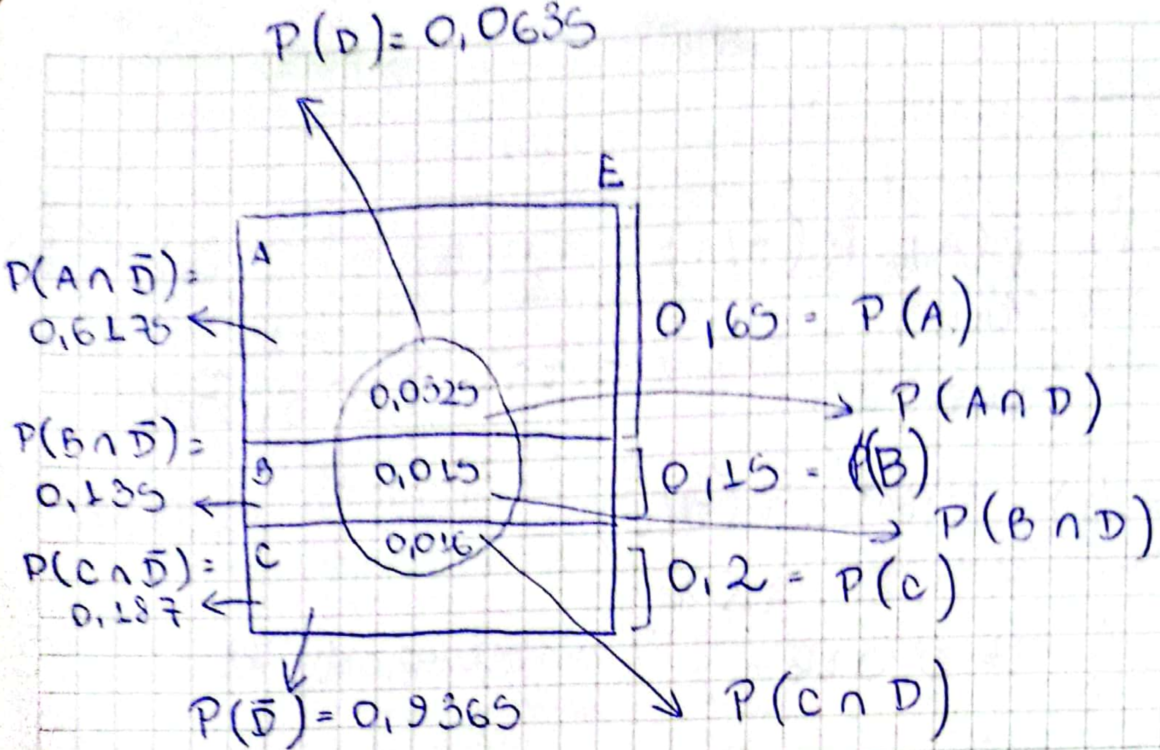
Si tengo ej: $P(D/A) = 0{,}05$ y quiero el complemento de eso sería:

- $P(D/A) = 0{,}05$
  $P(\bar{D}/A) = 0{,}95 \rightarrow 1 - P(D/A)$

- $P(D/B) = 0{,}1$
  $P(\bar{D}/B) = 0{,}9$

- $P(D/C) =$
  $P(\bar{D}/C) =$

B) Si el cliente está disconforme con su nueva aspiradora ¿cuál es la probabilidad de que haya comprado una de marca Black? →



—o—

B) $P(B/D) = ?$ → esto ocurrió (están disconformes)

—o—

Probabilidad condicional: (genérico)

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

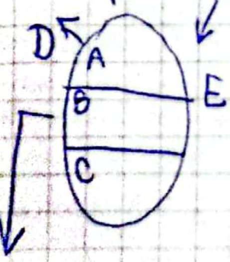
↓ reproporciona el esp. muestral original

$P(B)$ → P. Total

—o—

→ de los que están disconformes, quiénes compraron Black

→ me interesa los que están disconformes en primer lugar



E' → mi nuevo espacio muestral (basado en la condición)

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)}$$ → ya la calculamos

$$= \frac{0{,}015}{0{,}0635} = \boxed{0{,}236}$$

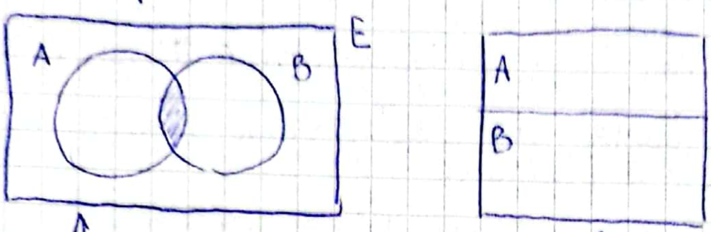
NOTA

Escaneado con CamScanner

26/8

Variable aleatoria:

Esp. muestral



Esp. Adimensional

Esp. unidimensional (1 var. aleatoria) 1

Esp. bidimensional (2 var. aleatorias)

1 Esp. unidimensional (1 var. aleatoria)

$X: E \rightarrow \mathbb{R}$ → A c/suceso del esp. se le asigna un valor de la recta numérica

Var. aleatoria (función)

Discretas
- Cnf finito de valores (enumerable)
- Se pueden contar → 0 1 2 → Puntos para marcar en la recta
- En las discretas, no se toman valores intermedios

Continuas
- Ver atrás

$P(X=x)$ → Función de prob.

Ejemplos (cont.)

X = cant. de caras que obtengo al tirar 2 monedas → Valores posibles: $X = 0, 1, 2$

X = cant. de autos que pasan por el peaje en 3 min → " " $X = 0, 1, 2, 3$

X = cant. de materias aprobadas de la carrera. → " " $X = 0, 1, \ldots 64$

Var aleatoria Continua → $f(X = x)$ → Función de densidad de prob. (FDP)
Áreas para marcar en la recta.

↓

nº infinito (no enumerable)
Se pueden medir (no contar)
Ejemplos (tiempo, peso, long, diámetros, presión, temp, etc)

X = Tiempo que transcurre hasta que se termina la batería de la notebook (horas)

→ $X = 0, 1, 2, 3 \ldots$ (la estoy definiendo como discreta) no es correcta en este caso

↓

2 ——— 3 → me doy cuenta que es continua si hay valores intermedios

→ Definición correcta:

$0 \leq X \leq \infty$ o $X \geq 0$

- X = Peso de las manzanas (grs)

→ $120 < X < 163$

Ejercicio:

A mediados de Agosto, un local de ropa comienza la liquidación por fin de temporada. Arma canastos con todas las prendas remanentes y las separa según la calidad, por lo cual ofrece prendas por \$2000, \$3.800 y \$4500.
El 60% del stock que posee van al primer canasto ya que son de baja calidad, el 25% va al segundo canasto y el resto al tercero ya que corresponden a las prendas de mayor calidad.
La vigencia de la promoción estará entre 3 y 5 semanas, y la función que define dicho tiempo es: →

Variable continua.

X = Tiempo de vigencia de la promoción (semanas)

$$f(X=x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \\ 5-x & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función de densidad de prob. (fdeP) ó fdP

A) Hallar el precio medio de las prendas.

B) Hallar el tiempo medio de duración de la liquidación

60% B = La prenda es de baja calidad $P(B) = 0{,}6$

25% M = La prenda es de media calidad $P(M) = 0{,}25$

15% A = La prenda es de alta calidad $P(A) = 0{,}15$

$2000 Precio de venta de la prenda de baja calidad.

$3800 " " " media "

$4500 " " " alta "

Se puede resumir así:

Y = Precio de venta de la prenda ($)

Y = 2000; 3800; 4500

→ Variable discreta (las prendas toman esos precios y no otros)

Si X es variable aleatoria (V.A):

μ_X = media σ_X^2 = varianza σ_X = desvío

medida de tendencia o pos. central (punto de equilibrio entre los valores de X)

→

Para variable discreta

A) $\mu_Y = \sum_{i=min}^{n} x_i \cdot (P\, X = x_i)$

Para v. continua

B) $\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(X = x)\, dx$

A) Primero encuentro la función de probabilidad

$P(Y = 2000) = P(B) = 0{,}6$
$P(Y = 3800) = P(M) = 0{,}25$
$P(Y = 4500) = P(A) = 0{,}15$

→ Sucesos equivalentes

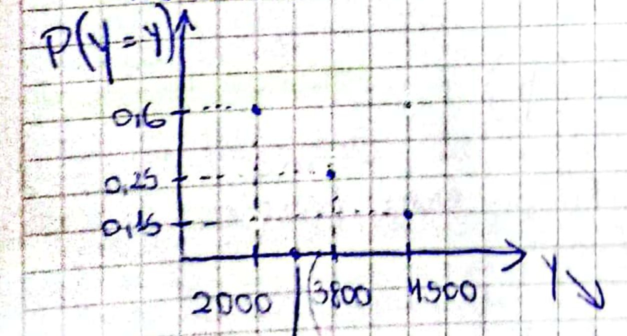
Y	2000	3800	4500
~~P(X=x)~~ $P(Y=y)$	0,6	0,25	0,15

↓ valores que puede ir tomando Y y que van variando

$\mu_Y = 2000 \cdot 0{,}6 + 3800 \cdot 0{,}25 + 4500 \cdot 0{,}15$

$\mu_Y = 2825$ pesos

Gráfico:



Y ↘ variable

μ_Y

↓ lo esperado es que tal vez el punto de equilibrio esté ahí, pero la media queda más corrida porque la probabilidad es mayor hacia la izq. y se necesita equilibrar.

Otra función que se puede utilizar:

Función de distribución acumulada

$F(X = x) = P(X \leq x)$ → para discretas y continuas

→

F → es una función creciente
→ su imagen coincide con el intervalo cerrado [0;1]

$$F(X=x) = \int_{-\infty}^{x} f(X=x)\,dx$$

$$F(X=x) = \sum_{-\infty}^{x} P(X=x)$$

A)

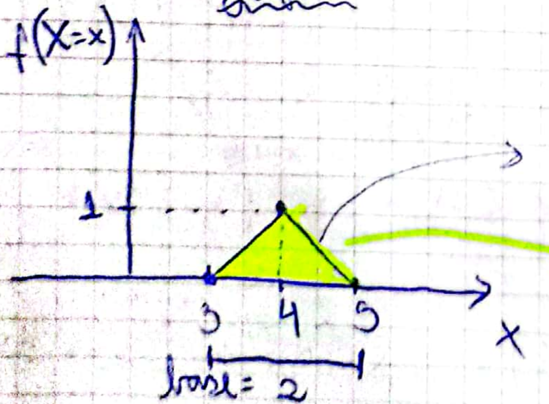
y	2000	3800	4500
$P(y=y)$	0,6	0,25	0,15
$F(y=y)$	0,6	0,85	1

B) $$M_X = \int_{x=3}^{x=4} x.(x-3)\,dx + \int_{x=4}^{x=5} x\,(5-x)\,dx$$ se puede usar la calc. en el examen

$$M_X = \int_{x=3}^{x=4} x^2-3x\,dx + \int_{x=4}^{x=5} 5x-x^2\,dx$$

$M_X = 4$ semanas

Gráfico:



Distribución del tiempo de duración de la promoción

Tiene que dar 1 esta área

$$\text{Área } \Delta = \frac{\text{base}\cdot h}{2}$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{2\cdot 1}{2}$$

$$\text{Área } \Delta = 1$$

ó bien

si $f(X=x)$ es fdp → $$\int_{x=3}^{x=4} x-3\,dx + \int_{x=4}^{x=5} 5-x\,dx = 1$$

→

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de duración se exceda de las 3 semanas y 1/2, si se prevee que dure a lo sumo 4 semanas y 1/2?

$P(x > 3,5 \,/\, x \leq 4,5) =$

no va (o no es necesario) en continuas es = porque → ej: $P(x = 3,5) = 0$

$$P(x > 3,5 \,/\, x \leq 4,5) = \frac{P(x > 3,5 \cap x \leq 4,5)}{P(x \leq 4,5)}$$

$$= \frac{P(3,5 < x \leq 4,5)}{P(x \leq 4,5)}$$

Se resuelve con integral

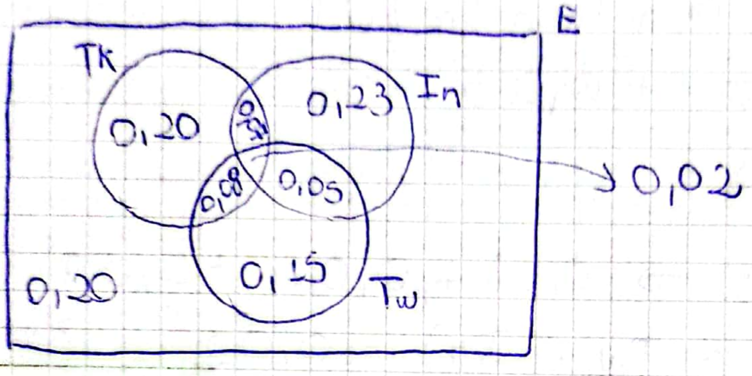
$$P(3,5 < x \leq 4,5) = \int_{x=3,5}^{x=4} x-3 \, dx + \int_{x=4}^{x=4,5} 5-x \, dx$$

$$P(x \leq 4,5) = \int_{x=3}^{x=4} x-3 \, dx + \int_{x=4}^{x=4,5} 5-x \, dx$$

el min

Ejercicio:

Una compañía de celulares realizó una investigación en la que se preguntó si se tenía instalado las aplicaciones Instagram, Twitter y TikTok. Los resultados se resumen en el sig. diagrama:



Además se pesaron los celular y determinaron que se comporta como una variable aleatoria que responde a la sig. función de densidad:

$$f(x)\begin{cases} x/2 & 0<x<1 \\ 1/4 & 1\leq x<3 \\ -\dfrac{x}{2}+2 & 3\leq x<4 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

Variable discreta:

~~Tk: Las aplicaciones tiene~~

Tk: el celular tiene instalado TikTok

Tw: " " " Twitter

In: " " " Instagram

Y: Cantidad de aplicaciones instaladas en un celular →

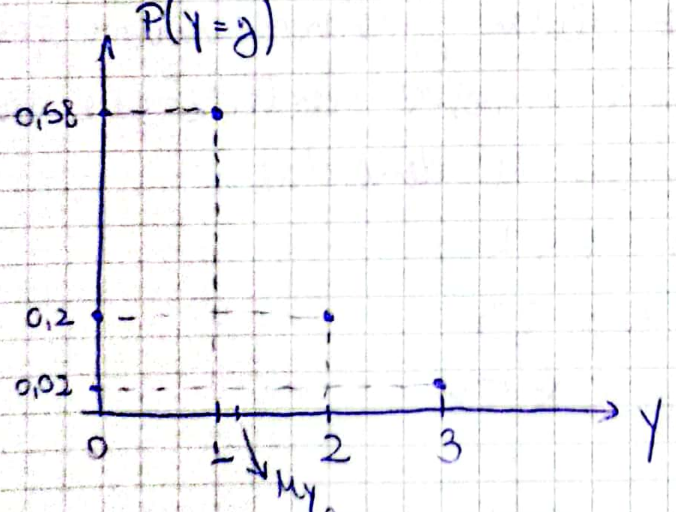
$$P(Y=y)\begin{cases} y=0 & 0{,}2 \\ y=1 & 0{,}58 \\ y=2 & 0{,}2 \\ y=3 & 0{,}02 \\ y_0 & \text{otros} \end{cases}\Bigg\}\ \text{Suma} = 1$$

- $P(Y=0) = P(\overline{T_K} \cap \overline{T_W} \cap \overline{I_n}) = 0{,}2$
- $P(Y=1) = P((T_K \cap \overline{T_W} \cap \overline{I_n}) \cup (\overline{T_K} \cap T_W \cap \overline{I_n}) \cup (\overline{T_K} \cap \overline{T_W} \cap I_n))$

  $= 0{,}20 + 0{,}23 + 0{,}15$

  $= 0{,}58$

- $P(Y=2) = P\ 0{,}2 \rightarrow 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}07$
- $P(Y=3) = P(T_K \cap T_W \cap I_n) = 0{,}02$



Para calcular la varianza, se calcula primero la media
↳ distancia promedio de la media (que tan separados están los valores de la media)

~~Importante~~

- $M_Y = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3)$

  $M_Y = 1 \cdot 0{,}58 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}02$

  $M_Y = 1{,}04$

Varianza:

Varianza:

Discretas:

$$\sigma_Y^2 = \sum_{y=min}^{y=max} (y - \mu_Y)^2 \cdot P(Y=y)$$

$$\sigma_Y^2 = (0-1{,}04)^2 \cdot P(Y=0) + (1-1{,}04)^2 \cdot P(Y=1) + (2-1{,}04)^2 \cdot P(Y=2) + (3-1{,}04)^2 \cdot P(Y=3)$$

Desvío:

Discretas: (le saca la potencia a la varianza)

$$\sigma_Y = +\sqrt{\sum_{y=0}^{y=3} (y-\mu_Y)^2 \cdot P(Y=y)}$$

Varianza:

Continuas:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot f(x)\,dx$$

Desvío:

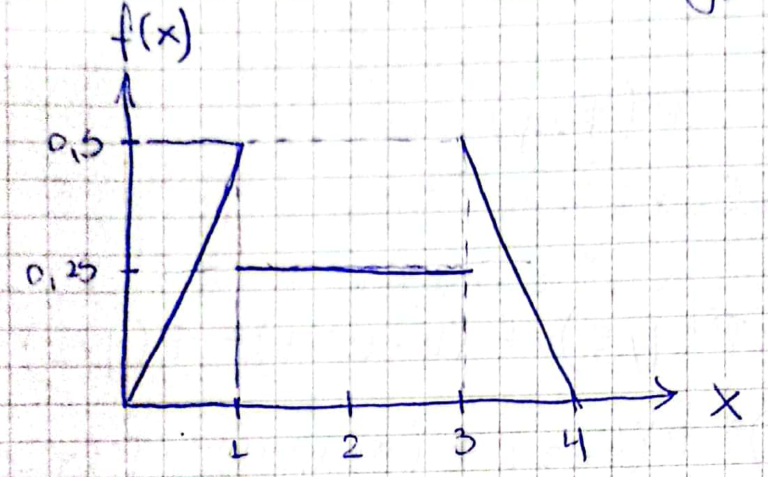
Continuas:

$$\sigma_X = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 \, f(x)\,dx}$$

→

Volviendo al ejercicio:

X = Peso de un celular (kg)



- Prob. de que el celular tenga alguna app:

$P(Y \geq 1) = P(Y=2 \cup Y=3 \cup Y=1)$
$= P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=1)$
$= 0,2 + 0,02 + 0,58$
$= 0,8$ → pero si hubiera muchas prob, se haría muy largo

Para facilitar usamos el complemento

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y<1)$
$= 1 - P(Y=0)$
$= 1 - 0,2$
$= 0,8$

- Prob. de que un celular tenga un peso superior a 1000 grs. (1 kg)

$P(X \geq 1) = \int_{x\,inicial}^{x\,final} f(x)\,dx$

recordar que en cont. es indistinto el igual

$= \int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx + \int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx$ →

NOTA

$$= \int_{x=1}^{x=3} 1/4 \, dx + \int_{x=3}^{x=4} \left(-\frac{x}{2}+2\right) dx$$

O, en vez de calcular las integrales, por medio del gráfico con las figuras geométricas y el cálculo de las áreas (ya que las integrales son el área bajo la curva).
En este caso:

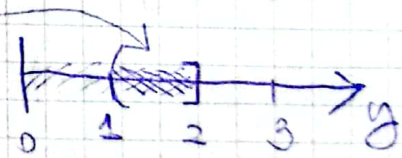
- $P(X \geq 1) = \text{Área } \square + \text{Área } \triangle$

$$= (3-1) \cdot 1/4 + \frac{(4-3) \cdot 0{,}5}{2}$$

$$= \frac{3}{4}$$ → mucho más fácil.

- Si el celular tiene más de una app, cuál es la prob. de que tenga a lo sumo 2 apps.

$P(Y \leq 2 \,/\, Y > 1) =$



$$= \frac{P(Y \leq 2 \cap Y > 1)}{P(Y > 1)}$$

$$= \frac{P(1 < Y \leq 2)}{P(Y > 1)}$$

$$= \frac{P(Y=2)}{P(Y=2) + P(Y=3)}$$

$$= \frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}02}$$

$$= 0{,}9091$$

• Si el cel pesa más de 1 kg, cuál es la prob. de que pese a lo sumo 2 kg.

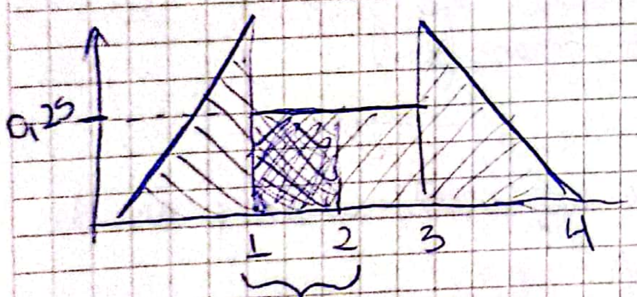
$$P(x \leq 2 \,/\, x > 1) = \frac{P(x \leq 2 \cap x > 1)}{P(x > 1)}$$

$P(x \leq 2 \cap x > 1) \rightarrow P(1 < x \leq 2)$

$$= \frac{(2-1) \cdot 0{,}25}{3/4}$$

$= 1/3 = 0{,}333$

viendo el grafico:



$1 < x \leq 2$

• Cual es la prob. de que el cel. pese a lo sumo 1/2 kg o por lo menos 3,5 kg.

~~P(...)~~

$P(x \leq 1{,}5 \cup x \geq 3{,}5)$

• Cual es la prob. de que el cel tenga ~~...~~ a lo sumo 1 app o por lo menos 3

$P(y \leq 1 \cup y \geq 3)$

A lo sumo / como mucho → variable $\leq$

Por lo menos / como mínimo → variable $\geq$

NOTA

Escaneado con CamScanner

$$= P(Y \leq 1) + P(Y \geq 3)$$

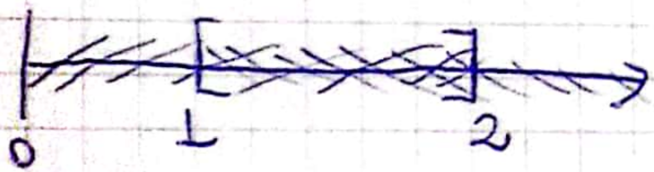
$$= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=3)$$

Si fuera así: (otro caso)

$$P(Y \geq 1 \cup Y \geq 3) = P(Y \geq 1)$$

porque se solapan (igual se termina llegando a eso al final)

- $P(Y \geq 1 \cup Y \leq 2) = P(Y \geq 1) + P(Y \leq 2) - P(Y \geq 1 \cap Y \leq 2)$



Variables continuas

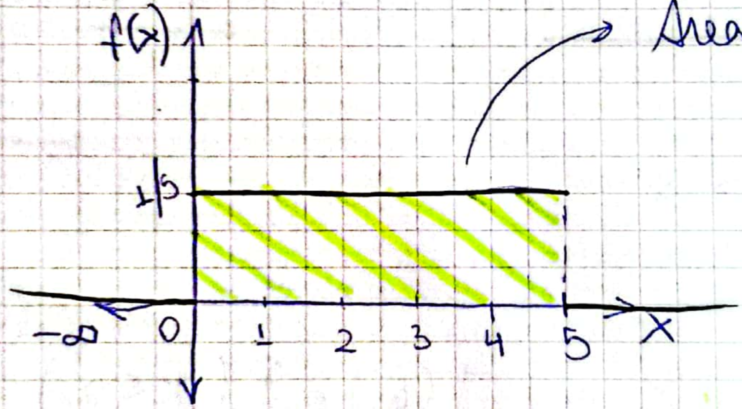
Sea x una variable continua.

A) función de densidad: f(x) o f(x)

- $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in D(f)$
- El área encerrada bajo la curva es igual a 1.

Ej:

$$f(x)\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/5 & 0\leqslant x\leqslant 5 \\ 0 & x>5 \end{cases}$$



Área$_{\square}$ = b.h = $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

B) función de distribución: F(x)

Sería (en el caso de las V.A. continuas) algo así como el área acumulada a medida que x va tomando distintos valores

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

- F(x) es creciente
- Img F(x) = [0; 1]

→ Basándonos en este gráfico:

- Para x<0, el área acumulada es 0.
- Para $0 \leqslant x \leqslant 5$ el área acumulada sería:

$$A_{\square} = \underbrace{X}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{altura}} = \frac{x}{5}$$

- Para x>5, ya se acumuló el área de $0 \leqslant x \leqslant 5$ →

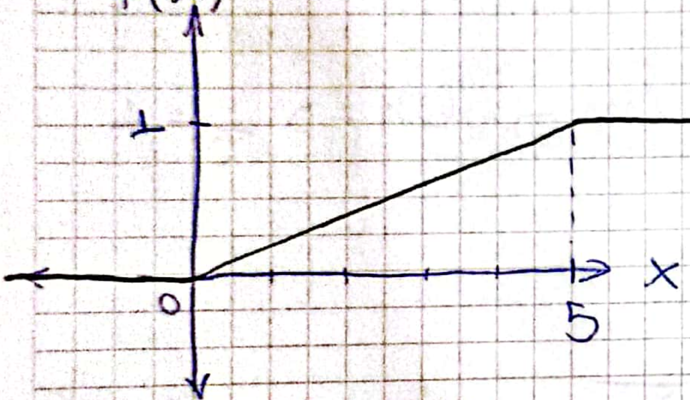
que hasta $x=5$ sería un área $=1$, y como de $x>5$ el área es $=0$, entonces lo acumulado queda en 1.

En resumen:

$$F(x)\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{5} & 0\leq x\leq 5 \\ 1 & x>5 \end{cases}$$

Sería la integral de $\frac{1}{5}$

Gráfico:



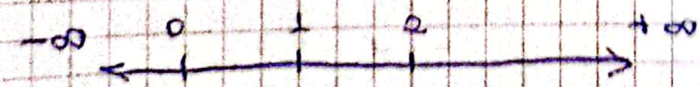
Variables Discretas: $X=a \quad F(a)=P(X\leq a)$

Ej:

X es una variable aleatoria discreta (VAD) que toma los valores $\{0,1,2\}$ con las sigs. probabilidades:

$P(X=0)=0{,}3 \qquad P(X=1)=0{,}5 \qquad P(X=2)=0{,}2$

Calcular su función distribución $F(X)$ y representarla



$x<0 \quad F(x)=0$ (pues no hay probabilidades acum.)

$0\leq x<1 \quad F(0)=P(x\leq 0)=P(x=0)=0{,}3$

$1\leq x<2 \quad F(1)=P(x\leq 1)=P(x=0)+P(x=1)=0{,}3+0{,}5=0{,}8$

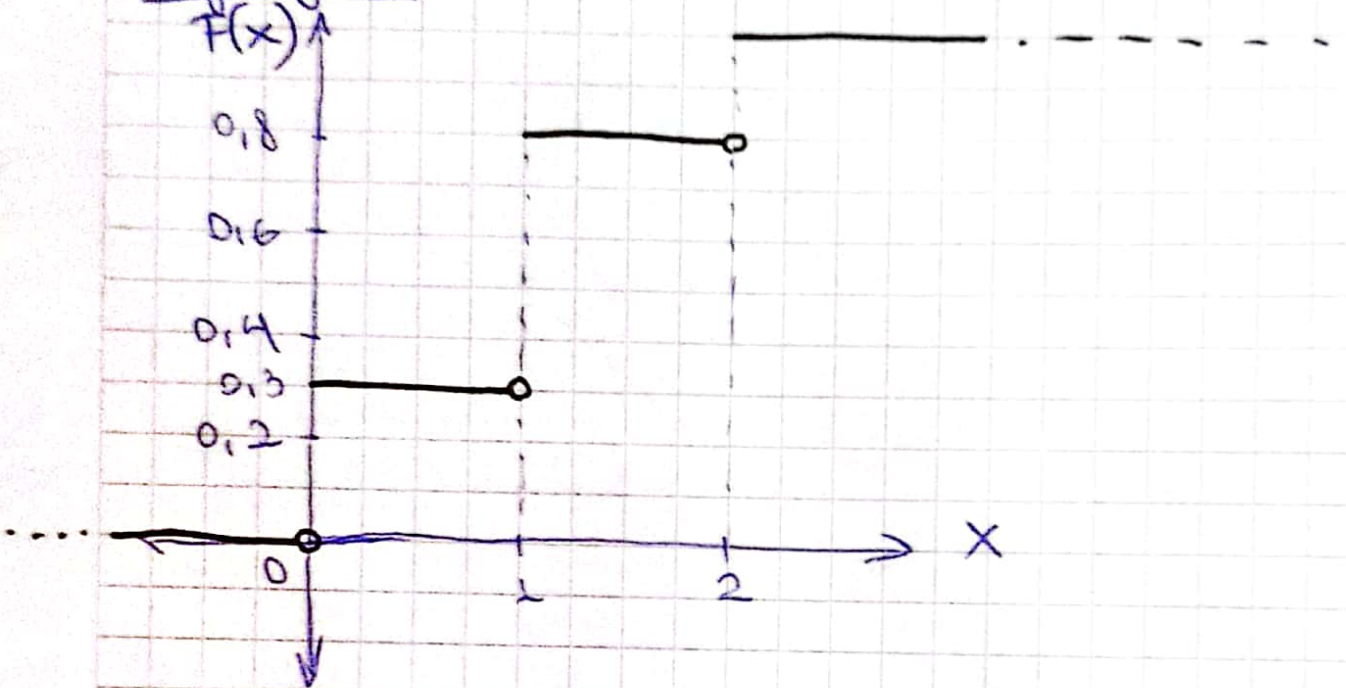
$x\geq 2 \quad F(2)=P(x\leq 2)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)$

$=0{,}3+0{,}5+0{,}2$

$=1$

$$F(x)\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0{,}3 & 0\leq x<1 \\ 0{,}8 & 1\leq x<2 \\ 1 & x\geq 2 \end{cases}$$

Gráfico:



2/9 Repaso.

Concepto / Variable aleatoria	Continua	Discreta
Función Densidad	✓	X
Función de probabilidad	X	✓
① media o esperanza matemática	✓	✓
Varianza	✓	✓
Cálculos geométricos	✓	X
$P(X=b)$ ← Probabilidades puntuales son siempre cero	✓	X
Sumatorias	X	✓
Integrales	✓	X
Función de distribución de prob. acumulada	✓	✓
Probabilidad condicional, unión e intersección	✓	✓

media:

① Continua:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Discreta:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x \cdot P(x)$$

Sucesos disjuntos e ind

↳ Aplica para las dos (continua y discreta)

→

Ejercicio:

Una fabrica de mermeladas de duraznos produce cajones cuyo peso se comporta como una variable aleatoria.

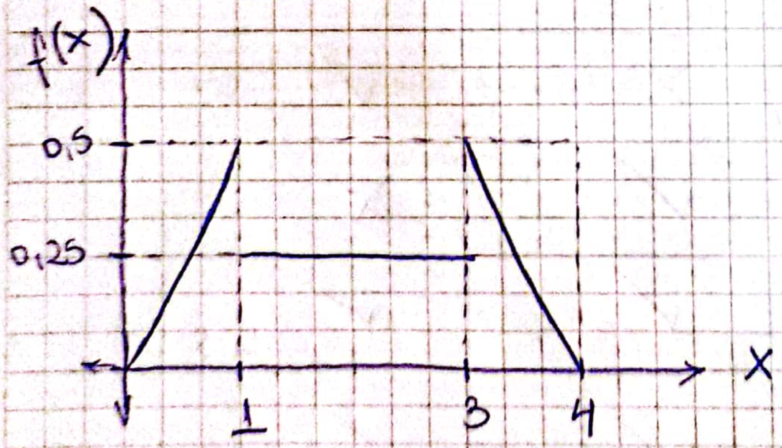
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{4} & 1\leq x\leq 3 \\ -\dfrac{x}{2}+2 & 3\leq x\leq 4 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

→ Función densidad

A) Calcular la ~~fdap~~. (func. de dist. de prob acumulada).

X: Peso ~~del~~ de un cajón de mermeladas (kg)

Es V.A. continua.



Función de distribución de prob acumulada (genérico)

$F(X=x) = P(X \leq x)$ → continua o discreta

- Para $-\infty < x < 0$

$F(x)=0$

- Para $0<x<1$:

$F(X=t) = \int_0^t \left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{t^2}{4}$

es la integral, ya que es el área bajo la curva

se toma de f(x)

$$F(X=x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0<x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{4}+\dfrac{1}{4} & 1<x\leq 3 \\ -\dfrac{t^2}{4}+2t-\dfrac{15}{4}+\dfrac{3}{4} & 3<x\leq 4 \\ 1 & x>4 \end{cases}$$

• Para $1 < x < 3$:

$$F(X=t) = \int_1^t \frac{1}{4}\,dx + \underbrace{F(x=1)}_{\text{lo acumulado de la integral anterior}}$$

$$= \frac{t-1}{4} + \frac{1}{4}$$

• Para $3 < x < 4$:

$$F(X=t) = \int_3^t \left(-\frac{x}{2}+2\right)dx + \underbrace{F(X=3)}_{\text{lo acumulado de la integral anterior}}$$

$$= -\frac{t^2}{4} + 2t - \frac{15}{4} + \frac{3}{4}$$

Para verificar que c/integral es correcta, x ej. la cuenta de $0 < x \leq 1$ en 1 debería dar lo mismo que $\frac{x-1}{4} + \frac{1}{4}$ en 1.

B) Calcular la prob. de que un cajón de mermelada de durazno pese más de 3 kg.

$P(x>3) = F(X=3) \rightarrow \boxed{\text{NO!}}$ → Solo se podría así: $P(X>3) = 1 - P(X\leq 3)$ $= 1 - F(x=3)$

Si no tuviera la función densidad:

$P(x>3) = 1 - P(X\leq 3) \Rightarrow$ uso el complemento

$= 1 - F(x=3)$

$= 1 - \frac{3-1}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} \rightarrow$ Debería dar igual que:

$$\int_3^4 \left(-\frac{x}{2}+2\right)dx$$

→

Cambio de variable y sucesos equivalente:

Ejercicio:

La cadena de supers. A venden los cajones de mermelada según:

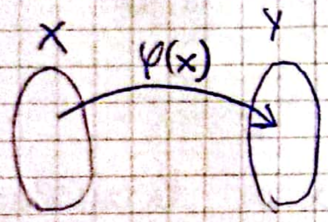
$$\varphi(x)\begin{cases} \$2000 & \text{si } x<3 \\ \$3000 \cdot x - \$7000 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

→ el precio (Y) depende del peso del cajón (x)

Y: Precio de venta de un cajón de mermeladas (\$)

$$Y = \underbrace{\varphi(x)}_{\text{no es } f(y) \text{ o sea no es función densidad}} = \begin{cases} \$2000 & x<3 \\ \$3000 \cdot x - \$7000 & x \geq 3 \end{cases}$$

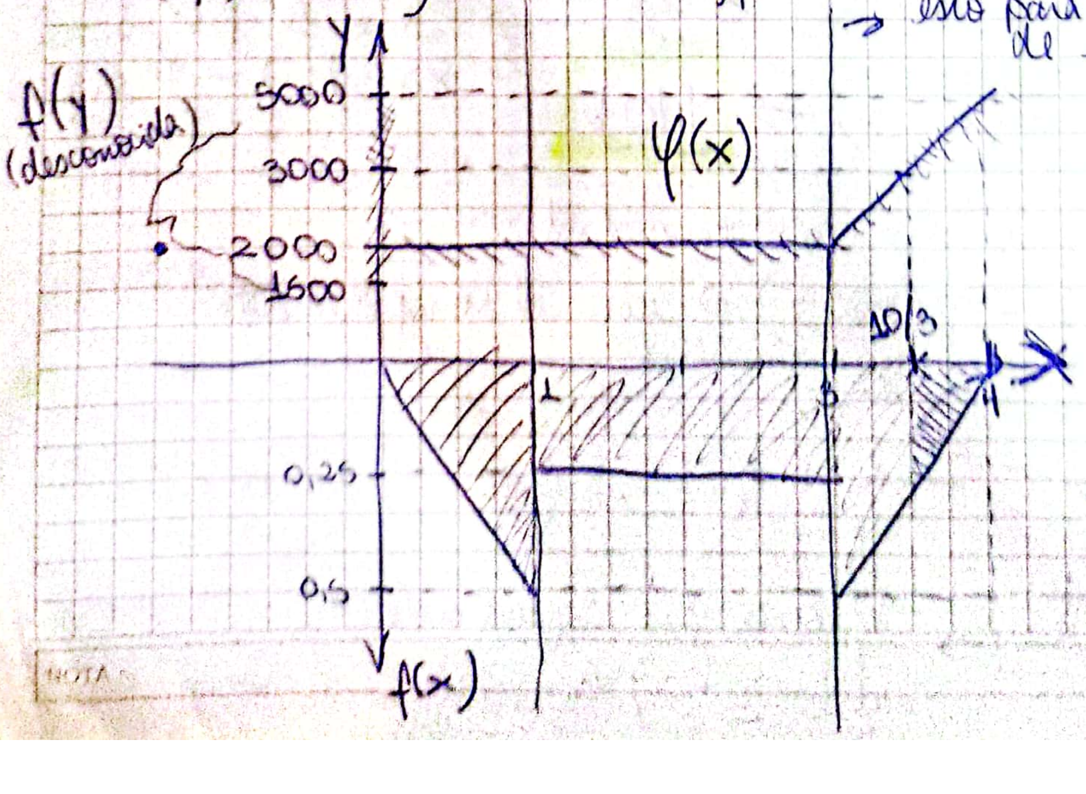
no es $f(y)$ o sea no es función densidad



4) Calcular la prob. de que el supermercado A venda un cajón de mermeladas a por lo menos \$1.500

- $P(Y \geq 1500) = P(x > 0)$

$P(Y \geq 3000) = P\left(x \geq \frac{10}{3}\right)$



→ esto para darme cuenta de los intervalos del punto B)

→ la función f(x) espejada hacia abajo

Pasos:

1. marco en Y el valor buscado y "sombreo" los valores de Y que cumplen esa condición.
2. me fijo en $\varphi(x)$ qué valores de x hacen que valga ese y
3. me voy hacia abajo a ver qué área y en qué rango es lo que obtengo, todo para poder obtener x.

- $P(Y > 3000) = P(X \geq 10/3)$ → 3,33

$$= \int_{10/3}^{4} \left(-\frac{x}{2} + 2\right) dx$$

→ Usé x y f(x) pero pueden usarse también F(x) o el área.

x	$y = \varphi(x)$
0	\$2000
$\frac{10}{3}$	\$3000
2,5	\$2000
	etc.

\$3000 → $3000 . x - 7000 = 3000$

$3000 . x = 10.000$

$x = \frac{10}{3}$

B) ¿Cuál es el precio de venta esperado de un cajón de mermeladas?

esperado → similar a esperanza (media)

$\mu_y = \int y . f(y)\, dy$ → pero esto no lo tengo

$$= \int y \, . \, f(y) \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \, . \, f(x) \, dx$$

→

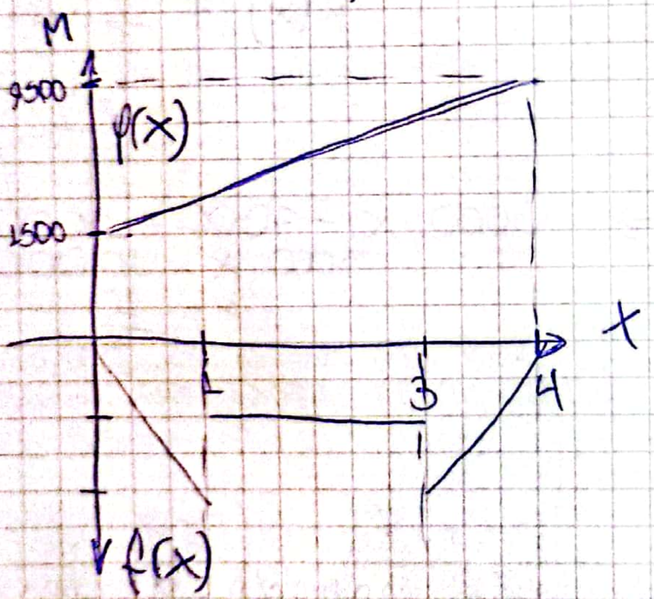
$$= \int_{x=0}^{x=4} \varphi(x) \cdot f(x)\, dx$$ (Veo el gráfico los intervalos)

$$= \int_{x=0}^{x=1} (2000)\cdot\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_{x=1}^{x=3} (2000)\cdot\left(\frac{1}{4}\right) dx + \int_{x=3}^{x=4} (3000x - 7000)\cdot\left(-\frac{x}{2}+2\right) dx$$

c) $M = \varphi(x) = \$\,2000 \cdot x + 1500$ para cualquier valor de x.

lineal en todo el intervalo

M: Precio de venta un cajón de mermeladas por manzana ($)



$$\mu_M = \int_{x=0}^{x=1} (2000x + 1500)\cdot\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_{x=1}^{x=3} (2000x + 1500)\,\frac{1}{4}\, dx + \int_{x=3}^{x=4} (2000x + 1500)\left(-\frac{x}{2}+2\right) dx$$

Cuando $\varphi(x)$ es una func. lineal (en todo el intervalo) se simplifican los cálculos (como este caso):

$\mu_M = 2000 \cdot \mu_x + 1500$ → esta la calculamos en la clase pasada

$= 2000 \cdot 2 + 1500$

$= 5500$

NOTA

Entonces:

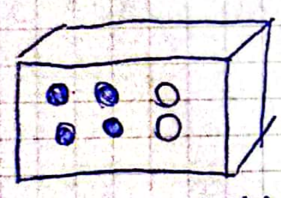
Si $\overset{\text{V.A}}{Y} = p(x) = \overbrace{m.x + b}^{\text{func lineal}}$, entonces:

- $\mu_Y = m \cdot \mu_X + b$
- $\sigma^2_Y = m^2 \cdot \sigma^2_X$

Experimento:

Con reposición / Sin reposición

Ej: experimento: sacar una bolilla de la caja, observar el color y luego sacar otra bolilla de la caja.



N = la bolilla es de color negro

V = " " " " verde

$P(N) = \frac{4}{6}$ $\qquad$ $P(V) = \frac{2}{6}$

"a priori"

- **Con reposición**: saco la bolilla, la observo y la devuelvo a la caja y como se devuelve, la probabilidad P(N) y P(V) se mantiene.

  La probabilidad es constante.

- **Sin reposición**: saco la bolilla, la observo y no la devuelvo a la caja.

  Si saco una negra x ej., las prob. cambiarían:

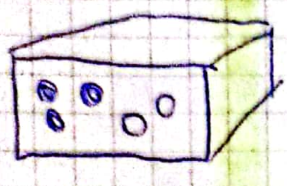
  $P(N) = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $P(V) = \frac{2}{5}$

  La probabilidad no es constante →

en esto interviene la variable hipergeométrica (es variable discreta).

Exp: si tomamos una muestra de 2 bolillas, cuál es la prob. de encontrar una verde?

Sin reposición



$P(M) = \frac{3}{5}$ $\quad$ $P(V) = \frac{2}{5}$

V.A. Hipergeométrica: → la prob. no es constante
Es sin reposición

X = cantidad de éxitos en una muestra de tamaño "n"

$X \sim \text{Hipergeométrica} \underbrace{(N, R, n)}_{\text{nos lo debe dar el enunciado}}$

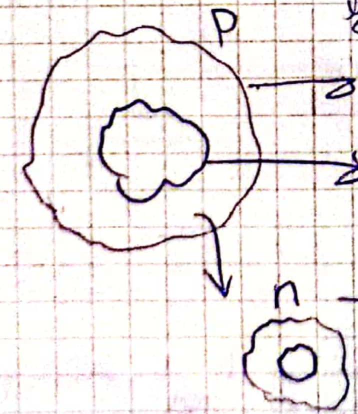
cant.

N = # Total de los elementos de la población

R = # de elementos de la población que poseen la característica de interés.

n = # de elementos de la muestra.

ej:



→ Piezas = 10.000 → N = # total

→ Defectuosas = 200 → R = # defect.

→ n = 50 → n = # muestra

Volviendo a las bolillas:

X = cant. de bolillas verdes en una muestra de 2.

N = 5 (Total bolillas) $\qquad$ X = 0, 1, 2

R = 2 (total verdes)

n = 2 (muestra)

P(X = 1) = (sigue en la otra hoja) →

lo que nos pide el enunciado

de las verdes, ¿cuántas quiero?

Total verdes

de las negras

si una es verde, la otra será negra.

$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$$

1 verde quiero

$5 \rightarrow 2+3$

5 (total) tomado de a 2 (muestra)

$2 \rightarrow 1+1$

$$P(X=0) = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$$

0 verdes quiero

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{5}{2}}$$

quiero las 2 verdes

$P(X=3) \Rightarrow$ no se puede, porque la muestra es de 2.
y aunque la muestra fuera de 3, solo hay 2 verdes.

Proceso Bernoulli:

- Dicotomía $\rightarrow$ 0,1 / V/F / Blanco, negro.
- Independencia $\rightarrow$ las muestras/ensayos son ind. y con reposición.
- Probabilidad constante.

V.A. Bernoulli discreta

$X \sim$ Bernoulli

$X = 0, 1$ (toma 2 valores, de ahí la dicotomía)

- V.A Binomial
- V.A Geométrica
- V.A Pascal

} Prob. constante
Con reposición.

$\Rightarrow$

p = prob. éxito, n = # muestra

Variable	¿Qué cuenta?	¿Qué parámetros usa?	Rango de validez	media	Varianza
Binomial	# de éxitos en una muestra de tam. n	p, n	$0 \leq R \leq n$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
Geométrica	# de ensayos hasta el 1° éxito	p	$N_g \geq 1$	$\frac{1}{p}$	$\left(\frac{1-p}{p^2}\right)$
Pascal	# de ensayos hasta el r-ésimo éxito	p, r	$N_p \geq r$	$\frac{r}{p}$	$r \cdot \left(\frac{1-p}{p^2}\right)$

Variables ¿cuánticas?

p = Prob. éxito

n = # muestra

r = # de éxitos

→ Son discretas, por lo tanto, se realizan sumatorias, NO integrales.

Para distinguirlas, me fijo en el enunciado que aparezcan los parámetros que las mismas utilizan.

Ej: N = la bolilla es negra

$P(N) = 0{,}25$

↓

V.A. Binomial

ya me indica usar la binomial

A) Si se toma una muestra de 8 bolillas, cuál es la probabilidad de que ninguna sea de color negro?

n (muestra) $= 8$

$p =$ éxito $= 0,25$

Dato
$N =$ la bolilla es negra
$P(N) = 0,25$

(*) $P(R=0)$ $\begin{cases} R = \# \text{ de bolillas negras en las revisadas.} \\ R \sim \text{Binomial } (p = 0,25\ ;\ n = 8) \end{cases}$

(*) $P(X=8)$ $\begin{cases} X = \# \text{ de bolillas de otro color} \neq \text{a negro en 8 revisadas} \\ X \sim \text{binomial } (p = 0,75\ ;\ n = 8) \end{cases}$

(*) Para resolver lo que pide el enunciado.

— o —

Función de probabilidad:

$P(R) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$ → es R

— o —

$P(R=0) = \binom{8}{0} \cdot (0,25)^0 \cdot (0,75)^8$

$P(X=8) = \binom{8}{8} \cdot (0,75)^8 \cdot (0,25)^0$

→ me van a dar lo mismo

= → Resultado final encontrado con App. Probability Distributions (para usar en el examen)

$= 0,1$

B) Cuál es la probabilidad de que alguna haya sido de color negro?

→

NOTA

$$P(R \geq 1) = \sum_{R=1}^{n=8} \binom{n}{R} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

↓ y sería la sumatoria de $P(R=1) + P(R=2)$ ...

O bien:

$$P(R \geq 1) = 1 - P(R=0)$$

$$P(\bar{\bar{R}} > 0) = 1 - 0{,}1$$

$$= 0{,}9$$

C) Probabilidad de encontrar más de 1 negra.

$$P(R > 1) = P(R \geq 2)$$

↳ tener o no el = acá, por ser discreta es ¡IMPORTANTE.

D) Probabilidad de encontrar solo 1

$$P(R=1) = \binom{8}{1} \cdot (0{,}25) \cdot (0{,}75)^7 = 0{,}267$$

E) Cual es la prob. de encontrar a lo sumo 1 bolilla negra?

$$P(R \leq 1) = P(R=0) + P(R=1)$$

$$= 0{,}1 + 0{,}267$$

$$= 0{,}367$$

V.A. Geométrica: (Geometric II)

N_g = # de bolillas a revisar hasta encontrar la primera de color negro

$N_g \sim$ Geométrica $(p = 0{,}25)$

A) Cual es la probabilidad de tener que revisar más de 5 bolillas hasta encontrar la primera de color negro?

NOTA

$P(N_g > 5)$

Función de probabilidad en geométrica

$P(N_g) = (1-p)^{n-1} \cdot p^1$

$\Rightarrow P(N_g > 5) = 1 - P(N_g \leq 5)$

$= 1 - P(N_g = 1) + \dots + P(N_g = 5)$

$P(N_g=1) = \frac{✓}{1°} = 0,25$

$P(N_g = 2) = \frac{X}{1°} \cdot \frac{✓}{2°} = 0,75 \cdot 0,25$

$P(N_g = 3) = \frac{X}{1°} \cdot \frac{X}{2°} \cdot \frac{✓}{3°} = 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25$

etc.

↓ el éxito se dio en la 3ra revisión

V.A. Pascal:

N_p = # de bolillas a revisar hasta encontrar la 3ra negra

$N_p \sim$ Pascal $(p = 0,25 \; ; \; r = 3)$

A) Cual es la prob. de tener que revisar 7 bolillas hasta encontrar la tercera que es de color negro?

$P(N_p = 7)$

$\overline{1°} \; \overline{2°} \; \overline{3°} \; \overline{4°} \; \overline{5°} \; \overline{6°} \; \overline{7°}$ ✓ → 3ra bolilla de color negro

⇒

Función de prob. en la Pascal: (negative Binomial II)

$$P(Np) = \binom{n-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

$$P(Np = 7) = \binom{7-1}{3-1} \cdot (0,25)^3 (0,75)^{7-3}$$

$$= 0,07416 \text{ (con la App)}.$$

B) Cuál es la probabilidad de tener que revisar a lo sumo 6 hasta encontrar la 5ta bolilla negra?

Np = # de bolillas a revisar hasta encontrar la 5ta de color negro.

$Np \sim$ Pascal ($p = 0,25$; $r = 5$)

$P(Np \leq 6)$ = Acá son sumatorias

$= P(Np = 5) + P(Np = 6)$

(Por el rango de la tabla)

C) Cuál es la cant. esperada de bolillas negras a encontrar en una muestra de 500 bolillas?

D) Cuál es la cant. media de bolillas a revisar hasta encontrar la primera de color negro?

E) Cuál es la cant. esperada de bolillas a revisar hasta encontrar la 12° bolilla que no sea de color negro?

NOTA

Repaso Proc. Bernoulli: { Bin / Geom / Pascal

- $P \Rightarrow$ prob. de éxito
- $r \Rightarrow$ n° de éxitos $\rightarrow$ Binomial $(P; n)$
- $n \Rightarrow$ cant. de ensayos
  - $\rightarrow$ Geométrica $(P) \Rightarrow$ cuenta hasta 1er éxito
  - $\rightarrow$ Pascal $(P; r) \Rightarrow$ cuenta hasta el enésimo éxito.

- Rango Binomial $= 0, 1, 2 \ldots n$
- Rango$(Ng) = 1, \ldots, \infty$
- Rango $(Np) = r, \ldots, \infty$

Ejercicio:

Casivea es una empresa de cosméticos que tiene una línea de Jab. Según datos hist., el 20% de los Jabones no cumplen con las normas de calidad.

A) Calcular la prob. de que Tomás encuentre algún defectuoso en los 6 que controla y Myriam encuentre 1 defectuoso en los 4 que revisa

R_n = # de Jabones que son defectuosos en n ensayos o Jabones revisados.

$R_n \sim$ Binomial $(n; p = 0{,}2)$

$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{R_6}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{R_4}$

Son indep. porque c/variable mide ≠ conjuntos de Jabones y no se solapan.

~~P(.........)~~ $P(R_6 \geq 1 \cap R_4 = 1) =$

$= P(R_6 \geq 1) \cdot P(R_4 = 1)$

$= 0{,}738 \cdot 0{,}4096$

$= 0{,}3022$

Si 2 sucesos A y B son indep:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\rightarrow$

CA:

$$P(R_6 \geq 1) = \sum_{r=1}^{r=6} \binom{6}{r} \cdot 0{,}2^r \cdot (1-0{,}2)^{6-r} \cong 0{,}738$$

ó

$$P(R_6 \geq 1) = 1 - P(R_6 = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot (1-0{,}2)^{6-0}$$

B) Si Myriam encuentra por lo menos 2 defectuosos en los 10 que revisa, ¿Cuál es la prob. de que Tomás encuentre 1 defectuoso en los primeros 5?

$$\underbrace{\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}^{R_5 = 1}\ \overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}^{R_5 \geq 1}}_{R_{10} \geq 2}$$

$$P(R_5 = 1 / R_{10} \geq 2) = \frac{P(R_5 = 1 \cap R_{10} \geq 2)}{P(R_{10} \geq 2)} \; (*)$$

—o—

$P(R_5 = 1 \cap R_{10} \geq 2) \neq P(R_5 = 1) \cdot P(R_{10} \geq 2) \Rightarrow$ pues se solapan

—o—

(*) reemplazo ~~...~~ el numerador por algo que no se solape:

$$= \frac{P(R_5 = 1) \cdot P(R_5 \geq 1)}{P(R_{10} \geq 2)}$$

$$= 0{,}4412$$

Sería el conjunto de los otros 5 restantes y como en el total pide que haya mínimo 2 defectuosos y 1 de esos ya está en el conjunto de $P(R_5 = 1)$, el otro conjunto de 5 debe tener mínimo 1 defectuoso

—o—

$$P(R_{10} > 2) = P(R_{10} \geq 3)$$

→

NOTA

Proceso Poisson:

- Dicotomía: (éxito / no éxito)
- Independencia: se cuentan éxitos en intervalos disjuntos.
- Tasa de éxito constante $= \lambda$ = Lambda = $\frac{\text{\# éxitos}}{\text{en un continuo ``t''}}$

λ = tasa → ej: $\lambda = \frac{6 \text{ fallas}}{100 \text{ metros}}$ → "éxitos"; 100 metros → valor continuo

K = # éxitos

t = continuo

→ 3 variables:

- Intervalo Fijo: → variable Poisson · Discreta.

Ej: K = # de aviones que arriban en 3 hs → esto es lo que debe ser específico o fijo.

$\lambda = \frac{\text{\# de aviones}}{3 \text{ hs}}$ $t = 3$ (3 hs)

$$t_0 \quad \underbrace{|\text{———————}|}_{t_3} \quad t_3$$

$K \sim \text{Poisson}(\lambda, t)$

$\lambda = \frac{\text{\# de aviones}}{\text{horas}}$ → no será igual a t

Genérico:

K = # de éxitos en un continuo "t" fijo

- Intervalo variable: - Continuas.
  - → Exponencial: # de continuo hasta el primer éxito (similar a la geométrica, pero esta es continua).
  - → Gamma: # de continuo hasta el K-ésimo éxito (similar a la Pascal, pero esta es continua)

→

- Exponencial:

Ej: Te = tiempo que transcurre hasta que llegue el primer avión

$k=1$

$T_e \sim \text{Exponencial}(\lambda)$

- Gamma:

Ej: Tg = Tiempo que transcurre hasta que llegue el cuarto ~~pasajero~~ avión.

$k=4$

$T_g \sim \text{Gamma}(\lambda, k)$

V. Poisson:

→ Función de probabilidad: (porque es discreta)

$$P(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} \qquad \lambda t \rightarrow \mu_k$$

→ Rango: $k \geq 0$

→ media: $\mu_k = \lambda . t$

→ Varianza: $\sigma_k^2 = \mu_k$

NOTA

Escaneado con CamScanner

V. Exponencial:

→ **Función de densidad:** (porque es continua)

$$f(T=t)=\begin{cases} 0 & T<0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{si } T>0 \end{cases}$$

→ y se usa la integral con siempre

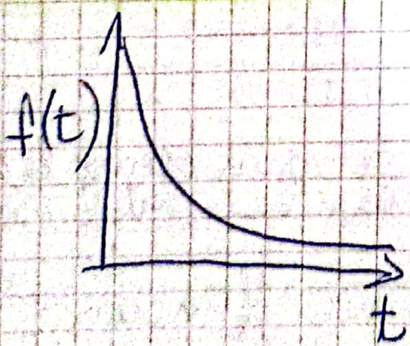
→ **Función de distribución acumulada:**

$$F(T=t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & \text{si } t>0 \end{cases}$$

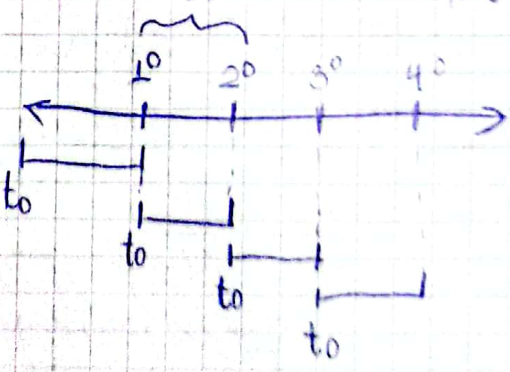
→ **media:** $\mu_t = \dfrac{1}{\lambda}$

→ **Varianza:** $\dfrac{1}{\lambda^2}$

→ **Rango:** $R(t) = (0; +\infty)$



entre "t" hay una exponencial



→

V. Gamma:

→ F. de densidad (porque es continua)

$$f(T=t)\begin{cases}\dfrac{\lambda^{K}\cdot t^{K-1}}{(K-1)!}\cdot e^{-\lambda t} & \text{si } T>0\\ 0 & \text{si } T\leq 0\end{cases}$$

→ media:

$$\mu_T=\frac{K}{\lambda}$$

→ Varianza: $\sigma^2_T=\dfrac{K}{\lambda^2}$

→ Rango $(T)=(0;+\infty)$

Repaso respecto a medias en cambio de variable:

$$\mu_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot f(x)\,dx$$

→ no se hace ningún reemplazo en ninguna parte

→ Rangos:

- Si $\varphi(x)$ es una única función (no x partes), toma el rango (o rangos) de $f(x)$. Se toman tal cual los rangos, no se reemplaza nada en $\varphi(x)$
- Si $\varphi(x)$ es función x partes:
  - Los rangos coinciden con $f(x)$ y no se es fácil.
  - Los rangos min y máx. coinciden con $f(x)$ pero los intermedios no, ahí tengo que ir viendo qué rango coincide con qué función en c/caso.

el mínimo y el máx de todo de $\varphi(x)$ siempre coinciden con los de $f(x)$

O

Ejercicio: → Proceso Poisson (pista)

La tasa media de choques en una esquina de la CABA es de 3 choques x semana

A) Cuál es la probabilidad de que en 2 semanas y media no se hayan registrado choques?

B) Cuál es la probabilidad de que haya ocurrido 1 choque en 2 semanas y media?

C) Cuál es la probabilidad de que ocurra algún choque en 2 semanas y media?

D) Cuál es la probabilidad de que transcurran + de 2 semanas y media antes de que se produzca el primer choque?

E) Cuál es la probabilidad de que transcurran + de 3 semanas y media para registrar 3 choques?

Datos:

$$\lambda = \frac{3 \text{ choques}}{1 \text{ semana}} = \frac{3 \text{ choques}}{\underbrace{\text{semana}}_{\text{Tiempo}}}$$

K = # de choques en "t" semanas

Te = tiempo (sem.) que transcurre hasta el 1° choque

Tg = tiempo (sem) que transcurre hasta el 'k' choque

A) t = 2,5 semanas.

$K \sim \text{Poisson}(\lambda = 3/1 = 3 \;; t = 2{,}5)$

$$P(K=0) = \frac{(7{,}5)^0 \cdot e^{-7{,}5}}{0!} = e^{-7{,}5} = 0{,}00055$$

$\mu_K = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ → la media es lo que tengo que poner en λ en la app

→

B) Idem (A) pero con $P(K=1)$

$$P(K=1) = \frac{7{,}5 \cdot e^{-7{,}5}}{1!} = 0{,}00415$$

c) Idem (A) pero con $P(K \geq 1)$

$$P(K \geq 1) = 1 - P(K=0) \rightarrow$$ O planteado con una sumatoria $\sum_{K=1}^{+\infty} \ldots$

$$= \underbrace{1 - \frac{(7{,}5)^0 \, e^{-7{,}5}}{0!}}$$

no puede faltar en el examen este planteo (más allá de usar la app)

Formas posibles:

D) • $P(Te > 2{,}5) = 1 - \int_{Te=0}^{Te\,2{,}5} 3 \cdot e^{-3t} \, dt =$

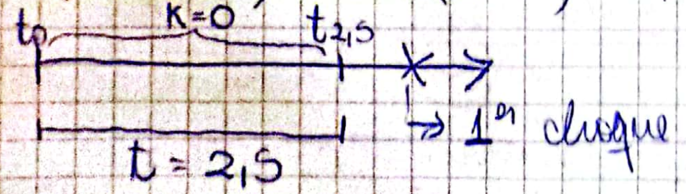
Usando densidad

• $P(Te > 2{,}5) = 1 - F(Te = 2{,}5)$ Usando la dist acumulada.

$$= 1 - \left[1 - e^{-3 \cdot (2{,}5)}\right]$$

$=$

• $P(Te > 2{,}5) = P(K=0) = 0{,}00055$ Usando sucesos equivalentes



$Te \sim$ Exponencial $(\lambda = 3)$

E) $Tg \sim$ Gamma $(\lambda = 3;\ K = 3)$

$$P(Tg > 3{,}5) = 1 - P(Tg \leq 3{,}5)$$

$$= 1 - \int_{Tg=0}^{Tg=3{,}5} \frac{3^3 \cdot t^2 \cdot e^{-3t}}{2!} \, dt = 0{,}00183$$

En la app para gamma:

$$\mu_{Tg} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{K}{\lambda}$$