16/9.

V.A. Uniforme:

→ Continua, simétrica (mirando el gráfico, en el centro está la media y la mediana).

$X \sim U(a; b)$ → así aparece en el enunciado

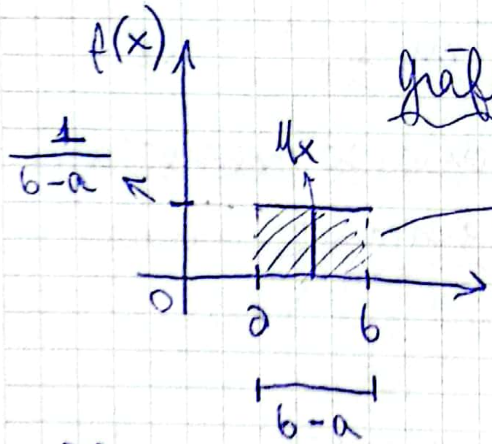
a: mín valor; b: máx valor.

fdp "densidad" → $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ → siempre es así.

↓ nosotros armamos esta función

Dist. acumulada → $F(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

gráfico



Área $= (b-a) \cdot \frac{1}{b-a} = 1$

$$\boxed{\mu_x = \frac{a+b}{2}}$$

(no hace falta hacer la integral en este caso)

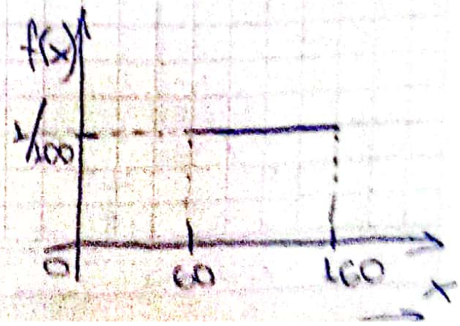
EJ:

X = longitud de una tabla de madera (mts)

$X \sim U(60; 160)$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} & \text{si } 60 \leq x \leq 160 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$F(X = x) = \begin{cases} 0 & x < 60 \\ \frac{x-60}{100} & 60 \leq x \leq 160 \\ 1 & x > 160 \end{cases}$



$$\mu_x = \frac{60 + 160}{2} = 110 \text{ mts}$$

$$\boxed{\sigma^2_x = \frac{(b-a)^2}{12}} \rightarrow \text{Varianza}$$

$$\sigma^2_x = \frac{(160-60)^2}{12} = 833{,}33 \text{ mts}^2$$

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\sigma^2_x}} \rightarrow \text{Desvío}$$

$$\sigma_x = \sqrt{833{,}33} = 28{,}86 \text{ mts}$$

Ejercicio:

A) Cuál es la prob. de que las tablas tengan una longitud inferior a 120 mts?

$$P(X<120) = \int_{x=60}^{x=120} \frac{1}{100}\, dx = 0{,}6 \rightarrow \text{Forma 1}$$

Si medir X menor a...

$$P(x<120) = F(x=120) \rightarrow \text{Forma 2}$$

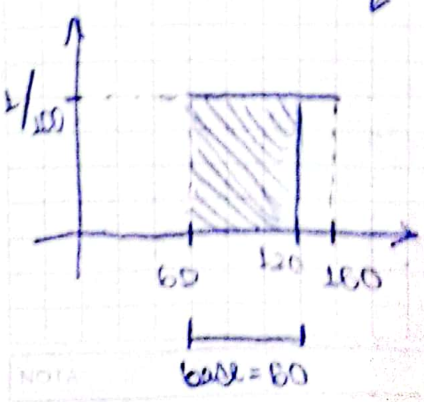
$$= \frac{120-60}{100} = 0{,}6$$

$$P(x<120) = \text{Área} \longrightarrow \text{Forma 3}$$

$$= b \cdot h$$

$$= 60 \cdot \frac{1}{100}$$

$$= 0{,}6$$



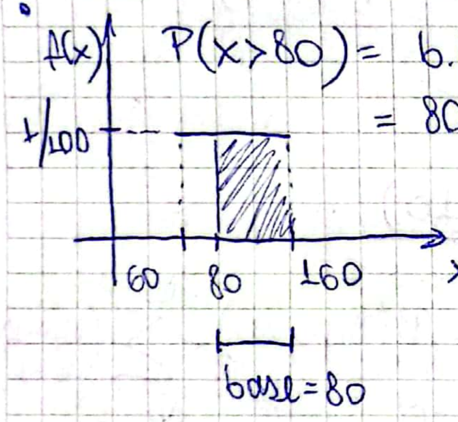
B) ¿Cuál es la prob. de que la tabla tenga una long. superior a 80 mts?

• $P(x>80) = \int_{x=80}^{x=160} \frac{1}{100}\,dx$

ó $P(x \leqslant 80)$ es indistinto x ser continua

• $P(x>80) = 1 - P(x<80)$
$= 1 - F(x=80)$ → ya que $F(X=x) = P(X \leqslant x)$
$= 1 - \frac{80-60}{100}$

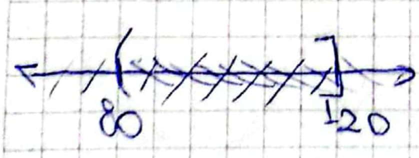
• $P(x>80) = b.h$
$= 80 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}8$



Si la preg. fuera $P(x=80)$ el resul. es cero. No hay prob. puntual en V.A. continua.

c) De las tablas que tienen una long. de a lo sumo 120 mts, qué porcentaje supera los 80?

$P(x>80 / x \leqslant 120) = \frac{P(x>80 \cap x \leqslant 120)}{P(x \leqslant 120)}$



$= \frac{P(80 < x \leqslant 120)}{P(x \leqslant 120)}$

$= \frac{\int_{x=80}^{x=120} \frac{1}{100}\,dx}{\int_{x=60}^{x=120} \frac{1}{100}\,dx} = \frac{0{,}6-0{,}2}{0{,}6}$

$= 0{,}\overline{66}$

Rta: 66,6 %

ó → $= \frac{F(x=120) - F(x=80)}{F(x=120)}$ →

D) Cuál es la prob. de tener que revisar más de 9 tablas hasta encontrar la 7° que supera los 80 mts?

Np = # de ~~ensayos~~ hasta encontrar la 7° mayor a 80 mts.
~~tablas~~ tablas a ~~[illegible]~~ medir

Ensayo	Éxito
medir long. de la Tabla	Long. > 80 mts

$P(x>80) = 0{,}8$ (calculado en item (b))

$Np \sim Pascal\,(p = P(x>80) = 0{,}8\ ;\ r=7)$

$$P(Np>9) = 1 - P(Np \leq 9)$$
$$= 1 - 0{,}7382$$
$$= 0{,}2618 \Rightarrow P(Np \geq 10)$$

ya que $r=7$

CA:

$$P(Np \leq 9) = P(Np=7) + P(Np=8) + P(Np=9) = \sum_{Np=7}^{Np=9} \binom{Np-1}{7-1} \cdot 0{,}8^{7} \cdot (0{,}2)^{Np-7}$$

Ej: $P(Np=7) = \binom{n-1}{r-1} \cdot p^{r} \cdot (1-p)^{n-r}$

$$= \binom{7-1}{7-1} \cdot 0{,}8^{7} \cdot (0{,}2)^{7-7}$$

N° Combinatorio: (fórmula)

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Propiedades de cambio de variable:

- Si $Y = \varphi(x) = a.x + b \rightarrow$ lineal

La media:

$$\mu_Y = a.\mu_x + b$$

$$\sigma^2_Y = a^2.\sigma^2_x$$

- Si: $Z = \varphi(x, y) = x + y$

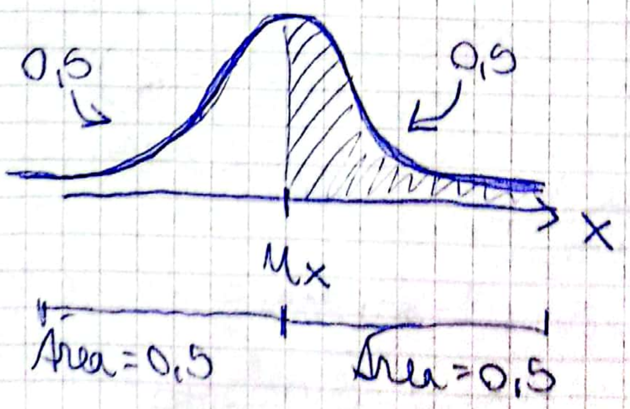
$$\mu_Z = \mu_x + \mu_y$$

$$\sigma^2_Z = \sigma^2_x + \sigma^2_y$$ (si x e y son independientes).

V.A. normal: $\rightarrow$ continua.

$$X \sim \text{normal}(\underbrace{\mu_x}_{\text{media de } x} ; \underbrace{\sigma_x}_{\text{desvío de } x})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma_x} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$



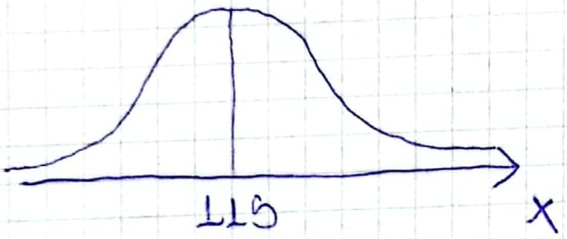
$\rightarrow$

Ej:

X: peso de un pan (gr)

X ~ normal (115 ; 20)

$\downarrow \mu_x$ $\quad \downarrow \sigma_x$



$P(X > 115) = 0{,}5$

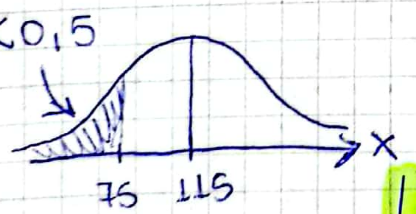
$P(X < 115) = 0{,}5$

A) Calcular la prob. de que el peso sea menor a 75 grs.

$P(X < 75)$

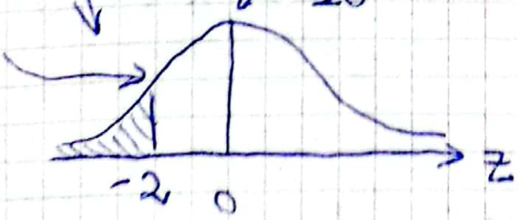
- <u>no</u> usar integral en este caso ya que no tiene primitiva f(x)
- Se usa una variable equivalente para usar el cálculo (cambio de variable)

Rta < 0,5



$$\boxed{\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \quad \begin{cases} X \sim \text{normal}(\mu_x ; \sigma_x) \\ Z \sim \text{normal}(\mu_Z = 0 ; \sigma_Z = 1) \end{cases}}$$

$\frac{75-115}{20}$ $\qquad \frac{115-115}{20}$



$P(X < 75) = P\left(Z < \frac{75-115}{20}\right)$

$= P(Z < -2)$

$= 0{,}02275$

En la App: "normal"

$\boxed{\mu = 0 \quad \sigma = 1} \rightarrow$ para Z

$x = -2 \quad P(X < x) = 0{,}02275$

Si me piden ~~[illegible]~~ $P(X > 75) = 1 - P(X < 75)$

$= 1 - P(Z < -2)$

B) Se arman bolsas con 10 panes. Cual es la prob de que una bolsa pese mas de 1 kg y 1/4?

$P(Y > 1250)$ → grs

Y: peso de una bolsa de 10 panes.

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$

$Y = \sum_{i=1}^{10} x_i$

- $\mu_Y = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} \dots + \mu_{X_{10}}$
  $= 10 \cdot \mu_X$
  $= 10 \cdot 115$
  $= 1150$ grs.

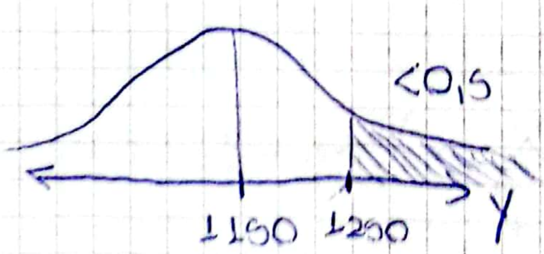
$Y \sim \text{normal}(\mu_Y ; \sigma_Y)$ (por suma de normales)

$\sigma_Y = \sqrt{4000}$

$\mu_Y = 1150$

- $\sigma^2_Y = \sigma^2_{X_1} + \dots + \sigma^2_{X_{10}}$
  $= 10 \cdot \sigma^2_X$
  $= 10 \cdot \underbrace{(20)^2}$ → porque es la varianza (desvío al cuadrado)
  $= 4000$

- $\sigma_Y = \sqrt{4000}$



$P(Y > 1250) = ?$

$= 1 - P(Y \leq 1250)$

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{1250 - 1150}{\sqrt{4000}}\right)$

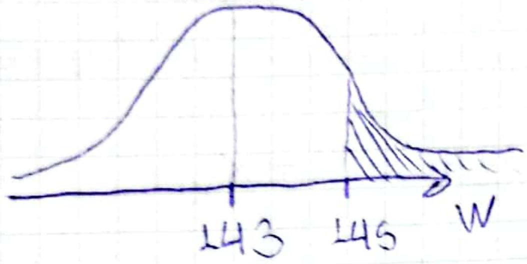
$= 1 - P(Z \leq 1{,}581)$

$= 1 - 0{,}943$

$= 0{,}0569$.

c) A los panes se les agrega sésamo, lo cual incrementa su peso en un 20% y 5 grs de avena. Cuál es la prob de que un pan de la nueva producción pese más de 145 grs.? →

$P(W > 145)$



$\rightarrow P(W > 145)$

$= 1 - P(W \leqslant 145)$

$= 1 - P\left(Z \leqslant \frac{145-143}{24}\right)$

$= 1 - P(Z \leqslant 1/12)$

$= 1 - P(Z \leqslant 0{,}08333)$

$= 1 - 0{,}53321$

$\cong 0{,}4668$

W = peso de un pan con avena y sésamo (grs.)

$W = \varphi(x) = 1{,}2 \cdot x + 5$

$\quad = x + 0{,}2x + 5$

$W \sim normal = (\mu_W ; \sigma_W)$ $\rightarrow = 143$ $\rightarrow = 24$

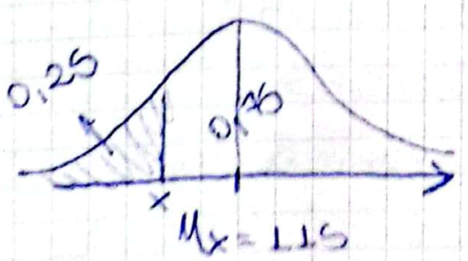
(por combinación lineal)

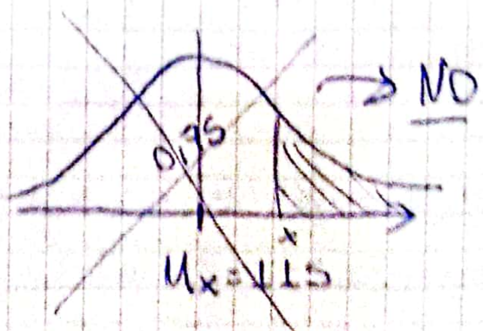
- $\mu_W = a \cdot \mu_x + b$
  $= 1{,}2 \cdot 115 + 5$
  $= 143$ grs.
- $\sigma_W^2 = (1{,}2)^2 \cdot 20^2$
  $= 576$
- $\sigma_W = \sqrt{576} = 24$

D) Cuál es el peso superado por el 75% de los panes?

~~P(...)~~

$P(X > x) = 0{,}75$ o $P(X < x) = 0{,}25$





Se debe encontrar el valor de "x" dicha

30/9

Propiedades de normal:

$X_1, X_2, \ldots X_n$ donde $X \sim$ normal

- I) $Z = \varphi(X_1 \ldots X_n) = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$$\boxed{\underbrace{Z \sim N}_{\text{normal}} \left(\mu_Z = n \cdot \mu_X ; \sigma^2_Z = n \cdot \sigma^2_X\right)}$$

Por suma de normales.

- II) $W = \varphi(X_1) = a \cdot X_1 + b$

$$\boxed{W \sim N\left(\mu_W = a \cdot \mu_X + b ; \sigma^2_W = a^2 \cdot \sigma^2_X\right)}$$

Por combinación lineal de normales

- III) $D = X - Y$ $\quad Y \sim N$

$$\boxed{D \sim \text{normal}\left(\mu_D = \mu_X - \mu_Y ; \sigma_D = \sqrt{\sigma^2_X + \sigma^2_Y}\right)}$$

Por diferencia de normales.

Ejercicio:

La altura de las personas es una V.A normal donde la media de las mujeres holandesas es de 165 cm y desvío 4 cm. Los varones argentinos tienen un desvío de 5 cm y el 30% superan los 177,622 cm.

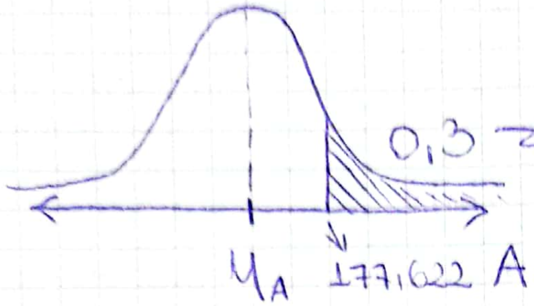
a) ¿Cuál es la prob de que un hombre argentino tenga una altura mayor a una mujer holandesa?

H: altura de una mujer holandesa (cm)

A: altura de un varón argentino (cm)

$H \sim N(\mu_H = 165 ; \sigma_H = 4)$

$A \sim N(\mu_A = ? ; \sigma_A = 5)$



- $P(A > 177{,}622) = 0{,}3$
- $P(A < 177{,}622) = 1 - P(A > 177{,}622)$
$= 1 - 0{,}3$
$= 0{,}7$
- $P(A < 177{,}622) = 0{,}7$

$P\left(Z < \frac{177{,}622 - \mu_A}{5}\right) = 0{,}7$

$P(Z < 0{,}5244) = 0{,}7$

- $\frac{177{,}622 - \mu_A}{5} = 0{,}5244$

$\mu_A = (0{,}5244 . 5 - 177{,}622).(-1)$

$\mu_A = 175{,}5$

$A \sim N(\mu_A = 175{,}5 \; ; \; \sigma_A = 5)$

$H \sim N(\mu_H = 165 \; ; \; \sigma_H = 4)$

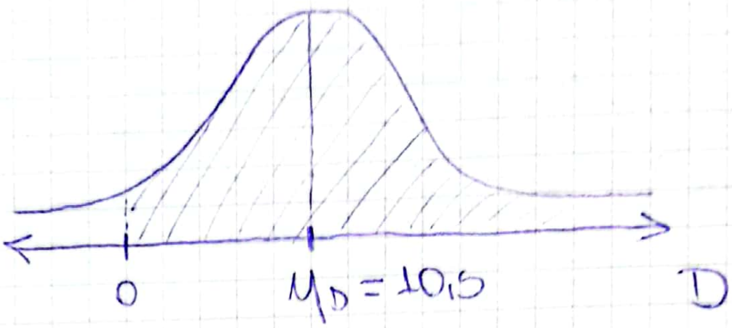
A) $P(A > H) = P(\underbrace{A - H}_{D = A - H} > 0) = P(D > 0)$

D: diferencia de alturas entre un varón argentino y una mujer holandesa (cm)

$D = \varphi(A, H) = A - H = A + (-1).H$ →

- $\mu_D = \mu_A - \mu_H = 175{,}5 - 165 = 10{,}5$
- $\sigma^2_D = \sigma^2_A + \sigma^2_H = (4)^2 + (5)^2 = 41$
- $\sigma_D = \sqrt{41}$

$D \sim N(\mu_D = 10{,}5 \,;\, \sigma_D = \sqrt{41})$



$P(D>0) = 1 - P(D \leq 0)$
$= 1 - P\left(Z < \frac{0 - 10{,}5}{\sqrt{41}}\right)$
$= 1 - P(Z < -1{,}64)$
$= 1 - 0{,}05050$

$P(D>0) = 0{,}9495$ → Rta.

- Teorema Central del Límite: (TCL)

(ejemplo del canal de youtube):

Ejercicio

Unos cajones de ciruelas se arman con 15 ciruelas pequeñas y 30 ciruelas grandes. La distribución del peso de las ciruelas pequeñas es U(20, 40) gramos. El peso de las ciruelas grandes, también en gramos, es aleatorio según:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{450} & 40 < x < 50 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

↓
fdp

⇒

Aclaración: peso neto es el peso del contenido sin considerar el peso del envase.

Hallar la prob. de que el peso neto de uno de estos cajones de ciruela supere los 1750 grs.

Variable/s:

X_p = peso de las ciruelas pequeñas (grs)

X_g = peso de las ciruelas grandes (grs.)

Datos:

$X_p \sim U(20;40)$ grs.

$$f_{X_p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 20 < x < 40 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

$$f_{X_g}(x) = \begin{cases} \frac{x}{450} & 40 < x < 50 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

Calculamos μ_{X_p} y $\sigma^2_{X_p}$:

Por ser X_p uniforme:

- $\mu_{X_p} = \frac{20+40}{2} = 30$
- $\sigma^2_{X_p} = \frac{(40-20)^2}{12}$

$\sigma^2_{X_p} = 33{,}33$

Calculamos μ_{X_g} y $\sigma^2_{X_g}$:

- $\mu_{X_g} = \int_{40}^{50} x \cdot \frac{x}{450}\, dx = 45{,}185$
- $\sigma^2_{X_g} = \int_{40}^{50} (x - 45{,}185)^2 \cdot \frac{x}{450}\, dx = 8{,}299$

→

NOTA

Ne = peso neto de un cajón de ciruelas (grs.)

$P(Ne > 1730)$ → lo que me pide el enunciado

$$Ne = \underbrace{\sum_{i=1}^{15} X_{pi}}_{\text{peso de 15 ciruelas peq.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{30} X_{gi}}_{\text{peso de 30 ciruelas grandes}} \rightarrow Ne = C + G$$

Definimos:

C = Peso de 15 ciruelas pequeñas (grs)

$$C = \sum_{i=1}^{15} X_{pi}$$

G = Peso de 30 ciruelas grandes (grs)

$$G = \sum_{i=1}^{30} X_{gi}$$

$\boxed{\text{TCL:}}$ si se suma una cantidad grande (*) de variables idénticamente distribuidas, el resultado se aproxima a una distribución normal.

(*) Cantidad grande: nos referimos a partir de 30 variables, aunque en el caso de la variable uniforme, por ser simétrica, basta con sumar a partir de 10 variables para tener una aprox. normal.

C ~ normal (por TCL)

- $\mu_C = \mu_{x_{p1}} + \dots + \mu_{x_{p15}} = \sum_{i=1}^{15} \mu_{x_{pi}}$

  $\mu_C = 15 \cdot \mu_{x_p} = 15 \cdot 30 = 450$
- $\sigma^2_C = \sigma^2_{x_{p1}} + \dots + \sigma^2_{x_{p15}} = \sum_{i=1}^{15} \sigma^2_{x_{pi}}$

  $\sigma^2_C = 15 \cdot \sigma_{x_p} = 15 \cdot 33{,}33 = 499{,}95$
- $\sigma_C = \sqrt{\sigma^2_C} = \sqrt{499{,}95} = 22{,}36$ →

G ~ normal (por TCL)

$$\begin{cases} \bullet\ \mu_G = \mu_{x_{g1}} + \dots + \mu_{x_{g30}} = \sum_{i=1}^{30} \mu_{x_{gi}} \\ \mu_G = 30 \cdot \mu_{x_g} = 30 \cdot 45{,}185 = 1355{,}55 \\ \bullet\ \sigma^2_G = \sigma^2_{x_{g1}} + \dots + \sigma^2_{x_{g30}} = \sum_{i=1}^{30} \sigma^2_{x_{gi}} \\ \sigma^2_G = 30 \cdot \sigma^2_{x_g} = 30 \cdot 8{,}299 = 248{,}97 \\ \bullet\ \sigma_G = \sqrt{\sigma^2_G} = \sqrt{248{,}97} = 15{,}78 \end{cases}$$

Dado que:

$Ne = C + G$

$C \sim N(\mu_C = 450\ ;\ \sigma_C = 22{,}36)$

$G \sim N(\mu_G = 1355{,}55\ ;\ \sigma_G = 248{,}97)$

Ne ~ normal (por suma de V.A. normales)

$$\begin{cases} \bullet\ \mu_{Ne} = \mu_C + \mu_G \\ \mu_{Ne} = 450 + 1355{,}55 = 1805{,}55 \\ \bullet\ \sigma^2_{Ne} = \sigma^2_C + \sigma^2_G \\ \sigma^2_{Ne} = 499{,}95 + 248{,}97 = 748{,}92 \\ \bullet\ \sigma_{Ne} = \sqrt{\sigma^2_{Ne}} \\ \sigma_{Ne} = \sqrt{748{,}92} = 27{,}37 \end{cases}$$

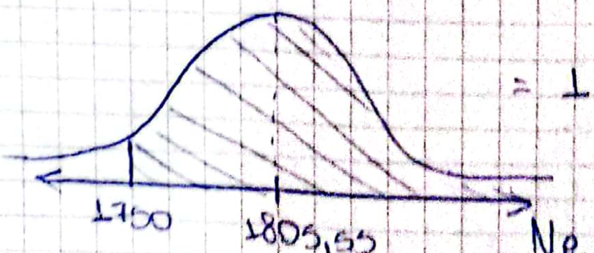
- $P(Ne > 1750) = 1 - P(Ne \leq 1750)$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{1750 - 1805{,}55}{27{,}37}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq -2{,}03)$$

$$= 1 - 0{,}02$$

$$\boxed{= 0{,}98} \rightarrow \text{Rta}$$



→

NOTA

(Apuntes de clase)

TCL:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ igualmente distribuidas e independientes.

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ con $n \geq 30$

Entonces:

$S \sim$ normal $(\mu_S ; \sigma_S)$ por TCL.

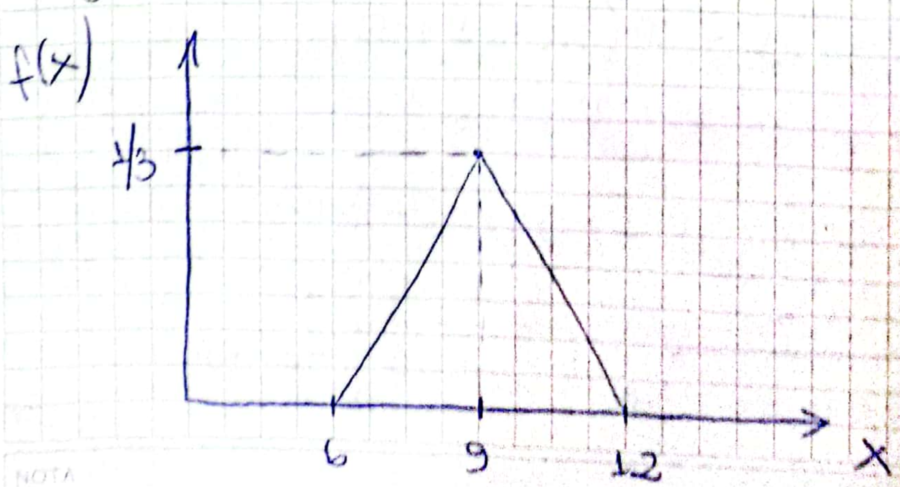
Ejercicio:

El peso de las medallas se comporta según una V.A. con la sig. función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{2}{3} & 6 < x < 9 \\ -\frac{x}{9} + \frac{4}{3} & 9 < x < 12 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

A) Si se preparan cargamentos de 100 medallas. Calcular la prob. de que un cargamento pese más de 880 grs.

Gráfico: (?)



$$\bullet\ \mu_x = \int_{x=6}^{9} x \cdot \left(\frac{x}{9} - \frac{2}{3}\right) dx + \int_{x=9}^{12} x \cdot \left(-\frac{x}{9} + \frac{4}{3}\right) dx$$

$$\mu_x = 9$$

$$\bullet\ \sigma_x^2 = \int_{x=6}^{9} (x-9)^2 \cdot \left(\frac{x}{9} - \frac{2}{3}\right) dx + \int_{x=9}^{12} (x-9)^2 \cdot \left(-\frac{x}{9} + \frac{4}{3}\right) dx$$

$$\sigma_x^2 = \frac{3}{2} \longrightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

• C = Peso de 100 medallas (grs.).

$$C = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$$

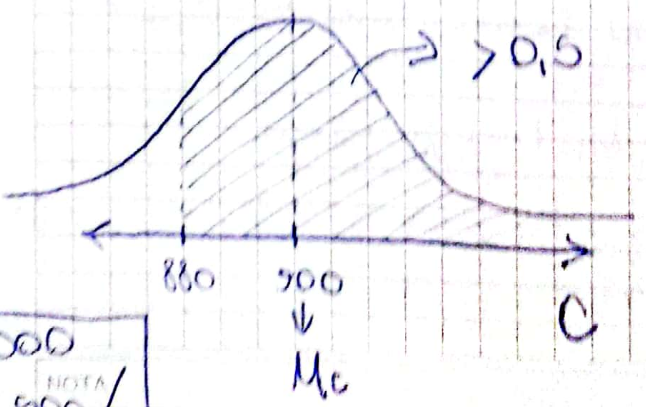
$$\underbrace{C \sim N(\mu_c ; \sigma_c)}_{\text{Por TCL.}}$$

$$\mu_c = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \dots + \mu_{x_{100}} = 100 \cdot 9 = 900$$

$$\sigma_c^2 = \sigma_{x_1}^2 + \dots + \sigma_{x_{100}}^2 = 100 \cdot \sigma_x^2 = 100 \cdot \frac{3}{2} = 150$$

$$\sigma_c = \sqrt{150}$$

$$C \sim N(900 ; \sqrt{150})$$



$$P(C > 880) = 1 - P(C \leq 880)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{880 - 900}{\sqrt{150}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq -1,6329)$$

$$\boxed{P(C > 880) = 0,94845}$$

↳ Rta.

162000
−141900

$\boxed{\text{modelo bivariante}}$

(videos de youtube)

→ Ambas variables continuas.
→ Una variable continua y una discreta.
→ Ambas discretas

- Variables aleatorias bidimensionales $\boxed{\text{discretas}}$.

Ejemplo: Sea "X" la cant. de artículos fabricados por la máq. A. Sea "Y" la cant. de artículos fabricados por la máq. B. La función de prob. conjunta está dada por:

Cant. art. B (Y)

X \ Y	0	1
0	0,2	0
1	0,2	0,2
2	0	0,4

cant. art. A (X)

A) ¿Cuál es la prob. de que se haya fabricado 1 artículo de la máquina A y 1 artículo de la máquina B?

Variables involucradas:

X = cant. artículos fabricados de la máq. A (0, 1, 2)
Y = cant. artículos fabricados de la máquina B (0, 1)

$P(X=1 \cap Y=1) = P(X=1, Y=1) = 0{,}2$

→

B) Calcular las funciones de prob. marginales unidimensionales asociadas a c/ experiencia. En otras palabras, es calcular la $P(X=x)$ y $P(Y=y)$

En forma teórica podemos calcular $P(X=x) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} P(X,Y)$

Calculemos la $P(X=x)$ en forma práctica.

X = cant. de artículos fabricados de la máq. A (0, 1, 2)

- $P(X=0) = P(X=0 \cap (Y=0 \cup Y=1))$
  $= P(X=0 \cap Y=0) + P(X=0 \cap Y=1)$
  $= 0{,}2 + 0$
  $= 0{,}2$
- $P(X=1) = P(X=1 \cap (Y=0 \cup Y=1))$
  $= P(X=1 \cap Y=0) + P(X=1 \cap Y=1)$
  $= 0{,}2 + 0{,}2$
  $= 0{,}4$
- $P(X=2) = P(X=2 \cap (Y=0 \cup Y=1))$
  $= P(X=2 \cap Y=0) + P(X=2 \cap Y=1)$
  $= 0 + 0{,}4$
  $= 0{,}4$

Es decir, en este caso sumo c/ fila.

Por lo tanto:

$$P(X=x) \begin{cases} 0{,}2 & x=0 \\ 0{,}4 & x=1 \\ 0{,}4 & x=2 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

En forma teórica podemos calcular $P(Y=y) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} P(x,y)$

Y = cant. de artículos fabricados de la máq B. (0,1)

Hagamos lo mismo que el caso anterior con X pero esta vez sumando las columnas.

$$P(Y=y) \begin{cases} 0,4 & y=0 \\ 0,6 & y=1 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Si me piden la media, varianza y/o desvío de X o de Y, primero obtengo las func. de prob. marginales de la que me están pidiendo, y luego uso las fórmulas de siempre para c/caso.

c) Calcular la función de prob. condicional de $Y/X=1$.

$P(Y/X=1) = P(Y=y \cap X=1) / P(X=1)$

Analizamos esto en el rango de Y (0,1)

↳ ya que es lo que varía.

• Analizamos para y=0:

$P(y=0/X=1) = P(Y=0 \cap X=1) / P(X=1)$

$= 0,2/0,4 = 0,5$

X\Y	0	1	P(X=x)
0	0,2	0	0,2
1	0,2	0,2	0,4
2	0	0,4	0,4
P(Y=y)	0,4	0,6	1

• Analizamos para y=1:

$P(Y=1/X=1) = P(Y=1 \cap X=1)/P(X=1)$

$= 0,2/0,4$

$= 0,5$

→

NOTA

$$P(Y/X=1) = \begin{cases} 0{,}5 & y=0 \\ 0{,}5 & y=1 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$ → es una func. de prob. de una variable aleatoria unidimensional

D) Calcular $\mu_{Y/X=1}$ y $\sigma^2_{Y/X=1}$

- 1ro se halla la func. de prob. que se hizo en el punto anterior

$$\mu_{Y/X=1} = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$$

$$\sigma^2_{Y/X=1} = (0-0{,}5)^2 \cdot 0{,}5 + (1-0{,}5)^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

E) ¿Son X e Y v.a. independientes?

Para demostrarlo, se prueba que para TODO par de sucesos pertenecientes a P(X,Y) debe cumplir que:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y) \quad \forall\, x, y$$

Si un par de estos no lo cumple, entonces X e Y no son V.A. independientes.

Elijo un par de sucesos: $x=0$, $y=1$ y verifico:

$$P(X=0, Y=1) \neq P(X=0) \cdot P(Y=1)$$

$$0 \neq 0{,}2 \cdot 0{,}6$$

$$P(X=0 \cap Y=1)$$

Entonces X e Y no son indep.

→

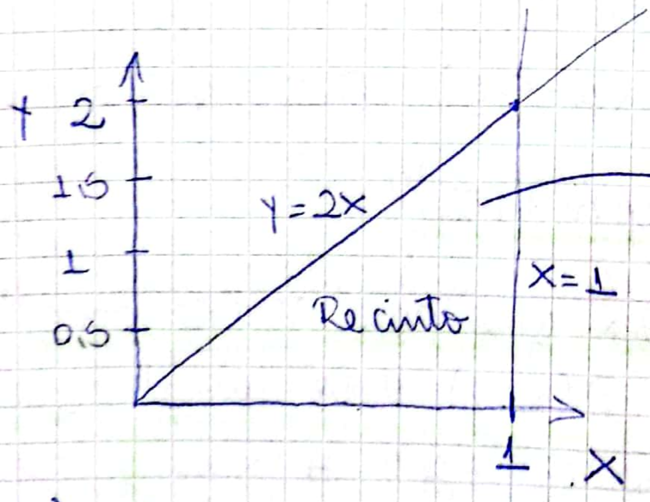
• Variables aleatorias bidimensionales $\boxed{\text{continuas}}$.

Ejemplo:

Sean "X" e "Y" dos variables aleatorias continuas. Su función de densidad conjunta $f(X,Y)$ se encuentra distribuida uniformemente en el sig. recinto.

$$f(X,Y) = \begin{cases} 1 & 0<X<1 \\ & 0<Y<2X \\ 0 & \text{Otro } X,Y \end{cases}$$

Gráfico:



Volumen = 1.
↓ por ser 2 variables.

A) Calcular la prob. de que X sea mayor a 0,5 y que Y sea mayor o igual a 1.

2 formas:

1. $P(X>0{,}5\ ,\ Y\geq 1) = \int_{x=0{,}5}^{x=1} \int_{y=1}^{y=2x} (1)\, dy\, dx$

↓ + recomendada

integrar primero por la que tiene la variable.

es la función de densidad conjunta

$$= \int_{x=0{,}5}^{x=1} (2x-1)\, dx$$

$$= 0{,}25.$$

→

2° Con geometría:

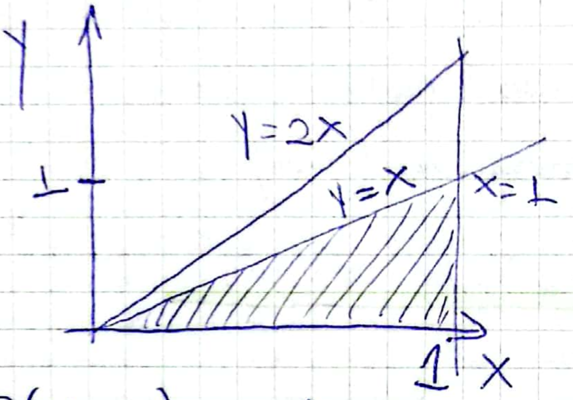
$P(X > 0{,}5 \,,\, Y \geqslant 1) = \text{Sup. del } \Delta \cdot \text{Altura}$

$= [(b \cdot h)/2] \cdot 1 \qquad f(x,y)$

$= [(0{,}5 \cdot 1)/2] \cdot 1$

$= 0{,}25$

B) Calcular la prob. de que Y sea menor a X.



$P(Y<X) = \text{Volumen}$.

- Si decido integrar primero respecto de Y:

$$P(Y<X) = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} 1 \, dy \, dx = 0{,}5$$

- Si decido integrar primero respecto de X:

$$P(X<Y) = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} 1 \, dx \, dy = 0{,}5.$$

c) Calcular la función densidad marginal de X y de Y.

- Rango de X → $0<x<1$

$$f(X=x) = \int_{y=0}^{y=2x} 1 \, dy = 2x^2$$

$$f(X=x) = \begin{cases} 2x^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

- Rango de Y → $0 < y < ②$ → $2 \cdot \underset{\text{de } x}{1} = 2$

$$f(Y=y) = \int_{x=y/2}^{x=1} 1 \, dx = 1 - y/2 \qquad f(Y=y) = \begin{cases} 1 - y/2 & 0<y<2 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Familia de funciones densidad condicionales X e Y:

→ $f(X/Y=y) = f(X=x, Y=y) / f(Y=y$
X es la variable, Y es el parámetro.

→ $f(Y/X=x) = f(X=x, Y=y) / f(X=x)$
Y es la variable, X es el parámetro.

(Apuntes de clase)

$\boxed{\text{modelo bivariante:}}$ → 2 variables involucradas.

V.A. continuas $\begin{cases} X = \text{Peso de las manzanas (grs)} \\ Y = \text{Diámetro de las manzanas (cm)} \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} f(x) \\ f(y) \end{matrix}\right\}$ función de densidad conjunta
$f(x,y)$

V.A. discretas $\begin{cases} X = \text{\# de piezas defectuosas de la máquina "A"} \\ Y = \text{\# de piezas defectuosas de la máquina "B"} \end{cases}$

$P(x,y)$ → función de probabilidad conjunta.

Ejercicio. → DISCRETAS

En cierta fábrica se trabaja con dos líneas de producción que manufactura artículos a pequeña escala. La capacidad de producción es de 2 art. para la línea 1, y 3 para la línea 2, siendo X e Y las V.A. que representan a la cant. de art. producidos por las líneas 1 y 2 respectivamente y cuya función de prob. conjunta es: →

NOTA

→ Func. de prob. marginal

X \ Y	0	1	2	3	P(X=x)
0	0	0,04	0,02	0,09	0,15
1	0,02	0,14	0,21	0,14	0,51
2	0,07	0,06	0,07	0,14	0,34
P(Y=y)	0,09	0,24	0,30	0,37	1

↳ Func. de prob. marginal

X = # de art. producidos por la línea 1. X = 0, 1, 2

Y = # de art. producidos por la línea 2. Y = 0, 1, 2, 3

$P(X=x) \rightarrow$ func. marginal de X.

$P(Y=y) \rightarrow$ func. marginal de Y.

A) ¿Cuál es la prob. de que se fabriquen 2 art. en la línea 1 y 1 en la línea 2?

$P(X=2 \cap Y=1) = P(X=2; Y=1) = \boxed{0,06}$

B) ¿Cuál es la prob. de que la línea 1 produzca a lo sumo 1 artículo y la línea 2 produzca por lo menos 2?

$P(X \leq 1 ; Y \geq 2) = \underbrace{0,02 + 0,09}_{X \leq 1 \cap Y \geq 2} + \underbrace{0,21 + 0,14}_{X=1 \cap Y \geq 2} = 0,46$

C) Calcular la prob. de que la línea 1 produzca más que la línea 2

$P(X > Y) = P(X=1 ; Y=0) + P(X=2 ; Y=0) + P(X=2 ; Y=1)$

$= 0,02 + 0,07 + 0,06$

$= 0,15$

→

D) Hallar las funciones de probabilidad marginales.

$$P(X=x)=\begin{cases} 0,15 & x=0 \\ 0,51 & x=1 \\ 0,34 & x=2 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

$$P(Y=y)=\begin{cases} 0,09 & x=0 \\ 0,24 & x=1 \\ 0,3 & x=2 \\ 0,34 & x=3 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

E) Calcular la prob. de que se produzcan en total más de 4 art.

$P(X+Y>4) \rightarrow x=2 \cap y=3$

F) Si la línea I produjo menos de 2 art. ¿Cuál es la prob. de que se produzcan 2 art.?

$P(X+Y=2 / X<2)$

G) ¿Son independientes las variables X e Y?

$P(X, Y) = P(X) . P(Y)$

$P(X/Y) = P(X)$

$P(Y/X) = P(Y)$

$\underbrace{P(X=0 ; Y=0)}_{P(X=0 \cap Y=0)\ 0} = P(X=0) . P(Y=0)$

$0 \neq 0,15 . 0,09$

$\therefore$ X e Y **no** son independientes. $\rightarrow$

NOTA

Escaneado con CamScanner

Ejercicio → CONTINUAS

En ciertas barras de cereal la proporción de avena es una variable x y la proporción de copos de arroz es una variable y, tales que la función densidad conjunta:

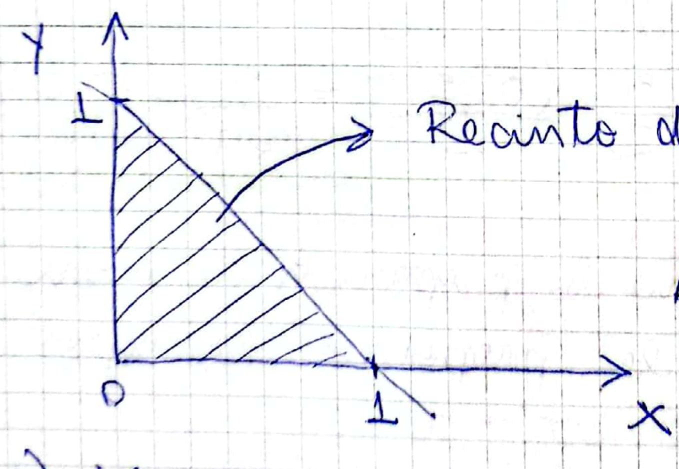
Recinto

$$f(x,y) = \begin{cases} 60x^2y & \boxed{\begin{array}{l} \text{si } 0<x<1 \\ \text{si } 0<y<1-x \end{array}} \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Volumen bajo la curva

x = proporción de avena de las barras de cereal

y = proporción de copos de arroz de las barras de cereal



→ Recinto de $f(x,y)$

Volumen = 1
↓
Área de la figura · $\underbrace{h}_{\text{fdp (si el f... es constante)}}$ = 1 techo

A) X e Y, ¿son independientes?

Serán independientes si se cumplen 2 condiciones:

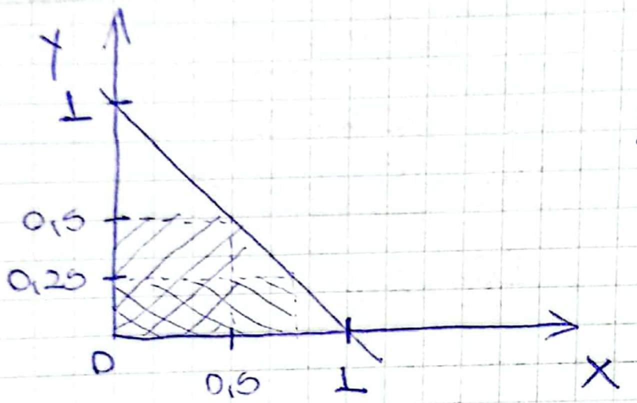
- El recinto debe ser rectangular.
- $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$

∴ en este caso, X e Y no son independientes ya que el recinto no es rectangular →

B) Hallar la prob. de que la proporción de avena sea menor a 0,5 y la proporción de copos de arroz sea menor a 0,25.

$$P(X<0{,}5 \cap Y<0{,}25) = \int_{y=0}^{y=0{,}25} \int_{x=0}^{x=0{,}5} 60x^2 y \, dx \, dy$$

$$= 0{,}078$$



CA:

$$60Y \cdot \int_{x=0}^{x=0{,}5} x^2 \, dx = 60 \cdot Y \, \frac{(0{,}5)^3}{3}$$

$$60 \cdot \frac{(0{,}5)^3}{3} \cdot \int_{y=0}^{y=0{,}25} Y \, dy = \frac{5}{2} \cdot \frac{(0{,}25)^2}{2} = \frac{5}{64} = 0{,}078$$

c) Hallar la prob. de que la proporción de avena sea mayor a 0,5 si la proporción de copos de arroz es menor a 0,25.

$$P(X>0{,}5 / Y<0{,}25) = \frac{P(X>0{,}5 \cap Y<0{,}25)}{P(Y<0{,}25)}$$

Se debe obtener el marginal de y para resolver (por la desigualdad)

Funciones marginales:

$$f(x) = \int f(X,Y) \, dy$$

$$f(y) = \int_{x}^{1} f(X,Y) \, dx$$

NOTA

$$P(y<0{,}25) = \int_{y=0}^{y=0{,}25} \underbrace{\int_{x=0}^{x=-y+1} 60x^2 y \, dx}_{f(y)} \, dy$$

- marginal de y:

$$f(y) = \int_{x=0}^{x=-y+1} 60x^2 y \, dx = 60y \int_{x=0}^{x=-y+1} x^2 \, dx$$

$$= 60y \cdot \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^{-y+1} \right] = 60y \cdot \frac{(-y+1)^3}{3}$$

$$f(y) = \begin{cases} 60y \cdot \frac{(-y+1)^3}{3} & \text{si } 0<y<1 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

- marginal de x:

$$f(x) = \int_{y=0}^{y=-x+1} 60x^2 y \, dy$$

$$= 60x^2 \cdot \int_{y=0}^{y=-x+1} y \, dy = 60x^2 \cdot \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{-x+1} \right)$$

$$= 60x^2 \cdot \frac{(-x+1)^2}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 60x^2 \cdot \frac{(-x+1)^2}{2} & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Funciones condicionales:

- $f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\text{Conjunto}}{\text{marginal}}$

- $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$

Del ejercicio:

X es V.A.

- $f(x/y) = \frac{\cancel{60}x^2\cancel{y}}{\cancel{60}\cancel{y}\cdot\frac{(-y+1)^3}{3}} = \frac{x^2}{\frac{(-y+1)^3}{3}} = \frac{3x^2}{(-y+1)^3}$

y es parámetro (constante)

$$f(x/y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{(-y+1)^3} & 0 < x < -y+1 \text{ con } y\,(0,1) \rightarrow \text{el rango de } f(y) \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

- $f(y/x) = \frac{60x^2y}{60x^2\,\frac{(-x+1)^2}{2}} = \frac{y}{\frac{(-x+1)^2}{2}} = \frac{2y}{(-x+1)^2}$

$$f(y/x) = \begin{cases} \frac{2y}{(-x+1)^2} & 0 < y < -x+1 \text{ con } x\,(0,1) \rightarrow \text{el rango de } f(x) \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

c) Hallar la prob. de que la proporción de avena sea mayor a 0,5 si la proporción de copos de arroz fue de 0,26.

→

Válidos solo para este caso donde el parámetro (que acá es "y") está igualado a un valor específico ya que en continuas la igualación a un valor específico es cero, y no serviría para este caso.

Pasos:

1) Calcular $f(x/y)$
2) Calcular $f(x/y=0{,}25)$
3) Resolver la integral.

$P(x>0{,}5 / y=0{,}25)$

1) ya tenemos $f(x/y)$, entonces:

2) $f(x/y=0{,}25) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{(-0{,}25+1)^3} & 0<x<-0{,}25+1 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$

$f(x/y=0{,}25) = \begin{cases} \dfrac{64}{9}x^2 & \text{si } 0<x<0{,}75 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$

3) $P(x>0{,}5 / y=0{,}25) =$

$$\int_{x=0{,}5}^{x=0{,}75} \frac{64}{9}x^2\,dx = 0{,}704$$

7/9

ya no se puede usar el celu en el examen.
Descargar las tablas.

Ejercicio

"X" es una V.A. que representa la cant. de votos que puede obtener el candidato A, mientras que la V.A. "y" representa a la cant de votos que puede obtener el candidato B, ambas expresadas en proporciones y cuya función de densidad conjunta es: →

$$f(x,y) = \begin{cases} 6y & \text{si } 0 < x < 1 \\ & \text{si } 0 < y < 1 - x \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

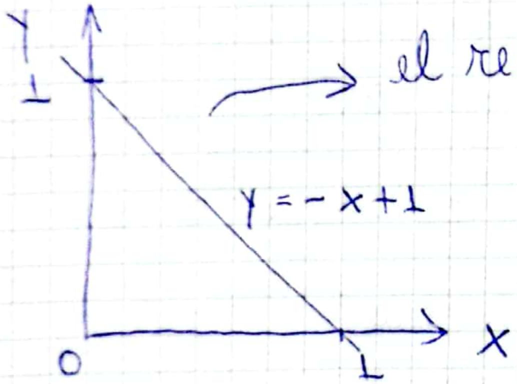
X = prop. de votos del cand. A

Y = prop. de votos del cand. B

A) Son independientes? (X e Y)

Independencia (para V.A. bidi. continuas)

- Recinto rectangular
- $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$



→ el recinto es triangular. entonces **no** son indep.

Marginales de X e Y

- $f(x) = \int_{y=0}^{y=-x+1} 6y \, dy = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}} y^2 \Big|_{y=0}^{y=-x+1} = 3(-x+1)^2$

Para saber que está bien, la integral de esto entre 0 y 1 me debe dar 1.

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cdot (-x+1)^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

mirando el gráfico.

- $f(y) = \int_{x=0}^{x=-y+1} 6y \, dx$) o viendo el gráfico

$= 6y \, x \Big|_{x=0}^{x=-y+1}$

$= 6y(-y+1)$

$= -6y^2 + 6y$] → cualquiera de las dos opciones está bien, aunque sirve + la factorizada para cancelar en cálculos varios

$$f(y) = \begin{cases} 6y(-y+1) & 0<y<1 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

- $$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

$$= \frac{\cancel{6y}}{\cancel{6y}(-y+1)} = \frac{1}{(-y+1)}$$

$$f(x/y) = \begin{cases} \frac{1}{-y+1} & 0<x<-y+1 \text{ con } y(0,1) \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

V.A.

constante o parámetro

y de ahí se saca el rango (pero no es numérico)

Es como el de la integral de $f(y)$

- $$\mu_x = \int_{x=0}^{x=1} x \cdot f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=1} x \cdot [3 \cdot (-x+1)^2]\,dx$$

$$\boxed{\mu_x = 0{,}25}$$

→ En promedio, el cand. A obtendrá el 25% de los votos

→ O en media

se usa esto + el porcentaje por tratarse x e y de proporciones

- $$\mu_y = \int_{y=0}^{y=1} \cancel{x} \cdot [6y \cdot (-y+1)]\,dy = 0{,}5$$ → En promedio, el 50% de los votos serán para el cand. B

→

medias:

- $M_x = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x)\, dx$ = Res es un n° $(M_x \,,\, M_y)$

- $\boxed{M_{x/y}} = \int_{x=}^{x=} x \cdot f(x/y)\, dx$ = Res. es una expresión $(M_{x/y} \,,\, M_{y/x})$

Línea o curva de regresión → También $M_{y/x}$

tengo que usar los límites de $f(x/y)$

$$M_{x/y} = \int_{x=0}^{x=-y+1} x \cdot \left[\frac{1}{-y+1}\right] dx$$

$$= \left(\frac{1}{-y+1}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{-y+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{-y+1}}\right) \cdot \left[\frac{(-y+1)^{\cancel{2}}}{2}\right]$$

Explicación:

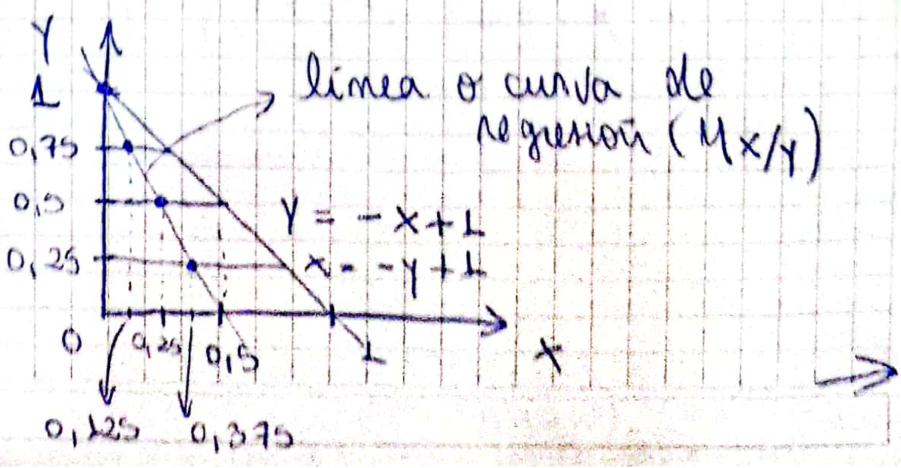
$M_{x/y} = \dfrac{-y+1}{2}$ → cada vez que le demos un valor a la proporción de votos del cand. B (y) conocemos aprox. en promedio o la media la prop. de votos del cand. A

% del cand. B.

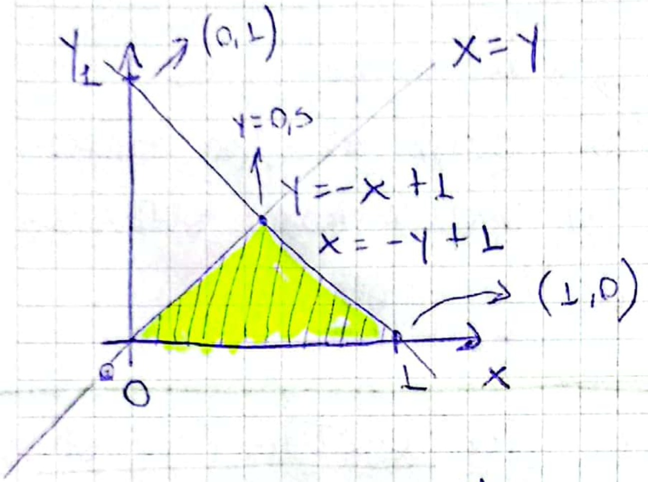
y	$M_{x/y}$
0	0,5
0,25	0,375
0,5	0,25
0,75	0,125
1	0

→ Si el cand B no obtuvo votos en promedio el cand. A obtuvo el 50%

Si el cand. B obtiene el 75% de los votos, se espera que el cand. A obtenga el 12.5% en prom.



¿Cuál es la prob. de que el cand. A le gane al cand. B? $\rightarrow$ $P(x>y)$



en $\underset{x\ \ y}{(1,0)} \rightarrow 1>0$

en $\underset{x\ \ y}{(0,1)} \rightarrow 0>1 \rightarrow$ NO

Como la conjunta no es una constante (en vez de 6y, 6 por y) no puedo usar en este caso cálculos geométricos.

Forma 1:

1) $$P(x>y) = \int_{y=0}^{y=0,5}\int_{x=y}^{x=-y+1} 6y\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=0,5} 6y(-2y+1)\,dy$$

$$= 0,25$$

Forma 2:

2) $$P(x>y) = \int_{x=0}^{x=0,5}\int_{y=0}^{y=x} 6y\,dy\,dx + \int_{x=0,5}^{x=1}\int_{y=0}^{y=-x+1} 6y\,dx = 0,25$$

1) CA: $$6y\int_{x=y}^{x=-y+1} dx = 6y\left[x\Big|_{x=y}^{x=-y+1}\right] = 6y\left[(-y+1)-y\right]$$
$$= 6y(-2y+1)$$

2) En este caso son 2 integrales dobles porque mirando el gráfico el barrido vertical desde y=0 hasta arriba se choca en un tramo con $x=y$ y en el otro con $x=-y+1$ $\rightarrow$

Tarea: (son de condicionales)

1) Si el cand. A obtuvo el 40% de los votos, ¿cuál es la prob. de que el cand. B haya obtenido a lo sumo el 30%?

2) Si el cand. B obtuvo a lo sumo el 33% de los votos ¿cuál es la prob. de que el cand. A haya obtenido a lo sumo un 25% de los votos?

---

3 casos donde se va a tener que construir (nosotros) la f.d conjunta y/o f. prob. conjunta

CASO 1: Suponemos independencia

Ejercicio

Dos automovilistas, x e y, realizan un viaje donde la duración de los viajes se comportan como estas dos distribuciones respec.

$x \sim U(30;50)$ $\quad$ $y \sim U(20;50)$

A) Cuál es la prob. de que x llegue primero?

x = duración del viaje de x (min)

y = duración del viaje de y (min).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 30 < x < 50 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 20 < y < 50 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

→ si fueran normales, usábamos la prop. de diferencia de normales. no es este el caso.

A) $P(X < Y)$

→ lo asumo, ya que no hay más info.

• Si X e Y son independientes:

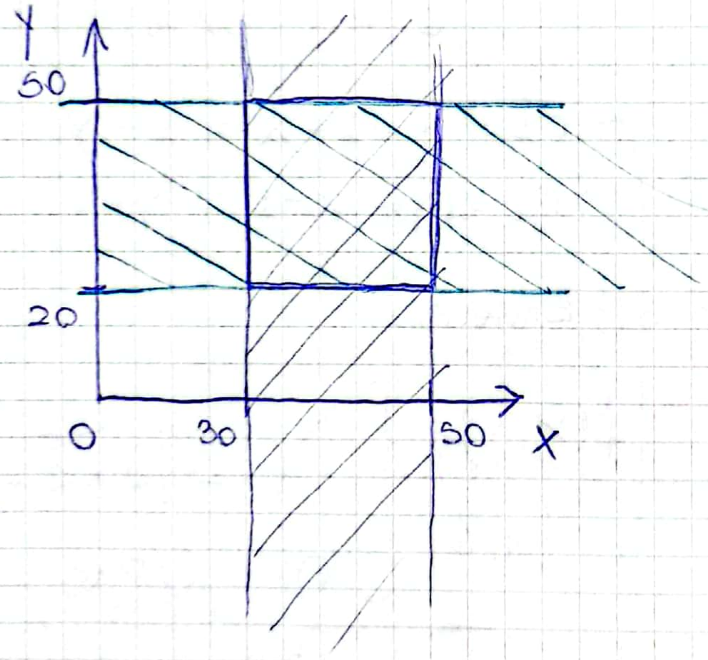
$f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(x,y) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{30}$

$f(x,y) = \frac{1}{600}$

los tomé de $f(x)$ y $f(y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{600} & 30 < x < 50 \\ & 20 < y < 50 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$



Para verificar, la integral doble debe dar 1

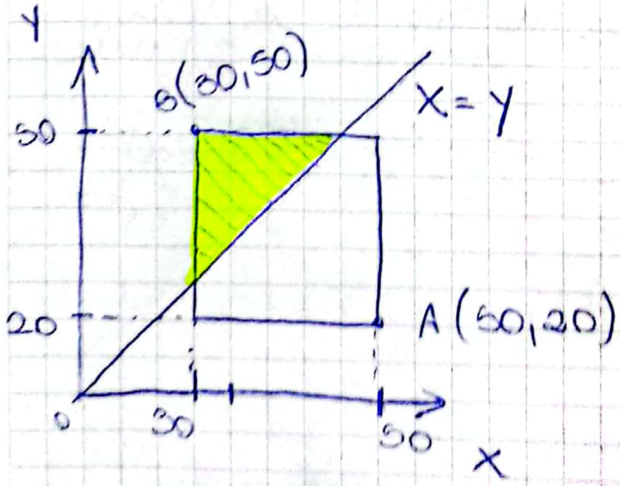
• $\int_{x=30}^{x=50} \int_{y=20}^{y=50} 1/600 \, dy\,dx =$

• O bien, con cálculo geométrico del volumen:

$V = A_{\square} \cdot h$

$V = (20 \cdot 30) \cdot \frac{1}{600}$

$V = 1$



A) $P(X<Y)$ ⟶ $P(X<Y) = A_{\triangle} \cdot h$

$= \frac{(50-30) \cdot (50-20)}{2} \cdot \frac{1}{600}$

$= \boxed{\frac{1}{3}}$ →

(A) $50 < 20$? NO

(B) $30 < 50$? SI

Escaneado con CamScanner

CASO 2: tengo el recinto y la $f(x,y)$ es constante

↳ porque el "techo" es una constante

Ejercicio:

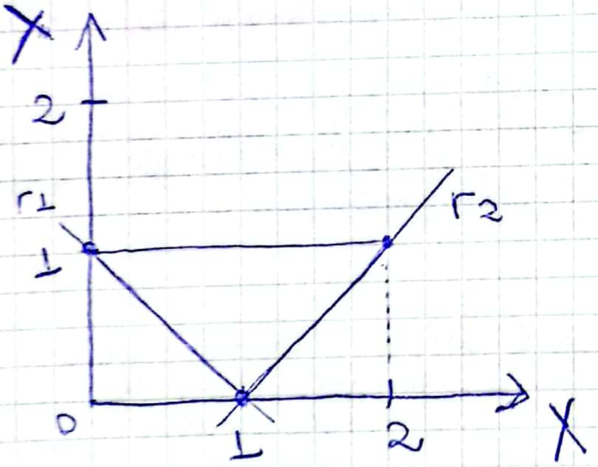
Dado el triángulo T en el plano cuyos vértices son $(1,0)$, $(0,1)$ y $(2,1)$

Las V.A. X e Y están distribuidas uniformemente sobre el plano T.

$X = \dots$

$Y = \dots$

$$f(x,y) = \begin{cases} K & 0<y<1 \\ & r_1 < x < r_2 \\ & \text{(recta 1)} \quad \text{(recta 2)} \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$



$r_1 = y = 1 - x = 1 - \cancel{y}$

$r_2 = y = x - 1 = y + 1$

Entonces:

$$f(x,y) = \begin{cases} K & 0<y<1 \\ & 1-y < x < y+1 \\ 0 & \text{Otros} \end{cases}$$

↳ Ecuación de la recta conociendo 2 puntos:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$V_T = 1$

$A_{\triangledown} \cdot h = 1$

$\frac{2 \cdot 1}{2} \cdot k = 1$

$\boxed{k = 1}$

CASO 3:

Ejercicio:

Sea X una V.A. continua que representa un nº aleatorio entre 2 y 4. Sea Y/X una V.A. continua que representa un nº seleccionado al azar entre 1 y x. Se toma el doble de x como base de un rectángulo y la tercera parte de y como altura. →

NOTA

IMPORTANTE (uniformidad) hace referencia a equiprobabilidad en rangos o intervalos iguales

X = un nº aleatorio entre 2 y 4. $f(x)$

Y/X = " " " 1 y x. $f(y/x=x)$

$X \sim U(2;4)$

$Y/x \sim U(1;x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 2<x<4 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

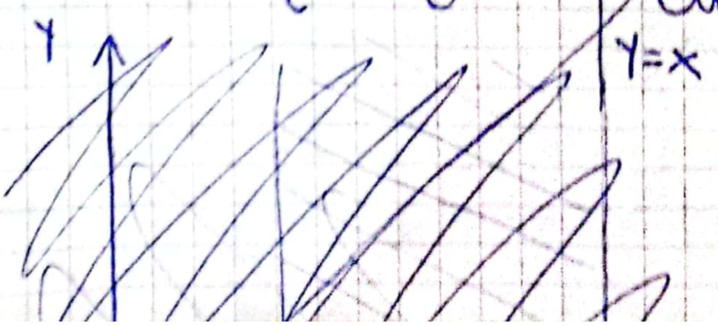
$$f(y/x=x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & 1<y<x \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$ (teniendo en cuenta que $2<x<4$)

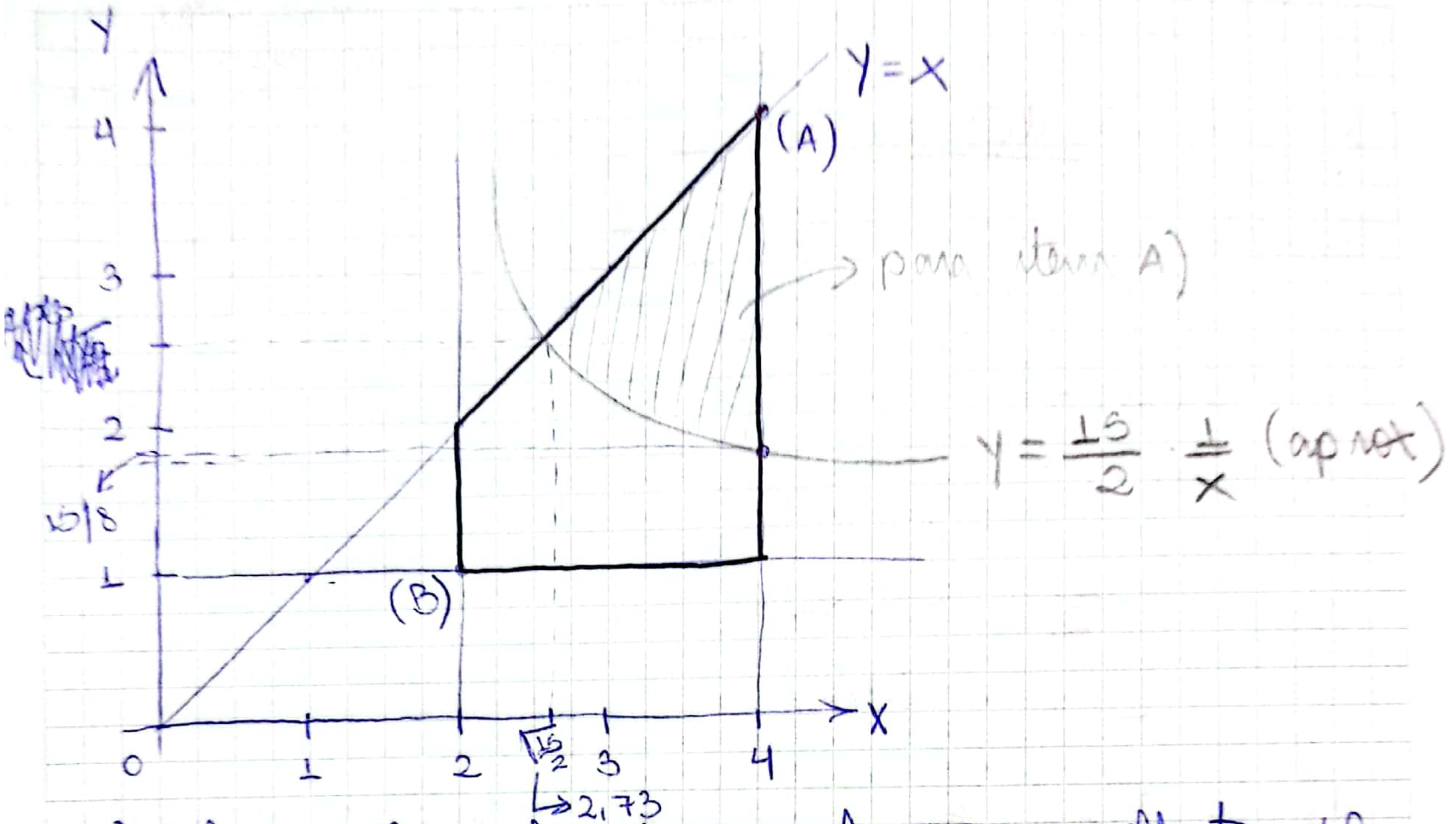
- $f(y/x=x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)} \Rightarrow f(x,y) = f(y/x=x) \cdot f(x)$

↳ esto es lo que queremos buscar

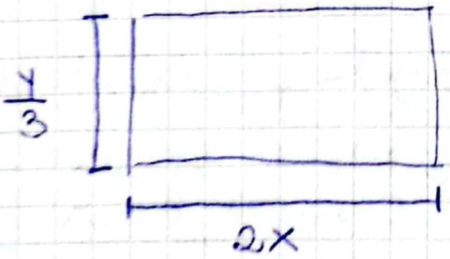
$f(x,y) = \dfrac{1}{x-1} \cdot \dfrac{1}{2}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2.(x-1)} & 2<x<4 \\ & 1<y<x \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$





A) Calcular la prob. de que el área resultante del rectángulo sea mayor a 5.



Área = b.h = $2X \cdot \frac{Y}{3} = \frac{2}{3} X \cdot Y$

puntos del gráfico
(A) $4 > \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{4}$? SÍ
(B) $1 > \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2}$? NO

H = área del rectángulo

$H = \varphi(X, Y) = \frac{2}{3} X Y$

$P(H > 5) = P\left(\frac{2}{3} X Y > 5\right)$

$= P\left(Y > \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{X}\right)$

(*)

- $Y = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{8}$
- $\begin{cases} Y = X \\ Y = \frac{15}{2X} \end{cases}$

$X = \frac{15}{2X}$

$X^2 = \frac{15}{2}$

$X = \sqrt{\frac{15}{2}}$

(sigue) →

(*) $= \int_{x=2,73}^{x=4} \int_{y=\frac{15}{2x}}^{y=x} \frac{1}{2(x-1)}\, dy\, dx$ → en el parcial, dado que piden una integral tan complicada, con este planteo suficiente

La integral contraria sería:

$$= \int_{y=\frac{15}{8}}^{y=2,73} \int_{x=\frac{15}{2y}}^{x=4} \frac{1}{2(x-1)}\, dx\, dy + \int_{y=2,73}^{y=4} \int_{x=y}^{x=4} \frac{1}{2(x-1)}\, dx\, dy$$

Para encontrar $f(y)$, sería por partes (en este caso se resuelven 2 integrales). En c/integral, los valores de x del rango cambian porque tenemos en el gráfico □ y △.

B) Calcular el valor medio del área del rectángulo.

Me pide μ_H.

$$\mu_H = \int_{-\infty}^{+\infty} H \cdot f(H)\, dH$$

$H = \varphi(x,y)$

Recordando de cambio de variable

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)\, dx$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) \cdot f(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=2}^{x=4} \int_{y=1}^{y=x} \frac{2}{3} x y \cdot \frac{1}{2(x-2)}\, dy\, dx$$

C) Calcular la media condicional de y/x

$$\mu_{y/x} = \int_{y=1}^{y=x} y \cdot f(y/x)\, dy$$

$$= \int_{y=1}^{y=x} y \cdot \frac{1}{x-1}\, dy$$

$f(x,y)$
$f(x)$
$f(y)$
$f(x/y=y)$
$f(y/x=x)$ →

O bien, por tratarse $f(Y/X)$ de (algo) con distribución uniforme, sin resolver ninguna integral:

$$\mu_{Y/X} = \frac{x+1}{2}$$