凸透镜成像规律的严格证明

我们都知道，凸透镜有如下表的成像规律(应用略)：

物距 (u)	像距 (v)	正倒	大小	虚实
$u>2f$	$f<v<2f$	倒立	缩小	实像
$u=2f$	$v=2f$	倒立	等大	实像
$f<u<2f$	$v>2f$	倒立	放大	实像
$u=f$	——	——	——	不成像
$u<f$	$v>f$	正立	放大	虚像

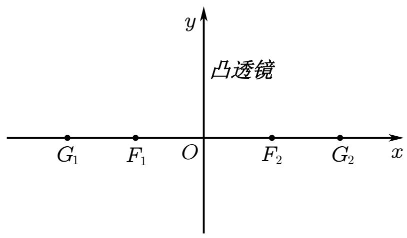

图1

下面，我们把它抽象在一个平面中. 如图1，坐标系的 y 轴代表凸透镜，x 轴为凸透镜的主光轴，点 O 是凸透镜的光心，F_1，F_2 是凸透镜的两个焦点，G_1，G_2 是凸透镜的两个二倍焦点处.

1 证明部分

首先，我们规定：$F_1(-f,0)$，$F_2(f,0)$，$G_1(-2f,0)$，$G_2(2f,0)$.

1.1 当 $u>2f$ 时的情况

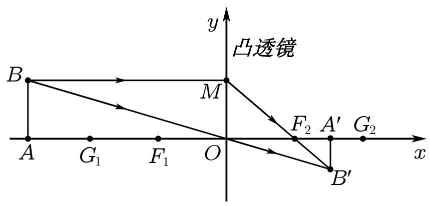

图2

如图2，AB 是物体，且 $A(m,0)$，$B(m,n)$，$B-M-B'$ 是平行于 x 轴的一条入射光线，交 y 轴于点 $M(0,n)$，$B-O-B'$ 是过光心的光线，两条光线交于点 B'，得到点 A 的像 A' (注：上述点的坐标，在讨论其他情况时相同，后面不再说明).

由于 BM 和 MB' 都是直线，于是可设折线 l_1：$B-M-B'$：$y=\begin{cases} n, & m\leqslant x<0 \\ ax+b, & x\geqslant 0 \end{cases}$，则 $\begin{cases} b=n \\ af+b=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=-\dfrac{n}{f} \\ b=n \end{cases}$.

所以 l_1：$y=\begin{cases} n, & m\leqslant x<0 \\ -\dfrac{n}{f}x+n, & x\geqslant 0 \end{cases}$. 同理，设直线 l_2：BB'：$y=ax+b$，则 $\begin{cases} am+b=n \\ b=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\dfrac{n}{m} \\ b=0 \end{cases}$，所以 l_2：$y=\dfrac{n}{m}x$.

由于点 B' 是 l_1 与 l_2 的交点，设 $B'(a,b)$，则 $\begin{cases} -\dfrac{n}{f}a+n=b \\ \dfrac{n}{m}a=b \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\dfrac{mf}{m+f} \\ b=\dfrac{nf}{m+f} \end{cases}$，即 $B'\left(\dfrac{mf}{m+f},\dfrac{nf}{m+f}\right)$. 于是，我们提出下面的命题：$\forall m\in(-\infty,-2f)$，$x_{B'}\in(x_{F_2},x_{G_2})$. 即如果 $m<-2f<0$，那么 $f<\dfrac{mf}{m+f}<2f$.

由不等式的性质可知，$f<\dfrac{mf}{m+f}<2f\Leftrightarrow 1<\dfrac{m}{m+f}<2\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{m}{m+f}>1\Leftrightarrow m<m+f\Leftrightarrow f>0 \\ \dfrac{m}{m+f}<2\Leftrightarrow m>2m+2f\Leftrightarrow m+2f<0 \end{cases}$，上面二式显然成立. □

所以，$f<v<2f$ 成立.

1.2 当 $u=2f$ 时的情况

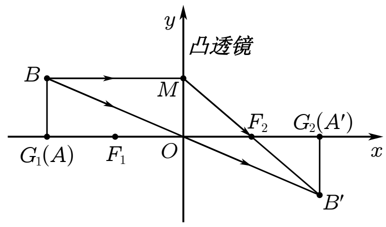

图3

如图3，点 A 与点 G_1 重合，所以此时 $A(-2f,0)$，$B(-2f,n)$．由1.1可知，$B'\left(\dfrac{mf}{m+f},\dfrac{nf}{m+f}\right)$，令 $m=-2f$，代入得 $B'(2f,-n)$，又 $G_2(2f,0)$，所以 $v=2f$ 成立．

1.3 当 $f<u<2f$ 时的情况

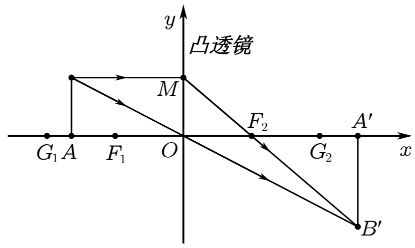

图4

如图4，点 A 在线段 G_1F_1 上，由1.1可知，$B'\left(\dfrac{mf}{m+f},\dfrac{nf}{m+f}\right)$．于是，我们提出下面的命题：$\forall\, m\in(-2f,-f), x_{B'}\in(x_{G_2},+\infty)$．即如果 $-2f<m<-f<0$，那么 $\dfrac{mf}{m+f}>2f$．

仿照1.1的证明方式，易得 $\dfrac{mf}{m+f}>2f\Leftrightarrow\dfrac{m}{m+f}>2\Leftrightarrow m<2m+2f\Leftrightarrow m+2f>0$，这是显然成立的． □

所以，$v>2f$ 成立．

1.4 当 $u=f$ 时的情况

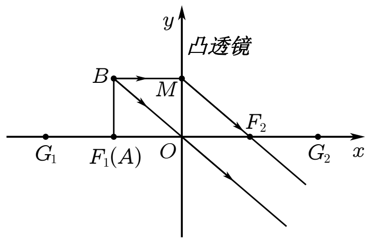

图5

如图5，点 A 与点 F_1 重合，所以此时 $A(-f,0)$，$B(-f,n)$．由1.1可知，$l_1\colon y=-\dfrac{n}{f}x+n$，$l_2\colon y=\dfrac{n}{m}x$，令 $m=-f$，代入得 $l_1\colon y=-\dfrac{n}{f}x+n$，$l_2\colon y=-\dfrac{n}{f}x$．可以发现，$l_1$ 与 l_2 的斜率都是 $-\dfrac{n}{f}$，所以 l_1,l_2 与 x 轴的夹角都是 $\arctan\left(-\dfrac{n}{f}\right)$．所以，$l_1 /\!/ l_2$．由此得出，此时点 B' 不存在；l_1 与 l_2 之间的距离不变，因此光斑的大小也不变．

1.5 当 $0<u<f$ 时的情况

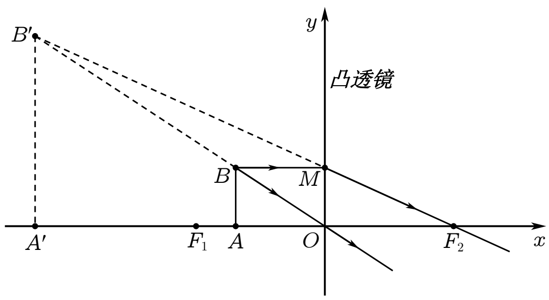

图6

如图6，点 A 在线段 OF_1 上，由1.1可知，$B'\left(\dfrac{mf}{m+f},\dfrac{nf}{m+f}\right)$．于是，我们提出下面的命题：$\forall\, m\in(-f,0), x_{B'}\in(-\infty,-f)$．即如果 $-f<m<0$，那么 $\dfrac{mf}{m+f}<m$．

再次仿照1.1的证明方式，可得 $\dfrac{mf}{m+f}<m\Leftrightarrow\dfrac{f}{m+f}>1\Leftrightarrow f>m+f\Leftrightarrow m<0$，与已知条件符合． □

所以 $v>f$ 成立．

综上所述，凸透镜成像规律证毕．

2　其它问题

对于凸透镜的成像，还有一些问题需要研究，接下来我们逐一地探讨.

2.1　光斑面积的变化

(1) 当$u>f$时，光斑的面积S有什么变化？

这里光斑的面积是指直线l: $x=k(k\geqslant m)$ 在光线上的圆形截面的面积.

当$m\leqslant k<0$时，l_1和l_2与l的交点分别为(k,n)和$\left(k,\dfrac{nk}{m}\right)$，所以$S=\pi\left(\dfrac{n-\dfrac{nk}{m}}{2}\right)^2=\dfrac{\pi n^2(m-k)^2}{4m^2}$；当$k\geqslant 0$时，$l_1$和$l_2$与$l$的交点分别为$\left(k,-\dfrac{nk}{f}+n\right)$和$\left(k,\dfrac{nk}{m}\right)$，所以$S=\pi\left(\dfrac{\left|-\dfrac{nk}{f}+n-\dfrac{nk}{m}\right|}{2}\right)^2=\dfrac{\pi(mnk+nkf-mnf)^2}{4f^2m^2}$. 综上所述，可以得出结论：$S=\begin{cases}\dfrac{\pi n^2(m-k)^2}{4m^2}, & m\leqslant k<0\\ \dfrac{\pi n^2(mk+kf-mf)^2}{4f^2m^2}, & k\geqslant 0\end{cases}$. 当$k=m$或$k=\dfrac{mf}{m+f}$时，$S$有最小值0；当$k=0$时，$S$有最大值$\dfrac{\pi n^2}{4}$.

特别地，当$u=v=2f$时，$m=-2f$时，$S=\begin{cases}\dfrac{\pi n^2(-2f-k)^2}{4(-2f)^2}=\dfrac{\pi n^2(k+2f)^2}{16f^2}, & m\leqslant k<0\\ \dfrac{\pi n^2(-2fk+kf+2f^2)^2}{4f^2(-2f)^2}=\dfrac{\pi n^2(k-2f)^2}{16f^2}, & k\geqslant 0\end{cases}$.

(2) 当$u=f$时，光斑的面积S有什么变化？

由1.4可知，l_1: $y=-\dfrac{n}{f}x+n$，l_2: $y=-\dfrac{n}{f}x$.

l_1，l_2与l的交点分别为$\left(k,-\dfrac{nk}{f}+n\right)$，$\left(k,-\dfrac{nk}{f}\right)$，则$S=\pi\left[\dfrac{\left(-\dfrac{nk}{f}+n\right)-\left(-\dfrac{nk}{f}\right)}{2}\right]^2=\dfrac{\pi n^2}{4}$.

(3) 当$0<u<f$时，光斑的面积S有什么变化？

这里光斑的面积是指直线l: $x=k(k\geqslant m)$ 在光线(包括光线的反向延长线)上的圆形截面的面积.

由 (1) 知，此时$S=\dfrac{\pi n^2(mk+kf-mf)^2}{4f^2m^2}$.

2.2　直线的夹角

(1)l_1与l_2的夹角

设l_1与l_2的夹角为$\theta(u\neq f)$. 由1.1知$B'\left(\dfrac{mf}{m+f},\dfrac{nf}{m+f}\right)$，$M(0,n)$. 则$OM=n$，$OB'=\sqrt{\left(\dfrac{mf}{m+f}\right)^2+\left(\dfrac{nf}{m+f}\right)^2}=\dfrac{f}{m+f}\sqrt{m^2+n^2}$，$B'M=\sqrt{\left(\dfrac{mf}{m+f}\right)^2+\left(\dfrac{nf}{m+f}-n\right)^2}=\dfrac{m}{m+f}\sqrt{f^2+n^2}$. 在$\triangle OB'M$中，由余弦定理，有

$$\cos\theta=\frac{OB'^2+B'M^2-OM^2}{2\cdot OB'\cdot B'M}=\frac{\dfrac{f^2}{(m+f)^2}(m^2+n^2)+\dfrac{m^2}{(m+f)}(f^2+n^2)-n^2}{2\cdot\dfrac{f}{m+f}\sqrt{m^2+n^2}\cdot\dfrac{m}{m+f}\sqrt{f^2+n^2}}=\frac{\sqrt{(mf-n^2)(m^2+n^2)(f^2+n^2)}}{(m^2+n^2)(f^2+n^2)}.$$

则$\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{(mf-n^2)(m^2+n^2)(f^2+n^2)}}{(m^2+n^2)(f^2+n^2)}$.

(2) 入射光线与折射光线的夹角

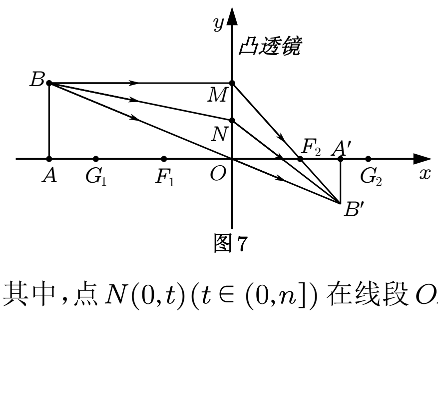

图7

如图7，折线$B-N-B'$是一条光线，其中，点$N(0,t)(t\in(0,n])$在线段OM上，BN是入射光线，NB'是折射光线.

设 BN 与 NB' 的夹角为 θ．仿照 (1) 的方法，不难得到 $BB'=\dfrac{m}{m+f}\sqrt{m^2+n^2}$，$BN=\sqrt{m^2+(n-t)^2}$，$NB'=\dfrac{\sqrt{m^2f^2+(tm+tf-nf)^2}}{m+f}$，则由余弦定理，有

$$\theta=\arccos\frac{BN^2+NB'^2-BB'^2}{2\cdot BN\cdot NB'}=\arccos\frac{m^2+(n-t)^2+\dfrac{m^2f^2+(tm+tf-nf)^2}{(m+f)}-\dfrac{m^2(m^2+n^2)}{(m+f)^2}}{2\cdot\sqrt{m^2+(n-t)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{m^2f^2+(tm+tf-nf)^2}}{m+f}}$$

$$=\arccos\frac{fm^3+f^2m^2+f^2n^2+f^2t^2+m^2t^2+(fn-mt)(mn-2ft)-3fmnt}{(m+f)\sqrt{(m^2+n^2-2nt+t^2)(f^2m^2+f^2n^2+f^2t^2+m^2t^2-2f^2nt+2fmt^2-2fmnt)}}.$$

特别地，当 $t=n$，即点 M 与点 N 重合时，$\theta=\angle BMB'=\arccos\dfrac{f\sqrt{f^2+n^2}}{f^2+n^2}$．

2.3 虚像的成像位置

我们在物理课上知道，当 $0<u<f$ 时，虚像一定比物更远离凸透镜，但是虚像与焦点以及二倍焦点处的位置关系是不定的．下面，我们来讨论 $\dfrac{mf}{m+f}$ 与 $-f$，$-2f$ 的大小关系．

当 $-f\leqslant\dfrac{mf}{m+f}<0$ 时，解得 $-\dfrac{f}{2}\leqslant m<0$；当 $-2f\leqslant\dfrac{mf}{m+f}<-f$ 时，解得 $-\dfrac{2}{3}f\leqslant m<-\dfrac{f}{2}$；当 $\dfrac{mf}{m+f}<-2f$ 时，解得 $m<-\dfrac{2}{3}f$．

$$综上，\frac{mf}{m+f}\in\begin{cases}[-f,0), & m\in\left[-\dfrac{f}{2},0\right), \quad A' 在 OF_1 上\\ [-2f,-f), & m\in\left[-\dfrac{2}{3}f,-\dfrac{f}{2}\right), \quad A' 在 F_1G_1 上\\ (-\infty,-2f), & m\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}f\right), \quad A' 在 G_1 左侧\end{cases}.$$

2.4 透镜成像公式

在光学中，透镜的物距、像距与焦距满足 $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{f}$．我们研究的薄透镜满足这一规律．下面是证明过程．

由 1.1 知，$u=-x_A=-m$，$v=x_{A'}=\dfrac{mf}{m+f}$．则 $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=-\dfrac{1}{m}+\dfrac{m+f}{mf}=\dfrac{-f+m+f}{mf}=\dfrac{1}{f}$，证毕．

至此 $(1.1-2.4)$，我们对凸透镜成像规律已经给出了证明，并解决了一些问题．

3 注

(1) 此问题在 2021.11.30 提出，在 2021.12.5 被完全证明；

(2) 编辑软件：**EduEditer**；

(3) 字数统计：3029 字 $(1.1-2.4)$．