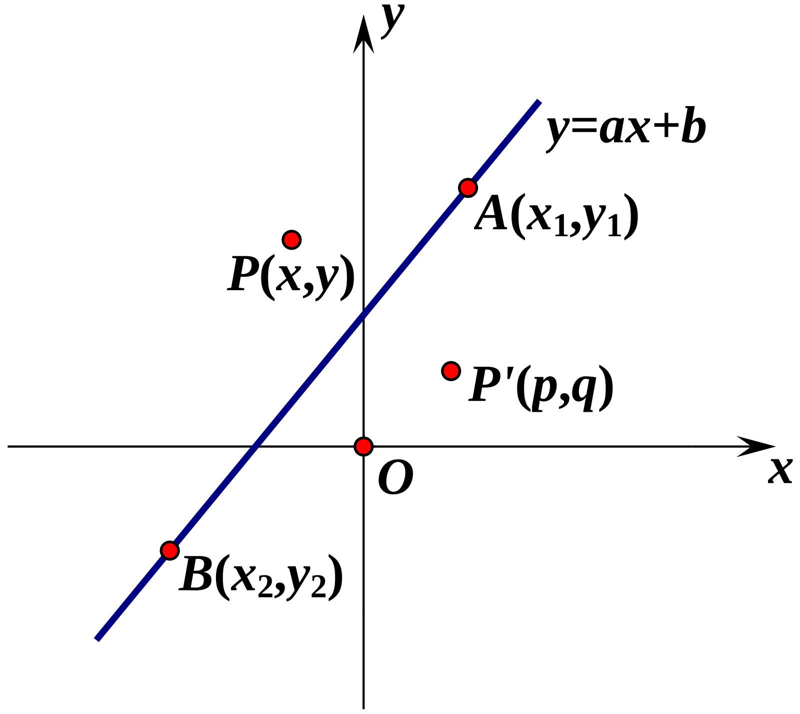
平面中任一点关于任意直线的对称点



问题　如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=ax+b$ 上有两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线外有点 $P(x,y)$.求点 P 关于直线 AB 的对称点 $P'(p,q)$ 的坐标.

解　因为点 A,B 都在直线 $y=ax+b$ 上，所以

$$\begin{cases} ax_1+b=y_1, \\ ax_2+b=y_2. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, \\ b=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}. \end{cases} \quad (*)$$

设直线 AB 交 y 轴于点 M，交 x 轴于点 N，则 $M(0,b),N(-\dfrac{b}{a},0)$.

因为直线 AB 是线段 PP' 的垂直平分线，所以 $MP=MP',NP=NP'$，即

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-b)^2}=\sqrt{p^2+(q-b)^2}, \\ \sqrt{(x+\dfrac{b}{a})^2+y_2}=\sqrt{(p+\dfrac{b}{a})^2+q^2}. \end{cases}$$

把方程组两边平方并展开处理得

$$\begin{cases} p^2+q^2-2bq=x^2+y^2-2by, \ (1) \\ p^2+q^2+\dfrac{2bp}{a}=x^2+y^2+\dfrac{2bx}{a}. \ (2) \end{cases}$$

由(1)得

$$p=\sqrt{x^2+y^2-q^2+2bq-2by}.$$

代入(2)并整理得

$$-(a^2b^2+b^2)q^2+2(b^3+ab^2x+a^2b^2y)q-(a^2b^2y^2+2ab^2xy-b^2y^2+2b^3y)=0.$$

整理得

$$(q-y)[-b^2(a^2+1)q+b^2(a^2y+2ax+2b-y)]=0.$$

解得

$$\begin{cases} q_1=y\ (\text{舍}), \\ q_2=y+\dfrac{2(ax+b-y)}{a^2+1}. \end{cases}$$

另一方面,由(1),我们还可以得到

$$p^2+q^2=x^2+y^2-2by+2bq.$$

代入(2)并整理得

$$p=ay+x-aq=ay+x-a[y+\frac{2(ax+b-y)}{a^2+1}]=x-\frac{2a(ax+b-y)}{a^2+1}.$$

至此,我们得出

$$P'(x-\frac{2a(ax+b-y)}{a^2+1},y+\frac{2(ax+b-y)}{a^2+1}).\ (3)$$

把(*)代入(3) ,即得最终结果.

注 此问题在 2021.9.10 解决,在 2021.9.11 发表 v1.0 版本.本篇文章在 2021.9.12 修订为 v1.1 版本,在 2021.9.24 修订为 v1.2 版本,在 2021.10.2 修订为 v1.3 版本.