Linear algebra

m행 n열, m by n 행렬, m X n 행렬
모든 데이터는 숫자로 되어 있고 이는 길게 벡터로 표현 가능
길게 생긴 벡터 : column vector(열/세로 벡터)
차원을 늘리고 점만 찍으면 됨

Matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

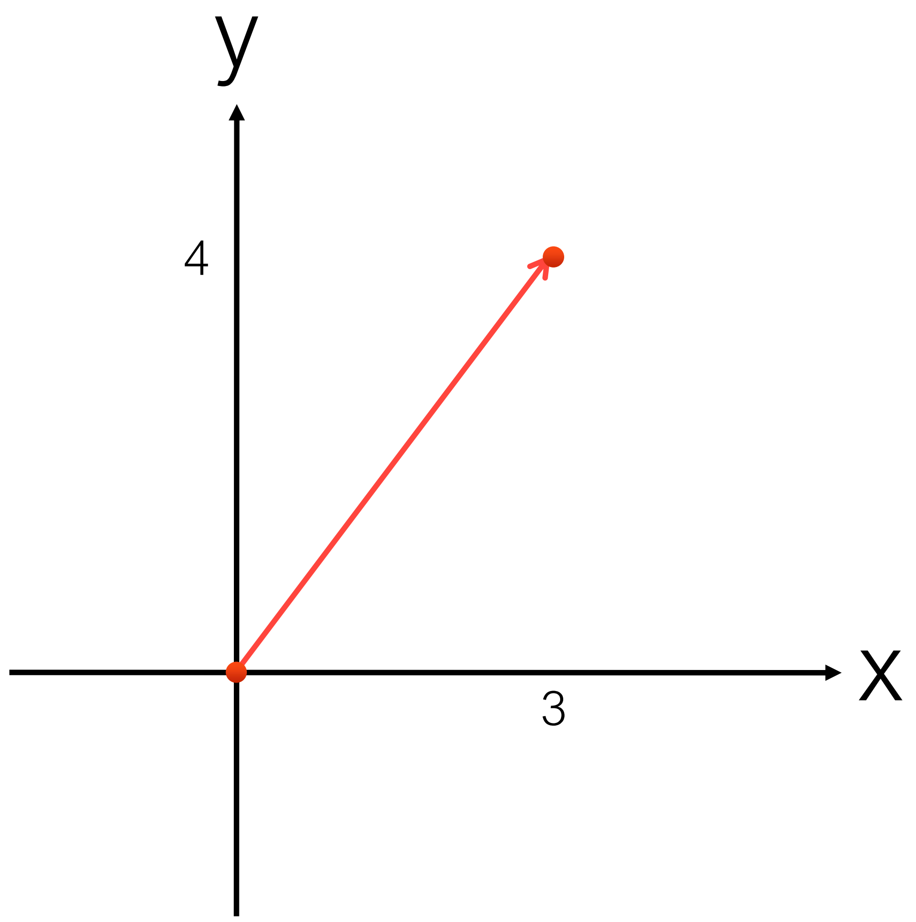
Vectors

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

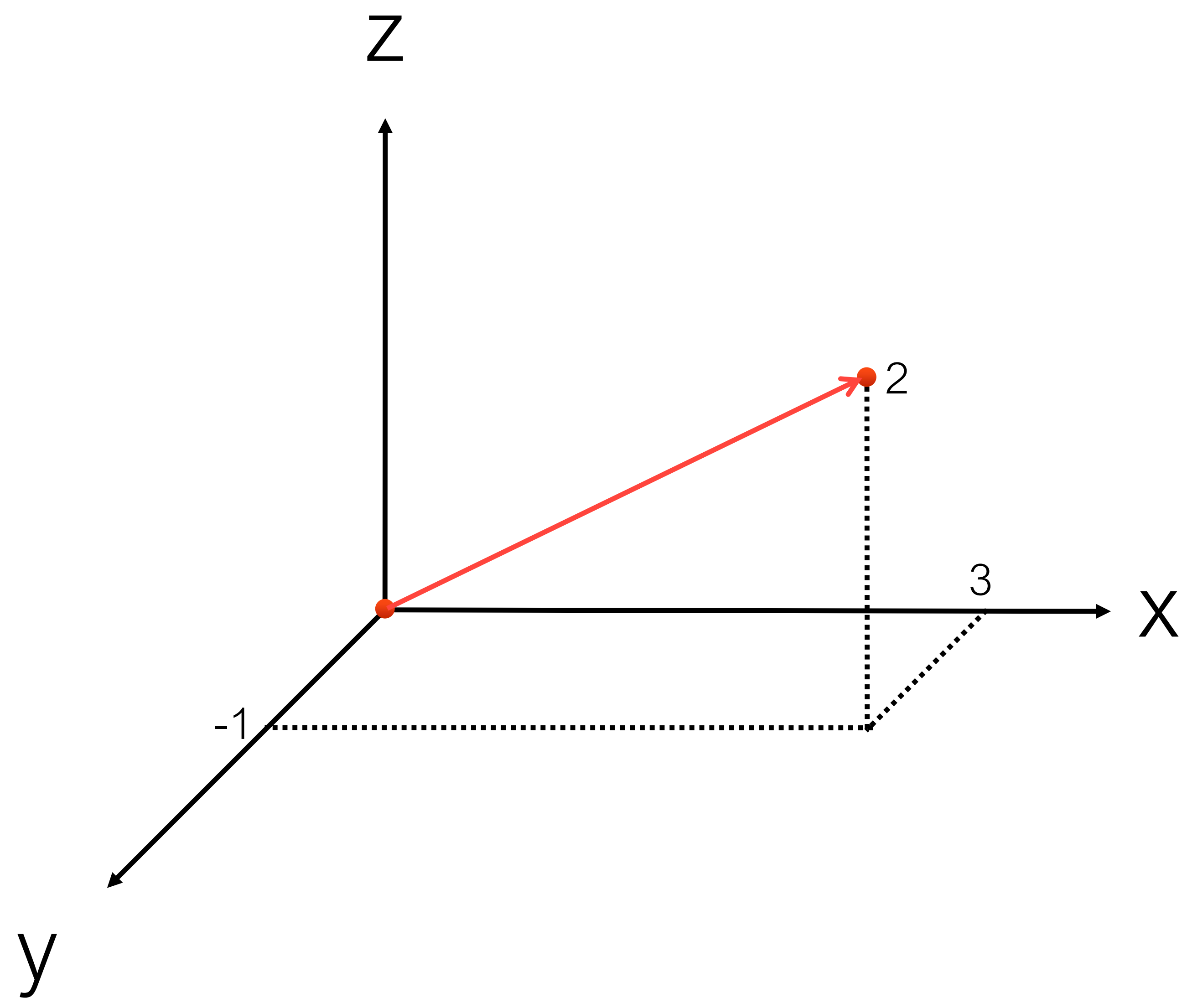
$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

a sequence of numbers

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

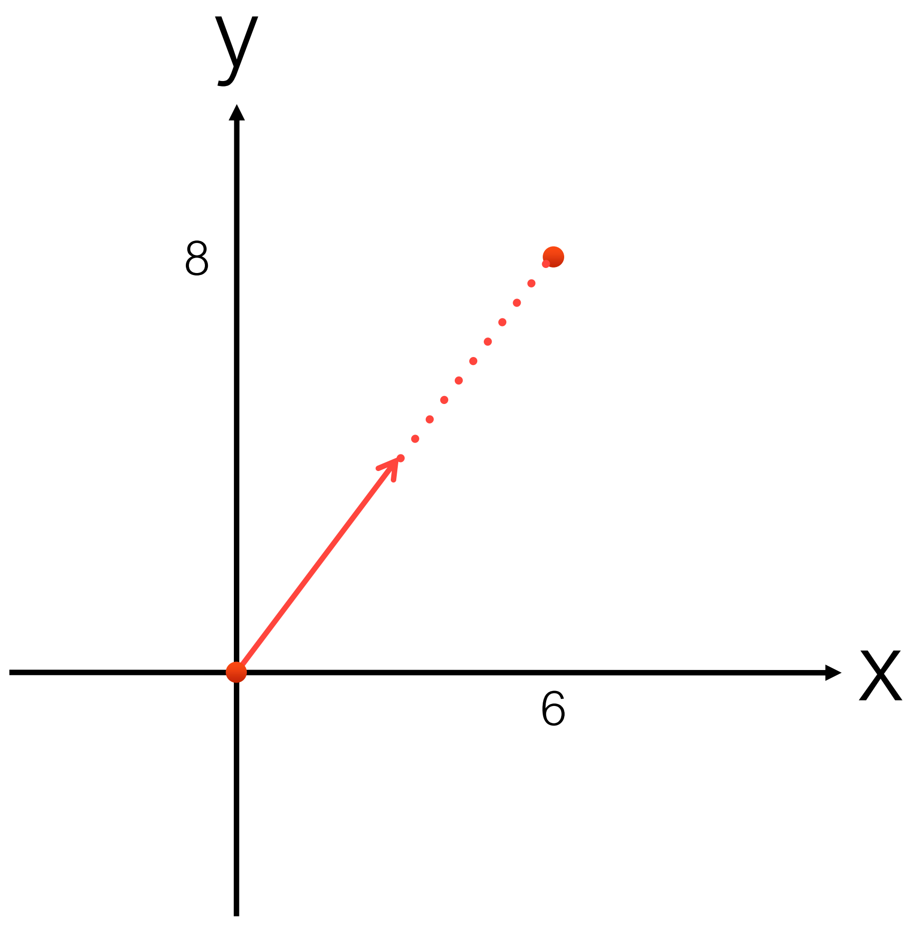


$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

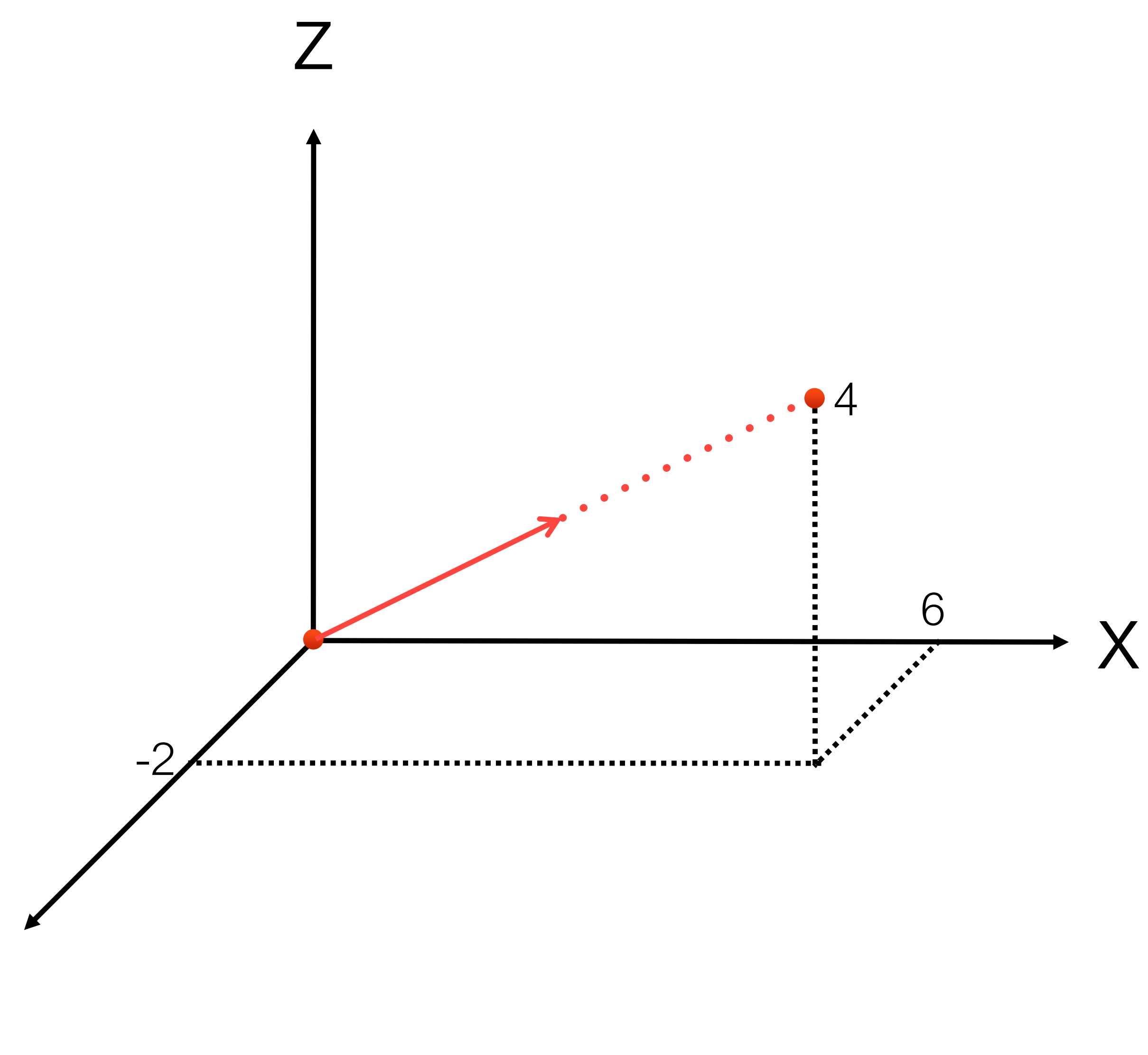


vector multiplication

$$0.5\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

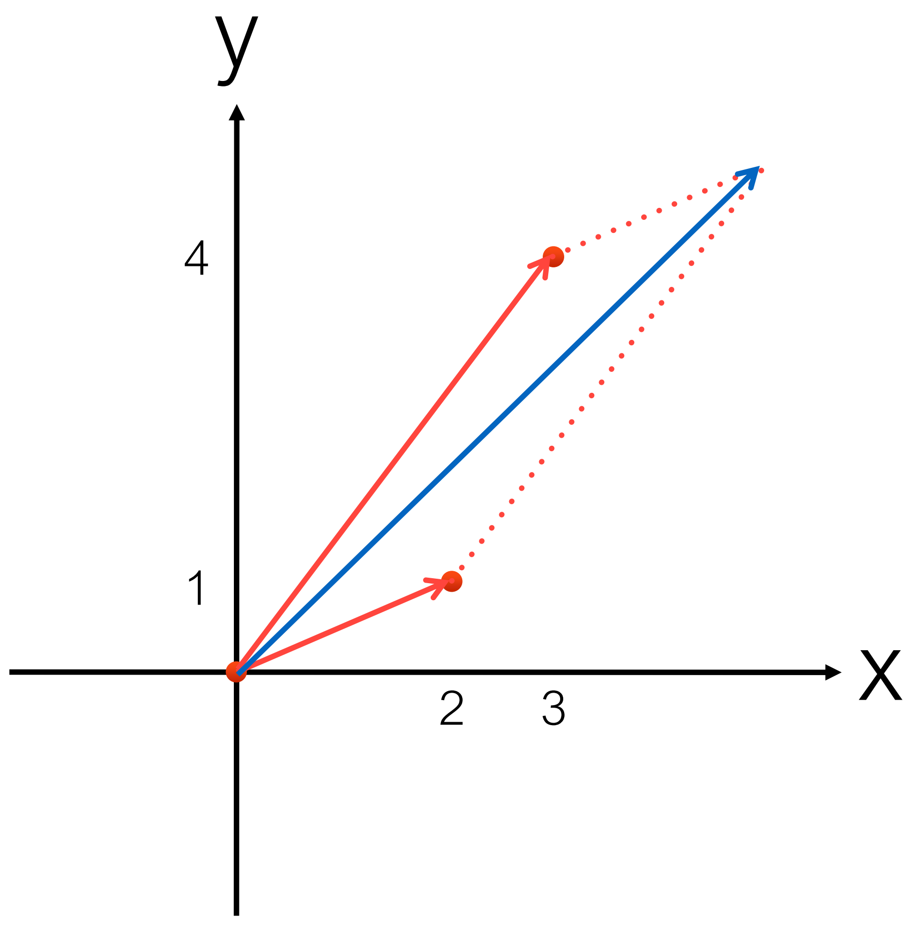


$$0.5\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

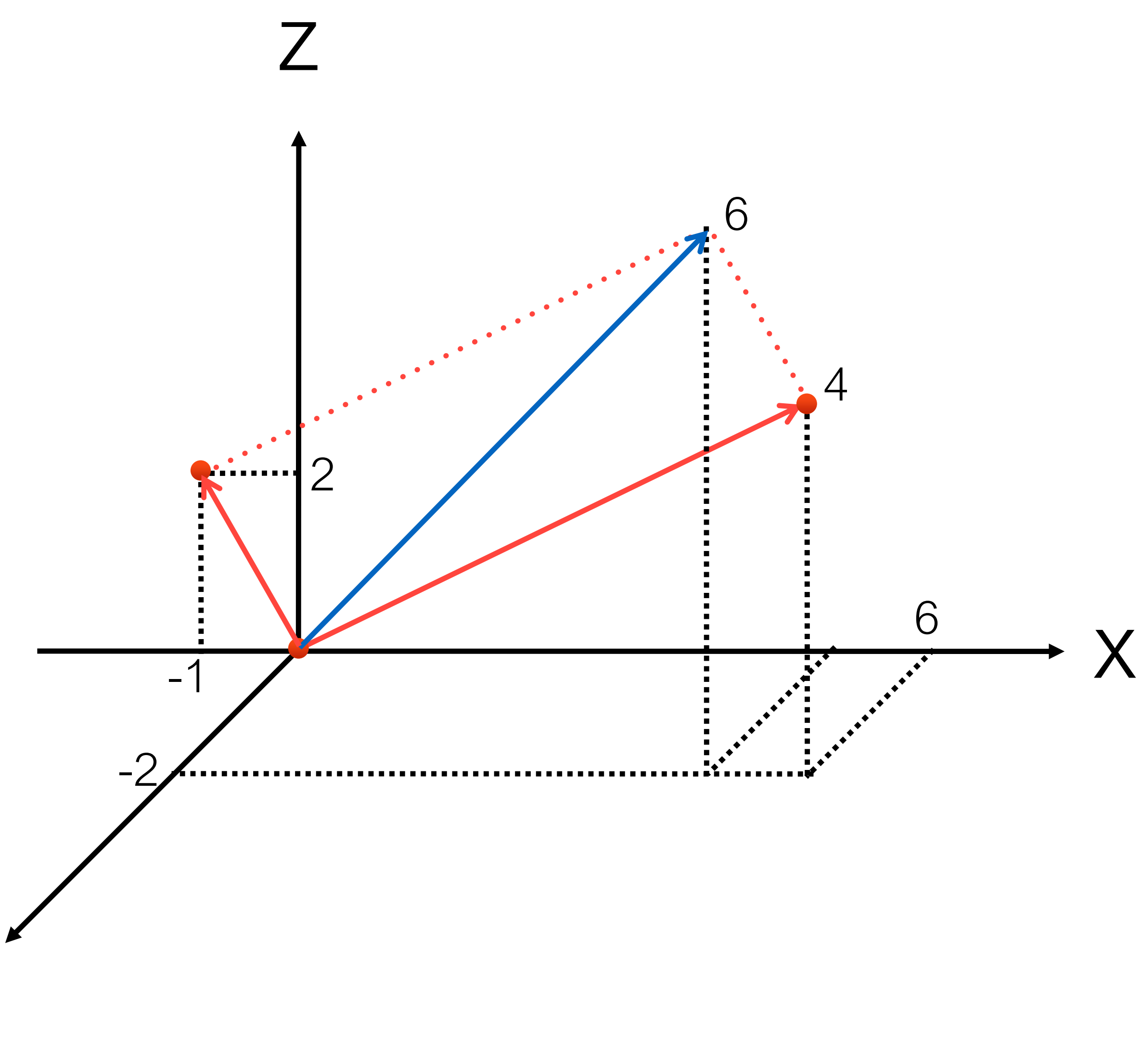


vector addition

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Vector spaces

Requirements
to become a vector space:
linear combinations
still stay in the space

V와 w는 차원이 같은 두 개의 벡터
C와 d는 그 앞에 곱해지는 것

단순히 곱하고 더하기만 했을 때 linear combinations

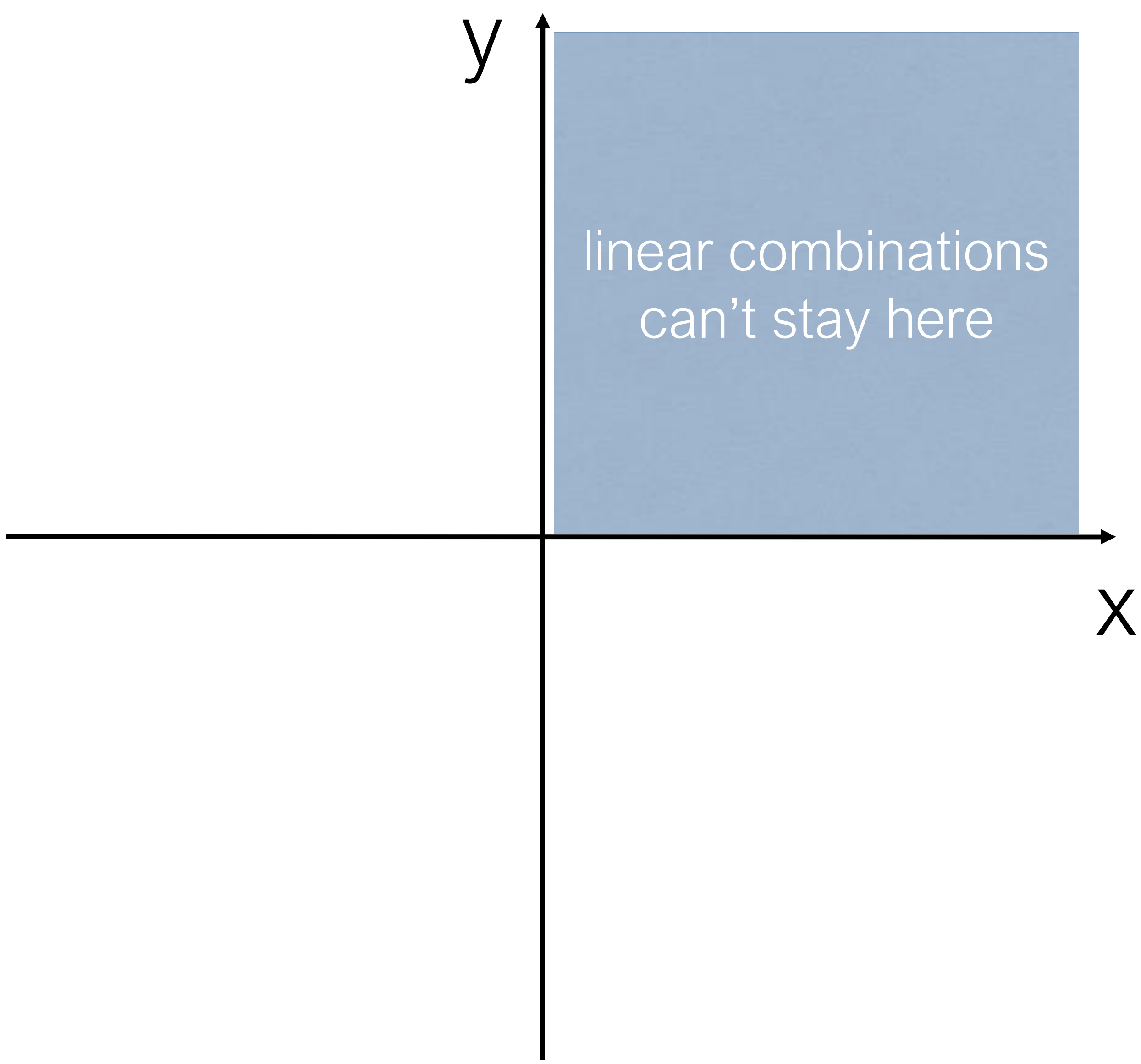
linear combinations

$$c \cdot v + d \cdot w$$

scalars

vectors

e.g., not a vector space



Vector space
→무수히 많은 여러 벡터들이 만들어내는 공간
→1사분면 속 두 점을 Linear combination해버리면 그 값이 어디로 튈지 모름
→Vector space는 linear combination을 포함해 모든 것을 포함한 공간
→1차원, 2차원, 3차원…의 모든 공간

$$R^1, R^2, R^3, \cdots, R^n$$

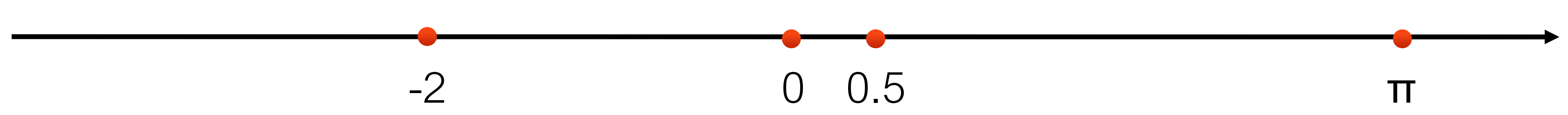
R^1 = 실수의 1차원 공간
R^2 = “ 2

R^n *space*
consists of all *vectors*
with n components

만약 n = 3 → 3차원은 3개의 모든 벡터들이 채워져있는 공간

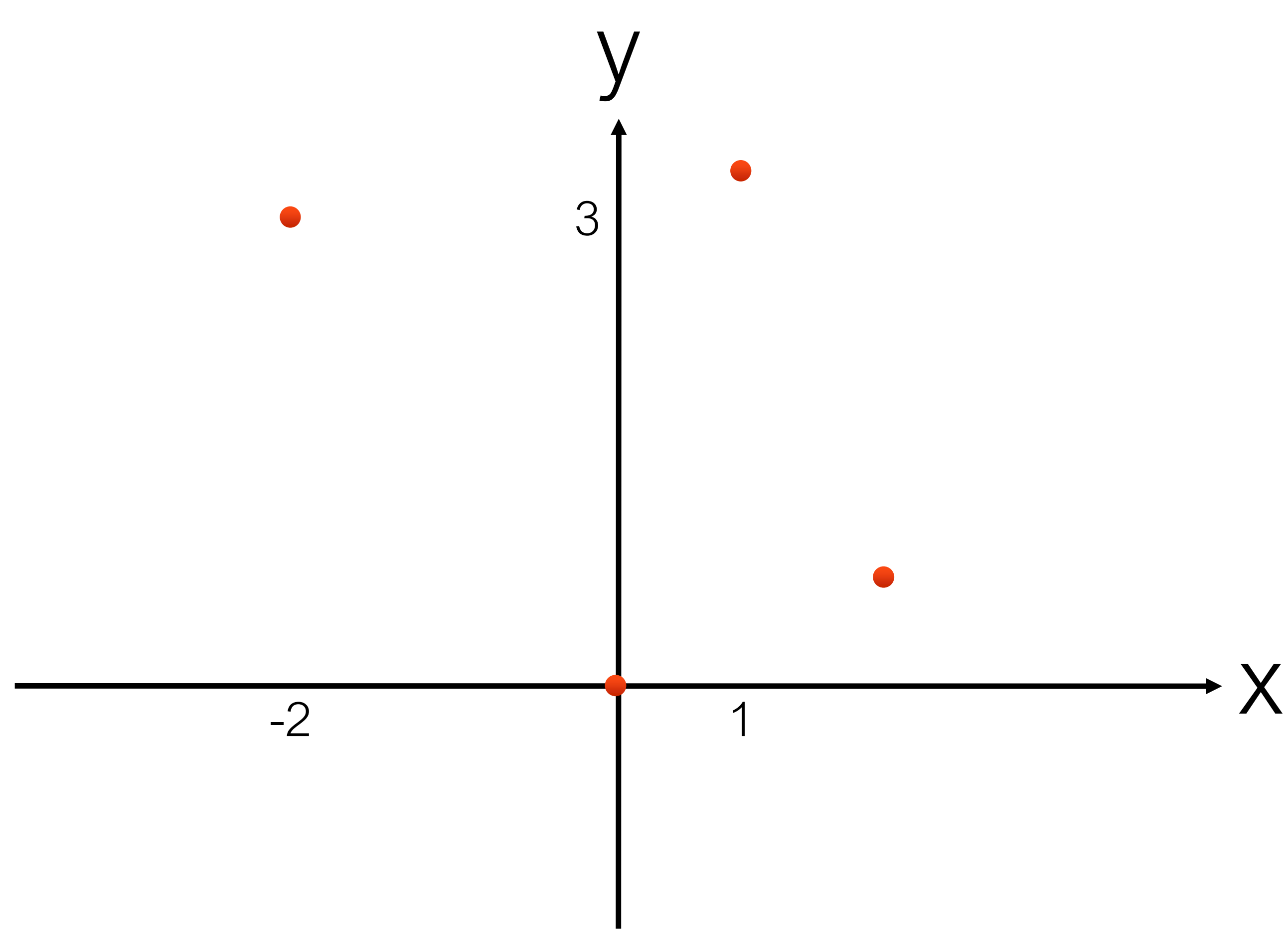
$$R^1$$

$$[0],[\pi],[-2],[0.5],\ldots$$



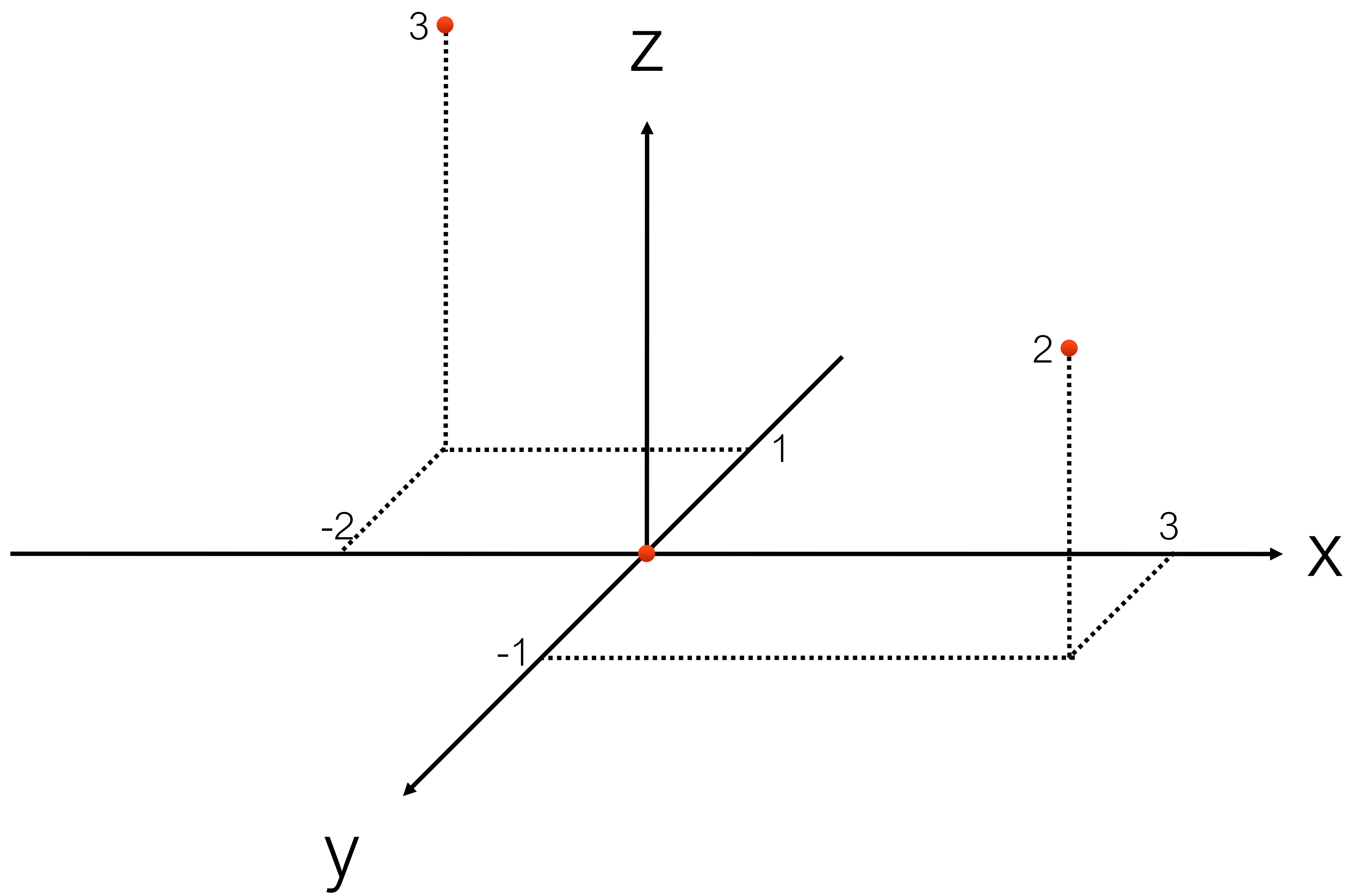
$$R^2$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \pi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0.7 \end{bmatrix}, \ldots$$



$\boldsymbol{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ldots$$



$$R^n$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ \vdots \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ \vdots \\ \pi \end{bmatrix}, \cdots$$

N개의 component가 그 공간을 다 채우면 됨

Column space

Column vector의 차원은 column space를 넘어서지 않는다.

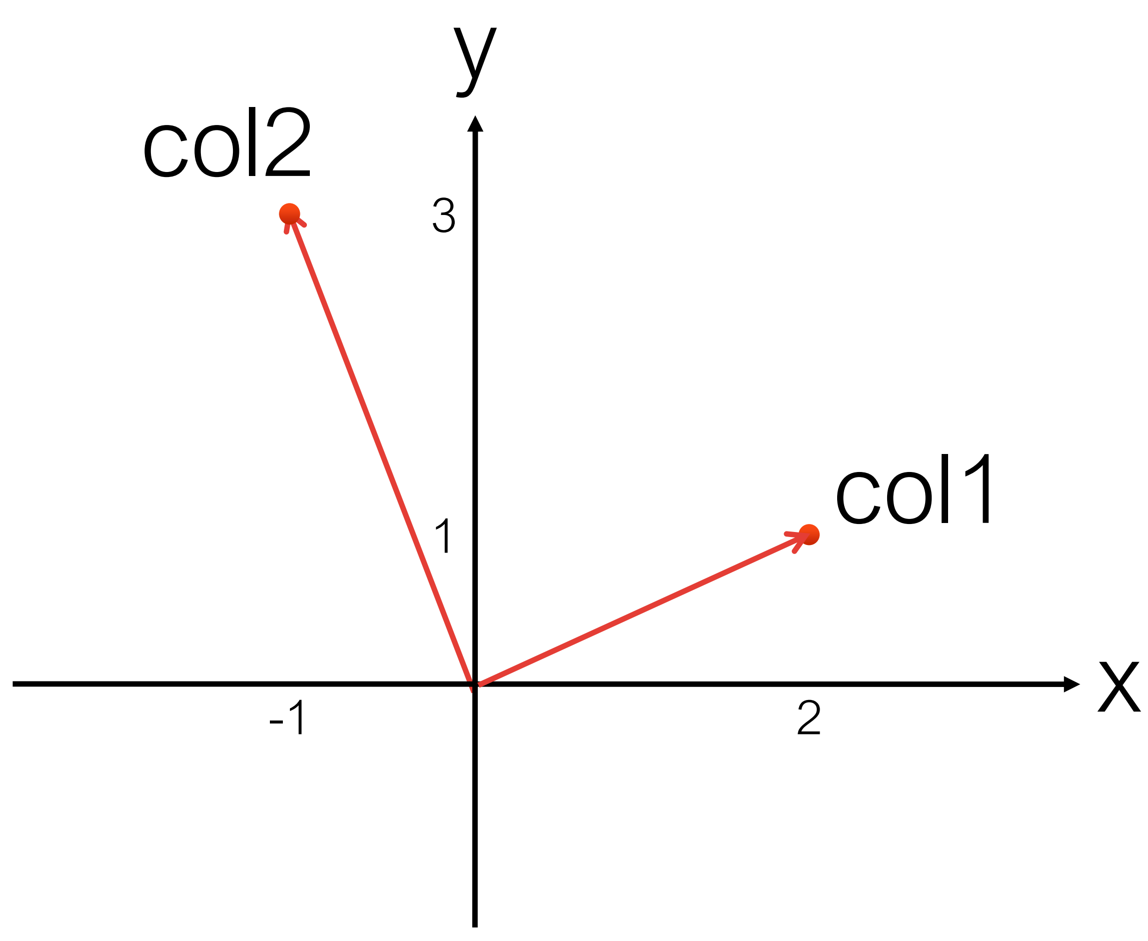
Columns of A^{mxn} in R^m,
all their linear combinations
form a subspace:
column space, C(A)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Column vector 2개 2 -1
1 3

이걸 2차원에 찍으면 2개의 점 생김

이걸 linear combination 해보면 또 다른 지점에 값이 생김 ... 이 과정을 무한대로 하면 이 두 column vector가 하나의 plane이 됨, 모든 space가 채워짐



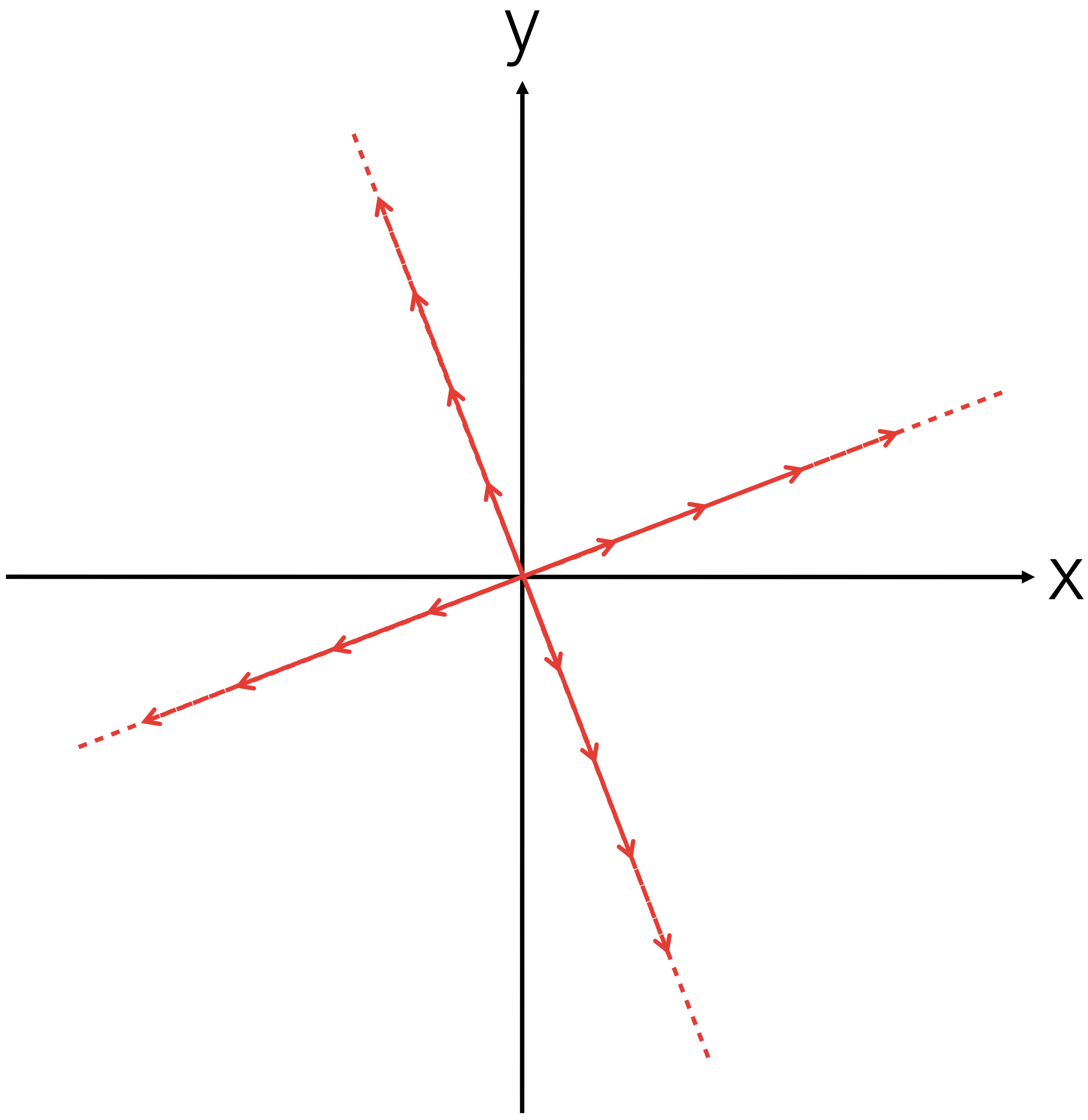
원점과 두 column vector를 모두 연결하면 삼각형이 만들어짐, 삼각형은 평면 위에 있는 것이고 이것을 쭉 확장시킬 수 있음

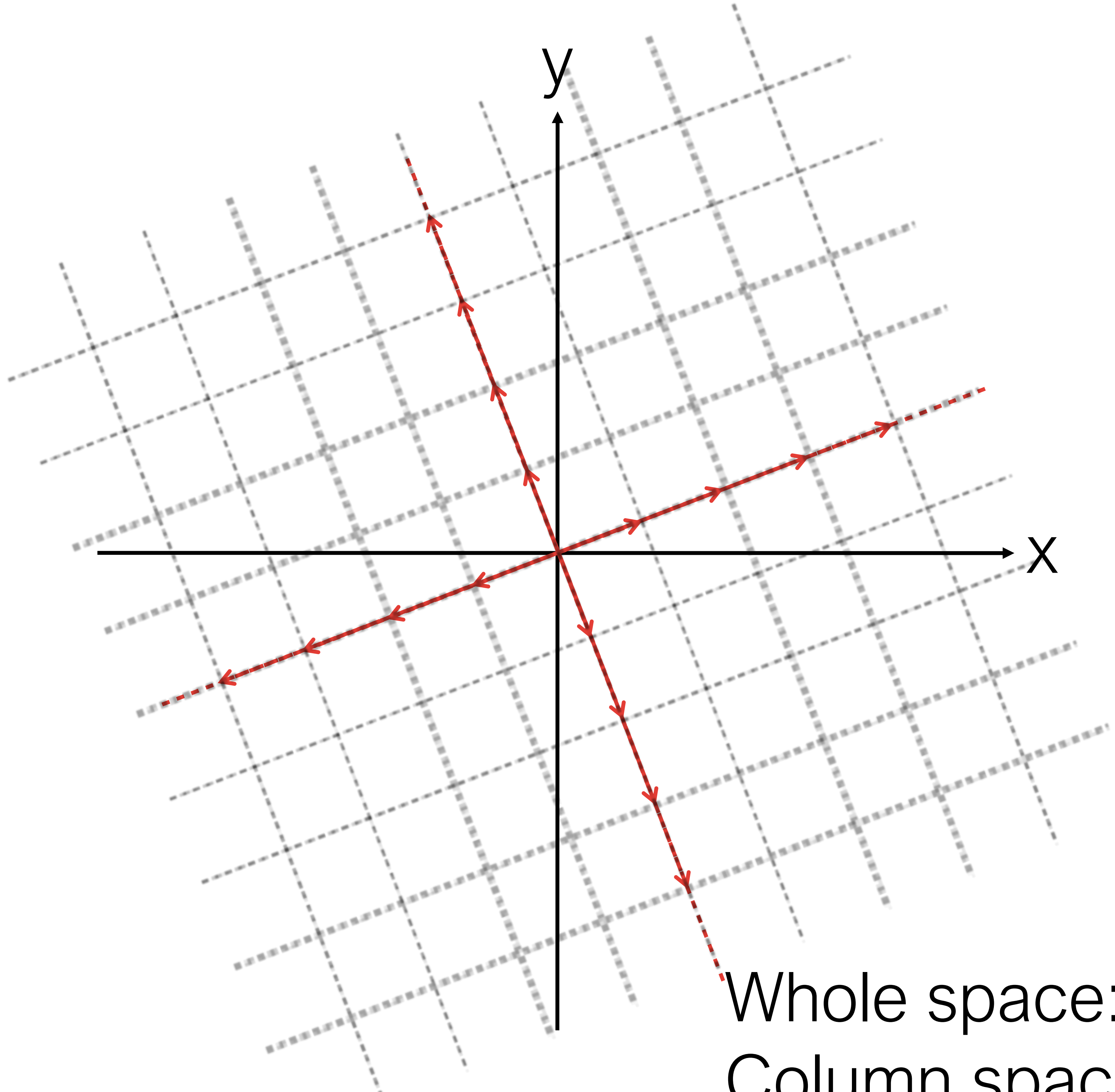
col1 & 2 NOT on a line
-> independent

Independent하다 = 두 개의 col이 동일선상에 있지 않음

Independent한 두 개의 값의 linear combinations는 무수한 공간을 채울 수 있음

all their linear combinations?

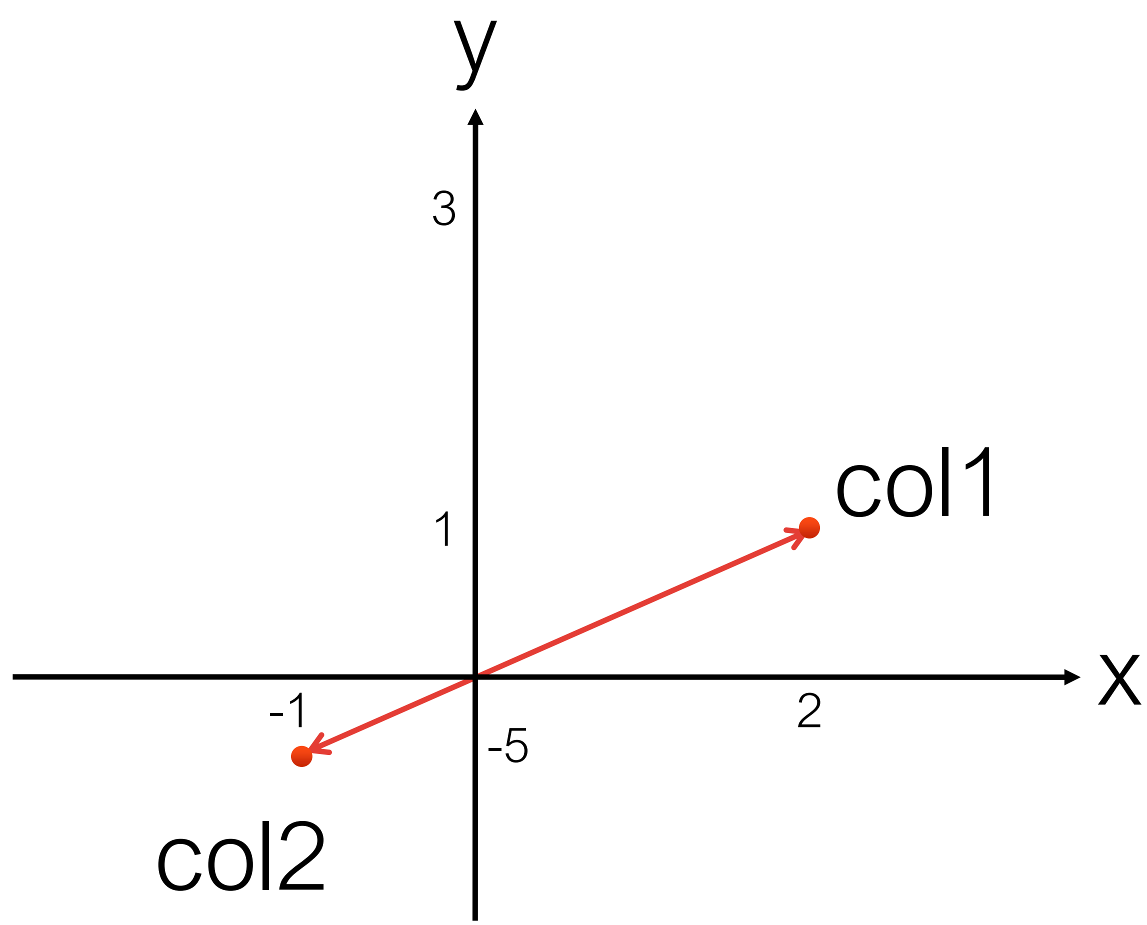

y
x



Whole space: R^2

Column space: R^2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$



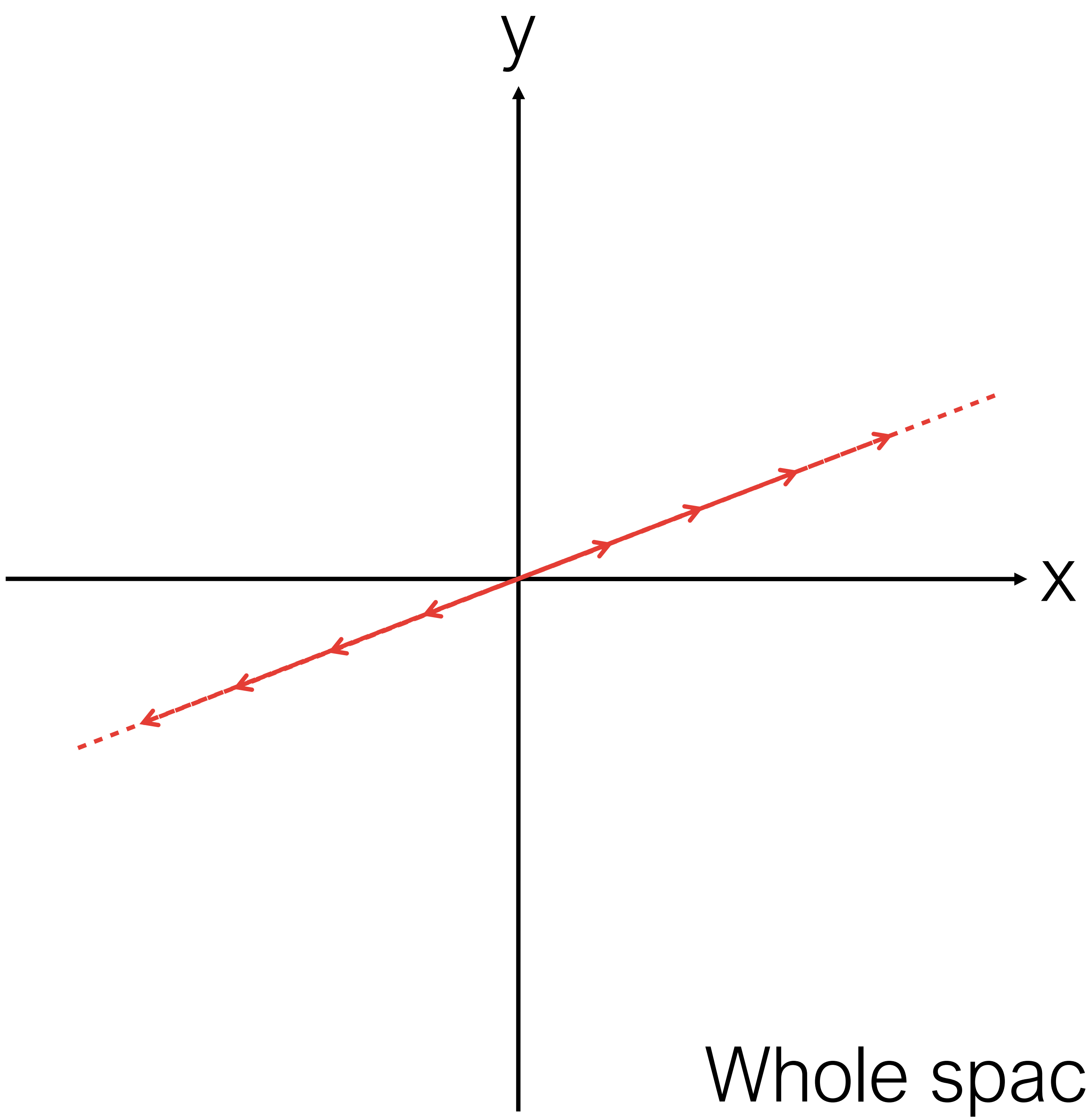
두 개가 한 라인 선상에 있음 → dependent

두 column vector가 있을 때 이걸 spanning하는 경우는 원점과 연결했을 때 삼각형이 나오고 이 삼각형을 확장시키는 것 단 이 경우 column vector는 independent함

col1 & 2 on a line

-> dependent

all their linear combinations?



Whole space: R^2
Column space: L

두 개를 합쳐봤자 라인선상에만 값이 나옴
→ Whole space는 2차원(원래 벡터가 2차원이니까) 그치만 column space는 L(ine), 1차원에 불과함

dim(whole space)
n rows
dim(column space)
n of independent columns

Whole space가 몇 차원인지는 행렬에 몇 개의 row가 있는지를 찾으면 됨
Column space는 그 중에서 몇 개의 independent한 column이 있는가에 의해 결정됨 만약 기하적으로 independent하지 않다면, 같은 line에 있다면 일차원

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Whole space: R^3

Column space: R^3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Whole space: R^3

Column space: P

Col 2는 col 1의 2배

어떤 한 벡터에서 뭘 곱한 값은 기존 벡터와 동일선상에 존재함

P Plane 2 차원

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Whole space: R^3

Column space: P

Col 3 = col 1 + col 2

때문에 col 3은 독립적이지 않음

Col 1과 col 2가 독립적인 것이지 col 3은 독립적이지 않음, column space를 결정하는 데 있어 아무런 영향 X

∴ column space = plane

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Whole space: R^3
Column space: L

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Whole space: R^3

Column space: P

직사각형의 행렬 이전까지는 정방행렬 다뤘던 것

Column vector 2개가 3차원 속에서 찍힘 → whole space는 3차원

여기서 independen한 column은 2개 → column space는 2차원

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

transpose

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Whole space: R^2
Column space: R^2

2 by 3
Column vector 3개, whole space는 2차원
But 다른 column을 쓰는데도 column space는 여전히 2차원

Four spaces in a matrix

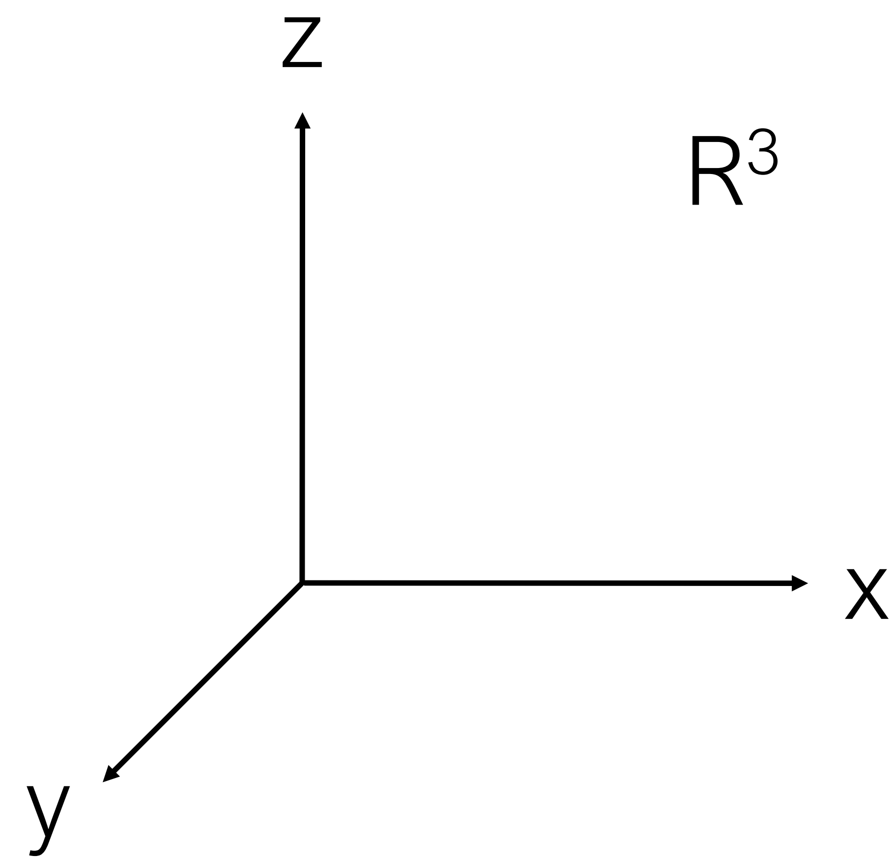
Whole space는 column의 관점에서도 row의 관점에서도 존재

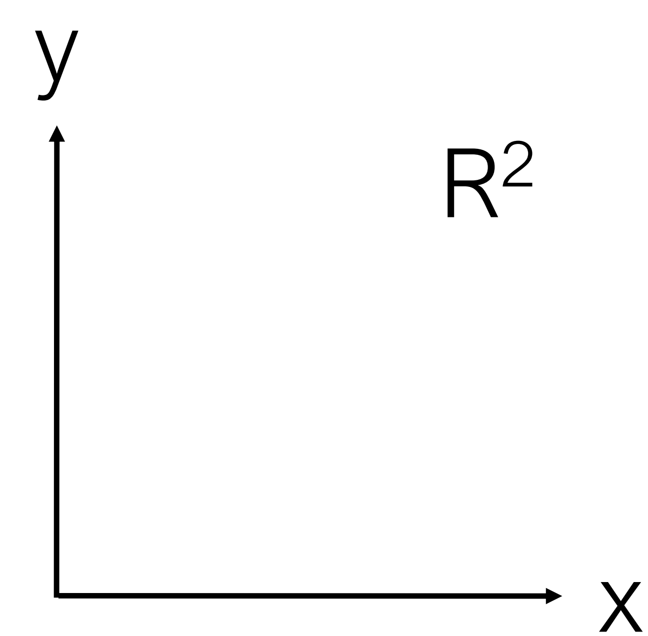
An mxn matrix has two whole spaces: R^m and R^n

m by n
→Whole space 2개

$$A = \left.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right\}\text{whole space (column)}$$

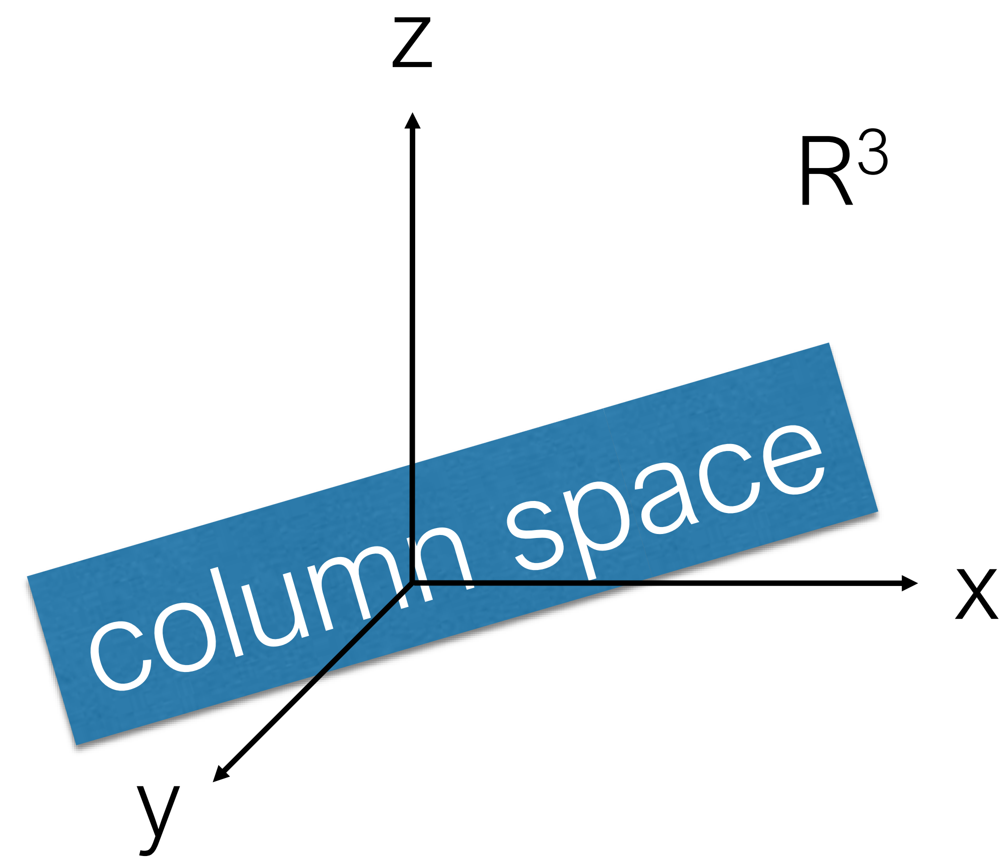
whole space (row)

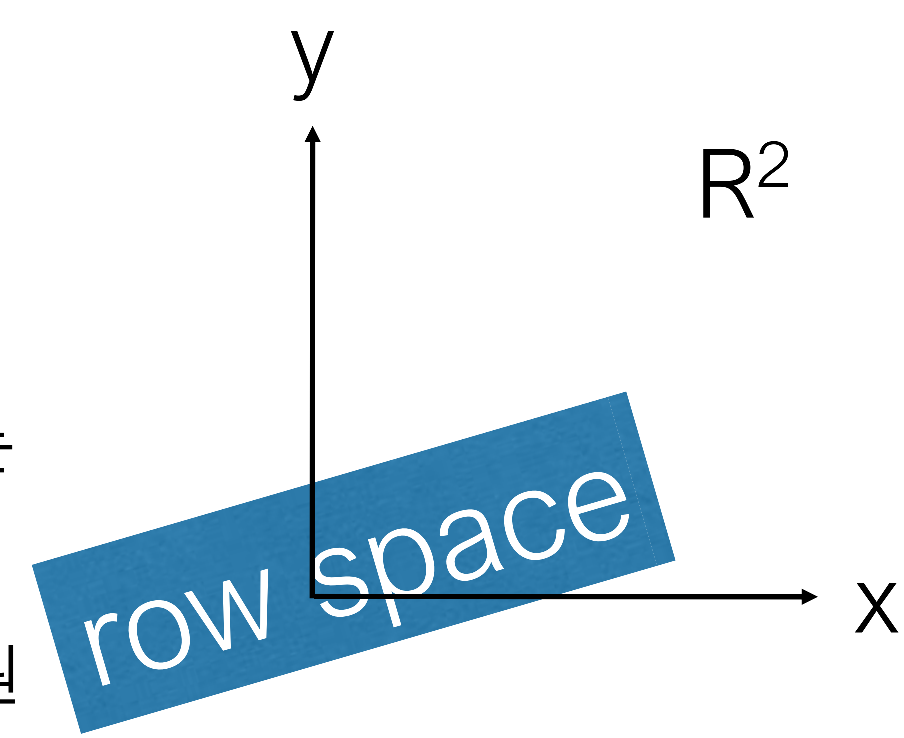




Column의 관점에서 123 246이 찍히는 것은 3차원 R3
Row의 관점에서 12 24 36이 찍히는 것은 2차원 R2

$$A = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right\}\text{whole space (column)}}_{\text{whole space (row)}}$$





Column 방향으로 whole space는 3차원
Col 1과 col 2는 dependent함 → column space는 1차원,
아무리 linear combination으로 연장을 해봤자 표현할 수 있는
것은 1차원 → 나머지는 2차원은 Null space에 해당

만약 Independent했다면 vecto들이 만들어내는 공간은 2차원
근데 plane자체가 column space라면 총 3차원에서 1차원이
남고 이것 역시 null space

$$A\boxed{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \cdots$$

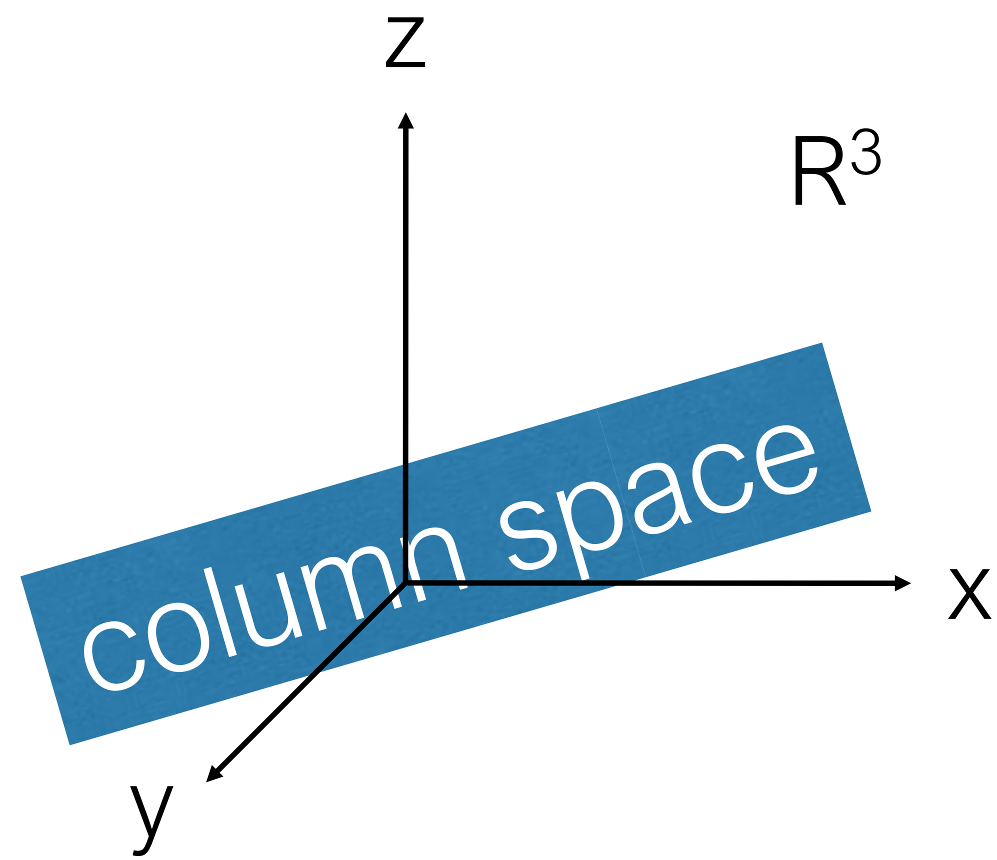
null space

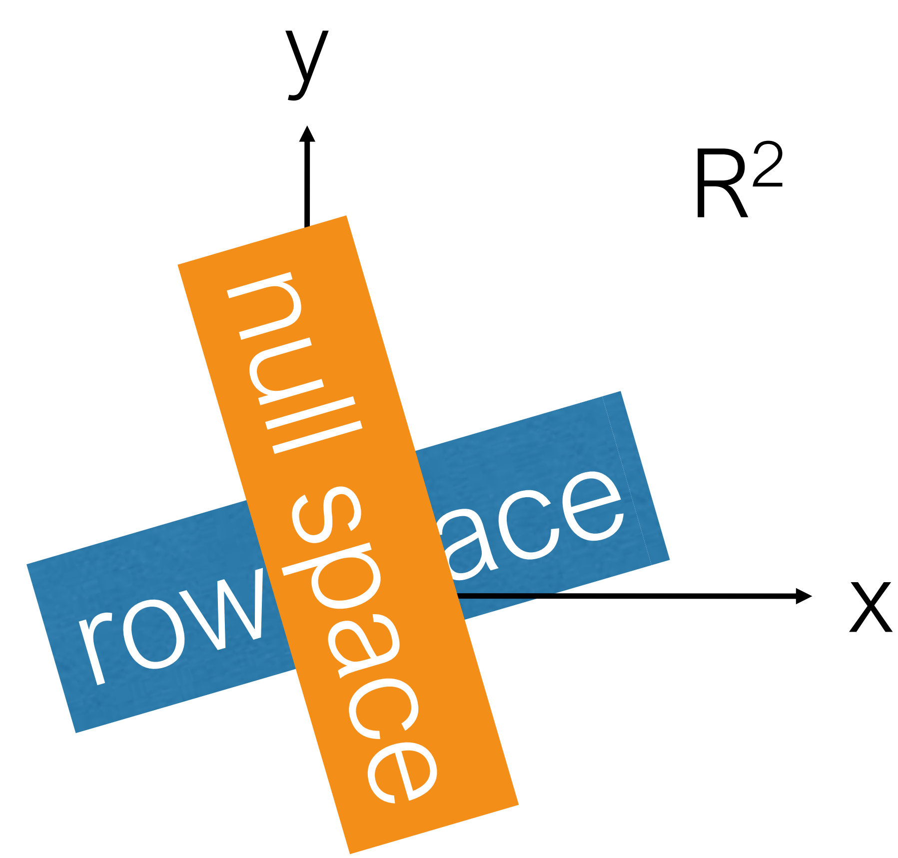
Null space

→Whole space에서 column space를 정의하고 나서 남은 나머지가 모두 null space에 해당

→(수학적 정의)어떤 행렬이 있을 때 무엇을 곱하던지 간에 반드시 0이 되는 모든 가능성이 있는 _ , _를 null space라고 한다

$$A = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{\textit{whole space (row)}}\right\rbrace \textit{whole space (column)}$$





Whole space의 일부/전체를 차지하는 column space가 있고 그것을 제외한 나머지가 null space

$$xA = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

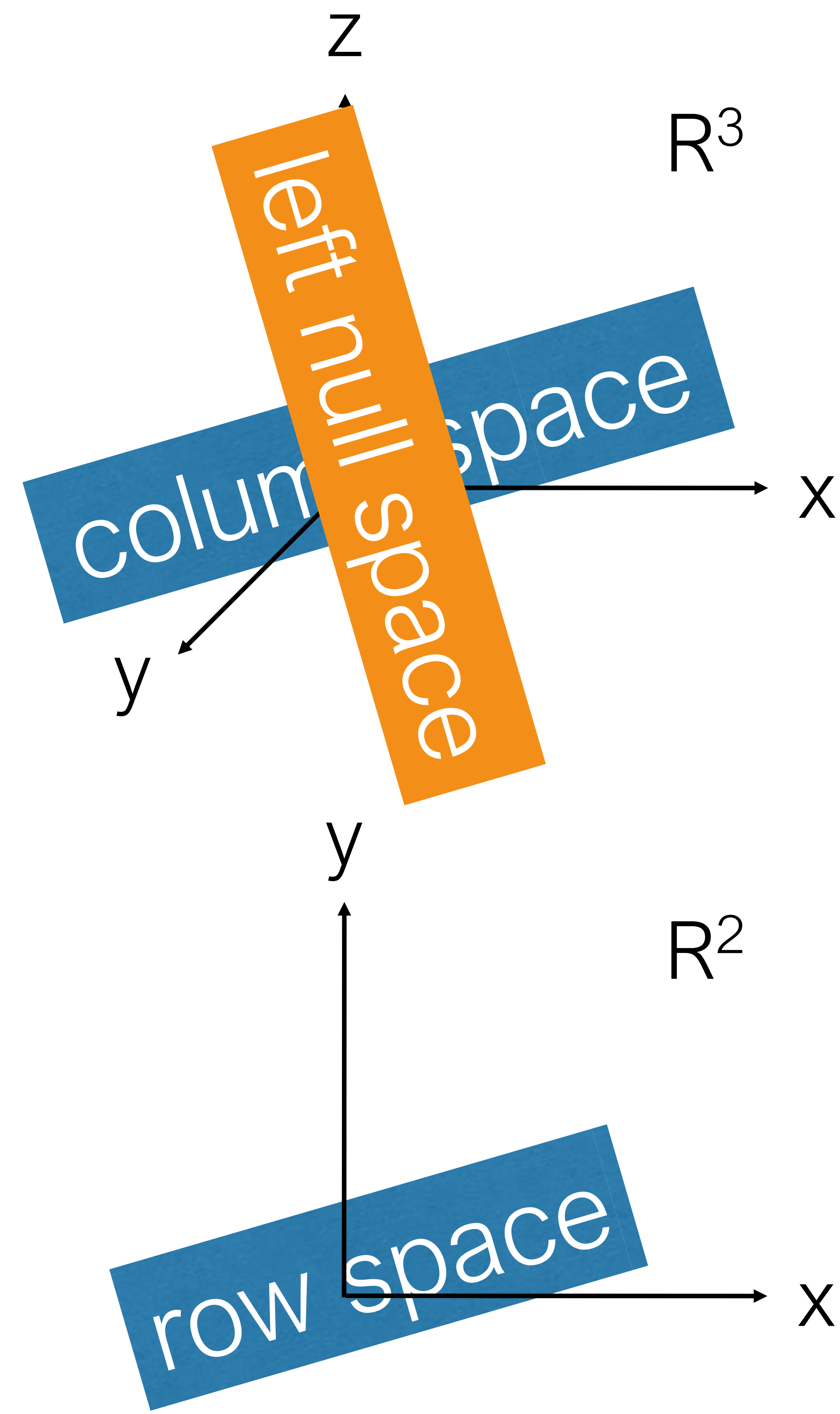
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\cdots$$

left null space

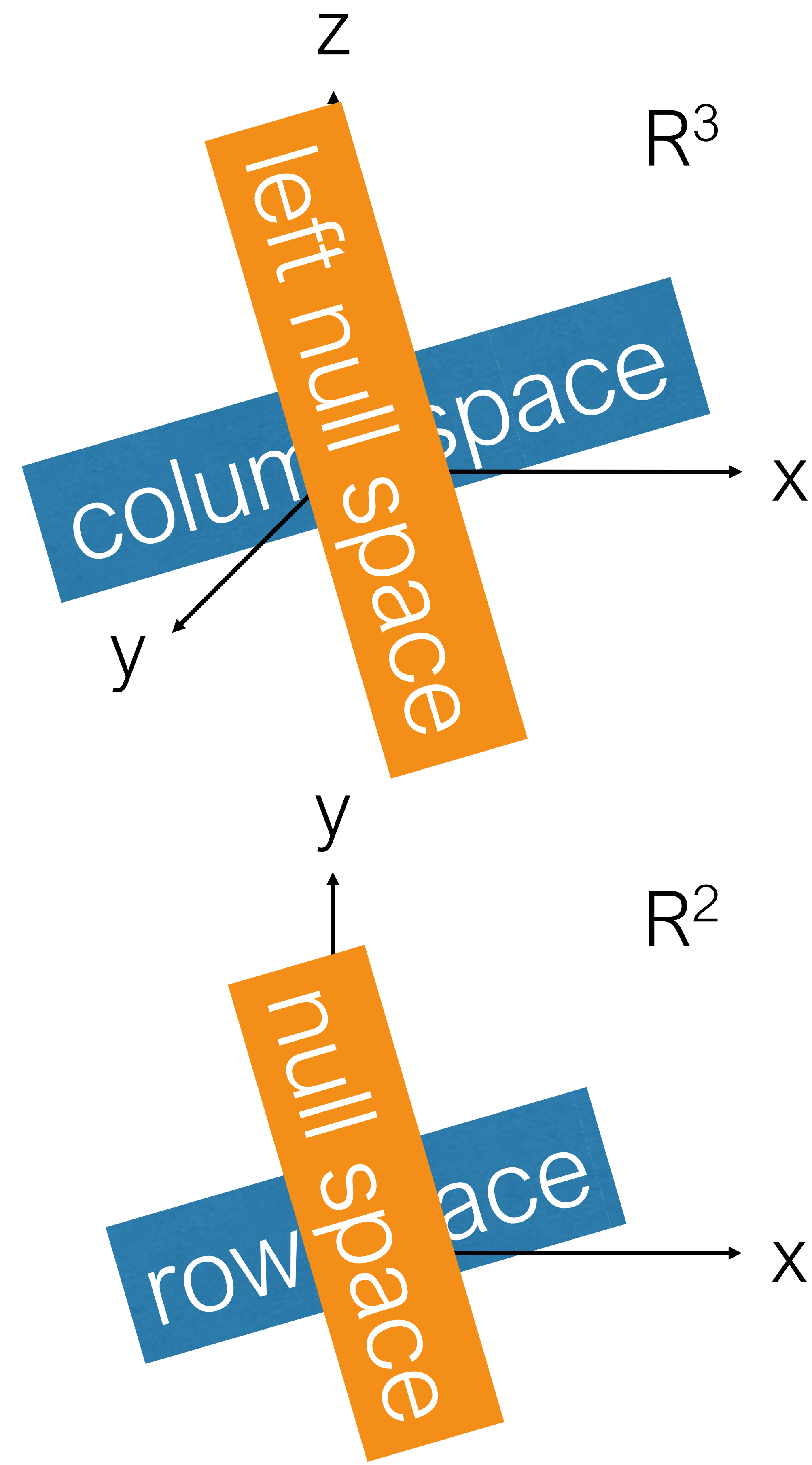
$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{\textit{whole space (row)}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}\right\} \textit{whole space (column)}$$

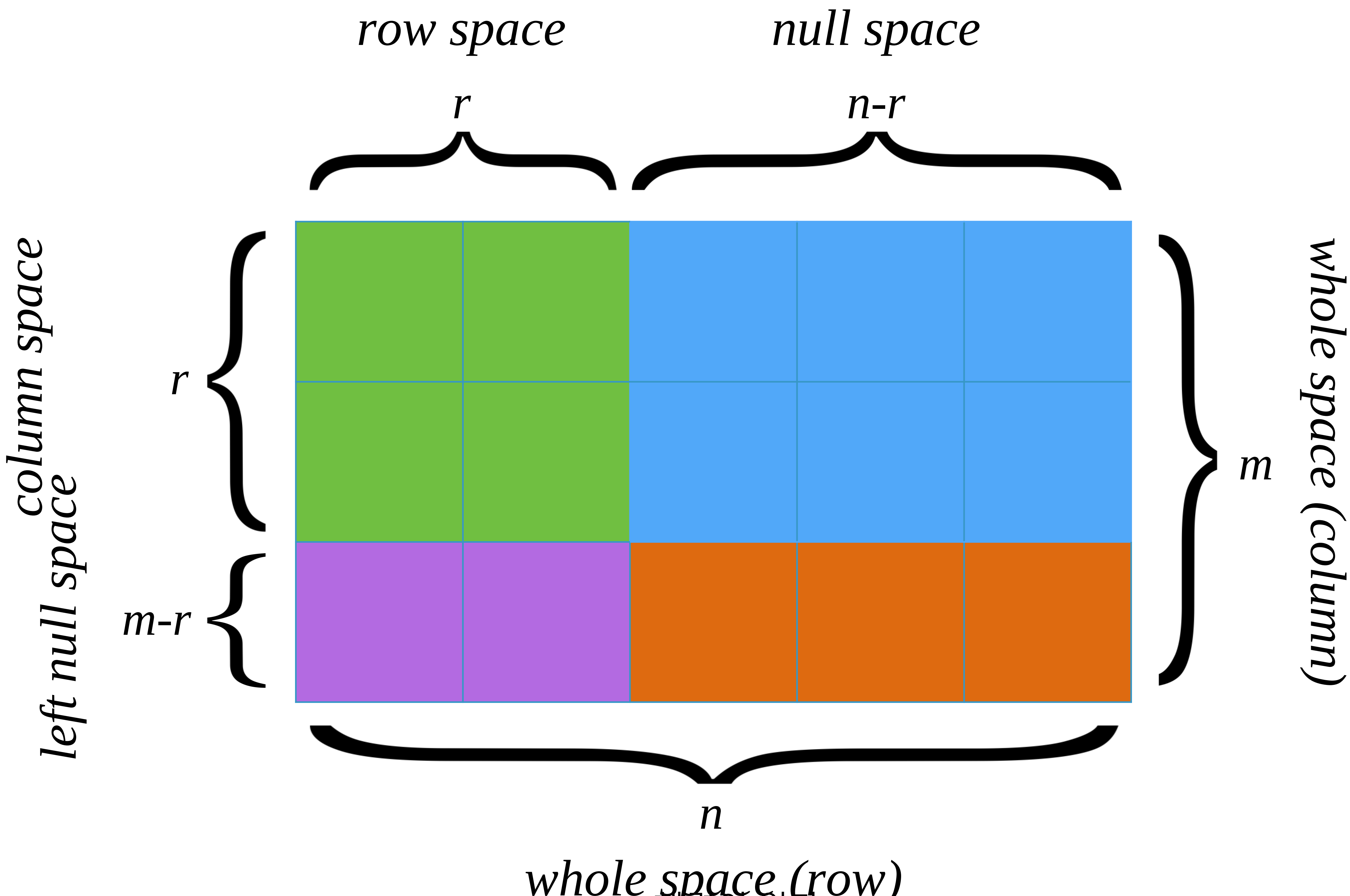


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

whole space (column)

whole space (row)





let m by n 행렬이 있다
→ whole space가 있고
→ Column space는 whole space보다 같거나 작게 존재 (절대 whole space보다 크게 존재할 수 없음)
→ Column space를 제외한 공간은 null space
→ Row space 또한 whole space보다 같거나 작게 존재 (절대 whole space보다 크게 존재할 수 없음)
→ Row space를 제외한 공간은 null space

Whole space 두 가지 접근 방법: column, row

Linear transformation

왜 Linear?
→ 곱하고 더하기 했기 때문
왜 transformation?
→ 차원도 바꾸고 숫자도 바꿨기 때문

$$Ax = b$$

x = 입력벡터
b = 출력벡터

x라는 입력벡터 차원과 b라는 출력벡터의 차원은 반드시 같아야 한다/**아니다.**

A에 따라서 출력벡터의 차원이 정의가 됨

x를 b로 바꿔주는 transformation matrix는 A

1. place x on original grid
2. transform x onto A grid
3. read transformed x on original grid (=b)

example 1

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

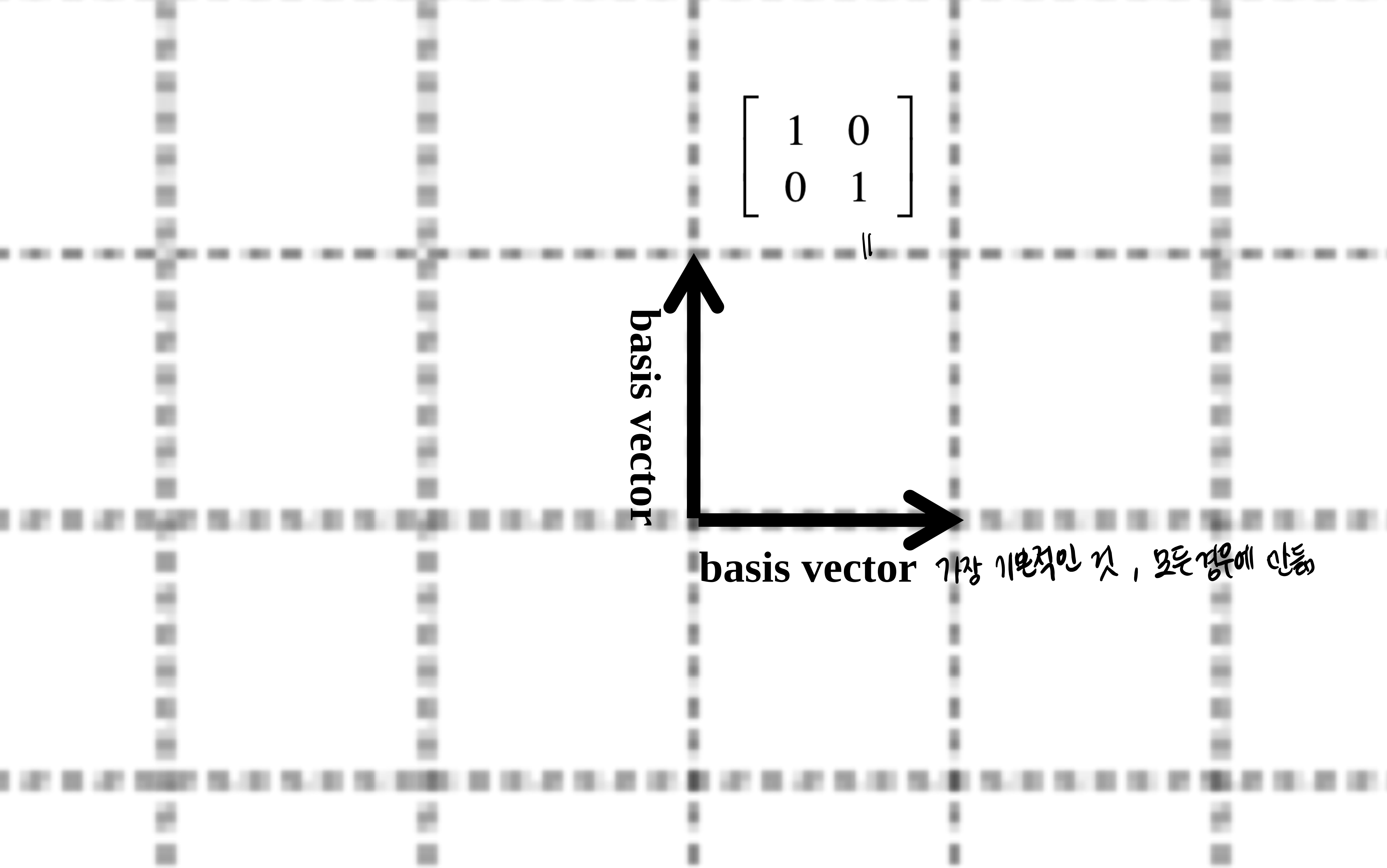
X

transformation matrix
인공지능 행렬방수에 해당하는 부분
(기계)

입력

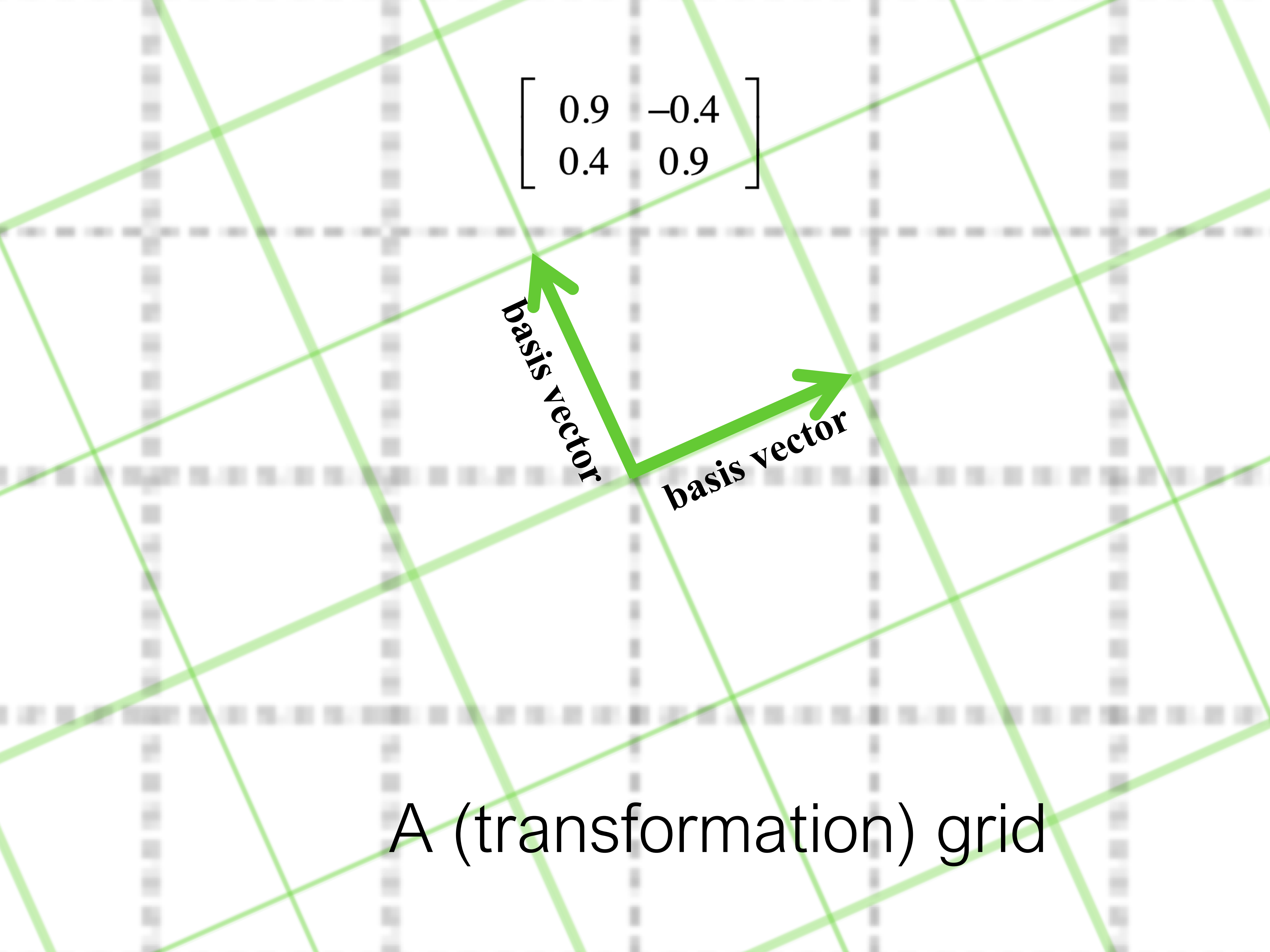
출력

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 을 $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix}$ 으로 바꾼다

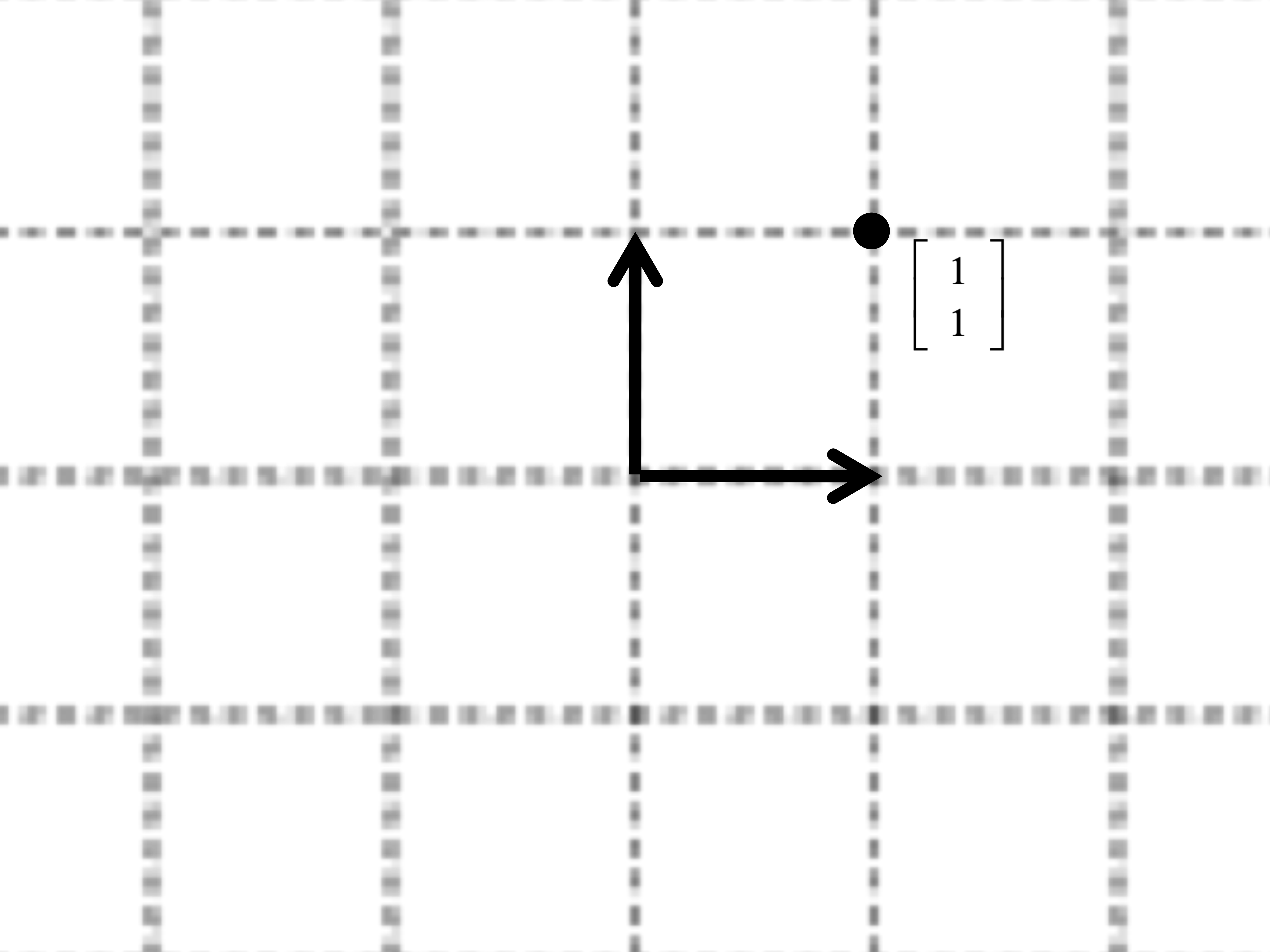


original grid

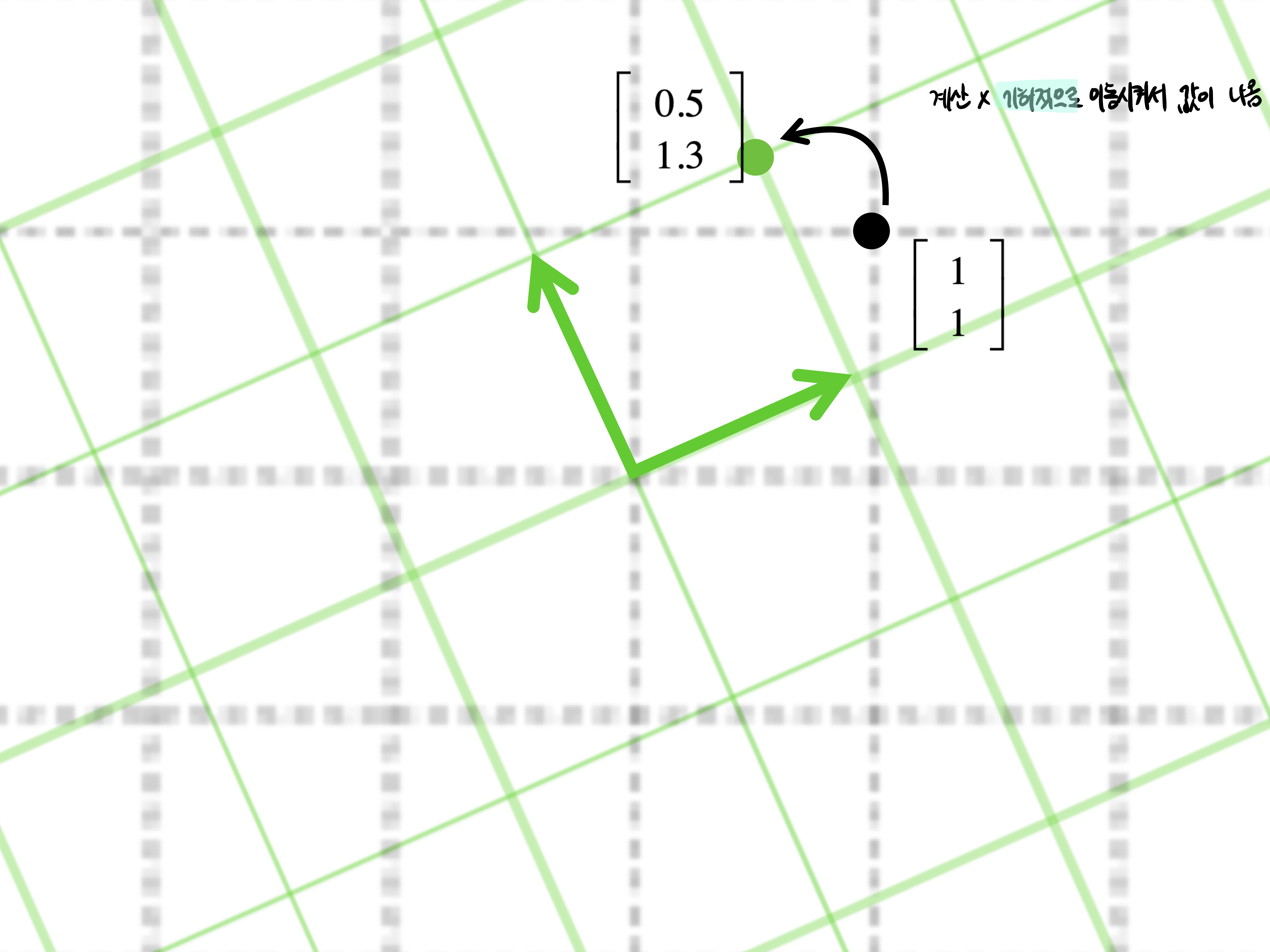
$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$



A (transformation) grid

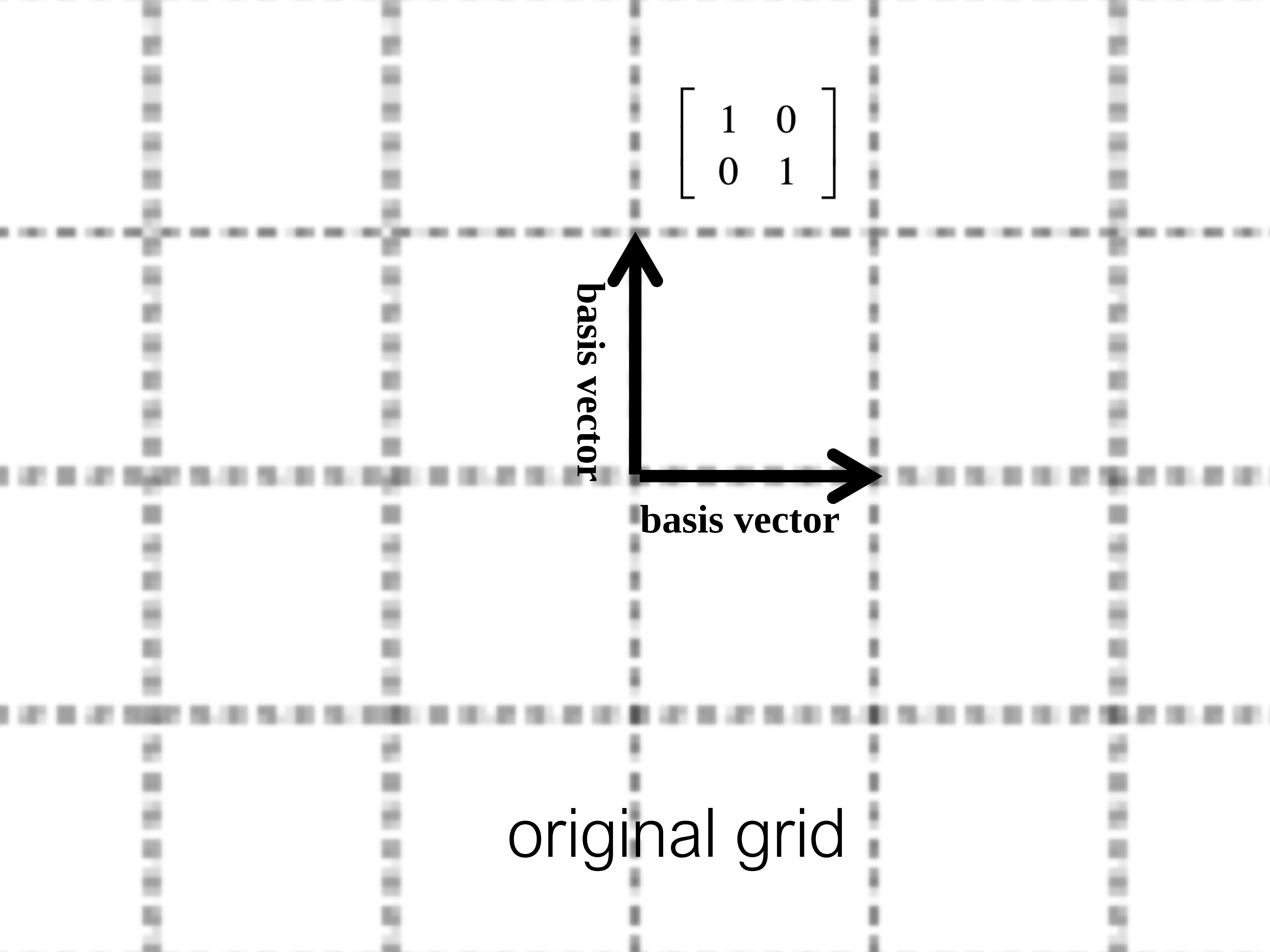

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

계산 x 기하적으로 이동시켜서 값이 나옴

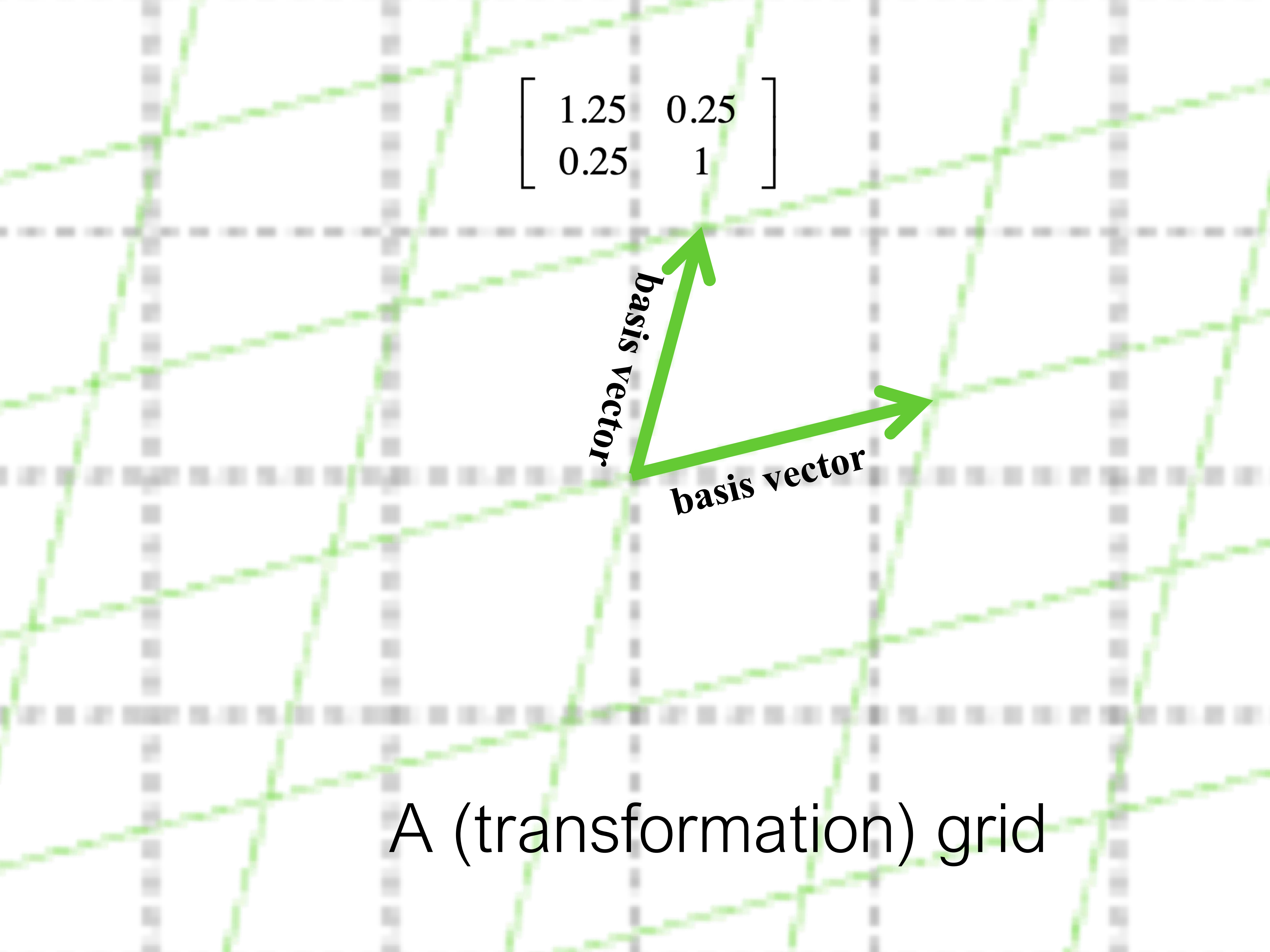


example 2

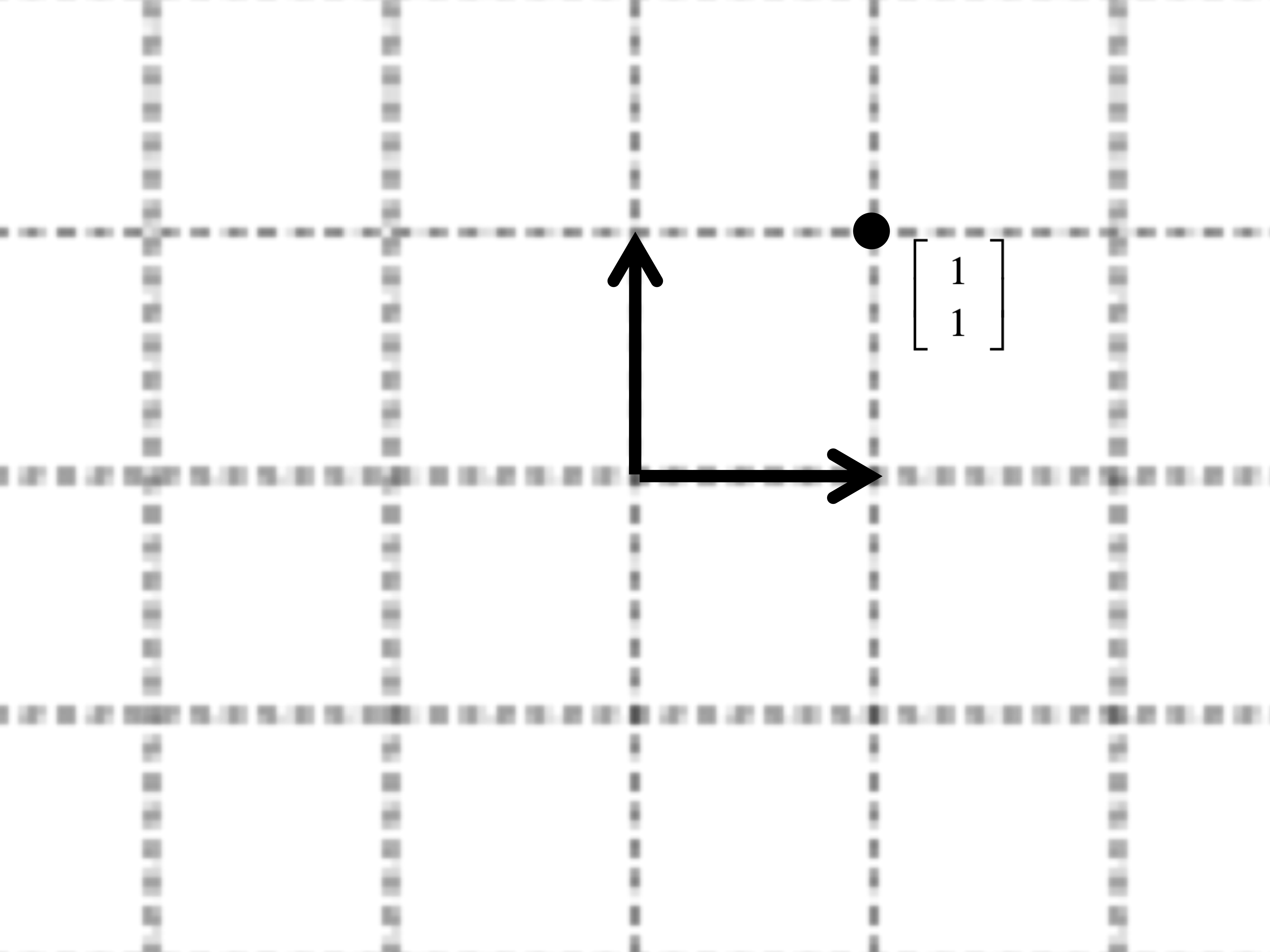
$$\begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

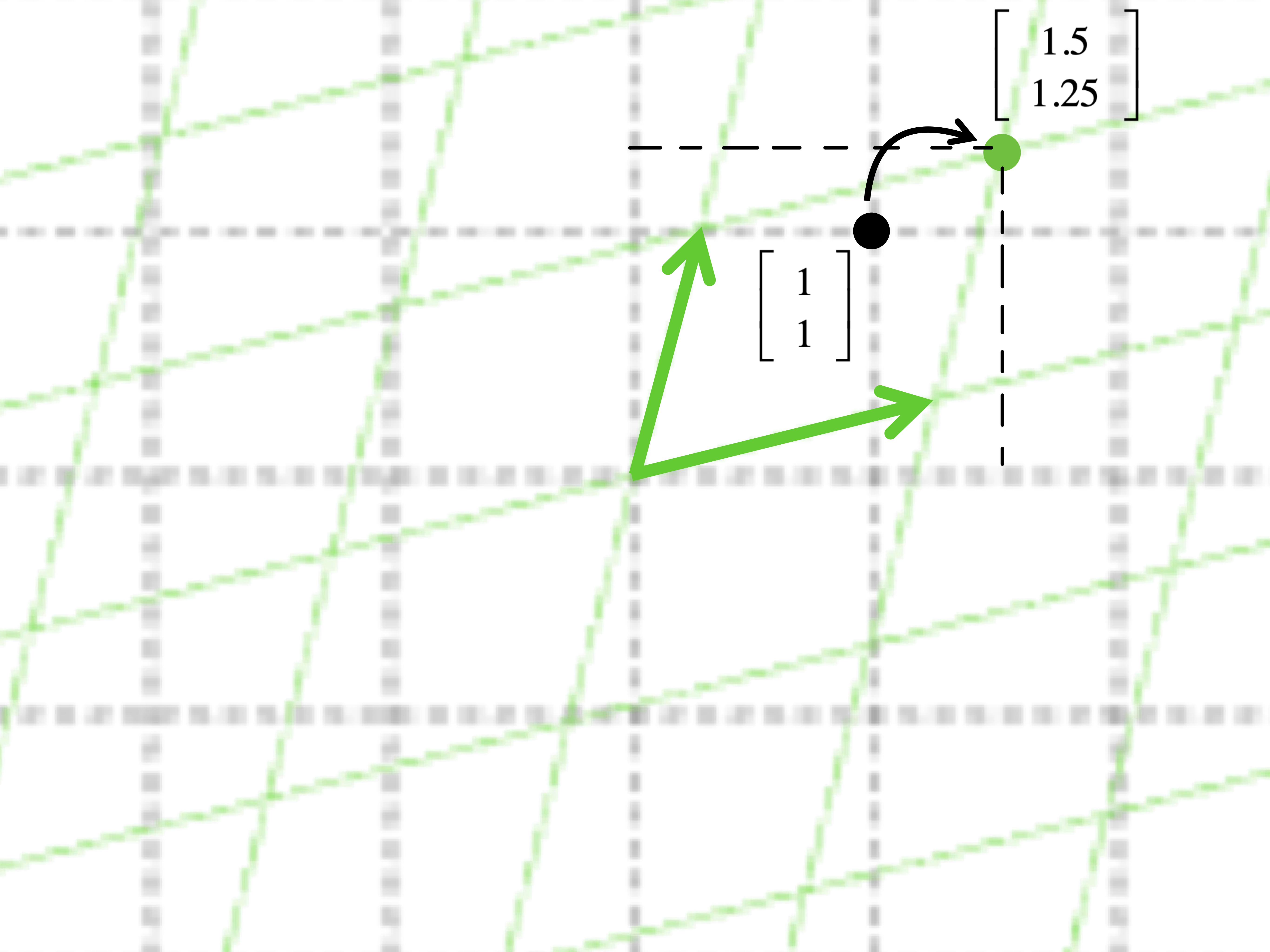


$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
basis vector
basis vector
original grid



A (transformation) grid

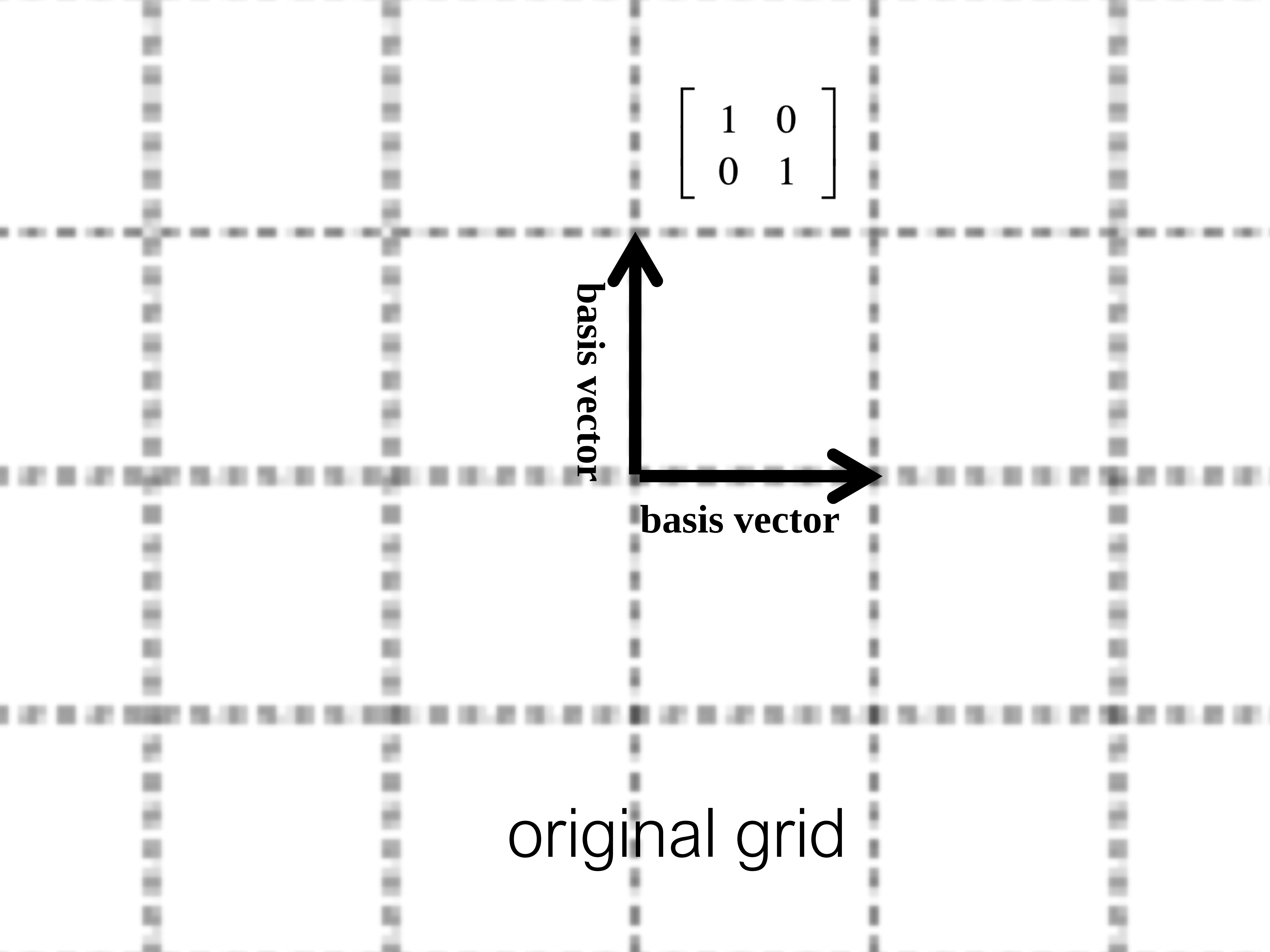

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.25 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

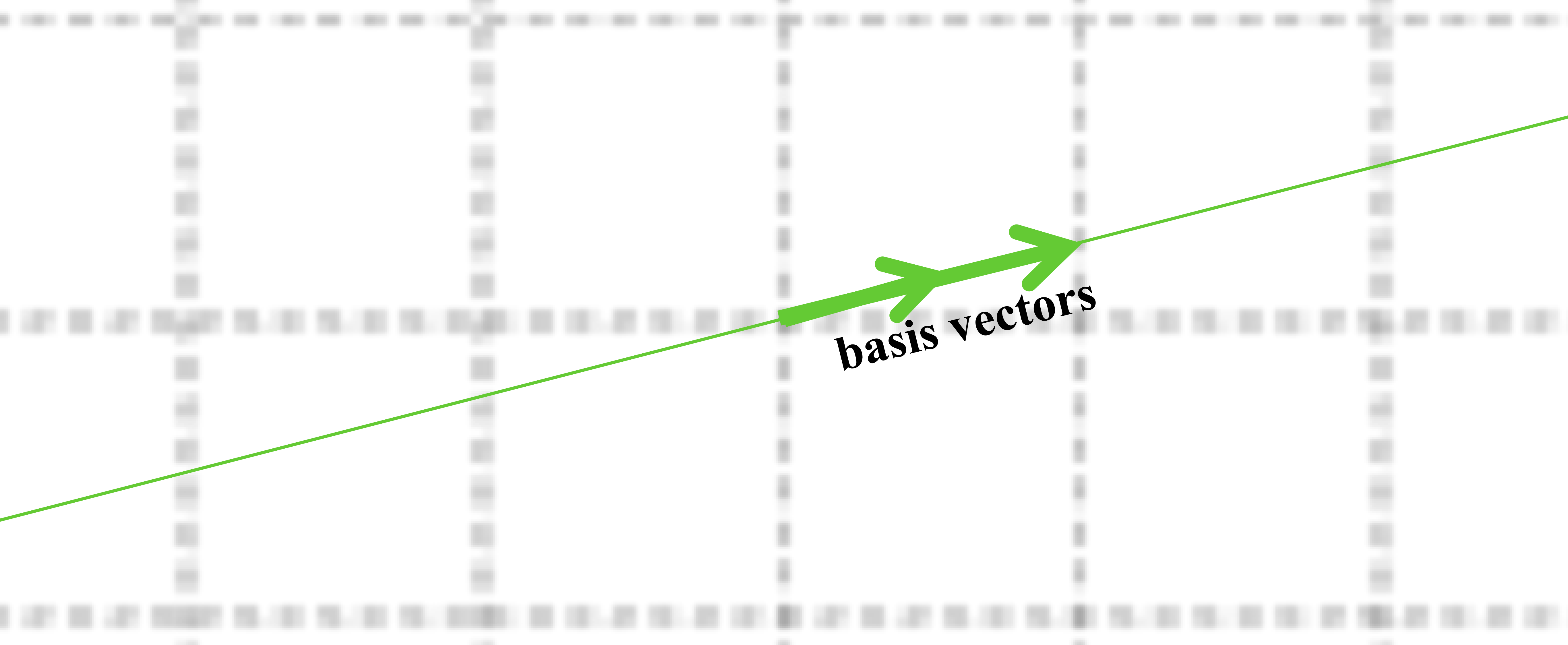
example 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

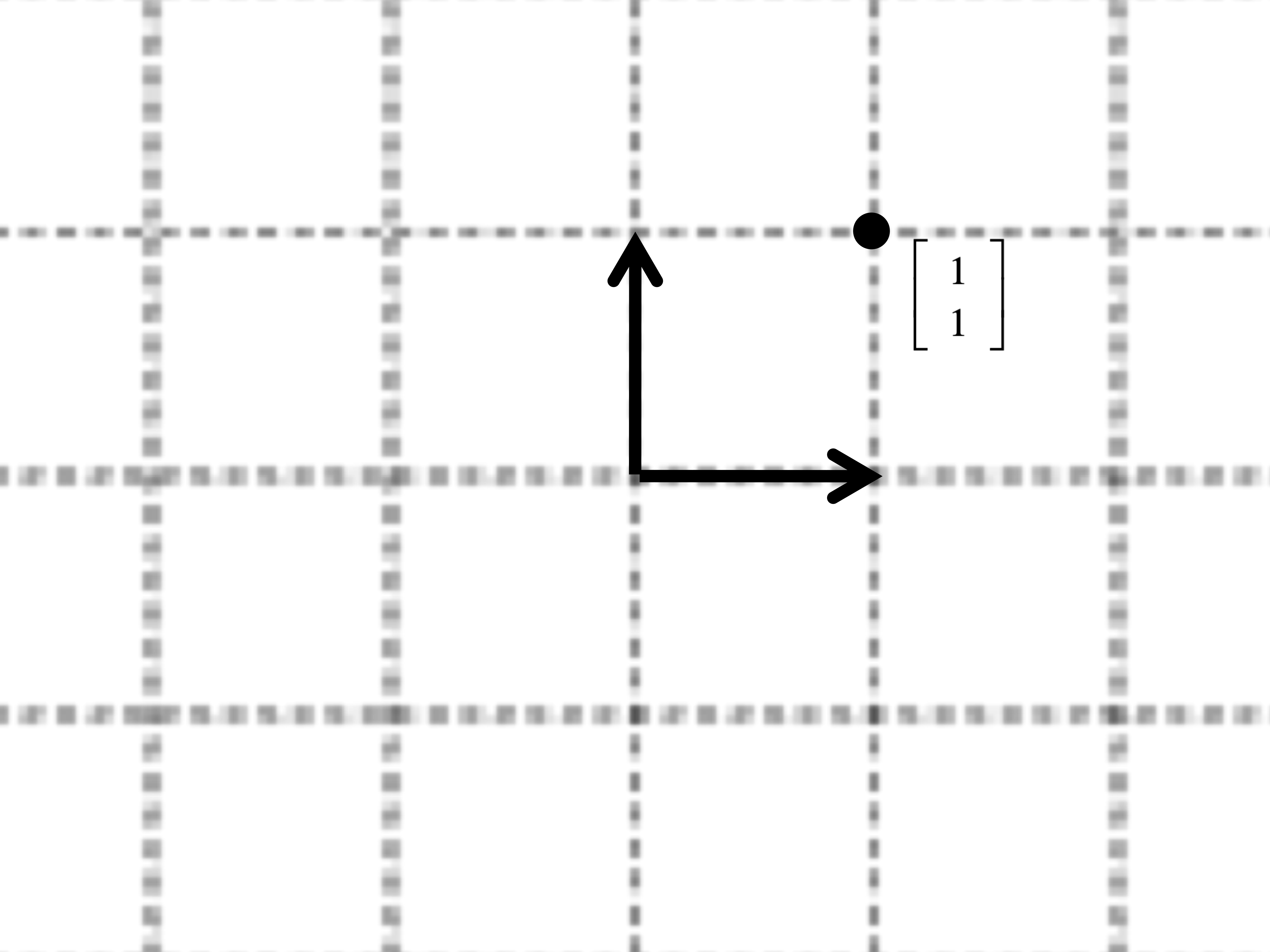


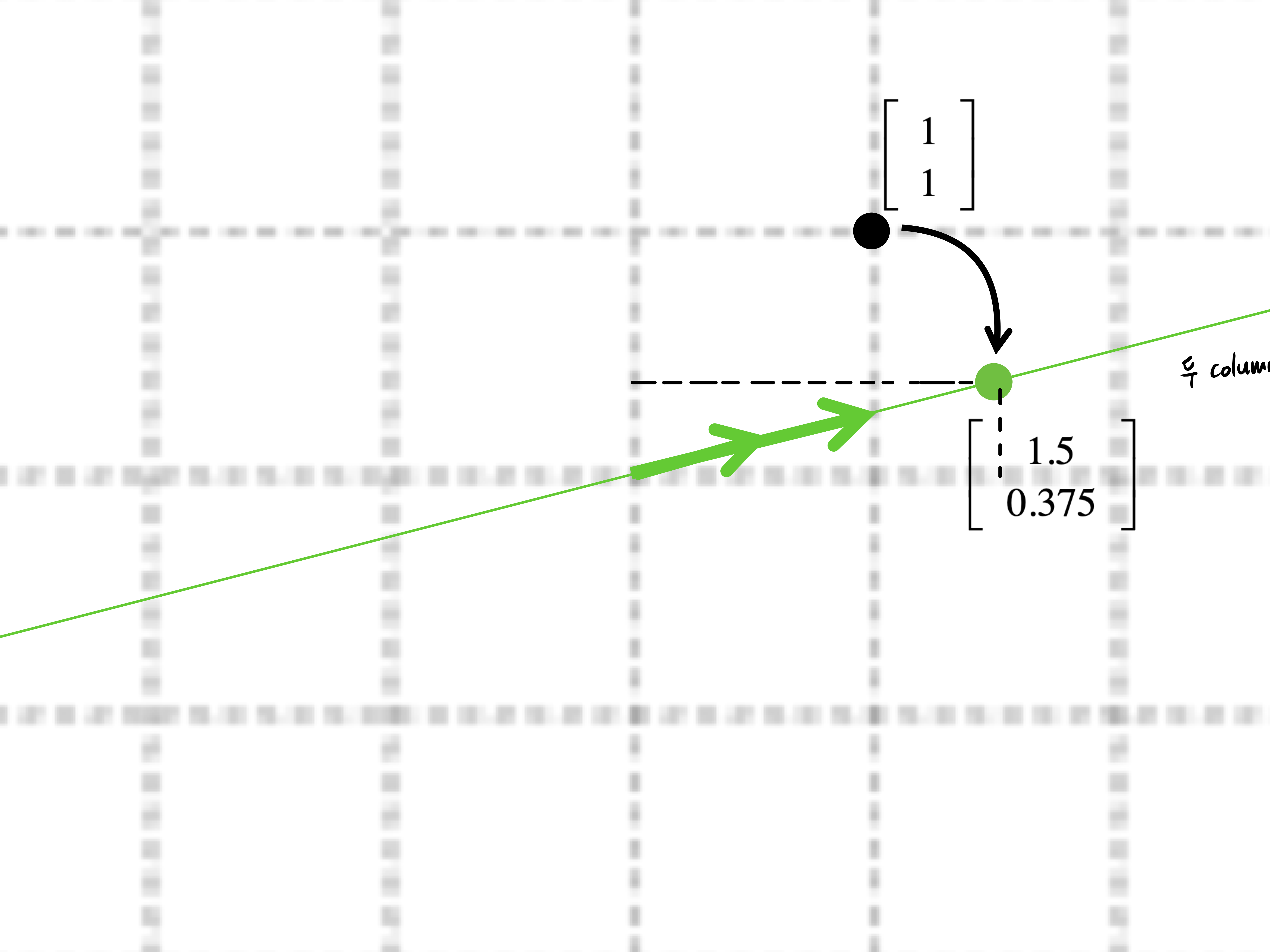
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
basis vector
basis vector
original grid

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.125 \end{bmatrix}$$



A (transformation) grid


$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}$
우 colum

Detransformation: Inverse matrix

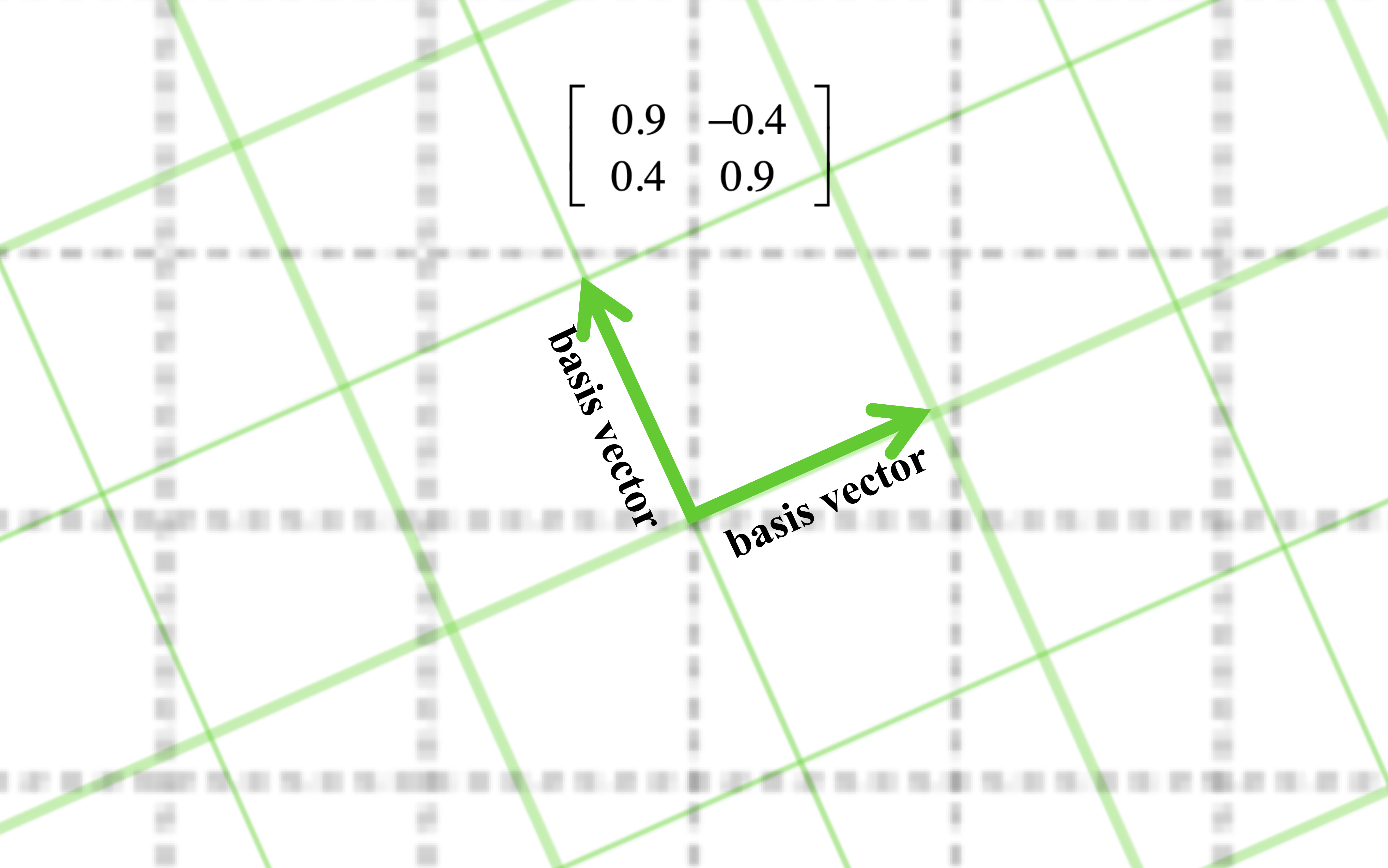
$$A^{-1}b = x$$

역함수

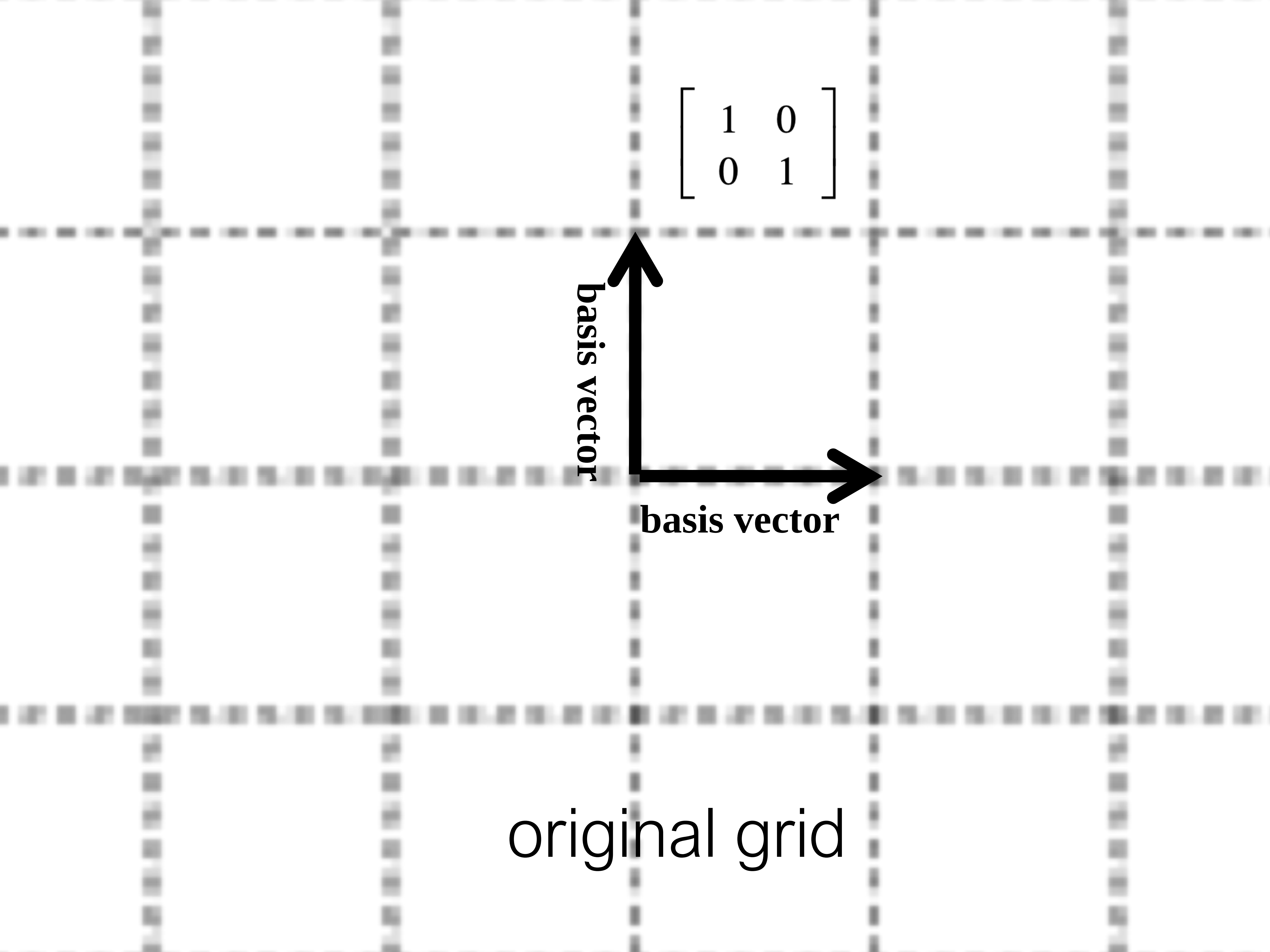
$Ax = b$

example 1

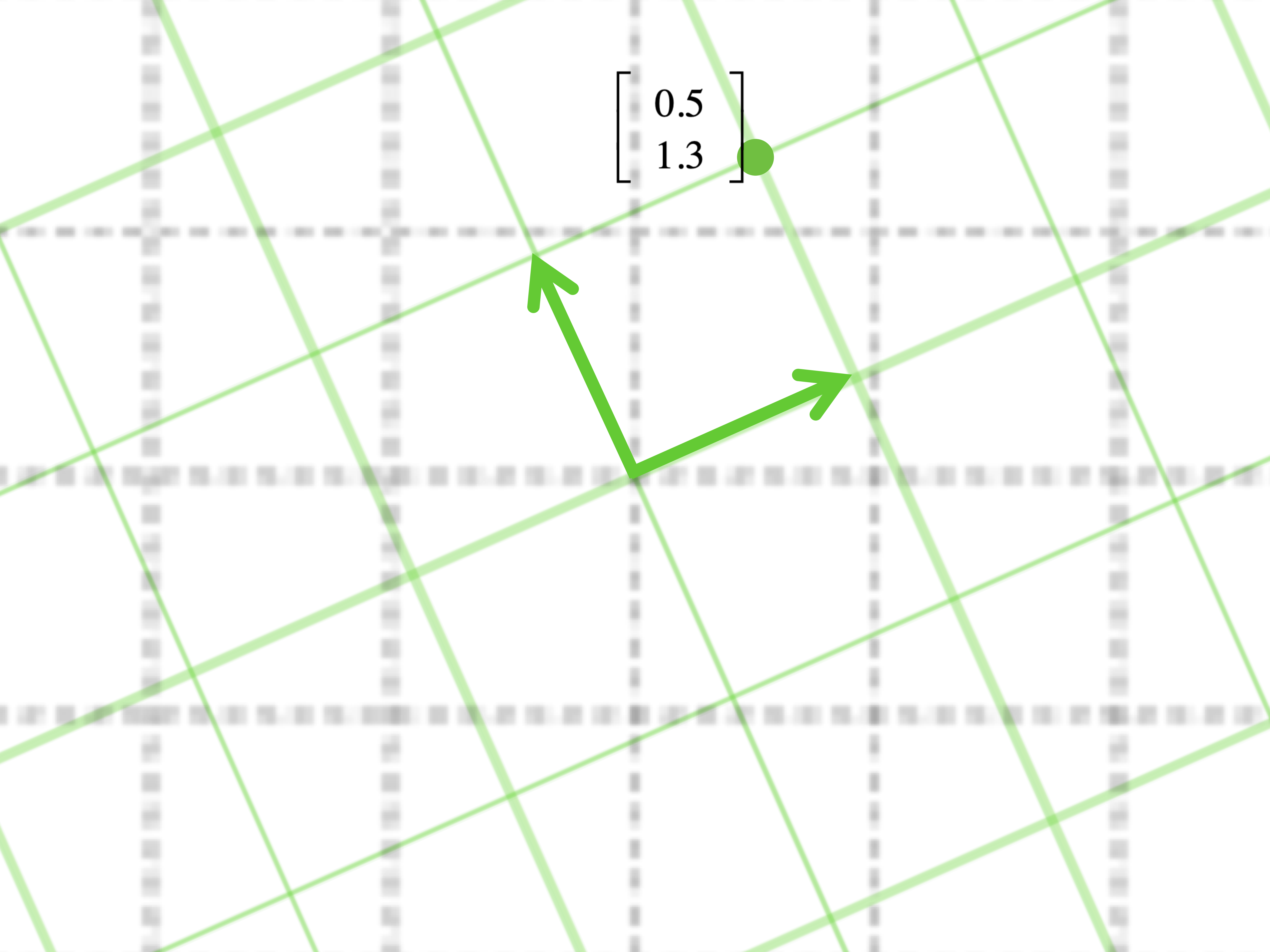
$$\underset{\text{inverse}}{\begin{bmatrix}0.9 & -0.4\\ 0.4 & 0.9\end{bmatrix}^{-1}} \underset{\text{출력값}}{\begin{bmatrix}0.5\\ 1.3\end{bmatrix}} = \underset{\text{입력}}{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}$$

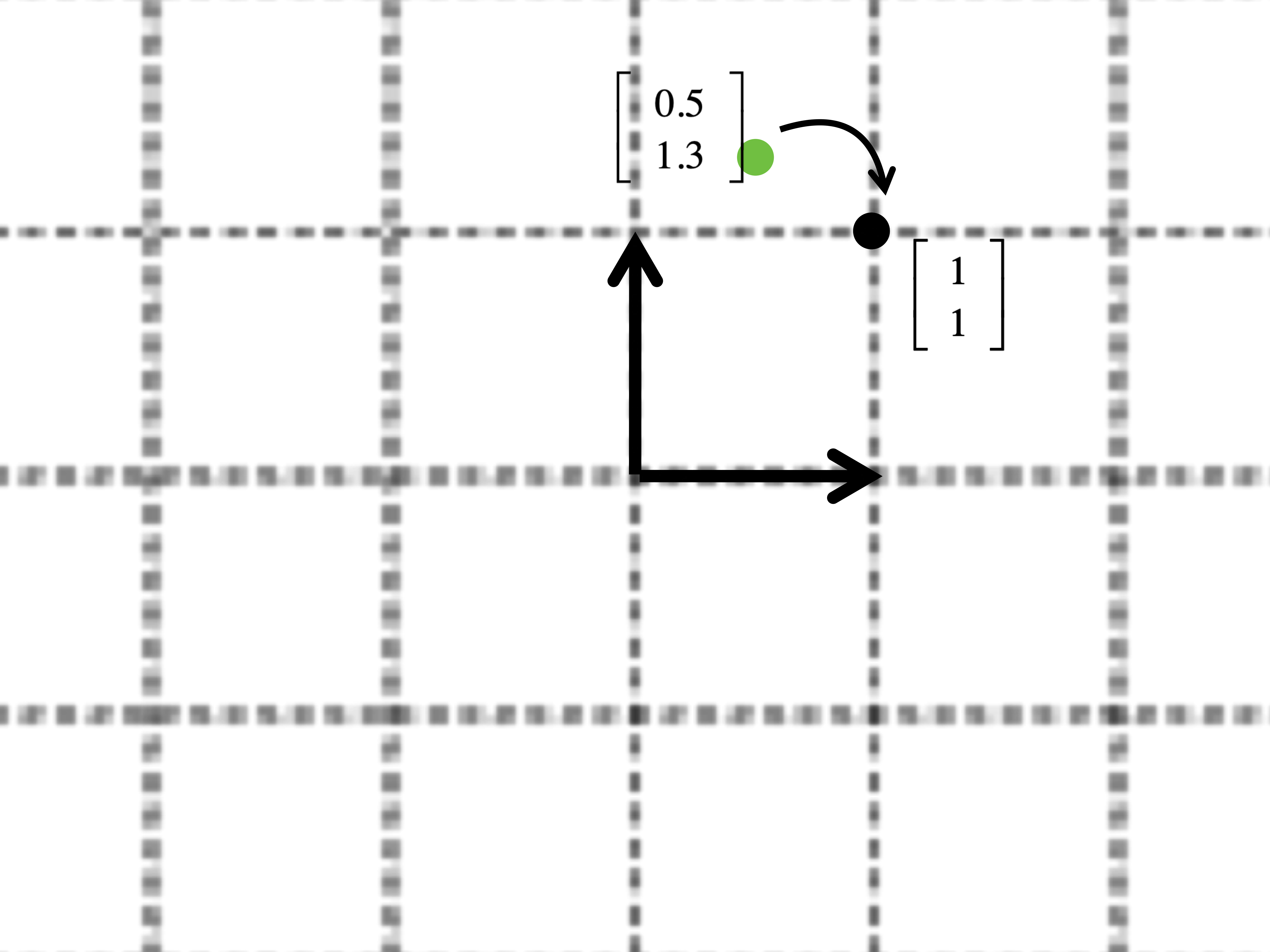


A (transformation) grid



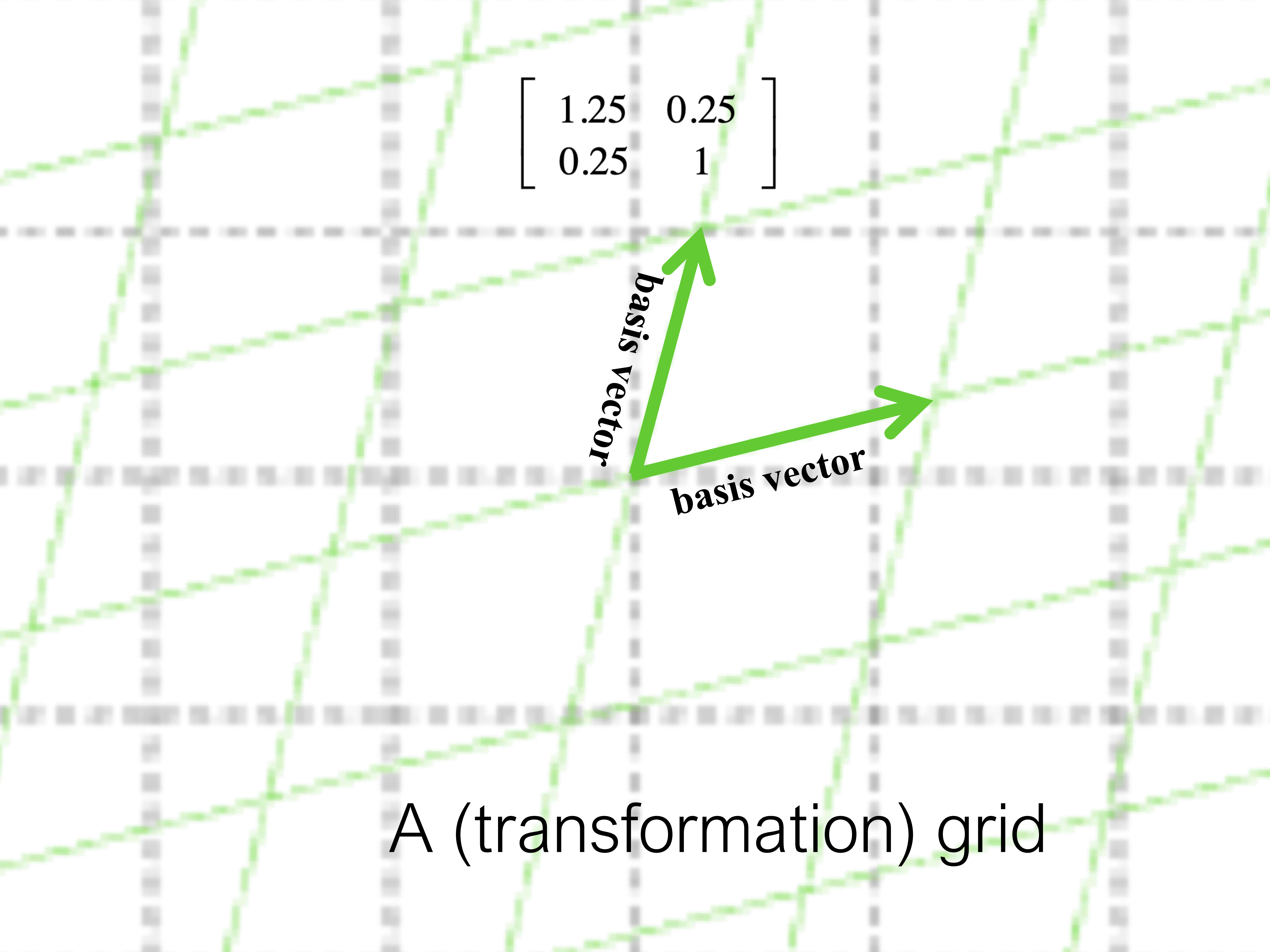
original grid


$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix}$

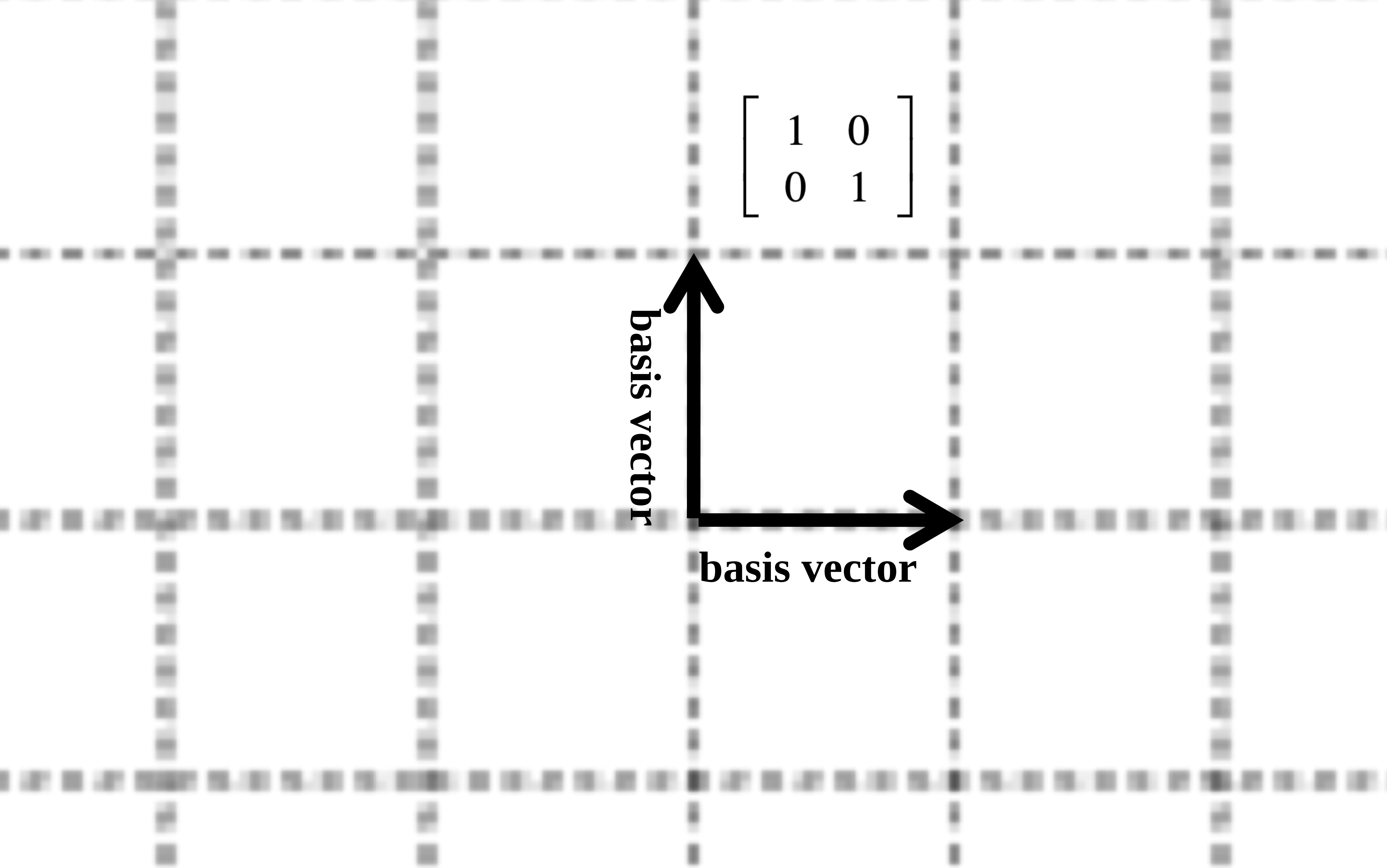

$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

example 2

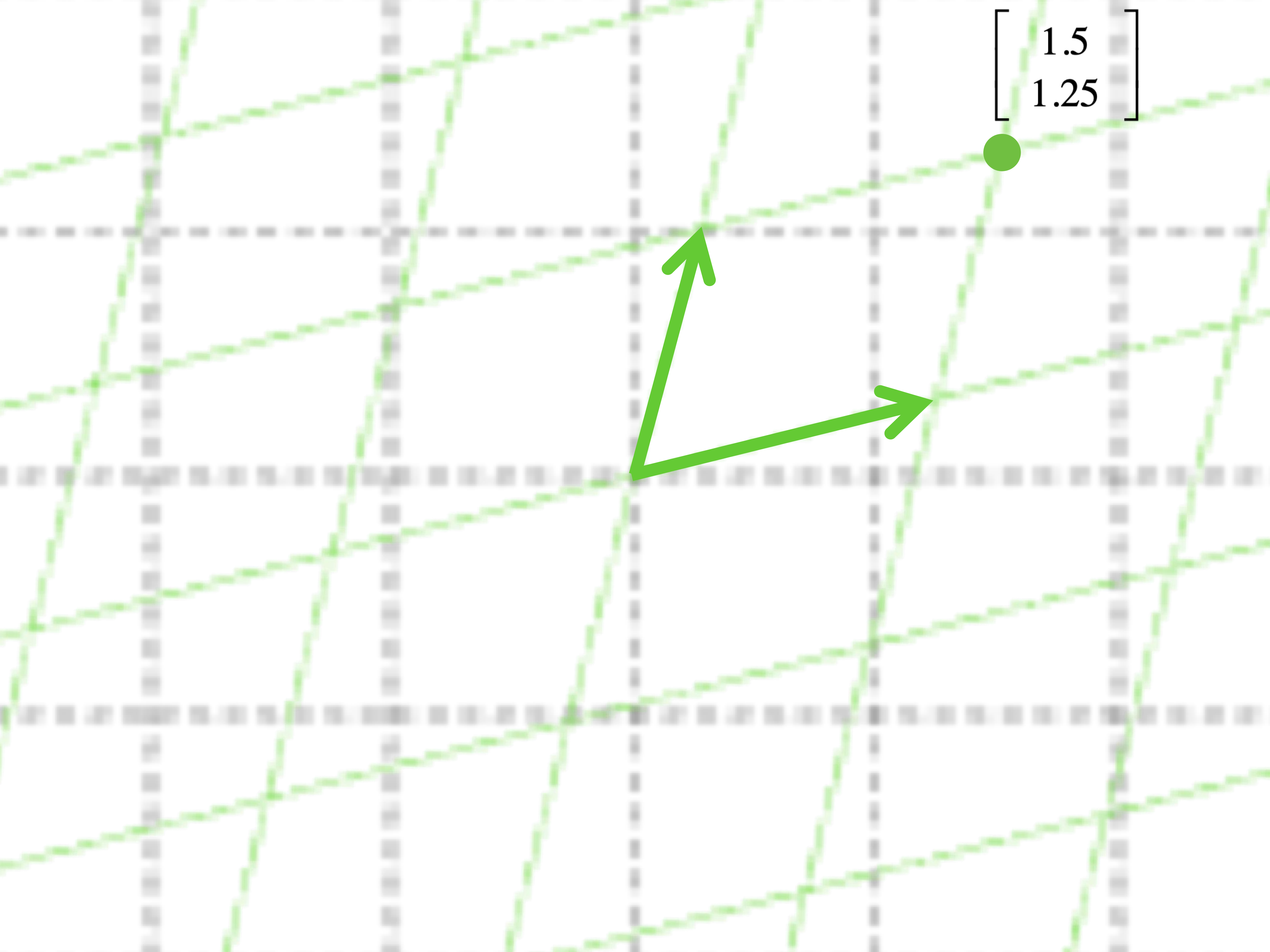
$$\begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

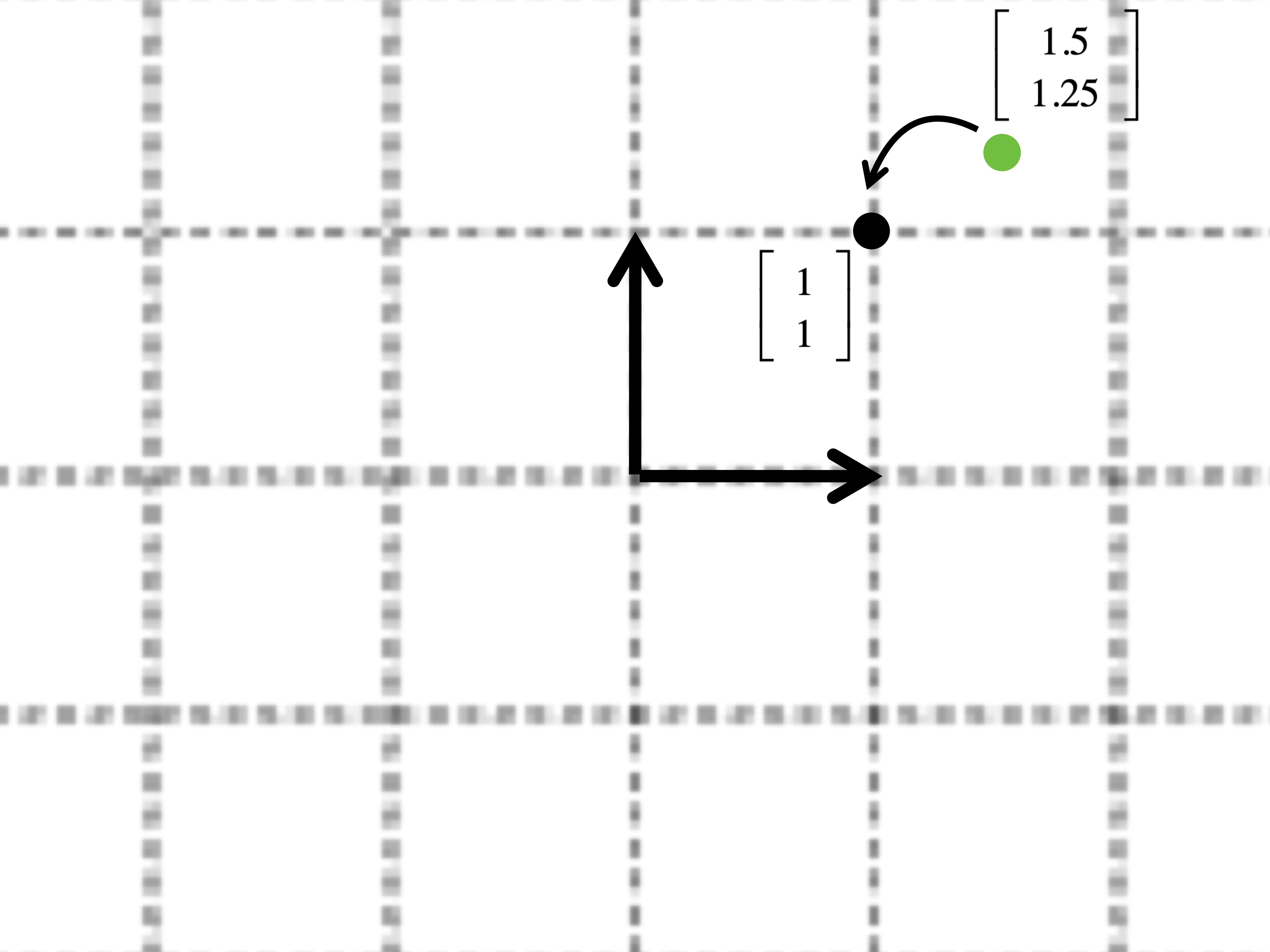


A (transformation) grid



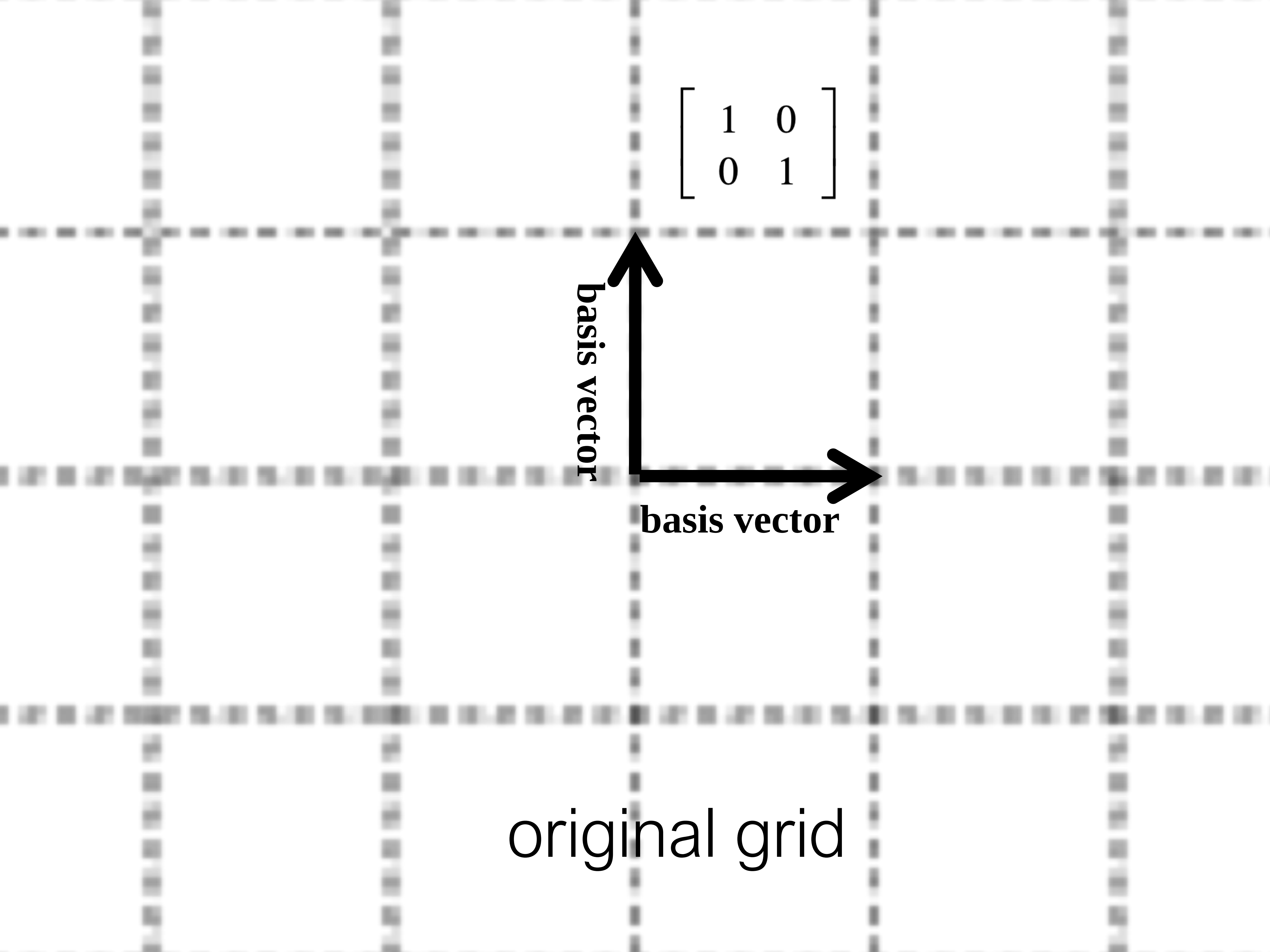
original grid


$\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.25 \end{bmatrix}$


1.5
1.25
1
1

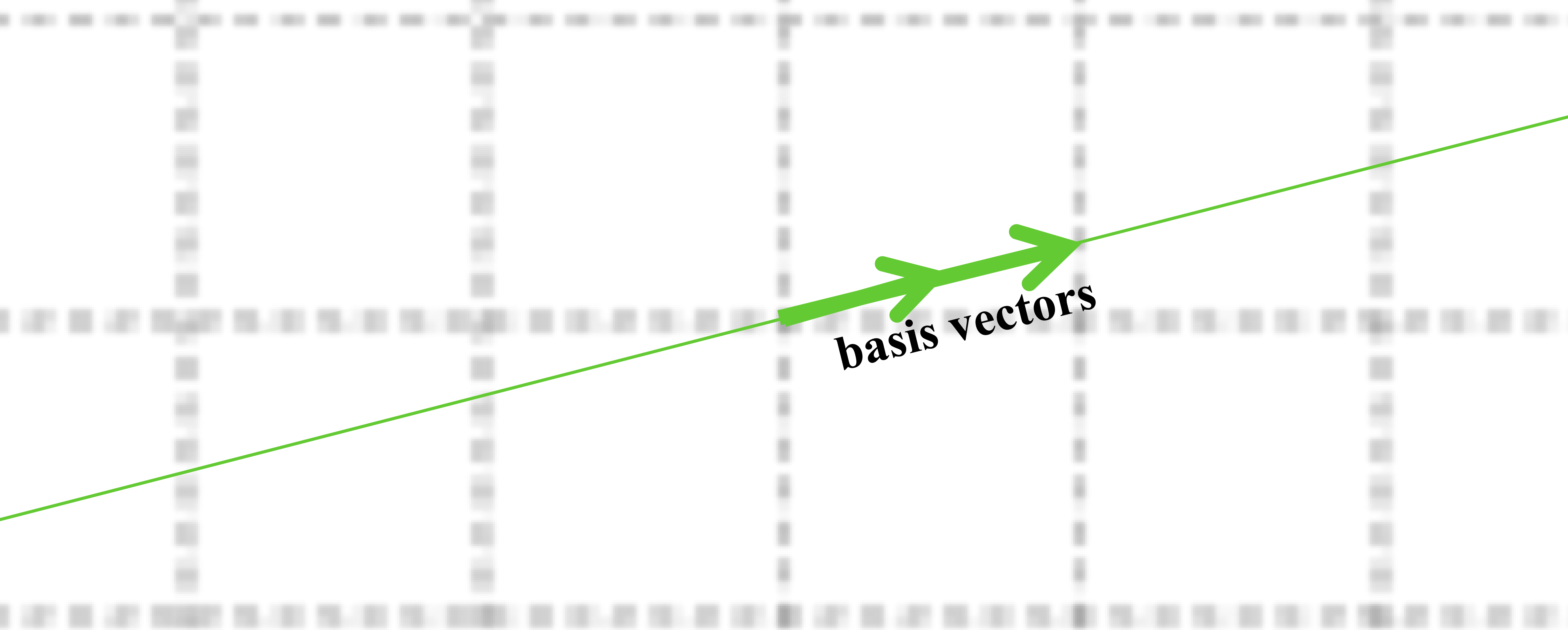
example 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.125 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

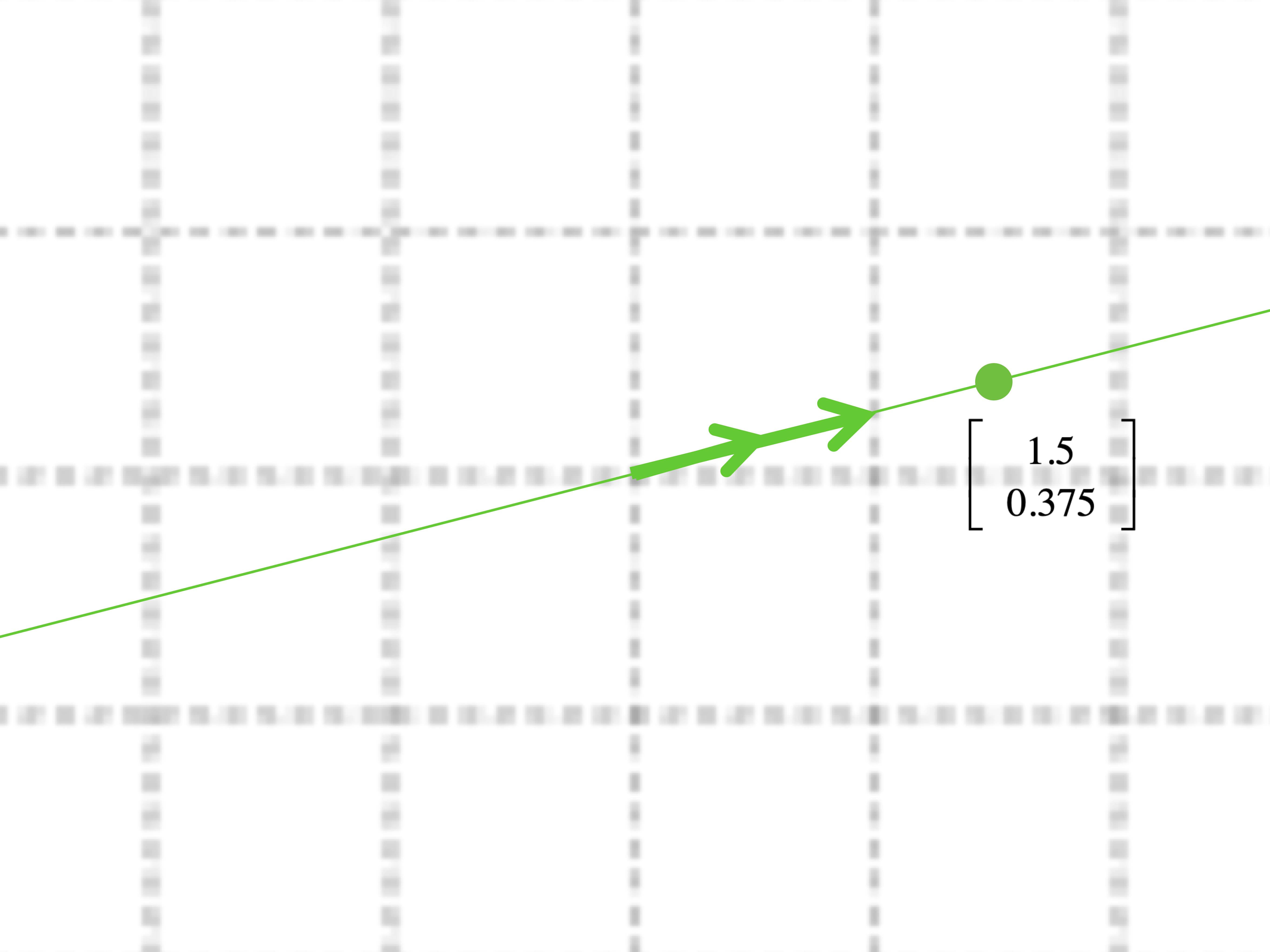


1 0
0 1
basis vector
basis vector
original grid

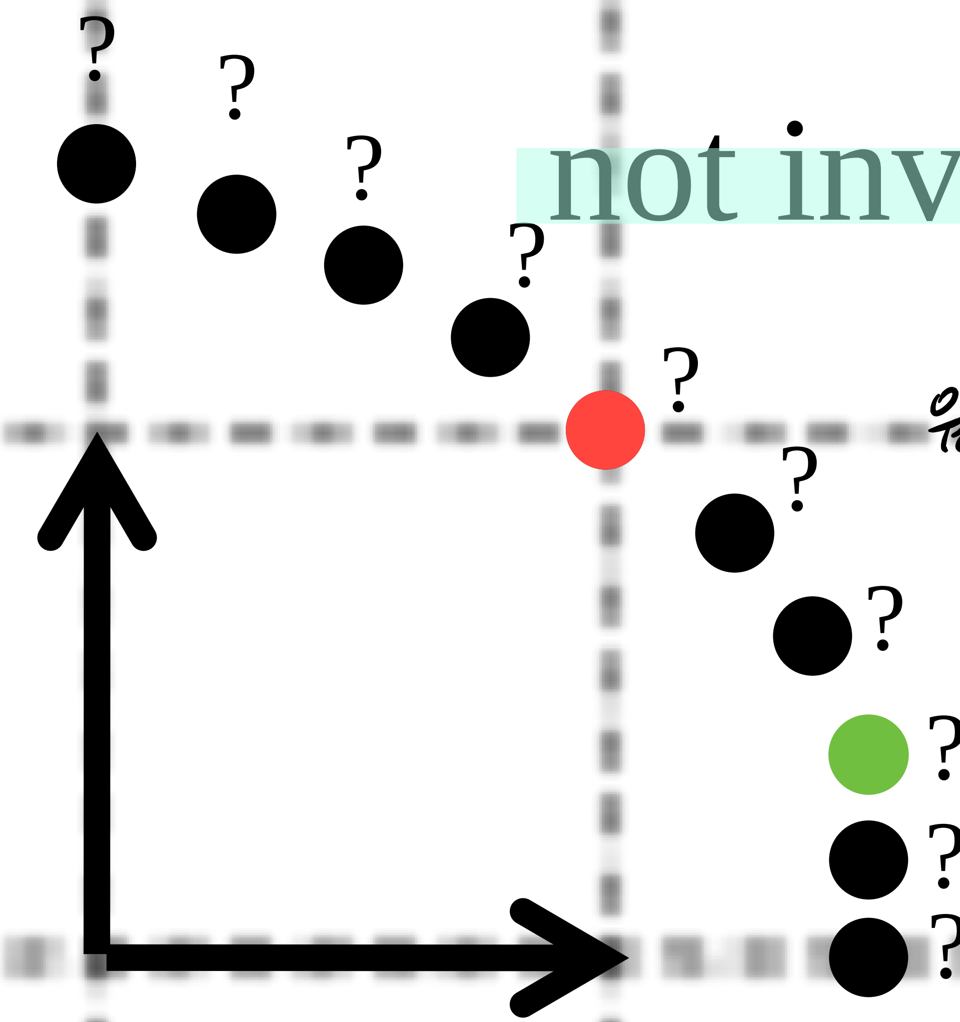
$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.125 \end{bmatrix}$$



A (transformation) grid



$\begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}$



not invertible

원래 자리로 찾아갈 수

independent 해야

어디에서 왔는지 알수

vertible 함

행렬식 0이 될 때 역함수 없음

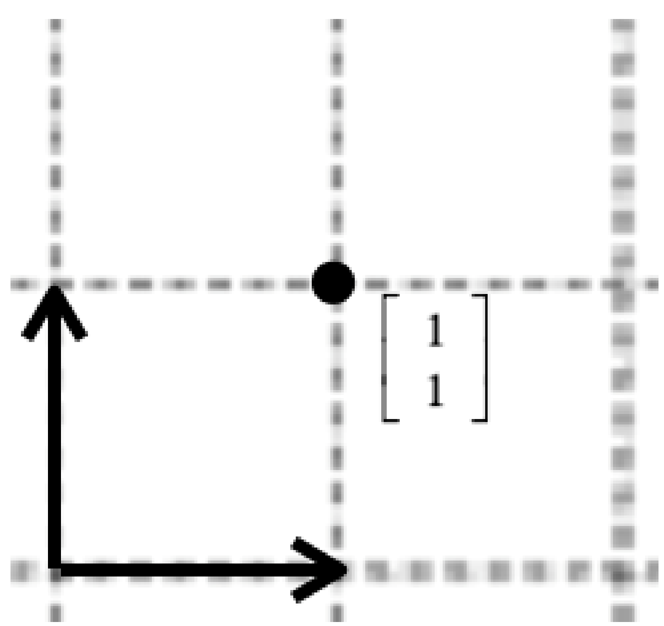
면적 = determinant 기하적으로 transformation 열 vector 면적과 동일

만약 ∫ = 0 → dependent

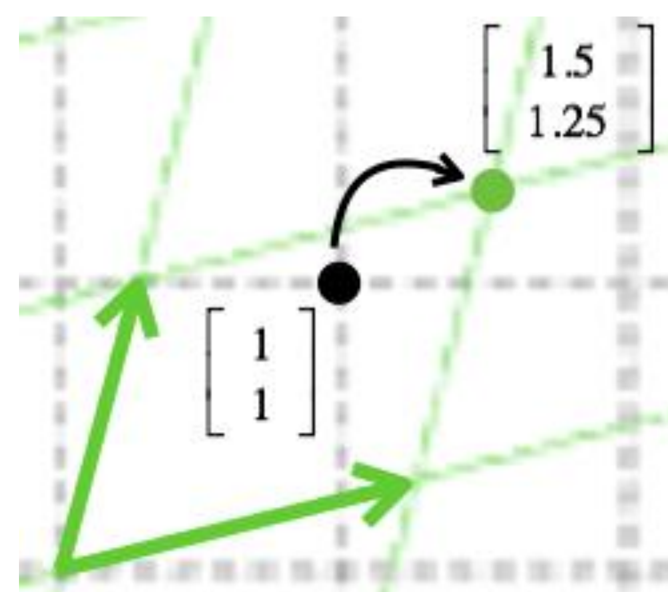
eigenvector

Av=b
A transforms v to b

$$\begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$



x space



b space