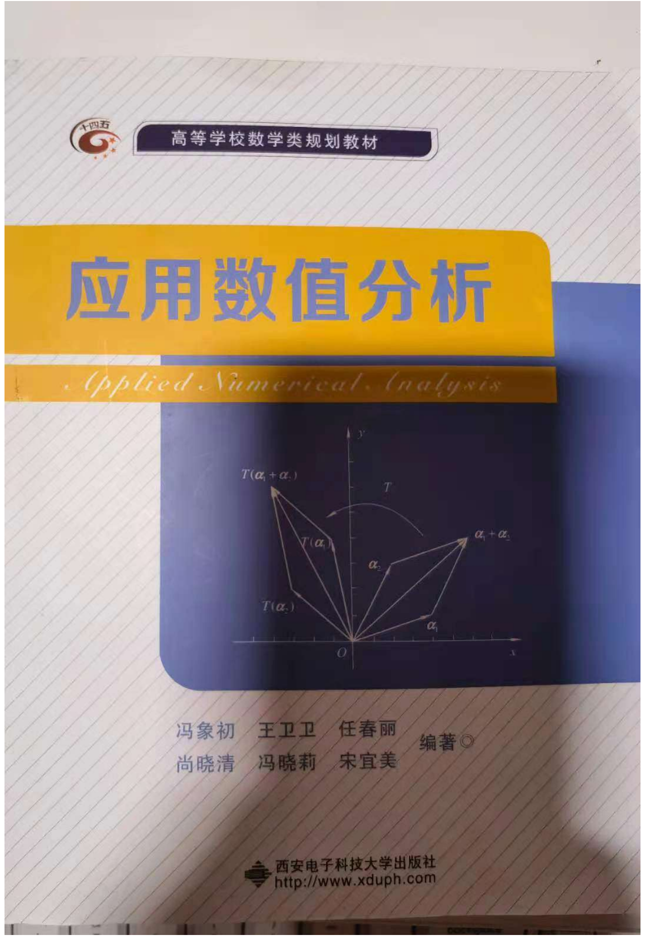
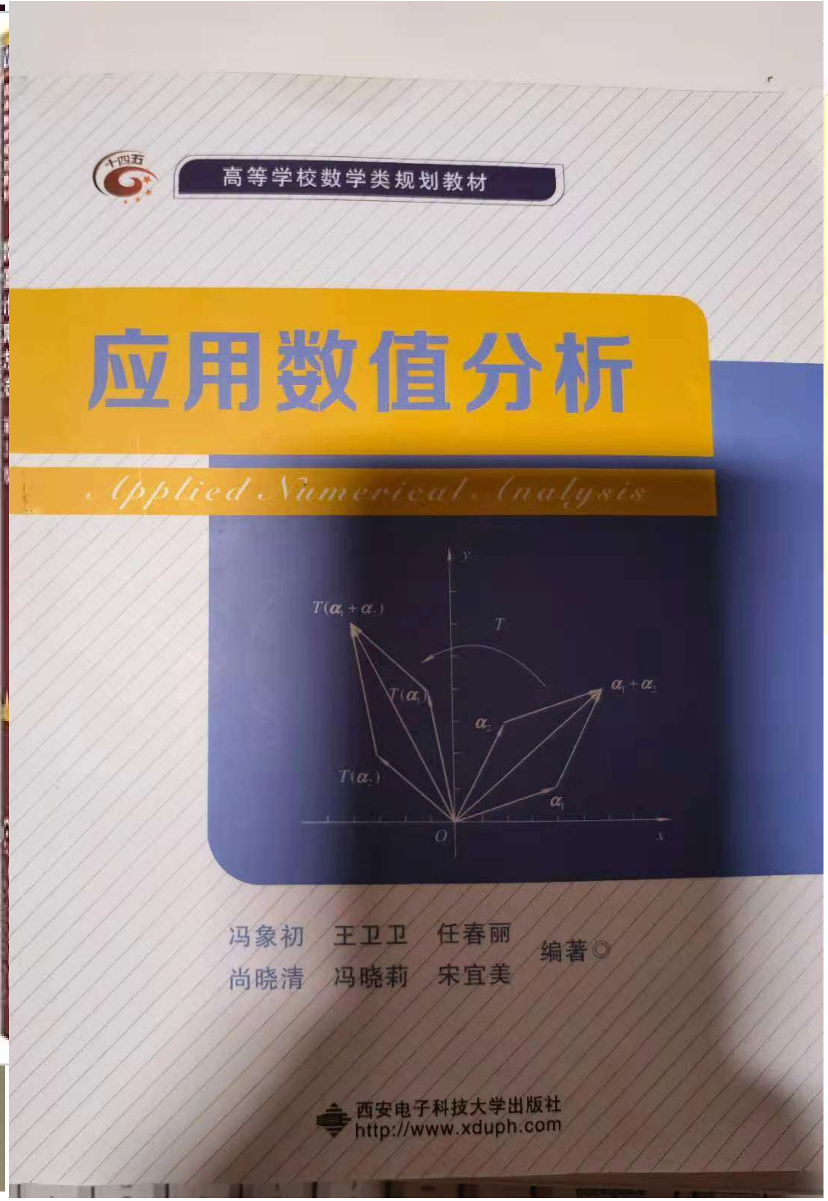


数值分析

数学与统计学院
宋宜美

数值分析参考书



下载邮箱：myshuzhifenxi@126.com，密码：my1234

20世纪数学最大的变化就是数学应用，美国科学工程和公共事务政策委员会报告《美国的现在和未来》（1986年）指出：

“今天，在技术科学中最有用的数学领域是数值分析和数学建模”。

传统的研究方法：理论研究、科学实验

第三种研究方法：科学计算

数值分析就是研究科学计算中各种数学问题求解的数值计算方法！

§1　引言

数值分析又叫计算方法、数值计算方法，
什么是数值分析?（Numerical Analysis）

• 数值分析是科学与工程计算的基础，它研究在计算机上解决数学问题的理论和可行的数值方法。

• 数学理论和计算机应用的紧密结合

1.1 可行的数值方法

◆有可计算性：面向计算机，根据计算机的特点提供切实有效的算法

◆有好的计算复杂性：时间和空间的复杂性，时间复杂性好是指节省时间，空间复杂性好是指节省存贮量，这也是建立算法要研究的问题。

◆有可靠的理论分析：能任意逼近并达到精度要求，对近似计算要保证算法收敛性和数值稳定性，误差分析。

◆要有数值实验：任何一个算法除了从理论上要满足上述三点外，还要通过数值实验证明是行之有效的。

只有满足这些条件的算法，才是可行的！

1）可计算性

例1　计算定积分 $I=\int_a^b f(x)dx$

公式一：牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

符号计算
超出了数值计算的范畴
不具有可计算性

公式二：积分中值定理

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

中矩形公式：$\int_a^b f(x)dx \approx f(\frac{a+b}{2})(b-a)$

梯形公式：$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$

可行的算法！

2）好的计算复杂性

例2　求解 $AX=b$　$\det(A)\neq 0$

公式一：克莱默法则　$X_i=\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}, i=1\sim n$

$n=20$，计算21个20阶的行列式，

乘法计算量是：$21\times 19\times 20!\approx 9.71\times 10^{20}$

10亿次/秒，1年完成的乘法运算量：

$10^9\times 365\times 24\times 3600\approx 3.15\times 10^{16}$

总乘法运算量：$9.71\times 10^{20}\div(3.15\times 10^{16})\approx 3.08\times 10^4$年

公式二：Gauss消去法，$O(\dfrac{n^3}{3})$　　可行的算法！

3）可靠的理论分析

- ◆稳定性
- ◆收敛性
- ◆误差分析

- ■ 理论可靠 精度可达 算法收敛 数值稳定 误差可析
- ■ 有的方法虽理论上不够严格，但实际计算、对比分析证实行之有效，也采用。

例3 计算 $I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx$， $n = 0, 1, 2, ...$

公式一：$I_n = 1 - n\, I_{n-1}$

注意此公式精确成立

$$I_0 = \frac{1}{e}\int_0^1 e^x dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63212056 \overset{\text{记为}}{=\!=} I_0^*$$

则初始误差 $|E_0| = |I_0 - I_0^*| < 0.5 \times 10^{-8}$

$$I_1^* = 1 - 1 \cdot I_0^* = 0.36787944$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_{10}^* = 1 - 10 \cdot I_9^* = 0.08812800$$

$$I_{11}^* = 1 - 11 \cdot I_{10}^* = 0.03059200$$

$$I_{12}^* = 1 - 12 \cdot I_{11}^* = 0.63289600$$

$$I_{13}^* = 1 - 13 \cdot I_{12}^* = -7.2276480$$

$$I_{14}^* = 1 - 14 \cdot I_{13}^* = 94.959424$$

$$I_{15}^* = 1 - 15 \cdot I_{14}^* = -1423.3914$$

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^n \cdot e^0\, dx < I_n < \frac{1}{e}\int_0^1 x^n \cdot e^1\, dx$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{e(n+1)} < I_n < \frac{1}{n+1} < 1$$

考察第n步的误差 $|E_n|$

$$|E_n| = |I_n - I_n^*| = |(1 - nI_{n-1}) - (1 - nI_{n-1}^*)| = n|E_{n-1}| = \cdots = n!|E_0|$$

可见初始的小扰动 $|E_0| < 0.5\times10^{-8}$ 迅速积累，误差呈递增走势。

造成这种情况的原因是：算法不稳定

（初始数据误差在计算中传播使计算结果误差增长很快！）

公式二：$I_n = 1 - n\, I_{n-1} \quad \Rightarrow \quad I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n)$

注意此公式与公式一在理论上等价。

方法：先估计一个I_N，再反推要求的I_n（ $n \ll N$ ）。

$$\because \frac{1}{e(N+1)} < I_N < \frac{1}{N+1}$$

可取 $I_N^* = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e(N+1)} + \frac{1}{N+1}\right] \approx I_N$

当 $N \to +\infty$ 时，$|E_N| = |I_N - I_N^*| \to 0$

取 $I_{15}^* = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e \cdot 16} + \frac{1}{16}\right] \approx 0.042746233$

$$\Rightarrow I_{14}^* = \frac{1}{15}(1 - I_{15}^*) \approx 0.063816918$$

$$I_{13}^* = \frac{1}{14}(1 - I_{14}^*) \approx 0.066870220$$

$$I_{12}^* = \frac{1}{13}(1 - I_{13}^*) \approx 0.071779214$$

$$I_{11}^* = \frac{1}{12}(1 - I_{12}^*) \approx 0.077351732$$

$$I_{10}^* = \frac{1}{11}(1 - I_{11}^*) \approx 0.083877115$$

$$\vdots$$

$$I_{1}^* = \frac{1}{2}(1 - I_{2}^*) \approx 0.36787944$$

$$I_{0}^* = \frac{1}{1}(1 - I_{1}^*) \approx 0.63212056$$

反推一步的误差： $|E_{N-1}| = \left|\frac{1}{N}(1-I_N) - \frac{1}{N}(1-I_N^*)\right| = \frac{1}{N}|E_N|$

对 $n < N$ 有： $|E_n| = \frac{1}{N(N-1)\dots(n+1)}|E_N|$

误差逐步递减，这样的算法称为稳定的算法

定义：对于某个算法，若输入数据的误差在计算过程中迅速增长而得不到控制，则称该算法是数值不稳定的，否则是数值稳定的。

◆同一个公式，产生的不同算法，一个稳定，一个不稳定，这是因为误差的影响

◆在我们今后的讨论中，误差将不可回避， 算法的稳定性会是一个非常重要的话题。

数值分析的核心问题

对给定的数学问题，构造一个可行的数值方法：

◆可计算性

◆低的计算复杂性：时间、空间

◆可靠的理论分析：稳定性、收敛性、误差分析

多选题 2分

设置

可行的数值方法在理论上需满足哪几点?

A 可计算性

B 可靠的理论分析

C 好的计算复杂性

D 要有数值实验

提交

主观题 4分

设置

1.计算复杂性包括哪些方面?

2.数值算法的稳定性指什么?

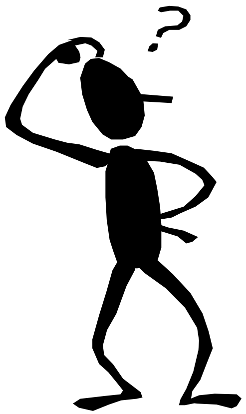
正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

2022/9/5

作答

1.2 本课程研究的范围

• 数值分析是科学与工程计算的基础，它研究在计算机上解决数学问题的理论和可行的数值方法。

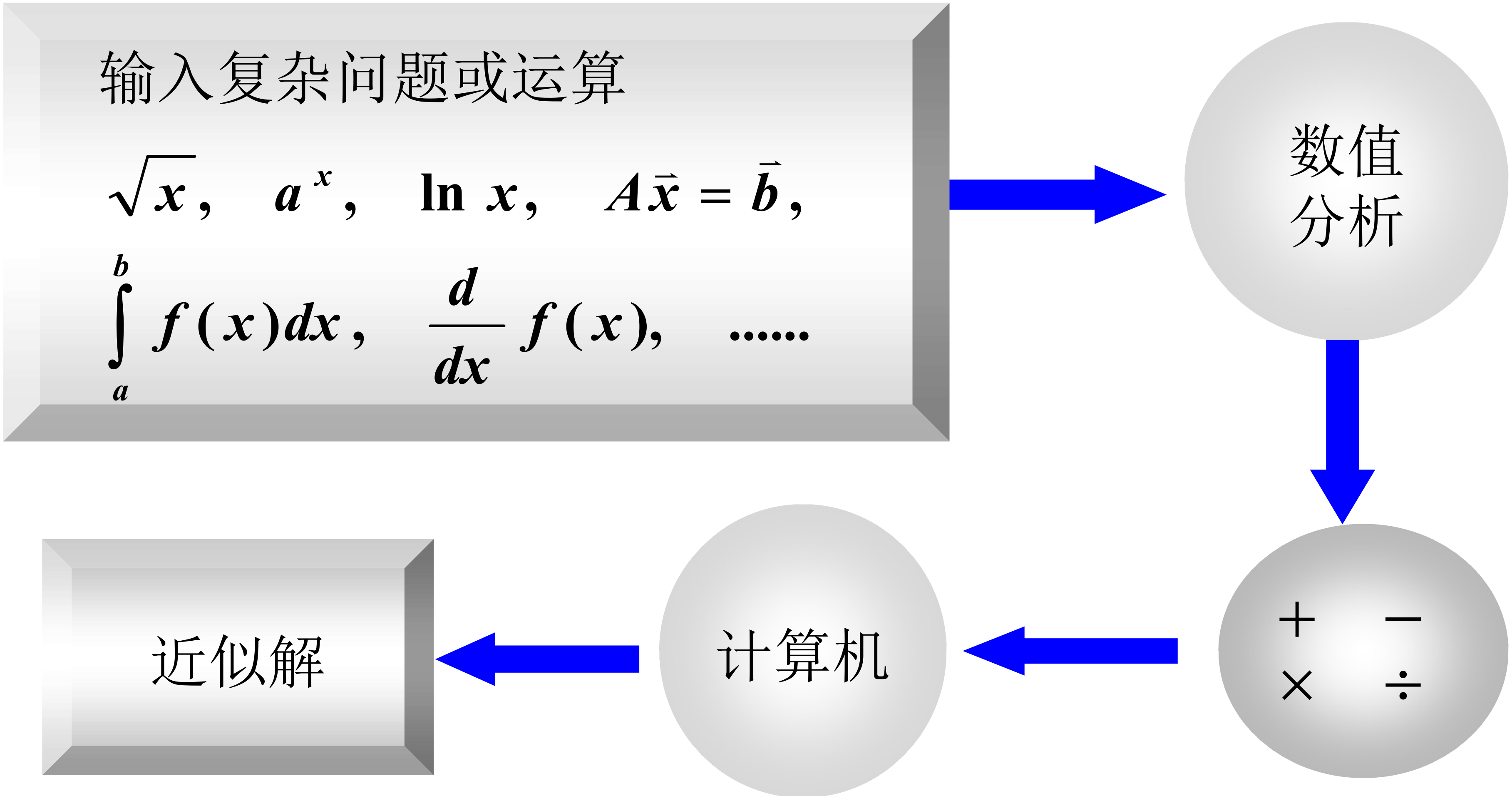
• 

➢研究（构造）使用计算机求解各种科学与工程计算问题的数值方法：对数学模型建立数值计算方法，并对方法进行理论分析；

➢如何在计算机上实现求解（程序设计）

➢对计算结果的分析：求得的数值解的精度进行评估（误差分析，稳定性）

数值分析解决的问题


输入复杂问题或运算
$\sqrt{x}$, a^x, $\ln x$, $A\vec{x} = \vec{b}$,
$\int_a^b f(x)dx$, $\frac{d}{dx}f(x)$, ……
数值分析
$+$ $-$ $\times$ $\div$
计算机
近似解

例1、已经测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（ºC）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

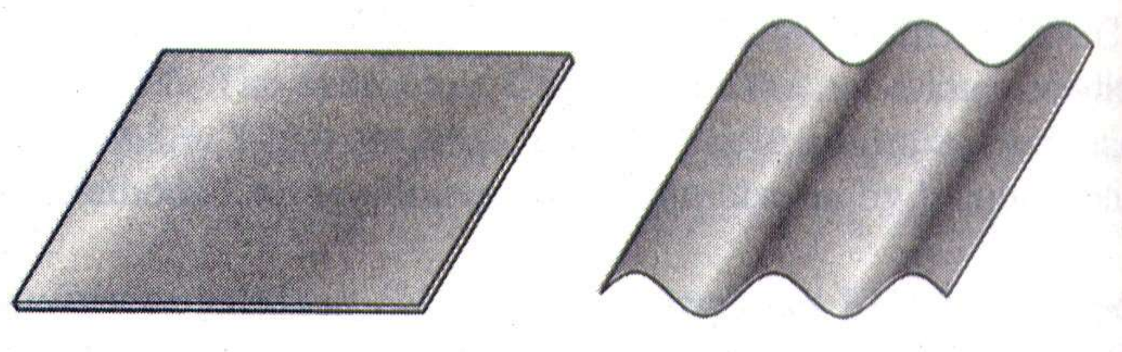
根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如500米，600米，1000米…）处的水温

插值法！

函数逼近与最小二乘法！

例2、铝制波纹瓦的长度问题

建筑上用的一种铝制波纹瓦是用一种机器将一块平整的铝板压制而成的.



假若要求波纹瓦长4英尺，每个波纹的高度(从中心线)为1英寸，且每个波纹以近似2π英寸为一个周期. 求制做一块波纹瓦所需铝板的长度L.

这个问题就是要求由函数$f(x)=\sin x$给定的曲线从$x=0$到$x=48$英寸间的弧长L.

由微积分学我们知道, 所求的弧长可表示为:

$$L=\int_0^{48}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^{48}\sqrt{1+(\cos x)^2}\,dx$$

上述积分称为第二类椭圆积分, 它不能用普通方法来计算.

数值积分!

例3、解线性方程组的问题

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

(1) 当$b\neq 0$时为非齐次线性方程组，其可能有唯一解、无解或无穷多解。当$b=0$时为线性齐次方程组，必有零解。

(2) 由线性代数知识可知：当系数矩阵A非奇异(即$\det A\neq 0$)时，方程组有唯一解，可用克莱默法则求解，但它只适合于n很小的情况，而完全不适合于高次方程组。

线性方程组的数值解法！

例4、　天体力学中的Kepler方程

$$x - \varepsilon \sin x - t = 0, 0 < \varepsilon < 1$$

x是行星运动的轨道，它是时间t 的函数

非线性方程（组）求根的数值解法！

例5、天气预报：受各种因素的影响，某个因素变化就会产生很大的变化，所以天气预报是一件比较困难的工作。

古代：用占卜或经验总结的方式来预测天气状况。这有点像统计学。如今：有计算机之后，可以通过数值模拟来预报天气。

根据大气运动列出数学物理方程（偏微分方程），求解困难（解析解）——求其数值解，有误差。

泛函分析

数值分析

数值逼近

- 插值法
- 最佳逼近
- 数值积分和数值微分

数值代数

- 求解线性方程组
- 非线性方程的求根法
- 代数特征值问题的数值解法

微分方程数值解

- 常（偏）微分方程数值解

什么是泛函分析？（Functional Analysis）

- 泛函分析：在集合的基础上，把客观世界中研究对象抽象为元素和空间，建立空间到空间的映射。

泛函分析将表面上彼此不相关的学科统一在它的普遍规律和共同框架之下。

- 空间到空间的映射：算子
- 空间到数集的映射：泛函

特别地，数集到数集的映射——函数，

函数空间到数集的映射——函数的函数

泛函分析与数值算法的关系

- 泛函分析是进行数值算法研究的理论基础，属于分析数学。对数值算法而言，运用泛函分析的观点与语言可使数值算法中很多定理与方法的推导变得简洁、直观。

- 本课程只介绍与数值算法有密切关系的泛函分析的基本概念和理论。（包括三大空间基本理论：距离空间、赋范线性空间、内积空间；压缩算子；不动点理论等等）

多选题 2分

设置

数值分析的又叫什么名称?

A 数值逼近

B 数值计算方法

C 计算方法

D 数值代数

提交

1.3 构造数值算法的基本思想

构造性:方法的构造，解的存在唯一性的证明

近似替代:在误差允许的范围内，无限次的计算用有限次计算替代

离散化:计算离散点的近似值,连续变量转化为离散变量

递推化:复杂计算过程转化成简单过程的多次重复（适合计算机计算，循环结构，迭代法）

近似替代

例6 计算无理数e的近似值.

解: $\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$$\therefore e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

这是一个无限过程，计算机无法实现. 一般，只能算出前有限项的和，作为其近似值

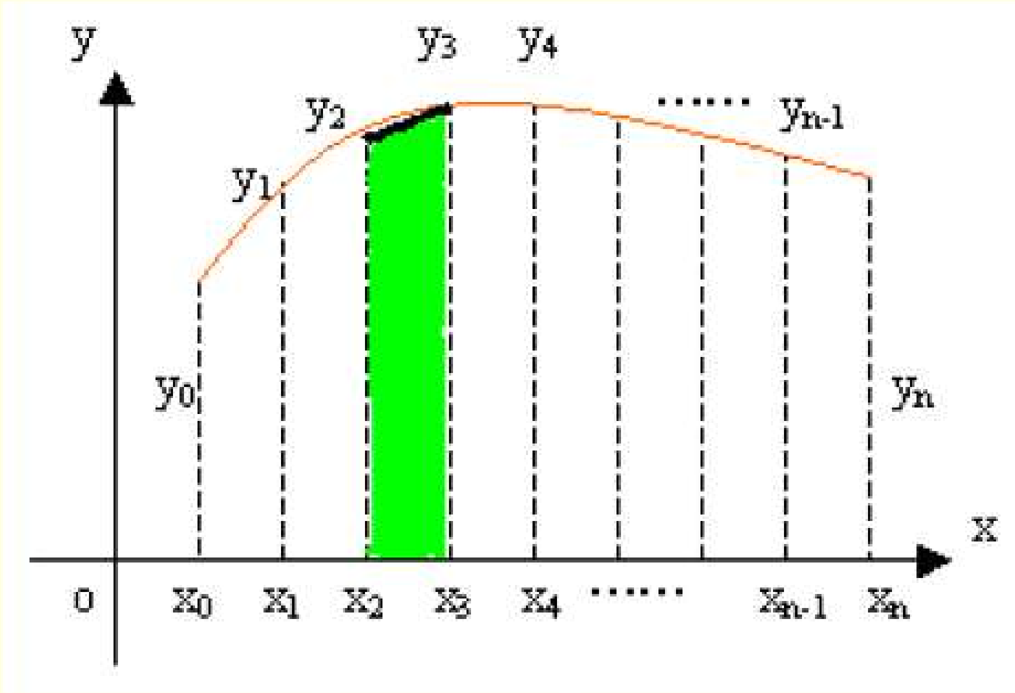
$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

由Taylor公式,由此产生的误差: $\left|R_n\right| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$

$$\because e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, (0 < \theta < 1)$$

例7 计算定积分 $I=\int_a^b f(x)dx$

I为如图所示的曲边梯形的面积，这个连续的问题，无法在计算机上计算.



一般，可以如下计算：

1. n等分 [a, b]，$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b, y_i=f(x_i), i=0,1,\ldots n.$

2. 用n个小梯形的面积之和近似代替曲边梯形的面积

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+\ldots+y_{n-1}]$$

递推化---复杂的计算归结为简单过程的多次重复. 易于用循环结构来实现. (迭代法)

例8 计算多项式 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$

构造递推算法:

$$\because P_n(x)=(a_nx+a_{n-1})x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}\ldots+a_1x+a_0$$

令 $u_0=a_n,\quad u_1=a_nx+a_{n-1}=u_0x+a_{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore P_n(x)&=u_1x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0\\&=(u_1x+a_{n-2})x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0\\&=u_2x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\begin{cases}u_0=a_n\\u_k=u_{k-1}x+a_{n-k}\end{cases}\quad(1.3)\quad\Rightarrow P_n(x)=u_n$$

这是我国宋代数学家秦九韶最先提出的, 称为秦九韶算法.

多选题 2分

设置

构造数值方法的基本思想有（　）？

A 递推化

B 算法可行

C 离散化

D 近似替代

提交

1.4 学习本课程的重要性

◆科学计算是工程实践的重要工具

在生命科学、航天航空、地质勘探、汽车制造、桥梁设计、天气预报等领域中有广泛的应用，产生了一系列计算性的学科分支，如计算物理、计算化学、计算生物学、计算地质学、计算气象学和计算材料学等，

数值计算方法则是解决“计算”问题的桥梁和工具。

◆科学与工程计算是继理论分析和数值实验后的第三种科学研究手段，（《第三种科学方法:计算机时代的科学计算》，石钟慈，暨南大学出版社 ）

◆科学与工程计算正在突飞猛进的发展

1.5 课程特点及学习要求

◆既有数学类课程中理论上的抽象性和严谨性，又有实用性和实验性的技术特征；各部分内容相对独立；方法是近似的，与计算机不能分离

◆学习要求

掌握各种数值方法的思想、基本原理与构造方法

注意算法的处理技巧及与计算机结合,掌握步骤和计算公式。

重视各种方法的误差分析、收敛性及稳定性的基本理论。

掌握经典方法的程序代码

做一定的理论分析证明与计算练习

其它要求

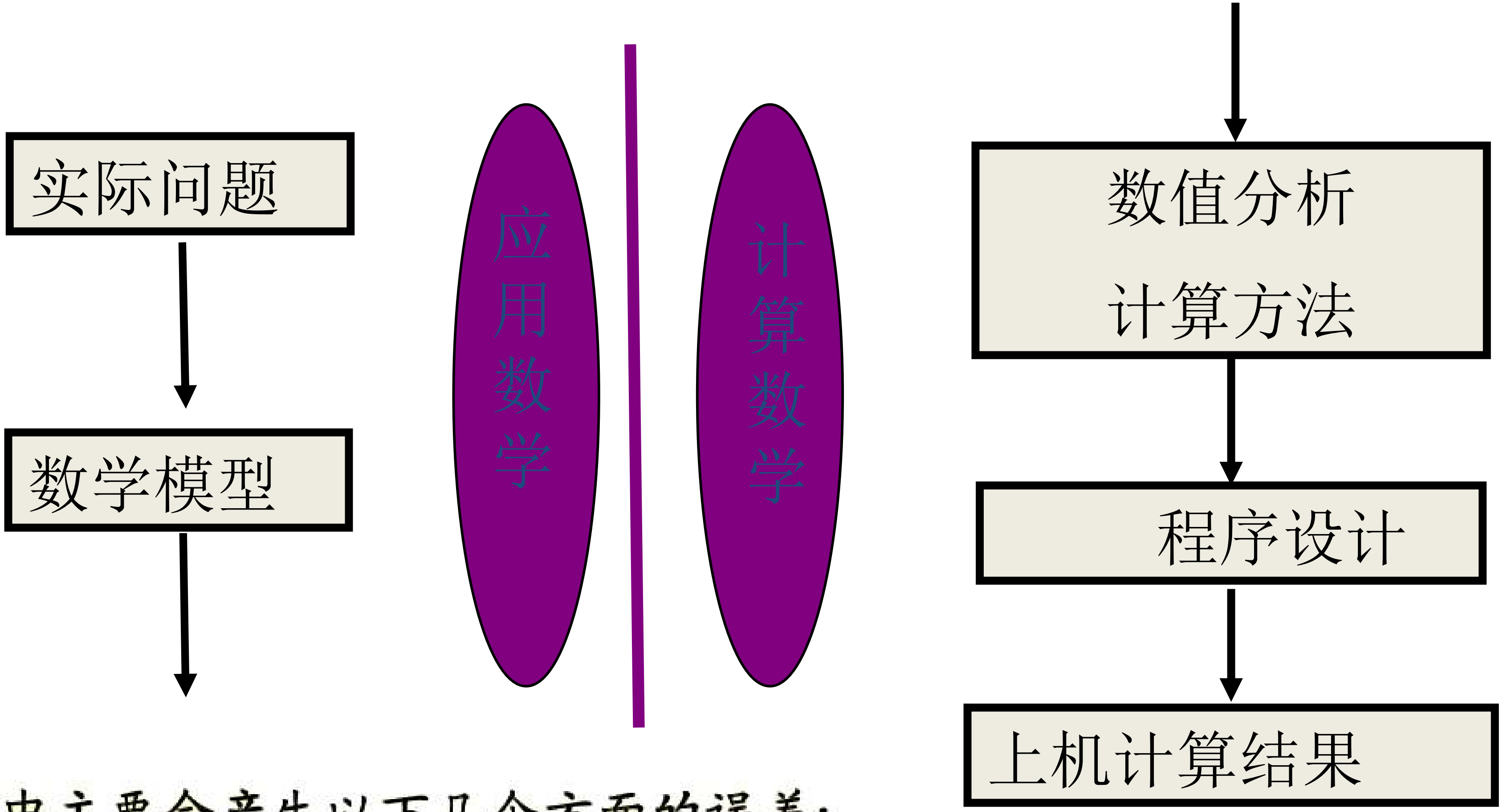
- 结合自己的研究方向，有重点地学习，最好能带着研究课题中的问题来学习
- 对每一类问题，不但要掌握求解方法的基本原理，还要掌握一套自己的程序代码
- 课前一定要做好预习和准备（按专题讲解）
- 课后要认真完成作业和上机练习
- 有问题要及时问

§2 误差理论

1、用计算机进行实际问题的数值计算时，往往求得的是问题的近似解，都存在误差。

2、误差是不可避免的，既要允许误差，又要控制误差．要重视误差分析，分析误差的来源，误差的传播及对误差作出估计。

用计算机解决科学计算问题通常经历以下过程：

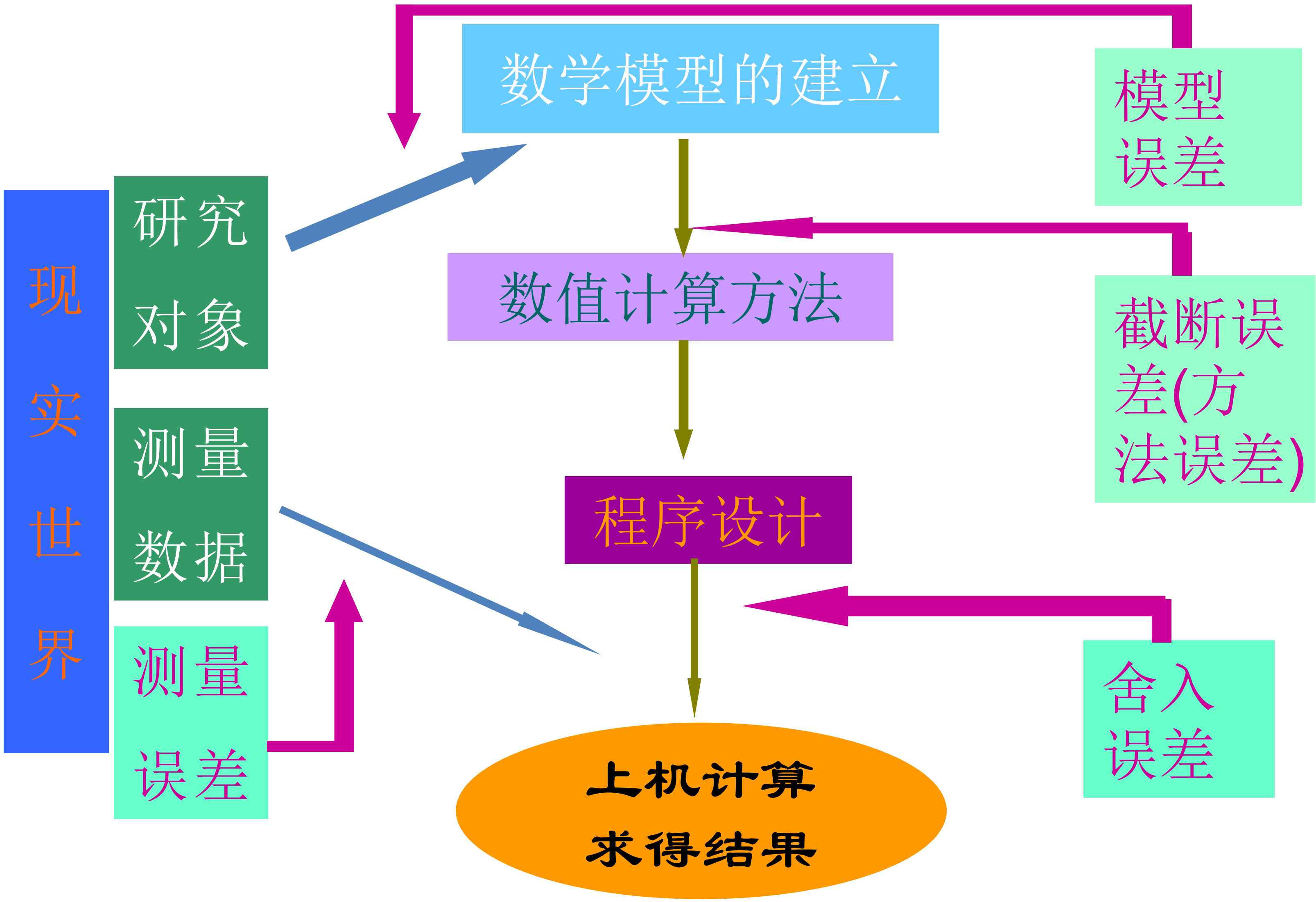


其中主要会产生以下几个方面的误差：

1. 模型误差　　3. 截断误差

2. 观测误差　　4. 舍入误差

2.1 误差的来源与分类


数学模型的建立
模型误差
现实世界
研究对象
数值计算方法
截断误差(方法误差)
测量数据
程序设计
测量误差
舍入误差
上机计算求得结果

➢ 从实际问题中抽象(简化)出数学模型, 模型与实际问题之间存在误差 —— 模型误差

例1 英国经济学家Malthus的人口模型

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \alpha p \\ p(t_0) = p_0 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{其中} \alpha = 0.029 \text{为生态系数。}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \alpha p - \beta p^2 \\ p(t_0) = p_0 \end{cases} \quad (2) \quad \text{其中 } \beta > 0 \text{ 为社会摩擦系数。}$$

通常假定模型合理，误差可忽略不计

- 模型中有许多物理量，如温度、长度、电压、电流等，通过测量得到模型中参数的值，观测产生误差

——— 观测误差

例2　已经测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（°C）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如500米，600米，1000米…）处的水温

观测误差是不可避免的，可根据测量工具的精度估计误差。

- 机器字长有限, 参与运算的数据在计算机中表示和计算过程产生误差 —— 舍入误差

由于计算机的字长有限,只能对有限位数进行运算,超过的位数按一定规则舍入,产生"舍入误差".

如 $\pi = 3.1415926\ldots, \sqrt{2} = 1.41421356\ldots$

在计算机上运算时, 只能取前有限位:

若取小数点后4位数字,舍入误差是

$$3.1416-\pi=0.0000074\ldots, 0.3333-\frac{1}{3}=-0.000033\ldots$$

➢ 采用数值方法求模型的近似解，近似解与精确解之间有误差 —— 方法误差（或截断误差）

例3 $e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\ldots$

$$e^{x}\approx S_{n}(x)=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}$$

$$R_{n}(x)=e^{x}-S_{n}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}(0<\theta<1)$$

记注：这两种是数值分析中要研究的对象。本课程“数值分析(计算方法)”主要研究它们在计算过程中的传播和对计算结果的影响，以提高计算的精度。

例4　近似计算 $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.747\ldots\ldots$

解：　将 e^{-x^2} 作Taylor展开后再积分

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots\right) dx$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\times\frac{1}{5} - \frac{1}{3!}\times\frac{1}{7}}_{S_4} + \underbrace{\frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} - \cdots}_{R_4}$$

取 $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx S_4$ ，

则 $R_4 = \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} - \frac{1}{5!}\times\frac{1}{11} + \cdots$ 称为截断误差

这里 $|R_4| < \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} < 0$

由截去部分引起

$S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \approx 1 - 0.333 + 0.1 - 0.024 = 0.743$

由留下部分引起

$|$ 舍入误差 $|$ $< 0.0005 \times 2 = 0.001$

$\left|计算 \int_0^1 e^{-x^2}dx 的总体误差\right| < 0.005 + 0.001 = 0.006$

2.2 误差分析的重要性

考察如下两个方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 0.9999x_2 = 1.9999 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 0.9999x_2 = 2.0001 \end{cases}$$

1）系数矩阵完全相同；

2）常数项矩阵有微小差别，右端系数1.9999变成2.0001，其误差为2.0001-1.9999=0.0002=0.02%

3）对应的解为 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

◆ 只有常数项矩阵有微小差别的方程组，其解竟然相差得很大！解的最大误差= 2 = 200%

2.3 传播与积累

"蝴蝶效应"

一只南美洲亚马孙河流域热带雨林中的蝴蝶,偶尔扇动几下翅膀,可能在两周后引起美国德克萨斯的一场龙卷风.

其原因在于：蝴蝶翅膀的运动,导致其身边的空气系统发生变化,并引起微弱气流的产生,而微弱气流的产生又会引起它四周空气或其他系统产生相应的变化,由此引起连锁反映,最终导致其他系统的极大变化.

此效应说明,事物发展的结果,对初始条件具有极为敏感的依赖性,初始条件的极小偏差,将会引起结果的极大差异 。

例5 计算 $I_n=\frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx$ ， $n=0,1,2,\ldots\ldots$

公式一：$I_n=1-n\ I_{n-1}$

$$I_0=\frac{1}{e}\int_0^1 e^x dx=1-\frac{1}{e}\approx 0.63212056 \overset{\text{记为}}{=\!=} I_0^*$$

则初始误差 $|E_0|=\left|I_0-I_0^*\right|<0.5\times10^{-8}$

$$|E_n|=|I_n-I_n^*|=|(1-nI_{n-1})-(1-nI_{n-1}^*)|=n\,|E_{n-1}|=\cdots=n!\,|E_0|$$

可见初始的小扰动 $|E_0|<0.5\times10^{-8}$ 迅速积累，误差呈递增走势。

造成这种情况的原因是：算法不稳定

（初始数据误差在计算中传播使计算结果误差增长很快！）

XIDIAN UNIVERSITY

公式二：$I_n = 1 - n\,I_{n-1} \quad \Rightarrow \quad I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n)$

可取 $I_N^* = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e(N+1)} + \frac{1}{N+1}\right] \approx I_N$

注意此公式与公式一在理论上等价。

当 $N \to +\infty$ 时，$|E_N| = |I_N - I_N^*| \to 0$

$$|E_{N-1}| = \left|\frac{1}{N}(1-I_N) - \frac{1}{N}(1-I_N^*)\right| = \frac{1}{N}|E_N|$$

$$|E_n| = \frac{1}{N(N-1)\dots(n+1)}|E_N|$$

误差逐步递减，算法是稳定的算法

练习　求积分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx \quad n = 0,1,2.....8$

$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{(x+5)x^{n-1}}{x+5} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$$

$$I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1} \qquad n = 1,2,...8$$

$$I_0 = 0.1823215$$

$$I_{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n} - I_n\right) \qquad n = 8,7....1$$

$$I_8 = 0.01883692$$

n	$I_n^{(1)}$	$I_n^{(2)}$	I_n
0	0.1823	0.1823	0.182322
1	0.08850	0.08839	0.0883922
2	0.05750	0.05804	0.0580389
3	0.04583	0.04314	0.0431387
4	0.02085	0.03431	0.0343069
5	0.09575	0.02847	0.0284684
6	-0.3121	0.02433	0.0243249
7	1.703	0.02123	0.0212326
8	-8.392	0.01881	0.0188369

结论：随着n增大，算法1的值越来越偏离真实值，不稳定。

多选题 2分

设置

数值分析课程主要研究的误差是哪些?

A 模型误差

B 舍入误差

C 测量误差

D 截断误差

提交

2.4 绝对误差与相对误差

2.4.1 绝对误差与绝对误差限

定义2.1　设x^*为准确值，x是x^*的近似值，则称$e=x^*-x$为近似值x的绝对误差，简称误差。

/ absolute error */*

绝对误差e 可正可负，但e无法求出；

$|e|$的大小标志着x的精确度。

若指定一个适当小的正数ε，使$|e|=|x^*-x|\leq\varepsilon$，则 ε?称为近似值x 的绝对误差限。简称误差限或精度.?

/ absolute accuracy */*

•有时用$x^{*}=x\pm\varepsilon$表示近似值x的精度或准确值的所在范围。

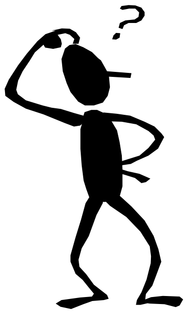
(1)绝对误差一般有量纲，绝对误差限也有量纲。

(2)绝对误差限是正的，有无穷多个。

例6　用一把有毫米的刻度的米尺，来测量桌子的长度，读出的长度 $\boldsymbol{x}$ =1235mm.

分析　设米尺误差不超过0.5 =1/2mm，则 $\left|x^{*}-1235\right|\leq\frac{1}{2}$

$1234.5\leq x^{*}\leq 1235.5$　或　$x^{*}=1235\pm 0.5$



有两根卷尺，X卷尺测量一根10m长的圆钢时发生了0.5cm的误差，Y卷尺测量10cm长的圆钢时发生了0.5cm的误差，绝对误差都是0.5cm，哪一个更精确？

$$x = 1000 \pm 0.5 \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.5$$

$$y = 10 \pm 0.5$$

X卷尺更精确！

$$\frac{\varepsilon_x}{x^*} = \frac{0.5}{1000} = 0.05\%, \frac{\varepsilon_y}{y^*} = \frac{0.5}{10} = 5\%$$

◆ 决定一个量近似值的优劣，除了要考虑绝对误差的大小外，还应考虑准确值本身的大小！

2.4.2 相对误差与相对误差限

定义2.2 设x^*为准确值，x是x^*的近似值，则称

$$e_r=\frac{e}{x^*}=\frac{x^*-x}{x^*}\approx\frac{x^*-x}{x}\quad /*\ relative\ error\ */$$

为近似值x的相对误差.

若$|e_r|=\left|\frac{x^*-x}{x}\right|\approx\left|\frac{e}{x}\right|=\varepsilon_r$, $/*\ relative\ accuracy\ */$

则 ε_r称为近似值x的相对误差限.

注：绝对误差与相对误差的区别

1. 绝对误差是有量纲，而相对误差无量纲。
2. 对于同一个量的两个不同近似值，可以通过其绝对误差来判断谁更精确。对于两个不同量的近似值，只有通过其相对误差来比较其精确程度。

相对误差比绝对误差更能反映准确数与近似数的差异。

绝对误差限和相对误差限均无穷多，自然越小越好。

误差估计的任务是提供好的误差限，误差限越小，数据越准确可靠。

设$x=1.24$是由精确值x^*经过四舍五入得到的近似值，求出x的绝对误差限和相对误差限。

作答

例7 设 $x^* = \pi = 3.1415926\cdots$,

取$x_1 = 3$作为π的近似值，则

精确到个位，1位有效数字！

$$|e_1| = 0.1415\cdots \le \frac{1}{2}\times 10^{0}$$

绝对误差不超过0.5，个位的半个单位

取 $x_2 = 3.14$ 作为π的近似值，则

精确到0.01，3位有效数字！

$$|e_2| = 0.00159\cdots \le \frac{1}{2}\times 10^{-2}$$

绝对误差不超过0.005，百分位的半个单位

取 $x_3 = 3.1416$作为π的近似值，则

精确到0.0001，5位有效数字！

$$|e_3| = 0.00000734\cdots \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

绝对误差不超过0.00005，百分位的半个单位

它们的误差都不超过末位数字的半个单位。

➢用四舍五入法得到的近似值，其绝对误差限等于末尾数字的半个单位！

➢用四舍五入法得到的近似值，其每位数字都是有效数字！

➢当x有很多位数字时，常按照“四舍五入”原则取前几位数字作为x的近似值.

注：0.2300有4位有效数字，而00023只有2位有效数字；12300如果写成0.123×10^5，则表示只有3位有效数字.

数字末尾的0不可随意省去！

2.5 有效数字 /* significant digits */

2.5.1 有效数字的定义

定义2.3

若近似值x的绝对误差限是某一位的半个单位，该位到x的第一位非零数字一共有n位，则称近似值x有n位有效数字，或说x精确到该位

例8 设 $x^* = 3.200169$，确定它的近似值 $x_1 = 3.2001$， $x_2 = 3.2002$ 分别具有几位有效数字?

解 $\left| x^* - x_1 \right| = 0.069 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}$,

误差都不超过某位数字（千分位**0**）的半个单位。

故 $x_1 = 3.2001$ 具有**4**位有效数字.

类似求得, $x_2 = 3.2002$ 具有**5**位有效数字.

或者因为 x_2 是用四舍五入法得到的近似值,
故其各位数字都是有效数字!

科学记数法（标准浮点数）

一台电脑价格5399元， 0.5399×10^{4}

地球半径6378127m， 0.6378127×10^{7}

光速299792458米/秒 0.299792458×10^{9}

尾数部 阶码部

定义2.4 设近似值 $x=\pm0.a_1a_2\cdots a_n\times10^{m}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是0到9之间的自然数，$a_1\neq0$，m 为正数，如果

$$\left|x^{*}-x\right|\leq\frac{1}{2}\times10^{m-n}$$

称近似值 x 具有 n 位有效数字。即 a_n 的截取按四舍五入规则

例9 $x^* = \pi = 3.141592653589793 2\cdots\cdots; \quad x = 3.1415$

问： x 有几位有效数字？请证明你的结论。

证明：$\because x = 0.31415 \times 10^1$,

and $|x^* - x| < 0.5 \times 10^{-3} = 0.5 \times 10^{1-4}$

$\therefore x$ 有 4位有效数字，精确到小数点后第 3 位。

或者，绝对误差不超过0.0005，千分位的半个单位

2.5.2 有效数字与误差限的联系

注：1.可以通过误差限确定其有效数字位数

2.可以通过有效数字的位数来确定其误差限.

➢有效数字与绝对误差的关系

☞ ⇒有效数字位数越多，绝对误差限也就越小！

例10(课后练习) (1)若x*=3587.64是x的具有六位有数字的近似值,那么它的误差限是多少? (2)若x*=0.0023156是 x 的具有5位有效数字的近似值,它的误差限是多少?

解：(1) $\because x^* = 0.358764\times10^4, (m=4, n=6)$

$$\therefore |x^*-x| \le \frac{1}{2}\times10^{4-6} = \frac{1}{2}\times10^{-2}$$

(2) $\because x^* = 0.23156\times10^{-2}, (m=-2,\ n=5)$

$$\therefore |x^*-x| \le \frac{1}{2}\times10^{-2-5} = \frac{1}{2}\times10^{-7}$$

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

➢有效数字与相对误差的关系 ☞ 有效数字 $\Rightarrow$ 相对误差限

定理1.1 设近似值 $x^*=\pm 0.a_1a_2\ldots a_n\times 10^m$ 有n位有效数字，$a_1\neq 0$，则其相对误差限为 $\frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}$

证： $\because$ x*有n位有效数字

$$\therefore \quad |x^*-x|\leq \frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

$$\because |x^*|=0.a_1a_2\ldots a_n\times 10^m\geq a_1\times 10^{m-1}$$

$$\therefore \quad \frac{|x^*-x|}{|x^*|}\leq \frac{\frac{1}{2}\times 10^{m-n}}{a_1\times 10^{m-1}}=\frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1} \quad \blacksquare$$

注：该定理指出由近似值的有效数字可推出其相对误差限.

定理1.1 设近似值 $x^*=\pm 0.a_1a_2\ldots a_n\times 10^m$ 有n位有效数字，$a_1\neq 0$，则其相对误差限为 $\dfrac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}$

例11 用x^*=2.72来表示e的具有三位有效数字的近似值.

求x^*的相对误差限?

解: $\because x^*=0.272\times 10^1$， $a_1=2$

由定理1.1,则

$$\varepsilon_r\le\frac{1}{2a_1}\times 10^{-3+1}=\frac{1}{2\times 2}\times 10^{-2}=\frac{1}{4}\times 10^{-2}\qquad\blacksquare$$

☞ 有效数字位数越多，相对误差限也就越小！

☞ 相对误差限 $\Rightarrow$ 有效数字

定理1.2 设近似值$x^*=\pm\ 0.a_1a_2..a_n\times10^m$的相对误差限为

$$\frac{1}{2(a_1+1)}\times10^{-n+1},\ a_1\neq0.$$

则它有n位有效数字.

证： $\because$

$$|x^*|=0.a_1a_2\ldots a_n\times10^m=a_1.a_2\ldots\times10^{m-1}\le(a_1+1)\times10^{m-1}$$

$\therefore$

$$|x^*-x|=\frac{|x^*-x|}{|x^*|}\cdot|x^*|$$

$$\le\frac{1}{2(a_1+1)}\times10^{-n+1}\times(a_1+1)\times10^{m-1}$$

$$=\frac{1}{2}\times10^{m-n}$$

所以x^*有n位有效数字. ∎

定理1.2 设近似值$x^*=\pm 0.a_1a_2..a_n\times 10^m$的相对误差限为
$\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-n+1}, a_1 \neq 0$. 则它有$n$位有效数字.

例12 要使$\sqrt{20}$的近似值的相对误差限小于0.1%，要取几位有效数字？

解： 设应取n位有效数字，由定理1.1，有

$$\because \sqrt{20} = 4.4\ldots \qquad \therefore a_1=4,$$

$$\therefore \quad \varepsilon_r \le \frac{1}{8}\times 10^{-n+1} < 0.1\% = 10^{-3} \Rightarrow 10^{-n+4} < 8$$

$\therefore n \ge 4$ 从而应取4位有效数字，即为4.427（查表得）。

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2(4+1)}\times 10^{-n+1} < 0.1\% \Rightarrow n > 3$$

§2.6 减少误差的原则（注意事项)

数值运算总是在一个预先设计好的算法中进行的，所谓算法就是一个有限的基本运算序列。这个序列预定了怎样从输入数据去计算出问题的解。由于运算是在计算机上进行的，而计算机的字长有限，因而产生舍入误差。为减小舍入误差的影响，设计算法时应遵循以下一些原则：

- 要避免两相近数相减
- 要避免除数绝对值远远小于被除数的绝对值的除法
- 要防止大数“吃掉”小数
- 注意简化计算步骤，减少运算次数

1. 避免相近二数相减，保留有效数字

◆ 相近二数相减，会严重损失有效数字，导致误差增大，影响计算结果的精度！

例：$a_1 = 0.12345$，$a_2 = 0.12346$，各有5位有效数字。

而 $a_2 - a_1 = 0.00001$，只剩下1位有效数字。

◆ 在计算时需要加工计算公式, 以避免这种情况发生.

几种经验性避免方法：

$$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{x}};\quad \ln(x+\varepsilon)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right);$$

当 $|x|<<1$ 时：

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2};\quad e^x-1=x\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\dots\right)$$

2. 避免出现除数的绝对值远远小于被除数绝对值

例： $\frac{2.718}{0.001}=2718.2$ 当分母y作微小变化：0.0001，则

$$\frac{2.7182}{0.0011}=2471.1$$

计算结果对y的扰动很敏感，而y通常是近似值，所以计算结果不可靠；另外，很小的数作除数有时还会造成计算机的溢出而停机。

3. 避免大数吃小数，保护重要数据

◆数值计算中，参与运算的数的数量级相差很大，计算机字长有限

◆若不注意运算次序，可能会出现小数被大数吃掉的现象。

◆当两个绝对值相差很大的数进行加法或减法运算时，绝对值小的数有可能被绝对值大的数"吃掉"从而引起计算结果很不可靠.

例13　用单精度计算$x^2-(10^9+1)x+10^9=0$ 的根。

精确解为 $x_1=10^9$，$x_2=1$

✍ 算法1：利用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

在计算机内，10^9存为0.1×10^{10}，1存为0.1×10^1。做加法时，两加数的指数先向大指数对齐，再将浮点部分相加。即1的指数部分须变为10^{10}，则：$1 = 0.0000000001 \times 10^{10}$，取单精度时就成为：

$10^9+1=0.10000000\times10^{10}+0.00000000\times10^{10}=0.10000000\times10^{10}$

大数吃小数

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 10^9, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$$

✍算法2：
$$x_2 = \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}} \qquad x_2 = \frac{2\times 10^9}{10^9+10^9} = 1$$

注：求和时从小到大相加，可使和的误差减小。

练习：

1) 按从小到大、以及从大到小的顺序分别计算

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 40 + 10^9$$

2) $x = 3\times 10^{12}, y = 7, z = -3\times 10^{12}$ 计算 $x + y + z$

☞ 实现设计计算方案，合理编制程序，避免小数被吃掉！

☞ 计算机做加减运算，交换律、结合律往往不成立。运算次序不同得到不同的运算结果。

☞两者结果不同,因为计算机计算时做加减法要 “对阶”，“对阶”的结果使大数吃掉了小数.产生了误差.为了避免由于上述原因引起的计算结果严重失真,可以根据一些具体情况,存在需要把某些算式改写成另一种等价的形式.

4.选用数值稳定的算法，控制误差的传播。

不稳定的算法，误差逐渐增大，即使初始误差很小，但误差的传播和积累也会淹没问题的真解。

5.化简计算步骤，减少运算次数，节省计算复杂性，减少舍入误差的积累。

例14　已知 $\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，$\boldsymbol{x}$，计算多项式：

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0.$$

直接计算：运算量（乘）$n+(n-1)+\cdots+2+1=\dfrac{1}{2}n(n+1).$

秦九韶算法（1247年）：

$$p(x)=x(x\cdots(x(a_n x+a_{n-1})+a_{n-2})+\cdots+a_1)+a_0$$

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_k = b_{k+1}x + a_k, k=n-1, n-2, \cdots, 1, 0 \\ p(x) = b_0 \end{cases}$$

运算量 n.

多选题 2分

设置

减少误差的原则有哪些?

A 要避免绝对值较小的数作除数

B 注意简化计算步骤，减少运算次数

C 要避免两相近数相减

D 要防止大数吃掉小数

E 选用数值稳定的算法

提交

计算机处理运算的速度为 $(+,-) > (\times,\div) > (\mathbf{exp})$

评价算法的准则：

复杂度

精度

稳定性

收敛性