第二章　插值法

一维插值

- ✓ 2.1 引言
- ✓ 2.2 Lagrange插值法
- 2.3 Newton插值法
- 2.4 Hermite插值法
- 2.5 分段低次插值法
- 2.6 *样条插值法

回顾 插值法概念，拉格朗日插值法

根据函数$f(x)$的$n+1$个互异节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处的函数值$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$，求出满足插值条件的插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (\text{s.t } P_n(x_i) = f(x_i))$$

方法1 待定系数法

方法2 拉格朗日插值法

$$P_n(x) = \boldsymbol{L_n(x) = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1 + \cdots + l_n(x) y_n}$$

优点：结构对称，易编程，便于理论分析；

缺点：当插值节点增加(或减少)时，插值基函数也随之改变，公式不具有传承性，效率低.

$$P_n(x)=L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$$

特点：是n+1个n次插值基函数的线性组合.

$$l_0(x),\ l_1(x),\cdots,\ l_n(x)$$

问题：能否在n次多项式空间中另找一组基函数，

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$$

使得 $P_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)$

并且每增加一个插值节点时，只需重新计算一个基函数. 牛顿插值法就是基于这种想法提出来的.

- 牛顿插值法是构造插值多项式的另一种简单方法. 它有效地避免了重复计算的问题.

- 每增加一个节点, 只要再增加一项即可, 有递推公式.

- 插值基函数和插值多项式结构紧凑，易于编程.

2.3 牛顿插值法

牛顿插值函数

$$N_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

使得 $N(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$

基函数

$$1,\ (x - x_0),\ (x - x_0)(x - x_1),\ \cdots,\ (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

研究问题：确定组合系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n = ?$

$$N_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

例如：两点的线性插值多项式

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \triangleq N_1(x)$$

$$\Rightarrow c_0 = 1,\ c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$ 两点差商

三点的二次插值多项式

$$P_2(x) = N_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \triangleq N_2(x)$$

满足 $N_2(x_0) = y_0$， $N_2(x_1) = y_1$， 再由条件$N_2(x_2) = y_2$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{(y_2 - y_0) - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

三点差商

2.3.1 差商(亦称均差)及性质

已知函数$f(x)$在$[a, b]$上的$n+1$个互异节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处的函数值$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$. 则

$$f[x_i, x_j] \stackrel{\Delta}{=} \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j - x_i}$$

称为$f(x)$关于节点x_i, x_j的一阶差商.

比如： $c_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$

是$f(x)$关于节点x_0, x_1的一阶差商；

而 $c_0 = y_0 = f[x_0]$ 是$f(x)$关于节点x_0的零阶差商.

$$f[x_i, x_j, x_k] \overset{\Delta}{=} \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j}$$

称为 $f(x)$ 关于三个节点 x_i, x_j, x_k 的二阶差商.

比如： $c_2 = \dfrac{\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} = \dfrac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = f[x_0, x_1, x_2]$

一般地，称

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] \overset{\Delta}{=} \frac{f[x_0, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

为 $f(x)$ 关于节点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的 k 阶差商.

差商的性质

分析 $$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$$

$$=\frac{f(x_i)}{x_i-x_j}+\frac{f(x_j)}{x_j-x_i}=\frac{1}{x_i-x_j}f(x_i)+\frac{1}{x_j-x_i}f(x_j)$$

两点函数值的线性组合

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_i,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_j}$$

$$=?$$

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_i,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_j}=\frac{\frac{f(x_k)-f(x_i)}{x_k-x_i}-\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}}{x_k-x_j}$$

$$=\frac{(f(x_k)-f(x_i))(x_j-x_i)-(f(x_j)-f(x_i))(x_k-x_i)}{(x_k-x_i)(x_k-x_j)(x_j-x_i)}$$

$$=\frac{f(x_k)(x_j-x_i)-f(x_i)(x_j-x_i)+f(x_i)(x_k-x_i)-f(x_j)(x_k-x_i)}{(x_k-x_i)(x_k-x_j)(x_j-x_i)}$$

$$=\frac{f(x_k)}{(x_k-x_i)(x_k-x_j)}+\frac{f(x_i)}{(x_j-x_i)(x_k-x_i)}-\frac{f(x_j)}{(x_k-x_j)(x_j-x_i)}$$

$$=\frac{1}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}f(x_i)+\frac{1}{(x_j-x_i)(x_j-x_k)}f(x_j)+\frac{1}{(x_k-x_j)(x_k-x_i)}f(x_k)$$

三点函数值的线性组合

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f(x_i)}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}+\frac{f(x_j)}{(x_j-x_k)(x_j-x_i)}+\frac{f(x_k)}{(x_k-x_j)(x_k-x_i)}$$

性质1 **(差商可用函数值线性表示)**

$f(x)$的k阶差商可以表示成函数值$f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_k)$的线性组合，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$$

该性质应用数学归纳法可证.

由性质1可得，差商与节点的排列次序无关.

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f(x_i)}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}+\frac{f(x_j)}{(x_j-x_k)(x_j-x_i)}+\frac{f(x_k)}{(x_k-x_j)(x_k-x_i)}$$

性质2 （差商具有对称性）差商与节点的排列次序无关

即，任意交换两个节点 x_i, x_j 的次序，差商值不变.

因此 $$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

也可以表示为 $$=\frac{f[x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

通常根据该公式构造差商表如下：

差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,\cdots,x_4]$
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

高阶差商是两个低一阶差商的差商.

性质3 (差商与导数的关系)

若 $f(x)$在$[a,b]$上存在 k 阶导数，且节点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k \le b$$

则 $\exists \xi \in (a,b)$，有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

该性质可直接由罗尔定理证明，或拉格朗日插值余项证明.

例1 设 $f(x)=x^7+5x^3+1$在, 求均差$f[2^0,2^1]$, $f[2^0,2^1,2^2]$,

$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]$和$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7,2^8]$.

解 $f(2^0)=7$，$f(2^1)=169$，$f(2^2)=16705$， 故

$$f[2^0,2^1]=\frac{f[2^1]-f[2^0]}{2^1-2^0}=162，\quad f[2^1,2^2]=\frac{f[2^2]-f[2^1]}{2^2-2^1}=8268,$$

$$\Rightarrow f[2^0,2^1,2^2]=\frac{f[2^1,2^2]-f[2^0,2^1]}{2^2-2^0}=\frac{8268-162}{3}=2702.$$

由公式 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\dfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$，求出

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1，\text{而 } f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=0.$$

2.3.2 牛顿插值(Newton)公式及余项

根据差商定义，若 x 为 $[a,b]$ 上的任意一点，则

$$
\begin{cases}
f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) & \cdots\cdots 1 \\
f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1) & \cdots\cdots 2 \\
f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2) & \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \\
f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, \cdots, x_n] + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_n) & \cdots\cdots n-1
\end{cases}
$$

将后一个式子依次代入前一个式子，可得：

$$
\begin{aligned}
f(x) = & \underbrace{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})}_{N_n(x)} \\
& \underbrace{+ f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)}_{R_n(x)}
\end{aligned}
$$

记 $c_i = f[x_0, \ldots, x_i]$ 牛顿插值系数

牛顿插值多项式

$$N_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

或 $N_n(x) = N_{n-1}(x) + c_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$， $n = 0, 1, \cdots$

插值余项 $R_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n]\underline{(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)}$

即 $f(x) \approx N_n(x)$时，插值余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x)$$

由于$R_n(x_i) = f(x_i) - N_n(x_i) = 0$，即

$$N_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

所以$N_n(x)$是 $f(x)$ 的 **n**次插值多项式，从而

$$N_n(x) \equiv L_n(x)$$

$$\Rightarrow R_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

推导出

$$\boxed{f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad \xi \in (x_{\min}, x_{\max})}$$

牛顿插值法

优点：计算有继承性；结构紧凑、易编程；有递推公式

牛顿插值多项式计算过程

☞ 列差商表计算各阶差商，求出牛顿插值系数 c_i

插值基函数 1 , $(x-x_0)$, $(x-x_0)(x-x_1)$， ……， $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$

牛顿插值多项式

$$N_n(x)= f(x_0)+ f[x_0,x_1](x-x_0)+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots$$

$$+ f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

例2 依据如下函数值表构造3次拉格朗日插值多项式及牛顿插值多项式, 并验证插值多项式的唯一性.

x_k	0	1	2	4
$f(x_k)$	1	9	23	3

解（1）构造拉格朗日插值多项式$L_3(x)$.

插值基函数
$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}=\frac{1}{8}x^3+\frac{7}{8}x^2-\frac{7}{4}x+1,$$
$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}x^3-2x^2-\frac{8}{3}x,$$
$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{4}x^2-x,$$
$$l_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}=\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{12}x,$$

$$L_3(x)=\sum_{i=0}^{3}l_i(x)y_i=l_0(x)+9l_1(x)+23l_2(x)+3l_3(x)$$
$$=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$$

（2）构造牛顿插值多项式 $N_3(x)$.

差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	1			
1	9	8		
2	23	14	3	
4	3	-10	-8	-11/4

$$N_3(x)=1+8(x-0)+3(x-0)(x-1)-\frac{11}{4}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$$

（3）唯一性验证

比较得，$N_n(x)=L_n(x)$，与插值多项式的唯一性相一致.

评注　当题目中没有指明用那一种方法建立插值多项式时，原则上拉格朗日插值方法和牛顿插值方法都可行，做题目时选较为简便的一种方法. 近似计算时，由于牛顿插值多项式的非整理形式可以直接写成秦九韶算法的形式，计算量小，且当增加节点时只需增加一项，前面的工作依然有效，因而通常情况下牛顿插值比较方便. 相对之下，拉格朗日插值法没有上述优点，但它在理论证明上因插值基函数的许多特点而得到广泛应用.

例3 已知 $f(x)=\sqrt{x}$ 的数值表，试用二次牛顿插值多项式计算 $\sqrt{2.15}$ 的近似值，并估计误差.

x_k	2.0	2.1	2.2	2.3
$f(x_k)$	1.414214	1.448138	1.483240	1. 516575

解 取插值节点 $x_0=2.0$, $x_1=2.1$, $x_2=2.2$，计算 $f(x)=\sqrt{x}$ 的差商表

x_k	$f(x_k)$	1 阶差商	2 阶差商
$x_0=2.0$	1.414214		
$x_1=2.1$	1.449138	0.349240	
$x_2=2.2$	1.483240	0.341020	-0.04110

求得 $f(x)=\sqrt{x}$ 二次牛顿插值多项式

$$N_2(x)=1.414214+0.349240\,(x-2.0)-0.04110\,(x-2.0)(x-2.1)$$

$$N_2(x)=1.414214+0.349240\,(x-2.0)-0.04110\,(x-2.0)(x-2.1)$$

代入 $x = 2.15$，得 $\sqrt{2.15}\approx N_2(2.15)=1.466292$

又 $f'''(x)=\dfrac{3}{8x^2\sqrt{x}}$，

$$\max_{2.0\le x\le 2.2}\left|f'''(x)\right|=\left.\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}\right|_{x=2.0}=0.06629\cdots<0.0663$$

截断误差 $\left|R_2(2.15)\right|=\left|\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(2.15-2.0)(2.15-2.1)(2.15-2.2)\right|$

$$<\frac{0.0663}{6}\times 0.000375<\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

与 $\sqrt{2.15}$ 的真值 $1.466288\cdots$ 相比较，

$\sqrt{2.15}\approx 1.466292$ 具有 5 位有效数字。

例4 给出函数 $f(x)$ 的数值表，分别用四次、五次牛顿插值多项式计算 $f(0.596)$ 的近似值，并估计误差.

k	x_k	$f(x_k)$	1阶差商	2阶差商	3阶差商	4阶差商	5阶差商
0	0.40	0.41075					
1	0.55	0.57815	1.11600				
2	0.65	0.69675	1.18600	0.28000			
3	0.80	0.88811	1.27573	0.35893	0.19733		
4	0.90	1.02652	1.38410	0.43348	0.21300	0.03134	
5	1.05	1.25382	1.51533	0.52483	0.22863	0.03126	-0.00012

解 利用牛顿插值公式，求得

$$
\begin{aligned}
N_4(x) &= 0.41075 + 1.1160(x-0.4) + 0.28(x-0.4)(x-0.55) \\
&\quad + 0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65) \\
&\quad + 0.03134(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8)
\end{aligned}
$$

$$N_5(x) = N_4(x) - 0.00012(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8)(x-0.9)$$

代入 $x=0.596$，求出

$$N_4(5.096)\approx 0.63192,\qquad N_5(5.096)\approx 0.6319199$$

若取 $f(0.596)\approx N_5(5.096)\approx 0.6319199$

截断误差

$$|R_5(0.596)|=|f[0.596,x_0,\cdots,x_4,x_5]\omega_6(0.596)|\approx$$

或者 $|R_5(0.596)|\approx|N_5(5.096)-N_4(5.096)|\approx 0.0000001$

注：题中没有给出函数具体解析式时，可由相邻两次的牛顿插值的误差来估计误差.

也可大概估计误差 $|R_4(0.596)|\approx|f[x_0,\cdots,x_4,x_5]\omega_5(0.596)|\leq 3.63\times 10^{-9}$

-0.00012

2.3.3 重节点Newton插值公式

例如　要求构造一个满足条件

$$H_3(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,2),\ \ H_3'(x_0)=f'(x_0)$$

的三次插值多项式$H_3(x)$.

方法1　混合使用牛顿法和待定系数法。首先注意到，

$$N_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

是满足$N_2(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,2)$的 2 次插值多项式，因此三次插值多项式$H_3(x)$ 可以表示成

$$H_3(x)=N_2(x)+\alpha(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$H_3(x)$满足$H_3(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,2)$, 为了使其满足$H_3'(x_0)=f'(x_0)$，

对上式求导并将$H_3'(x_0)=f'(x_0)$代入，求出系数α，即求出满足

所有插值条件的三次插值多项式$H_3(x)$

余项 $$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)$$

证 令$R_3(x)=K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)$， 求$K(x)$.

构造函数$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-K(x)(t-x_0)^2(t-x_1)(t-x_2)$

则$\varphi(x_i)=0(i=0,1,2)$,且$\varphi'(x_0)=0$, $\varphi(x)=0$, 故

$\varphi(t)$至少有5个零点（x_0为二重零点）.

反复应用罗尔定理，$\varphi^{(4)}(t)$ 至少有1 个零点ξ ，即

$$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!K(x)=0 \Rightarrow K(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

所以余项 $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)$

方法2　首先定义重节点的差商，利用牛顿法构造插值公式.

据此可推导出重节点的余项公式

$$R_3(x)=f[x_0,x_0,x_1,x_2,x](x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)$$

定义：重节点的差商

$$f[x,x] \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} f[x+\Delta x, x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$f[x,x,\cdots,x] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

例5　已知数据表如下，

0是二重节点，1是三重节点

求4次插值多项式。

x	0	1
f(x)	3	5
f'(x)	4	6
f''(x)		7

$$f[x,x]=f'(x)$$

$$f[x,x,\cdots,x]=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

x	0	1
f(x)	3	5
f’(x)	4	6
f’’(x)		7

建立重节点的差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	3				
0	3	$f(0,0)=f'(0)=4$			
1	5	$f(0,1)=\frac{5-3}{1-0}=2$	$f(0,0,1)=\frac{2-4}{1-0}=-2$		
1	5	$f(1,1)=f'(1)=6$	$f(0,1,1)=\frac{6-2}{1-0}=4$	6	
1	5	$f(1,1)=f'(1)=6$	$f(1,1,1)=\frac{1}{2}f''(1)=\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{2}$

$$H_4(x)=3+4x-2x^2+6x^2(x-1)-\frac{13}{2}x^2(x-1)^2$$

例6. 已知$f(x)$在节点1,2处的函数值为$f(1)=2, f(2)=3$

$f(x)$在节点1,2处的导数值为$f'(1)=0, f'(2)=-1$

求$f(x)$的三次插值多项式,及$f(x)$在$x=1.5,1.7$

处的函数值.

解: 构造重节点的差商表，如下

节点	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	2			
1	2	0		
2	3	1	1	
2	3	-1	-2	-3

$$H_3(x)=2+0(x-1)+(x-1)(x-1)-3(x-1)(x-1)(x-2)$$

$$=-3x^3+13x^2-17x+9$$

总结　插值法概念，拉格朗日插值法，牛顿插值法

根据函数 $f(x)$ 的 $n+1$ 个互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的函数值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$，求出满足插值条件的插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (P_n(x_i) = f(x_i))$$

方法1　待定系数法

方法2　拉格朗日插值法

$$\boldsymbol{L_n(x) = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1 + \cdots + l_n(x) y_n}$$

方法3　牛顿插值法

$$N_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

三种方法得到相同的多项式，但结果的形式与求解过程不同.

思考题 已知函数 $y=f(x)$ 的数据如下表.

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
$y_i=f(x_i)$	1	3	9	27

试作一个三次插值多项式 $P_3(x)$，利用 $P_3(x)$ 计算 $\sqrt{3}$.

解　利用 Newton 插值公式：

$$N_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2]\cdot(x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)\cdot(x-x_1)(x-x_2),$$

为此先作差商表(表 2.1).

表 2.1　差商表

k	x_k	$f(x_k)$	差商		
			$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$
0	0	1			
1	1	3	2		
2	2	9	6	2	
3	3	27	18	6	$\frac{4}{3}$

$$c_0=f(x_0)=1,\quad c_1=f[x_0,x_1]=2,$$

$$c_2=f[x_0,x_1,\ x_2]=2,\quad c_2=f[x_0,x_1,\ x_2,x_3]=\frac{4}{3}.$$

故

$$P_3(x) = N_3(x) = 1 + 2x + 2x(x-1) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{8}{3}x$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1.$$

令 $f(x) = 3^x$，而 $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$， 故取 $x = \frac{1}{2}$，即得

$$\sqrt{3} \approx P_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} + 1 = 2.$$