第2章　插值法

一维插值

2.1 引言

2.2 Lagrange插值法

2.3 Newton插值法

2.4 Hermite插值法

2.5 分段低次插值法

2.6 *样条插值法

2.1 引言

问题的提出:

在工程应用及科学研究中，经常需要研究两个变量之间的函数关系 $y=f(x)$. 但常常不能得到 $f(x)$ 的具体的解析表达式，而得到的只是一组试验数据 (x_i, y_i) (i=1,2, … , n)，或者解析表达式相当复杂，不便于计算和应用.

解决方案：寻找计算简单的函数$S(x)$近似代替函数 $f(x)$，将研究$f(x)$的问题转换为研究$S(x)$. 当选用近似标准不同时，就构成不同的方法.

◆ 插值法　◆ 最佳逼近和最小二乘法

例1　为试验某种新药的疗效，医生对某人用快速静脉注射方式一次性注入该药 300mg 后，在一定时间 t(h) 采取血样，测得血药浓度 C($\mu g/ml$)数据如下：

t (h)	0.25	0.5	1	1.5	2	3	4	6	8
C（μ g/ml）	19.21	18.15	15.36	14.10	12.89	9.32	7.45	5.24	3.01

由此表推断血浓度 C 与时间 t 之间函数关系 $C = f(t)$ 的近似表达式.

例2 标准正态分布函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	…
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

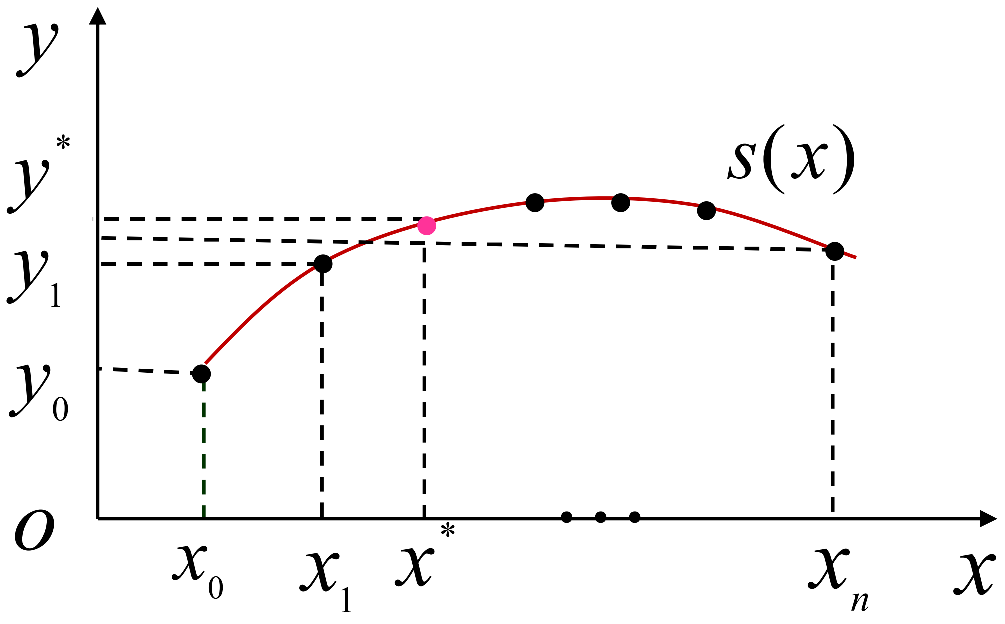
求 $\varphi(1.014)$？

插值法的基本思想:

已知函数 $y = f(x)$ 的n+1个点的值 $y_i = f(x_i)$，构造一个(相对简单的)函数 $y = s(x)$，使其通过已知节点，即

$$s(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

目的：用 $s(x)$ 求出给定点 x^* 处的近似值 $y^* \approx s(x^*)$.



定义（一维插值）

已知$f(x)$在区间$[a,b]$上$n+1$个互异节点$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$处的函数值$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$.

求：函数$S(x)$，使得$S(x_i)=f(x_i)$　$(i=0,1,2,\cdots,n)$

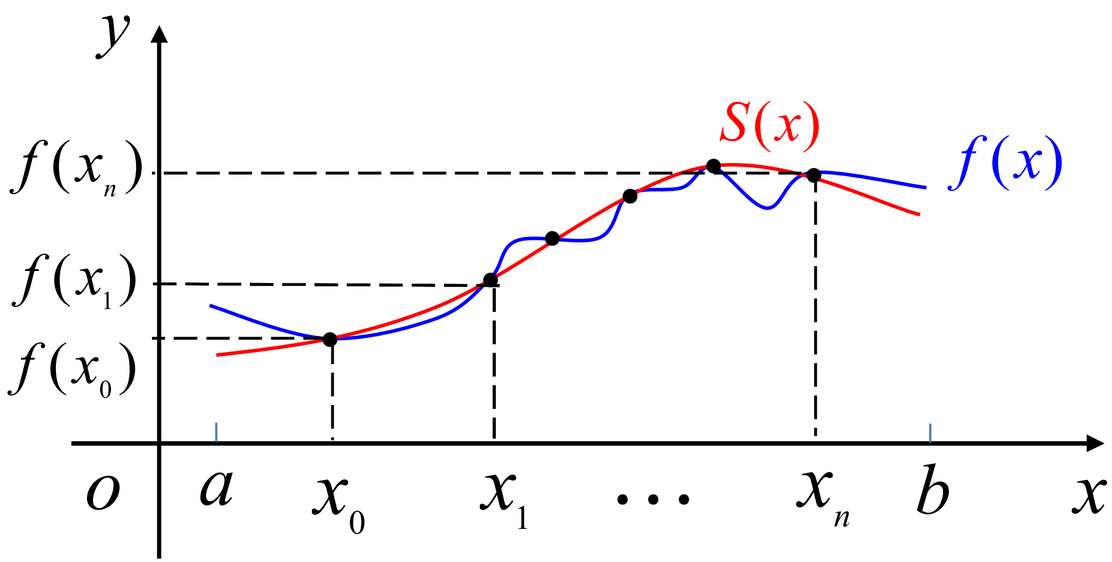
称：$S(x)$为$f(x)$关于点$x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$的插值函数，

x_i为插值节点，$[a,b]$为插值区间，

求插值函数$S(x)$的方法为插值法.

$f(x)\approx S(x)$时，误差函数$R(x)=f(x)-S(x)$为插值余项.

$\|R(x)\| < \varepsilon$



•常用的插值函数：多项式、有理分式、三角函数和指数函数.

•由于多项式和分段多项式计算简单，所以在工程计算中这两种插值函数使用最多. 当插值函数是次数不超过n次的多项式时，称其为n次插值多项式。

n次插值多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

下面讨论满足条件$P_n(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$的插值多项式$P_n(x)$.

插值多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 存在？唯一？

分析　由条件 $P_n(x_i)=f(x_i)=y_i\ (i=0,1,\cdots,n)$，得

即 $$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_2^n=y_2 \\ \cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

因为 $$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$ 范德蒙行列式

$$=\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)\neq 0$$

方程组有唯一解

定理2.1.1（插值多项式的存在唯一性）已知函数$f(x)$在$[a,b]$上的$n+1$个互异节点x_i $(i=0,1,\cdots,n)$处的函数值$f(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$，则存在唯一的插值多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

使得 $P_n(x_i)=f(x_i),\ (i=0,1,2,\cdots,n).$

注1：只要***n***+1个节点互异，满足插值条件的***n***次插值多项式是存在、唯一的.

注2：如果不限制多项式的次数，插值多项式并不唯一.

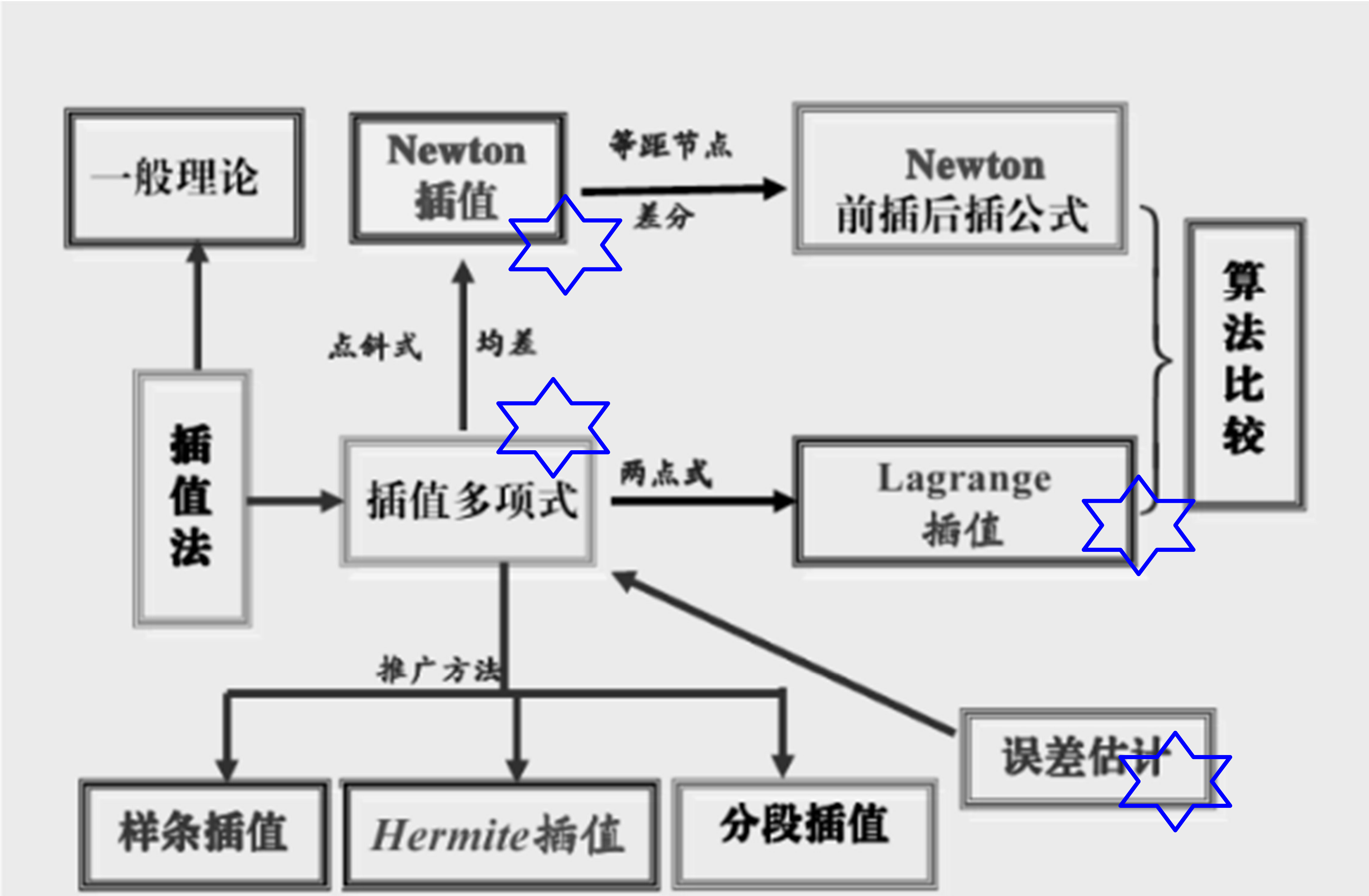
插值多项式$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$的构造方法：

1、待定系数法：　计算工作量较大

2、常用方法：

- 拉格朗日插值法
- 牛顿插值法
- 分段低次插值法
- 三次样条插值法

一维插值知识结构



一般理论
Newton
插值
等距节点
差分
Newton
前插后插公式
算法比较
点斜式
均差
插值法
插值多项式
两点式
Lagrange
插值
推广方法
误差估计
样条插值
Hermite插值
分段插值

2.2 拉格朗日（Lagrange）插值法

2.2.1 线性插值（n=1，一次插值）

已知

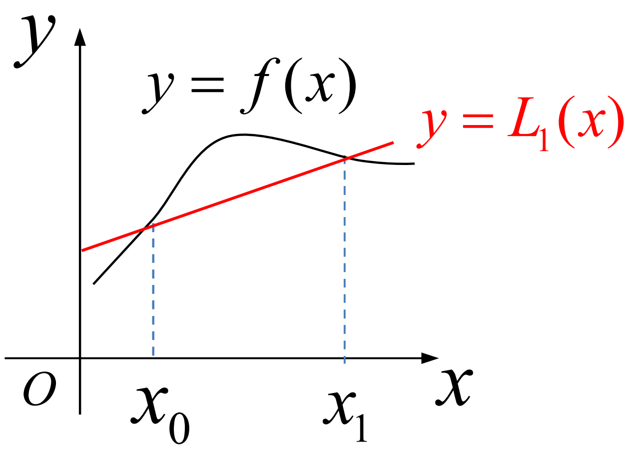
x_i	x_0	x_1
y_i	y_0	y_1

求解 $y = L_1(x) = a_0 + a_1 x$

使得 $L_1(x_i) = y_i$（$i = 0,1$）

点斜式 $L_1(x) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

$$= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$



以直线代替曲线 $f(x) \approx L_1(x)$

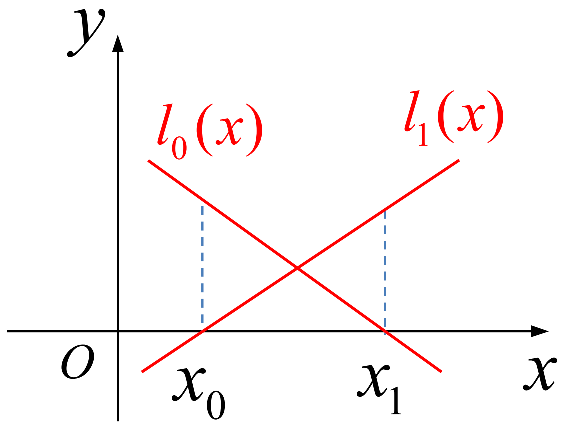
$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$ 线性插值函数

记 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$, $l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$, 满足 $\begin{cases} l_0(x_0)=1,\ l_0(x_1)=0 \\ l_1(x_0)=0,\ l_1(x_1)=1 \end{cases}$

称为函数目标函数 $f(x)$ 在节点 x_0, x_1 处的**插值基函数**.

而 $L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)$ 称为 $f(x)$ 的一次**拉格朗日**插值多项式. 即

$$f(x)\approx L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)$$



2.2.2 二次插值（n=2，抛物线插值）

已知

x_i	x_0	x_1	x_2
y_i	y_0	y_1	y_2

求解 $y = L_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

使得 $L_2(x_i) = y_i$ （$i = 0,1,2$）

构造抛物插值多项式

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

其中插值基函数满足

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \\ l_0(x_2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \\ l_1(x_2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_2(x_0) = 0 \\ l_2(x_1) = 0 \\ l_2(x_2) = 1 \end{cases}$$

要求的 $l_i(x), i = 1,2,3$ 均为二次多项式。

$$\begin{cases} l_0(x_0)=1 \\ l_0(x_1)=0 \\ l_0(x_2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1(x_0)=0 \\ l_1(x_1)=1 \\ l_1(x_2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_2(x_0)=0 \\ l_2(x_1)=0 \\ l_2(x_2)=1 \end{cases}$$

设 $l_0(x)=A(x-x_1)(x-x_2)$，

由 $l_0(x_0)=1 \Rightarrow A(x_0-x_1)(x_0-x_2)=1$

即 $A=\dfrac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$，
$$\boxed{l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}$$

同理
$$\boxed{l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}} \qquad \boxed{l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}$$

故 $L_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$

$$=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

验证知 $L_2(x_0)=y_0$, $L_2(x_1)=y_1$, $L_2(x_2)=y_2$,

所以$L_2(x)$是$f(x)$的二次插值多项式，也称为抛物线插值函数.

例1 已知 $y=f(x)$的函数表

x	1	3	2
y	1	2	-1

，求 $f(x)$ 的抛物线插值函数，并求 $x=1.5$ 处近似值.

解

$$L_2(x)=\frac{(x-3)(x-2)}{(1-3)(1-2)}\times 1+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\times 2+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\times(-1)$$

$$=\frac{5}{2}x^2-\frac{19}{2}x+8=2.5x^2-9.5x+8$$

$$f(1.5)\approx L(1.5)=-0.625$$

练习： 试用待定系数法求解该题.

解 设$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

根据插值条件，求出a_0，a_1，a_2

Joseph-Louis Lagrange
1736~1813
法国数学家、物理学家

2.2.3 n次拉格朗日插值多项式

推广一次与二次插值多项式的构造方法，可构造出由$n+1$个互异数组(x_i, y_i) $(i=0,1,2,\cdots,n)$确定的n次插值多项式

$$L_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k$$

其中$l_k(x) = \dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$

称为n次拉格朗日插值基函数，满足

$$l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases} (i,k=0,1,\cdots,n).$$

$L_n(x)$为n次拉格朗日插值多项式，验证知 $L_n(x_i) = y_i (i=0,1,\cdots,n)$

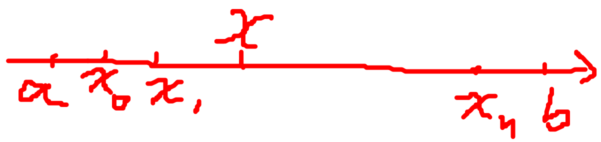
2.2.4 插值余项和误差估计

定理2.2.1 设 $f(x)$ 在$[a, b]$上有n+1阶连续导数，则 n 次插值多项式 $L_n(x)$ 对任意 $x \in [a,b]$，有插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, $a < \xi < b$（且依赖于x）.

证 固定$x \in [a,b]$.



1) 若x为某一个插值节点$x_i(i = 0,1,\cdots,n)$,

则$\omega_{n+1}(x_i) = 0 \Rightarrow R_n(x_i) = 0$，结论成立。

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

证明：2）当x不是插值节点时，

因为$R_n(x)$有$n+1$个零点$x_0,\ x_1,\cdots,x_n$，

可设$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 求出待定的$K(x)$，

作辅助函数$\varphi(t)=R_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$

则$\varphi(t)$至少有$n+2$个相异零点$x,x_0,\ x_1,\cdots,x_n$.

将这$n+2$个零点从小到大的顺序排列，

并应用$n+1$次罗尔定理得，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!K(x)=0$$

故 $K(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

插值余项和误差估计

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

特别地：如果 $\max\limits_{a \le x \le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$，

则插值多项式 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的误差估计式

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

插值余项和误差估计

几种常用的低阶插值余项公式

当$n=1$时，$R_1(x)=f(x)-L_1(x)$

$$=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1),\xi\in(a,b)$$

当$n=2$时，$R_2(x)=f(x)-L_2(x)$

$$=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\xi\in(a,b)$$

拉格朗日插值余项

似曾相识?

拉格朗日插值多项式余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad \xi\in(a,b),$$

与泰勒公式的拉格朗日余项比较

$$R_n(x)=f(x)-\mathrm{P}_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \xi\in(a,b),$$

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

例2 已知 $f(x)=e^{-x}$ 的一组数据见下表，用二次插值多项式计算 $e^{-2.1}$ 的近似值，并估计误差。

x_i	1	2	3
y_i	0. 3679	0. 1353	0. 0183

解 记 $x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=3,$

$y_0=0.3679,\ y_1=0.1353,\ y_2=0.0183,$ 则

$$L_2(2.1)=y_0\frac{(2.1-x_1)(2.1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(2.1-x_0)(2.1-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(2.1-x_0)(2.1-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=0.3679\times\frac{0.1\times(-0.9)}{2}+0.1353\times\frac{1.1\times(-0.9)}{(-1)}+0.0183\times\frac{1.1\times0.1}{2}\approx\mathbf{0.1184}$$

故 $e^{-2.1}\approx L_2(2.1)\approx\mathbf{0.1184}$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

误差

$$\left|R_2(x)\right| = \frac{1}{6}\left|e^{-\xi}(x-1)(x-2)(x-3)\right|$$

$$\le \frac{e^{-1}}{6}\left|(x-1)(x-2)(x-3)\right|,\ \xi \in (1,3)$$

故 $\left|R_2(2.1)\right| \le \dfrac{0.3679}{6} \times 0.099 \le 0.0060701$

拉格朗日插值的优、缺点

1) 拉格朗日插值基函数形式对称，结构紧凑，易分析、易编程；节点处函数值变化时，基函数不变，可用于不同批次的数据插值.

2) 当但插值节点个数改变时，插值基函数 $l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 均要随之变化，整个公式也要发生变化，计算结果无继承性，效率低.

改进方案，牛顿插值法.

练习 对函数 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$，若在区间[1, 2]上以 $x_0=1$，$x_1=2$ 为插值节点作线性插值函数计算 $f(x)$ 的近似值，误差限是多少？

思考问题：比较由两种方法得到的插值多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

与 $L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$

异同之处？