第一章

1.1 （分派问题）设有 n 种不同规格的零件要分派在 n 台不同性能的机床上进行加工，每种零件分派且仅分派在一台机床上加工，每台机床有且仅有一个零件分排在它上加工，设产品 i 在机床 j 上加工时的工时定额为 d_{ij}。问这 n 种零件应各分派给哪一台机床加工，才能使总加工时间最少？

解：设变量 $x_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{当零件}i\text{分派在机床}j\text{上加工时，}\\0,\ \text{当零件}i\text{不分派在机床}j\text{上加工；}\end{cases}$

则总加工时间为 $t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}d_{ij}$，同时应满足 $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1$；其中 $i,j=1\sim n$。

该问题的数学模型为

$$\begin{cases}\min\quad t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}d_{ij},\\ s.t.\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,i=1\sim n,\\ \quad\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,j=1\sim n.\end{cases}$$

第二章

2.1 求函数 $f(x,y)=3axy-x^3-y^3\ (a>0)$ 的驻点，极值点和鞍点。

解：由 $\begin{cases}f_x^{'}=3ay-3x^2=0\\f_y^{'}=3ax-3y^2=0\end{cases}\Rightarrow$ 函数的驻点为 $(x_0,y_0)=(a,a)$，$(x_1,y_1)=(0,0)$；

又函数的 $Hesse$ 矩阵为

$$H=\begin{bmatrix}f_{xx}^{''}&f_{xy}^{''}\\f_{yx}^{''}&f_{yy}^{''}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6x&3a\\3a&-6y\end{bmatrix}，其中 a>0；$$

在点 $(x_0,y_0)=(a,a)$ 处，$\det H=\begin{vmatrix}-6a&3a\\3a&-6a\end{vmatrix}=27a^2>0$，

$\therefore$ 由 $-6a<0$ 知，点 $(x_0,y_0)=(a,a)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点；

在点 $(x_1,y_1)=(0,0)$ 处，$\det H=\begin{vmatrix}0&3a\\3a&0\end{vmatrix}=-9a^2<0$，

$\therefore$ 点 $(x_1,y_1)=(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的鞍点。

2.2 试证函数 $F(x,y)=(x,1-x)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ 无极值点，只有一个鞍点，其中 $a+d-b-c\neq 0$。

证明：由 $\begin{cases} F_x^{'}=(a+d-b-c)y+b-d=0 \\ F_y^{'}=(a+d-b-c)x+c-d=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)=\left(\dfrac{c-d}{a+d-b-c},\dfrac{b-d}{a+d-b-c}\right)$；

又 $\det H(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} 0 & a+d-b-c \\ a+d-b-c & 0 \end{vmatrix}=-(a+d-b-c)^2<0$，

$\therefore$ 函数 $F(x,y)$ 无极值点，只有一个鞍点 (x_0,y_0)。

2.3 求函数 $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2^2)^2$ 的极值点，是否是严格的极值点？

解：由 $\begin{cases} f_{x_1}^{'}=2(x_1-x_2^2) \quad =0 \\ f_{x_2}^{'}=-4x_2(x_1-x_2^2)=0 \end{cases}$ 得 $(x_{10},x_{20})=(C^2,C)$，其中 C 为任意常数；

又 $f_{x_1x_1}^{''}(x_{10},x_{20})=2>0$，$\det H(x_{10},x_{20})=-8C^2+8C^2=0$；

$\therefore$ 点 (C^2,C) 为 $f(x_1,x_2)$ 的极大值，但不是严格极值点。

2.4 讨论参数 a 为何值时，点 $(0,0,0)$ 为函数 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2e^{x_2}+x_2^2e^{x_3}+x_3^2e^{x_1}$ 的极值点，是极大值点或极小值点或鞍点？

解：由 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2e^{x_2}+x_2^2e^{x_3}+x_3^2e^{x_1}$ 知其在点 $(0,0,0)$ 处的 $Hesse$ 矩阵为：

$$H(0,0,0)=\begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

当 $a>0$ 时，由 $\det H(0,0,0)=8a>0$ 知点 $(0,0,0)$ 为函数的极小值点；

当 $a=0$ 时，无法判断；

当 $a<0$ 时，由 $\det H(0,0,0)=8a<0$ 知点 $(0,0,0)$ 为函数的鞍点。

2.5 在半径为 R 的已知圆的一切内接三角形中，求出其面积最大者。

解：三角形面积最大时一定为等腰三角形（高最大时过圆心）。

则 $S = h\cdot\sqrt{R^2-(h-R)^2}$，其中 h 为三角形的高，$R \le h < 2R$。

由 $S' = \sqrt{R^2-(h-R)^2} + \dfrac{h(R-h)}{\sqrt{R^2-(h-R)^2}} = 0$ 得 $h = 1.5R$；

又 $S''|_{h=1.5R} < 0$，$\therefore h = 1.5R$ 为 S 的最大值点，$S_{\max} = \dfrac{3}{4}\sqrt{3}R^2$；

$\therefore$面积最大的三角形是底为$\sqrt{3}R$，高为$1.5R$的等腰三角形（正三角形）。

2.9 设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$，$A = (a_{ij})_{3\times3}$，$A^T = A$，试直接展开 $f(x) = x^T Ax$，然后验证$\nabla f(x) = 2Ax$。

解：$f(x) = x^T Ax = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$=x_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3) + x_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)$$

由于 $A^T = A$，$\therefore f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$

$$\therefore \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 \\ 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 \\ 2a_{31}x_1 + 2a_{32}x_2 + 2a_{33}x_3 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$= 2Ax$。

2.10 试证 $\nabla(\lambda^T Gx) = G^T\lambda$，$\lambda$，$x$ 为 n 维列向量，G 为 $n\times n$ 矩阵。

证明：$\because \lambda^T Gx = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$= x_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_{i1} + x_2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_{i2} + \cdots + x_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_{in}$$

$$\therefore \nabla\left(\lambda^T Gx\right)=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_{i1}\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_{i2}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_{in}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1}\\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

$=G^T\lambda$，得证。

2.11 设 $f\left(x\right)$在点 x^0 的泰勒展开式为

$f\left(x\right)=f\left(x^0\right)+\left(x-x^0\right)^T\nabla f\left(x^0\right)+\frac{1}{2}\left(x-x^0\right)^T\nabla^2 f\left(x^0\right)\left(x-x^0\right)$，试证：

$\nabla f\left(x\right)=\nabla f\left(x^0\right)+\nabla^2 f\left(x^0\right)\left(x-x^0\right)$。

证明：对 n 阶矩阵 A，由

$$x^T A=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}x_i,\sum_{i=1}^{n}a_{i2}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}a_{in}x_i\right),$$

可知 $\nabla\left(x^T A\right)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=A$；

又由教材式 2-4 知 $\nabla\left(x^T Ax\right)=2Ax$；

则由于 $f\left(x\right)=f\left(x^0\right)+\left(x-x^0\right)^T\nabla f\left(x^0\right)+\frac{1}{2}\left(x-x^0\right)^T\nabla^2 f\left(x^0\right)\left(x-x^0\right)$，

$\therefore \nabla f\left(x\right)=\nabla f\left(x^0\right)+\nabla^2 f\left(x^0\right)\left(x-x^0\right)$，得证。

2.12 试证 $\nabla\|Ax\|^2=2A^T Ax$。

证明：$\because \|Ax\|^2=\left(Ax\right)^T\left(Ax\right)=x^T\left(A^T A\right)x$，

$\therefore$由式 2-4 中 $\nabla\left(x^T Ax\right)=2Ax$ 可得 $\nabla\|Ax\|^2=2A^T Ax$，命题得证。

2.13 试证$\nabla \| Ax-b \|^2 = 2A^T(Ax-b)$。

证明：$\because \|Ax-b\|^2 = (Ax-b)^T(Ax-b) = x^T(A^TA)x - x^TA^Tb - b^TAx + b^Tb$，

由式 2-4 可得$\nabla\left(x^T(A^TA)x\right) = 2A^TAx$；

运用上 2.11 的结论$\nabla(x^TA) = A$有$\nabla\left(x^TA^Tb\right) = A^Tb$；

又式 2-2 中$\nabla(b^Tx) = b$可得$\nabla(b^TAx) = A^Tb$；

$\therefore \nabla\|Ax-b\|^2 = 2A^TAx - A^Tb - A^Tb$

$= 2A^T(Ax-b)$，得证。

2.14 设$A_{n\times n}$，$A^T \neq A$，试证$\nabla(x^TAx) = Ax + A^Tx$。

证明：$\because x^TAx = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

$$= x_k\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j + x_k\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{ik}x_i + a_{kk}x_k^{\ 2} \quad (k = 1 \sim n)$$

$$\therefore \nabla(x^TAx) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j + \sum\limits_{i=2}^{n} a_{i1}x_i + 2a_{11}x_1 \\ \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} a_{2j}x_j + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n} a_{i2}x_i + 2a_{22}x_2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i + 2a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}x_i \end{pmatrix}$$

$= A^Tx + Ax$，得证。

2.19 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，$b\in R^n$，试证集 $S=\left\{x\mid x\in R^n, Ax=b, x\geq 0\right\}$ 为凸集。

证明：∵ $S=\left\{x\mid x\in R^n, Ax=b, x\geq 0\right\}$ 对 $\forall x,y\in S$，$0\leq\alpha\leq 1$ 有

$$A\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right)$$

$$=\alpha Ax+Ay-\alpha Ay$$

$=\alpha b+b-\alpha b=b$，即 $\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\in S$；

∴集合 S 为凸集。

2.20 试证平面上椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所包围的区域是凸集。

证明：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所包围的区域是集合 $S=\left\{\left(x,y\right)\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\left(x,y\right)\in R^2\right\}$；

对于 $\forall\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\in S$，$0\leq\alpha\leq 1$；

令 $\left(x_3,y_3\right)=\alpha\left(x_1,y_1\right)+\left(1-\alpha\right)\left(x_2,y_2\right)=\left(\alpha x_1+\left(1-\alpha\right)x_2,\alpha y_1+\left(1-\alpha\right)y_2\right)$，

则 $\frac{{x_3}^2}{a^2}+\frac{{y_3}^2}{b^2}=\frac{\left[\alpha x_1+\left(1-\alpha\right)x_2\right]^2}{a^2}+\frac{\left[\alpha y_1+\left(1-\alpha\right)y_2\right]^2}{b^2}$

$$=\alpha^2\left(\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}\right)+\left(1-\alpha\right)^2\left(\frac{{x_2}^2}{a^2}+\frac{{y_2}^2}{b^2}\right)+2\alpha\left(1-\alpha\right)\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}\right)$$

$$\leq\alpha^2+\left(1-\alpha\right)^2+2\alpha\left(1-\alpha\right)\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}\right)$$

而 $\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{b^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+1\right)=1$

∴ $\frac{{x_3}^2}{a^2}+\frac{{y_3}^2}{b^2}\leq\alpha^2+\left(1-\alpha\right)^2+2\alpha\left(1-\alpha\right)=1$，即 $\left(x_3,y_3\right)\in S$；

∴ S 即椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所包围的区域是凸集。

2.20 试判断下列函数为凸函数或凹函数或严格凸函数或严格凹函数：

(1) $f(x_1,x_2)=2x_1^{\ 2}+3x_2^{\ 2}$；

解：由函数的 $Hesse$ 矩阵

$$H=\nabla^2 f=\begin{bmatrix}4&0\\0&6\end{bmatrix}$$ 为正定矩阵

∴函数 $f(x_1,x_2)$ 为严格凸函数。

(2) $g(x_1,x_2)=x_1^{\ 3}-x_2^{\ 3}\left(x_1<-\frac{1}{3}\right)$；

解：由函数的 $Hesse$ 矩阵

$$H=\nabla^2 g=\begin{bmatrix}6x_1&0\\0&-6x_2\end{bmatrix}$$ 在 $x_1<-\frac{1}{3}$ 时为负定矩阵，

∴函数 $g(x_1,x_2)$ 为严格凹函数。

(3) $h(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+x_1x_2-2x_3-7x_1+12$。

解：由函数的 $Hesse$ 矩阵

$$H=\nabla^2 h=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$ 为正定矩阵，

∴函数 $h(x_1,x_2,x_3)$ 为严格凸函数。

2.32 $\frac{1}{2}\left(e^x+e^y\right)>e^{\frac{x+y}{2}}\ (x\neq y)$。

证明：令 $F(x)=e^x$，则 $F''(x)=e^x>0$； ∴ $F(x)$ 为严格凸函数。

所以有 $F\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)<\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(y)$ 对 $\forall x\neq y$ 成立，

即 $e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^y\right)$ 对 $\forall x\neq y$ 成立，得证。

2.36 设 $x_i > 0(i = 1 \sim n)$，试证：

(1) $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2} \le \left(\dfrac{x_1^{\ p} + x_2^{\ p} + \cdots + x_n^{\ p}}{n}\right)^{1/p} \ (p > 1)$，

(2) $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2} \ge \left(\dfrac{x_1^{\ p} + x_2^{\ p} + \cdots + x_n^{\ p}}{n}\right)^{1/p} \ (p < 1且p \ne 0)$，当且仅当

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时上式中等号成立。

证明：(1)令 $f(x) = x^p \ (x > 0, p > 1)$，

则 $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$，所以 $f(x)$为严格凸函数。

$\therefore$有 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \le \dfrac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right)$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时等号成立；

即$\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}\right)^p \le \dfrac{x_1^{\ p} + x_2^{\ p} + \cdots + x_n^{\ p}}{n}$，两边开方得

$\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \left(\dfrac{x_1^{\ p} + x_2^{\ p} + \cdots + x_n^{\ p}}{n}\right)^{1/p}$，得证。

(2)证明方法同(1)。

//鉴于本人水平有限，如有错误敬请谅解，可联系修正。

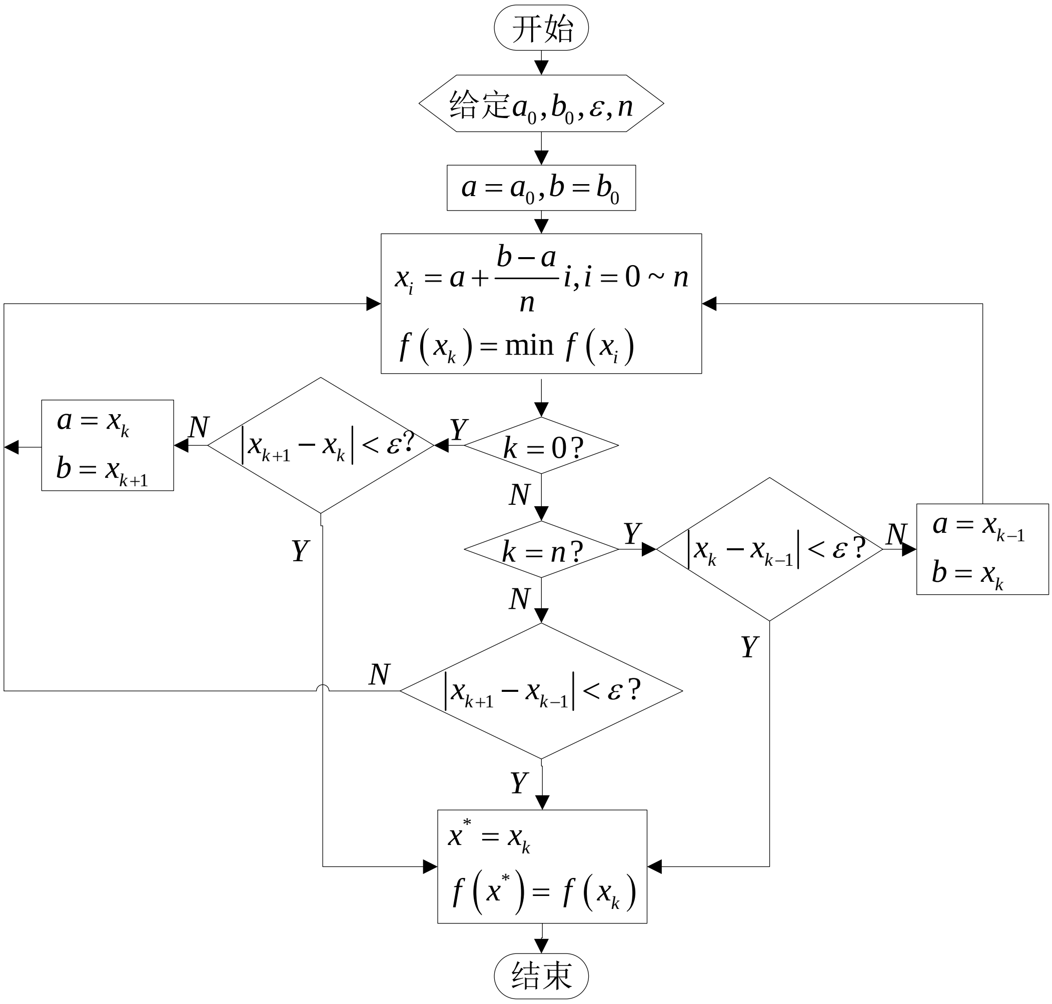
第三章

3.1 栅法：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为单峰函数，其最小值点在 $[a,b]$ 内。对 $[a,b]$ n 等分，记分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

计算 $f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$。求出 $f(x_k)=\min f(x_i)$。若 $|x_{k+1}-x_{k-1}|<\varepsilon$，则求出了近似最优解为 x_k； $k=0$ 时以 $[x_k,x_{k+1}]$ 代替 $[a,b]$； $k=n$ 时以 $[x_{k-1},x_k]$ 代替 $[a,b]$；其他情形以 $[x_{k-1},x_{k+1}]$ 代替 $[a,b]$。继续仿前做下去，直到满足精度为止。试画出算法框图。

解：



3.7 利用三次插值法求 $f(x)=x^4-4x^3-6x^2-16x+4$ 的最小值点和最小值，取 $a=0$， $h=1$， $\varepsilon=0.5$（即 $\left|\bar{f}'(x)\right|<0.5$）。

（答：$\bar{x}=3.995$，$f\left(\bar{x}\right)=-155.9989515$；准确解 $x^*=4$，$f\left(x^*\right)=-156$）

解：1）确定初始区间

$a=0$，$f'(a)=-16$；则 $b=a+h=1$，$f'(b)=-36$；

令 $a=b=1$，$f'(a)=-36$；$b=a+2h=3$，$f'(b)=-52$；

令 $a=b=3$，$f'(a)=-52$；$b=a+4h=7$，$f'(b)=684$；

∴初始区间 $[a,b]=[3,7]$。

2）三次插值迭代

①$u=f'(b)=684$，$v=f'(a)=-52$，$s=\dfrac{3\left[f(b)-f(a)\right]}{b-a}=564$

$z=s-u-v=-68$，$w=\sqrt{z^2-uv}=200.4794$

则 $x_1=a+(b-a)\left(1-\dfrac{u+w+z}{u-v+2w}\right)=4.1275$，$f'(x_1)=11.3035>0.5$

②$[a,b]=[a,x_1]=[3,4.1275]$

$u=f'(b)=11.30$，$v=f'(a)=-52$，$s=\dfrac{3\left[f(b)-f(a)\right]}{b-a}=-80.5998$

$z=s-u-v=-39.90$，$w=\sqrt{z^2-uv}=46.6911$

则 $x_2=a+(b-a)\left(1-\dfrac{u+w+z}{u-v+2w}\right)=3.9973$，$f'(x_2)=-0.2265<0.5$ 停止。

∴ $\bar{x}=x_2=3.9973$，$f\left(\bar{x}\right)=-155.9997$。

3.8 在三次插值法中已给数据 $f(a)$，$f(b)$，$f'(a)$，$f'(b)$ 且 $f'(a)f'(b)<0$，

(i) 这些数据适合什么条件时，$\alpha=0$？

(ii)当 $\alpha=0$ 时，试证 $u+v-2z=0$。

解：三次插值多项式可写成 $P(x)=\alpha(x-a)^3+\beta(x-a)^2+\gamma(x-a)+\delta$

其中 $P(a)=f(a)$，$P(b)=f(b)$，$P'(a)=f'(a)$，$P'(b)=f'(b)$

(i)要使α=0，则应满足$\begin{cases} f(b)=\beta(b-a)^2+\gamma(b-a)+\delta \\ f^{'}(b)=2\beta(b-a)+\gamma \end{cases}$联立可得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f^{'}(b)+f^{'}(a)}{2}$$

即当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f^{'}(b)+f^{'}(a)}{2}$ 时 α=0；

(ii)当α=0时，$u+v-2z=f^{'}(b)+f^{'}(a)-2\left[\beta(b-a)+\gamma\right]$

$$=f^{'}(b)+f^{'}(a)-2\left[\frac{f^{'}(b)-f^{'}(a)}{2(b-a)}(b-a)+f^{'}(a)\right]$$

$$=f^{'}(b)+f^{'}(a)-\left[f^{'}(b)+f^{'}(a)\right]=0$$

得证。

3.9 用公式(3.33)计算函数$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$的驻点的近似值，取$x_0=1$，$x_1=2$，$x_2=3$，$x_3=4$。

解：由$z=f^{'}(x)$知$z_0=\frac{e-e^{-1}}{2}$，$z_1=\frac{e^2-e^{-2}}{2}$，$z_2=\frac{e^3-e^{-3}}{2}$，$z_3=\frac{e^4-e^{-4}}{2}$

根据公式(3.33)

由$x_1:=\frac{z_1-z_0}{x_1-x_0}=2.4517$，$x_2:=\frac{z_2-z_0}{x_2-x_0}=4.4213$，$x_3:=\frac{z_3-z_0}{x_3-x_0}=8.7049$

$\Rightarrow \quad x_1=2.45$

由$x_2:=\frac{z_2-z_1}{x_2-x_1}=3.2447$，$x_3:=\frac{z_3-z_1}{x_3-x_1}=3.7842 \quad \Rightarrow \quad x_2=3.24$

由$x_3:=\frac{z_3-z_2}{x_3-x_2}=32.1049 \quad \Rightarrow \quad x_3=32.10$

$\therefore$由$x_2:=x_2-\frac{z_2}{x_3}=2.9327 \quad \Rightarrow \quad x_2=2.93$

由$x_1:=x_1-\frac{z_1}{x_2}=1.2150 \quad \Rightarrow \quad x_1=1.21$

由$x_0:=x_0-\frac{z_0}{x_1}=0.0328 \quad \Rightarrow \quad x^*=x_0=0.03$即$f(x)$驻点近似值。

补充：用黄金分割法求函数 $f(x)=3x^4-4x^2+2$ 的极小点，给定 $x_0=-2$，$h=1$，ε=0.1($x_0=2$，$h=1$，ε=0.1)。

解：1）确定初始区间

取 $x_0=2$，$f(x_0)=34<f(x_0+h)=209$，$f(x_0-h)=1<f(x_0)$

加大步长 $f(x_0-2h)=2>f(x_0-h)$ 则初始区间 $[a,b]=[x_0-2h,x_0]=[0,2]$

2）黄金分割法

① $x_1=a+0.382b=0.764$，$f(x_1)=0.6873$

$x_2=a+0.618b=1.236$，$f(x_2)=2.8908$

$f(x_1)<f(x_2)$，则新区间 $[a,b]=[a,x_2]=[0,1.236]$，$b-a>0.1$

②令 $x_2=x_1=0.764$，$f(x_2)=0.6873$

$x_1=a+0.382b=0.4722$，$f(x_1)=1.2573$

$f(x_1)>f(x_2)$，则新区间 $[a,b]=[x_1,b]=[0.4722,1.236]$，$b-a>0.1$

③令 $x_1=x_2=0.764$，$f(x_1)=0.6873$

$x_2=a+0.618(b-a)=0.9442$，$f(x_2)=0.8183$

$f(x_1)<f(x_2)$，则新区间 $[a,b]=[a,x_2]=[0.4722,0.9442]$，$b-a>0.1$

④令 $x_2=x_1=0.764$，$f(x_2)=0.6873$

$x_1=a+0.382(b-a)=0.6525$，$f(x_1)=0.8408$

$f(x_1)>f(x_2)$，则新区间 $[a,b]=[x_1,b]=[0.6525,0.9442]$，$b-a>0.1$

⑤令 $x_1=x_2=0.764$，$f(x_1)=0.6873$

$x_2=a+0.618(b-a)=0.8328$，$f(x_2)=0.6688$

$f(x_1)>f(x_2)$，则新区间 $[a,b]=[x_1,b]=[0.764,0.9442]$，$b-a>0.1$

⑥令 $x_1=x_2=0.8328$，$f(x_1)=0.6688$

$x_2=a+0.618(b-a)=0.8754$，$f(x_2)=0.6965$

$f(x_1)<f(x_2)$，则新区间$[a,b]=[a,x_2]=[0.764,0.8754]$，$b-a>0.1$

⑦令$x_2=x_1=0.8328$，$f(x_2)=0.6688$

$x_1=a+0.382(b-a)=0.8066$，$f(x_1)=0.6674$

$f(x_1)<f(x_2)$，则新区间$[a,b]=[a,x_2]=[0.764,0.8328]$，$b-a=0.0688<0.1$

停止，又$f(x)=f(-x)$，则$x^*=\pm\frac{1}{2}(a+b)=\pm0.7984$，$f(x^*)=0.6692$

第四章

4.1 设$f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$，用最速下降法求$f(x)$的最小值点，取ε=0.1，试证：任取初始点$x^0=(2,3)^T$，迭代一次即达到最优点。

证明：∵ $f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$，$x^0=(2,3)^T$

∴$\nabla f(x^0)=(2,4)^T$，$\left\|\nabla f(x^0)\right\|>\varepsilon=0.1$

第一次迭代：$x^1=x^0-\lambda\nabla f(x^0)$

则$f(x^1)$对λ进行精确一维搜索可得λ=0.5，∴$x^1=(1,1)^T$

由$\nabla f(x^1)=0$知x^1为$f(x)$的最优点，即迭代一次即达到最优点。

4.2 试证在最速下降法中，相邻两次搜索方向必正交，即

$$\left[\nabla f(x^k)\right]^T\nabla f(x^{k+1})=0\text{。}$$

证明：在最速下降法中 $x^{k+1}=x^k+\lambda_k s^k$，其中 $s^k=-\nabla f(x^k)$

∵λ_k是由$f(x^{k+1})$对λ精确一维搜索得到

∴应有 $\nabla f(x^k+\lambda_k s^k)\bullet s^k=0$

即 $\left[\nabla f(x^k)\right]^T\nabla f(x^{k+1})=0$，得证。

4.3 设 $f(x)=x_1+x_2^2+x_1^4+2x_1^2x_2^2+8x_1^2x_2^6$，用阻尼牛顿法求 $f(x)$ 的最小点，ε=0.1，$x^0=(1,1)^T$。

解：$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}1+4x_1^3+4x_1x_2^2+16x_1x_2^6\\ 2x_2+4x_1^2x_2+48x_1^2x_2^5\end{bmatrix}$，$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}12x_1^2+4x_2^2+16x_2^6 & 8x_1x_2+96x_1x_2^5\\ 8x_1x_2+96x_1x_2^5 & 240x_1^2x_2^4+4x_1^2+2\end{bmatrix}$

迭代开始

① $x^1=(1,1)^T$，$\nabla f(x^0)=(25,54)^T>\varepsilon$，$\nabla^2 f(x^0)=\begin{bmatrix}32 & 104\\ 104 & 246\end{bmatrix}$

$d^0=-\left[\nabla^2 f(x^0)\right]^{-1}\nabla f(x^0)=(0.1814,-0.2962)^T$

由 $\min\limits_{\lambda>0} f(x^0+\lambda d^0)=f(x^0+\lambda_0 d^0)\ \Rightarrow\ \lambda_0$=1.6773，

$\therefore x^1=x^0+\lambda_0 d^0=(1.3042,0.5032)^T$，$\nabla f(x^1)=(11.5332,7.0642)^T>\varepsilon$

② $d^1=-\left[\nabla^2 f(x^1)\right]^{-1}\nabla f(x^1)=(-0.5025,-0.0685)^T$

由 $\min\limits_{\lambda>0} f(x^1+\lambda d^1)=f(x^1+\lambda_1 d^1)\ \Rightarrow\ \lambda_1$=3.8375

$\therefore x^2=x^1+\lambda_1 d^1=(-0.6241,0.2403)^T$，$\nabla f(x^2)=(-0.1184,0.87)^T>\varepsilon$

③ $d^2=-\left[\nabla^2 f(x^2)\right]^{-1}\nabla f(x^2)=(-0.036,-0.2364)^T$

由 $\min\limits_{\lambda>0} f(x^2+\lambda d^2)=f(x^2+\lambda_2 d^2)\ \Rightarrow\ \lambda_2$=0.9909

$\therefore x^3=x^2+\lambda_2 d^2=(-0.6598,0.0061)^T$，$\nabla f(x^3)=(-0.1490,0.0228)^T<\varepsilon$ 停止

则 $x^*=x^3=(-0.6598,0.0061)^T$，$f(x^*)=-0.4702$。

4.4 设 $H(x)>0$，牛顿法中，在点 x^k 取搜索方向 $s^k=-\left[H(x^k)\right]^{-1}g^k\ \left(g^k=\nabla f(x^k)\right)$，试用方向导数直接证明 s^k 是 $f(x)$ 在点 x^k 的下降方向。

证明：要证 s^k 是 $f(x)$ 在点 x^k 的下降方向，即证 $g^k \bullet s^k<0$。

$\because (g^k)^T s^k=-\left[\nabla f(x^k)\right]^T\left[H(x^k)\right]^{-1}\nabla f(x^k)$ 且 $H(x)>0$

$\therefore$ 由 $\left[H(x)\right]^{-1}>0$ 知 $(g^k)^T s^k=-\left[\nabla f(x^k)\right]^T\left[H(x^k)\right]^{-1}\nabla f(x^k)<0$

则 s^k 是 $f(x)$ 在点 x^k 的下降方向，得证。

4.5*设 $f(x)=\frac{1}{2}x^TAx+b^Tx+c$， $A^T=A>0$，给定初始点 x^0，试证由最速下降法产生的点列 $\{x^k\}$ 有如下公式：

$$x^{k+1}=x^k-\frac{(g^k)^Tg^k}{(g^k)^TAg^k}g^k,\quad k=0,1,2,3,\cdots,$$

其中 $g^k=Ax^k+b$。

证明：在最速下降法中 $x^{k+1}=x^k-t_kg^k$，则命题即证 $t_k=\frac{(g^k)^Tg^k}{(g^k)^TAg^k}$。

$\because g^k=Ax^k+b$， $\min\limits_{t>0} f(x^{k+1})=f(x^k-t_kg^k)$

$\therefore (Ax^{k+1}+b)(-g^k)=0 \Rightarrow [A(x^k-t_kg^k)+b]g^k=0$

$\therefore (g^k)^Tg^k=t_k(Ag^k)^Tg^k$ 又 $A^T=A$

$\therefore t_k(g^k)^TAg^k=(g^k)^Tg^k \Rightarrow t_k=\frac{(g^k)^Tg^k}{(g^k)^TAg^k}$ 得证。

4.9 设 $Q=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$， $p_1=(1,0)^T$， $p_2=(1,-2)^T$，试证 p_1 与 p_2 是 Q 一共轭的和线性无关的。并说明不是所有线性无关的向量组都是 Q 共轭的，考虑反例：$p_1=(1,0)^T$，$p_2=(1,1)^T$。

解：由 $p_1{}^TQp_2=[1\quad 0]\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=0$ 可知 p_1 与 p_2 为 Q 共轭；

又 $\alpha_1p_1+\alpha_2p_2=(\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_2)=0$ 仅在 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时成立，$\therefore$ p_1，p_2 线性无关。

并非所有线性无关的向量组都是 Q 共轭的，如 $p_1=(1,0)^T$， $p_2=(1,1)^T$

显然可证 p_1， p_2 线性无关，但由 $p_1{}^TQp_2=[1\quad 0]\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=3\neq 0$ 知

p_1 与 p_2 不是 Q 共轭的。

4.10 设 $f(x)=x^T Ax-b^T x$，$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，$b=(3,3)^T$，取 $x^1=(0,0)^T$，$p_1=(1,0)^T$，$p_2=(1,-2)^T$，试证由本章共轭方向法产生的 x^3 为 $f(x)$ 的最优解。

证明：$x^2=x^1+t_1p_1=(t_1,0)^T$

$f(x^2)$ 对 t 做精确一维搜索 $\min\limits_{t>0} f(x^1+tp_1)=f(x^1+t_1p_1)$ 可得 $t_1=\frac{3}{4}$

$\therefore x^2=\left(\frac{3}{4},0\right)^T$，可得 $\nabla f(x^2)=2\bullet\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\left(0,-\frac{3}{2}\right)^T\neq 0$

$x^3=x^2+t_2p_2=\left(t_2+\frac{3}{4},-2t_2\right)^T$，同理 $f(x^3)$ 对 t 一维搜索可求得 $t_2=-\frac{1}{4}$

$\therefore x^3=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$，可得 $\nabla f(x^3)=2\bullet\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=0$

则 x^3 为 $f(x)$ 的最优解，得证。

4.11 设 Q 为 n 阶对称矩阵，$z^1,z^2,\cdots,z^n$ 是 Q 共轭的，试找一个方阵 P 使 P^TQP 为对角阵。

解：令 $P=(z^1,z^2,\cdots,z^n)$，则 P 即所要找的方阵，证明如下：

由于 $z^1,z^2,\cdots,z^n$ 是 Q 共轭的，则有 $z^1,z^2,\cdots,z^n$ 线性无关且 $(z^i)^T Qz^j=0,(i\neq j)$

$\therefore P^TQP=(z^1,z^2,\cdots,z^n)^T Q(z^1,z^2,\cdots,z^n)$

$$=\begin{bmatrix}(z^1)^T\\(z^2)^T\\\vdots\\(z^n)^T\end{bmatrix}Q\begin{bmatrix}z^1&z^2&\cdots&z^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(z^1)^TQz^1&(z^1)^TQz^2&\cdots&(z^1)^TQz^n\\(z^2)^TQz^1&(z^2)^TQz^2&\cdots&(z^2)^TQz^n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(z^n)^TQz^1&(z^n)^TQz^2&\cdots&(z^n)^TQz^n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \left(z^1\right)^T Qz^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(z^2\right)^T Qz^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left(z^n\right)^T Qz^n \end{bmatrix} = \Lambda \text{ 为对角阵，得证。}$$

4.12 设 Q 为 n 阶对称正定矩阵，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 Q 一共轭的非零向量组，向量 x 与 $p_i\left(i=1\sim n\right)$ 为 Q 共轭，试证：$x=0$。

证明：$\because$ x 与 $p_i\left(i=1\sim n\right)$ 为 Q 共轭　$\therefore$ $x^T Qp_i=0,\left(i=1\sim n\right)$

令 $P=\left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right)$　可知　$x^T\ Q\ P=0$

由于 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 Q 共轭的非零向量组，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 线性无关且 Q 为对称正定矩阵

$\therefore$ $|QP| \neq 0$　则由 $x^T QP=0 \Rightarrow x=0$ 得证。

4.13 设 Q 为 n 阶对称正定矩阵，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 Q 一共轭的非零向量组，则任意 $x \in R^n$，可表示为

$$x=\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(p_i\right)^T Qx}{\left(p_i\right)^T Qp_i} p_i \text{。}$$

证明：$\because$ $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 Q 共轭的非零向量组

$\therefore$ $(p_i)^T Qp_j=0,\left(i \neq j\right)$ 且 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 线性无关

$\therefore$ 对于 $\forall x \in R^n$，可表示为 $x=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$，其中 α_i 为常数

又 Q 对称正定，有 $(p_j)^T Qx=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (p_j)^T Qp_i=\alpha_i (p_i)^T Qp_i$，$i=1\sim n$

$$\therefore\ \alpha_i=\frac{(p_i)^T Qx}{(p_i)^T Qp_i} \Rightarrow x=\sum_{i=1}^{n} \frac{(p_i)^T Qx}{(p_i)^T Qp_i} p_i \text{ 得证。}$$

4.14 设 Q 为实对称矩阵，试证 Q 的任意两个对应于不同特征值的特征向量都是 Q 共轭的。

证明：设 λ_1，λ_2 为 Q 的任意两个不同特征值，x^1，x^2 为其对应的特征向量

则 $Qx^1=\lambda_1x^1$，$Qx^2=\lambda_2x^2$

$\because Q$ 为对称矩阵 $\therefore\left(x^1\right)^TQx^2=\left(x^1\right)^T\lambda_2x^2=\lambda_2\left(x^1\right)^Tx^2$

又有 $\left(x^1\right)^TQx^2=\left(Qx^1\right)^Tx^2=\left(\lambda_1x^1\right)^Tx^2=\lambda_1(x^1)^Tx^2 \quad \therefore\lambda_1\left(x^1\right)^Tx^2=\lambda_2\left(x^1\right)^Tx^2$

$\because\lambda_1\neq\lambda_2 \quad \therefore\left(x^1\right)^Tx^2=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x^1\right)^TQx^2=0$，得证。

4.15 设 Q 为 n 阶对称正定矩阵，且设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 n 维的线性无关向量组，用 Gram-Schmidt 方法，由 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 产生一组向量：

$$d_1=p_1,\quad d_k=p_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{p_k^TQd_i}{d_i^TQd_i}d_i,\quad k=2,\cdots,n,$$

试证 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 构成 Q 一共轭向量组。

证明：用数学归纳法。先证 d_1 与 $d_2,\cdots,d_n$ 关于 Q 共轭。

①当 $n=2$ 时，$d_1^TQd_2=\left(p_1\right)^TQp_2-\left(p_1\right)^TQ\dfrac{\left(p_2\right)^TQp_1}{\left(p_1\right)^TQp_1}p_1=\left(p_1\right)^TQp_2-\left(p_2\right)^TQp_1$

由于 Q 对称正定，$\left(p_1\right)^TQp_2-\left(p_2\right)^TQp_1=0$，$\therefore d_1$ 与 d_2 关于 Q 共轭成立；

②当 $n=k$ 时，假设 d_1 与 $d_2,\cdots,d_k$ 关于 Q 共轭；

③当 $n=k+1$ 时，

$$d_1^TQd_{k+1}=\left(p_1\right)^TQ\left(p_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(p_{k+1}\right)^TQd_i}{d_i^TQd_i}d_i\right)$$

$$=(p_1)^TQp_{k+1}-\left(p_{k+1}\right)^TQp_1-\frac{\left(p_{k+1}\right)^TQd_2}{d_2^TQd_2}d_1^TQd_2-\cdots-\frac{\left(p_{k+1}\right)^TQd_k}{d_k^TQd_k}d_1^TQd_k$$

$=0$，即 d_1 与 d_k 关于 Q 共轭；

由归纳法原理可知 d_1 与 $d_2,\cdots,d_n$ 关于 Q 共轭。

同理可证 d_1，d_2，$\cdots$，d_n 分别都关于 Q 共轭，即得证。

4.17 用 Fletcher-Reeves 共轭梯度法求 $f(x)$ 的最小值，

$f(x)=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-2x_1$，取 $x^1=(-2,4)^T$。

解：$x^1=(-2,4)^T$，$p_1=-g_1=-\nabla f(x^1)=(12,-6)^T$

$\therefore f(x^2)=f(x^1+t_1p_1)$ 对 t 精确一维搜索可得 $t_1=\frac{5}{17}$

$x^2=x^1+t_1p_1=\left(\frac{26}{17},\frac{38}{17}\right)^T$，$g_2=\nabla f(x^2)=\left(\frac{6}{17},\frac{12}{17}\right)^T$

$\therefore \alpha_1=\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}=\frac{1}{289}$，$p_2=-g_2+\alpha_1p_1=\left(-\frac{90}{289},-\frac{210}{289}\right)^T$

同理 $f(x^3)=f(x^2+t_2p_2)$ 对 t 精确一维搜索可得 $t_2=1.7$

$x^3=x^2+t_2p_2=(1,1)^T$，$g_3=\nabla f(x^3)=(0,0)^T$

$\therefore f(x)$ 的最小值点为 $x^3=(1,1)^T$，最小值为 $f(x^3)=-1$。

4.18 设 $f(x)=\frac{1}{2}x^TQx+b^Tx+c$，$Q^T=Q>0$，试证在共轭梯度法的一维搜索

$\min\limits_{\lambda\ge0} f(x^k+\lambda z^k)=f(x^k+\lambda_k z^k)$ 中，有 $\lambda_k=-\frac{(g^k)^T z^k}{(z^k)^T Qz^k}$。

证明：$\nabla f(x)=Qx+b$，由 $\min\limits_{\lambda\ge0} f(x^k+\lambda z^k)=f(x^k+\lambda_k z^k)$ 可得

$\nabla f(x^k+\lambda_k z^k)z^k=0 \;\Rightarrow\; \left(Q(x^k+\lambda_k z^k)+b\right)z^k=0$

$\Rightarrow\; (Qx^k+b)z^k+\lambda_k(z^k)^T Qz^k=0$

$\therefore \lambda_k=-\frac{(Qx^k+b)z^k}{(z^k)^T Qz^k}=-\frac{{g_k}^T z^k}{(z^k)^T Qz^k}$，得证。

4.24 设 $f(x)=\frac{1}{2}x^THx+b^Tx+c$，$H^T=H>0$，试证它满足拟牛顿方程：

$H^{-1}\Delta g_k=\Delta x^k\ \ (k=1,2,3,\cdots)$。

证明：$\because f(x)=\frac{1}{2}x^THx+b^Tx+c$，$H^T=H>0$ $\therefore \nabla f(x)=Hx+b$ 且 H 可逆

$\therefore$ 由 $\Delta g_k=g_{k+1}-g_k=\nabla f(x^{k+1})-\nabla f(x^k)=H(x^{k+1}-x^k)=H\Delta x^k$，$(k=1,2,3,\cdots)$

$\Rightarrow\; H^{-1}\Delta g_k=\Delta x^k$，$(k=1,2,3,\cdots)$；得证。

4.26 设 $f(x)=\frac{1}{2}x^TQx$，$Q=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，试用 DFP 法求 $f(x)$ 的最小值点。

解：取初始点 $x^1=(-2,4)^T$，$H_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

则 $x^2=x^1+t_1p_1$，其中 $p_1=-g_1=-Qx^1=(10,-6)^T$

由 $f(x^2)=f(x^1+tp_1)$ 对 t 精确一维搜索可得 $t_1=\frac{17}{57}$

$\therefore x^2=\left(\frac{56}{57},\frac{126}{57}\right)^T$，$g_2=Qx^2=\left(\frac{42}{57},\frac{70}{57}\right)^T$

则由 $\Delta x^1=x^2-x^1=(2.9825,-1.7895)^T$，$\Delta g_1=g_2-g_1=(10.7368,-4.7719)^T$

$$\Rightarrow\ H_2=H_1+\frac{\Delta x^1(\Delta x^1)^T}{(\Delta x^1)^T\Delta g_1}-\frac{(H_1\Delta g_1)(H_1\Delta g_1)^T}{(\Delta g_1)^T H_1\Delta g_1}=\begin{bmatrix}0.3843 & 0.2396\\ 0.2396 & 0.9140\end{bmatrix}$$

则 $x^3=x^2+t_2p_2$，其中 $p_2=-H_1g_1=(-0.5774,-1.2990)^T$

由 $f(x^3)=f(x^2+tp_2)$ 对 t 精确一维搜索可得 $t_2=1.7017$

$\therefore x^3=(0,0)^T$，$g_3=Qx^3=(0,0)^T$

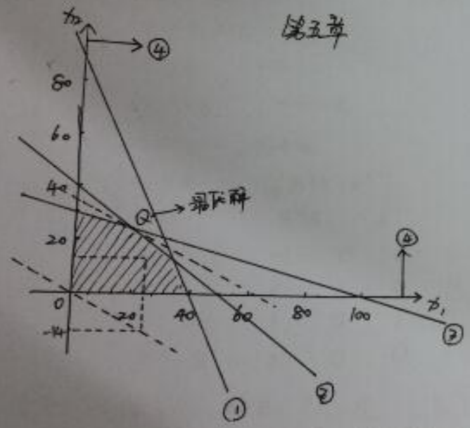
$\therefore f(x)$ 的最小值点为 $x^*=(0,0)^T$，最小值 $f(x^*)=0$。

//鉴于本人水平有限，如有错误敬请谅解，可联系修正。

学院：通信工程学院　　姓名：张阳阳　　学号：1401120314

第五章

5.1. 解:



$\max S = 7x_1 + 12x_2$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_2 \le -\frac{9}{4}x_1 + 90, & ① \\ x_2 \le -\frac{4}{5}x_1 + 40, & ② \\ x_2 \le -\frac{3}{10}x_1 + 30, & ③ \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. & ④ \end{cases}$$

目标函数变形得: $x_2 = -\frac{7}{12}x_1 + \frac{S}{12}$

联立②③得 $x_1 = 20$, $x_2 = 24$

最优解为 $x = (20, 24)^T$, $\max S = 428$

5.2. 解: 设生产A和B两种产品各为x_1和x_2件，则问题立即化为如下数学问题，即在限制条件

$1.5x_1 + 10x_2 \le 58$

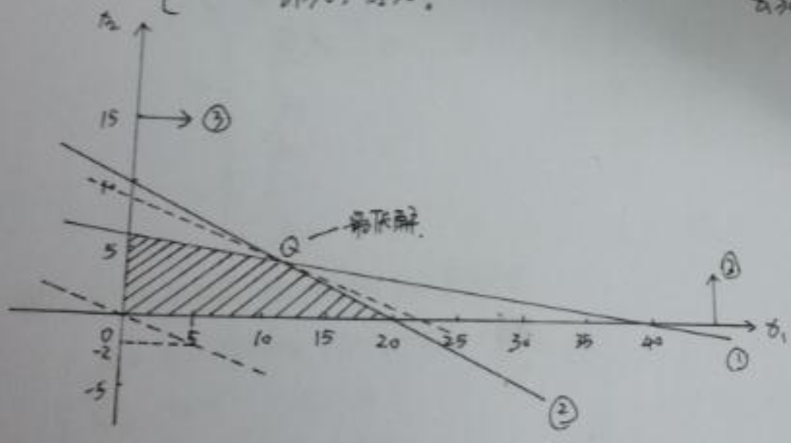
$2x_1 + 4x_2 \le 40$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

之下，使总产值最高，总产值 $S = 200x_1 + 500x_2$

即
$$\begin{cases} \max S = 200x_1 + 500x_2, \\ \text{s.t.}\ 1.5x_1 + 10x_2 \le 58, \\ \quad 2x_1 + 4x_2 \le 40, \\ \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

化简为
$$\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{5}x_1 + \frac{S}{500}, \\ \text{s.t.}\ x_2 \le -\frac{3}{20}x_1 + \frac{29}{5}, & ① \\ \quad x_2 \le -\frac{1}{2}x_1 + 10, & ② \\ \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. & ③ \end{cases}$$



联立①②可得 $x_1 = 12$, $x_2 = 4$

最优解为 $x = (12, 4)^T$, $\max S = 4400$

答：每周A和B产品应各生产12件和4件，可使总产值最高。

5.3. 解：这些函数已经是标准形式. 取$B=(P_3, P_4, P_5)$

$$
\begin{cases}
\max\ x_0 = 2x_1 + x_2, \\
\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\
\qquad -x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 0, \\
\qquad 6x_1 + 2x_2 \qquad + x_5 = 0, \\
\qquad x_1 \geq 0, \cdots, x_5 \geq 0。
\end{cases}
$$

则 $T(B) = \begin{bmatrix} C_B^T B^{-1} b & C_B^T B^{-1} A - C^T \\ B^{-1} b & B^{-1} A \end{bmatrix}$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

5.4. 解：将其化为标准形式，取$B=(P_1, P_2, \cdots, P_m)$

$$
\begin{cases}
\max\ x_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j - b_1 - b_2 - \cdots - b_m, \\
\text{s.t.}\quad y_1 \qquad + \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1, \\
\qquad y_2 \qquad + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j = b_2, \\
\qquad \ddots \quad y_m + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m, \\
\qquad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \cdots, y_m \geq 0, x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0.
\end{cases}
$$

则 $T(B) = \begin{bmatrix} C_B^T B^{-1} b & C_B^T B^{-1} A - C^T \\ B^{-1} b & B^{-1} A \end{bmatrix}$

$$
= \begin{bmatrix}
-\sum_{i=1}^{m} b_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sum_{i=1}^{m} a_{i1} & -\sum_{i=1}^{m} a_{i2} & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} a_{in} \\
b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_m & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

5.7. 解：加入松弛变量，将此规范化为标准形式得.

$$
\begin{cases}
\max x_0 = x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5, \\
\text{s.t.}\quad x_1 + x_3 = 4, \\
\qquad x_2 + x_4 = 3, \\
\qquad x_1 + 2x_2 + x_5 = 8, \\
\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.
\end{cases}
$$

	c_j	1	2	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	θ
0	x_3	1	0	1	0	0	4	—
0	x_4	0	1	0	1	0	3	3 ←
0	x_5	1	2	0	0	1	8	4
$-Z$		1	2 ↑	0	0	0	0	
0	x_3	1	0	1	0	0	4	4
2	x_2	0	1	0	1	0	3	—
0	x_5	1	0	0	-2	1	2	2 ←
$-Z$		1 ↑	0	0	-2	0	-6	
0	x_3	0	0	1	2	-1	2	
2	x_2	0	1	0	1	0	3	
1	x_1	1	0	0	-2	1	2	
$-Z$		0	0	0	0	-1	-8	

最优解为：$X=(2,3,2,0,0)^T$. $Z=8$.

5.8. 解：在第一个方程中加入人工变量 x_5，第二个方程中加入人工变量 x_6，目标函数中加上 (Mx_5+Mx_6) 这一项，

得到大M单纯形法的数学模型。

$$\begin{cases} \max z' = -2x_1 - 2x_2 - Mx_5 - Mx_6, \\ s.t.\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ \quad -x_1 - x_2 - x_4 + x_6 = 2, \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

再列单纯形表求解，如下表所示

	c_j	-2	-2	0	0	-M	-M		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	θ
-M	x_5	-1	1	-1	0	1	0	1	
-M	x_6	-1	-1	0	-1	0	1	2	
$-z$		-2-2M	-2	-M	-M	0	0	3M	

得到最优解 $X=(0,0,0,0,1,2)^T$，　$Z=-3M$

但最优解中含有人工变量 x_5 和 x_6，说明这个解是伪最优解，是不可行的。

因此原问题无可行解。

59. 解 在第一个方程中加入人工变量 x_5，第二个方程中加入人工变量 x_6，第三个方程中加入人工变量 x_7，

目标函数中加入 $-(Mx_5+Mx_6+Mx_7)$ 这一项，得到大M法的数学模型

$$\begin{cases} \max\ z = -4x_1 - 3x_3 - Mx_5 - Mx_6 - Mx_7, \\ \text{s.t.}\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_5 = 2, \\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + x_6 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_4 + x_7 = 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

用单纯形表求解，如下表所示。

	c_j	-4	0	-3	0	$-M$	$-M$	$-M$		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	θ
$-M$	x_5	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	2	4
$-M$	x_6	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	3	2
$-M$	x_7	3	-6	0	4	0	0	1	0	0 ←
$-z$		$-4+5M$	$-5M$	-3	$\frac{10}{3}M$	0	0	0	$5M$	
$-M$	x_5	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	2	1
$-M$	x_6	0	3	$-\frac{1}{2}$	-2	0	1	$-\frac{1}{2}$	3	1
-4	x_1	1	-2	0	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0 ←
$-z$		0	$5M-8$	-3	$-\frac{10}{3}M+\frac{16}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}M+\frac{4}{3}$	$5M$	
$-M$	x_5	1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$	2	2 ←
$-M$	x_6	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	3	2
0	x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	0
$-z$		$\frac{5}{2}M-4$	0	-3	0	0	0	$-\frac{5}{6}M$	$5M$	
-4	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$	2	
$-M$	x_6	0	0	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	
0	x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{12}$	1	
$-z$		0	0	$1-\frac{5}{4}M$	0	$-\frac{5}{2}M+4$	0	$-\frac{5}{4}M+\frac{2}{3}$	8	

得到最优解 $X=(2,1,0,0,0,0,0)^T$

$z=-8$.

学院：通信工程学院　　姓名：张阳阳　　学号：140112031 4.

第八章　习题

8.1. 解：构造增广函数 $\phi_k(x)$ 如下：

$$\phi_k(x)=x_1^2+x_2^2+M_k\min(\{x_1-1,0\})^2$$

$$=\begin{cases} x_1^2+x_2^2, & x_1\geq 1 \\ x_1^2+x_2^2+M_k(x_1-1)^2, & x_1<1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x_1}=\begin{cases} 2x_1, & x_1\geq 1 \\ 2x_1+2M_k(x_1-1), & x_1<1 \end{cases}$$

由 $\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x_1}=0$ 可得：$2x_1+2M_k(x_1-1)=0$

所以 $x_1^*=x_1^*(M_k)=\frac{M_k}{1+M_k}$

这就是对于固定的 M_k，问题 $\min\limits_{x\in R^n}\phi_k(x,M_k)$ 的最优解.

$\lim\limits_{k\to\infty}x_1^k=\lim\limits_{k\to\infty}x_1^*(M_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{M_k}{1+M_k}=1=x_1^*$，同理. $x_2^*=0$.

x_1^*,x_2^* 就是所求原问题的最优解.

8.2. 解：构造增广函数 $\phi_k(x)$ 如下：

$$\phi_k(x)=x_1^2+x_2^2+M_k\min(\{x_1+x_2-1,0\})^2$$

$$=\begin{cases} x_1^2+x_2^2, & x_1+x_2\geq 1 \\ x_1^2+x_2^2+M_k(x_1+x_2-1)^2, & x_1+x_2<1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x_1}=\begin{cases} 2x_1, & x_1+x_2\geq 1 \\ 2x_1+2M_k(x_1+x_2-1), & x_1+x_2<1 \end{cases}$$

由 $\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x_1}=0$ 可得：当 $x_1+x_2\geq 1$，且 $x_2<1$ 时，$x_1=0$ 不在可行域内.

当 $x_1+x_2\geq 1$，且 $x_2\geq 1$ 时，$x_1=0$ 在可行域内.

当 $x_1+x_2<1$ 时，$x_1=\frac{M_k(1-x_2)}{1+M_k}$　$\lim\limits_{k\to\infty}x_1=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{M_k(1-x_2)}{1+M_k}=1-x_2^*$

~~[illegible] $x_1^*=0$，当 $x_2\geq 1$ 时，$x_1^*=0$，当 $x_2<1$ 时~~

同理. ~~由 $\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x_2}=0$. $x_2^*=0$，当 $x_1\geq 1$ 时，$x_2^*=1$，当 $x_1<1$ 时，所以原问题的最优解为 $x_1^*=0$，$x_2^*=1$~~

要满足 $p(x)=0$，则 $x_1+x_2-1=0$ ~~[illegible]~~

当 $x_1=0$ 时，$x_2=1$，$f(x)=1$

当 $x_1=1-x_2$ 时，$f(x)=(1-x_2)^2+x_2^2$　当 $x_2=\frac{1}{2}$ 时

$f(x)$ 取最小，此时 $x_1=\frac{1}{2}$　$f(x)=\frac{1}{2}$

问题 $\min\limits_{x\in R^n}\phi_k(x,M_k)$ 的最优解为

$x_1^*=\frac{1}{2}$，$x_2^*=\frac{1}{2}$

8.4. 解：证明：任给 $x\in R$，都有

$$f(x)=T(x;M_k)\geq T(x^k;M_k)=f(x^k)$$

所以，x^k 为 (P) 的最优解.

8.7. 解：(1) 构造增广函数 $\psi_k(x)$ 如下：

$$\psi_k(x) = x^2 + \mu_k \frac{1}{x}$$

由 $\frac{d\psi_k(x)}{dx} = 2x - \mu_k \frac{1}{x^2} = 0$ 可得 $\mu_k = 2x^3$

$x^k = \sqrt[3]{\frac{\mu_k}{2}}$ $\quad x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^k = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[3]{\frac{\mu_k}{2}} = 0$

(2) 用对数罚函数法.

构造增广函数 $\psi_k(x)$ 如下.

$$\psi_k(x) = x^2 + \mu_k \ln \frac{1}{x}$$

由 $\frac{d\psi_k(x)}{dx} = 2x + \mu_k x \cdot -\frac{1}{x^2} = 0$ 可得 $x^k = 0$

$x^* = 0$

8.8. 解：构造增广函数 $\psi_k(x)$ 如下：

$$\psi_k(x) = x + \mu_k \frac{1}{x} + \mu_k \frac{1}{1-x}$$

由 $\frac{d\psi_k(x)}{dx} = 1 - \mu_k \frac{1}{x^2} + \mu_k \frac{1}{(1-x)^2} = 0$ 可得 x^k

$\lim\limits_{k\to\infty} x^k = 0 = x^*$

x^* 就是所求原问题的最优解.

8.9. 解：构造增广函数 $\psi_k(x)$ 如下：

$$\psi_k(x) = x_1^3 + x_2^3 + \mu_k \frac{1}{x_1+x_2-1}$$

由 $\frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_1} = 3x_1^2 - \frac{\mu_k}{(x_1+x_2-1)^2} = 0$ 可得 x_1^k

$\lim\limits_{k\to\infty} x_1^k = 0$ 或 $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^k = 1 - x_2$

若 x_1^k, x_2 为最优解，需保证 $x_1 + x_2 - 1 = 0$

当 $x_1^k = 0$ 时 $x_2^k = 1$，$f_k(x) = 1$

当 $x_1^k = 1 - x_2$ 时，$f_k(x) = 1 - 3x_2 + 3x_2^2$ $\quad \min f_k(x) = (\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4}$

即问题 $\min\limits_{x\in R^n} \psi_k(x)$ 的最优解为 $x_1^* = \frac{1}{2}$，$x_2^* = \frac{1}{2}$.

8.10. 解：(1) 以倒数函数作为障碍函数.

构造增广函数 $\psi_k(x)$ 如下：

$$\psi_k(x) = x_1 + 2x_2 + \mu_k \frac{1}{-x_1^2+x_2} + \mu_k \frac{1}{x_1}$$

由 $\frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_1} = 1 + \mu_k \frac{2x_1}{(-x_1^2+x_2)^2} - \mu_k \frac{1}{x_1^2} = 0$

$$\frac{x_1^2(-x_1^2+x_2)^2}{(-x_1^2+x_2)^2-2x_1^3} = \mu \to 0$$

$\therefore x_1=0 \quad -x_1^2+x_2=0 \quad$ 则 $x_2=0$

可得 $x_1^*=0$，$x_2^*=0$.

(2). 以对数函数作为障碍函数.

构造增广函数 $\psi_k(x)$ 如下：

$$\psi_k(x) = x_1+2x_2 + \mu_k \ln\frac{1}{-x_1^2+x_2} + \mu_k \ln\frac{1}{x_1}$$

由 $\frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_1} = 1 + \mu_k \cdot (-x_1^2+x_2) \cdot -\frac{-2x_1}{(-x_1^2+x_2)^2} - \mu_k \cdot x_1 \frac{1}{x_1^2}$

$$= 1 + \mu_k \frac{2x_1}{-x_1^2+x_2} - \mu_k \frac{1}{x_1} = 0$$

$$\frac{x_1(-x_1^2+x_2)}{-3x_1^2+x_2} = \mu \to 0$$

$\therefore x_1=0$，$-x_1^2+x_2=0$. 则 $x_2=0$

可得 $x_1^*=0$，$x_2^*=0$.

补充. 2. 解：$\nabla f(x) = 2[x_1, x_2]^T$.

$g_1(x)=1-x_1-x_2$，$\nabla g_1(x) = [-1, -1]^T$

由KKT条件得.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

由KKT条件及约束条件得.

$$\begin{cases} x_1-\lambda=0 \\ x_2-\lambda=0 \\ \lambda(1-x_1-x_2)=0 \\ 1-x_1-x_2\le 0 \\ \lambda, x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

(1) 若 $\lambda=0$，$x_1=x_2=0$ 这与 $1-x_1-x_2\le 0$ 矛盾.

(2) 若 $1-x_1-x_2=0$ $\quad x_1=x_2=\frac{1}{2}$，满足，$\lambda=\frac{1}{2}$

$\therefore [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^T$ 为K-T点，

9. 解：$\nabla f(x) = 3[x_1^2,\ x_2^2]^T$.

$g(x) = 1 - x_1 - x_2$ ， $\nabla g(x) = [-1,\ -1]^T$

由KKT条件得

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

由KKT条件及约束条件得

$$\begin{cases} x_1^2 - \lambda = 0 \\ x_2^2 - \lambda = 0 \\ \lambda(1 - x_1 - x_2) = 0 \\ 1 - x_1 - x_2 \le 0 \\ \lambda,\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(1) 若$\lambda=0$， $x_1 = x_2 = 0$ 与 $1-x_1-x_2\le 0$ 矛盾

(2) 若$1-x_1-x_2=0$， $x_1=x_2=\frac{1}{2}$，满足条件，此时 $\lambda=\frac{1}{4}$

$\therefore [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^T$ 为K-T点

10. 解：$\nabla f(x) = [1,\ 2]^T$

$g_1(x) = x_1^2 - x_2$ ， $\nabla g_1(x) = [2x_1,\ -1]^T$

$g_2(x) = -x_1$ ， $\nabla g_2(x) = [-1,\ 0]^T$

由KKT条件得

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

由KKT条件及约束条件得

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1(x_1^2 - x_2) = 0 \\ -\lambda_2 x_1 = 0 \\ x_1^2 - x_2 \le 0 \\ -x_1 \le 0 \\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 2$ $\quad x_1^2 - x_2 = 0$ $\quad x_1^2 = x_2$

(1) 若$\lambda_2=0$， $1+4x_1=0$ $\quad x_1 = -\frac{1}{4}$ ，与$x_1\ge 0$矛盾

(2) 若$x_1=0$， $\lambda_2=1$ $\quad x_2=0$ ，满足条件

$\therefore x_1^* = x_2^* = 0$

11. 解: $\nabla f(x) = [14x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2,\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2,\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2]^T$

$g(x) = 2x_1 + x_3 \qquad \nabla g(x) = [2,\ 0,\ 1]^T$

由KKT条件得.

$$\begin{bmatrix} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

联立

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 + 2\lambda = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 1 + \lambda = 0 \\ \lambda(2x_1 + x_3) = 0 \\ 2x_1 + x_3 \le 0 \\ \lambda,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

当$\lambda = 0$时 $x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2}$ 不满足$2x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0$

当$\lambda \ne 0$时. $x_1 = \frac{1}{7}$, $x_2 = \frac{3}{14}$, $x_3 = -\frac{2}{7}$, $\lambda = -\frac{5}{14}$ 满足条件.

$\therefore x_1^* = \frac{1}{7}$, $x_2^* = \frac{3}{14}$, $x_3^* = -\frac{2}{7}$.