第4章　数值积分与数值微分

4.1 引言

1. 问题的提出

工程应用中常需要计算定积分. 对于定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续， $F(x)$是$f(x)$的原函数，则由Newton—Leibniz公式有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

虽然利用N-L公式解决了很多积分及相关的应用问题，但仍有不能应用N-L公式求解的积分问题， 或求解困难的问题.

不易用N-L公式求解的积分问题

（1）$f(x)$ 的原函数不是初等函数，例如

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x\,;$$

（2）$f(x)$没有解析表达式

(只有通过实验或测量得出的一组离散数据)；

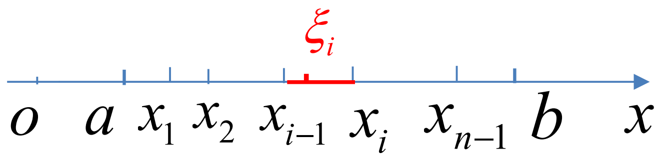
（3）$f(x)$ 的原函数的表达式相当复杂，求解困难

例如 地球卫星轨道近似为一个椭圆，椭圆轨道的周长

$$l = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

又如 $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\pi}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$

2. 数值求积的基本思想



定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \quad (\xi_i \triangleq x_i,\ \Delta x_i \triangleq A_i)$$

基本思想：用 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个点处函数值的线性组合近似代替定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的数值求积公式或机械求积公式.

记 $I(f) \triangleq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \triangleq I_n(f)$ —求积公式

$E_n(f) = I(f) - I_n(f)$ —求积余项或误差

$x_i \in [a,b]$，$i = 0 \sim n$ —求积节点

$A_i\ (i = 0 \sim n)$ —求积系数

（相当于权，与x_i有关，与$f(x)$的具体表达式无关）

在工程应用中，常常计算加权的定积分

$$I(f) \triangleq \int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \triangleq I_n(f)$$

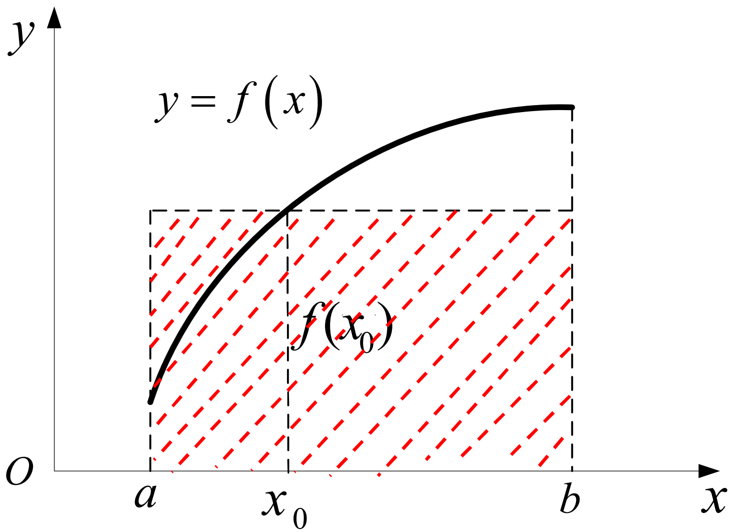
例如：$n=0$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0)=(b-a)f(x_0)$ −− 矩形公式

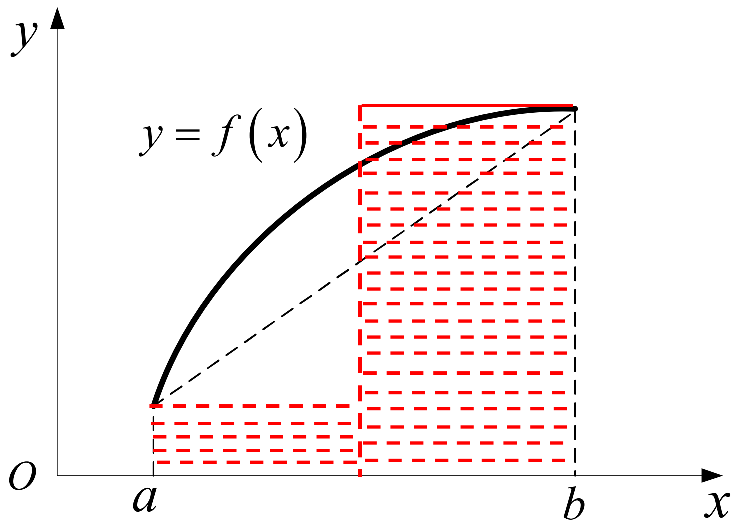
$=(b-a)f(\zeta)$

$n=1$时，若取 $x_0=a,\ x_1=b,\ A_0=A_1=\dfrac{b-a}{2}$， 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

−− 梯形公式





需要解决的问题

（**1**）衡量求积公式“好”与“坏”的标准；

（即构造的求积公式能使尽量多函数计算准确）；

（**2**）如何构造求积公式，即A_i与x_i的确定；

（**3**）误差估计，求积公式的收敛性和稳定性.

3. 代数精度的概念

定义1 如果当 $f(x)=x^k\ (k=0,1,\cdots;m)$ 时，求积公式准确成立；而当 $f(x)=x^{m+1}$ 时，求积公式不准确成立，称求积公式具有 m 次（或 m 阶）代数精度.

注：①（等价定义）定义1中 $f(x)=x^k\ (k=0,1,\cdots;m)$

改为：$f(x)$ 是次数不超过 m 的多项式；

② 理论上，通过误差分析可以确定：

用代数精度能够衡量求积公式的计算精度，

且 m 越大，求积公式的绝对值误差 $|E_n(f)|$ 也越小.

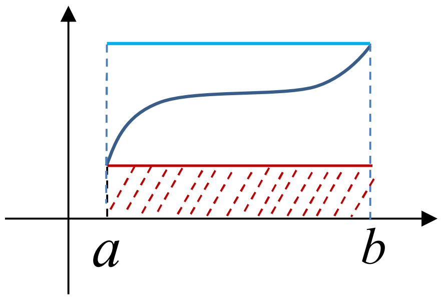
问题（1） 求积公式"好"与"坏"的度量标准——代数精度

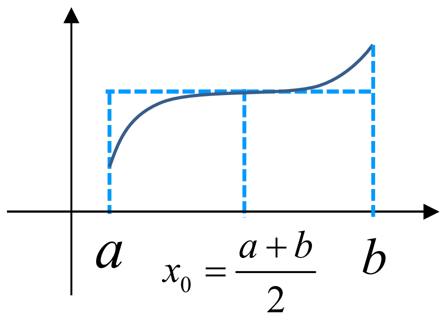
例如：$n=0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) = (b-a)f(x_0)$ −− 矩形公式

若取$x_0=a$，为左矩形公式；

若取$x_0=b$，为右矩形公式.

$x_0=\dfrac{a+b}{2}$，为中矩形公式.





$n=1$时，若取 $x_0=a,\ x_1=b,\ A_0=A_1=\dfrac{b-a}{2}$，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \text{ −− 梯形公式}$$

验证知：

$\boxed{\text{左矩形公式、右矩形公式，具有0次代数精度.}}$

$\boxed{\text{中矩形公式、梯形公式，具有1次代数精度.}}$

问题（2）如何构造求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

方法1（根据代数精度确定求积系数）

将$f(x)=x^k(k=0\sim m)$分别代入公式$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$得：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \cdots + A_n = C_0 \\ A_0x_0 + A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = C_1 \\ A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + \cdots + A_nx_n^2 = C_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ A_0x_0^m + A_1x_1^m + \cdots + A_nx_n^m = C_m \end{cases}$$

$m+1$个方程

$2n+2$个未知数

非线性方程组

其中 $C_k = \int_a^b \rho(x)x^k\mathrm{d}x \ (k=0\sim m)$

若求积节点$x_i\ (i=0\sim n)$给定，方程组为

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^m & x_1^m & \cdots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix}$$

有$m+1$个方程，$n+1$个未知数的线性方程组.

当$m=n$，且$x_i\ (i=0\sim n)$互异时，存在唯一解$A_0, A_1, \cdots A_n$.

由此可唯一确定至少具有 $\boldsymbol{n}$ 阶代数精度的求积公式

$$I_n(f)=\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

此方法称为待定系数法.

例 1 试确定求积公式 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$ 中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指出所构造出的求积公式的代数精度。

解 将 $f(x)=1,x,x^2$ 分别代入公式使其准确成立，

则有
$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -hA_{-1}+hA_1=0 \\ h^2A_{-1}+h^2A_1=\dfrac{2}{3}h^3 \end{cases} \Rightarrow A_{-1}=A_1=\frac{1}{3}h,A_0=\frac{4}{3}h$$

故求积公式 $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}f(-h)+\frac{4h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)$ 至少有2次代数精度.

验证知：$f(x)=x^3$ 代入准确成立，$f(x)=x^4$ 代入不准确成立.

因而该公式具有**3**次代数精度.

例 2 用 $\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{af}(0)+\boldsymbol{bf}(1)+\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{f}'(0)$ 的求积公式近似计算积分 $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f})=\int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 试确定系数 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，使求积公式具有尽量高的代数精度.

解 将$f(x)=1,x,x^2$分别代入公式使其准确成立,

则有 $\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=1/2 \\ c=1/3 \end{cases}$ 解得$a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$, $c=\dfrac{1}{6}$.

积分 $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f})=\int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx \dfrac{2}{3}\boldsymbol{f}(0)+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{f}(1)+\dfrac{1}{6}\boldsymbol{f}'(0).$

验证$f(x)=x^3$求积公式不准确, 故该公式具有2次代数精度.

方法2　插值法

4.2 插值型求积公式及其性质

1. 插值型求积公式

定义2　根据$f(x)$在$[a,b]$上$n+1$个相异节点$x_i\ (i=0\sim n)$的函数值$f(x_i)$, 构造n次插值多项式$L_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 使其满足$L_n(x_i)=f(x_i)\triangleq y_i\ \ (i=0\sim n)$, 并且 $f(x)\approx L_n(x)$, 由此构造出求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b \rho(x)L_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

称为插值型求积公式.

求积系数 $A_i=\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x \quad (i=0,1,\cdots,n)$

推导　对 $f(x)\approx L_n(x)$ 积分，有

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b \rho(x)L_n(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b [\rho(x)\sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i)]\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x\right)f(x_i)$$

$$\triangleq \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

复习：构造 $L_n(x)$ 的方法见第 2 章

法1：待定系数法

由 $L_n(x_i)=f(x_i)\triangleq y_i\quad(i=0\sim n)$ 求出 $a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$

法2：拉格朗日插值法　构造 n 次**Lagrange**插值多项式

$$L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2+\cdots+l_n(x)y_n=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)f(x_i)$$

其中 $l_i(x)$ 满足 $l_i(x_j)=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}$，称为Lagrange插值基函数，

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}(i=0,1,\cdots,n)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

法3：牛顿插值法

例3 已知三点 $x_0=\frac{1}{4},\ x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{3}{4}$.

（1）推导出在 $[0,1]$ 上以这三点作为求积节点的插值型求积公式;

（2）用所求公式计算 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 及 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$，并与精确值相比较。

解（1） 设插值型求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$$

计算 $A_0=\int_0^1 l_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(8x^2-10x+3)\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$

$$A_1=\int_0^1 l_1(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1(16x^2-16x+3)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3},$$

$$A_2=\int_0^1 l_2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(8x^2-6x+1)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

故所求插值型求积公式为

$$\int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx \frac{2}{3}\boldsymbol{f}(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}\boldsymbol{f}(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}\boldsymbol{f}(\frac{3}{4})$$

代数精度是？

(2) $$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} = \frac{1}{3}.$$

精确值 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(\frac{3}{4}) = \frac{8}{15} - \frac{2}{9} + \frac{8}{21} \approx 0.692063492.$$

精确值 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2 \approx 0.69314718$

2. 插值型求积公式的误差

设$f(x)$在$[a,b]$上具有直到$n+1$阶的导数，则插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$（ξ与x有关）

当$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x$时，求积公式的误差

$$E_n(f)=\int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\mathrm{d}x$$

$$E_n(f)=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\mathrm{d}x$$

当 $f(x)=1,x,x^2,\cdots x^n$ 时， $f^{(n+1)}(\xi)=0 \quad \Rightarrow E_n(x)=0$

这说明插值型求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

至少具有n次代数精度.

比较插值型求积法与待定系数法确定的求积公式都至少具有n次的代数精度，但插值积分法不需要解线性方程组.

定理1 求积公式 $I_n(f)=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$ 至少有 n 次代数精度的充分必要条件是，它是插值型的.

证 根据误差分析，可证充分性.

必要性

设求积公式至少具有 n 次代数精度, 则它对于 n 次多项式

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

精确成立，即 $\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}A_i l_k(x_i)$.

由于 $l_k(x_i)=\delta_{ki}$， 故 $\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x=A_k\ (k=0,1,\cdots,n)$,

因而求积公式是插值型的.

定义3（求积公式的收敛性） $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = I_n(f)$

在求积公式中，若 $\lim\limits_{h\to 0(n\to\infty)} I_n(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

其中 $h = \max\limits_{0\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$，称这一系列求积公式 $I_n(f)$ 收敛.

收敛性说明求积公式在积分节点逐渐增多，且节点间距逐渐变小时，其结果收敛到准确的积分值.

当 $f(x)$连续或可积分时，可以证明$I_n(f)$ 收敛.

稳定性问题

在求积公式中，由于计算或测量数据$f(x_k)$ 可能产生误差δ_k ，实际得到$\tilde{f}_k$，即$f(x_k)=\tilde{f}_k+\delta_k$.

记 $I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$， $I_n(\tilde{f})=\sum_{k=0}^{n}A_k \tilde{f}_k$

定义4（求积公式的稳定性） 如果对任给小正数$\varepsilon>0$，只要误差$|\delta_k|$充分小，就有

$$\left|I_n(f)-I_n(\tilde{f})\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}A_k[f(x_k)-\tilde{f}_k]\right|\le\varepsilon$$

称求积公式是稳定的（即误差无增长）。

定理2（充分条件） 若求积公式中系数 $\boldsymbol{A_k > 0\,(k = 0,1,\cdots,n)}$，则此求积公式是稳定的.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = I_n(f)$$

证　对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$， 设对于 $k = 0,1,2,\cdots,n$ ，

都有 $\left|f(x_k) - \tilde{f}_k\right| \le \delta$, 则

$$\left|I_n(f) - I_n(\tilde{f})\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} A_k[f(x_k) - \tilde{f}_k]\right| \le \sum_{k=0}^{n} |A_k| \left|f(x_k) - \tilde{f}_k\right|$$

$$\overset{A_k > 0}{\le} \delta \sum_{k=0}^{n} A_k = \delta(b-a) = \varepsilon$$

故求积系数 A_k 全为正数时，求积公式是稳定的.

注意： 若求积系数中有负数，不能保证求积公式是稳定的.

插值型求积公式的特点：

1）复杂函数的积分转化为计算多项式的积分(权取1）

2）求积系数A_k只与积分区间及节点x_k有关，而与被积分函数$f(x)$无关.

3）$n+1$个节点的插值求积公式至少具有n 次代数精度.

4）求积系数之和 $\sum_{k=0}^{n} A_k = b-a$

证　因为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，

$n+1$ 个节点的插值求积公式至少有n 次代数精度，

所以对于$f(x)=1$的数值积分准确成立，因此有

$$\int_a^b 1\cdot \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} A_k = b-a$$

单选题 5分

设置

数值积分 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ 达到几次代数精度?

A 0

B 1

C 2

D 3

提交

下节课学习内容

将区间 $[a,b]$ n 等分，取步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$，

由此确定的求积公式是：

1. **Newton－Cotes公式**

2. 复合Newton求积公式