1.3 距离空间

1.3.1 距离和距离空间

1.3.2 距离空间的性质

在高等数学中

研究对象——函数

基本工具——极限，是分析理论的基础

极限——距离

在泛函分析中将上述内容推广

研究对象——算子、泛函（空间到空间的映射）

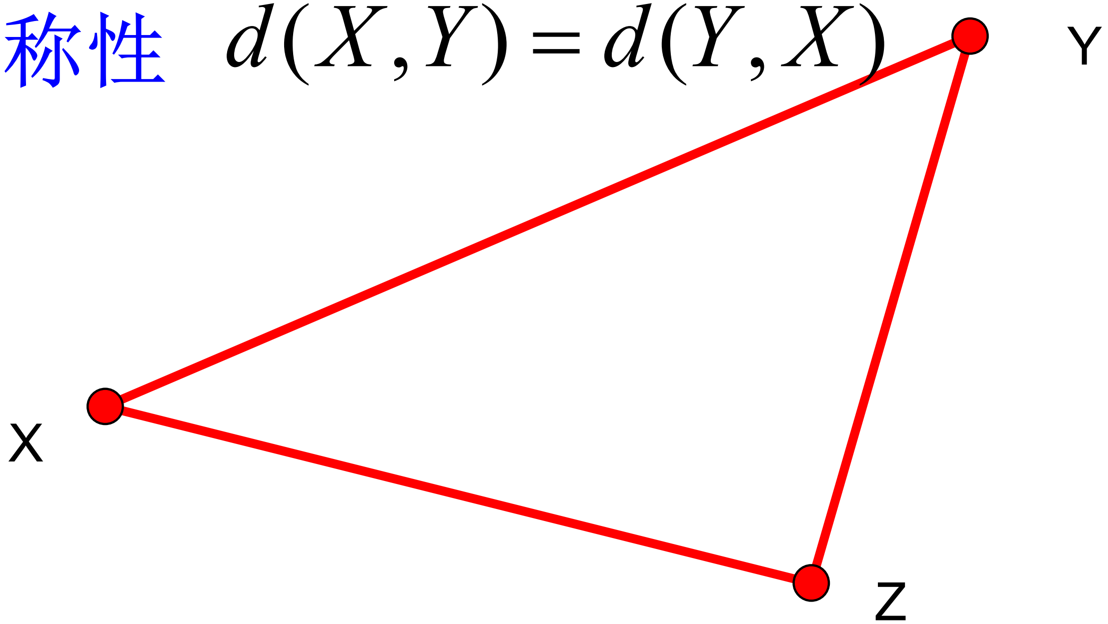
首先引入度量工具——距离

然后在度量空间中——定义极限，建立相应的理论，进一步对每一个具体空间引入相应的结论。

平面上的距离 $\mathrm{d}(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

1、非负性 $d(X,Y)\geq 0$

2、对称性 $d(X,Y)=d(Y,X)$



3、三角不等式 $d(X,Z)+d(Z,Y)\geq d(X,Y)$

将平面上的距离，推广到任意非空集合上

1.3.1 距离和距离空间

1、**定义1.3.1距离空间** 设 X 是非空集合，若

$\forall x,y\in X \xrightarrow[\text{规则}]{\text{按一定}} \exists \mid d(x,y)\geq 0$（实数），且满足下列三个条件：

（1）非负性 $d(x,y)\geq 0$, 当且仅当$x=y$时, $d(x,y)=0$

（2）对称性 $d(x,y)=d(y,x)$

（3）三角不等式 $\forall z\in X$，有

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

距离公理

则称实数 $d(x,y)$ 为元素 x 与 y 之间的距离，称 (X,d) 为距离空间或度量空间。两个要素：非空集合、距离

1.3.1 距离和距离空间

距离 $d(\bullet,\bullet)$ 是集合 $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$（称为集合的乘积或笛卡尔积）到实数集合 $\mathbf{R}^1$ 上的二元泛函。

两元素之间的距离：两点、两个向量（信号）、两个矩阵（图像）、两个函数等等

2、举例

例 1 设 $\mathbf{R}^1$ 是非空实数集合，$\forall x, y \in \mathrm{R}^1$，

(1). $d_1(x,y) = |x - y|$ —— R^1中的欧氏距离

(2). $d_2(x,y) = (x-y)^2$ ✗ x=2,y=0,z=1

同一集合可以定义不同的距离，从而形成不同的距离空间。

主观题 10分

设置

练习：设R^1是非空实数集合，$\forall x, y \in R^1$

证明：$d_3(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$是$R^1$的距离.

证明：

1)非负性：

$$d_3(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}\geq 0,\text{且}d_3(x,y)=0\Leftrightarrow x=y.$$

2)对称性：

$$d_3(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}=\frac{|y-x|}{1+|y-x|}=d_3(y,x).$$

作答

2022/9/27

3)三角不等式：

设$f(t)=\frac{t}{1+t}, t>0$,则$f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$,故$f(t)$单增

$\because |x-y| \le |x-z|+|z-y|$

$$\therefore d_3(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \le \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}$$

$$=\frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|}+\frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}$$

$$\le \frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

$$=d_3(x,z)+d_3(z,y)$$

1.3.1 距离和距离空间

例 2 设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维向量全体构成的集合，

$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathrm{R}^n$$

定义 $$\mathrm{d}_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

求证：$\mathbf{R}^n$ 在 d_2 下为距离空间，即（$\mathbf{R}^n$，d_2）常用的欧氏空间。

1.3.1 距离和距离空间

证明：非负性和对称性显然成立，仅验证三角不等式，利用 R^n 中的柯西-许瓦慈（Cauchy-Schwarz）不等式：对于任意的实数 a_i 和 b_i 均有

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}} \qquad (0.3.1)$$

$$d_2(x,y)=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i+z_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i)+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\underline{(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}}+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2]^{\frac{1}{2}}+[\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}=d_2(x,z)+d_2(z,y)$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$

1.3.1 距离和距离空间

$$d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

特别的，当 **n=1** 时，$d_2(x,y)=|x-y|$，

当 **n=2** 时，$d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

在 $\mathbf{R}^2$ 中 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2),\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2),$，若定义

$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

$$d_\infty(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$$

验证得知 $\mathbf{R}^2$ 按 d_1,d_∞ 都是距离空间，但与欧氏空间是不同的度量空间。

1.3.1 距离和距离空间

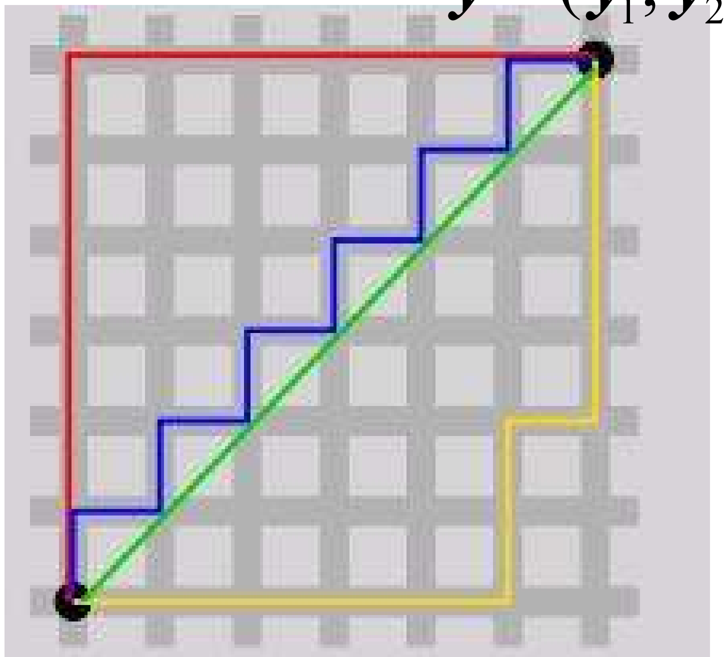
R^2中不同距离的几何解释

$$\mathrm{d}_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

$$d_\infty(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$$

$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2)$,



$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$

思考:

$d(x,y)=\min(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$是~~距离~~吗?

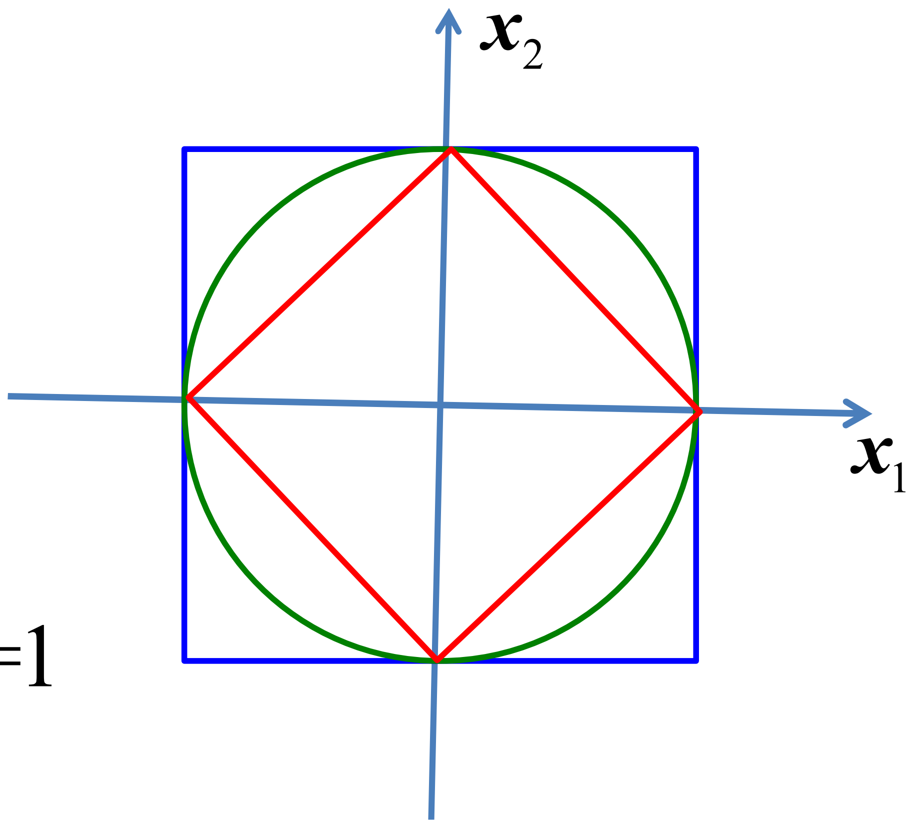
1.3.1 距离和距离空间

- 思考：平面上的点到原点的欧几里得距离 d_2 为1的点所组成的形状是什么？d_1, d_∞呢？

$$\mathrm{d}_2(x,o)=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2}=1$$

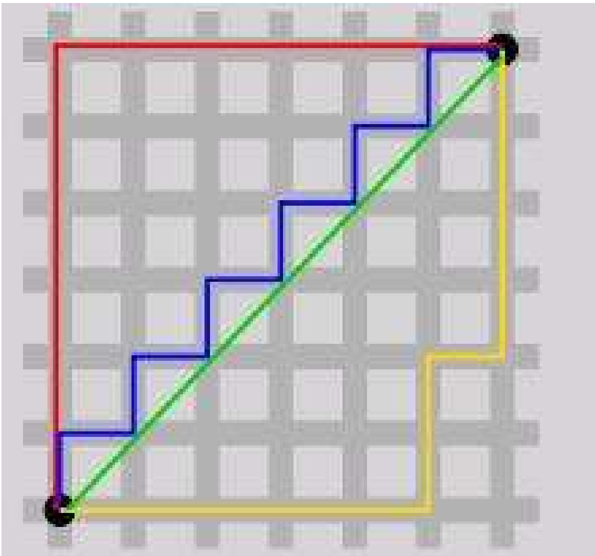
$$d_1(x,o)=|x_1|+|x_2|=1$$

$$d_\infty(x,o)=\max(|x_1|,|x_2|)=1$$



1.3.1 距离和距离空间

- (R^n, d_2) 就是常用的欧氏空间，$d_2(x,y)$ 称为欧氏距离，几何上是直线距离。
- $d_\infty(x,y) \triangleq \max\limits_{1\le i\le n}|x_i - y_i|$（Chebyshev distance 切比雪夫距离、棋盘距离），常用于图像处理。
- $d_1(x,y) \triangleq \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$（Manhattan distance 曼哈顿距离），几何上是折线、阶梯距离。
- $(R^n, d_2), (R^n, d_1), (R^n, d_\infty)$ 均构成距离空间。
- $d(x,y) = \min\limits_{1\le i\le n}|x_i - y_i|$ 不是距离



西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

1.3.1 距离和距离空间

- 以上距离可进一步推广为**Minkowski distance**

$$d_p(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^p)^{\frac{1}{p}}\quad(p\geq 1)$$

- 从误差的角度，该距离可理解为所有分量的误差的P次方累加，所有分量对误差的贡献是一样的。

1.3.1 距离和距离空间

实际应用中，$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left|x_i-y_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad(p\geq 1)$,

其中ω_i是权重，$d_p(x,y)$称为加权距离。

- 可理解为每个分量的误差的贡献可以放大或缩小，权重越大，该分量的近似精度越高，误差越小。

1.3.1 距离和距离空间

补充不等式

1）Minkowski 不等式

（1）$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^k\right)^{1/k}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^k\right)^{1/k}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^k\right)^{1/k}$$

（$k\ge1$，a_i,b_i 为实数或复数）

（2）$$\left(\int_a^b|f(x)+g(x)|^k dx\right)^{\frac{1}{k}}\le\left(\int_a^b|f(x)|^k dx\right)^{1/k}+\left(\int_a^b|g(x)|^k dx\right)^{1/k}$$

其中 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积分，$k\ge1$

2）Hölder 不等式

（1）$$\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{1/q},$$

其中a_i, b_i为实数或复数，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

特别的, 当 **p=q=2** 时,称为 **Cauchy** 不等式.

（2）$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

其中$|f(x)|^p, |g(x)|^q$在$[a,b]$上可积分.

主观题 10分

设置

例3：$C[a,b]$表示$[a,b]$上的所有连续函数的全体,

证明：$d(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$是$C[a,b]$上的距离.

证明:1），2）条显然，只验证3）条。

当$t\in[a,b]$时,

$$
\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &\le |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)| \\
&\le \max|x(t)-z(t)|+\max|z(t)-y(t)| \\
&= d(x,z)+d(z,y)
\end{aligned}
$$

故$d(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$

$$\le d(x,z)+d(z,y)$$

作答

1.3.1 距离和距离空间

几何意义？ 两条连续曲线上沿竖直方向最远的两点之间的距离！

例4 $L^p_{[a,b]}(p\geq 1)$---$[a,b]$上所有p方可积的函数的全体，

$$L^p_{[a,b]}=\left\{x(t)\,\middle|\,\int_a^b|x(t)|^p\,dt<+\infty\right\},\quad d(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

前提是函数连续；平方可积实函数空间（p=2）物理上表示能量有限函数全体。

例 5 $l^p(p\geq 1)$---所有p方可和的数列所成的集合，

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<+\infty,\quad d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$$

1.3.1 距离和距离空间

$$L^2_{[a,b]} \quad d(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

$$l^2\text{离散采样序列}\, d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

应用：

插值法、

最佳平方逼近、最佳一致逼近、最小二乘法

- 在科学研究中，根据研究对象，常常需要设计构造出某种距离（满足三条公理）以满足实际要求。

1.3.2　距离空间的性质

借助于距离度量，刻画距离空间中子集的有界性和点列的收敛性等。

1、子集的有界性

● 邻域：设 r 是一正数，则集合 $S_r(x_0)=\{x\in X, d(x,x_0)<r\}$ 称为以 x_0 为心以 r 为半径的球形邻域，简称邻域。

1.3.2 距离空间的性质

- **定义1.3.2 开集/闭集** 设 M 是距离空间 X 的一个子集，对任意 $x \in M$，如果存在一个 x 的球形邻域 $S_r(x) \subset M$，则称 x 是 M 的内点，如果集合 M 的元素都是 M 的内点，则称 M 是开集。对 X 的一子集 K，当 $X \backslash K$ 是开集时，则称 K 是闭集。

例：集合 $S_r(x_0)$ 是开集，$B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \le r\}$ 是闭集。

实数轴上区间 $(0, 1)$ 是开集，$1/2$ 是 $(0, 1)$ d 的内点，

$[0, 1]$ 是闭集，$[0, 1)$ 既不是开集也不是闭集。

规定空集、全集既是开集又是闭集。

1.3.2 距离空间的性质

集合有界性：设 $A\subset X$，若 $\exists x_0\in X$ 和有限数 $r\in R^1, s.t.\ \forall x\in A$，有 $d(x,x_0)<r$，称 A 是距离空间 X 中的有界集，简称 A 有界。

几何上：A 中的所有点到 x_0 的距离小于 r；

直观上：存在一个半径有限的开球，能包住 A，

即 $A\subset S_r(x_0)$

1.3.2 距离空间的性质

数列收敛

数列的极限： → R^1中的欧式距离

$$d(x,y)=|x-y|$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\ (x_n \to a)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \text{当}\ n > N\ \text{时，有}\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

一般距离空间，点列收敛？

2. 点列的收敛性

1) **定义1.3.4（收敛点列）** 设 X 是一个距离空间，$\{x_n\}$ 是 X 中点列，$x^* \in X$。若 $n \to \infty$ 时，$d(x_n, x^*) \to 0$

（即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N,$ 当 $n > N$ 时，$d(x_n, x^*) < \varepsilon$）

则称点列 x_n 在 X 中按距离 d 收敛于 x^*，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \text{ 或 } x_n \to x^* (n \to \infty)$$

此时，称 x_n 为收敛点列，x^* 为 x_n 的极限或极限点。

R^1 $\quad x_n \to x^* (n \to \infty) \Leftrightarrow$ 数列 $d_n = |x_n - x^*| \to 0$

1.3.2 距离空间的性质

注记：

1、这里的收敛点列与数列极限的区别

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*(x_n \to a), x^* \in X$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ 当 n > N 时, 有 \mathrm{d}(x_n, \mathrm{x}^*) < \varepsilon.$$

数列：$x_n \to x^*(n \to \infty) \Leftrightarrow d_n = \left| x_n - x^* \right| \to 0$

2、在几何上看，以 $\mathbf{x}^*$为中心以任意小的数ε为半径作开球，除有限个点在开球外，其余所有点都在开球内。除有限个点之外，其余所有点都与 $\mathbf{x}^*$无限接近。

1.3.2 距离空间的性质

建立在距离公理的基础之上

定理 1（极限唯一性） 在距离空间 X 中，收敛点列 x_n 的极限是唯一的。

定理 2（极限存在的有界性） 在距离空间 X 中的收敛点列 x_n 必有界。即

$\exists x_0 \in X$, 及实数 $r > 0$, 使得 $\forall x_n$, 都有 $\mathrm{d}(x_n, x_0) < r$

定理 3（距离的连续性） 在距离空间 X 中，距离 d 是两个变元 x, y 的连续泛函。即当 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ 时

$$d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)(n \to \infty)$$

1.3.2 距离空间的性质

2） 柯西点列（Cauchy）

定义1.3.5 设$\{x_n\}$是距离空间 X 中的一个点列，若

$$对\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ 当n,m>N时,\ d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

则称$\{x_n\}$为基本点列或 **Cauchy** 点列。

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ 当n>N时，\ \forall p>0,\ d(x_{n+p},x_n)<\varepsilon$$

收敛列与基本列

收敛列：除有限个点之外，其余所有点都与 x^*无限接近。

基本列：除有限个点之外，其余任意两点都能无限接近。

1.3.2 距离空间的性质

例如：$\mathbf{R}^1$ 中，点列$\{x_n\}=\{\frac{1}{n}\}$是 **Cauchy** 列，也是收敛点列。

注：$\mathbf{R}^1$ 中有结论：**{*x* n}**是收敛数列$\Leftrightarrow$**{*x* n}**是 **Cauchy** 数列。

但在一般的距离空间中，该结论不成立。即存在是基本列，但不是收敛列的情况。

反例 1 设空间 ***X*=(0, 1)**，则点列$\{x_n\}=\{\frac{1}{n+1}\}\subset X$按定义$d(x,y)=|x-y|$是 ***X*** 中的 **Cauchy** 列，但在 ***X*** 中不收敛（极限值$0\notin(0,1)$）。

1.3.2 距离空间的性质

反例 2 在有理数空间 **Q** 中，点列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$$

是 **Q** 中的 **Cauchy** 点列，但不是收敛点列；

同理，点列 $\{x_n\}=\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 是 Q 中的 **Cauchy** 点列，但不是收敛点列。

点列 $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots \to \sqrt{2} \notin Q$

在 Q 中不是收敛列，但是在 R 中是收敛列，

故是 **R** 中的基本列，即是 **Q** 中的基本列。

1.3.2 距离空间的性质

定理 4 若$\{x_n\}$是(X,d)中的收敛点列，则$\{x_n\}$一定是 **Cauchy** 点列；反之，**Cauchy** 点列不一定是收敛点列

证明：$\because n\to\infty$时, $d(x_n,x)\to 0$

$$\text{即}\,\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \text{当}\,n>N\text{时},\ d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\because d(x_n,x_m)\le d(x_n,x)+d(x_m,x)$$

$$\therefore n,m>N\text{时},\ d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

距离空间的完备性

定义1.3.6（完备性） 在距离空间 X 中，若 X 中的任一 Cauchy 点列都在 X 中有极限，则称 X 是完备的距离空间。

结论：在完备的距离空间中，收敛点列与 Cauchy 点列是等价的。例如：R^n, $C[a,b]$, $L^2[a,b]$

1.3.2 距离空间的性质

◆ 空间中点列极限的存在性

Cauchy列（基本列）

极限点在原空间

所在空间完备

◆ 把不在原空间的“极限点”补充进去

空间完备化

应用：

1、迭代算法中迭代序列是否收敛？是否收敛到精确解？

迭代序列：基本列，所在空间完备 ⟶ 迭代序列收敛！

2、不动点定理

1.3.2 距离空间的性质

例 1 $\mathbf{R}^n$ 按欧氏距离是完备的距离空间。

例如 $\mathbf{R}^1$ 是完备的，一般的证明见参考书

例2 有理数空间 **Q** 按欧氏距离是不完备的距离空间。

不完备的距离空间是有"洞"的。

例 3 距离空间l^2和$L^2_{[a,b]}$按通常意义下的距离是完备的。

3）距离空间的完备化

距离空间的完备性在很多方面都起着重要的作用。如何将一个不完备的距离空间扩充为完备的距离空间?这就是距离空间完备化的问题。（略）

内容小结

要求掌握：

1）距离空间的定义，会验证三条公理；

2）常用距离空间的例子；

3）收敛点列的定义、三个性质；

4) 柯西点列的定义，与收敛点列的关系；

5）距离空间的完备性概念，举例。

1. 4 赋范线性空间

1. 4. 1 线性空间

1. 4. 2 赋范线性空间

1. 4. 3 向量和矩阵的范数

1. 4. 4 不动点定理

距离空间

1、非空集合X，距离(三条公理)及举例
2、邻域、内点、开集、闭集、子集的有界
3、点列的收敛(只有距离结构，应用受到限制)
4、距离、收敛等可以度量两元素之间的误差
5、元素间只有距离关系（距离结构），不能进行代数运算（代数结构）

赋范线性空间

1、距离结构
2、代数结构
3、元素的大小？
4、… … …

1.4.1.线性空间

定义1.4.1 线性空间

设 $\boldsymbol{E}$ 是非空集合，$\boldsymbol{K}$ 是数域(通常是实数域或复数域)。在 $\boldsymbol{E}$ 中定义两种运算：

加法“+”：$\forall x, y \in E$, 存在唯一 $z \in E$, 记作 $z = x + y$

数乘“.”：$\forall x \in E, \lambda \in K$, 存在唯一 $\delta \in E$, 记作 $\delta = \lambda x$

且满足下列运算规律：

1.4.1 线性空间

$E \times E \to E$ “+”

（1） $x + y = y + x$ （2） $(x + y) + z = x + (y + z)$

（3） ∃“零元素” $\theta \in E$,有 $x + \theta = x$

（4） ∃“负元素” $-x \in E$,有 $x + (-x) = \theta$

$K \times E \to E$ “.”

（5） $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ （6） $1 \cdot x = x, 0 \cdot x = \theta$

（7） $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ （8） $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

则称 ***E*** 是（数域 ***K*** 上的）线性空间（或向量空间）。

满足八条运算规律的两种运算称为线性运算。

1.4.1 线性空间

在线性空间中，可以对元素进行线性组合，可以定义线性相关、线性无关等概念。

例1 R^n——n 维向量全体，在通常意义下的“加法”“数乘”运算下是线性空间。

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots, x_n+y_n)$$

$$ax=(ax_1, ax_2,\ldots, ax_n)$$

例2 $C[a,b]$、$L[a,b]$ 在通常意义下的“加法”“数乘”运算下是线性空间。

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)$$

$$(ax)(t)=ax(t)$$

1.4.1 线性空间

例3　$P_n(x)$——次数不超过 **n** 的多项式全体，在通常的“加法”“数乘”运算下 ___A___ 线性空间。

例4　$Q_n(x)$——次数等于 **n** 的多项式全体，在通常意义下的“加法”“数乘”运算下___B___ 线性空间。

A　是　　　　B　不是

1.4.1 线性空间

线性空间 $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ 中

元素（向量）的大小（长度、模）：

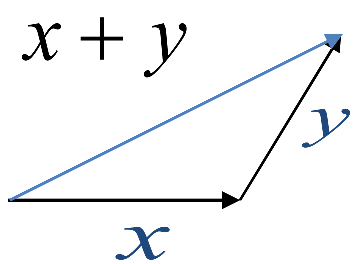
$$|x| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \cdots + x_n^{\ 2}} \in R$$

1) $|x| \geq 0,\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$　　非负性

2) $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|, \forall \alpha \in R$　　正齐性

3) $\forall x, y \in R^n$，有 $|x+y| \leq |x| + |y|$ 三角不等式

满足这三条，也称为**x**的范数



1.4.2.1 赋范线性空间

定义1.4.2 赋范线性空间

设 $\boldsymbol{E}$ 是实数域（或复数域）$\boldsymbol{K}$ 上的线性空间。若

$\forall x \in E \xrightarrow[\text{规则}]{\text{按一定}} \exists$唯一实数$\|x\|$，且满足下列三条

（1）$\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$ 非负性（正定性）

（2）$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$ 正齐性

（3）$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$ 三角不等式

范数公理

则称实数$\|x\|$为 $\boldsymbol{x}$ 的范数，称 $\boldsymbol{E}$ 为赋范线性空间，记作 $(E, \|\bullet\|)$ 或 E。

1.4.2 赋范线性空间

$(E,\|\cdot\|)$与(E,d)之间的关系：

●若在$(E,\|\cdot\|)$中，按范数定义距离，即

$$\forall x,y\in E,\ \ d(x,y)=\|x-y\|$$

1）验证得知 满足距离的三条公理。
该距离称为由范数导出的距离。

2）赋范线性空间按范数导出的距离构成距离空间，称为由范数导出的距离空间。

注意：

赋范线性空间$\Rightarrow$距离空间

距离空间$\not\Rightarrow$赋范线性空间

1.4.2 赋范线性空间

●但当距离空间满足下列三条时

① E 是线性空间；

② $d(x,y)=d(x-y,\theta)$；

③ $d(\alpha x,\theta)=|\alpha|\cdot d(x,\theta)$

可用距离定义范数 $\|x\|=d(x,\theta)$，验证知三条范数公理成立，则距离空间 (E,d) 也是 $(E,\|\cdot\|)$。

证明：满足上述三条的距离空间是赋范线性空间。

1.4.2 赋范线性空间

✧ 当距离空间满足下列三条时

E 是线性空间；$d(x,y)=d(x-y,\theta)$；$d(\alpha x,\theta)=|\alpha|\cdot d(x,\theta)$

可用距离定义范数 $\|x\|=d(x,\theta)$，验证知三条范数公理成立，则距离空间 (E,d) 也是 $(E,\|\cdot\|)$。

证明：

1) $\|x\|=d(x,\theta)\geq 0$ 且 $\|x\|=d(x,\theta)=0 \Leftrightarrow x=\theta$

2) $\|\alpha x\|=d(\alpha x,\theta)=|\alpha|d(x,\theta)=|\alpha|\|x\|$

3) $\|x+y\|=d(x+y,\theta)=d(x,-y)\leq d(x,\theta)+d(\theta,-y)$

$$=d(x,\theta)+|-1|d(\theta,y)=\|x\|+\|y\|$$

1.4.2 赋范线性空间

常见赋范线性空间

例5: 在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，

$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in \mathrm{R}^n$$

定义

① $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$，则 $(\mathrm{R}^n,\|x\|_2)$ 是赋范线性空间。

距离 $d_2(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

② $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$，则 $(\mathrm{R}^n,\|x\|_\infty)$ 是赋范线性空间。

③ $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，则 $(\mathrm{R}^n,\|x\|_1)$ 是赋范线性空间。

1.4.2 赋范线性空间

例6: $C[a,b]$是线性空间，若定义

① $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$，则$(C[a,b],\|x\|)$是赋范线性空间。

距离 $d(x,y) = \|x-y\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$

② $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$，则$(C[a,b],\|x\|_1)$是赋范线性空间

例7: $L^2[a,b]$是线性空间，若定义

$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$，则$(L^2[a,b],\|x\|)$是赋范线性空间。

1.4.2 赋范线性空间

注：

- 同一个线性空间可以装配不同的范数，成为不同的赋范线性空间。
- 由于$(E,\|\cdot\|)$在$d(x,y)=\|x-y\|$定义下也是(E,d)，所以在$(E,\|\cdot\|)$中可类似定义——邻域、开集、闭集、极限点、收敛点列、柯西点列等，并可讨论相关的结论——完备性、可分性、紧性等。

1.4.2 赋范线性空间

定义: 巴拿赫空间（Banach）

如果赋范线性空间$(E,\|\bullet\|)$按距离$d(x,y)=\|x-y\|$是完备的，则称 $\boldsymbol{E}$ 是 **Banach** 空间。

同样的，不完备的赋范线性空间可以完备化。

1.4.2.2 赋范线性空间中的收敛

在赋范线性空间中，只要在由范数导出的距离 $d(x,y)=\|x-y\|$ 之下来讨论，就可以得到点列的收敛性概念及相应的结论。

1） 定义（按范数收敛）设 $\boldsymbol{E}$ 是赋范线性空间，点列 x_n 及 $x \in E$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

则称点列 x_n 按范数收敛于 x，或称 x_n 强收敛于 x，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{(强)}。$$

1.4.2 赋范线性空间

定义1.4.3 （集合 A 的有界性）

A $\subset$ E， 若 $\exists k > 0$, 使 $\forall x \in A$, 有 $\|x\| \le k$, 则称 **A** 为 **E** 中的有界集。

2）性质 设 $\boldsymbol{E}$ 是赋范线性空间, $\{x_n\},\{y_n\} \subset E$, $\{\alpha_n\} \subset K$（数域）

性质1 若 $x_n \to x(n \to \infty)$，则数列 $\{\|x_n\|\}$ 有界

证明:

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \le \|x_n - x\| + \|x\| \le k$$

1.4.2 赋范线性空间

性质2 范数 $\|x\|$ 是 x 的连续泛函

证明：即证 $x_n \to x$ 时，$\|x_n\| \to \|x\|$。实际上，

$$\because \|x_n\| - \|x\| = \|x_n - x + x\| - \|x\| \le \|x_n - x\| + \|x\| - \|x\| = \|x_n - x\|$$

$$\because \|x\| - \|x_n\| = \|x - x_n + x_n\| - \|x_n\| \le \|x_n - x\| + \|x_n\| - \|x_n\| = \|x_n - x\|$$

$$\therefore \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \le \|x_n - x\| \to 0$$

$$\therefore \|x_n\| \to \|x\|$$

性质3

$$x_n \to x,\ y_n \to y,\ \alpha_n \to \alpha$$

$$\Rightarrow x_n + y_n \to x + y,\ \alpha_n x_n \to \alpha x$$

1.4.2 赋范线性空间

3）范数的等价性

定义 设线性空间 E 中定义了两种范数 $\|x\|_s$ 和 $\|x\|_t$

如果由 $\|x_n\|_s \to 0 \Rightarrow \|x_n\|_t \to 0$，称 $\|x\|_s$ 比 $\|x\|_t$ 更强；

若又由 $\|x_n\|_t \to 0 \Rightarrow \|x_n\|_s \to 0$，即 $\|x\|_t$ 比 $\|x\|_s$ 更强，

则称范数 $\|x\|_s$ 与 $\|x\|_t$ 等价。

性质：范数等价具有传递性

1.4.2 赋范线性空间

定理1.4.2 范数等价判别定理

在线性空间 $\boldsymbol{E}$ 中，两种范数 $\|\bullet\|_s$ 和 $\|\bullet\|_t$ 等价

$\Leftrightarrow \exists C_1 > 0, C_2 > 0$，对于 $\forall x \in E$，都有

$$C_1 \|x\|_s \le \|x\|_t \le C_2 \|x\|_s 。$$

1.4.3向量与矩阵的范数

定义1.4.4 向量的范数

若向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 的某个实值函数 $N(x)=\|\boldsymbol{x}\|$ 满足下列条件：

（1）非负性：$\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$，且 $\|\boldsymbol{x}\|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\mathbf{0}$；

（2）正齐性：$\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$，$\forall\alpha\in R$

（3）三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

则称 $N(x)=\|\boldsymbol{x}\|$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一个向量范数。

1.4.3向量与矩阵的范数

常用的向量范数

设 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，分别称

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2} \qquad \|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i| \qquad \|\boldsymbol{x}\|_P=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^P\right)^{1/P}\quad(1\le P<+\infty)$$

为向量 x 的 2—范数，1—范数，$\infty-$范数，$P-$范数

证明题

设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 对称正定矩阵，定义 $\|x\|_A=(Ax,x)^{\frac{1}{2}}$，

证明：$\|x\|_A$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上向量的一种范数。

1.4.3向量与矩阵的范数

性质1（连续性）

$\mathbf{R}^n$ 中任一向量范数$\|x\|$是分量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续函数；

性质2（等价性）

$\mathbf{R}^n$ 中各种向量范数等价。

范数的等价性保证了运用具体范数研究收敛性在理论上的合法性和一般性

定理1.4.2（向量范数的等价性）

设$\|\cdot\|_s$与$\|\cdot\|_t$是R^n上任意两种向量范数，则存在常数$C_1,C_2>0$，使

$$C_1\|x\|_s\le\|x\|_t\le C_2\|x\|_s,\quad \forall x\in R^n.$$

证明：只要就$\|x\|_s=\|x\|_\infty$证明上式即可，即证明存在常数$C_1,C_2>0$，使

$$C_1\le\frac{\|x\|_t}{\|x\|_\infty}\le C_2,\quad \forall x\in R^n,\quad x\ne 0$$

考虑函数 $f(x)=\|x\|_t \geq 0$， $x \in R^n$.记 $S=\left\{x \| \|x\|_\infty=1, x \in R^n\right\}$,

则 S 是一个有界闭集,由于 $f(x)$ 为 S 上的连续函数,

所以 $f(x)$ 于 S 上达到最大,最小值 C_2, C_1 .

设 $x \in R^n$， $x \neq 0$,则 $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S$,从而有 $C_1 \leq f\left(\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\right) \leq C_2$

上式为 $C_1 \leq \left\|\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\right\|_t \leq C_2$,即 $C_1\|x\|_\infty \leq \|x\|_t \leq C_2\|x\|_\infty$， $\forall x \in R^n$

例　证明：$\forall x \in R^n$， $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

证　$\because \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$， $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{|x_i|\} \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| = \|x\|_1 \le n\cdot\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\} = n\|x\|_\infty$$

所以范数$\|x\|_1$与范数$\|x\|_\infty$等价.

注：范数等价具有传递性

1.4.3向量与矩阵的范数

定义1.4.5 向量序列的收敛性

设 $\{x^{(k)}\}$ 为 R^n 中一向量序列，$x^* \in R^n$.

如果 $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*, (i=1,2,\cdots n)$,

称 $x^{(k)}$ 按坐标收敛于 x^*,

记为 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$

其中 $x^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}\}, x^* = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$

1.4.3向量与矩阵的范数

根据定义1.4.5及定理1.4.2 ，可以证明：向量序列按坐标收敛等价于在任何一种范数意义下该序列收敛！

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \text{ 即 } \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*, (i=1,2,\cdots n)$$

$$d(x_i^{(k)}, x_i^*) = \left| x_i^{(k)} - x_i^* \right| \to 0$$ (按坐标收敛)

$$\overset{\text{根据无穷范数定义}}{\Longleftrightarrow} \left\| x^{(k)} - x^* \right\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^* \right| \to 0$$ （按无穷范数收敛）

$$\overset{\text{根据范数的等价性}}{\Longleftrightarrow} \left\| x^{(k)} - x^* \right\| \to 0$$ （按任意范数收敛）

1.4.3向量与矩阵的范数

定理1.4.3 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$ 的充分必要条件是对任意一种范数，有$\left\| x^{(k)} - x^* \right\| \to 0$

证明：显然$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \Leftrightarrow \left\| x^{(k)} - x^* \right\|_\infty \to 0$（当$k\to\infty$时）

而对任意一种范数$\|\cdot\|$，

有$C_1 \left\| x^{(k)} - x^* \right\|_\infty \le \left\| x^{(k)} - x^* \right\| \le C_2 \left\| x^{(k)} - x^* \right\|_\infty$

故 $\left\| x^{(k)} - x^* \right\| \to 0$（当$k\to\infty$时）.

定义1.4.6 矩阵的范数

设 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in \mathbf{R}^{n\times n}$，若对应一个非负实值函数 $\|A\|$，满足下列条件

(1) 正定性：$\|A\|\geq 0$，且 $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=O$（零矩阵）;

(2) 齐次性：对任意实数 λ, $\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$;

(3) 三角不等式: 对任意 $A,B\in \mathbf{R}^{n\times n}$, 有 $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$,

(4) 乘积不等式：对任意 $A,B\in \mathbf{R}^{n\times n}$，$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$。

则称 $\|A\|$ 为 n 阶矩阵 A 的范数。

1.4.3向量与矩阵的范数

例如 定义 $A \in (a_{ij})_{n\times n}$ 的一种范数(Frobenius 范数)

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\ 2} \right)^{1/2}$$

验证知，满足矩阵范数的 4 条公理，称为矩阵 A 的 F −范数。

由于在很多误差分析估计中，矩阵和向量会同时参与讨论，所以，希望引进一种矩阵范数，它和向量范数相联系。为此引进矩阵与向量相容的概念。

1.4.3向量与矩阵的范数

如果$\forall A \in \mathbf{R}^{n\times n}$及$\forall x \in \mathbf{R}^{n}$，都有

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$ 相容性条件

成立，则称矩阵范数$\|A\|$与向量范数$\|x\|$是相容的。

定义1.4.7 矩阵的算子范数

设$x \in \mathbf{R}^n$、$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，给出一种向量范数$\|x\|_v\ (v=1,2,\infty)$，则相应的矩阵$A$的非负函数

$$\|A\|_v = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

为矩阵A的(与向量x的范数$\|x\|_v$相容的)范数。亦称矩阵的算子范数。

给出一个向量范数，就得到一个矩阵范数，称其为由向量范数诱导出的算子范数。

1.4.3向量与矩阵的范数

可证：$\|A\|_v=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$ 满足范数的4条公理及相容性条件！

$$\because \|A\|_v=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\geq\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\qquad\therefore \|Ax\|_v\leq\|A\|_v\|x\|_v$$

相容性条件

$$(3)\because \|(A+B)x\|_v=\|Ax+Bx\|_v\leq\|Ax\|_v+\|Bx\|_v$$

$$\leq\|A\|_v\|x\|_v+\|B\|_v\|x\|_v=(\|A\|_v+\|B\|_v)\|x\|_v$$

$$\therefore \forall x\neq 0,\frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v}\leq\|A\|_v+\|B\|_v$$

即$\|A+B\|_v=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v}\leq\|A\|_v+\|B\|_v$

三角不等式

$$(4)\because \|ABx\|_v\leq\|A\|_v\|Bx\|_v\leq\|A\|_v\|B\|_v\|x\|_v\quad\therefore \forall x\neq 0,\frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v}\leq\|A\|_v\|B\|_v$$

即$\|AB\|_v=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v}\leq\|A\|_v\|B\|_v$

乘积不等式

1.4.3向量与矩阵的范数

常用的矩阵范数（定理1.4.4）

（1）$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$——矩阵 A 的行范数（与$\|x\|_\infty$相容）

（2）$\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$——矩阵 A 的列范数（与$\|x\|_1$相容）

（3）$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$——矩阵 A 的 2–范数或谱范数

（与$\|x\|_2$相容）其中$\lambda_{\max}$是方阵 A^TA 的最大特征值

注　矩阵范数$\|\cdot\|_2$，$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_\infty$，$\|\cdot\|_F$彼此等价；

比较看出，计算矩阵的$\|A\|_\infty$,$\|A\|_1$还是比较容易的，而$\|A\|_2$在

计算上不方便，但$\|A\|_2$具有很多好的性质，理论上很有用.

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

证明 1）设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$，不妨设 $A\neq 0$，

$$\|A\|_\infty=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

记 $t=\max|x_i|$，$\mu=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，则

$\|x\|_\infty$

$$\|Ax\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\le\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|\le t\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

即 $\forall x\in R^n, x\neq 0$，有 $\dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\le\mu$.

下面说明有一向量 $x_0\neq 0$，使得 $\dfrac{\|Ax_0\|_\infty}{\|x_0\|_\infty}=\mu$.

设 $\mu=\sum_{j=1}^{n}a_{i_0j}$，取 $x_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，其中 $x_j=sign(a_{i_0j})$，$j=1,2,\cdots,n$，

± 1

显然 $\|x_0\|_\infty=1$，且 Ax_0 的第 i 个分量为 $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j=\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|$，

故 $\|Ax_0\|_\infty=\max_i\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|=\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0j}|=\mu$ $\Rightarrow$ 得证

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$

(3)由于$\|Ax\|_2^2=(Ax,Ax)=(A^TAx,x)\geq 0,\ \forall x\in R^n$,

从而A^TA的特征值为非负实数，设$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$，

设对应的特征向量为$u_1,u_2,\cdots,u_n$，且$(u_i,u_j)=\delta_{ij}$.

$\forall x\in R^n,x\neq 0$, 设$x=\sum_{i=1}^n c_iu_i$，$$\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}=\frac{(A^TAx,x)}{(x,x)}\leq\frac{\sum_{i=1}^n c_i^2\lambda_1}{\sum_{i=1}^n c_i^2}=\lambda_1$$

另一方面，取$x=u$, 则上式等式成立，故

$$\|A\|_2=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}.$$

1.4.3向量与矩阵的范数

例8 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$，计算 A 的常用几种范数。

$$\|A\|_1=\max\{1+|-3|,\ 1+3\}=4$$

$$\|A\|_\infty=\max\{1+1,\ |-3|+3\}=6$$

$$\|A\|_F=[1^2+1^2+|-3|^2+3^2]^{1/2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5};$$

$$\because\ A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -8\\ -8 & 10\end{pmatrix}$$

$$\therefore |A^{\mathrm{T}}A-\lambda I|=\begin{vmatrix}10-\lambda & -8\\ -8 & 10-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-10)^2-8^2=(\lambda-18)(\lambda-2)$$

$$\lambda_{\max}=\max\{\lambda_1,\ \lambda_2\}=\max\{18,\ 2\}=18,$$

故 $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$

1.4.3向量与矩阵的范数

定义1.4.8 谱半径

设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_i(i=1\sim n)$，称 $\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ 为矩阵 A 的谱半径。

定理1.4.5 （特征值的上界）设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，则 $\rho(A)\le\|A\|$。

证明：设 λ 是 A 的任一特征值，x 为对应的特征向量，

则 $Ax=\lambda x.$ $\quad|\lambda|\|x\|=\|\lambda x\|=\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$

故 $|\lambda|\le\|A\|$，即有 $\rho(A)\le\|A\|.$

1.4.3向量与矩阵的范数

矩阵 A 的谱半径不会超过 A 的任何一种范数。在讨论线性方程组的迭代解法的收敛性时非常重要。因 $\rho(A)$ 不易求，而 $\|A\|$ 较容易求，可以将条件适当放宽，改用 $\|A\|$ 去判断。

定理1.4.6 **设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，如果 A 为对称矩阵，则 $\rho(A)=\|A\|_2$**

证明：设 λ_i 是A的任意特征值，u_i 为对应的特征向量，

$$\text{则} A^T A u_i = AAu_i = A\lambda_i u_i = \lambda_i A u_i = \lambda_i^2 u_i$$

$$\therefore \|A\|_2^2 = \lambda_{\max}\left(A^T A\right) = \max_{1\le i\le n} \lambda_i^2 = \left(\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|\right)^2$$

$$= \left(\rho\left(A\right)\right)^2 \qquad \Rightarrow \|A\|_2 = \rho\left(A\right)$$

1.4.3向量与矩阵的范数

定理1.4.7 如果$\|B\|<1$，则$I\pm B$为非奇异矩阵，且

$$\|(I\pm B)^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|B\|}$$

其中$\|\cdot\|$是指矩阵的算子范数。

证　反证法，若$\det(I-B)=0$，则$(I-B)x=0$有非零解x_0. 即

$$Bx_0=x_0,\quad \|x_0\|=\|Bx_0\|\le\|B\|\|x_0\|，\text{故}\quad \|B\|\ge 1。$$

这与已知条件矛盾，所以$\det(I-B)\ne 0$，$I-B$是非奇异矩阵。

又由于$(I-B)(I-B)^{-1}=I$,有$(I-B)^{-1}=I+B(I-B)^{-1}$，则

$$\|(I-B)^{-1}\|\le\|I\|+\|B\|\|(I-B)^{-1}\|=1+\|B\|\|(I-B)^{-1}\|$$

故 $\|(I-B)^{-1}\|\le\dfrac{1}{1-\|B\|}$. 类似可证 $\|(I+B)^{-1}\|\le\dfrac{1}{1-\|B\|}$.

1.4.4 不动点定理

1.）问题的提出：在工程和科学技术中的许多问题常常归结为解各种函数方程 $f(x)=0$，

如：代数方程、微分方程、积分方程、线性方程组等。

但这些方程求解麻烦、计算复杂、计算量大、甚至很难求出解。这就需要我们寻找合适的求解方法。

例如：求方程 $x^5-x-1=0$ 在区间（0, 2）内的近似根；

求解非线性方程组 $F(x)=b$

1.4.4 不动点定理

实际上，对于上述各种方程的求解问题，都可统一为求解相应的算子方程的不动点问题，并在此基础上建立迭代方法。

转化方法：方程 $f(x)=0 \Leftrightarrow x = x - f(x)$

令算子 $T: x \to x - f(x)$

则求解方程 $f(x)=0 \Leftrightarrow$ 求算子方程 $x = Tx$ 的解 x^*（称为不动点）

如： $Ax = b \Leftrightarrow x = x - Ax + b \Leftrightarrow x = (I-A)x + b$

令 $Tx = (I-A)x + b$，则求解 $Ax = b \Leftrightarrow$ 求解 $x = Tx$ 的不动点。

1.4.4 不动点定理

2). 不动点的定义

设（1）X——距离空间；

（2）算子 $T: X \to X$ 的映射。

若 $\exists x^* \in X$, $s.t.$ $x^* = Tx^*$，则称 x^* 为算子 T 的不动点。

例：① $T: R^1 \to R^1$, $Tx = x^2$，则 T 的不动点为 $x = x^2$ 的解 1，0。

② $T: R^2 \to R^2$, $T(x,y) = (x,0)$，则 T 的不动点为 x 轴上的所有点

1.4.4 不动点定理

③ $T:R^2 \to R^2$, 旋转变换 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 其中

$\theta \in (0, 2\pi)$，则 T 的不动点为坐标原点(0， 0)。

④ $T:R^1 \to R^1$， 平移变换 $Tx = x + b(b \neq 0)$, 则 T 没有不动点。

求解算子方程 $x = Tx$，需要**解决三个问题**：

1、不动点的存在性, 唯一性；

2、如何求不动点？（求近似解的方法）；

3、误差分析。

1.4.4 不动点定理

3)不动点定理

$$\|T(x)-T(y)\|\le\theta\|x-y\|$$

压缩算子(压缩映像)：

设(1) X—距离空间；(2) 算子$T:X\to X$的映射。

若$\exists\theta\ (0<\theta<1),\ s.t.\ \forall x,y\in X$，恒$\rho(T(x),T(y))\le\theta\rho(x,y)$

则称 T是X上的压缩算子，θ 为压缩系数。

非膨胀映像　若$\forall x,y\in X_0\subset X$，有$\rho(\mathrm{T}(x),T(y))\le\rho(x,y)$，则称T为$X_0$上的非膨胀映像.

严格非膨胀映像　若当$x\ne y$时$\rho(T(x),T(y))<\rho(x,y)$成立，则称T为$X_0$上的严格非膨胀映像.

1.4.4 不动点定理

不动点定理（压缩映像原理）

设（1）X 是完备的距离空间；

（2）$T:X\to X$ 的压缩算子。

则 T 在 X 上存在唯一的不动点 x^*，

即 $\exists | x^* \in X,\ s.t.\ \ x^* = Tx^*$

证　先证存在性，再证唯一性

1.4.4 不动点定理

存在性 因T在X上为压缩映像，任取$x^0 \in X$，

构造序列$x^{k+1} = T(x^k)\,, k = 0,1,\cdots,$ 则有

$$\rho(x^{k+1}, x^k) = \rho(T(x^k), T(x^{k-1})) \le \theta\rho(x^k, x^{k-1}) \le \cdots \le \theta^k \rho(x^1, x^0),$$

故$\rho(x^{k+p}, x^k) \le \rho(x^{k+p}, x^{k+p-1}) + \rho(x^{k+p-1}, x^{k+p-2}) + \cdots + \rho(x^{k+1}, x^k)$

$$\le \left(\theta^{k+p-1} + \theta^{k+p-2} \cdots + \theta^k\right)\rho(x^1, x^0) = \frac{\theta^k(1-\theta^p)}{1-\alpha}\theta\rho(x^1, x^0)$$

因$\theta < 1$，故$\{x^k\}$是$Cauchy$列。由X的完备性，$\{x^k\}$在X中收敛，

即存在$x^* \in X$，使$\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^*$.

1.4.4 不动点定理

存在性

因T在X上为压缩映像，任取$x^0 \in X$,

构造序列$x^{k+1} = T(x^k)$,$k = 0,1,\cdots$, 则有

存在$x^* \in X$,使$\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^*$.

再由T的连续性（压缩映像必连续），

有$x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} T(x^k) = T(x^*)$.

这说明方程$x = T(x)$有解x^*。

1.4.4 不动点定理

唯一性　　即证x^*是唯一解。

反证法，

设还有$y^* = T(y^*)$，

则$\rho(x^*, y^*) = \rho(\mathrm{T}(x^*), T(y^*)) \le \theta\rho(x^*, y^*)$，

且$\theta < 1$

故必有$\rho(x^*, y^*) = 0$，　即$x^* = y^*$

1.4.4 不动点定理

不动点定理（压缩映像原理）

设（1）X 是完备的距离空间；

（2）$T: X \to X$ 的压缩算子。

则 T 在 X 上存在唯一的不动点 x^*，即 $\exists | x^* \in X,\ s.t.\ \ x^* = Tx^*$

特别地，定理1.4.8和定理1.4.9

1. 设 $G: R^n \to R^n$ 为 R^n 上的压缩映像，则 G 在 R^n 中有唯一的不动点。

2. 设 $G: D \subset R^n \to R^n$ 为有界闭集 $D_0 \subset D$ 上的压缩映像，且 $G(D_0) \subset D_0$，则 G 在 D_0 中有唯一不动点。

1.4.4 不动点定理

关于不动点定理的几个注：

（1）定理的证明过程就是求不动点的方法(迭代法 $x_{n+1}=Tx_n$)，称为构造性的证明。

（2）定理的条件是结论成立的充分非必要条件。

（3）迭代的收敛性和极限点与算子T有关，而与初始点无关。但初始点x_0的选取对迭代速度有影响。初始点离极限点越近，其收敛速度越快，而不影响精确度。

1.4.4 不动点定理

（4）误差估计

事前（或先验）误差：根据预先给出的精确度，确定计算步数。

设迭代到第 n 步，则误差估计式为

$$\rho(x_n, x^*) \le \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(Tx_0, x_0) = \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_1, x_0)$$

根据给定的精度要求，可以估计出需要计算的步数。

1.4.4 不动点定理

事后（或后验）误差：计算到第 n 步后，估计相邻两次迭代结果的偏差 $\rho(x_n, x_{n-1})$，若该值小于预定的精度要求，则取 $x^* \approx x_n$。此方法简单。

设迭代到第 n 步，则误差估计式为

$$\rho(x_n, x^*) \le \frac{\theta}{1-\theta}\rho(x_n, x_{n-1})$$

且 $$\rho(x_n, x_{n-1}) \le \frac{\theta^{n-1}}{1-\theta}\rho(Tx_0, x_0)$$

1.4.4 不动点定理

(5) 求解不动点的具体步骤:

Step1 提供迭代初始点 x_0;

Step2 计算迭代点 $x_1 = Tx_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1}$;

Step3 控制步数,检查 $\rho(x_1, x_0)$,若 $\rho(x_1, x_0) > \varepsilon$。则以 x_1 替换 x_0 转到第二步,继续迭代,当 $\rho(x_n, x_{n-1}) \le \varepsilon$ 时终止,取 x_n 为所求结果。

误差不超过 $\frac{\theta}{1-\theta}\varepsilon$

1.4.4 不动点定理

如果降低对映射G的要求，但同时加强对原像集D_0的约束，则有下述Brouwer不动点定理.

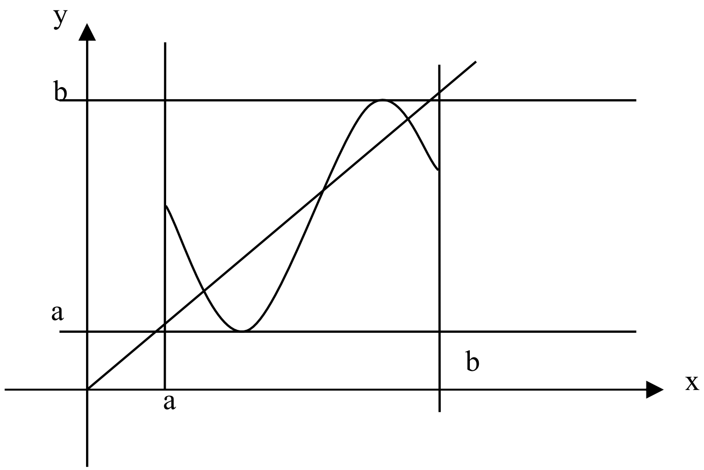
（Brouwer不动点定理）

设$G: D \subset R^n \to R^n$在有界闭凸集$D_0 \subset D$上连续，且$G(D_0) \subset D_0$，则G在D_0中至少有一个不动点。

一维情形几何解释:

即：设$f:[a,b] \to [a,b]$连续，

则f在$[a,b]$至少有一个不动点。



二维情形　　三维情形

内容小结

本节要求掌握：

1）赋范线性空间的概念，范数的三个公理；

2）常用赋范线性空间举例，会验证；

3）依范数收敛定义，范数的连续性、有界性，等价性；

赋范空间与距离空间的关系，**Banach** 空间的概念；

4）向量和矩阵的范数;

5）不动点定理。

距离和距离空间

定义1.4.1 距离空间 X 是非空集合，若

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} \xrightarrow[\text{规则}]{\text{按一定}} \exists \left| \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0 \right.$（实数），且满足下列三个条件:

（1）非负性 $d(x,y) \geq 0$, 当且仅当$x = y$时, $d(x,y) = 0$

（2）对称性 $d(x,y) = d(y,x)$

（3）三角不等式 $\forall z \in X$，有

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

距离公理

则称实数$d(x,y)$为元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离，称(X,d)为距离空间或度量空间。两个要素：非空集合、距离

定义1.4.2 赋范线性空间

设 $\boldsymbol{E}$ 是实数域（或复数域）$\boldsymbol{K}$ 上的线性空间。若 $\forall x \in E \xrightarrow[\text{规则}]{\text{按一定}} \exists$唯一实数$\|x\|$，且满足下列三条

（1）$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, 非负性（正定性）

（2）$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$，正齐性

（3）$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$，三角不等式

范数公理

则称实数$\|x\|$为 $\boldsymbol{x}$ 的范数，称 $\boldsymbol{E}$ 为赋范线性空间，记作 $(E, \|\bullet\|)$ 或 E。

距离空间与赋范线性空间的关系

$(E,\|\cdot\|)$ 与 (E,d) 之间的关系：

●若在 $(E,\|\cdot\|)$ 中，按范数定义距离，即

$$\forall x,y\in E,\ \ d(x,y)=\|x-y\|$$

1）$\boxed{\text{验证得知 满足距离的三条公理。}}$
该距离称为由范数导出的距离。

2）赋范线性空间按范数导出的距离构成距离空间，称为由范数导出的距离空间。

注意： 赋范线性空间 $\Rightarrow$ 距离空间

距离空间 $\not\Rightarrow$ 赋范线性空间

1.5 内积空间

1.5.1 内积空间及其性质

1.5.2 正交分解与投影定理

1.5.3 *Hilbert*空间中的*Fourier*分析

1.5.1 内积空间及其性质

定义1.5.1 内积空间

设 U 是数域 K（实或复数域）上的线性空间，若 $\forall x, y \in U$，存在唯一的数 $(x, y) \in K$，满足下列三条： $U \times U \to C(R)$

内积公理

①正定性：$(x,x) \geq 0$， $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

② 共轭对称性：$(x,y)=\overline{(y,x)}$

③对第一变元的线性性：

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z),\ \ z\in U$$

则称 (x,y) 为 x, y 的内积，U 为内积空间。

1.5.1 内积空间及其性质

内积关于第二变元满足共轭线性性质

$$(x,\alpha y)=\overline{(\alpha y,x)}=\overline{\alpha}\,\overline{(y,x)}=\overline{\alpha}(x,y)$$

$$(x,y+z)=\overline{(y+z,x)}=\overline{(y,x)}+\overline{(z,x)}=(x,y)+(x,z)$$

即$(x,\alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z),\quad z\in U$

当 K 是实数域时，称 U 为实内积空间；K 为复数域时，称 U 为复内积空间。通常 U 指的是复内积空间。

有限维的实内积空间称为欧式空间；

有限维的复内积空间称为酉空间.

1.5.1 内积空间及其性质

性质1 内积可诱导范数 $\|x\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x,x)}$

可直接验证满足范数的三条公理，称 *U* 是按内积导出的赋范线性空间。

证明：$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 满足范数的三条公理

①正定性（非负性）

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0, \qquad \|x\| = \sqrt{(x,x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

②正齐性

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = |\alpha| \cdot \|x\|$$

1.5.1 内积空间及其性质

$$\left|(x,y)\right| \le (x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}} = \|x\|\|y\|$$

③三角不等式

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x)+(x,y)+\overline{(x,y)}+(y,y)$$

$$= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$$

$$(\because \operatorname{Re}(x,y) \le \left|(x,y)\right| \le \|x\|\cdot\|y\|)$$

故 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x,x)}$$

1.5.1 内积空间及其性质

例1

在 Λ^n—— n 维（实或复数）向量空间中，酉空间

$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\Lambda^n$， 定义

内积 $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i$ ， 范数 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$，

则 Λ^n 按范数是完备的内积空间，称为 Hilbert 空间。

特别的，在 R^n 中，内积 $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$，范数 $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ 。

欧氏空间

距离 $d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

标准内积

1.5.1 内积空间及其性质

例2 设A是n阶实对称正定矩阵，定义$(x,y)=x^T Ay$

$\forall x,y\in R^n$ 则R^n是n维欧氏空间.

证明:1)$(x,x)=x^T Ax\geq 0$, 且$(x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta$

$$2)(x,y)=x^T Ay=(y^T Ax)^T=y^T Ax=(y,x)$$

$$3)(x+y,z)=(x+y)^T Az=x^T Az+y^T Az=(x,z)+(y,z)$$

$$(\alpha x,y)=(\alpha x)^T Ay=\alpha x^T Ay=\alpha(x,y)$$

1.5.1 内积空间及其性质

例 $U \in R^2$ $\quad \forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$

定义$(x,y)=\max\limits_{i=1,2}\{|x_i|,|y_i|\}$

$U \in R^2$按上述定义不是内积空间.

$$\forall x=(1,1), y=(\frac{2}{3},\frac{2}{3}), c=\frac{1}{3}$$

$$(cx,y)=(\frac{1}{3}x,y)=\frac{2}{3}$$

$$c(x,y)=\frac{1}{3}(x,y)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore (cx,y)\neq c(x,y)$$

1.5.1 内积空间及其性质

例3

在$L^2[a,b]$中， $\forall x(t), y(t) \in L^2[a,b]$，

定义内积 $(x,y)=\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt$ （满足三条公理）

范数 $\|x(t)\|=(\int_a^b x^2(t)dt)^{\frac{1}{2}}$，

则$L^2[a,b]$按范数是完备的内积空间。

若$L^2[a,b]$为复值函数集合，则定义内积

$(x,y)=\int_a^b x(t)\cdot \overline{y(t)}dt$ （满足三条公理）

1.5.1 内积空间及其性质

例4 $\forall f,g\in C[a,b]$ 定义$(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dt$

则$C[a,b]$按上述定义是内积空间(无限维).

$$\|f(x)\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$$

例5 $U\in R^{n\times n}$ 定义$(A,B)=tr(A^TB)$

则$R^{n\times n}$按上述定义是内积空间(有限维).

性质2 内积满足（柯西—许瓦兹Cauchy—Schwarz不等式）

$\forall (x,y)\in U$， 有 $\left|(x,y)\right| \le (x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}}$

证明 $x=\theta, (\theta,y)=(\theta+\theta,y)=(\theta,y)+(\theta,y) \therefore (\theta,y)=0$

$\forall x\ne\theta$, 令 $z=y-\dfrac{(y,x)}{(x,x)}x$ 则 $0\le(z,z)=\left(y-\dfrac{(y,x)}{(x,x)}x,\ y-\dfrac{(y,x)}{(x,x)}x\right)$

$$=(y,y)-\frac{(y,x)}{(x,x)}(x,y)-\frac{\overline{(y,x)}}{(x,x)}(y,x)+\frac{(y,x)}{\cancel{(x,x)}}\frac{\overline{(y,x)}}{(x,x)}\cancel{(x,x)}$$

$$=(y,y)-\frac{(y,x)}{(x,x)}(x,y) \quad \therefore \left|(x,y)\right| \le (x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}}$$

1.5.1 内积空间及其性质

柯西—许瓦兹Cauchy—Schwarz不等式的具体形式

$$\left|(x,y)\right| \le (x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}}$$

【1】 $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}\right)^{1/2}$$ 例1 $\forall x, y \in R^n$

【2】 $$\int_a^b f(t)g(t)dt \le \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$ 例4 $\forall f, g \in c[a,b]$

【3】 $$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ji}\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}^{\,2}\right)$$ 例5 $\forall A, B \in R^{n\times n}$

【4】 $$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j y_i\right)$$

例2 $\forall x, y \in R^n$

1.5.1 内积空间及其性质

三大空间的关系

1） 内积可诱导出范数，故内积空间一定是赋范线性空间（在其诱导的范数下）。反之，不一定成立。例如 $L^p(p\neq 2), C[a,b]$ 按 $\|x\|=\max\limits_{a\le x\le b}|x(t)|$ 不是内积空间。

内积空间中的范数通常指的是由内积导出的范数。

2） 范数可导出距离，内积空间一定是距离空间（按定义 $d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y,x-y)}$ ）。

3） 内积空间 $\Rightarrow$ 赋范线性空间 $\Rightarrow$ 距离空间

1.5.1 内积空间及其性质

性质3 在内积空间 U 中，按内积导出的范数满足平行四边形公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

证明：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)$$

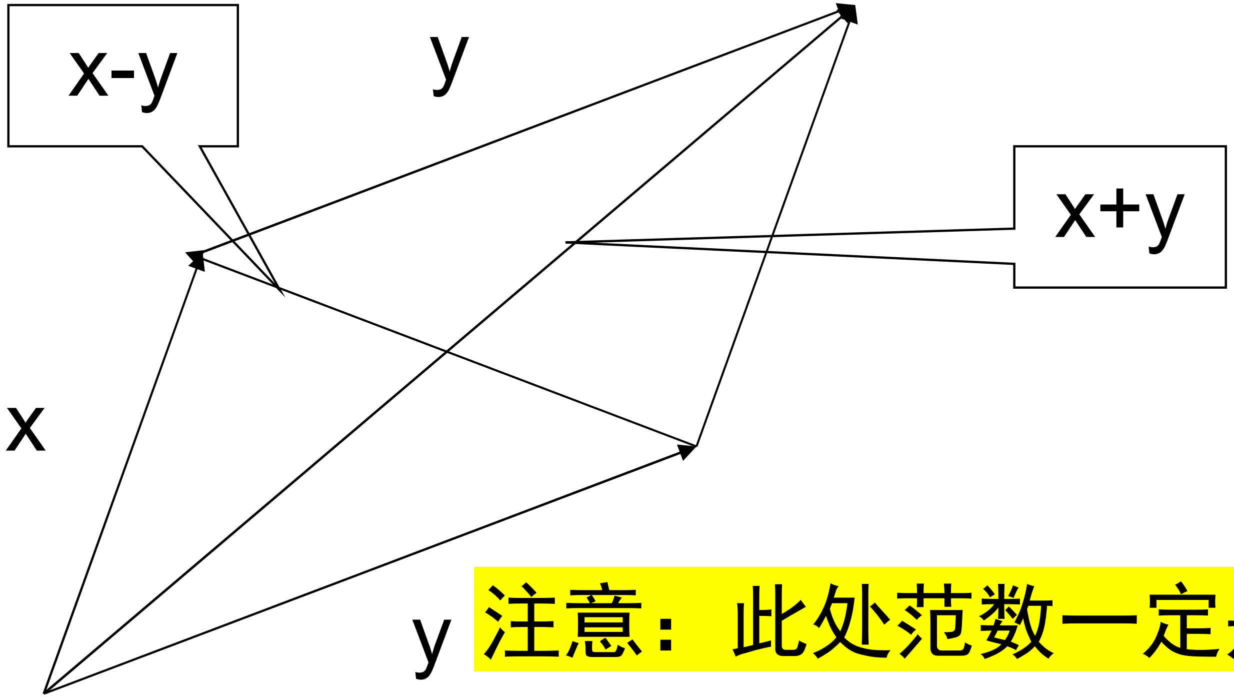
$$=\|x\|^2+(x,y)+(y,x)+\|y\|^2$$

$$+\|x\|^2-(x,y)-(y,x)+\|y\|^2$$

$$=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

1.5.1 内积空间及其性质

内积空间R^2： $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$



注意：此处范数一定是2范数！

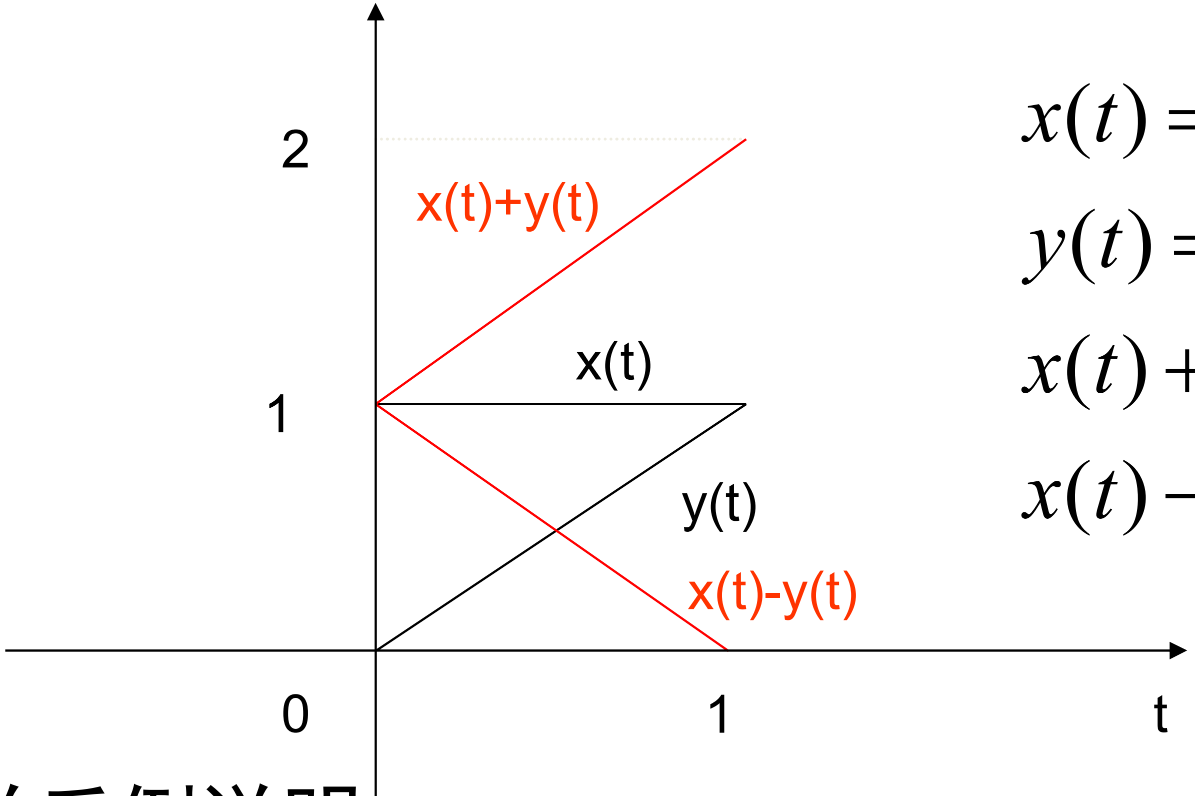
内积空间$L^2[a,b]$： $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2)$

注意：此处范数一定是由内积导出的范数！

1.5.1 内积空间及其性质

例6

空间$C_{[a,b]}$中的范数$\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$不能从内积导出（因为不满足平行四边形公式），也不能按该范数定义内积



$$x(t)=1$$

$$y(t)=t$$

$$x(t)+y(t)=1+t$$

$$x(t)-y(t)=1-t$$

在R^2中举反例说明：

1范数和∞范数不满足平行四边形公式！

1.5.1 内积空间及其性质

内积空间 $\Rightarrow$ 赋范线性空间 $\Rightarrow$ 距离空间

判别定理　若赋范线性空间 X 的范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形公式 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$，则由范数可诱导出内积使得 X 成为内积空间。

(1). 当 X 为实赋范线性空间时，定义

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

则由平行四边形公式验证其满足内积的三条公理;

1.5.1 内积空间及其性质

(2). 当 **X** 为复赋范线性空间时，定义

虚数单位

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+\frac{i}{4}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)$$

则由平行四边形公式验证其满足内积的三条公理。

注：若赋范线性空间 **X** 的范数不满足平行四边形公式，则 **X** 不能成为内积空间。

定理：赋范线性空间成为内积空间 $\Leftrightarrow$ 范数满足平行四边形公式

一个范数是否有内积背景的唯一门槛是它满足平行四边形公式！

1.5.1 内积空间及其性质

性质4

在内积空间 U 中，内积(x,y)是两个变元x,y的连续函数.即当$x_n \to x, y_n \to y$（按范数）时，数列$(x_n, y_n) \to (x,y)$

Hilbert空间

完备的内积空间 U 称为 **Hilbert** 空间，记作 H（即内积空间 U 按由内积导出的范数$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$成为 **Banach** 空间）

1.5.2 正交分解与投影定理

设矢量$A=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$，$B=[b_1,b_1,\ldots,b_n]$

$A\bullet B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n$ $\quad A\bullet B = |A||B|cos\theta$

θ为向量A和向量B的夹角（$\theta\in[0,\pi]$）

若B为单位向量，即$|B|=1$时，$A\bullet B = |A|\ cos\theta,$

表示向量A在B方向的投影长度。

两向量内积为零，那么就说这两个向量是正交的。

两向量正交意味着它们是相互垂直的。记为$A\perp B$。

1.5.2 正交分解与投影定理

定义1.5.2 设 U 是内积空间， $x,y\in U$, $M,N\subset U$

（1） 若 $(x,y)=0$， 称 x 与 y 正交， 记作 $x\perp y$；

（2） 若 $\forall y\in M$, 有 $(x,y)=0$， 称 x 与 M 正交， 记作 $x\perp M$；

（3） 若 $\forall x\in M, \forall y\in N$, 有 $(x,y)=0$， 称 M 与 N 正交， 记作： $M\perp N$；

（4） U 中与 M 正交的所有元素的全体称为 M 的正交补， 记作 $M^{\perp}$， 即

$$M^{\perp}=\{y\,|\,y\perp x, x\in M\}。$$

1.5.2 正交分解与投影定理

（5） 设 $\boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{U}$ 的线性子空间， $x \in U$

若$\exists x_0 \in M$，$x_1 \in M^{\perp}$，使得

$$x = x_0 + x_1 \qquad (*)$$

则称 x_0 为 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{M}$ 上的正交投影，(*) 式称为 $\boldsymbol{x}$ 关于 $\boldsymbol{M}$ 的正交分解。

定理：设M是实内积空间U的子空间，则M的正交补存在且唯一，

1)若$M = \{0\}$，则$M^{\perp} = U$

2)若$M \neq \{0\}$，取M的正交基$e_1, e_2, \cdots e_r$，

再扩充U的正交基$e_1, e_2, \cdots e_r, e_{r+1}, \cdots e_n$则$V = \{e_{r+1}, \cdots e_n\}$为$M$的正交补，

且$V = \{\alpha \mid \alpha \perp M, \alpha \in U\}$

正交分解的性质

（1） 设 U 是内积空间， $x,y\in U$，若 $x\perp y$， 则

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

称为内积空间中的“商高定理”，即勾股定理.

证：$\because x\perp y \qquad \therefore (x,y)=0$

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+\overline{(x,y)}+(y,y)$$

$$=\|x\|^2+\|y\|^2$$

（2） 设 U 是内积空间，$\forall M\subset U$，则 $M^{\perp}$ 为 U 的闭线性子空间。

垂线最短定理

（3）设 U 是内积空间，$M\subset U$ 为线性子空间，若 x_0 为 x 在 M 上的投影，则

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\| \qquad (**)$$

而且 x_0 是 M 中使（**）成立的唯一点。

（ $\|x-x_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$ 说明 x_0 是 M 中逼近 x 的最好元）

证：
$$\|x-y\|^2=\|(x-x_0)+(x_0-y)\|^2$$

$$=\|x-x_0\|^2+\|x_0-y\|^2\geq\|x-x_0\|^2$$

$$\therefore \quad \|x-y\|\geq\|x-x_0\|,\forall y\in M$$

正交分解的性质

问题：当 U、M 满足什么条件时，$\forall x \in U$ 在 M 中有投影？

投影定理 设 M 是 Hilbert 空间 H 中的闭（完备）线性子空间，则 $\forall x \in H$，必存在唯一的 $x_0 \in M$ 及 $x_1 \in M^{\perp}$，使得

$$x = x_0 + x_1$$

注意： 完备子空间一定是闭子空间，反之不成立；

完备空间的闭子空间一定是完备子空间；

有限维赋范空间(内积空间)一定是完备并可分的空间。

正交分解的性质

推广：当 $\boldsymbol{M}$ 是内积空间 $\boldsymbol{U}$ 的完备线性子空间时，定理仍然成立。

问题：如何求 $\boldsymbol{U}$ 中 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中的投影 $\boldsymbol{x}_0$？

1.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

在 $\mathbf{R}^3$ 中， $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$ 是三个相互正交的单位向量，则对于 $\forall\alpha\in \mathrm{R}^3$，有唯一分解

$$\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 ,$$

其中 $x_1=(\alpha,e_1)$， $x_2=(\alpha,e_2)$， $x_3=(\alpha,e_3)$ （由正交性可得），即通过正交性可得到 α 的唯一分解表达式。

同样在内积空间 U 中，由正交性也可以将 U 中的元素表示为唯一分解的形式，这将十分有意义。

1） 正交系及规范正交系

（1）定义 设在 H 空间中有一组非零的元素列（或点列）$\{e_n\}\big|_{n=1}^{\infty}$，

①若 $(e_i,e_j)=0\ (i\neq j)$，则称 $\{e_n\}$ 为正交系；

②若 $(e_i,e_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$，则称 $\{e_n\}$ 为规范正交系

（或标准正交系）。

注：规范正交系 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 中任一有限组

$\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_k}\}$ 线性无关。

例7 在 $\mathbf{R}^n$ 中，元素组

$$e_1 = (1,0,\cdots,0), e_2 = (0,1,\cdots 0),\cdots, e_n = (0,0,\cdots,1)$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中的规范正交系。

例8 在 l^2 中，元素列 $e_1 = (1,0,0,\cdots)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots),\cdots$

按内积 $(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ 为规范正交系。

例9 在$L^2[-\pi,\pi]$中，若规定内积

$$(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)y(t)dt,$$

则三角函数系$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\cdots$

是$L^2[-\pi,\pi]$中的规范正交系。

在$L^2[0,2\pi]$中，若规定内积

$$(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x(t)y(t)dt$$

则三角函数系$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos t,\ \sin t,\cdots,\ \cos nt,\ \sin nt,\cdots$是$L^2[0,2\pi]$中的规范正交系。

2）规范正交化定理（Gram—Schmidt）

设$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$是 $\boldsymbol{H}$ 中的任一线性无关元素组，则通过 **Schmidt** 正交化方法可以构造一组规范正交系。

构造方法如下：

$$y_1 = x_1 \;\Rightarrow\; e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1 \;\Rightarrow\; e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

1.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

$$y_3 = x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2 \Rightarrow \ e_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$$

………………………………………

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n, e_i)e_i \Rightarrow \ e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$$

………………………………………

由此得到$\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$为 U 中的一个规范正交系。

Gram-Schmidt正交化的基本想法:是利用投影原理在已有正交基的基础上构造一个新的正交基。

例10 （**Legendre** 多项式）在**[−1, 1]**上连续实值函数的全体

$C_{[-1,1]}$按内积$(x,y)=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)dt$ 构成一实内积空间 ***U***。

U 的完备化空间为实 **Hilbert** 空间 $L^2_{[-1,1]}$。

在$C_{[-1,1]}$中构造一个规范正交系如下：

令$g_0=1,\ g_1=t,\cdots,\ g_n=t^n,\cdots$，则$\{g_n\}$是线性无关的。

1.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

取 $h_0 = g_0 = 1,\quad e_0 = \dfrac{g_0}{\|g_0\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}},$

取 $h_1 = g_1 - (g_1, e_0)e_0 = t,\quad e_1 = \dfrac{h_1}{\|h_1\|} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot t,$

类似的 $e_2 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}(3t^2 - 1), \cdots,\ e_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\cdot P_n(t), (n = 1, 2, \cdots)$

得 $\{e_n(t)\}$ 是 $L^2_{[-1,1]}$ 中的规范正交系。

其中：$P_n(t) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dt^n}[(t^2 - 1)^n]$ 称为**n**阶的**Legendre**多项式。

1.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

$\{P_n(t)\}$的前六项为

$$P_0(t)=1 \qquad P_1(t)=t$$

$$P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1)$$

$$P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t)$$

$$P_4(t)=\frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3)$$

$$P_5(t)=\frac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t)$$

3）性质

① 设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$是 **H** 中的规范正交系，

$$M = \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i,\ a_i \in K\}$$

则对于$\forall x \in H$，$\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中的投影为

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$$

且

$$\|x_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2$$

1.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

② Bessel 不等式。设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$是 **H** 中的规范正交系，

$\forall x\in H$ ， 必有 Bessel 不等式：

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\le\|x\|^2}$$

成立。（即 ***x*** 在 ***M*** 上的投影 $\boldsymbol{x_0}$ 的长度$\le\|x\|$）

$$\|x\|^2=\|x_0\|^2+\|x-x_0\|^2\ge\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2$$

推广：设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$是 ***H*** 中的规范正交系，

则$\forall x\in H$， 有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\le\|x\|^2$$

4）完全规范正交系的完全性和完备性

1、在有限维空间（已知维数）中，如R^2中构造一组规范正交基：1）找 n 个线性无关的向量，

2）施密特规范正交化可得规范正交基。

但有限维空间（未知维数）或无穷维空间不适用。

2、如何判断是否构成规范正交基?

在有限维空间（已知维数）中，可以数个数。但有限维空间（未知维数）或无穷维空间，此法失效。

3、是否是完全规范正交系？是否是完备规范正交系?

1.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

设$\{e_1,e_2,e_3,\cdots\}$是内积空间H中的规范正交系

③ 若对于$\forall x\in H$， 当且仅当$x=\theta$时，$(x,e_i)=0$

$(i=1,2,\cdots)$（即$L^{\perp}=\{0\}$），

则称$L=\{e_i\}$为H的完全规范正交系；

④ 若对于$\forall x\in H$， 都有

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2$$

则称$\{e_1,e_2,e_3\cdots\}$为H的完备规范正交系。

此式称为巴塞弗（Parseval）等式，

也称为广义“商高定理”

1.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

定理1.5.1

设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$是 $\boldsymbol{H}$ 空间中的规范正交系，则下列四个命题等价

① $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$是完全规范正交系　完全性定义

② $M = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$在 **H** 中稠密

② 对$x \in H$，$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$ （**Parseval** 等式）完备性定义

④ 对于$\forall x \in H$，有$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$

广义Fourier级数

$\boldsymbol{H}$ 空间的 Fourier 级数

设$L=\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$是 $\boldsymbol{H}$ 空间中的完全规范正交系，则对于$\forall x\in H$，有

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$$

该式称为 $\boldsymbol{x}$ 关于$\{e_i\}$的广义 **Fourier** 级数。

称(x,e_i)为 $\boldsymbol{x}$ 关于$\{e_i\}$的 **Fourier** 系数。

几何意义：$\boldsymbol{x}$ 等于它的各分量$(x,e_i)e_i$的向量之和。

0.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

注：$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$ 等同于级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$ 收敛于 $\boldsymbol{x}$。

即部分和序列：

$$\{x_n\}=\{\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i \in M_n=span\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\}$$

当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x$，即得 $x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$

最佳逼近定理： 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$是 **H** 中的规范正交系 $x\in H$，则对于任意一组数$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，恒有

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|\le\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|$$

证：设$M=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，则 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{M}$ 上的投影为

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$$

又由投影性质知$\|x-x_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|=\inf\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|$

1.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\| \le \left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|$$

在 **H** 中，用规范正交系$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$做有限维的线性组合去逼近元素$x\in H$，以$\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$为最好，也就是线性组合中的系数应取为 **x** 的前 **n** 项 **Fourier** 系数。

例11 在R^{∞}中，取元素列

$$e_1=(1,0,\cdots),\ e_2=(0,1,0,\cdots),\cdots,e_n=(0,\cdots,1,0\cdots),\cdots$$

则对于$\forall x\in \mathrm{R}^{\infty}$，有

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n+\cdots$$

就是R^{∞}中的一个广义 **Fourier** 级数，其中广义 **Fourier** 系数$(x,e_i)=x_i\ (i=1,2,\cdots)$是 $\boldsymbol{x}$ 的第 $\boldsymbol{i}$ 个分量坐标。

例12 在$L^2[0,2\pi]$中，若规定内积

$$(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt$$

则三角函数系$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cdots, \cos nt, \sin nt, \cdots$是$L^2[0,2\pi]$中的规范正交系，并且是完全的规范正交系。

因而，对于$\forall x(t)\in L^2[0,2\pi]$，

$$x(t)=(x,\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}[(x,\cos nt)\cos nt+(x,\sin nt)\sin nt]$$

$$\triangleq \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nt+b_n\sin nt]$$

通常意义的Fourier级数（三角级数）

1.5.3 Hilbert空间中的 Fourier分析

其中 $a_0=\sqrt{2}(x,\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\frac{1}{\sqrt{2}}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)dt$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos ntdt,\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin ntdt,\quad n=1,2,\cdots$$

在给定的规范正交系下，对 $x(t)$ 的 **n** 维最佳逼近，就是 **Fourier** 系数中的前 **n** 项之和。

内容小结

本节要求掌握

1. 内积空间的定义，举例，会验证三条公理；

2. 会用内积定义范数并验证，知道 **Hilbert** 空间的概念；

3. 了解正交投影在最佳逼近中的应用，知道投影定理的条件及结论；

4. 会用施密特方法构造规范正交系，能写出勒让德（**Legendre**）多项式的前三项；

5. 知道贝塞尔（**Bessel**）不等式及意义。