第一章　插值法

一维插值

- ✓ 2.1 引言
- ✓ 2.2 Lagrange插值法
- ✓ 2.3 Newton插值法
- 2.4 Hermite插值法
- 2.5 分段低次插值法
- 2.6 *样条插值法

Lagrange 和 Newton 插值法都要求插值函数在插值节点处与已知的函数值相等．但在一些实际应用中，还要求导数、甚至更高阶的导数相等，埃尔米特（**Hermite**）插值法就是解决这类问题的方法.

2.4 埃尔米特（Hermite）插值法

定义1　已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个相异节点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 处的函数值 $f(x_i)$ 和导数值 $f'(x_i)$，如果存在一个次数不超过 $2n+1$ 次的多项式 $H_{2n+1}(x)$，满足插值条件

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i)=f(x_i)\triangleq y_i, \\ H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i)\triangleq m_i, \end{cases} \quad (i=0,1,2\cdots,n) \qquad (1)$$

则称 $H_{2n+1}(x)$ 为 $\boldsymbol{f(x)}$ 的 $2n+1$ 次埃尔米特插值多项式.

求解 $H_{2n+1}(x)$ 的问题称为埃尔米特 **Hermite** 插值问题.

问题1 $H_{2n+1}(x)$的存在性及解法

设 $H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$

使其满足 $\begin{cases} H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \triangleq y_i, \\ H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \triangleq m_i \end{cases}$

方法1 待定系数法

根据2n+2个条件，解线性方程组求出待定系数.

方法2 采用类似于求**Lagrange**插值多项式的基函数方法

构造**Hermite**插值多项式 $H_{2n+1}(x)$.

分析

设$\alpha_j(x)$和$\beta_j(x)$ $(j=0,1,2,\cdots,n)$是$H_{2n+1}(x)$的$2n+2$个插值基函数，

每个插值基函数均是$2n+1$次多项式，且满足条件

$$\alpha_j(x_i)=\begin{cases}0,\ i\neq j\\1,\ i=j\end{cases},\ \ \alpha_j'(x_i)=0\ (j,i=0,1,2,\cdots,n)$$

$$\beta_j(x_i)=0\ ,\ \ \beta_j'(x_i)=\begin{cases}0,\ i\neq j\\1,\ i=j\end{cases},(j,i=0,1,2,\cdots,n)$$

若令 $$\boxed{H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}[y_j\alpha_j(x)+m_j\beta_j(x)]} \qquad (2)$$

则 $H_{2n+1}(x_i)=y_i$，$H_{2n+1}'(x_i)=m_i$，$(i=0,1,2\cdots,n)$，

(2)式确定的多项式满足插值条件，即是Hermite插值多项式.

下面利用 Lagrange 基函数 $l_j(x)$ 求 $\alpha_j(x)$ 和 $\beta_j(x)$

因为 $\alpha_j(x)$ 有 n 个二重零点 $x_i(i=0,1,\cdots,n,i\neq j)$，

所以 $\alpha_j(x)$ 可以写成

$$\boxed{\alpha_j(x_i)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases},\quad \alpha_j'(x_i)=0}$$

$$\alpha_j(x)=(ax+b)l_j^2(x)$$

其中 $l_j(x)=\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\dfrac{x-x_i}{x_j-x_i}$，

只需求出 a 和 b

又由条件 $\alpha_j(x_j)=1$，$\alpha_j'(x_j)=0$，得

$$\begin{cases}\alpha_j(x_j)=(ax_j+b)l_j^2(x_j)=ax_j+b=1\\ \alpha_j'(x_j)=al_j^2(x_j)+2(ax_j+b)l_j(x_j)l_j'(x_j)=a+2l_j'(x_j)=0\end{cases}$$

由此解出 $a=-2l_j'(x_j)$，$b=1+2x_jl_j'(x_j)$， 而 $l_j'(x_j)=\sum_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{x_j-x_i}$

所以基函数

$$\alpha_j(x)=[1-2(x-x_j)\sum_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{x_j-x_i}]l_j^2(x)\quad(j=0,1,2,\cdots,n)$$

同理可得

$$\beta_j(x)=(x-x_j)l_j^2(x)\quad(j=0,1,2,\cdots,n)$$

从而构造出2n+1次埃尔米特插值多项式.

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}[y_j\alpha_j(x)+m_j\beta_j(x)]$$

问题2. Hermite插值多项式的唯一性

定理1 满足插值条件(1)的埃尔米特插值多项式是唯一的.

证 假设$H_{2n+1}(x)$和$\tilde{H}_{2n+1}(x)$均是满足条件(1)的 Hermite插值多项式，

令 $$\varphi(x)=H_{2n+1}(x)-\tilde{H}_{2n+1}(x)$$

则每个节点x_i均是$\varphi(x)$的二重根，即$\varphi(x)$有$2n+2$个根，

但$\varphi(x)$是不超过$2n+1$次的多项式根，所以$\varphi(x)\equiv 0$，从而

$$H_{2n+1}(x)=\tilde{H}_{2n+1}(x)$$

唯一性证得.

问题3．Hermite插值多项式的余项

定理2　设函数 $f(x)\in C^{2n+1}(a,b)$，$f(x)\in D^{2n+2}(a,b)$，则 $f(x)$ 的

2n+1次Hermite插值多项式的余项为

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^{2}(x),$$

式中 $\xi\in(a,b)$，依赖于x及插值节点.

证明　仿照Lagrange插值余项的证法.

2.5 分段低次插值法

问题　对于n次插值多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，

当 $f(x)\approx P_n(x)$时，其余项

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

是否能说明，插值多项式的次数n越高，其误差越小呢?

回答：不一定.　因为插值余项的大小既与插值节点的个数有关，

还与函数$f(x)$的高阶导数有关.

1901年德国数学家龙格(Runge)发现一个函数，这个函数说明

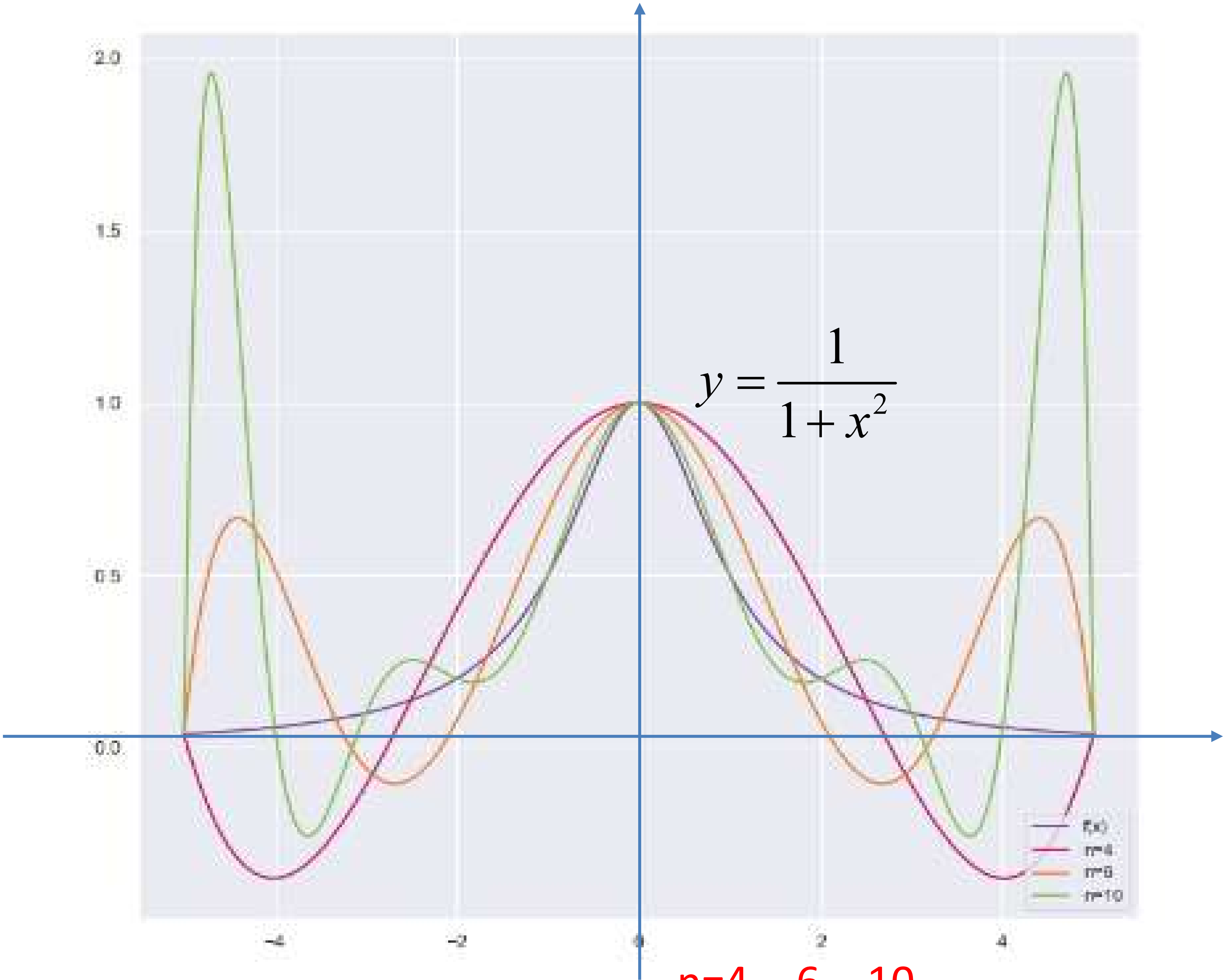
增大插值多项式次数n不一定能提高精度.

例 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数，若在 $[-5,5]$ 上取等间距节点 $x_i=-5+i\dfrac{10}{n}\,(i=0,1,2,\cdots,n)$，构造 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{1+x_j^2}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)$$

分别取n=4，6，10的插值多项式图形与函数图形比较，观察并证明，发现如下现象

$$\lim_{n\to\infty}L_n(x)\begin{cases}=f(x), & |x|\le c,\\ \text{不收敛}, & |x|>c,\end{cases}\quad \text{其中 } c\approx 3.63$$



$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

n=4， 6， 10

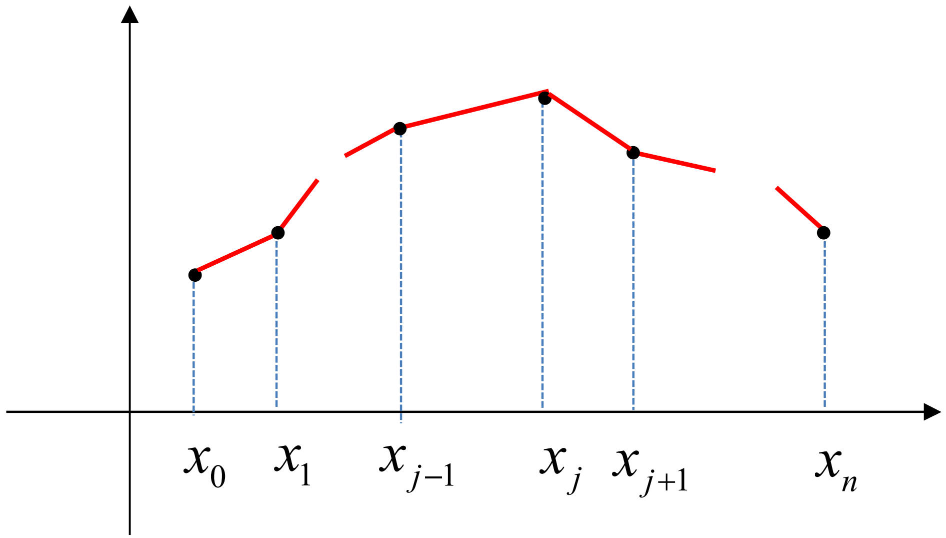
由图形看出

当插值点个数取的较多时，插值多项式$L(x)$在原点附近较好的逼近$f(x)$，其它点差异较大，使得插值多项式产生很大的波动，进而导致插值余项不收敛，拉格朗日多项式插值的这种振荡现称作**Runge现象.**

为了避免这种现象发生，常采用**分段低次插值**或**分段线性插值**的方法.

分段线性插值的思想：

通过插值节点用折线段连接起来的函数近似$f(x)$.



2.5.1 分段线性插值

定义1 已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 上的函数值 $y_k=f(x_k)(k=0,1,\cdots,n)$，作一条折线 $I(x)$ 满足

（1）$I(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

（2）$I(x_k)=y_k$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$；

（3）$I(x)$ 在每个小区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上是线性函数.

则称 $I(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**分段线性插值函数**.

即用折线近似代替曲线 $\boldsymbol{y=f(x)}$.

由于$I(x)$在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上是线性函数，可表示为

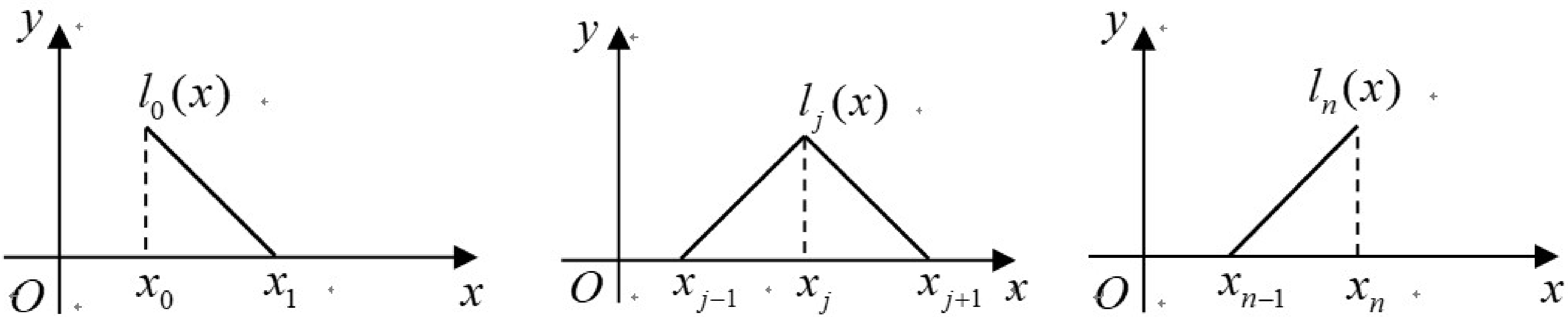
$$I(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}y_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1}\quad(x_k\le x\le x_{k+1})$$

在整个区间$[a,b]$上，$I(x)$可以表示为

$$I(x)=\sum_{j=0}^{n}y_jl_j(x)$$

其中$l_j(x)$ $(j=0,1,2,\cdots n)$为插值基函数，满足条件

$$l_j(x_k)=\delta_{ik}\quad(j,k=0,1,2,\cdots n)$$



写出 $l_j(x)$ 的表达式为

$$l_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}, & x_0\le x\le x_1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad l_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1}\le x\le x_n,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$l_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\le x\le x_j,\ (j\ne 0)\\ \dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\le x\le x_{j+1},\ (j\ne n)\\ 0, & x\in[a,b],\ x\notin[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}$$

优点　计算简单，在节点处连续，避免了龙格现象；

缺点　节点处是尖点时，不可导（曲线不光滑）；

改进　使用分段三次**Hermite**插值或三次样条插值方法.

2.5.2 分段三次Hermite插值

定义2 已知函数 $y=f(x)$ 在节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 上的函数值 y_k 及导数值 y_k' $(k=0,1,2,\cdots,n)$，可构造一个导数连续的分段插值函数 $H(x)$，它满足条件

（1） $H(x_k)=y_k, H'(x_k)=y_k'$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$；

（2） $H(x)$ 在每个小区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上是三次多项式.

称 $H(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的分段三次Hermite插值多项式.

当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时，根据两点三次插值公式，即得到 $H(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的分段三次Hermite插值多项式.

$$H(x) = y_k \alpha_k(x) + y_{k+1} \alpha_{k+1}(x) + y'_k \beta_k(x) + y'_{k+1} \beta_{k+1}(x)$$

$$x \in [x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, 1, \cdots n-1)$$

其中 $\alpha_k(x) = \left[1 + \dfrac{2(x - x_k)}{x_{k+1} - x_k}\right]\left(\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2,$

$$\alpha_{k+1}(x) = \left[1 + \frac{2(x - x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}\right]\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2,$$

$$\beta_k(x) = (x - x_k)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2, \qquad \beta_{k+1}(x) = (x - x_k)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2.$$

如果 $f(x)\in C^4[a,b]$，则分段三次 Hermite 插值多项式的余项

$$|R(x)|=|f(x)-H(x)|=\left|\frac{f^{(4)}(\xi_k)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2\right|$$

$$\le\frac{1}{4!}\cdot\frac{h_k^4}{16}\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}\left|f^{(4)}(x)\right|\le\frac{M}{384}h^4,\quad \xi_k\in(x_k,x_{k+1})$$

其中 $h_k=x_{k+1}-x_k$, $h=\max\limits_{0\le k\le n-1}h_k$， $M=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

2.6 *样条插值法

样条插值函数属于分段多项式插值，但比前面介绍的几种插值有更高阶的光滑性. “样条”(sline)一词是早期工程师绘图所用的具有弹性的薄木条，将其固定在一些给定的样点上，可绘出一条连接各点的光滑曲线。这样的曲线有连续的二阶导数，数学上就是三次样条插值函数.

第2章　课后练习

P55　1, 2, 3, 4，7，8, 9(2)