一、设该工厂聘一级检验员x_1名，二级检验员x_2名，则：

目标函数为：

$8\times4\times x_1+8\times3\times x_2+(8\times25\times2\%\cdot x_1+8\times15\times5\%\cdot x_2)\times2$

$=40x_1+36x_2$

约束条件为：

$8\times25\times x_1+8\times15\times x_2\geqslant1800$

$8\times25\times2\%\times x_1+8\times15\times5\%\times x_2\leqslant120$

$x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$，x_1、x_2为整数.

∴该问题的数学模型为：

$$\min\ 40x_1+36x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}200x_1+120x_2\geqslant1800\\4x_1+6x_2\leqslant120\\x_1,x_2\geqslant0,\ x_1,x_2\text{为整数}.\end{cases}$$

— 8'

二.

初始三点分别记作 $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=3$.

对应的函数值分别为: $f_1=2$, $f_2=4$, $f_3=20$.

第一次迭代:

设 $\phi(x)=ax^2+bx+c$. 满足

$$\begin{cases}\phi(0)=c=2\\ \phi(2)=4a+2b+c=4\\ \phi(3)=9a+3b+c=20\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=5\\ b=-9\\ c=2\end{cases}$$

ϕ 的极小点为 $\bar{x}=-\frac{b}{2a}=0.9$

对应的函数值为 $f(\bar{x})=0.029$

$\because f(\bar{x})=0.029<f_2=4$.

$\therefore$ 新区间为 $[0, 2]$ $\because |x_2-\bar{x}|=1.1>\varepsilon=0.1$.

第二次迭代:

取 $x_1=0$, $x_2=0.9$, $x_3=2$.

对应的函数值为: $f_1=2$, $f_2=0.029$, $f_3=4$

设 $\phi(x)=ax^2+bx+c$, 满足.

$$\begin{cases}\phi(0)=c=2\\ \phi(0.9)=0.81a+0.9b+c=0.029\\ \phi(2)=4a+2b+c=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2.9\\ b=-4.8\\ c=2.\end{cases}$$

ϕ 的极小点为 $\bar{x}=\frac{24}{29}\approx 0.827$

对应的函数值为: $f(\bar{x})=0.085$.

$\because |x_2-\bar{x}|=|0.9-0.827|=0.073<\varepsilon=0.1$

达到精度, 算法终止, 得到近似极小点 $x^*\approx 0.827$. —— 10'

三. (1) 拟牛顿法的搜索方向为: $d^k = -H_k \cdot g^k$　$(g^k = \nabla f(x^k))$

$\because$ H_k 对称正定, $\therefore \nabla f(x^k)^T \cdot d^k = -(g^k)^T \cdot H_k \cdot g^k < 0$

$\therefore$ d^k为下降方向.　　— 5'

(2) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 4 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$　$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$　$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g^0 = \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$　　$d^0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

FR方法: 第1次迭代: $x^1 = x^0 + \lambda_0 d^0 = (4\lambda_0, 0)^T$

$\varphi(\lambda_0) = f(4\lambda_0, 0) = (4\lambda_0)^2 - 4 \cdot 4\lambda_0$

令 $\varphi'(\lambda_0) = 0$, 得 $\lambda_0 = \frac{1}{2}$.　$\therefore x^1 = x^0 + \frac{1}{2} d^0 = (2, 0)^T$

$\nabla f(x^1) \neq 0$.

第2次迭代: $g^1 = \nabla f(x^1) = (0, -4)^T$

$\alpha_0 = \frac{\|g_1\|^2}{\|g_0\|^2} = 1$.　$d^1 = -g^1 + \alpha_0 d^0 = (4, 4)^T$

$\therefore x^2 = x^1 + \lambda_1 d^1 = (2 + 4\lambda_1, 0 + 4\lambda_1)^T$

$\varphi(\lambda_1) = f(2+4\lambda_1, 4\lambda_1) = (2+4\lambda_1)^2 - 2(2+4\lambda_1) \cdot 4\lambda_1 + 2 \cdot (4\lambda_1)^2 - 4(2+4\lambda_1)$

令 $\varphi'(\lambda_1) = 0$, 得 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.　$\therefore x^2 = x^1 + \lambda_1 d^1 = (4, 2)^T$

$\nabla f(x^2) = (0, 0)^T$,　$\therefore x^* = x^2 = (4, 2)^T$;　$f(x^*) = -8$.

— 15'

DFP方法: 第1次迭代: $x^1 = x^0 + \lambda_0 d^0 = (4\lambda_0, 0)^T$

$\varphi(\lambda_0) = f(4\lambda_0, 0) = (4\lambda_0)^2 - 4 \cdot 4\lambda_0$

令 $\varphi'(\lambda_0) = 0$. 得 $\lambda_0 = \frac{1}{2}$.　$\therefore x^1 = x^0 + \frac{1}{2} d^0 = (2, 0)^T$.

第2次迭代: $g^1 = \nabla f(x^1) = (0, -4)^T$

$\Delta x = (2, 0)^T$.　$\Delta g = (4, -4)^T$. $H_0 = I$

$$H_1 = H_0 + \frac{\Delta x \cdot \Delta x^T}{(\Delta x)^T \cdot \Delta g} - \frac{H_0 \cdot \Delta g \cdot \Delta g^T \cdot H_0}{\Delta g^T \cdot H_0 \cdot \Delta g} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$d^1 = -H_1 g^1 = -\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.　$x^2 = x^1 + \lambda_1 d^1 = (2+2\lambda, 2\lambda)^T$

$\varphi(\lambda_1) = f(2+2\lambda, 2\lambda) = (2+2\lambda)^2 - 2(2+2\lambda) \cdot 2\lambda + 2 \cdot (2\lambda)^2 - 4(2+2\lambda)$

令 $\varphi'(\lambda_1) = 0$, 得 $\lambda_1 = 1$.　$\therefore x^2 = x^1 + \lambda_1 d^1 = (4, 2)^T$

$\nabla f(x^2) = (0, 0)^T$.　$\therefore x^* = x^2 = (4, 2)^T$.　$f(x^*) = -8$.　— 25'

四. (1). 对偶问题：

$$\max \quad 15y_1 + 20y_2 + 10y_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -1 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq -2 \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 \leq -3 \\ y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2 \text{ 无限制} \end{cases}$$

------ 5'

原规化：

$$\min \quad -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(2). 第一阶段. 引入人工变量，先求解如下线性规化：

$$\min \quad x_5 + x_6$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, \cdots, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

构造单纯形表：

	C	0	0	0	0	1	1		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	θ
1	x_6	1	2	3	0	0	1	15	5
1	x_5	2	1	5	0	1	0	20	4 →
0	x_4	1	2	1	1	0	0	10	10
	σ_j	3	3	8 ↑	0	0	0		

C_B	X_B							$\bar{b}$	θ
1	x_6	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	1	3	0 →
0	x_3	3/5	1/5	1	0	1/5	0	4	20
0	x_4	3/5	9/5	0	1	-1/5	0	6	10/3
	σ_j	-1/5	7/5 ↑	0	1	-8/5	0		

C_B	X_B								
0	x_2	-1/7	1	0	0	-3/7	5/7	15/7	
0	x_3	3/7	0	1	0	2/7	-1/7	25/7	
0	x_4	6/7	0	0	1	4/7	-9/7	15/7	
	σ_j	0	0	0	0	-1	-1		

所有检验数小于等于0.

人工变量对应非基变量.

更改表格进入第二阶段.

第二阶段：修改检验数与目标函数.

去掉人工变量. 建表如下：

	C	-1	-2	-3	1		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$	θ
-2	x_2	-1/7	1	0	0	15/7	—
-3	x_3	3/7	0	1	0	25/7	25/3
1	x_4	6/7	0	0	1	15/7	5/2
	σ_j	6/7 ↑	0	0	0		

C_B	X_B					
-2	x_2	0	1	0	1/6	5/2
-3	x_3	0	0	1	-1/2	5/2
-1	x_1	1	0	0	7/6	5/2
	σ_j	0	0	0	-1	

∵所有检验数小于0.

∴最优解为：$X^* = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0)$

最优值为：$f(x^*) = -15$ ---- 17'

(3). 最优基矩阵为：

$$(P_2, P_3, P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

------ 20'

五、记 $f(x)=x_1^2+x_2^2$，$g(x)=-x_1+x_2-1\geq 0$

则惩罚函数为 $p(x)=(\min\{-x_1+x_2-1,0\})^2$

$$F(x,M_k)=f(x)+M_k\,p(x)$$
$$=x_1^2+x_2^2+M_k(\min\{-x_1+x_2-1,0\})^2$$

令 $$\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_1}=0=\begin{cases}2x_1 & x_2-x_1-1\geq 0\\(2+2M_k)x_1-2M_k(x_2-1), & x_2-x_1-1<0\end{cases}$$

$$\frac{\partial F(x,M_k)}{\partial x_2}=0=\begin{cases}2x_2, & x_2-x_1-1\geq 0\\(2+2M_k)x_2-2M_kx_1-2M_k, & x_2-x_1-1<0\end{cases}$$

得到 $x_1=\dfrac{-M_k}{1+2M_k}$，$x_2=\dfrac{M_k}{1+2M_k}$

令 $M_k\to+\infty$，得到问题的最优解为 $x^*=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$.

最优值为 $f(x^*)=\frac{1}{2}$.

—10'

六. 证明:

(1). $\forall x^1, x^2 \in S$, 则 $\exists y^1, y^2 \geq 0$, s.t. $x_1 = Ay_1$, $x_2 = Ay_2$.

对于 $\forall \lambda \in (0,1)$, 有 $\lambda y^1 + (1-\lambda) y^2 \geq 0$.

$$A(\lambda y^1 + (1-\lambda) y^2) = \lambda A y^1 + (1-\lambda) A y^2$$

$$= \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2.$$

$\therefore \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in S$.

$\therefore S$ 为凸集. —6'

(2). $\because f_i$ $(i=1,2\ldots k)$ 为D上的凸函数.

$\therefore \forall x, y \in D$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$f_i(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y).$$

而 $h(\lambda x + (1-\lambda) y) = \max\limits_{1\leq i\leq k} \{ f_i(\lambda x + (1-\lambda) y) \}$.

$$= f_{i_0}(\lambda x + (1-\lambda) y).$$

$\leq \lambda f_{i_0}(x) + (1-\lambda) f_{i_0}(y)$, 其中 $i_0 \in \{1, 2, \cdots k\}$.

且 $h(x) \geq f_{i_0}(x)$, $h(y) \geq f_{i_0}(y)$.

$\therefore h(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$.

$\therefore h$ 为D上的凸函数.

—12'

解：记 $f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$ $\quad g_1(x)=5-x_1^2-x_2^2\geq 0$ $\quad g_2(x)=x_1\geq 0$.

$g_3(x)=x_2\geq 0 \quad h(x)=x_1+2x_2-4=0$

(1) K-T条件为

$$\nabla f(x)-\sum_{i=1}^{3}w_i\nabla g_i(x)+v\nabla h(x)=0$$

$$w_i g_i(x)=0\,,\quad w_i\geq 0 \quad i=1,2,3$$

即

$$\begin{cases}
2(x_1-3)-w_1(-2x_1)-w_2+v=0 & ① \\
2(x_2-2)-w_1(-2x_2)-w_3+2v=0 & ② \\
w_1(5-x_1^2-x_2^2)=0 & ③ \\
w_2\ x_1=0 & ④ \\
w_3\ x_2=0 & ⑤ \\
5-x_1^2-x_2^2\geq 0 & ⑥ \\
x_1\geq 0 & ⑦ \\
x_2\geq 0 & ⑧ \\
w_1,w_2,w_3\geq 0 & ⑨ \\
x_1+2x_2-4=0 & ⑩
\end{cases}$$

-- 6'

(2) 在 $x^1=\binom{2}{1}$处. $g_1(x)\geq 0$ 为起作用约束

$\nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \nabla g_1(x)=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \nabla h(x)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}-w_1\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=0$$

解之得 $w_1=1/3,\quad w_2=2/3$

$\therefore\ x^1=\binom{2}{1}$ 是K-T点

在 $x^2=\binom{3}{1}$处, $h(x)=3+2\times1-4\neq 0$ $\quad\therefore\ x^2=\binom{3}{1}$不是K-T点

又由于 $\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}>0$. $h(x)$线性函数.

$\nabla^2 g_1(x)=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}$ $\quad g_1(x),g_2(x)$线性函数

故所给问题是凸规划 故 $x^1=\binom{2}{1}$为最优解. -- 15'

八. 解. 记 $f(x)=x_1^2+x_2^2$, $g(x)=-x_1+x_2-1\geq 0$.

则障碍函数为 $B(x)=-\ln(-x_1+x_2-1)$

$$F(x,\sigma_k)=x_1^2+x_2^2-\sigma_k\ln(-x_1+x_2-1).$$

令 $$\begin{cases} 0=\dfrac{\partial F(x,\sigma_k)}{\partial x_1}=2x_1+\dfrac{\sigma_k}{-x_1+x_2-1} \\ 0=\dfrac{\partial F(x,\sigma_k)}{\partial x_2}=2x_2-\dfrac{\sigma_k}{-x_1+x_2-1} \end{cases}$$

求得. $x_1=\dfrac{\sqrt{1+4\sigma_k}-1}{4}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{1+4\sigma_k}}{4}$ (舍)

或 $x_1=-\dfrac{1+\sqrt{1+4\sigma_k}}{4}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{1+4\sigma_k}}{4}$

∴ $F(x,\sigma_k)$的极小点为 $\left(-\dfrac{\sqrt{1+4\sigma_k}+1}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{1+4\sigma_k}}{4}\right)^T$

令 $\sigma_k\to 0$, 得到问题的极小点为 $x^*=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$

对应的最优值 $f^*=\frac{1}{2}$.

—10'

九. (1). 证：1° $K=2$ 时. 凸函数定义即得.

2° 设 $K=i-1$ 时 (*) 成立. 下证 $k=i$ 时, (*) 亦成立.

$$f(\lambda_1 x^1+\cdots+\lambda_i x^i)=f\left((1-\lambda_i)\frac{\lambda_1 x^1+\cdots+\lambda_{i-1}x^{i-1}}{1-\lambda_i}+\lambda_i x^i\right)$$

$$\le(1-\lambda_i)\cdot f\left(\frac{\lambda_1 x^1+\cdots+\lambda_{i-1}x^{i-1}}{1-\lambda_i}\right)+\lambda_i f(x^i)$$

$$=(1-\lambda_i)f\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_i}x^1+\cdots+\frac{\lambda_{i-1}}{1-\lambda_i}x^{i-1}\right]+\lambda_i f(x^i)$$

$$\le(1-\lambda_i)\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_i}f(x^1)+\cdots+\frac{\lambda_{i-1}}{1-\lambda_i}f(x^{i-1})\right]+\lambda_i f(x^i)$$

$$=\lambda_1 f(x^1)+\cdots+\lambda_i f(x^i)$$

综合 1°, 2°, 结论得证. —6'

(2) 证：设 x^* 为 $f(x)$ 的任一局部极小点,

则 $\exists N(x^*)$, s.t. $\forall x\in N(x^*)\cap D$, $f(x)\ge f(x^*)$. ①

$\because f(x)$ 为 D 上的凸函数, $\therefore \forall x\in D$, $\forall\alpha\in(0,1)$

$f(\alpha x^*+(1-\alpha)x)\le\alpha f(x^*)+(1-\alpha)f(x)$. ②

当 α 充分接近 1 时. $\alpha x^*+(1-\alpha)x\in N(x^*)$

由①得： $f(\alpha x^*+(1-\alpha)x)\ge f(x^*)$ ③

由②.③得： $f(x^*)\le\alpha f(x^*)+(1-\alpha)f(x)$

$\therefore$ $f(x^*)\le f(x)$

—12'

十. 解：记 $f(x)=x_1-x_2^2$，$g(x)=-x_1^2-x_2^2+5$，$h(x)=x_1-x_2+1$

则 $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}1\\-2x_2\end{pmatrix}$　$\nabla g(x)=\begin{pmatrix}-2x_1\\-2x_2\end{pmatrix}$.　$\nabla h(x)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

K-T条件为：

$$\begin{cases}\nabla f(x)-w\nabla g(x)+v\nabla h(x)=0\\ w\geq 0,\ wg(x)=0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}1+2wx_1+v=0 & ①\\ -2x_2+2wx_2-v=0 & ②\\ w(-x_1^2-x_2^2+5)=0 & ③\\ w\geq 0 & ④\\ -x_1^2-x_2^2+5\geq 0 & ⑤\\ x_1-x_2+1=0 & ⑥\end{cases}$$
— 6'

由③可知：

当 $w=0$ 时，联立方程组①-⑥求解得到

$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$，$v=-1$.

由此得到一个K-T点 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$.

当 $w>0$ 时，$-x_1^2-x_2^2+5=0$. 联立方程组①-⑥可得.

$x_1=1$，$x_2=2$，$w=\frac{1}{2}$，$v=-2$

或 $x_1=-2$，$x_2=-1$，$w=\frac{1}{2}$，$v=+1$.

由此得到两个K-T点 $(1,2)^T$，$(-2,-1)^T$.

综：问题的K-T点为：$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$，$(1,2)^T$，$(-2,-1)^T$.　— 15'