第3章　最佳逼近和最小二乘法

3.4 勒让德多项式和切比雪夫多项式

为了避免法方程是病态方程组, 通常找一组正交多项式. 常用的正交多项式有：勒让德多项式，切比雪夫多项式，拉盖尔多项式，埃尔米特多项式等，这里只介绍最佳平方逼近中两种正交多项式：

1、勒让德 (Legendre) 多项式（权 $\rho(x)=1$）

2、切比雪夫 (Tchebichef) 多项式(权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

练习 将 $x_0=1,\ x_1=t,\cdots,\ x_n=t^n,\cdots$

按内积$(x,y)=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)\mathrm{d}t$ 规范正交化，写出前三项.

解

$$e_0=\frac{x_0}{\|x_0\|}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y_1=x_1-(x_1,e_0)e_0=t\Rightarrow e_1=\frac{y_1}{\|y_1\|}=\sqrt{\frac{3}{2}}t$$

依次求出

$$e_2=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}(3t^2-1),\quad\cdots,\quad e_n=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot P_n(t)\quad(n=1,2,\cdots)$$

其中 $P_n(t)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[(t^2-1)^n]$ 称为 $\boldsymbol{n}$ 阶的 Legendre 多项式,

而$\{e_n(t)\}$是 C[-1, 1]中规范正交的 Legendre 多项式.

3.4.1 勒让德多项式

定义2　在区间[−1, 1]上定义的多项式序列

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

称为勒让德(Legendre)多项式.

其中$P_n(x)$的首项系数$a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$，从而首先系数为1的

勒让德(Legendre)多项式为

$$\tilde{P}_0(x) = 1, \quad \tilde{P}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n], \ (n = 1, 2, \cdots)$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

勒让德多项式性质

(1) 正交性： $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$在$[-1,1]$上带权$\rho(x)=1$正交, 且

$$(P_n,P_m)=\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2}{2n+1}, & m=n\\ 0\quad, & m\neq n\end{cases}\quad (n,m=0,1,\cdots)$$

而$\left\{\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\cdot P_n(x)\right\}(n=0,1,2,\cdots)$是规范正交的.

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

(2) 奇偶性：$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$,

n为奇数时$P_n(x)$是奇函数;

n为偶数时$P_n(x)$是偶函数。

(3) 递推公式：

$$\begin{cases} P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x \\ P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \ (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

由递推公式写出 **Legendre** 多项式$\{P_n(x)\}$的前几项

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_0(x) = 1$$

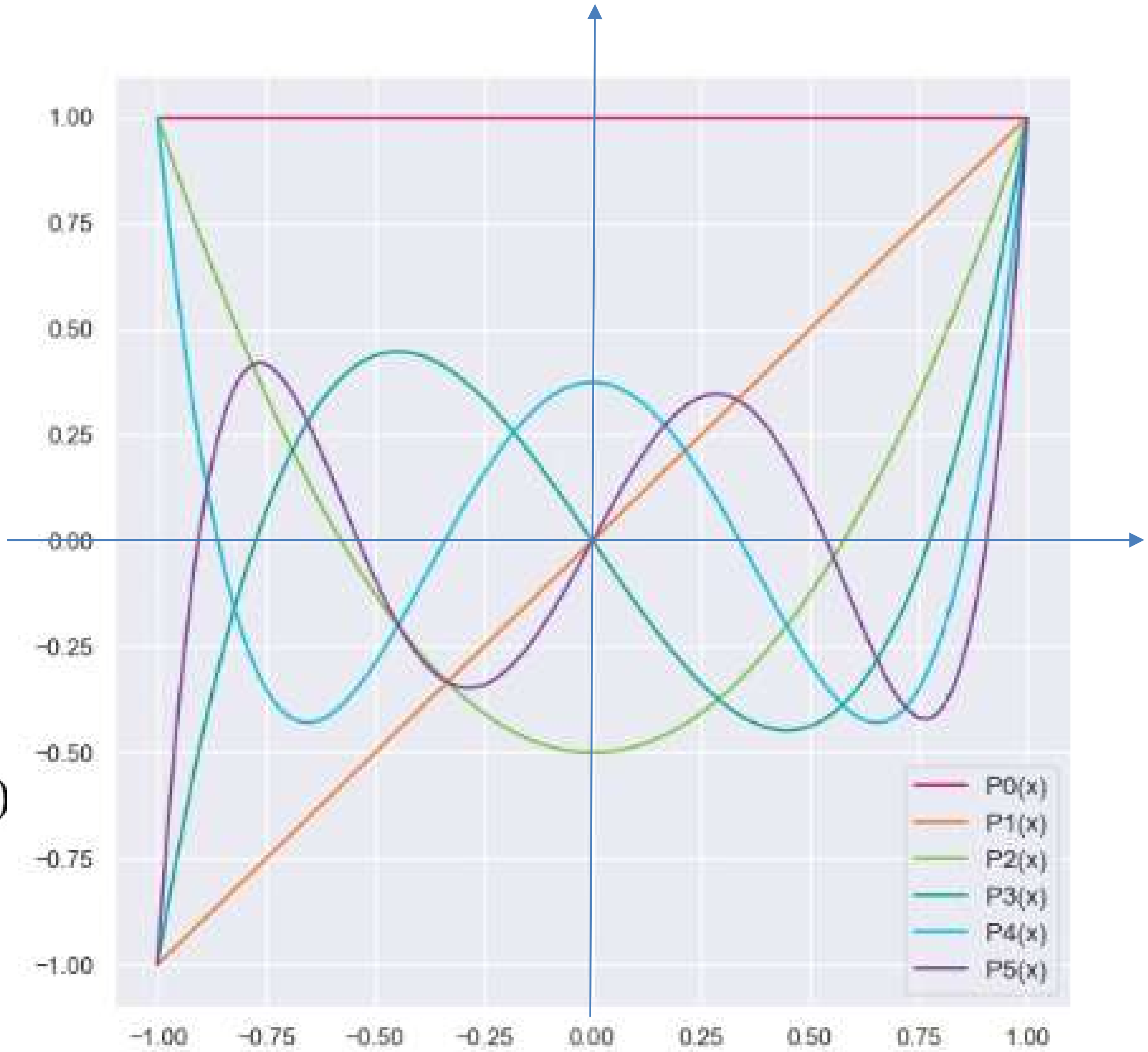
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



单选题 5分

设置

定义在区间[-1,1]上的勒让德多项式张成的线性子空间

$$M_1 = \mathrm{span}\{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)\}$$

与 $M_2 = \mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 的关系

A $M_1 = M_2$

B $M_1 \neq M_2$

提交

例3 求函数 $\sin\frac{\pi}{2}x$ 在 $[-1,1]$ 上的三次最佳平方逼近多项式。

解 由于 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的连续函数，

故取Legendre正交多项式作为基函数，

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

而 $(P_j,P_j)=\dfrac{2}{2j+1}\quad(j=0,1,2,3)$，$(f,P_0)=\int_{-1}^{1}\sin\dfrac{\pi x}{2}dx=0$，

$(f,P_1)=\int_{-1}^{1}x\sin\dfrac{\pi x}{2}dx=\dfrac{8}{\pi^2}$，$\quad(f,P_2)=\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{2}(3x^2-1)\sin\dfrac{\pi x}{2}dx=0$，

$$(f,P_3)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(5x^3-3x)\sin\frac{\pi x}{2}dx=\frac{48(\pi^2-10)}{\pi^4}.$$

故法方程为$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & \frac{2}{3} & & \\ & & \frac{2}{5} & \\ & & & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{8}{\pi^2} \\ 0 \\ \frac{48(\pi^2-10)}{\pi^4} \end{bmatrix}$$

解得：$\alpha_1=0$，$\alpha_2=\frac{12}{\pi^2}$，$\alpha_3=0$，$\alpha_4=\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}$

求得$f(x)$的三次最佳平方逼近多项式为

$$S(x)=\frac{12}{\pi^2}x+\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)\approx 1.553191x-0.562228x^3$$

法二：取基函数$\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x$, $\varphi_2(x)=x^2$, $\varphi_3(x)=x^3$, 构造法方程（四元线性方程组），求解$\alpha_i^*(i=0,1,2,3)$

计算量大
可能病态

例 4 求函数$y=\arctan x$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

解 由于$y=\arctan x\in C[0,1]$,

$$作代换\ x=\frac{1}{2}(t+1),\quad y=\arctan\frac{t+1}{2}\in C[-1,1].$$

故取Legendre正交基 $P_0(t)=1$，$P_1(t)=t$,

计算得$(P_0,P_0)=2$, $(P_1,P_1)=\frac{2}{3}$, $\underline{(y,P_0)}=\int_{-1}^{1}\arctan\frac{t+1}{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\ln 2$

$$\underline{(y,P_1)}=\int_{-1}^{1}t\cdot\arctan\frac{t+1}{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-2+\ln 2$$

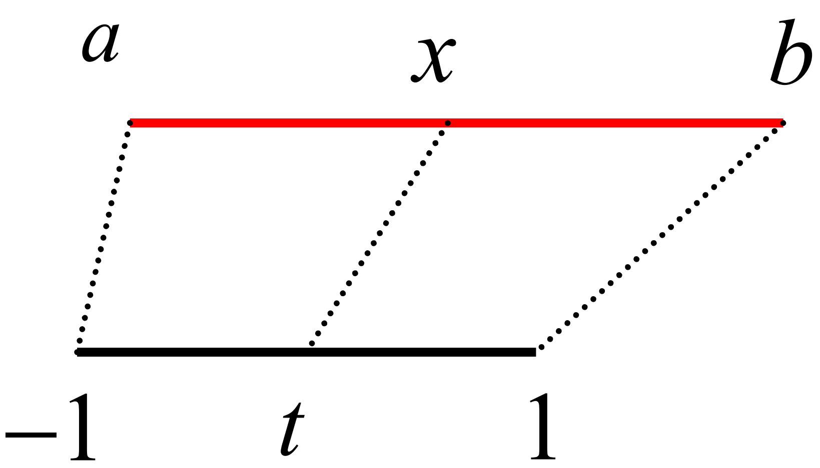
故$y=\arctan\frac{t+1}{2}$在$[-1,1]$上的一次最佳平方逼近多项式为

$$\tilde{y}(t)=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2)+\frac{3}{2}[\frac{\pi}{2}-2+\ln 2]\cdot t$$

从而 $y=\arctan x\approx(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2)+\frac{3}{2}[\frac{\pi}{2}-2+\ln 2](2x-1)$

一般地，求函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的$\underline{n次}$最佳平方逼近时，

$$\text{区间}[a,b] \xrightarrow{\text{变换}} [-1,1] \qquad \frac{b-x}{b-a} = \frac{1-t}{1-(-1)}$$



$$\Rightarrow x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\text{（换元）}$$

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \triangleq g(t)$$

求$g(t)$在区间$[-1, 1]$上的n次最佳平方逼近 $\xrightarrow{\text{代入}t=\frac{2x}{b-a}+\frac{a+b}{a-b}}$ $f(x)$在区间$[a, b]$上的n次最佳平方逼近

3.4.2　切比雪夫多项式

定义3　在$L^2_{[-1,1]}$中，设权函数$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

则由线性无关的多项式序列$\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$，通过$G.-S$

正交化得到的序列$\left\{T_k(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$，称为Tchebichef多项式.

表达示为$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad -1\le x\le 1$

切比雪夫多项式性质 $T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad -1\le x\le 1$

（1）正交性 $T_n(x)$在$[-1,1]$上带权$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$正交，

并且 $(T_0,T_0)=\pi,\quad (T_n,T_n)=\dfrac{\pi}{2}\ (n\ge 1)$

证 令$x=\cos\theta$，则$T_n(x)=\cos(n\theta),\quad 0\le\theta\le\pi$，

$$(T_n,T_m)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta\cos m\theta}{\sin\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & n\ne m;\\ \pi/2, & n=m\ne 0;\\ \pi, & n=m=0.\end{cases}$$

$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \le x \le 1$

（2）奇偶性

$$T_n(-x) = \cos(n \arccos(-x)) = \cos(n(\arccos x - \pi))$$

$$= \cos(n \arccos x - n\pi)$$

$$= (-1)^n \cos(n \arccos x) = (-1)^n T_n(x)$$

n为奇数时$T_n(-x) = -T_n(x)$是奇函数；

n为偶数时$T_n(-x)= T_n(x)$是偶函数。

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad -1\le x\le 1$$

（3）递推公式　$T_n(x)$是n次多项式，且

$$\begin{cases} T_0(x)=1,\ T_1(x)=x, \\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\quad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

证　显然 $n=0$ 时, $T_0(x)=1$

$n=1$ 时，$T_1(x)=\cos(\arccos x)=x$

令$x=\cos\theta$，则$T_n(x)=\cos n\theta.$

由于$\cos(n+1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta-\cos(n-1)\theta\quad(n\ge 1)$

故 $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)\quad(n=1,2,\cdots)$.

由上述递推关系容易得到$\{T_n(x)\}$的前几项

$$T_0(x)=1, \qquad T_1(x)=x,$$

$$T_2(x)=2x^2-1,$$

$$T_3(x)=4x^3-3x,$$

$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$$

$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$T_n(x)$的最高次项系数是$2^{n-1}(n\geq 1)$

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x,$$

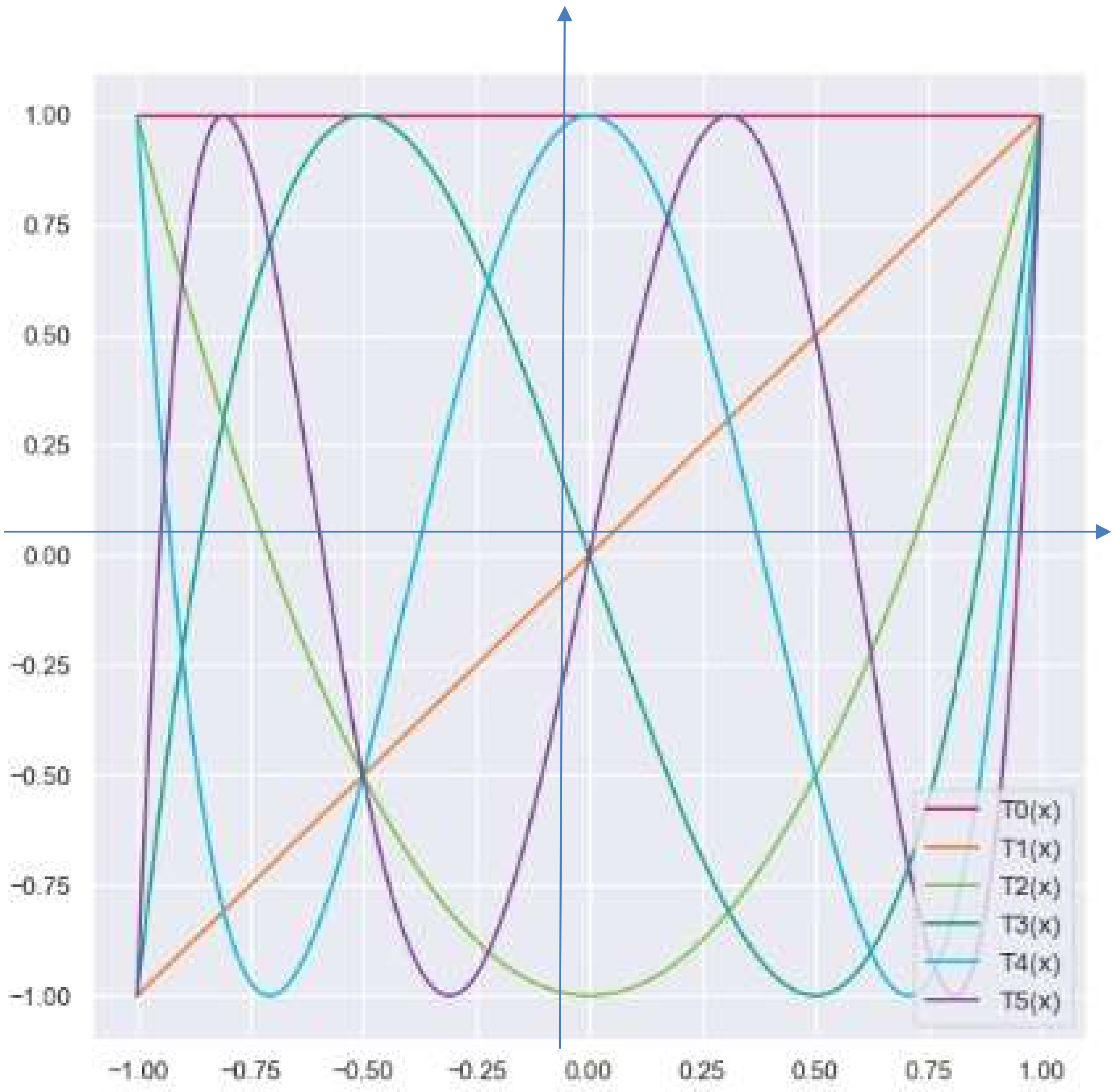
$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$



$\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$的最高次项系数是1

函数 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 也可用 $T_1(x), T_1(x), \cdots, T_n(x)$表示

$$1 = T_0(x), \quad x = T_1(x), \quad x^2 = \frac{1}{2}[T_0(x) + T_2(x)]$$

$$x^3 = \frac{1}{4}[3T_1(x) + T_3(x)]$$

$$x^4 = \frac{1}{8}[3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)]$$

$$x^5 = \frac{1}{16}[10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)]$$

$$x^6 = \frac{1}{32}[10T_0(x) + 15T_2(x) + 6T_4(x) + T_6(x)]$$

$$\cdots$$

例 5 确定参数a,b,c, 使得

$$I(a,b,c)=\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}-(ax^2+bx+c)]^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

取得最小值，并计算最小值。

分析：问题等价于求$f(x)=\sqrt{1-x^2}$在$[-1, 1]$上关于权函数$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的二次最佳平方逼近多项式$P_2(x)$.

而最小值即是平方误差 $\|\delta\|_2^2=\|f-P_2\|_2^2$

$$=(f,f)-(f,P_2)$$

例5 确定参数a,b,c, 使得

$$I(a,b,c)=\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}-(ax^2+bx+c)]^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

取得最小值，并计算最小值。

解法1：选取切比雪夫基函数$T_0=1,\ T_1=x,\ T_2=2x^2-1$

求出 $(T_0,T_0)=\pi,\ \ (T_1,T_1)=(T_2,T_2)=\dfrac{\pi}{2}$

$$(f,T_0)=2,\ \ (f,T_1)=0,\ \ (f,T_2)=-\frac{2}{3}$$

法方程为$\begin{bmatrix}\pi & & \\ & \pi/2 & \\ & & \pi/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -2/3\end{bmatrix}$

$$I(a,b,c)=\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}-(ax^2+bx+c)]^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

解得 $\alpha_0=\dfrac{2}{\pi}$，$\alpha_1=0$，$\alpha_2=-\dfrac{4}{3\pi}$

故 $f(x)$ 的二次最佳平方逼近多项式为

$$P_2(x)=\sum_{j=0}^{2}\frac{(T_j,f)}{(T_j,T_j)}T_j=\frac{2}{\pi}+0-\frac{4}{3\pi}(2x^2-1)=\frac{10}{3\pi}-\frac{8}{3\pi}x^2$$

即 $a=-\dfrac{8}{3\pi}$, $b=0$, $c=\dfrac{10}{3\pi}$，而误差

$$\|\delta\|_2^2=I(a,b,c)\approx 0.0146$$

综上：$a=-\dfrac{8}{3\pi}$, $b=0$, $c=\dfrac{10}{\pi}$时，$I(a,b,c)$ 取得最小值 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{44}{9\pi}$.

解法2：选取基函数$\varphi_0=1,\ \varphi_1=x,\ \varphi_2=x^2$,则

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi \qquad (\varphi_1,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0 \qquad (\varphi_1,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2} \qquad (\varphi_2,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{3\pi}{8}$$

$$(f,\varphi_0)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=2,$$

$$(f,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,$$

$$(f,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{3}$$

由$\begin{bmatrix} \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 解得$\alpha_0 = \frac{10}{3\pi}, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{8}{3\pi}$

$$P_2(x) = \frac{10}{3\pi} \cdot 1 + 0 \cdot x - \frac{8}{3\pi} \cdot x^2 \Rightarrow a = -\frac{8}{3\pi},\ b = 0,\ c = \frac{10}{3\pi}$$

而$I(a,b,c) = \|\delta\|_2^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{44}{9\pi} \approx 0.0146$

解法3：利用多元函数求极值的方法，

求出最小值点a, b, c及最小值$I(a, b, c)$.

其它常用的正交多项式

1. 第二类切比雪夫多项式

在区间[−1,1]上带权$\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$的正交多项式

$$U_n(x)=\frac{\sin[(\mathrm{n}+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^{1}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\pi}\sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta d\theta$$

$$=\begin{cases}0, m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2}, m=n\end{cases}\qquad \begin{cases}U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x,\\ U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x), \quad (n=1,2,\cdots).\end{cases}$$

2. 拉盖尔多项式

在区间$[0, +\infty)$上带权$\rho(x) = e^{x}$的正交多项式

$$L_n(x) = e^{x} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

$$\int_0^{+\infty} L_n(x) \mathrm{L}_m(x) \mathrm{e}^{-x} \, dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ (\mathrm{n}!)^2, m = n \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x \\ L_{n+1}(x) = (1 + 2n - x) L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

3. 埃尔米特多项式

在区间$(-\infty, +\infty)$上带权$\rho(x)=e^{-x^2}$的正交多项式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

$$\int_0^{+\infty} H_n(x)\mathrm{H}_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=\begin{cases}0, m\neq n\\ 2^n\,\mathrm{n}!\sqrt{\pi}, m=n\end{cases}$$

$$\begin{cases}H_0(x)=1, \quad H_1(x)=2x\\ H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x), \quad (n=1,2,\cdots).\end{cases}$$

区间$[a,b]$及权函数不同，得到的正交多项式也不同。

小 结

用正交函数族做最佳平方逼近

优点： (1) 计算简单，算法稳定；

(2) 便于基函数的增加、删除.

(3) 理论上，随着阶次n的增大，最佳平方逼近多项式收敛到被逼近函数.

练习

设函数$f(t)=\sqrt{1+t^2}$，求$f(t)$在区间$[0, 1]$上的一次最佳平方逼近多项式，并估计误差.

答案

一次最佳平方逼近多项式为

$$S^*(t)=0.934+0.426t .$$

误差

$$\left\| f(t)-S^*(t) \right\|_2 =\cdots \approx 0.051 .$$

$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = t$

$(\varphi_0, \varphi_0) = 1, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2}$

$(\varphi_1, \varphi_0) = \frac{1}{2}, \quad (\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{3}$

$(f, \varphi_0) = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = 1.1478$

$(f, \varphi_1) = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\, dt = 0.6095$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1478 \\ 0.6095 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha_0 = 0.9342 \\ \alpha_1 = 0.4272 \end{matrix}$$

$\therefore \; S^*(x) = 0.9342 + 0.4272t$

$$\|f(t) - S^*(t)\|_2 = \sqrt{(f, f) - \sum_{i=0}^{1} \alpha_i (f, \varphi_i)} = 0.0261$$

[redacted]

数值分析作业 3：

（1）手写版：

解：取 $\varphi_0=1$，$\varphi_1=t$ 设 $S^*(t)=a_0+a_1t$

则法方程为：

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\end{bmatrix}$$

其中 $(f,\varphi_0)=\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx1.147$

$(f,\varphi_1)=\int_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx0.609$

代入法方程得：

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.147\\0.609\end{bmatrix}$$

解得 $a_0=0.934$ $a_1=0.426$

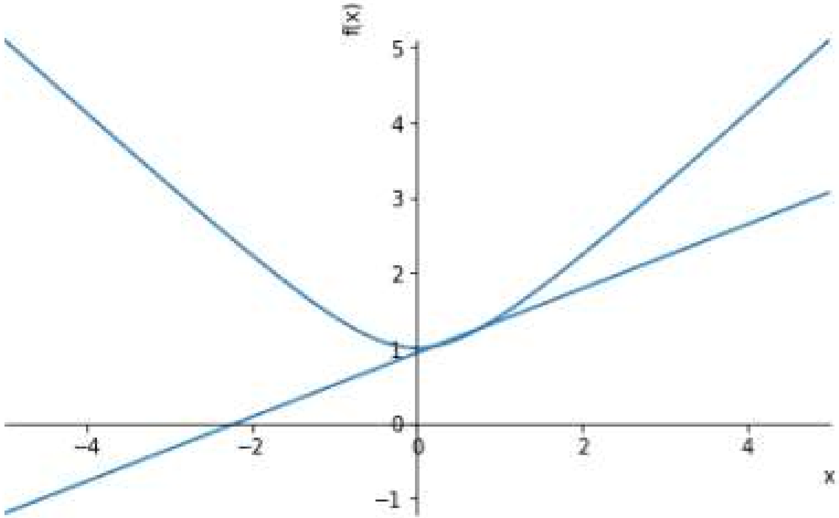
所以最佳平方逼近多项式为：

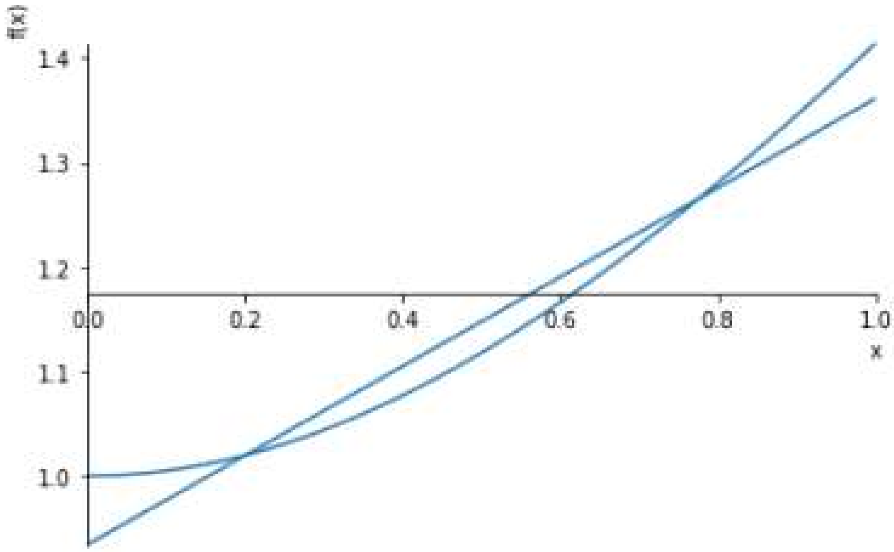
$$S^*(t)=0.934+0.426t$$

误差的2-范数为：

$$\|f(t)-S^*(t)\|_2=\sqrt{\int_0^1(1+t^2)dt-0.934(f,\varphi_0)-0.426(f,\varphi_1)}$$

$$\approx0.051$$





2.代码版:

代码展示:

```
import numpy as np
import sympy
from sympy.plotting import plot
from scipy import integrate

def sum_d(f,a,b,n):#求 d
    x = sympy.symbols('x')
    B = [sympy.Symbol('m') for w in range(n)]
    v = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        B[i]=pow(x,i)*f
        v[i]=sympy.integrate(B[i],(x,a,b))
    return v

def sum_f(a,b,n):#求 H
    y=err=g = np.zeros((n,n,2))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            y[i][j]=integrate.quad(lambda x:pow(x,i+j), a, b)
    return y[...,0]

def can_f(a,b,n):#求 a_0,...,a_n
    q,g=np.zeros((n,n))
    q=sum_f(a,b,n)#求 H(希尔伯特矩阵)
    g=np.linalg.inv(q)#求逆
    s=v=np.zeros(n)
    x = sympy.symbols('x')
    f1=sympy.sqrt(1+pow(x,2))
    s=sum_d(f1,a,b,n)#求 d_i
    v=np.dot(g,s)#H^-1*d
    f2 = (1+pow(x,2))
    err1=sum_d(f2,a,b,n)[0]
    err2=s[0]*v[0]
    err3=s[1]*v[1]
    error=np.sqrt(err1-err2-err3)
    return v,error

```