نظرية ديسارغ للتعاكس

Desargues Involution Theorem

عبدالكريم السالم

نتحدث هنا عن أحد النظريات القوية والمنتمية إلى عائلة الهندسة الاسقاطية مع نظريات باسكال وبابوس ونظرية ديسارغ التي نعرفها مسبقاً عن المثلثات المتناظرة ، ولكن ماذا عن نظرية ديسارغ للتعاكس؟

نظرية ديسارغ للتعاكس (Desargues Involution Theorem) :
معطى رباعي $ABCD$ في المستوى ، والمستقيم l . المستقيم l يقطع كل من BD و AC و BC و AD و CD و AB في كل من Z' و Z و Y' و Y و X' و X توالياً . إذن توجد نقطة على المستقيم l تحقق أن التعاكس حولها بنصف قطر معين يبدل النقاط (Z, Z') و (Y, Y') و (X, X') .
(هناك امتداد للنظرية حيث أنه بفرض أن ω قطاع دائري محيط بالرباعي $ABCD$ وكان l يقطع ω في نقطتين فإن التعاكس المذكور يبدل هاتين النقطتين ، وهذا يفيدنا في حالة كون الرباعي دائري)

النظرية قوية جداً رغم بساطة وعمومية صيغتها ولكنها تستطيع تفكيك شيفرات مسائل قوية في الكثير من المسابقات ، ويمكننا كما فعلنا في النظريات الاسقاطية الأخرى أخذ الحالات المضمحلة للرباعي مثل ثلاث نقاط ونقطة مكررة على ω وهكذا .

وأيضاً كما أن أزواج النظريات (باسكال و بريانشون) أو (نيوتن و بروكارد) متقابلة مثنوياً ، فإن المقابل المثنوي لهذه النظرية أيضاً قوي جداً بحد ذاته ، وإذا كانت النظرية قنبلة ، فإن مقابلها نووي :

مقابل نظرية ديسارغ للتعاكس (Dual of Desargues Involution Theorem) :
معطى النقاط P, A, B, C, D في المستوى و $AB \cap CD = E$ و $AD \cap BC = F$. فإنه يوجد تبديل بين أزواج المستقيمات (PA, PC) و (PB, PD) و (PE, PF) والمماسين (PX, PY) للقطاع الدائري ω المماسي للرباعي $ABCD$ حيث $(PA, PB; PE, PX) = (PC, PD; PF, PY)$ ،
ولاحظ أن التبديل هذا يمكن اعتباره تعاكس حول مستقيم مثلاً حيث أنه مميز بمحافظته على النسبة التبادلية ، وعند اسقاط هذه الأشعة المارة في P نحصل على نقاط تحقق وجود نقطة التعاكس حولها يبدل هذه النقاط .

المقابل للنظرية هو الأكثر استخداماً ، حيث أن التبديل بين المستقيمات يعطينا حرية أكبر في اختيار مستقيم للاسقاط عليه ثم التعامل مع تعاكس وتبديل للنقاط وهو الأسهل (بدلاً عن تبديل المستقيمات المبهم) .

1 : أثبت نظرية بابوس .

2 (China TST) : معطى رباعي $ABCD$ في المستوى ، والمستقيم l . المستقيم l يقطع كل من BD و AC و BC و AD و CD و AB في كل من Z' و Z و Y' و Y و X' و X توالياً . معطى أيضاً ترتيب النقاط على المستقيم l هو X, Y, Z, X', Y', Z' . أثبت أن الدوائر ذوات الأقطار ZZ' و YY' و XX' لها محور أساسي مشترك .

3 (تعميم Serbia MO) : معطى رباعي مماسي $ABCD$ مركز دائرته الداخلية I . اخترنا النقطة X خارج الرباعي بحيث الزاويتين $\angle AXC$ و $\angle BXD$ لهما نفس المنصف . أثبت أن هذا المنصف يمر في I .

4 : لتكن النقطة P خارج المثلث $\triangle ABC$ بحيث $\angle ABP = \angle ACP$. إذا كانت النقطة Q هي التي تجعل $BPCQ$ متوازي أضلاع ، أثبت أن $\angle BAP = \angle CAQ$.

5 : لتكن النقطة P في مستوى المثلث $\triangle ABC$. أخذنا النقاط X, Y, Z على الأضلاع BC, CA, AB توالياً بحيث $\angle APX = \angle BPY = \angle CPZ = 90$. أثبت أن النقاط X, Y, Z على استقامة واحدة .

6 (Serbia MO) : معطى المثلث $\triangle ABC$ ودائرته المحيطة ω ودائرته الخارجية المقابلة للرأس A هي ω_A . المماسين المشتركين للدائرتين يقطعان الضلع BC في كل من P, Q . أثبت أن $\angle PAB = \angle CAQ$.

7 (CGMO) : معطى رباعي دائري $ABCD$ دائرته المحيطة ω_1 . BD و AC يتقاطعان في E ، بينما يتقاطع BC و AD في F . الدائرة ω_2 تمس EC و EB في N و M توالياً وتقطع ω_1 أيضاً في R و Q . المستقيمان BC, AD يقطعان MN في T و S . أثبت أن Q, R, S, T تقع على دائرة واحدة .

8 (USMCA) : معطى رباعي محدب $ABCD$ ، والدائرتين ω_A, ω_B الداخليتين للمثلثين $\triangle ACD, \triangle BCD$ ومركزيهما I, J . المماس الخارجي (غير CD) للدائرتين ω_A, ω_B يمس ω_A في K و ω_B في L . أثبت أن AK, BL, IJ تشترك في نقطة وحيدة .

9 (IMO Shortlist) : ليكن $\triangle ABC$ مثلثًا دائرته الداخلية γ ومنتصف ضلعه BC هو M . المتوسط AM يقطع γ في النقطتين X, Y . المستقيمين المارين في X, Y موازيان للضلع BC يقطعان γ ثانية في X_1, Y_1 تواليًا . وأخيراً ، المستقيمين AX_1, AY_1 يقطعان BC في P, Q تواليًا . أثبت أن $BP = CQ$.

10 (USAMO) : لتكن النقطة P في مستوى المثلث $\triangle ABC$ ، والمستقيم γ المار في P . نعكس المستقيمات PA, PB, PC حول γ لتقطع المستقيمات BC, CA, AB تواليًا في A_1, B_1, C_1 . أثبت أن A_1, B_1, C_1 على استقامة واحدة .

11 : لدينا مثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مشتركين في الدائرة المحيطة γ والدائرة الداخلية ω . ω تمس BC في K وتمس EF في L . AL, DK يقطعان γ ثانية في N, M . أثبت أن المستقيمات AM, EF, BC, ND تتقاطع في نقطة واحدة .

12 : معطى رباعي محدب $ABCD$ ، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث BCA والمركز الخارجي المقابل للرأس B من المثلث هما I و J تواليًا . بالمثل فإن مركز الدائرة الداخلية للمثلث BCD والمركز الخارجي المقابل للرأس B من المثلث هما I' و J' تواليًا . أثبت أن المستقيمان $IJ', I'J$ يتقاطعان على منصف زاوية $\angle ACD$.

13 : في المثلث $\triangle ABC$ ، النقطة H هي نقطة تقاطع ارتفاعاته ، ودائرته المحيطة Ω مركزها O . بفرض أن النقاط M_A, M_B, M_C منتصفات الأضلاع BC, CA, AB تواليًا ، نأخذ نقطة التقاطع الثانية للمستقيمات AM_A, BM_B, CM_C مع Ω في P_A, P_B, P_C . ثم نأخذ نقاط تقاطع الأشعة M_AH, M_BH, M_CH مع Ω في Q_A, Q_B, Q_C . أثبت أن P_AQ_A, P_BQ_B, P_CQ_C تتقاطع في نقطة واحدة على OH .

14 (EGMO) : لتكن Γ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC . الدائرة Ω تمس القطعة AB وتمس Γ في نقطة على نفس الجهة من AB هي و C . منصف زاوية $\angle BCA$ يقطع Ω في نقطتين P, Q . أثبت أن $\angle ABP = \angle QBC$.

15 (Serbia) : لتكن O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC . دائرة النقاط التسع للمثلث ABC تقطع الدائرة (BOC) في نقطتين X, Y أثبت (بدون استخدام التعاكس) أن $\angle BAX = \angle CAY$.

16 (IMO) : في المثلث ABC ، النقطة A_1 على الضلع BC والنقطة B_1 على AC . النقطتين P, Q على AA_1, BB_1 تواليًا حيث $PQ \parallel AB$. النقطة P_1 تقع على PB_1 بحيث تكون B_1 بين P, P_1 وتحقق أن $\angle PP_1C = \angle BAC$. بالمثل النقطة Q_1 تقع على QA_1 بحيث تكون A_1 بين Q, Q_1 وتحقق أن $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. أثبت أن النقاط P, Q, P_1, Q_1 على دائرة واحدة .

17 (IMO Shortlist) : ليكن المثلث ABC مركز دائرته المحيطة O والمستقيم l العشوائي خارج المثلث . النقطة P هي مسقط O على l . المستقيم l يقطع أضلاع المثلث BC, CA, AB في النقاط X, Y, Z تواليًا . أثبت أن الدوائر $\odot(AXP), \odot(BYP), \odot(CZP)$ تتقاطع في نقطتين .

18 (China TST) : في المثلث مختلف الأضلاع ABC ، M_A, M_B, M_C منتصفات الأضلاع BC, CA, AB تواليًا . المستقيم (غير BC) المار في M_A ويمس الدائرة الداخلية للمثلث ABC يقطع M_BM_C في X . بالمثل نعرف Y, Z . أثبت أن X, Y, Z على استقامة واحدة .

19 (IMO Shortlist) : معطى رباعي محدب $ABCD$. اخترنا النقاط P, Q, R, S على الأضلاع AB, BC, CD, DA تواليًا . القطعتين PR و QS تتقاطعان في O . إذا كانت الرباعيات $APOS, BQOP, CROQ, DSOR$ مماسية ، أثبت أن AC, PQ, RS تتقاطع في نقطة واحدة .

20 (Summer MO) : ليكن المثلث ABC حاد الزوايا ومختلف الأضلاع ومركز دائرته الداخلية ω هو I . اخترنا النقطتين X, Y على القوسين الأصغرين AB, AC من الدائرة المحيطة بالمثلث ABC بحيث XY يمس ω في P و $XY \perp AI$. لتكن E, F نقطتي تماس ω مع AC, AB . ولتكن T هي نقطة تقاطع XF و YE . أثبت أنه إذا كانت الدائرتين $\odot(TEF), \odot(ABC)$ متماستين في نقطة ما ، فإن المستقيمات PQ, XE, YF تتقاطع في نقطة واحدة .

21 (IMO Shortlist 2022 G8) : ليكن $AA'BCC'B'$ سداسي محدب بحيث القطعة AC تمس الدائرة الداخلية للمثلث $A'B'C'$ ، و $A'C'$ تمس الدائرة الداخلية للمثلث ABC . ليكن المستقيمين AB و $A'B'$ يتقاطعان في X وليكن المستقيمين BC و $B'C'$ يتقاطعان في Y . أثبت أنه إذا كان الرباعي $XBYB'$ محدب فإن له دائرة داخلية .

22 (Taiwan TST) : لتكن M نقطة اختيارية على القوس BC في الدائرة المحيطة بالمثلث ABC . ليكن المماسان المرسومان من M للدائرة الداخلية للمثلث ABC في النقطتين X_1, X_2 . أثبت أن الدائرة المحيطة بالمثلث $\odot\ (MX_1X_2)$ تمر في نقطة ثابتة لا تعتمد على وضع M على الدائرة .

23 (ELMO SL) : ليكن $ABCDEF$ سداسي دائري ودائرته المحيطة Ω بحيث المثلثين ACE و BDF لهما نفس نقطة تقاطع الارتفاعات . افترض أن القطعتين BD و DF يقطعان المستقيم CE في النقطتين X و Y تواليًا . أثبت وجود نقطة مشتركة بين كل من Ω والدائرة المحيطة بالمثلث DXY والعمود من A إلى CE .