

تمارين للمراجعة نظرية أعداد

- 1) اثبت أن من بين أعداد المتتابة اللانهائية $10001, 100010001, \dots$ لا يوجد عدد أولي .
- 2) اثبت أنه إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين يحققان $2a^2 + a = 3b^2 + b$ ، فإن العددين $a - b, 2a + 2b + 1$ مربعان كاملان .
- 3) إذا كان $n > 1$ عدد صحيح موجب ، اثبت أنه دائماً يوجد n من الأعداد الصحيحة الموجبة المتتالية المؤلفة .
- 4) اثبت أن يوجد 1000 عدد صحيح موجب متتاليين ، بحيث يوجد من بينها 10 أعداد أولية بالضبط .
- 5) اثبت أن من بين أي 51 عدد صحيح نختارهم عشوائياً من بين الأعداد $1, 2, \dots, 100$ يوجد عدداً أوليان نسبياً .
- 6) بفرض $a > b > c > d > 0$ أعداد صحيحة تحقق أن $a^2 + ac - c^2 = b^2 + bd - d^2$. اثبت أن $ab + cd$ عدد مؤلف .
- 7) (IMO Longlists 1966) : إذا كان a, b عددين طبيعيين . اثبت أن $a!b! \mid (a+b)!$.
- 8) بفرض $m \geq n \geq 1$. اثبت أن $\frac{\gcd(m, n)}{m} \binom{m}{n}$ عدد صحيح .
- 9) بفرض أن $(m, n) = 1$. اثبت أن $m \mid \binom{m+n-1}{n}$.
- 10) اثبت أن المعادلة $x!y! = z!$ لها عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة الموجبة (x, y, z) حيث $x < y < z$.