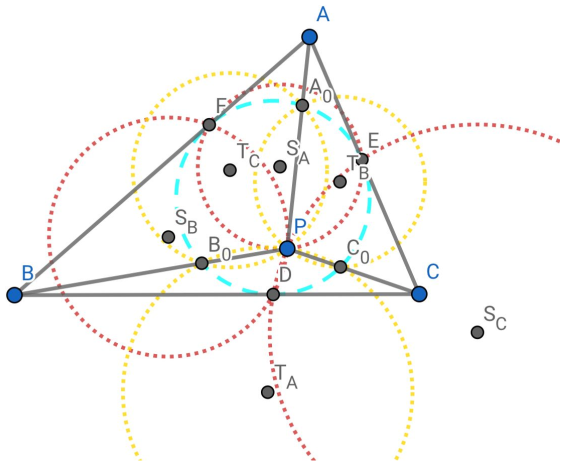
(Romania TST 2022 P3) لدينا المثلث ΔABC، و γ دائرته الداخلية التي تمس أضلاعه BC, CA, AB في D, E, F تواليًا، تم اختيار نقطة عشوائية P داخل γ لنأخذ نقاط تقاطع القطع AP, BP, CP مع γ في A_0, B_0, C_0. الآن نتوحش: عرف S_A, S_B, S_C كمراكز الدوائر PEF, PFD, PDE تواليًا، ثم نعرف مراكز الدوائر $PB_0C_0, PC_0A_0, PA_0B_0$ بالنقاط T_A, T_B, T_C. أثبت أن المستقيمات T_AS_A, T_BS_B, T_CS_C تشترك في نقطة.

الحل:



من نظرية ديسارغ، يصبح المطلوب يكافئ إثبات أن $S_AS_B \cap T_AT_B = O_C$ وأمثالها من النقاط على استقامة واحدة. ولكن من تعريف النقاط S, T فإن O_A, O_B, O_C تصبح مراكز الدوائر الحيطة بالمثلثات A_0PD, B_0PE, C_0PF (نسميها -للتسهيل- ψ_a, ψ_b, ψ_c) ولأن P نقطة مشتركة بين هذه الدوائر فإن المطلوب يضمحل لإثبات أن للدوائر المحور المشترك ذاته، والذي يكافئ إثبات أن محاورها المشتركة مثنى مثنى تتقاطع في أكثر من نقطة. من المحاور المشتركة للدوائر γ, ψ_b, ψ_c فإن $B_0E \cap C_0F$ يقع على محور ψ_b, ψ_c، ولكن من التمهيدية نعرف أن $C_0F \cap B_0E \in A_0D$ والذي بطريقة مشابهة نثبت أنه على محوري ψ_c, ψ_a و ψ_a, ψ_b.

$\square$

(التمهيدية) في المثلث ΔABC، ودائرته الداخلية γ التي تمس أضلاعه BC, CA, AB في D, E, F تواليًا، تم اختيار نقاط عشوائية X, Y, Z على γ، أثبت أن AX, BY, CZ تشترك في نقطة إذا وفقط إذا كانت DX, EY, FZ تشترك في نقطة.