النقاط المتحركة

Moving Points

عبدالكريم السالم

دائماً ما نجد أسئلة في المسابقات القوية فيها نقطة متحركة على مستقيم أو دائرة ، ويكون المطلوب إثبات عبارة معينة ، مثل مستقيم يمر في نقطة ثابتة ، أو أن نقطة أخرى تتحرك هي أيضاً على مستقيم ، وتكون المسألة تافهة عند وضع النقطة المتحركة في وضعية خاصة . في هذا الملف ندرس طريقة تفكير وأسلوب لحل هذه المسائل العنيدة في بعض الأحيان ، والتي تكون الرؤية فيها واضحة وبديهية بعض الشيء ، وهو سلاح قوي جداً نستفيد منه في المسابقات . ونبدا بالتعريف التالي المألوف لنا :

النسبة التبادلية (Cross Ratio) :

لتكن النقاط A, B, C, D أربعة نقاط على مستقيم (أو دائرة) ، فإن النسبة التبادلية لهم تكتب على الصورة :

$$(A, B; C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

الاسقاط (Projection) :

افترض أن النقاط A, B, C, D على مستقيم λ (أو دائرة ω) ، و P نقطة في مستوى المستقيم ولا تقع عليه (أو في مستوى الدائرة وقد تقع عليها) ، ولدينا مستقيم آخر في المستوى l ، المستقيمات PA, PB, PC, PD تقطع λ (أو ω) في A_1, B_1, C_1, D_1 ، فهذا يسمى "اسقاط l (أو ω) على λ عبر مركز النظر P" ، والمستقيمات PA, PB, PC, PD تنتمي إلى حزمة المستقيمات في المستوى المارة في P ، وعلاوة على ذلك ، $(A, B; C, D) = (PA, PB; PC, PD) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$.

الآن نعرف المفهوم التالي :

التحويل الاسقاطي (Projective Transformation) :

نعرف ζ على أنها مجموعة الـ"أشياء" التي نستطيع حساب النسبة التبادلية عليها ، مثل الدوائر والمستقيمات والحزم .

التحويل الاسقاطي ونرمز له بالرمز $f : \varrho_1 \to \varrho_2$ بحيث $\varrho_1, \varrho_2 \in \zeta$ ، هو عبارة عن تركيب من الاسقاطات ، يرسل نقاط من ϱ_1 إلى ϱ_2 بعد أكثر من اسقاط . أي ببساطة أي تحويل هندسي يحافظ على النسبية التبادلية من ϱ_1 إلى ϱ_2 .

الآن مع نظرية قوية جداً :

ليكن f, g تحويلان اسقاطيان من ϱ_1 إلى ϱ_2 ، ونريد إثبات أنهما في النهاية ، يخرجان بنفس النقاط ، أي $f(X) = g(X)$ لكل النقاط X على ϱ_1 ، يكافئ إثبات وجود ثلاث نقاط A_1, A_2, A_3 على ϱ_1 بحيث $f(A_i) = g(A_i)$ لكل $i = 1,2,3$.

لاحظ قوة النظرية السابقة في أن الانعكاس حول مستقيم ثابت ، أو الدوران بزاوية ثابتة وتركيبهما كلها تعد من التحويلات الاسقاطية ، وقلما تخلو مسائل الأولمبياد من تعريفات الانعكاس والدوران وغيره ، وبفرض أننا نريد إثبات أن هناك مستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة في مسألة ما ، ونعرف أنه هناك تحويلان اسقاطيين يرسلان النقطة المتحركة في المسألة إلى نقطة التقاطع تلك ، نريد إثبات أن التحويلين منطبقين ، بكل بساطة نأخذ ثلاث حالات تافهة كأن تكون النقطة (إذا كانت تتحرك على ضلع المثلث عند أحد الرأسين ، ثم حالة أخرى بسيطة كفيلة بإنهاء المسألة بالكامل!

مثال 1 (Serbia) : I هو المركز الداخلي للمثلث $\triangle ABC$ ، اخترنا النقطتين P, Q على القطعتين BI, CI بحيث $2\angle PAQ = \angle BAC$. إذا كانت D نقطة تماس الدائرة الداخلية مع BC ، أثبت أن $\angle PDQ = 90°$.

مثال 2 (IMO) : في المثلث $\triangle ABC$ ، I مركزه الداخلي و Γ دائرته المحيطة ، AI يقطع Γ في D .
لتكن E نقطة على القوس $B\overset{\frown}{D}C$ ، و F على القطعة BC بحيث :

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC \ .$$

إذا كانت G هي منتصف القطعة IF ، أثبت أن EI و DG يتقاطعان على Γ .

لاحظ أن التعاكس تحويل اسقاطي أيضًا! وقد نحتاجه في إثبات أن تحويل معين اسقاطي ، انظر المثال التالي :

مثال 3 : لتكن النقطتان P, Q مترافقتين زاويًا في المثلث $\triangle ABC$ ، النقطة X مسقط Q على BC . الدائرة التي قطرها PA تقطع $\odot(ABC)$ في $K \neq A$. AQ يقطع $\odot(ABC)$ في $T \neq A$. أثبت أن النقاط K, X, T على استقامة واحدة .

نظرية عجيبة (Steiner Conic) :
ليكن f تحويل اسقاطي يرسل الحزمة ϱ_u والتي رأسها U إلى الحزمة ϱ_v والتي رأسها V . إذن العبارة $f(UV) = UV$ تكافئ وجود مستقيم ρ بحيث $l \cap f(l) \in \rho$ لكل $l \in \rho \neq UV$.

والأعجب في مقابلها المثنوي :
ليكن f تحويل اسقاطي يرسل المستقيم u إلى المستقيم v . إذن العبارة $f(u \cap v) = u \cap v$ مكافئة لوجود نقطة C بحيث المستقيم الواصل بين $U, f(U)$ يمر في C دائمًا لكل $U \in u$.

مثال 4 : لتكن P نقطة على المستقيم BC من المثلث $\triangle ABC$ ، الدائرة التي قطرها BP تقطع الدائرة المحيطة بالمثلث APC مرة أخرى في Q . لتكن M نقطة تقاطع PQ و AC ، و H نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث $\triangle ABP$. أثبت أن المستقيم MH يمر في نقطة ثابتة عند حركة P على BC .

تمهيدية : معطى المستقيمين a, b ، والتحويل الاسقاطي $f : a \to b$ بحيث $f(\infty_a) = \infty_b$ ، إذن المحل الهندسي للنقاط P التي تحقق أن $\angle(XA, a) = \alpha$ و $\angle(Xf(A), b) = \beta$ بحيث α, β ثابتان ، و $A \in a$ هو مستقيم .

مثال 5 (RMM) : ليكن $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين فيه $AB \parallel CD$. لتكن E منتصف AC . لتكن ω و Ω الدائرتين ABE و CDE تواليًا . لتكن P نقطة تقاطع المماس من A إلى ω ، مع المماس من D إلى Ω . أثبت أن PE يمس Ω .

مثال 6 : معطى المثلث $\triangle ABC$ و H نقطة تقاطع ارتفاعاته . ω دائرة BHC ، واخترنا النقطة P تتحرك على ω . المستقيمين BP و CP يقطعان كل من AC و AB في X و Y تواليًا . أثبت أن الدوائر $AXPY$ تمر في نقطة ثابتة .

تمارين متنوعة :

1 (Sharygin) : لتكن النقطة D على المتوسط AM في المثلث $\triangle ABC$ ، المماسان من B, C إلى دائرة $\odot(BDC)$ يتقاطعان في K . افترض أن D' المرافق الزاوي لنقطة D في $\triangle ABC$. أثبت أن $AK \parallel DD'$.

2 (USA TST) : لتكن M و N منتصفي AB و AC في المثلث $\triangle ABC$. لتكن X نقطة متحركة على المماس من A إلى $\odot(ABC)$. ولتكن ω_B الدائرة المارة في B و M وتمس MX ، وبالمثل نعرف ω_C . أثبت أن ω_B و ω_C يتقاطعان على المستقيم BC .

3 : ليكن AB قطر الدائرة ω . l هو المماس من B إلى ω . خذ النقطتين C و D على l على جهتين مختلفة من B . النقطتين E و F هما تقاطعي AC و AD مع ω تواليًا . و G و H هما تقاطعي ω مع CF و DE تواليًا . أثبت أن $AG = AH$.

4 (GOWACA) : لتكن النقطة K في مستوى المثلث $\triangle ABC$ والذي مركز دائرته الداخلية هو I . لتكن النقطة P هي انعكاس A حول KI ، ولتكن Q تقاطع KI الثاني مع $\odot(BIC)$ ، أثبت أن المستقيمات AI, BC, PQ تشترك في نقطة واحدة .

5 : في المثلث $\triangle ABC$ ، $AB > AC$ ، و H نقطة تقاطع ارتفاعاته . النقطة D داخل المثلث بحيث $DB = DC$. ولتكن E, F نقطتي تقاطع BD, CD مع CA, AB . $EF \cap BC = K$. نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث $\triangle DBC$ هي X . أثبت أن $HX \perp AK$.

6 : معطى المثلث $\triangle ABC$ ، النقطة D متحركة على ضلعه AB . النقطة I مختارة على منصف زاوية $\angle ACB$ ، المستقيمين AI, CI يقطعان $\odot(ACD)$ ثانية في P, Q . بالمثل المستقيمين BI, CI يقطعان $\odot(BCD)$ ثانية في R, S . أثبت أنه إذا كان $P \neq Q$ و $R \neq S$ ، فإن المستقيمات AB, PQ, RS تشترك في نقطة واحدة أو متوازية .

7 : لتكن (O) دائرة و l مستقيم . ليكن العمود من O على l يقطع (O) في A, B . نختار النقطتين P, Q على (O) ، لدينا $PA \cap l = X_1, PB \cap l = X_2$ ، و $QA \cap l = Y_1$ و $QB \cap l = Y_2$. أثبت أن الدائرتين $\odot(AX_1Y_1), \odot(AX_2Y_2)$ تتقاطعان على (O) .

8 (Hadi) : في المثلث $\triangle ABC$ ، H نقطة تقاطع ارتفاعاته و O مركز دائرته المحيطة ، بفرض أن K منتصف AH . خذ النقطة الاختيارية I على منصف زاوية $\angle BAC$. وليكن مسقطي I على AB, AC هما F, E تواليًا . أثبت أن انعكاس K على EF يقع على OI . (تحدي : نستطيع إثبات نظرية فيورباخ عند أخذ الحالة الخاصة أن I مركز الدائرة الداخلية واستعمال التمرين كتمهيدية!) .

9 : الشيفيان AD, BE, CF يتقاطعون في النقطة P في المثلث $\triangle ABC$ ، خذ O المركز المحيط و Q المرافق الزاوي لنقطة P في $\triangle ABC$. العمود من A على EF يقطع المستقيم OD في X . أثبت أن $QX \perp BC$.

10 : في المثلث $\triangle ABC$ والنقطة P داخله . ليكن $\triangle DEF$ مثلث مواقع النقطة P . النقطة X_A متحركة على BC ، وليكن X_AY_B, X_AY_C قطعتين موازيين لكل من DE, DF تواليًا بحيث $Y_B, Y_C \in AB, AC$ تواليًا . أثبت أن الدوائر $\odot(AY_BY_C)$ تمر في نقطة ثابتة ، تحديدًا $\odot(AEF) \cap \odot(BPC)$.

11 : لدينا الدائرتين ω_1, ω_2 المتقاطعتين في A, B ، لدينا النقطتين P على ω_1 و Q على ω_2 بحيث $\angle PAB = \angle QAB$. أثبت أن الدوائر $\odot(APQ)$ تمر في نقطة ثابتة .

12 (Yusif) : لدينا الرباعي الدائري $ABCD$ فيه AC قطر للدائرة . اختر وتر EF موازٍ للوتر BD . النقطتين P, Q تقاطع المستقيم AE, AF مع المستقيم CB, CD تواليًا . أثبت أن منتصف القطعة PQ يتحرك على مستقيم .

13 : المثلث $\triangle ABC$ منفرج في $\angle B$ ، و $BA \neq BC$. الدائرة ω هي المحيطة ومركزها O . خذ N منتصف القوس $A\overset{\frown}{B}C$. الآن $\odot(BON) \cap AC = X, Y$ ، و $BX \cap \omega = p \neq B$ ، و $BY \cap \omega = Q \neq B$. أثبت أن PQ يمر في انعكاس N حول AC .

14 : (O) هي الدائرة المحيطة في المثلث $\triangle ABC$. المماس إلى (O) من A يقطع BC في P . النقطة E اختيارية على PO ، والنقطة D على BE بحيث $AD \perp AB$. أثبت أن $\angle EAB = \angle ACD$.

15 : لدينا المثلث $\triangle ABC$ دائرته المحيطة (O) ودائرته الداخلية (I) . النقطة X متحركة على BC . المستقيم المار في I معامداً IX يقطع المماس لـ(I) الموازي لـBC في Y . النقطة Z هي تقاطع AY مع (O) . بفرض أن T نقطة تماس الدائرة المتداخلة المقابلة للرأس A مع (O) ، أثبت أن X, Z, T على استقامة واحدة .

16 : AA_1 منصف في المثلث $\triangle ABC$. اختيرت النقطتين D, F على BC بحيث $DA_1 = FA_1$. المستقيم l يمر في A_1 ويقطع المستقيمين AB, AC في B_1, C_1 . أوجد المحل الهندسي لنقاط التقاطع $B_1D \cap C_1F$.

17 (BMO) : في المثلث $\triangle ABC$ ، $AB < AC$. لتكن ω دائرة تمر في B, C و A تقع داخل ω . النقطتين X, Y تقعان على ω بحيث $\angle BXA = \angle AYC$. افترض أيضاً أن كل من C, X تقعان على جهتين مختلفتين من المستقيم AB كما أن B, Y تقعان على جهتين مختلفتين من المستقيم AC . أثبت أن المستقيمات XY تمر في نقطة ثابتة .

18 (IMO Shortlist) : ليكن المثلث $\triangle ABC$ حاد الزوايا . اعتبر النقطتين E, F على AC, AB تواليًا ، M منتصف EF . ليكن العمود المنصف لـEF يقطع BC في K . العمود المنصف لـ

MK يقطع AC, AB في S, T . يقال أن (E, F) مثير إذا كان الرباعي $KSAT$ دائري . افترض أن الزوجين $(E_1, F_1), (E_2, F_2)$ مثيران ، أثبت أن : $\frac{F_1F_2}{AC} = \frac{E_1E_2}{AB}$.

19 (Muath) : أخذنا النقطتين X, Y على الضلعين AB, AC من المثلث $\triangle ABC$ بحيث النقاط B, X, C, Y على دائرة واحدة . لتكن ω_B هي الدائرة المارة في B, X وتمس BC ، وبالمثل نعرف ω_C . لتكن ω_B تقطع $\odot (ABC)$ ثانية في M ، ولتكن ω_C تقطع $\odot (ABC)$ ثانية في N . ليكن $P = MX \cap NY$. أثبت أن P تتحرك على مستقيم ثابت عند حركة X, Y .

20 (تحدي التحدي) : ليكن $\triangle ABC$ مثلثًا و O مركز دائرته المحيطة و I مركز دائرته الداخلية . لتكن X, Y, Z منتصفات AI, BI, CI تواليًا و K_a, K_b, K_c نقاط تقاطع أشباه المتوسطات في المثلثات BIC, CIA, AIB تواليًا . أثبت أن XK_a, YK_b, ZK_c تتقاطع في نقطة على OI .

21 (IMO Shortlist) : ليكن $\triangle ABC$ مثلث دائرته المحيطة ω و المستقيم l لا يقطع ω . لتكن P مسقط مركز ω على l . الأضلاع BC, CA, AB تقطع l في النقاط X, Y, Z تواليًا . أثبت أن الدوائر المحيطة بالمثلثات APX, BPY, CPZ إما تشترك في نقطة غير P أو أنها متماسة في P .

22 (BMO) : ليكن المثلث $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع وحاد الزوايا . لتكن النقطتين X, Y تقعان على القطعة BC بحيث $\angle BAX = \angle CAY$. افترض أن :

- النقطتان K, S هما مسقطي B على المستقيمين AX, AY تواليًا .
- النقطتان T, L هما مسقطي C على المستقيمين AX, AY تواليًا .

أثبت أن ST, KL, BC يشتركون في نقطة .

23 (Moscow Math Olympiad) : في المثلث $\triangle ABC$ ، خذ النقطتين P, Q على ضلعيه AC, AB تواليًا بحيث $PC = QB$. ليكن H_b مركز ارتفاعات المثلث $\triangle ABP$ وH_c مركز ارتفاعات $\triangle ACQ$. أثبت أن H_bH_c يعامد منصف زاوية $\angle A$ في المثلث $\triangle ABC$.

24 (APMO) : في المثلث $\triangle ABC$ القائم في B ، أخذنا النقطة D على BC . ليكن منتصف القطعة AD هو النقطة E . بفرض أن F نقطة تقاطع الدائرتين المحيطتين بالمثلثين ACD, BDE غير D ، أثبت أن المستقيم EF يمر في نقطة ثابتة لا تعتمد على مكان D على BC .

25 (USMCA) : معطى رباعي محدب $ABCD$ ، والدائرتين ω_A, ω_B الداخليتين للمثلثين $\triangle ACD, \triangle BCD$ ومركزيهما I, J . المماس الخارجي (غير CD) للدائرتين ω_A, ω_B يمس ω_A في K و ω_B في L . أثبت أن AK, BL, IJ تشترك في نقطة وحيدة .

26 (IMO Shortlist) : خذ D مسقط الرأس A على خط أويلر للمثلث ABC . الدائرة ω والتي مركزها S تمر في A, D وتقطع AB, AC في X, Y تواليًا . أثبت أن مركز الدائرة المحيطة للمثلث $\odot (XSY)$ يقع على العمود المنصف لمنتصف BC ومسقط A على BC .