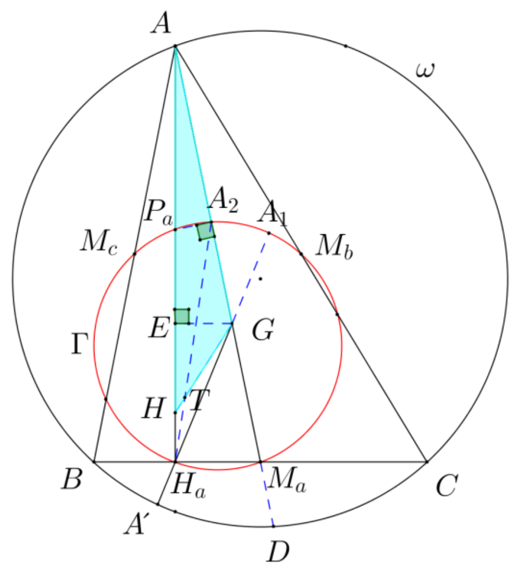
تمرين الدبيسي

ليكن ABC مثلث حاد مختلف الأضلاع، G, H نقطة تقاطع متوسطاته، ونقطة تقاطع ارتفاعاته تواليًا. ليكن الشعاع الذي بدايته G ويمر بمسقط A على BC يقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC في A'. عرفنا B', C' بطريقة مشابهة.

أثبت أن AA', BB', CC', GH يتقاطعون في نقطة واحدة.

الحل: لتكن M_a, M_b, M_c, P_a هي منتصفات BC, CA, AB, AH تواليًا، ω, Γ هما الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و دائرة التسع نقاط له. ليكن GH_a يقطع Γ في A_1، AG يقطع ω, Γ في D, A_2. بطريقة مشابهة نعرف النقاط B_1, B_2, C_1, C_2.



بما أن المحاكاة $\hbar(G, -1/2)$ ترسل A إلى M_a، B إلى M_b، C إلى M_c، ومن ثم ترسل ω إلى Γ. إذن المحاكاة $\hbar$ ترسل A' إلى A_1، وبالتالي ترسل AA' إلى M_aA_1، وأيضاً ترسل BB', CC' إلى M_bB_1, M_CC_1، كما ترسل GH إلى نفسه، و D إلى A_2. ويصبح المطلوب إثبات أن $M_aA_1, M_bB_1, M_CC_1, GH$ يتقاطعون في نقطة واحدة. ولكن للأسف الوضع ليس أحسن حالًا، لأن وضع A_1 ومثيلاتها مازال مبهمًا.

لذا دعنا نأخذ التحويل الهندسي $\Im$ وهو عبارة عن تعاكس حول دائرة مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{GH_a \cdot GA_1}$ متبوعًا بانعكاس حول G. الآن $\Im$ يرسل A_1 إلى H_a، ويرسل M_a إلى A_2. ويرسل المستقيم A_1M_a إلى الدائرة (GA_2H_a)، كما يرسل المستقيم GH إلى نفسه .

يتحول المطلوب الآن إلى إثبات أن الدوائر $(GA_2H_a), (GB_2H_b), (GC_2H_c)$ تتقاطع في نقطة أخرى على GH

(غير G). وذلك يكافئ أن تلك الدوائر متحدة المحور الأساسي (coaxal) والذي هو GH. من الواضح أن G متساوية القوة بالنسبة للدوائر الثلاثة، يكفي إيجاد نقطة أخرى على GH تحقق ذلك.

سنثبت أن تلك النقطة هي T نقطة تقاطع A_2H_a مع GH. لأنه لو تقاطع $A_2H_a, B_2H_b, C_2H_C, GH$ في T، سيكون $A_2T \cdot TH_a = B_2T \cdot TH_b = C_2T \cdot TH_C,$ يساوي قوة النقطة T بالنسبة ل Γ.

الآن يكفي إثبات أن T نقطة تقاطع A_2H_a مع GH تجعل HT / TG مقدار متماثل بدلالة a,b,c أضلاع المثلث ABC.

من نظرية مينيلاوس في المثلث AGH والقاطع A_2TH_a نحصل على: $1 = \frac{AA_2}{A_2G} \cdot \frac{GT}{TH} \cdot \frac{HH_a}{H_aA}$.

بما أن P_a تقع على Γ، وبأخذ E على AH بحيث $GE \perp AH$. ولأن P_aM_a قطر في Γ، إذن $\angle P_aA_2M_a = 90°$، إذن P_aA_2GE دائري (لأن به زاويتان متقابلتان متكاملتان).

إذن $AP_a \cdot AE = AA_2 \cdot AG$، ومنها $\frac{1}{2}AH \cdot \frac{2}{3}AH_a = AA_2 \cdot AG$.

من جهة أخرى لدينا $GA_2 = \frac{1}{2}GD$ (من المحاكاة $\hbar(G,-1/2)$، والتي ترسل D إلى A_2).

الآن نعيد كتابة معادلة مينيلاوس كالتالي: $1 = \frac{AA_2}{\frac{1}{2}GD} \cdot \frac{GT}{TH} \cdot \frac{HH_a}{H_aA}$،

ومنها $1 = \frac{AA_2 \cdot AG}{\frac{1}{2}GD \cdot AG} \cdot \frac{GT}{TH} \cdot \frac{HH_a}{H_aA}$،

ومنها $1 = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot \frac{2}{3}AH_a}{\frac{1}{2}GD \cdot AG} \cdot \frac{GT}{TH} \cdot \frac{HH_a}{H_aA}$،

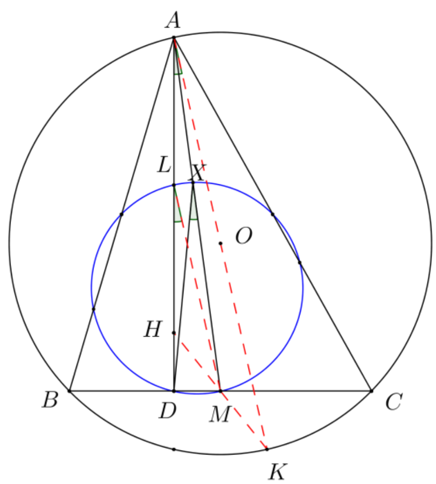
ومنها $\frac{2(R^2 - OH^2)}{3(R^2 - OG^2)} = \frac{2p(H,(O))}{3p(G,(O))} = \frac{2AH \cdot HH_a}{3GD \cdot AG} = \frac{HT}{TG}$.

حيث $p(H,(O))$ هو قوة النقطة H بالنسبة للدائرة (O)، وبالتالي HT / TG مقدار متماثل، ونكون قد انتهينا.

حل آخر:

تمهيدية: ليكن ABC مثلثًا مختلف الأضلاع، فيه H نقطة تقاطع ارتفاعاته AD, BE, CF ، و AM, BN, CP متوسطاته. الدائرة (MNP) تقطع AM, BN, CP في X, Y, Z تواليًا. أثبت أن $(ADX), (BEY), (CFZ)$ تتقاطع على خط أويلر للمثلث ABC .

برهان التمهيدية: لتكن O المركز المحيط للمثلث ABC ، AK قطر في الدائرة المحيطة، L منتصف AH . دون فقد العمومية نفرض $\angle B > \angle C$.



الدائرة (MNP) هي دائرة التسع نقاط للمثلث ABC ، وهي تمر ب L ، علاوة على ذلك L, K منتصفا AH, KH تواليًا. إذن $LM \parallel AK$ ، وبالتالي $\angle MXD = \angle DLM = \angle DAO = (\angle B - \angle C) / 2$.

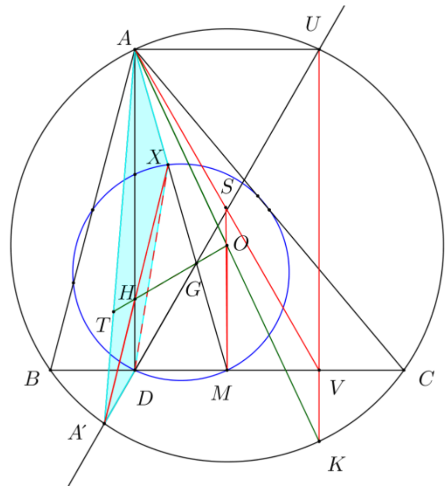
بسهولة نستنتج أن $\angle OAX = \angle ADX$. إذن AO مماس للدائرة (ADX). إذن قوة O بالنسبة لتلك الدائرة هي $AO^2 = R^2$. بالمثل نثبت أن قوة O بالنسبة للدائرتين $(BEY), (CFZ)$ هي R^2 .

من جهة أخرى قوة H بالنسبة للدوائر الثلاثة متساوية، لأن $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

إذن الدوائر الثلاثة متحدة المحور (أي تتقاطع في نقطتين بالضبط) وهو خط أويلر للمثلث ABC .

نعود للتمرين الأصلي

لتكن ارتفاعات AD, BE, CF المثلث ABC ، و AM, BN, CP متوسطاته. الدائرة (DEF) تقطع AM, BN, CP في X, Y, Z تواليًا، دون فقد العمومية نفرض $\angle B > \angle C$.



بفرض الدائرة (AXD) تقطع الدائرة (ABC) في A'' ، سنثبت أولًا أن X,H,A'' على استقامة واحدة، ثم سنثبت أن $A''=A'$.

بأخذ التحويل الهندسي $\Im$ وهو عبارة عن تعاكس حول دائرة مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{AH\cdot HD}$ متبوعًا بانعكاس حول H . الآن $\Im$ يرسل A,B,C إلى D,E,F تواليًا والعكس صحيح، وبالتالي يرسل (ABC) إلى (DEF) والعكس ، وتحديدًا يرسل كل نقطة على إحدى الدائرتين إلى نقطة التقاطع الأبعد للمستقيم المار بالنقطة و H مع الدائرة الأخرى. ولأن $\Im$ سيرسل $A\leftrightarrow D$ ، فإنه سيرسل (AXD) إلى نفسها.

وبالتالي $\Im$ يرسل A'' إلى نقطة على (AXD) . ولكن A'' تقع على (ABC)، إذن $\Im$ يرسل A'' إلى نقطة على (DEF) . إذن صورة A'' هي X {نقطة تقاطع الدائرتين (AXD) و (DEF) }. إذن X,H,A'' على استقامة واحدة.

لدينا $AXDA''$ دائري، $\angle MXD=\angle AA''D=\angle ADU=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$ (حيث U على تقاطع $A''D$ مع (ABC)). بفرض AK قطر في (ABC)، UK يقطع BC في V ، بفرض AV يقطع $A''U$ في S . إذن $\angle AKU=\angle AA''U=\angle KAD$. إذن $AD \parallel UK$. بما أن $\angle AUK=90^\circ$ (لأن AK قطر في (ABC))، إذن $AUVD$ مستطيل. وينتج عن ذلك أن $BAUC$ شبه منحرف متطابق الساقين، سيكون OM محور تماثل للمستطيل وشبه المنحرف S (نقطة تقاطع قطري المستطيل) تقع عليه.

الآن من المثلث ADV نجد $SM \parallel AD$ ، $SM=\frac{1}{2}AD$ ، ولكن $OM=\frac{1}{2}AH$. إذن $SO=\frac{1}{2}DH$.

ليكن OH يقطع SD في G' . إذن $\triangle HDG'\sim\triangle OSG'$ ، وبالتالي $\frac{SO}{DH}=\frac{OG'}{HG'}=\frac{1}{2}$. إذن $G'=G$. وأخيرًا $A''D$ يمر ب G، وبالتالي $A''=A'$.

الآن باستخدام التمهيدية نجد أن الدوائر $(AXDA'),(BYEB'),(CZFC')$ متحدة المحور وهو OH. وبفرض OH يقطع AA' في T ، ستكون T متساوية القوة بالنسبة لتلك الدوائر الثلاث، وسيكون لها نفس القوة أيضًا بالنسبة للدائرة (ABC).

الآن بفرض BT يقطع الدائرة $(BYEB')$ في B''، سيكون $BT \cdot TB'' = AT \cdot TA'$. إذن $ABA'B''$ دائري. إذن B'' هي نقطة التقاطع الأخرى للدائرتين $(ABC),(BYEB')$. إذن $B'' = B'$. إذن T تقع على BB'، بالمثل نثبت أن T تقع على CC'، ونكون قد انتهينا.

على هامش التمرين:

- بالرغم أن التمرين يصعب أن يكون أحد مسائل IMO لأن ليس به نقطة متحركة وكل نقاطه ثابتة، إلا أنه من الصعب مهاجمته بالطرق الجبرية مثل حساب المثلثات أو الهندسة التحليلية (التي تكافئ الأعداد المركبة) ، مثلًا لو فكرنا نسهل وضع النقاط A,B,C بفرض $A=(0,a),B=(-b,0),C(c,0)$ سنتورط في معادلة الدائرة ويصبح من الصعب إيجاد إحداثيات A'. بينما لو سهلنا معادلة الدائرة وجعلناها $x^2+y^2=1$ ، ومن ثم $O=(0,0)$ ، يمكننا فرض النقاط A,B,C بالإستراتيجية التالية $A=(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}),B=(\frac{2b}{1+b^2},\frac{1-b^2}{1+b^2}),C=(\frac{2c}{1+c^2},\frac{1-c^2}{1+c^2})$ ، سيكون من الصعب إيجاد G,H_a ومن ثم A'.
- يصعب إثبات تقاطع AA',BB',CC',GH باستخدام مينيلاوس مباشرة بدون استخدام المحاكاة والتعاكس، ستكون التكلفة أعلى بكثير.
- ليس معنى أن التمرين ليس به نقطة متحركة أنه غير مفيد، أولًا لأنه مسموح في المسابقات الأخرى من ناحية، ومن ناحية أخرى ليس من الصعب عمل تمارين أصعب به نقطة اختيارية، على سبيل المثال لو افترضنا أن نقطة تتحرك بمواصفات ما ونتج عنها مثلثًا هذا المثلث المتغير سيحمل كل تلك الصفات.
- إليكم هذا التمرين من تأليفي (هو طبعًا في نفس منطقة السؤال):

ليكن ABC مثلث حاد مختلف الأضلاع، G نقطة تقاطع متوسطاته، M,N,P منتصفات أضلاعه BC,CA,AB تواليًا. ليكن الشعاع الذي بدايته G ويمر بنقطة D (مسقط A على BC) يقطع الدائرة (ABC) في X، الشعاع الذي بدايته D ويمر بنقطة G يقطع الدائرة MNP في Y ، الشعاع AG يقطع الدائرة (ABC) في Z . برهن أن $YX=YZ$.

أظن لديكم كل الأدوات لحله، وأرسلوا حلولكم.