第一次作业

2.1 用凸集的定义归纳

① 在 $k=3$ 时，设 $x_1, x_2, x_3 \in C$，并且 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=1$; $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \geq 0$

现证 $y=\theta_1 x_1+\theta_2 x_2+\theta_3 x_3 \in C$.

至少有一个 θ_i 不等于1（否则与 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=1$ 矛盾），不失一般性，假设 $\theta_1 \neq 1$，则

$y=\theta_1 x_1+(1-\theta_1)(u_2 x_2+u_3 x_3)$

其中 $u_2=\theta_2/(1-\theta_1)$，$u_3=\theta_3/(1-\theta_1)$

可知 $u_2, u_3 \geq 0$ 且 $u_2+u_3=\frac{\theta_2+\theta_3}{1-\theta_1}=\frac{1-\theta_1}{1-\theta_1}=1$

$\because$ C是凸集，且 $x_2, x_3 \in C$. 有 $u_2 x_2+u_3 x_3 \in C$

又 $\because x_1 \in C$ $\therefore y \in C$.

先证 $k=3$ 时的起始条件（用 $k=2$ 作为边界条件也可以）

② 假设 $k=n$ 时成立，即对 $\forall \theta_i \geq 0$, $i=1,\cdots,n$; $\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1$. $x_1, x_2, \cdots, x_n \in C$

有 $\theta_1 x_1+\cdots+\theta_n x_n \in C$

当 $k=n+1$ 时，对 $\forall \theta_i \geq 0$, $i=1,\cdots,n+1$. $\sum_{i=1}^{n+1}\theta_i=1$, $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in C$

至少存在 θ_i 不等于1，不失一般性，假设 $\theta_{n+1} \neq 1$，则

$y=\theta_{n+1}x_{n+1}+(1-\theta_{n+1})(u_1 x_1+\cdots+u_n x_n)$

其中 $u_i=\theta_i/(1-\theta_{n+1})$, $i=1,\cdots,n$

可知 $u_i \geq 0$, $i=1,\cdots,n$. 且 $\sum_{i=1}^{n} u_i=\frac{\theta_1+\cdots+\theta_n}{1-\theta_{n+1}}=1$

$\because$ C是凸集. $x_{n+1} \in C$. $\theta_1 x_1+\cdots+\theta_n x_n \in C$.

$\therefore y \in C$. 证毕.

2.2

(1) 证前半部分.

必要性：两个凸集的交集是凸的。因此，如果 C 是一个凸集，那么 C 与一条直线的交集也是凸的。

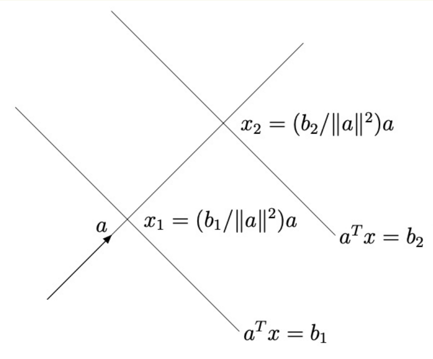
充分性：现在假设对于一个集合 C，它与任意直线的交集都是凸的，我们需要证明 C 是凸的。对于 C 中的任意两点 x, y，考虑通过这两点的直线 L。由于 $C \cap L$ 是凸的，因此对于所有 $0 \leq \theta \leq 1$，线段上的点 $\theta x + (1-\theta)y$ 必然在 $C \cap L$ 中，进而在 C 中。这证明了 C 是凸的。

(2) 证后半部分:

必要性：假设 A 是一个仿射集合，我们需要证明 A 与任意直线 L 的交集也是仿射的。取直线 L 上的两点 p, q 属于 $A \cap L$，因为 A 是仿射的，对于所有 θ，我们有 $\theta p + (1-\theta)q \in A$。同时，$\theta p + (1-\theta)q$ 显然也在直线 L 上，因此 $\theta p + (1-\theta)q \in A \cap L$。这说明 $A \cap L$ 是仿射的。

充分性：现在假设对于一个集合 A，它与任意直线的交集都是仿射的，我们需要证明 A 是仿射的。对于 A 中的任意两点 x, y，考虑通过这两点的直线 L。由于 $A \cap L$ 是仿射的，因此对于所有 θ，直线上的点 $\theta x + (1-\theta)y$ 必然在 $A \cap L$ 中，进而在 A 中。这证明了 A 是仿射的。

2.5



两个超平面之间的距离也是点 x_1 和 x_2 之间的距离.
这两个点是超平面和从原点出发并平行于法向量 a 的直线的交点.

$x_1 = (b_1/\|a\|_2^2)a$.　$x_2 = (b_2/\|a\|_2^2)a$

距离 $\|x_1 - x_2\|_2 = |b_1 - b_2|/\|a\|_2$

2.12 (a) 第一种:

2.12(1) 是凸集 $C=\{x\in R^n, \alpha\le a^Tx\le\beta\}$

取C中任意两点 x, y 对 $\forall\ 0<\theta<1$ 要证 $\theta x+(1-\theta)y\in C$

$\because x\in C,\ \therefore\ \alpha\le a^Tx\le\beta$

同理 $\alpha\le a^Ty\le\beta$

$\theta\alpha\le a^T\theta x\le\theta\beta$, $(1-\theta)\alpha\le a^T(1-\theta)y\le(1-\theta)\beta$

$\alpha\le a^T(\theta x+(1-\theta)y)\le\beta$

$\theta x+(1-\theta)y\in C$

第二种: 是两个半空间的交集，半空间是凸集，交集是保凸的.

第一种: $\vec{\alpha}$ 表示 α 为向量.

(b) 是凸集. 令 $C=\{x\in R^n \mid \alpha_i\le x_i\le\beta_i,\ i=1,\cdots,n\}$.

取 $\forall\ \vec{x},\vec{y}\in C$. 构造 $\vec{z}=\theta\vec{x}+(1-\theta)\vec{y}$. $0\le\theta\le1$

则 $\theta\vec{\alpha}\le\theta\vec{x}\le\vec{\beta}$.

$(1-\theta)\vec{\alpha}\le(1-\theta)\vec{y}\le(1-\theta)\vec{\beta}$.

$\therefore$ 有 $\vec{\alpha}\le\theta\vec{x}+(1-\theta)\vec{y}\le\vec{\beta}$.

则 $z\in C$. $\therefore$ 是凸集.

第二种: 类似(a). 是有限个半空间的交.

(c) 第一种:

(3) 是凸集 $C=\{x\in R^n: a_1^Tx\le b_1, a_2^Tx\le b_2\}$

对 $\forall\ x,y$ $\quad 0\le\theta\le1$. $\quad\theta x+(1-\theta)y\in C$

左右乘 $\quad a_1^T\theta x\le\theta b_1 \qquad a_1^T(1-\theta)y\le(1-\theta)b_1$

$a_2^T\theta x\le\theta b_2 \qquad a_2^T(1-\theta)y\le(1-\theta)b_2$

$a_1^T(\theta x+(1-\theta)y)\le b_1,\quad a_2^T(\theta x+(1-\theta)y)\le b_2$

$\theta x+(1-\theta)y\in C$ 成立

第二种: 类(a),(b). 两个半空间的交.

(d) 该题用到 2.7 的结论. 半空间的 Voronoi 描述

2.7 半空间的 Voronoi 描述。 令 a 和 b 为 $\mathbf{R}^n$ 上互异的两点。证明所有距离 a 比距离 b 近（Euclid 范数下）的点的集合，即 $\{x \mid \|x-a\|_2 \leqslant \|x-b\|_2\}$，是一个~~超平面~~半空间。用形如 $c^T x \leqslant d$ 的不等式进行显式表示并绘出图像。

∵ 范数一定是非负的，

$$\therefore \|x-a\|_2^2 \le \|x-b\|_2^2 \iff (x-a)^T(x-a) \le (x-b)^T(x-b)$$

$$\iff x^Tx - 2a^Tx + a^Ta \le x^Tx - 2b^Tx + b^Tb$$

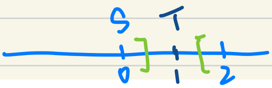
$$\iff 2(b-a)^Tx \le b^Tb - a^Ta$$

∴ 该集合为半空间

对 (d). $\bigcap_{y\in S}\{x \mid \|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2\}$.

是半空间的交集

(e) 不是.



解 不是凸集. 取集合

$$S=\{0,2\}, \quad T=\{1\}. \tag{32}$$

于是题干中的集合为

$$C=\{x : x \in(-\infty, 0.5] \cup[1.5,+\infty)\} \tag{33}$$

显然不是凸集. 因为我们取 C 中的两个点以及 θ 为

$$x=-1, \quad y=3, \quad \theta=0.5 \tag{34}$$

那么

$$0.5 x+0.5 y=1, \tag{35}$$

不在 C 中.

不是凸集举一反例即可.

(g) 是. 如果$\theta=1$, 则为半空间.

如果$\theta\neq1$, 则 $\{x \mid \|x-a\|_2 \le \theta\|x-b\|_2\}$ ↓范数非负性

$= \{x \mid \|x-a\|_2^2 \le \theta^2\|x-b\|_2^2\}$

$= \{x \mid (1-\theta^2)x^Tx - 2(a-\theta^2 b)^Tx + a^Ta - \theta^2 b^Tb \le 0\}$

不等式左右两边同除以 $1-\theta^2$.

$\Leftrightarrow \{x \mid (x-x_0)^T(x-x_0) \le R^2\}$

$x_0 = \dfrac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}$, $R = \left(\dfrac{\theta^2\|b\|_2^2 - \|a\|_2^2}{1-\theta^2} + \|x_0\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$x^Tx - 2\frac{(a-\theta^2 b)^Tx}{1-\theta^2} + \frac{a^Ta-\theta^2 b^Tb}{1-\theta^2} \le 0$$

$$\left\| x - \frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}\right\|_2^2 + \frac{a^Ta-\theta^2 b^Tb}{1-\theta^2} - \frac{\|a-\theta^2 b\|_2^2}{(1-\theta^2)^2} \le 0$$

$$\left\| x - \frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}\right\|_2^2 \le \underbrace{\frac{\|a-\theta^2 b\|_2^2}{(1-\theta^2)^2}}_{} + \frac{\theta^2 b^Tb - a^Ta}{1-\theta^2}$$

$\|x_0\|_2^2$

2.16

1. 考虑 S 中的任意两点 $z^1 = (x^1, y_1^1 + y_2^1)$, $z^2 = (x^2, y_1^2 + y_2^2)$

对 $0 \le \theta \le 1$, 给出新的点 $z^3 = \theta z^1 + (1-\theta)z^2 = \theta(x^1, y_1^1 + y_2^1) + (1-\theta)(x^2, y_1^2 + y_2^2)$ ↓ R^{m+n} 的向量加法

$= (\theta x^1 + (1-\theta)x^2, (\theta y_1^1 + (1-\theta)y_1^2) + (\theta y_2^1 + (1-\theta)y_2^2))$

因 S_1、S_2 是 R^{m+n} 中的凸集, 故

$(\theta x^1 + (1-\theta)x^2, \theta y_1^1 + (1-\theta)y_1^2) \in S_1$

$(\theta x^1 + (1-\theta)x^2, \theta y_2^1 + (1-\theta)y_2^2) \in S_2$

$\therefore z^3 \in S$.

2.30

加法.

(a) $\because$ $y-x \in K$. $v-u \in K$. K是凸锥.

$\therefore$ 锥组合 $(y-x)+(v-u) \in K$. $\therefore$ $x+u \preceq_K y+v$.

(b) 传递. $\because$ $y-x \in K$. $z-y \in K$. $\therefore$ 锥组合 $(y-x)+(z-y) = z-x \in K$ $\therefore$ $x \preceq_K z$.