第八章 博弈论(2)

——完全信息静态博弈

1.基本概念

1.1 定义：

完全信息静态博弈：所有参与者都知道自己以及对手的策略以及报酬，所有参与者同时行动

1.2 特点：

(i) 同时出招（不知对方所选策略），出招一次 (Determine strategies simultaneously) ;

(ii)知道博弈结构与游戏规则(Rules of the game)，也知道参赛者具有理性→共同知识(Common knowledge);

(iii) 不管是否沟通过，无法作出有拘束力之承诺(can't make binding commitment) →不合作博弈 (Non-cooperative games)。

1.3 基本要素

博弈 $\Gamma=(N, (S_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N})$ 的策略式包含三要素：

(1) 参赛者(players)： $i\in N=\{1, 2, 3,\ldots\ldots n\}$

(2) 策略(strategies)： $s_i\in S_i$＝参赛者 i 的可行(纯)策略集合，$i\in N$

策略组合(strategy profile) $s=(s_1,\ldots\ldots,s_n)=(s_i, s_{-i})$, $s_{-i}\in \underset{j\neq i}{\times} S_j$ 为对手的策

(3) 报酬(payoffs)：$U_i=U_i(s_i, s_{-i})$： $\underset{j\in N}{\times} S_j \to \Re$ 为报酬或效用函数（已具有偏好顺序）。

1.4 例

- 钱币配对(Matching Pennies)

		2	
		正面	反面
1	正面	1, -1	-1, 1
	反面	-1, 1	1 , -1

猜拳

		2		
		剪刀	石头	布
1	剪刀	0, 0	-1, 1	1, -1
	石头	1, -1	0, 0	-1, 1
	布	-1, 1	1, -1	0, 0

- 两性战争(Battle of Sexes)

		男	
		球赛	音乐会
女	球赛	1, 2	0 , 0
	音乐会	0 , 0	2 , 1

狩猎

		2	
		猎鹿	猎兔
1	猎鹿	2, 2	0, 1
	猎兔	1 ,0	1 , 1

囚徒困境：

		2	
		不认罪	认罪
1	不认罪	-1, -1	-8 , 0
	认罪	0 , -8	-5 , -5

2.占优策略和被占优策略

定义 2.1：在博弈$\Gamma=(N, (S_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N})$中，若对于任意$s_i' \neq s_i$,都有$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$,则称策略$s_i \in S_i$是参与者 i 的严格占优策略（strictly dominant strategy）。

解释：严格占优策略是指对于对手的所有策略来说，s_i给参与者 i 带来的效用都是最大的，因此如果严格占优策略是存在的，则我们应该可以看到参与者会选择这一策略。

例：囚徒困境

		2	
		不认罪	认罪
1	不认罪	-1, -1	-8 , 0
	认罪	0 , -8	-5 , -5

对于参与者 1 来说，认罪是其严格占优策略；对于参与者 2 来说，认罪也是其严格占优策略，所以均衡时，是（认罪，认罪）这一结果出现，但是我们都知道（不认罪，不认罪）是对双方都更好的结果，因此囚徒困境的例子告诉我们，当每个参与者都选择自己的最优策略时，这一理性行为所导致的结果并不一定是社会最优的。

例：

- 两性战争(Battle of Sexes)

		男	
		球赛	音乐会
女	球赛	1, 2	0 , 0
	音乐会	0 , 0	2 , 1

对于女生来说，当男生选球赛时，女生的最优策略是选球赛；当男生选择音乐会时，女生的最优策略是选音乐会；因此女生不存在严格占优策略；对于男生来说，情况相同，严格占优策略并不是对所有博弈都存在的，我们只是说，如果严格占优策略存在，则均衡时，应该参与者会选择严格占优策略，而对于严格占优策略不存在的情形，我们需要引入新的均衡观念去选择均衡。

定义 2.2： 在博弈 $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N})$ 中，若存在$s_i' \neq s_i$,使得$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$,则称策略$s_i \in S_i$是参与者 i 的严格被占优策略（strictly dominated strategy）,同时称s_i'严格占优于s_i。

例：

参与人2

参与人1		L	R
	U	1, −1	−1, 1
参与人1	M	−1, 1	1, −1
	D	−2, 5	−3, 2

对于参与者 1 来说，当 2 选 L 时，1 的最优策略是 U;当 2 选择 R 时，1 的最优策略是 M；因此参与者 1 不存在严格占优策略；对于参与者 2 来说，当 1 选择 U 时，2 的最优策略是 R；当 1 选择 M 时，2 的最优策略是 L；当 1 选择 D 时，2 的最优策略是 L，所以 2 也不存在严格占优策略。

对于参与者 1 来说，策略 D 被策略 U 和 M 严格占优；因此 D 是 1 的严格被占优策略。对于参与者 2 来说，不存在严格被占优策略。

定义 2.3：在博弈Γ＝(N, $(S_i)_{i\in N}$, $(U_i)_{i\in N}$)中，若存在$s_i' \neq s_i$,使得$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$,且对于某些$s_{-i} \in S_{-i}$，不等号严格成立，则称策略$s_i \in S_i$是参与者 i 的弱被占优策略（strictly dominated strategy）,同时称s_i'弱占优于s_i。

例

		参与人2	
		L	*R*
	U	5, 1	4, 0
参与人1	*M*	6, 0	3, 1
	D	6, 4	4, 4

对于参与者 1 来说，策略 M 被策略 D 弱占优，因此 M 是参与者 1 的弱被占优策略。

重复占优剔除法（Iterated Deletion of Strictly Dominated Strategies）：逐次删去严格被占优策略。

原因：严格被占优策略不会被选择。

例：囚徒困境

		2	
		不认罪	认罪
1	不认罪	-1, -1	-8 , 0
	认罪	0 , -8	-5 , -5

对于参与者 1 来说，不认罪是严格被占优侧略，因此删掉 1 的不认罪策略，得到：

		2	
		不认罪	认罪
1	~~不认罪~~	~~1, 1~~	~~8 , 0~~
	认罪	0 , -8	-5 , -5

则对于参与者 2 来说，选择认罪得到-8，选择不认罪，得到-5，所以此时 2 不认罪被严格占优，故可得

		2	
		~~不认罪~~	认罪
1	~~不认罪~~	~~1, 1~~	~~8 , 0~~
	认罪	~~0 , -8~~	-5 , -5

所以通过逐次删去严格被占优策略后，可以存活下来的只有（认罪，认罪）这一结果。

例：

			2	
		L	M	R
	U	4, 3	5, 1	6, 2
1	M	2, 1	8, 4	3, 6
	D	3, 0	9, 6	2, 8

参与者 2 的策略 M 会被 R 严格占优，因此剔除 2 的策略 M：

			2	
		L	~~M~~	R
	U	4, 3	~~5, 1~~	6, 2
1	M	2, 1	~~8, 4~~	3, 6
	D	3, 0	~~9, 6~~	2, 8

对于参与者 1 来说，M 和 D 都被 U 严格占优，因此剔除参与者 1 的 M 和 D：

			2	
		L	~~M~~	R
	U	4, 3	~~5, 1~~	6, 2
1	~~M~~	~~2, 1~~	~~8, 4~~	~~3, 6~~
	~~D~~	~~3, 0~~	~~9, 6~~	~~2, 8~~

对于 2 来说，R 被 L 严格占优，因此剔除 2 的策略 R：

		2		
		L	M	R
	U	4, 3	5, 1	6, 2
1	M	2, 1	8, 4	3, 6
	D	3, 0	9, 6	2, 8

最后只有（U，L）这一结果存活下来

允许混合策略

定义 2.2': 在博弈 $\Gamma=(N, (\Delta\{S_i\})_{i\in N}, (U_i)_{i\in N})$中，若存在$\sigma_i' \neq \sigma_i$,使得$u_i(\sigma_i',\sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i,\sigma_{-i}), \forall\sigma_{-i} \in \Delta\{S_{-i}\}$,则称策略$\sigma_i \in \Delta\{S_i\}$是参与者 i 的严格被占优策略（strictly dominated strategy）,同时称σ_i'严格占优于σ_i。

例：

		参与人 2	
		L	*R*
	U	10, 1	0, 4
参与人 1	*M*	4, 2	4, 3
	D	0, 5	10, 2

参与人 1 的策略 M 会被混合策略$\frac{1}{2}U+\frac{1}{2}D$严格占优，因此可剔除参与人 1 的策略 M，得到：

		参与人2	
		L	R
	U	10, 1	0, 4
参与人1	~~M~~	~~4, 2~~	~~4, 3~~
	D	0, 5	10. 2

以上的重复占优剔除法可以帮助我们先剔除一些参与者不会选择的策略。

3.纳什均衡

定义 3.1（纯策略纳什均衡）：策略组合$s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots s_N^*)$是一个纯策略的纳什均衡，当且仅当对于任意 i=1,2...N,都有$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i', s_{-i}^*), \forall s_i' \in S_i$。

定义 3.1'(混合策略的纳什均衡)：策略组合$\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots \sigma_N^*)$是一个混合策略的纳什均衡，当且仅当对于任意 i=1,2...N, 都有$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*), \forall \sigma_i' \in \Delta\{S_i\}$。

解释：给定所有参与人的策略，任一参与人均无诱因偏离此均衡。

例：囚徒困境

		2	
		不认罪	认罪
1	不认罪	-1, -1	-8 , 0
	认罪	0 , -8	-5 , -5

（认罪，认罪）为纳什均衡

例：

- 两性战争(Battle of Sexes)

		男	
		球赛	音乐会
女	球赛	1, 2	0 , 0
	音乐会	0 , 0	2 , 1

（球赛，球赛）和（音乐会，音乐会）为纳什均衡

例：

- 飚车族(Games of Chicken)

		2	
		对开	偏离
1	对开	-1, -1	2 , 0
	偏离	0 , 2	1 , 1

（偏离，对开）和（对开，偏离）为纳什均衡

命题 3.1：　在有限策略形式博弈中，经过重复占优剔除所得的一组策略组合 s^* 必然是纳什均衡。

混合策略的纳什均衡：

- 钱币配对(Matching Pennies)

			2	
			p 正面	1-p 反面
1	q	正面	1, -1	-1, 1
	1-q	反面	-1, 1	1 , -1

假设参与人 1 的混合策略为：以 q 的概率选正面；以 $1\text{-}q$ 的概率选反面；参与人 2 的混合策略为：以 p 的概率选正面；以 $1\text{-}p$ 的概率选反面。

给定参与人 2 的混合策略，对于参与人 1 来说：

若选择正面，则预期回报为 $p+(1-p)*(-1)=2p-1$;

若选择反面，则预期回报为 $p*(-1)+(1-p)=1-2p$;

因此对于参与人 1 来说，最大化问题为：

$$max_{q\in[0,1]} q(2p-1)+(1-q)(1-2p)$$

因此可得当$2p-1>1-2p$,即$p>0.5$时，$q=1$;当$p=0.5$时，$q\in[0,1]$；当$p<0.5$时, $q=0$;

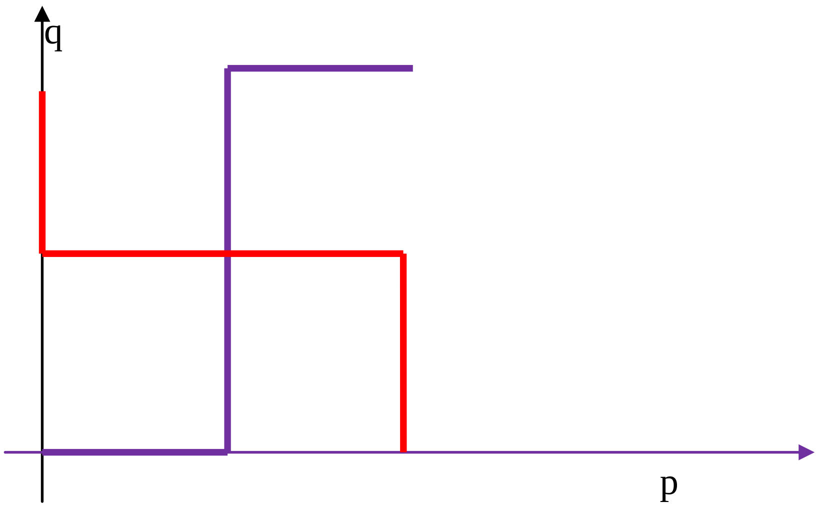
对于参与人 2 来说，给定参与人 1 的混合策略：

若选择正面，则预期回报为 $q*(-1)+(1-q)=1-2q$;

若选择反面，则预期回报为 $q+(1-q)*(-1)=2q-1$;

因此对于参与人 2 来说，当 $1-2q>2q-1$,即 $q<0.5$ 时，$p=1$;当 $q=0.5$ 时，$p\in[0,1]$;当 $q>0.5$ 时，$p=0$.

综上，可得：



所以得到混合策略的纳什均衡：参与人 1 的策略为以 0.5 概率选正，以 0.5 概率选反；参与人 2 的策略为以 0.5 概率选正，以 0.5 概率选反；

两性战争(Battle of Sexes)

			男	
			球赛	音乐会
			p	$1-p$
女	球赛	q	1, 2	0, 0
	音乐会	$1-q$	0, 0	2, 1

给定$(q, 1-q)$，男子的报酬是 $2q$ 或 $(1-q)$

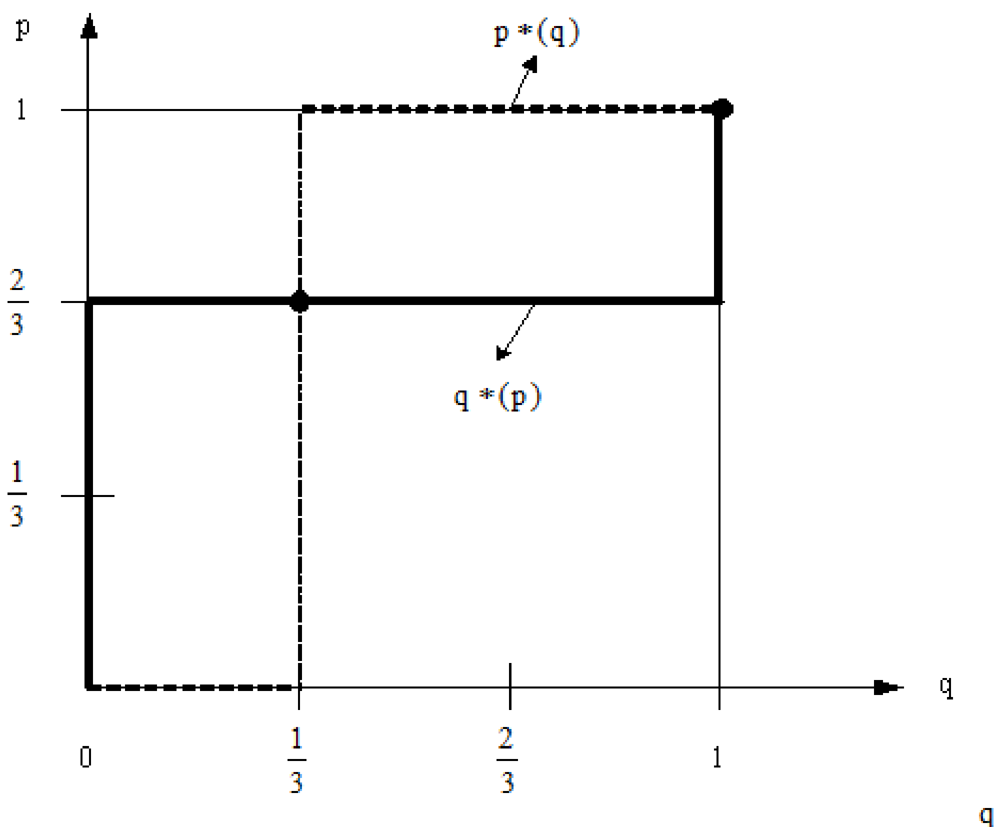
若 $2q=(1-q) \Rightarrow q=1/3$，则两策略的报酬相同。

$$\text{对男子来说}\left\{\begin{array}{l}\text{若 } q<1/3\text{，}2q<(1-q)\text{，则 } p^*=0\text{ 是最优反应。}\\ \text{若 } q=1/3\text{，则 } p^*\in[0,1]\text{ 是最优反应。}\\ \text{若 } q>1/3\text{，则 } p^*=1\text{ 是最优反应。}\end{array}\right\}$$

给定$(p, 1-p)$，女子的报酬是 p 或 $2(1-p)$

若 $p=2(1-p)\rightarrow p=2/3$，则两策略的报酬相同。

$$\text{对女子来说}\left\{\begin{array}{l}\text{若 } p<2/3\text{，}p<2(1-p)\text{，则 } q^*=0\text{。}\\ \text{若 } p=2/3\text{，则 } q^*=0\text{ 到 }1\text{。}\\ \text{若 } p>2/3\text{，}p>2(1-p)\text{，则 } q^*=1\text{，得到 } q^*(p)\text{是最优反应函数。}\end{array}\right.$$



3 个纳什均衡（*p,q*）=（*0,0*）,*(1,1),(2/3,1/3)*