第四章 不确定性下的选择

1. 基本概念

1.1 随机变量(Random Variable)

1.1.*a* 离散分布

$$\tilde{X}=\begin{cases}x_1,\text{以概率}p_1\\ x_{2,}\text{以概率}p_2\\ \quad\quad .\\ \quad\quad .\\ x_{n,}\text{以概率}p_n\end{cases}$$

$$p_1+p_2\ldots+p_n=1,0\le p_i\le 1,\forall i=1\ldots n$$

1.1.b 连续分布(详见概率论参考书)

1.2 预期值(Expected Value)

$$E[\tilde{X}]=p_1x_1+p_2x_{2,}+\cdots+p_nx_{n,}$$

1.3 方差(Variance)

$$\mathrm{Var}[\tilde{X}]=p_1(x_1-E[\tilde{X}])^2+p_2(x_2-E[\tilde{X}])^2+\cdots+p_n(x_n-E[\tilde{X}])^2$$

1.4 标准差(Standard Deviation)

$$Std[\tilde{X}]=\sqrt{Var[\tilde{X}]}$$

问题：怎么在不确定性下做选择？

例如：股票 1 的未来价格以概率 0.5 为 100 元，以概率 0.5 为 150 元；股票 2 未来价格以概率 0.5 为 300 元，以概率 0.5 为 0 元，选择哪只股票？

股票 1 的预期价格为 125 元；股票 2 的预期价格为 150 元。

股票 1 的方差为 1562.5，股票 2 的方差为 11250

股票 2 预期价格更高，但是方差更大。

2.预期效用

$$E[u(X)] = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_{2,}) + \cdots + p_n u(x_{n,})$$

3.对风险的偏好

3.1 定义：

(i)若$E[u(X)] \leq u(E(X))$,则称决策者为风险厌恶的(risk-averse)；若$E[u(X)] < u(E(X))$,则称决策者为严格风险厌恶的。

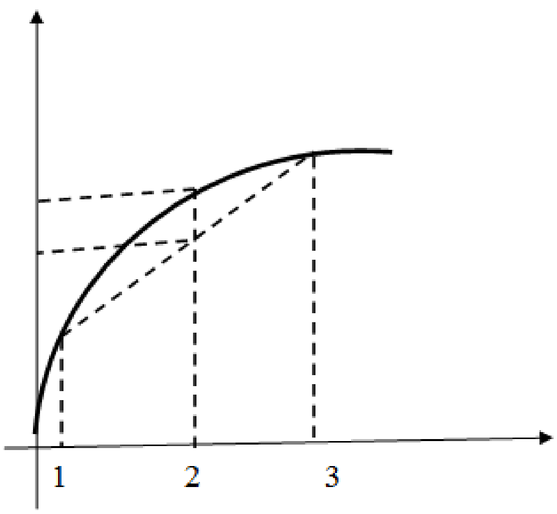
(ii)若$E[u(X)] = u(E(X))$，则称决策者是风险中性的(risk-neutral)；

(iii)若$E[u(X)] \geq u(E(X))$，则称决策者是风险偏好(risk-loving)的；若$E[u(X)] > u(E(X))$,则称决策者为严格风险偏好的。

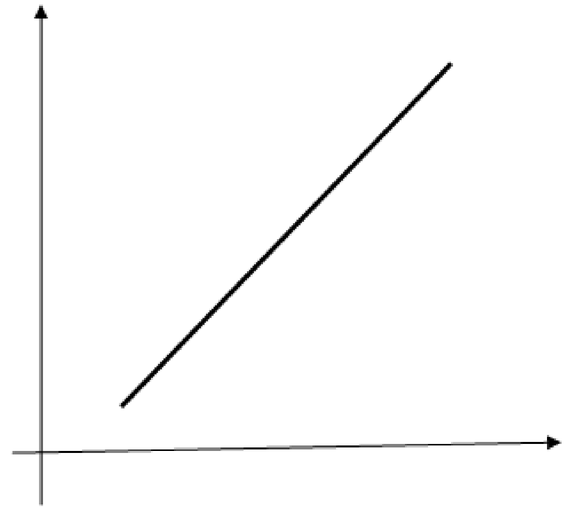
解释：我们是通过比较

$$\tilde{X} = \begin{cases} x_1, \text{以概率} p_1 \\ x_{2,} \text{以概率} p_2 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ x_{n,} \text{以概率} p_n \end{cases}$$

这一不确定的结果与确定的结果$E(X)$来定义决策者对于风险的偏好的，易得二者的预期值相同。若$E[u(X)] \leq u(E(X))$，说明决策者更喜欢确定的结果，所以风险厌恶；反之则风险偏好，如果$E[u(X)] = u(E(X))$，则说明对于二者无差异，则风险中性。



风险厌恶



风险中性

风险厌恶等价于$u(.)$是凹函数，严格风险厌恶等价于$u(.)$是严格凹函数；

风险中性等价于$u(.)$是线性函数；

风险偏好等价于$u(.)$是凸函数，严格风险厌恶等价于$u(.)$是严格凸函数。

4.资产组合的选择

假设有 2 种资产可供选择：无风险资产和风险资产，无风险资产每单位的价格为 1，未来回报为$R_F > 1$;风险资产的价格为 1，未来回报为以概率p为$R_S > R_F$,以概率 1-p 回报为 0.投资者的效用函数为$u(.)$，初始财富为 1.

设投资者购买α单位无风险资产，$(1-\alpha)$单位的风险资产，则预期效用为：$pu(\alpha R_F + (1-\alpha)R_S) + (1-p)u(\alpha R_F)$

则一阶条件可得：$pu'(\alpha R_F + (1-\alpha)R_S)(R_F - R_S) + +(1-p)u'(\alpha R_F)R_F = 0$

解释：多购买 1 单位的无风险资产可以导致预期效用升高$pu'(\alpha R_F + (1-\alpha)R_S)R_F + (1-p)u'(\alpha R_F)R_F$，但是会使得风险资产购买量下降 1 单位，

这会导致预期效用下降$pu'(\alpha R_F+(1-\alpha)R_S)R_S$，所以当购买无风险资产的的边际好处=边际坏处时取得最优解。

例 1：$u(x)=ax+b$

预期效用为：$pa(\alpha R_F+(1-\alpha)R_S)+(1-p)a(\alpha R_F)+b$

因此当$pa(R_F-R_S)+(1-p)aR_F>0$,即$R_F>pR_S$时，$\alpha=1$；$R_F<pR_S$时，$\alpha=0$；$R_F=pR_S$，α ∈ [0,1].

原因：风险中性只关心预期值

例 2：$u(x)=lnx$

$$p\frac{R_F-R_S}{\alpha R_F+(1-\alpha)R_S}+(1-p)\frac{R_F}{\alpha R_F}=0$$

可得：$\alpha=\frac{(1-p)R_S}{R_S-R_F}$

分析：p 越高，α越小，因为风险资产的预期值更高，所以选择更多的风险资产；R_F越高，α越大，因为无风险资产回报更高，应该购买更多的无风险资产；R_S越高，α越小，因为风险资产的预期值更高，所以购买更多的风险资产。