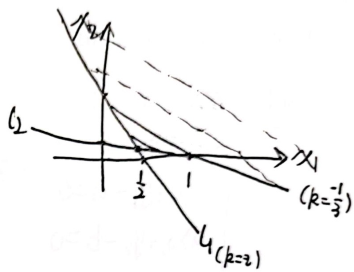
第三次作业

4. (P180. 4.1)

可行集为 $(0,\infty)(0,1)(\frac{2}{5},\frac{1}{5})(1,0)(\infty,0)$ 的凸包.

4. 可行集表现为右图



(a) 加入目标函数

可得最优点 $(\frac{2}{5},\frac{1}{5})$

最优集 $\{(\frac{2}{5},\frac{1}{5})\}$，最优值为 $\frac{3}{5}$

(b) 目标函数无界，故最优集为 ϕ，无最优值

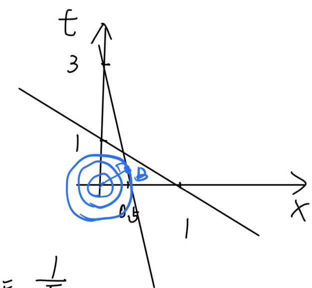
(c) 最优集为 $\{(0,x_2)\mid x_2\geq 1\}$ 最优值为0

$$\begin{cases} x_2\geq 1 \\ 3x_2\geq 1 \\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{aligned} \min\quad & y \\ \text{s.t}\quad & 2x_1+x_2\geq 1 \\ & x_1+3x_2\geq 1 \\ & x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0 \\ & y\geq x_1 \\ & y\geq x_2 \end{aligned} \Rightarrow x_1^*=\frac{1}{3}.\ x_2^*=\frac{1}{3}.\ y^*=\frac{1}{3}$$

(e) 令 $t=3x_2$

$$\begin{aligned} \therefore \min\quad & x_1^2+t^2 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1+\frac{t}{3}\geq 1 \\ & x_1+t\geq 1 \\ & x_1\geq 0 \quad t\geq 0 \end{aligned}$$



最优点在B $\quad k_{OB}=-1 \quad d=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\therefore x^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{6}) \quad f_0(x_1,x_2)=\frac{1}{2}$

3. 5. 写出与下列优化问题等价的线性优化问题：

$$\min \|\mathbf{x}\|_1$$
$$s.t.\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

(A 是矩阵，$\mathbf{b}$、$\mathbf{x}$ 为向量)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{array}$$

解：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{j=1}^n y_j \\ \text{subject to} & A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ -\mathbf{y} \le \mathbf{x} \le \mathbf{y}; \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{j=1}^n (x'_j + x''_j) \\ \text{subject to} & A(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') = \mathbf{b},\ \mathbf{x}' \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x}'' \ge \mathbf{0}. \end{array}$$

4. 写出下列优化问题的等价优化问题，以去掉目标函数与约束函数中的 min、max 符号：

$$\min \max_{i \in I} \mathbf{x}^T V_i \mathbf{x}$$
$$s.t. \min_{i \in I} \mathbf{r}_i^T \mathbf{x} \ge \mu,$$
$$\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1,$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

解：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \alpha \\ \text{subject to} & \mathbf{r}_i^T \mathbf{x} \ge \mu,\ \forall i \\ & \sqrt{\mathbf{x}^T V_i \mathbf{x}} \le \alpha,\ \forall i \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1,\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}. \end{array}$$

$x^T V_i x \le \alpha$

5. 通过引入等式约束写出下列优化问题的等价问题：

$$\max 5\ln(2x_1+y_1)+8\ln(3x_2+y_2)$$
$$s.t.\ x_1+x_2=1,$$
$$y_1+y_2=1,$$
$$x_1,x_2,y_1,y_2\geq 0.$$

解：$\max\ 5\ln a+8\ln b$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ y_1+y_2=1 \\ 2x_1+y_1-a=0 \\ 3x_2+y_2-b=0 \\ x_1,x_2,y_1,y_2\geq 0 \end{cases}$$

6 · P180. 习题 4.3.

$$\min \quad \frac{1}{2}x^TPx+q^Tx+r \qquad 其中\ P=\begin{bmatrix}13 & 12 & -2\\ 12 & 17 & 6\\ -2 & 6 & 12\end{bmatrix} \quad q=\begin{bmatrix}-22.0\\ -14.5\\ 13.0\end{bmatrix} \quad r=1$$

$$\text{s.t.} \quad -1\le x_i\le 1,\ i=1,2,3$$

解 优化问题的目标函数是(凸)二次型且约束函数为仿射的 ⇒ 优化问题为二次规划(QP)问题 ⇒ 凸优化问题

P的一阶、二阶、三阶主子式均大于0 ⇒ $P\in S^3_{++}$ 为3×3对称正定矩阵

$x^*=(1,\frac{1}{2},-1)$

← ①证明该优化问题是凸优化问题

★(凸优化问题中)可微目标函数 f_0 的最优性准则: x^*是最优解 ⟺ ① $x^*\in X$(可行集)且 ② $\nabla f_0(x^*)^T(y-x^*)\ge 0, \forall y\in X$.

① $x_1=1\in[-1,1]$ $\quad x_2=\frac{1}{2}\in[-1,1]$ $\quad x_3=-1\in[-1,1]$ ⇒ $x^*\in X$(可行集)

② $\nabla f_0(x)=xP+q^T$ $\quad \nabla f_0(x^*)=x^*P+q^T=(1\ \ \frac{1}{2}\ \ -1)\begin{pmatrix}13 & 12 & -2\\ 12 & 17 & 6\\ -2 & 6 & 12\end{pmatrix}+(-22.0\ \ -14.5\ \ 13.0)$

$$=(21\ \ 14.5\ \ -11)+(-22.0\ \ -14.5\ \ 13.0)$$

$$=(-1\ \ 0\ \ 2)$$

← ②利用可微函数 f_0 的最优性准则 (P132. 4.21)

$\forall y\in X$(可行集),不妨令 $y=(y_1,y_2,y_3)\in X$ 且 $-1\le y_i\le 1, i=1,2,3.$

$$\nabla f_0(x^*)^T(y-x^*)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}(y_1-1\ \ \ y_2-\frac{1}{2}\ \ \ y_3+1)=1-y_1+2y_3+2=2y_3-y_1+3$$

$$\left.\begin{array}{l}-1\le y_3\le 1 \Rightarrow -2\le 2y_3\le 2\\ -1\le y_1\le 1 \Rightarrow -1\le -y_1\le 1\end{array}\right\}\Rightarrow -3\le 2y_3-y_1\le 3 \Rightarrow 0\le 2y_3-y_1+3\le 6$$

⇒ $\nabla f_0(x^*)^T(y-x^*)\ge 0$, $\forall y\in X$ 得证

⇒ 综合①②, $x^*=(1,\frac{1}{2},-1)$ 是优化问题的最优解 得证.

7. P185. 习题4.10.

设x为一般形式线性规划(4.2)的一个可行解.

令: $x_i^+ = \max\{0, x_i\}$. $x_i^- = \max\{0, -x_i\}$. $s = h - Gx$ ← 这一步详细定义了从一般形式到标准形式线性规划的转换过程.

如果 $x_i > 0$, 则 $x_i^+ = x_i$. $x_i^- = 0$.
如果 $x_i < 0$, 则 $x_i^+ = 0$. $x_i^- = |-x_i|$. $\Rightarrow x_i^+ . x_i^- \geq 0$.
如果 $x_i = 0$, 则 $x_i^+ = x_i^- = 0$

又∵ $Gx \preceq h$. ∴ $s = h - Gx \succeq 0$.

∴ 上述方式定义的x^+. x^-. s在标准形式线性规划可行.

目标函数值 $c^Tx^+ - c^Tx^- + d = c^Tx + d$.

因此, 对于(4.2)中的每一个可行解, 都能在标准形式LP中找到一个目标函数值相同的可行解.

$\Rightarrow$ 标准形式LP的最优值小于等于(4.2)的最优值.

至少有个可行解取到(4.2)的最优值. 但此过程为单向推导, 不能说明标准LP的所有可行解都包括在内了. 所以≤.

另一方面, 假设x^+, x^-是标准形式LP的可行解.

令 $x = x^+ - x^-$. 则x是(4.2)的可行解 (4.2)中 $x \in R^n$

目标函数 $c^Tx + d = c^Tx^+ - c^Tx^- + d$

因此, 标准LP中的每一个可行解在(4.2)中都有目标函数值相同的可行解.

因此, (4.2)的最优值小于等于标准LP.

∴ 二者最优值相等. 最优解一一对应.

8. P189. 4.23 $\min \|Ax-b\|_4$ 与 $\min \|Ax-b\|_4^4$ 等价

形式①：

1、教材习题4.23（P189）

（通过QCQP的l_4-范数逼近） minimize $\|Ax-b\|_4=\left(\sum_{i=1}^{m}(a_i^Tx-b_i)^4\right)^{\frac{1}{4}}$, $i=1,2,3,\cdots,m$

其中$A\in R^{m\times n}$，$b\in R^m$给定，a_i^T为A行向量

由范数非负性可得：minimize $\|Ax-b\|_4=\left(\sum_{i=1}^{m}(a_i^Tx-b_i)^4\right)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$ minimize $\sum_{i=1}^{m}(a_i^Tx-b_i)^4$

则建模QCQP为： minimize $\sum_{i=1}^{m}t_i^2$

s.t. $(a_i^Tx-b_i)^2\le t_i$，$i=1,2,3,\cdots,m$

形式②：

1. 原优化问题 $\min \|Ax-b\|_4$ 等价于 $\min \|Ax-b\|_4^4=\sum_{i=1}^{m}(a_i^Tx-b_i)^4$

为将目标函数转化为二次式，构造变量 $y_i\geqslant(a_i^Tx-b_i)^2$

则问题可写作 $\min \sum_{i=1}^{m}y_i^2$

s.t $y_i\geqslant(a_i^Tx-b_i)^2$ $i=1,\cdots,m$

为进一步简化

加入等式约束，则写作

$$\min \sum_{i=1}^{m}y_i^2$$

$$\text{s.t} \begin{cases} y_i\geqslant z_i^2 \\ z_i=a_i^Tx-b_i \end{cases} \quad i=1,\cdots,m$$

9.

考虑新的约束函数 $g(x,t)=f_0(x)-t$。

根据凸函数的定义，我们需要验证对于任意的 (x_1,t_1) 和 (x_2,t_2)，以及任意的 $\lambda\in[0,1]$，都有

$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)\le\lambda g(x_1,t_1)+(1-\lambda)g(x_2,t_2)$$

即

$$f_0(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)\le\lambda[f_0(x_1)-t_1]+(1-\lambda)[f_0(x_2)-t_2]$$

。

因为 $f_0(x)$ 是凸函数，根据凸函数的定义，有

$$f_0(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f_0(x_1)+(1-\lambda)f_0(x_2)$$

。

将上述不等式代入之前的表达式，得到

$$\begin{aligned}f_0(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)&\le\lambda f_0(x_1)+(1-\lambda)f_0(x_2)-\lambda t_1-(1-\lambda)t_2\\&=\lambda[f_0(x_1)-t_1]+(1-\lambda)[f_0(x_2)-t_2]\end{aligned}$$

。

这正是凸函数 $g(x,t)=f_0(x)-t$ 满足凸性的条件。因此，$f_0(x)-t$ 在 (x,t) 上是凸函数。