**附录 1.消费者效用最大化问题（utility maximization problem,UMP）**

一般形式：

$$max_{x_1\geq 0, x_2\geq 0,}\ u(x_1,x_2)$$

$$s.t\ p_1x_1+p_2x_2\leq w$$

$\mathcal{L}=u(x_1,x_2)+\lambda[w-p_1x_1-p_2x_2]$**(拉格朗日函数)**

**$\lambda$：拉格朗日乘子**

只考虑内点解，即$x_1>0, x_2>0$

F.O.Cs $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_\ell}=\lambda p_\ell, \ell=1,2$

同时预算约束为紧$p_1x_1+p_2x_2=w$。

例：$u(x_1,x_2)=x_1^\alpha x_2^\beta$

做单调递增变换得到$\hat{u}(x_1,x_2)=\alpha lnx_1+\beta lnx_2$

UMP 可以写成：

$$max_{x_1\geq 0, x_2\geq 0,}\ \alpha lnx_1+\beta lnx_2$$

$$s.t\ p_1x_1+p_2x_2\leq w$$

$\mathcal{L}=\alpha lnx_1+\beta lnx_2+\lambda[w-p_1x_1-p_2x_2]x_1^*>0$ 且$x_2^*>0$，因此可得

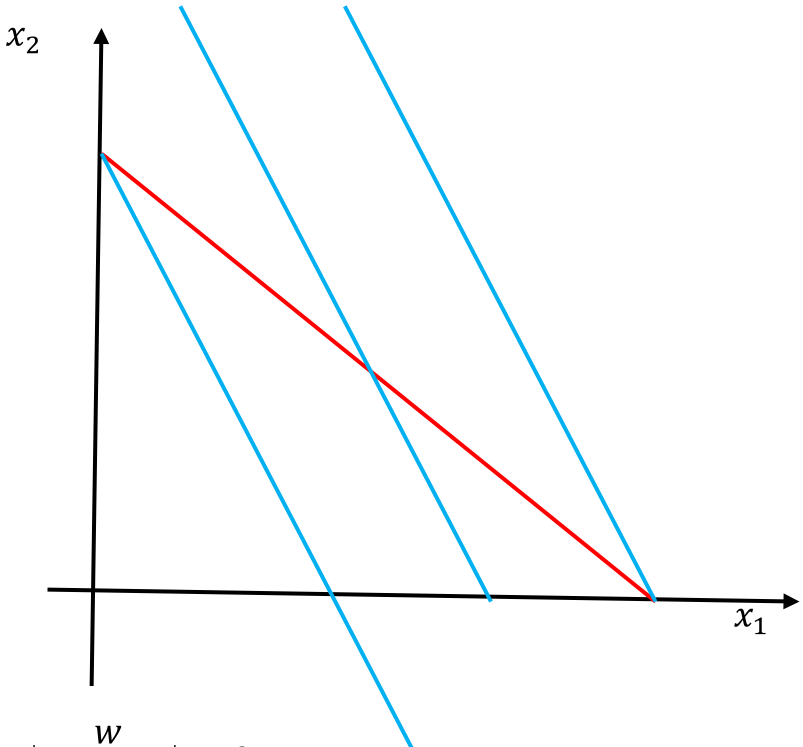
$\frac{\alpha/x_1^*}{\beta/x_2^*}=\frac{p_1}{p_2}$,且$p_1x_1^*+p_2x_2^*=w$，进而得到最优解为$x_1^*=\frac{w}{p_1}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, x_2^*=\frac{w}{p_2}\frac{\beta}{\alpha+\beta}$

<u>特殊情形（不可用拉格朗日函数的方法求解）：</u>

例 1：完全替代$U(x_1,x_2)=ax_1+bx_2, a>0, b>0$

无差异曲线斜率为$\frac{a}{b}$,预算约束斜率为$\frac{p_1}{p_2}$

若$\frac{a}{b}>\frac{p_1}{p_2}$,则可得最优解满足：




$$x_1^* = \frac{w}{p_1}, x_2^* = 0$$

**解释：$\frac{a}{b} > \frac{p_1}{p_2}$等价于$\frac{a}{p_1} > \frac{b}{p_2}$,也就是商品 1 每单位的花费可以带来的效用为$\frac{a}{p_1}$，商品 2 每单位的花费可以带来的效用为$\frac{b}{p_2}$，当$\frac{a}{p_1} > \frac{b}{p_2}$时，二者又完全替代，故应该只买商品 1，不卖商品 2.**

当$\frac{a}{b} < \frac{p_1}{p_2}$时，

$$x_1^* = 0, x_2^* = \frac{w}{p_2}$$

当$\frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_2}$时，只要$p_1x_1^* + p_2x_2^* = w$即可。

例 2.完全互补$U(x_1, x_2) = min\,[ax_1, bx_2]$

最优解一定满足$ax_1^* = bx_2^*$且$p_1x_1^* + p_2x_2^* = w$

因此可得

$$x_1^* = \frac{bw}{bp_1 + ap_2}, x_2^* = \frac{aw}{bp_1 + ap_2}$$

**解释:为什么要花钱买不回带来效用的商品?**