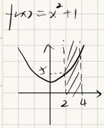
第四次作业

1. 3. (a) 可行集：$\{x \mid 2 \le x \le 4\}$

最优解：$x^* = 2$

最优值：$y^* = 2^2+1 = 5$

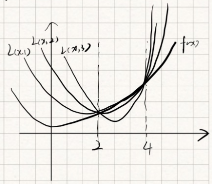
(b) $L(x,\lambda) = x^2+1+\lambda(x-2)(x-4) = (1+\lambda)x^2 - 6\lambda x + 8\lambda + 1$



$\lambda=1$：$L(x,1) = 2x^2 - 6x + 9$

$\lambda=2$：$L(x,2) = 3x^2 - 12x + 17$

$\lambda=3$：$L(x,3) = 4x^2 - 18x + 25$



$$g(\lambda) = \inf_{x \in D} L(x,\lambda)$$

当 $1+\lambda > 0$ 即 $\lambda > -1$ 时，

$\Rightarrow \nabla_x L(x,\lambda) = 2(1+\lambda)x - 6\lambda = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{3\lambda}{1+\lambda}$ 代入得：

$$g(\lambda) = (1+\lambda)\cdot\left(\frac{3\lambda}{1+\lambda}\right)^2 - 6\lambda\cdot\frac{3\lambda}{1+\lambda} + 8\lambda + 1 = \frac{-\lambda^2+9\lambda+1}{1+\lambda}$$

当 $1+\lambda \le 0$ 即 $\lambda \le -1$ 时，

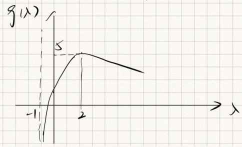
$g(\lambda) = -\infty$

$$\therefore\ g(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{-\lambda^2+9\lambda+1}{1+\lambda}, & \lambda > -1 \\ -\infty, & \lambda \le -1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial g(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{(-2\lambda+9)(1+\lambda) - (-\lambda^2+9\lambda+1)}{(1+\lambda)^2} = \frac{(-\lambda+2)(\lambda+4)}{(1+\lambda)^2} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^* = 2$

$\therefore g(\lambda)_{max} = g(\lambda^*) = 5 = p^*$



从几何角度理解 $L(x,\lambda)$ 等含义.

2. 5.1 在 1 中给出.

$$L(x,\lambda) = c^T x + \lambda f(x).$$

拉格朗日对偶函数是对 $L(x,\lambda)$ 在 x 上求下确界(infimum)：

$$g(\lambda) = \inf_x L(x,\lambda) = \inf_x \left[c^T x + \lambda f(x)\right].$$

对偶问题：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & g(\lambda) \\ \text{subject to} & \lambda \geq 0. \end{array}$$

共轭函数形式：

$$g(\lambda) = \inf_x \left(c^T x + \lambda f(x)\right) = \lambda \inf_x \left(f(x) + \frac{c^T}{\lambda} x\right).$$

注意到 $\inf_x (f(x) + \frac{c^T}{\lambda} x)$ 可以写成

$$\inf_x (f(x) - x^T(-\tfrac{c}{\lambda})) = -\sup_x (x^T(-\tfrac{c}{\lambda}) - f(x)) = -f^*\left(-\tfrac{c}{\lambda}\right).$$

因此，有

$$g(\lambda) = \lambda \cdot \left(-f^*(-\tfrac{c}{\lambda})\right) = -\lambda f^*\left(-\frac{c}{\lambda}\right).$$

3 P216. 习题5.5.

① 写出拉格朗日函数:

f_0 ; f_i (≤0形式) ; h_i (=0形式)

$L(x,\lambda,\nu)=\underbrace{c^Tx}_{f_0}+\underbrace{\lambda^T(Gx-h)}_{f_i}+\underbrace{\nu^T(Ax-b)}_{h_i}$

$=(c^T+\lambda^TG+\nu^TA)x-\lambda^Th-\nu^Tb$ 整理成关于x的项和常数项，便于求 $\inf_x f$

关于x的仿射函数

② 写出拉格朗日对偶函数:

$$g(\lambda,\nu)=\inf_x L(x,\lambda,\nu)=\begin{cases}-\lambda^Th-\nu^Tb, & c+G^T\lambda+A^T\nu=0\\ -\infty, & \text{o.w.}\end{cases}$$

③ 写出对偶问题:

$$\max_{\lambda,\nu}\ g(\lambda,\nu)$$
$$\text{s.t.}\ \ \lambda\geq0$$

可不写 λ,ν

④ 隐式等式约束显式表达:

$$\max_{\lambda,\nu}\ -\lambda^Th-\nu^Tb$$
$$\text{s.t.}\ \ c+G^T\lambda+A^T\nu=0$$
$$\lambda\geq0.$$

可不写 λ,ν

4. P272. 习题5.20. $y_i>0$.

① 写出拉格朗日函数:

$L(x,y,\underbrace{\lambda,\nu,z}_{乘子})=-c^Tx-\sum_{i=1}^m y_i\log y_i-\lambda^Tx+\nu(1^Tx-1)+z^T(Px-y)$

$=(-c-\lambda-\nu 1+P^Tz)^Tx+\sum_{i=1}^m y_i\log y_i-z^Ty-\nu$ 整理x

② 写出拉格朗日对偶函数:

要求关于变量的下界，即 $\inf_{x,y}$

关于x: 需 $-c-\lambda-\nu 1+P^Tz=0$

关于y: $\dfrac{\partial(\sum_{i=1} y_i\log y_i-z^Ty)}{\partial y_i}=\log y_i+1-z_i=0$

则 $\inf_{y_i>0}(y_i\log y_i-z_iy_i)=-e^{z_i-1}$

对偶函数

$$g(\lambda,\nu,z)=\begin{cases}-\sum_{i=1}^{m}e^{z_i-1}-\nu & -c-\lambda+\nu\mathbf{1}+p^Tz=0\\ -\infty & \text{o.w.}\end{cases}$$

对偶问题：

$$\max\ -\sum_{i=1}^{m}e^{z_i-1}-\nu$$

$$\text{s.t. } \underbrace{p^Tz-c+\nu\mathbf{1}}_{=\lambda.\ \lambda\succeq0.\ 合成一个}\succeq0.$$

令 $w=z+\nu\mathbf{1}$. 又∵ $p^T\mathbf{1}=1$.

∴原对偶问题等价于

$$\max\ -\sum_{i=1}^{m}e^{(w_i-\nu-1)}-\nu$$

$$\text{s.t. } p^Tw\succeq c.$$

对ν求极值，有 $\nu=-\log(\sum_{i=1}^{m}e^{1-w_i})$.

∴原对偶问题等价于

化的为单变量问题. $\max\ -\log(\sum_{i=1}^{m}\exp w_i)-1$

$\text{s.t. } p^Tw\succeq c.$

5. P273. 5.21

(a)

① $f_0(x,y)=e^{-x}$ 是凸函数：

$H=\begin{pmatrix}e^{-x}&0\\0&0\end{pmatrix}$, 各阶主子式 ≥0 ∴ H半正定 ∴ $f_0(x,y)$ 凸

② $f_1(x,y)=x^2/y$ 是凸函数：

$H=\begin{pmatrix}\frac{2}{y}&\frac{-2x}{y^2}\\ \frac{-2x}{y^2}&\frac{2x^2}{y^3}\end{pmatrix}$ 主子式均 >0

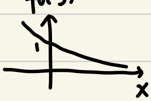
∴ H正定 ∴ $f_1(x,y)$ 是凸函数

又定义域 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 是凸集

∴为凸优化问题.

对 f_0 求导：$-e^{-x}\leq0$

为减函数.



又由 $\begin{cases}x^2/y\leq0\\ y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0.\\ y>0.\end{cases}$

∴ $x=0$ 时取最低值 $p^*=e^{-0}=1$.

(b) $L(x,y,\lambda) = e^{-x} + \lambda x^2/y$

$$g(\lambda) = \inf_{x,y>0} \left(e^{-x} + \lambda x^2/y\right) = \begin{cases} 0 & \lambda \geq 0 \\ -\infty & \lambda < 0 \end{cases}$$

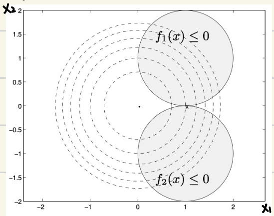
∴对偶问题为 $\max \ 0$

$\text{s.t.} \ \lambda \geq 0.$

$d^* = 0$. 最优对偶间隙 $p^* - d^* = 1$

6. P275. 习题 5.26.

(a)



可行集为两圆相部分相交的地方. 只含一个可行解 $(x_1, x_2) = (1, 0)$ 则该解为最优解. $x^* = (1,0)$. $p^* = {x_1^*}^2 + {x_2^*}^2 = 1$.

目标函数的等值线如虚线部分所示.

(b) KKT条件:

$$\left.\begin{aligned} &(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1 \\ &(x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 \leq 1 \end{aligned}\right\} f_i(x) \leq 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 \geq 0 \\ &\lambda_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{乘子非负性}$$

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + \lambda_1(2x_1 - 2) + \lambda_2(2x_1 - 2) = 0 \\ &2x_2 + \lambda_1(2x_2 - 2) + \lambda_2(2x_2 + 2) = 0 \end{aligned}\right\} \nabla = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1\left((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 1\right) = 0 \\ &\lambda_2\left((x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 - 1\right) = 0 \end{aligned}\right\} \text{互补松弛}$$

当 $x^* = (1,0)$ 时, 上述条件 $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ 2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$

不可行.

(c) $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 1) + \lambda_2((x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 - 1)$

$= (1+\lambda_1+\lambda_2)x_1^2 + (1+\lambda_1+\lambda_2)x_2^2 - 2(\lambda_1+\lambda_2)x_1 - 2(\lambda_1-\lambda_2)x_2 + \lambda_1 + \lambda_2$

$g(\lambda_1, \lambda_2) = \inf\limits_{x_1, x_2} L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} \\ x_2 = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} \end{cases}$$

$$\therefore g(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} -\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^2 + (\lambda_1-\lambda_2)^2}{1+\lambda_1+\lambda_2} + \lambda_1 + \lambda_2, & 1+\lambda_1+\lambda_2 \geq 0 \\ -\infty, & \text{o.w.} \end{cases} \quad \left(令 \frac{a}{0} = \begin{cases} 0, & a=0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases} \right)$$

对偶问题： $\max \ (\lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1-\lambda_2)^2) / (1+\lambda_1+\lambda_2)$

s.t. $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

g 关于 λ_1, λ_2 对称. 因此若最优值存在, 则 $\lambda_1 = \lambda_2$.

$\therefore$ 此时 $g(\lambda_1, \lambda_2) = g(\lambda_1, \lambda_1) = \dfrac{2\lambda_1}{2\lambda_1 + 1}$

$\lambda_1 \to \infty$ 时, $g(\lambda_1, \lambda_2) \to 1$. 有 $d^* = 1 = p^*$. 但对偶最优解取不到.

7. P276. 习题5.29.

KKT条件：

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\qquad \underbrace{(-3+\nu)x_1+1=0,\qquad (1+\nu)x_2+1=0,\qquad (2+\nu)x_3+1=0.}_{\nabla=0}$$

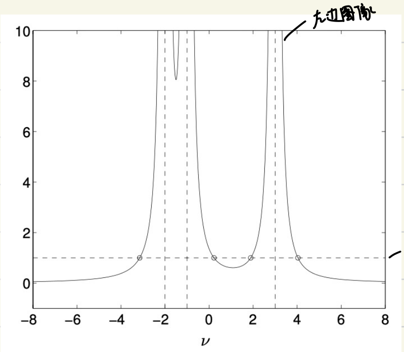
$h(x)$

可知：$\nu\neq 2,\ \nu\neq -1,\ \nu\neq 3$（否则KKT不成立）

则对上式求解，有

$$\frac{1}{(-3+\nu)^2}+\frac{1}{(1+\nu)^2}+\frac{1}{(2+\nu)^2}=1$$ —可代入MATLAB/求解器等求解.

左边图像



=1线

∴有4个解，为 $\nu^1=-3.15$. $\nu^2=0.22$. $\nu^3=1.89$ $\nu^4=4.04$

代入求方，有 $x^1=(0.16, 0.47, -0.87)$

$x^2=(0.36, -0.82, 0.45)$

$x^3=(0.90, -0.35, 0.26)$

$x^4=(-0.97, -0.20, 0.17)$

分别计算 $f_0(x)$. 有 $f_0(x^1)=1.17$. $f_0(x^2)=0.67$. $f_0(x^3)=-0.56$. $f_0(x^4)=-4.70$

于是最优解 $x^*=(-0.97, -0.20, 0.17)$