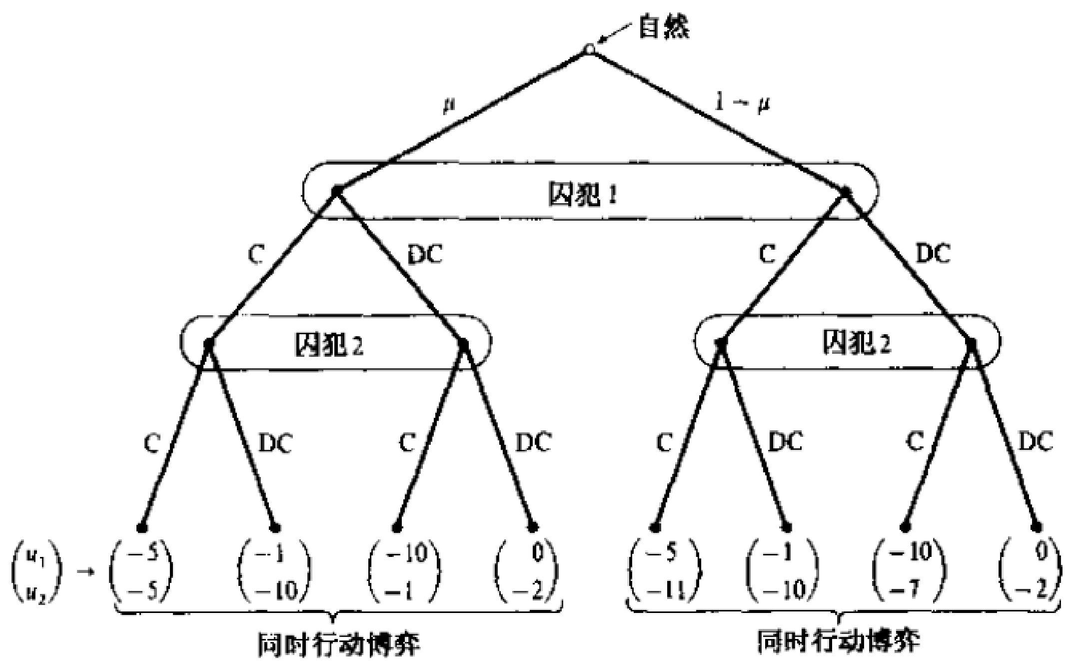
第四章 博弈论（4）

——不完全信息静态博弈

1.基本概念

不完全信息：参与者的收益以及偏好等信息不是所有参与者都知道的

例：考虑囚徒困境中的一点变化，假设以概率μ，囚犯 2 为类型 I，具有和之前相同的收益；以概率$1-\mu$，囚犯 2 痛恨出卖他的同伴，为类型 II，在这种情形下，出卖他的同伴相当于让他做 6 年牢。但是囚犯 1 的回报和之前一样，所以博弈展开式如下：



参与人 2 有四个纯策略：(如果为类型 I，坦白；如果为类型 II,坦白)，(如果为类型 I，坦白；如果为类型 II,不坦白)，(如果为类型 I，不坦白；如果为类型 II,坦白)，(如果为类型 I，不坦白；如果为类型 II,不坦白)

但是参与人 1 在做决策时并不知道参与人 2 的类型，所以参与人 1 的纯策略只有坦白和不坦白。

2.贝氏均衡（Bayesian Nash Equilibrium,BNE）

为了处理上述不完全信息的博弈，我们需要引入一个新的均衡观念。

假设参与人 i 的效用函数为$u_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$,其中$\theta_i \in \Theta_i$是一个由自然选择的变量，且所有$\theta_i$，$i = 1, \dots N$的累积分布函数为$F(\theta_1 \dots \theta_N)$,记$\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_N$.由于在这一博弈中，每个参与人 i 的策略为θ_i的函数，因此将参与人 i 的策略记作：$s_i(\theta_i)$,且给定多有参与人的策略组合$(s_1(.) \dots s_N(.))$和$\theta_i = \widetilde{\theta_\iota}$，参与者 i 的条件预期效用为$E_{\theta_{-i}}[u_i(s_i(\widetilde{\theta_\iota}), s_{-i}(\theta_{-i}), \widetilde{\theta_\iota})/\widetilde{\theta_\iota}]$。

定义 1.1（贝氏均衡）若在不完全信息的博弈中，策略组合$\left(s_1(.) \dots s_N(.)\right)$是一个贝氏均衡当且仅当对于任意的参与者 i 来说，$\forall \widetilde{\theta_\iota} \in \Theta_i$,都有$E_{\theta_{-i}}[u_i(s_i(\widetilde{\theta_\iota}), s_{-i}(\theta_{-i}), \widetilde{\theta_\iota})/\widetilde{\theta_\iota}] \geq E_{\theta_{-i}}[u_i(s_i'(\widetilde{\theta_\iota}), s_{-i}(\theta_{-i}), \widetilde{\theta_\iota})/\widetilde{\theta_\iota}], \forall s_i' \neq s_i$。

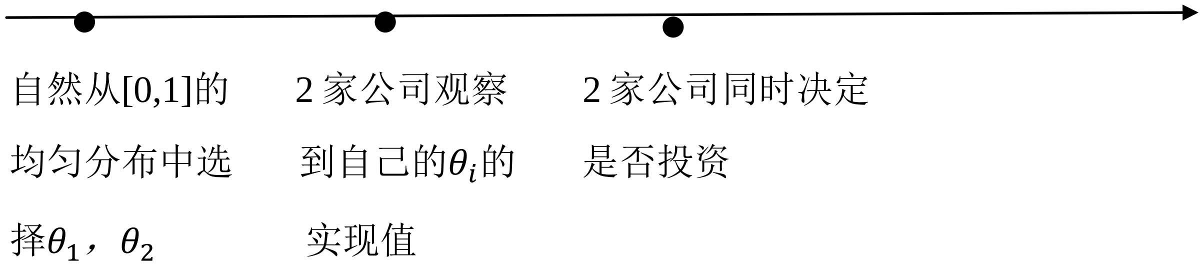
例 1：以上不完全信息下的囚徒困境问题

对于囚犯 2 来说，其纯策略为：s_2:{类型 I，类型 II} → {坦白，不坦白}

对于囚犯 1 来说，纯策略为：$\mathrm{s}_1 \in$ {坦白，不坦白}

注意区别：s_2是一个函数，而s_1不是！

例 2：现有一个研发项目可供投资。一旦项目研发成功，所有的收益将被 2 家公司共同享有。但是这一研发成功的项目对于公司 i 的收益为$\theta_i^2, i = 1,2$,但是 θ_i的实现值是公司 i 的私人信息（只有公司 i 知道θ_i的实现值，其他人都不知道）且θ_i的先验分布为[0,1]上的均匀分布。另外，一旦公司 i 选择投资该项目，需要支付 c 单位的成本，因此模型时序如下：



设公司 i 的决策为$s_i(\theta_i) = 1$说明公司 i 决定投资；而$s_i(\theta_i) = 0$说明公司 i 决定不投资。

求解贝氏均衡，考虑阈值均衡。

找阈值的基本思路：找到无差异条件

假设公司 i 的均衡决策满足：当$\theta_i \geq \widehat{\theta_i}$时，$s_i(\theta_i) = 1$；否则$s_i(\theta_i) = 0$.

给定公司 1 的这一策略，对于公司 2 来说，公司 2 认为公司 1 愿意投资项目的概率为$Pr\left(\theta_1 \geq \widehat{\theta_1}\right) = 1 - \widehat{\theta_1}$,因此若公司 2 投资该项目则可得$\theta_2^2 - c$;若不投资该项目可得$(1 - \widehat{\theta_1})\theta_2^2$,所以对于公司 2 来说，阈值$\widehat{\theta_2}$满足的条件为$\widehat{\theta_2^2} - c = (1 - \widehat{\theta_1})\widehat{\theta_2^2}$.

同样的对于公司 1 来说，可得$\widehat{\theta_1^2} - c = (1 - \widehat{\theta_2})\widehat{\theta_1^2}$

联立可得：$\begin{cases} \widehat{\theta_2^2} - c = (1 - \widehat{\theta_1})\widehat{\theta_2^2} \\ \widehat{\theta_1^2} - c = (1 - \widehat{\theta_2})\widehat{\theta_1^2} \end{cases}$=>$\widehat{\theta_\imath} = \widehat{\theta_2} = c^{1/3}$

解释：在均衡中，2 家公司都有动机搭对手的便车，也就是$\widehat{\theta_\imath} = \widehat{\theta_2} = c^{1/3} > c^{1/2}$