

2024-2025高等数学b1期末

1.求函数极限 (10分)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \sqrt{|x|} - 2 + |x|}{x^2}$$

2.设 \mathbb{R}^3 中平面 P 的方程是 $2x + y - 3z = 0$, 平面 Q 的方程是 $x + 2y - z - 2 = 0$, 直线 $L = P \cap Q$ 是 P 与 Q 的交线。求与 L 相切的、以远点 $(0, 0, 0)$ 为中心的球面方程。 (10分)

3.下面二元函数的极限存在吗? 如果存在, 求出极限值。如果不存在, 写出理由。

(1) (5分)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + (\tan y)^2}$$

(2) (5分)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{e^x - 1} + \sin y \right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

4.设二元函数 $z = z(x, y)$ 是由方程

$$F(x, y, z) = z^3 + x^2 z - 2y^3 = 0$$

所确定的隐函数。求函数 $z(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处最大的方向导数。 (10分)

5.求二元函数

$$f(x, y) = x^{\sqrt{y}}$$

在点 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒多项式及带Peano余项的泰勒公式。 (15分)

6.设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x, y) = x^2 + 2xy \sin(x + y) - y^2$$

证明: 存在 \mathbb{R}^2 中点 $(0, 0)$ 的开邻域 D 和 D 上连续可微的可逆变换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in D$ 使得 $x(0, 0) = 0$, $y(0, 0) = 0$, 并且对于任意 $(u, v) \in D$ 有 (15分)

$$f(x(u, v), y(u, v)) = u^2 - v^2$$

7.求在欧氏空间 \mathbb{R}^3 中从原点到曲面

$$(x - y)^2 - z^2 = 4$$

上的点的最短距离。 (15分)

8. 设 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的黎曼可积函数, A 是实数, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ 。证明序列极限 (15分)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \pi A$$

(注: 在本题的条件中没有假设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续。)