2022-2023高等数学a1期末

1.假设一个连续函数$f(x):[0,2]\to\mathbb{R}$有连续导数，且$f(0)=f(2)=0$。令$M=\max_{x\in[0,2]}|f(x)|$。

（1）证明：存在$\xi\in(0,2)$ 使得$|f'(\xi)|\geq M$。

（2）证明：如果$|f'(\xi)|\leq M$对于任意$x\in(0,2)$成立，则$f\equiv 0$。

2.设 $P_1(a_1,b_1,c_1)$ 和 $P_2(a_2,b_2,c_2)$ 是球面 S^2 上的两个不同点，其中

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1\}.$$

设 $O=(0,0,0)$ 是原点。计算

$$(\overrightarrow{OP_1}\times\overrightarrow{OP_2})^2+(\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2})^2$$

其中 $(\vec{r})^2=\vec{r}\cdot\vec{r}$ 是向量 $\vec{r}$ 与自身的内积。

3.(1) 设 L 由以下方程给出：

$$\begin{cases}x-2y+z=0\\5x+2y-5z=-6\end{cases}$$

证明 $(1,2,3)\in L$。并找到 L 的标准形式。

(2) 找到曲线

$$\begin{cases}x=7t-14\\y=4t^2\\z=3t^3\end{cases}$$

在时刻 $t=1$ 的法平面。

4.假设 f 是在 $[a,b]$ 上二次可微的函数，并且满足以下条件：

- $f(a)=f(b)=0$
- $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$

证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$。

5.确定以下极限是否存在。如果存在，找出极限值。

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\sin^3(2t)\,dt}{\int_0^{x^2}\tan(t)\cdot 5\,dt};$$

(2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2};$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

6.(1) 设

$$z=\frac{\arctan\big((x-3)y+(x^2+x-1)y^2\big)}{(x-2)y+(x-3)^2y^4}$$

在点 $(3,0)$ 处求 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由以下方程确定:

$$m\left(x+\frac{z}{y}\right)^n+n\left(y+\frac{z}{x}\right)^m=1$$

其中 $m,n\in\mathbb{N}^*$。求

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+xy。$$

7.(1) 计算

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\right)dx。$$

(2) 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin(x+\frac{\pi}{4}))}{\cos x}\,dx。$$