2022-2023高等数学a1期末

1.假设连续函数$f(x):[0,2]\to\mathbb{R}$有连续导数，且$f(0)=f(2)=0$，令$M=\max_{x\in[0,2]}|f(x)|$。

（1）证明：存在$\xi\in(0,2)$使得$|f(x)|\geq M$

（2）证明：如果$|f(x)|\leq M$对任意$x\in(0,2)$成立，那么$f\equiv 0$

2.令$P_1(a_1,b_1,c_1)$和$P_2(a_2,b_2,c_2)$是球面上两个不同的点，其中球面方程为：

$$S^2=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=1$$

令$O=(0,0,0)$为原点，计算：

$$(\vec{OP_1}\times\vec{OP_2})^2+(\vec{OP_1}\cdot\vec{OP_2})^2$$

3.假设f是$[a,b]$上的二阶可微函数，且：

$$f(a)=f(b)=0\text{，}f(\frac{a+b}{2})>0$$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)<0$

4.判断下列极限是否存在，如果存在，计算其极限。

（1）$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\sin^3 2tdt}{\int_0^{x^2}\tan t^5dt}$

（2）$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

（3）$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

5.（1）令$z=\arctan\frac{(x-3)y+(x^2+x-1)y^2}{(x-2)y+(x-3)^2y^4}$，计算$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(3,0)}$

（2）令$z=z(x,y)$由

$$m(x+\frac{z}{y})^n+n(y+\frac{z}{x})^m=1$$

确定，其中$m,n\in\mathbb{N}^*$，计算$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+xy$

6.（1）计算$\int_{-1}^{1}\ (\frac{\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}})dx$

（2）计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x}dx$