高数A期末试题（20250102）

1. （11分）计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2}$.

2. （11分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3. （11分）将函数$f(x)=\cos(2x)\cdot\ln(1+x)$在$x=0$处泰勒展开到$x^4$项.

4. （12分）设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导, 满足: (1) $f(a)=f(b)=0$; (2)存在$c\in(a,b)$使得$f(c)>0$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)<0$.

5. （3+3+4=10分）**本题只需要给出结果, 不需要证明.**
(1)设平面$\Sigma$过点$P_0$, 其法向量为$\vec{n}$. $P_1$是平面$\Sigma$外一点, 请用$\overrightarrow{P_0P_1}$ 和$\vec{n}$表达出点$P_1$到平面$\Sigma$的距离.
(2) 设直线$L$过点$P_0$, 其方向矢量为$\vec{\tau}$, $P_1$是$L$外一点, 请用$\overrightarrow{P_0P_1}$ 和$\vec{\tau}$表达出点$P_1$到$L$的距离.
(3) 设异面直线$L_1,L_2$的方向矢量分别为$\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2$. 若已知点$P_1$在$L_1$上, 点$P_2$ 在$L_2$ 上, 请用$\overrightarrow{P_1P_2}$ 和$\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2$表达出$L_1$, $L_2$ 间的距离公式.

6. （10分）设$f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点的可微性.

7. （5+3+2=10分）(1) 设$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 计算方向导数$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{\ell}}$, 其中$\boldsymbol{\ell}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\alpha\in[0,2\pi)$为单位向量.
(2) 若一个二元函数$g(x,y)$于$(x_0,y_0)$点取到极小值，那么$t=0$是否一定是 $h(t)=g(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)$的极小值点（其中$\alpha$如(1)中所示）, 为什么？
(3) 若对任意$\alpha\in[0,2\pi)$, $t=0$是$h(t)=g(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)$的极小值点, 那么$(x_0,y_0)$是否一定是$g(x,y)$的极小值点, 为什么？

8. （15分）设$z=z(x,y)$是由方程$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定的隐函数, 试求$z=z(x,y)$的极值.

9. （10分）设一元函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$$(a<b)$上二阶可导, $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$, 且$x\in[a,b]$时$|f''(x)|\leqslant M$($M$为一个正数). 求证: $|f(x)|\leqslant\dfrac{M}{16}(b-a)^2$, $x\in[a,b]$.

————————试题结束————————-

参考答案

1. （11分）计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2}$.

**解.** $\left(x^2+y^2\right)^{x^2}=e^{x^2\ln(x^2+y^2)}\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}e^{2r^2\cos^2\theta\ln r}$.

因为 $\left|2r^2\cos^2\theta\ln r\right|\leqslant\left|2r^2\ln r\right|$, $\lim\limits_{r\to0+0}2r^2\ln r=0$.

所以, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right)}=e^0=1$.

【或者】$0\leqslant\left|x^2\ln(x^2+y^2)\right|\leqslant\left|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right|=2r^2|\ln r|$.
$\lim\limits_{r\to0+}2r^2|\ln r|=0\quad\Rightarrow\quad\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0$.
但是切忌 $x^2\ln(x^2+y^2)\leqslant(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

2. （11分）求极限: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

**解.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left\{\dfrac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}\right\}$

$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}\right\}\xlongequal{\text{诺必达}}\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\dfrac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}\right\}$

$=\exp\left\{-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\right\}=\exp\left\{-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}\dfrac{1}{x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}\right\}$.

因为, $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)\xlongequal[x=\cot t]{\frac{\pi}{2}-\arctan x=t}\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{t}{\sin t}\cos t=1$.

所以原极限$=e^{-1}$.

【或者】:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left\{\dfrac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}\right\}$

$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}\right\}\xlongequal[x=\cot t]{\frac{\pi}{2}-\arctan x=t}\exp\left\{\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{\ln t}{\ln\cos t-\ln\sin t}\right\}$

$\xlongequal{\text{诺必达}}\exp\left\{\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{\frac{1}{t}}{-\frac{\sin t}{\cos t}-\frac{\cos t}{\sin t}}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{-\sin t\cos t}{t}\right\}=e^{-1}$. □

3. （11分）将函数$f(x)=\cos 2x\ \ln(1+x)$在$x=0$处泰勒展开到$x^4$项.

**解.** $f(x)=\left[1-\dfrac{1}{2}(2x)^2+o(x^3)\right]\left\{x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+o(x^4)\right\}$

$=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4\quad-2x^2\left(x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)+o(x^4)$

$=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4\quad-2x^3+x^4+o(x^4)$

$=x-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{3}x^3+\dfrac{3}{4}x^4+o(x^4)$, $\quad(x\to0)$. 此题为课本例题. □

4. （12分）设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导, 满足: (1) $f(a)=f(b)=0$; (2)存在$c\in(a,b)$使得$f(c)>0$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)<0$.

**证明.** $\exists\xi_1\in(a,c)\quad \text{s.t.}\quad f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0;$

$\exists\xi_2\in(c,b)\quad \text{s.t.}\quad f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$

所以, $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\quad \text{s.t.}\quad f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$ □

5. （3+3+4=10分）**本题只需要给出结果, 不需要证明.**

(1)设平面$\Sigma$过点$P_0$, 其法向量为$\vec{n}$. $P_1$是平面$\Sigma$外一点, 请用$\overrightarrow{P_0P_1}$和$\vec{n}$表达出点$P_1$到平面$\Sigma$的距离.

(2) 设直线$L$过点$P_0$, 其方向矢量为$\vec{\tau}$, $P_1$是$L$外一点, 请用$\overrightarrow{P_0P_1}$和$\vec{\tau}$表达出点$P_1$到$L$的距离.

(3) 设异面直线$L_1,L_2$的方向矢量分别为$\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2$. 若已知点$P_1$在$L_1$上, 点$P_2$在$L_2$上, 请用$\overrightarrow{P_1P_2}$和$\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2$表达出$L_1$, $L_2$间的距离公式.

**解.** (1) $P_1$到平面$\Sigma$的距离即向量$\overrightarrow{P_0P_1}$在平面单位法向量上的投影长度.

平面$\Sigma$的单位法向量为$\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, 所以$P_1$到平面$\Sigma$的距离为$\mathrm{d}=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$.

(2) 点$P_1$到直线$L$的距离是向量$\overrightarrow{P_0P_1}$与向量$\vec{\tau}$所形成的平行四边形的高（以$\vec{\tau}$为底边）.

$\left|\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{\tau}\right|$表示该平行四边形的面积, 底边长度是$|\vec{\tau}|$.

所以, 点$P_1$到$L$的距离=平行四边形的面积/底边长度. 即$\mathrm{d}=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{\tau}\right|}{|\vec{\tau}|}$.

(3) 过直线$L_1$且平行于$L_2$的平面记作$\Sigma$, 则$L_1$, $L_2$间的距离公式就是点$P_2$到平面$\Sigma$的距离.

注意到平面$\Sigma$的法向量为$\vec{n}=\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2$, 引用(1)的结论得,

$L_1$, $L_2$间的距离公式为 $\mathrm{d}=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2)\right|}{|\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2|}$.

【或者】换一个角度看.

$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2)\right|$是三个向量$\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$所形成的平行六面体的体积.

该平行六面体的底平面是$\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$所形成的平行四边形, 其面积是$|\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2|$;

该体积应该是底面平行四边形的面积乘以高,

而平行六面体的高正是两直线$L_1$, $L_2$间的距离, 即点$P_2$到底平面的距离.

所以, $L_1$, $L_2$间的距离=平行六面体的体积/平行四边形的面积. 即$\mathrm{d}=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2)\right|}{|\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2|}$. □

*此题为课本5.3节的例2和第五章总练习题第8题、第10题*

6.（10分）设$f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点的可微性.

**解.** 因为

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2}.$$

考察 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-0\cdot x-\frac{\pi}{2}\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\pi/2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

因为$\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\pi/2\right)=0$,

所以, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 故$f(x,y)$于$(0,0)$ 可微.

【或者】令$u=\sqrt{x^2+y^2}$, 利用罗必塔法则, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\pi/2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{u\to0+}\frac{\arctan 1/u-\pi/2}{u}=\lim_{u\to0+}\frac{-1}{1+u^2}=-1$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-0\cdot x-\frac{\pi}{2}\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\pi/2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

即$f(x,y)$在$(0,0)$点可微. □

7. （5+3+2=10分）(1) 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 计算方向导数$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{\ell}}$，其中$\boldsymbol{\ell}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\alpha\in[0,2\pi)$为单位向量.

(2) 若一个二元函数$g(x,y)$于$(x_0,y_0)$点取到极小值，那么$t=0$是否一定是$h(t)=g(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)$的极小值点（其中$\alpha$如(1)中所示），为什么？

(3) 若对任意$\alpha\in[0,2\pi)$，$t=0$是$h(t)=g(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)$的极小值点，那么$(x_0,y_0)$是否一定是$g(x,y)$的极小值点，为什么？

**解.** (1) 当$x\neq 0$，即$\cos\alpha\neq 0$时，

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{\ell}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t^4\cos\alpha\sin^3\alpha}{t^2\cos^2\alpha+t^4\sin^4\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2\cos\alpha\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha+t^2\sin^4\alpha}=0;$$

当$x=0$，即$\cos\alpha=0$时，$f(0,y)\equiv 0$，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{\ell}}=0$.

所以，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{\ell}}=0$，$\forall\alpha\in[0,2\pi)$.

注意，由于$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$，所以可能有人使用梯度点积方向的方法计算方向导数，但是这是错误的．因为函数在$(0,0)$点并不可微，所以函数在$(0,0)$点没有梯度.

(2)，答案是肯定的.

事实上，假设$g(x_0,y_0)$是极小值，则据极值定义，

$\exists\delta>0$ s.t. $g(x_0,y_0)\leqslant g(x,y)$，$\forall(x,y)\in B\Big((x_0,y_0),\delta\Big)=\Big\{(x,y)\;\Big|\;(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\Big\}$.

所以，$\forall\theta\in[0,2\pi)$，当$0<|t|<\delta$时，

$g(x_0,y_0)\leqslant g(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)=h(t)$，即$t=0$是$h(t)$的极小值点.

注意，该小题不能使用各方向导数为零来说明截痕函数仍在$(0,0)$点取极值，因为函数在该点不一定有方向导数.

(3) 答案是否定的．可举反例如下． $g(x,y)=\begin{cases}x^3, & y=x^2\text{时};\\ 0, & y\neq x^2\text{时}.\end{cases}$

因为，$\forall\theta\in[0,2\pi)$，$\exists\delta_\theta>0$ s.t. $g(t\cos\theta,t\sin\theta)=0$，$t\in[0,\delta_\theta]$，

所以，对任何方向$\boldsymbol{\ell}=(\cos\theta,\sin\theta)$来说，$h(0)$是$h(t)$的极小值.

但是，由于$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_1<0,x_2>0$ s.t. $(x_1,x_1^2),(x_2,x_2^2)\in B\Big((0,0),\varepsilon\Big)$，

同时，$g(x_1,x_1^2)=x_1^3<0=g(0,0)$，$g(x_2,x_2^2)=x_2^3>0=g(0,0)$，

即$g(0,0)$不是$g(x,y)$的极小值. □

这样的例子有很多，只要沿曲线过来不是极值就形成反例.

8.（15分）设$z=z(x,y)$是由方程$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定的隐函数，试求$z=z(x,y)$的极值.

**解.** 显然必须有$z>0$.
题设方程左端的三元函数$F(x,y,z)$在其定义域$z>0$中任意阶连续可导.
对题设给的方程关于$x,y$分别求偏导，注意$z=z(x,y)$，可得

$$\begin{cases} 2xz+(x^2+y^2)z_x+\dfrac{z_x}{z}+2=0 \\ 2yz+(x^2+y^2)z_y+\dfrac{z_y}{z}+2=0 \end{cases} \tag{*}$$

因为要求$z=z(x,y)$的驻点，所以就令$z_x=z_y=0$，就得到

$$\begin{cases} 2xz+2=0 \\ 2yz+2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x=y=-1/z$$

代入原方程，化简得到一元方程

$$\ln z-\frac{2}{z}+2=0 \tag{**}$$

不难看出$z=1$是方程(**)的一个解. 又由于

$$f(z)=\ln z-\frac{2}{z}+2, \quad f'(z)=\frac{z+2}{z^2}>0,\ z>0$$

所以$z=1$是方程(**)的唯一解.
把$z=1$代入关系式$x=y=-1/z$就得到$x=-1,\ y=-1$. $(-1,-1,1)$满足题设的方程.
于是$(x,y)=(-1,-1)$是隐函数$z=z(x,y)$的唯一驻点.
下面判断这个驻点是否为极值点. 为此对方程组(*)的第一个方程关于$x$再求导，得到

$$2z+4xz_x+(x^2+y^2)z_{xx}-\frac{(z_x)^2}{z^2}+\frac{z_{xx}}{z}=0$$

令$z_x=0,\ x=y=-1,\ z=1$，就得到$A=z_{xx}(-1,-1,1)=-\dfrac{2}{3}$.
对方程组(*)的第二个方程关于$y$再求导，得到
$2z+4yz_y+(x^2+y^2)z_{yy}-\dfrac{(z_y)^2}{z^2}+\dfrac{z_{yy}}{z}=0$.
令$z_y=0,\ x=y=-1,\ z=1$，就得到$C=z_{yy}(-1,-1,1)=-\dfrac{2}{3}$.
对方程组(*)的第一个方程关于$y$再求导，得到
$2xz_y+2yz_x+(x^2+y^2)z_{xy}+\dfrac{z_{xy}}{z}-\dfrac{z_xz_y}{z^2}=0$.
令$z_y=0,\ x=y=-1,\ z=1$，就得到$B=z_{xy}(-1,-1,1)=0$.
由$AC-B=4/9>0,\ A=-2/3<0$，可判断$(-1,-1)$是隐函数$z=z(x,y)$的极大值点，极大值为1. □

9. (10分)设一元函数$f(x)$在闭区间$[a,b](a<b)$上二阶可导, $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$, 且$x\in[a,b]$时$|f''(x)|\leqslant M$($M$为一个正数). 求证: $|f(x)|\leqslant \frac{M}{16}(b-a)^2,\ x\in[a,b]$.

**证明.** 由$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续, 可设$|f(c)|=\max\limits_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\}$, $c$为$[a,b]$ 中某一点.
如果$|f(c)|=0$, 则必有$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$, 此时要证的不等式显然成立.
如果$|f(c)|>0$, 则必有$c\in(a,b)$, 且$f(c)$为极值, 由$Fermat$定理得到$f'(c)=0$.
利用二阶$Taylor$展开公式, 存在$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$使得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2, \tag{1*}$$

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-c)^2=f(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-c)^2, \tag{2*}$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_3)}{2}(x-b)^2=\frac{f''(\xi_3)}{2}(x-b)^2. \tag{3*}$$

如果$x\in[a,c]$, 联立$(1*)(2*)$两式得到

$$f(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-c)^2=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2\ \Rightarrow\ |f(c)|\leqslant\frac{M}{2}[(x-c)^2+(x-a)^2],\ x\in[a,c].$$

于是据结论(1)有$x\in[a,c]$时, $|f(c)|\leqslant\frac{M}{4}(c-a)^2$.
如果$x\in[c,b]$, 联立$(2*)(3*)$两式, 同理可得$x\in[c,b]$ 时, $|f(c)|\leqslant\frac{M}{4}(b-c)^2$.
于是有$|f(c)|\leqslant\min\left\{\frac{M}{4}(c-a)^2,\ \frac{M}{4}(b-c)^2\right\}$.
若$a<c\leqslant\frac{a+b}{2}$, 则有$|f(c)|\leqslant\frac{M}{4}(c-a)^2\leqslant\frac{M}{4}(\frac{a+b}{2}-a)^2=\frac{M}{16}(b-a)^2$.
若$\frac{a+b}{2}<c<b$, 则有$|f(c)|\leqslant\frac{M}{4}(b-c)^2\leqslant\frac{M}{4}(b-\frac{a+b}{2})^2=\frac{M}{16}(b-a)^2$.
这就证明了$|f(x)|\leqslant|f(c)|\leqslant\frac{M}{16}(b-a)^2,\quad\forall x\in[a,b]$. □