

2024-2025高等数学c1期中

1.求极限 (30分)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (100 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(n+1)^{\frac{1}{3}} - \sin n^{\frac{1}{3}})$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x^2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2})$

2.求函数 $y = \arctan(1 + \sin x) + (1 + x^2)^{x^3}$ 的一阶导数 y' . (10分)

3.设由参数方程 $\begin{cases} x = 2t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$, 确定函数 $y(x)$, 求二阶导数 y'' . (10分)

4.设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x^2 \sin \frac{1}{x}), & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. 问右极限 $f(0+0)$ 、右导数 $f'(0+0)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0+0} f'(x)$ 是否存在? 说明理由. (10分)

5.证明: 方程 $\ln(2 + \cos x) - \frac{1}{x} = 0$ 有无穷多个正根. (10分)

6.求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0)$ 且底边平行于 x 轴的最大等腰三角形的面积. (10分)

7.证明: $(1 + \frac{1}{x})^{x+1} > e$, 其中 $x > 0$. (10分)

8.设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导. 若对一点 $x_0 \in (a, b)$, $\lim_{x \rightarrow x_0}$ 存在, 则证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$. (10分)