北京大学高等数学A（I）期末考试试题

(共五道大题， 满分100分)

2024.01.04

一、 （本题 20 分）

1.1 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right)$.

解答：用一次洛必达法则后，得

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right)$$

可以预处理$(1+x)^{\frac{1}{x}}\to e$, 从而考虑下面得极限

$$e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \qquad (\star)$$

对分母上的$1+x\to 1$ 预处理一下即考虑极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

对此应用洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{1}{2}$$

得原来得极限为$-\frac{e}{2}$

注意：(i) 如果在

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right)$$

中对分数$\frac{1}{x(1+x)}$ 预处理为$\frac{1}{x}$，即考虑极限

$$e\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

然后用洛必达法则，得$\frac{e}{2}$，这是错的。

(ii) 如果对$(\star)$中分母$(1+x)$ 不做预处理，则计算起来要繁琐得多。

1.2 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n+1$阶可导,且

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,\ \ f^{(n)}(0)=a$$

求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^x-1)-f(x)}{x^{n+1}}$.

解答：由在$x=0$处的Taylor公式，及题设条件可得

$$f(x)=\frac{a}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+o(x^{n+1})$$

因为$e^x-1\sim x$, $x\to 0$，于是有

$$f(e^x-1)=\frac{a}{n!}(e^x-1)^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}(e^x-1)^{n+1}+o(x^{n+1})$$

二式相减，并使用e^x在$x=0$处的Taylor展开，有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x-1)-f(x)}{x^{n+1}} &= \frac{a}{n!}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^n-x^n}{x^{n+1}}\\
&= \frac{a}{n!}\lim_{x\to 0}\frac{(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))^n-x^n}{x^{n+1}}\\
&= \frac{a}{n!}\lim_{x\to 0}\frac{C_n^{n-1}x^{n-1}\cdot x^2/2}{x^{n+1}}\\
&= \frac{a}{n!}\cdot n\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{a}{2(n-1)!}
\end{aligned}$$

二、 （**本题 20 分**）

2.1 设二元函数 $F(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，$z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-z,y-z)=0$ 确定的隐函数. 计算并化简

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

解答：首先由于$F\in C^2$,所以$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, 因此只需要计算

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

即可。

记

$$F_1'=\frac{\partial F}{\partial u},\ \ F_2'=\frac{\partial F}{\partial u},\ \ F_{11}''=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2},\ \ F_{12}''=\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}$$

由方程$F(x-z,y-z)=0$可确定隐函数$z=z(x,y)$，必有

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-(F_1'+F_2')\neq 0.$$

对方程$F(x-z,y-z)=0$两边关于x求偏导，注意$z=z(x,y)$，可得

$$F_1'\cdot(1-z_x)+F_2'\cdot(-z_x)=0\ \Rightarrow\ z_x=\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}.$$

对方程$F(x-z,y-z)=0$两边关于y求偏导，注意$z=z(x,y)$，可得

$$F_1'\cdot(-z_y)+F_2'\cdot(1-z_y)=0\ \Rightarrow\ z_y=\frac{F_2'}{F_1'+F_2'}.$$

显然有

$$z_x+z_y=1 \tag{1}$$

对(1)式两边关于x再求偏导，得到

$$z_{xx}+z_{yx}=0 \tag{2}$$

对(1)式两边关于y再求偏导，得到

$$z_{xy}+z_{yy}=0 \tag{3}$$

由于$F(u,v)$有连续的二阶偏导数，隐函数$z=z(x,y)$也有连续的二阶偏导数，将(2)式与(3)式相加，就得到

$$z_{xx}+2z_{yx}+z_{yy}=0$$

注：如果此题直接计算$z_{xx},2z_{xy},z_{yy}$，再相加，也可得到要证的等式，但计算过程要复杂很多！

2.2 给定方程组

$$\begin{cases} xy+yz^2+4=0 \\ x^2y+yz-z^2+5=0. \end{cases} \tag{$\star$}$$

试讨论在点 $P_0(1,-2,1)$ 附近方程组 ($\star$) 能确定哪些隐函数？

并计算 ($\star$) 确定出的隐函数在 P_0 处的导数.

解答：已知$P_0(1,-2,1)$满足方程组(*)。设

$$F(x,y,z)=xy+yz^2+4,\quad G(x,y,z)=x^2y+yz-z^2+5$$

显然这两个函数在$\mathbb{R}^3$中有连续的各阶偏导数。考察矩阵

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}_{P_0}=\begin{bmatrix} y & x+z^2 & 2yz \\ 2xy & x^2+z & y-2z \end{bmatrix}_{P_0}=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

可得到如下二阶Jacobi行列式

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0,$$

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix}=8\neq 0$$

所以，在点$P_0(1,-2,1)$附近方程组(*)一定能确定隐函数：

$$\begin{cases} x=x(z) \\ y=y(z) \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} z=z(y) \\ x=x(y) \end{cases}$$

但不能肯定y和z是否分别为x的隐函数。

在$P_0(1,-2,1)$处，利用隐函数求导公式，有

$$\left.\frac{dx}{dz}\right|_{P_0}=-\frac{\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_{P_0}}{\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_{P_0}}=-\frac{0}{4}=0,\quad \left.\frac{dx}{dz}\right|_{P_0}=-\frac{\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_{P_0}}{\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_{P_0}}=-\frac{-8}{4}=2$$

和

$$\left.\frac{dz}{dy}\right|_{P_0}=-\frac{\left.\frac{D(F,G)}{D(y,x)}\right|_{P_0}}{\left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_{P_0}}=-\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\quad \left.\frac{dx}{dy}\right|_{P_0}=-\frac{\left.\frac{D(F,G)}{D(z,y)}\right|_{P_0}}{\left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_{P_0}}=-\frac{0}{8}=0$$

三、（**本题 20 分**） 求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

解答：先计算f_x, f_y

$$f_x=x(5x^3-3xy-2y),\qquad f_y=2y-x^2-x^3$$

解方程组

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x(5x^3 - 3xy - 2y) = 0 \\ 2y - x^2 - x^3 = 0 \end{cases}$$

显然，$(x, y) = (0, 0)$是一组解。当$x \neq 0$时，方程组化为

$$\begin{cases} 5x^3 - 3xy - 2y = 0 \\ 2y - x^2 - x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 5x^3 - 3x\frac{x^2 + x^3}{2} - x^2 - x^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2/3, \ x = 1$$

于是就解出$f(x, y)$的所有稳定点有3个，分别为

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 10/27 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

再计算$f(x, y)$的2阶偏导数

$$f_{xx} = 20x^3 - 6xy - 2y, \quad f_{xy} = -3x^2 - 2x, \quad f_{yy} = 2$$

在$(x, y) = (1, 1)$点处

$$A = 12, \ B = -5, \ C = 2, \ \Rightarrow \ AC - B^2 = -1 < 0, \ \text{所以 } (1, 1) \text{ 不是极值点}$$

在$(x, y) = (2/3, 10/27)$点处

$$A = 100/27 > 0, \ B = -8/3, \ C = 2, \ \Rightarrow \ AC - B^2 = 8/27 > 0,$$

所以 $(2/3, 10/27)$ 是极小值点，极小值为 $-\dfrac{4}{729}$

在$(x, y) = (0, 0)$点处

$$A = 0, \ B = 0, \ C = 0, \ \Rightarrow \ AC - B^2 = 0,$$

所以目前无法判断$(0, 0)$是否为极值点

改成用极值点的定义来判断，现在有

$$f(0, 0) = 0, \quad f(x, 0) = x^5$$

所以$f(x, y)$在$(0, 0)$点的任意小邻域内都有> 0和< 0的值，因此$(0, 0)$点不是极值点。

由于$f(x, y)$在$\mathbb{R}^2$中处处可微，所以它没有其它极值点。

四、 （本题 20 分）

4.1 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的一个邻域内有定义且在 $(0,0)$ 处连续.

若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，求证：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

解答：

由极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$。由$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，可得$f(0,0)=0$。于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}$$

存在。取$(x,y)\to(0,0)$的特殊路径，可得

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}}{x}$$

存在。所以必有

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

即$f_x(0,0)=0$。同理有$f_y(0,0)=0$。于是极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{x^2+y^2}$$

就存在，即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

存在。由此可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

这就证明了

$$f(x,y)-[f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y] = o(\rho), \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$$

即$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微。

4.2 设 $f(u,v)$ 有连续的偏导数，$f(0,0)=0$. 求证：

$$f(x,y) = x\int_0^1 \frac{\partial f(tx,ty)}{\partial u}\,dt + y\int_0^1 \frac{\partial f(tx,ty)}{\partial v}\,dt.$$

解答：

记$u=tx$, $v=ty$，

$$
\begin{aligned}
\text{右边} &= \int_0^1 x\,\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial u}\,dt + \int_0^1 y\,\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial v}\,dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\,x + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\,y\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right] dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx,ty)\,dt
\end{aligned}
$$

由$f(u,v)$有连续的偏导数，利用微积分基本定理，可得

$$
\text{右边} = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx,ty)\,dt = f(tx,ty)\Big|_0^1 = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y).
$$

五、 （**本题 20 分**）

5.1 设 $f(x)$ 是一个定义在$\mathbb{R}$ 上的周期为$T \neq 0$ 的无穷阶光滑函数, k为任一给定的自然数. 证明一定存在点 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $f^{(k)}(\xi) = 0$.

解答：由于f是周期函数，因此存在无穷多的点x, 使得

$$
f(x_1) = f(x_1+T) = f(x_1+2T = \cdots = f(x_1+nT)) = \cdots
$$

因此根据微分中值定理，在每一对点x_1+mT 和$x_1+(m+1)T$之间，有点$\xi_{1,m}$ 使得

$$
f'(\xi_{1,m}) = 0
$$

因此，在$\xi_{1,m}$和$\xi_{1,m+1}$ 之间，存在点$\xi_{2,m}$使得

$$
f''(\xi_{2,m}) = 0
$$

递推下去，可知在$\xi_{k-1,m}$和$\xi_{k-1,m+1}$ 之间，存在点$\xi_{k,m}$使得

$$
f^{(k)}(\xi_{k,m}) = 0
$$

随便取一个$\xi = \xi_{k,m}$即可满足题目要求。

5.2 设函数 $f(u,v)$ 有连续偏导数 $f_u(u,v)$, $f_v(u,v)$, 且满足 $f(x,1-x)=1$.

证明：函数 $f(u,v)$ 在单位圆周 $u^2+v^2=1$ 上至少存在两个不同的点满足下列方程：$v\,f_u(u,v)=u\,f_v(u,v)$.

解答：

单位圆周的参数方程为：$u=\cos t, v=\sin t, 0\le t\le 2\pi$，所以方程$v\,f_u(u,v)=u\,f_v(u,v)$在单位圆周上就是

$$f_u(\cos t,\sin t)\cdot\sin t=f_v(\cos t,\sin t)\cdot\cos t$$

设$z(t)=f(\cos t,\sin t)$，由复合函数求导法则，

$$\begin{aligned}z'(t)&=f_u(\cos t,\sin t)\cdot(-\sin t)+f_v(\cos t,\sin t)\cdot\cos t\\&=-f_u(\cos t,\sin t)\cdot\sin t+f_v(\cos t,\sin t)\cdot\cos t\end{aligned}$$

所以，方程$v\,f_u(u,v)=u\,f_v(u,v)$在单位圆周上可化为：

$$z'(t)=-f_u(\cos t,\sin t)\cdot\sin t+f_v(\cos t,\sin t)\cdot\cos t=0,\quad 0\le t\le 2\pi.$$

下面证明：$z'(t)=0$在$t\in[0,2\pi]$上至少有两个不同根。

现在有

$$z(0)=f(1,0)=1,\ z(2\pi)=f(1,0)=1,\ z(\pi/2)=f(0,1)=1$$

由$f(u,v)$有连续偏导数，知$z(t)$在$[0,2\pi]$上连续，在$(0,2\pi)$可微，由Rolle定理，必存在$\xi_1\in(1,\pi/2)$，$\xi_2\in(\pi/2,2\pi)$使得

$$z'(\xi_1)=0,\quad z'(\xi_2)=0.$$

证毕。

【全卷完】