期中自测题答案

Chengfeng Shen

Peking University

2024 年 11 月 6 日

1.（本题满分 15 分） 求下列极限:

(1)(5 分)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n};$$

解: 对任意的 $n\geq 2$，有

$$0<\frac{n!}{n^n}=\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

由夹逼定理知原极限为 0. □

(2)(5 分)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x};$$

解: 利用等价无穷小方法.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)^x-1\right]}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\exp\{x\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)\}-1}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2\sin x}{3}\right)}{x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{3x}\\
=&\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

□

(3)(5 分)

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1^a+3^a+\cdots+(2n-1)^a\right]^{b+1}}{\left[2^b+4^b+\cdots+(2n)^b\right]^{a+1}}\ (a,\,b\neq -1).
$$

解: 构造黎曼和.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1^a+3^a+\cdots+(2n-1)^a\right]^{b+1}}{\left[2^b+4^b+\cdots+(2n)^b\right]^{a+1}}\\
=&2^{a-b}\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{2n}\right)^a+\left(\frac{3}{2n}\right)^a+\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^a\right)\right]^{b+1}}{\left[\frac{1}{n}\left(\left(\frac{2}{2n}\right)^b+\left(\frac{4}{2n}\right)^b+\cdots\left(\frac{2n}{2n}\right)^b\right)\right]^{a+1}}\\
=&2^{a-b}\frac{\left(\int_0^1 x^a dx\right)^{b+1}}{\left(\int_0^1 x^b dx\right)^{a+1}}\\
=&2^{a-b}\frac{(b+1)^{a+1}}{(a+1)^{b+1}}.
\end{aligned}
$$

□

2. (本题满分 10 分) 设定义在 $(-\infty,1)$ 上的函数 $f(x)$ 的解析式为

$$
f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}.
$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$，求 $f^{(n)}(x)$.

解: $n=1$ 时，

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2}\frac{1+x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

$n \geq 2$ 时，由莱布尼茨公式:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=\left[(1+x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\right]^{(n)}\\
&=(1+x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(n)}+n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(n-1)}\\
&=(1+x)\frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}+n\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}(1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

3.（本题满分 15 分）求下列不定积分:

(1)(5 分)

$$\int \frac{dx}{x^4\left(x^2+1\right)};$$

解: 注意到

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^4},$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{x^4\left(x^2+1\right)}\\
=&\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^4}\right)dx\\
=&\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C.
\end{aligned}$$

□

(2)(5 分)

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx;$$

解: 由 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，有 $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$. 从而

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx\\
=&\int \frac{\cos 2x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}dx\\
=&\int \frac{\cos 2x}{1-\frac{\sin^2 2x}{2}}dx\\
=&\int \frac{d\sin 2x}{2-\sin^2 2x}\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin 2x+\sqrt{2}}{\sin 2x-\sqrt{2}}\right|+C.
\end{aligned}
$$

□

(3)(5 分)

$$\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

解: 注意到

$$d\sqrt{1+e^x}=\frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}},$$

有

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}\\
=&\int 2xd\sqrt{1+e^x}\\
=&2x\sqrt{1+e^x}-\int 2\sqrt{1+e^x}dx\\
(t=e^x)\ =&2x\sqrt{1+e^x}-\int \frac{2\sqrt{1+t}}{t}dt\\
(y=\sqrt{1+t})\ =&2x\sqrt{1+e^x}-\int \frac{4y^2}{y^2-1}dy\\
=&2x\sqrt{1+e^x}-\int \left(4-2\left(\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y-1}\right)\right)dy\\
=&2x\sqrt{1+e^x}-4y+2\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)+C\\
=&2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}+2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}+C.
\end{aligned}
$$

□

4. (本题满分 15 分) 求下列定积分:

(1)(5 分)

$$\int_{-2}^{2} \min\left\{\frac{1}{|x|}, x^2\right\} dx;$$

解: 注意到 $\min\left\{\frac{1}{|x|}, x^2\right\}$ 是偶函数，且在 $0 \le x \le 1$ 时，$x^2 \le \frac{1}{|x|}$; 在 $1 < x < 2$ 时，$\frac{1}{|x|} < x^2$. 从而

$$\int_{-2}^{2} \min\left\{\frac{1}{|x|}, x^2\right\} dx = 2\left(\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx\right) = \frac{2}{3} + 2\ln 2.$$

□

(2)(5 分)

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx;$$

解: 利用对称性. 注意到

$$\frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} = \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}.$$

从而

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x} = -\pi \arctan(\cos x)\,|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

□

(3)(5 分)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx \ (m,\, n \in \mathbb{N}_+);$$

解: 利用分部积分构造递推. 记

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx.$$

当 $n > 1$ 时，

$$B(m.n) = \frac{1}{m}\int_0^1 (1-x)^{n-1} dx^m = \frac{x^m(1-x)^{n-1}}{m}|_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m (1-x)^{n-2} dx = \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1).$$

$n=1$ 时，

$$B(m,1)=\int_0^1 x^{m-1}dx=\frac{1}{m}.$$

从而

$$B(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}B(m+n-1,1)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

5. (本题满分 10 分) 设 $\{x_n\}$ 为正数列，且满足

$$x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2,\ n\in\mathbb{N}_+.$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出其极限.

证明: 因为 $\{x_n\}$ 是正序列，所以对任意的 $n\in\mathbb{N}_+$，有

$$\frac{1}{x_n}<x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2,$$

从而 $x_n>\frac{1}{2}$. 此外，由

$$x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2\le x_n+\frac{1}{x_n}$$

知 $x_{n+1}<x_n$. 从而序列 $\{x_n\}$ 单调递减、有下界，故极限存在，设极限为 $\ell\ge\frac{1}{2}$. 对

$$x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2$$

两端取极限，得

$$\ell+\frac{1}{\ell}\le 2,$$

从而 $\ell=1$，即序列 $\{x_n\}$ 的极限为 1. □

6. (本题满分 10 分) 设 $f\in C[a,b]$，且存在常数 $M,\eta>0$，使得对任意的 $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，恒有

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\le M\left(\beta-\alpha\right)^{1+\eta}.$$

证明：$f\equiv 0$.

证明: 用反证法. 若 $f\not\equiv 0$，则存在 $x_0\in[a,b], f(x_0)\neq 0$. 不妨设 $f(x_0)>0$ 且 $x_0<b$. 由 f 的连续性，存在 $0<\delta<b-x_0$，使得当 $x\in[x_0,x_0+\delta]$ 时，$f(x)\ge\frac{f(x_0)}{2}$. 从而，任取 $x_0\le\alpha<\beta<x_0+\delta$，有

$$\frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha)\le\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\le M(\beta-\alpha)^{1+\eta},$$

化简得

$$\frac{f(x_0)}{2M} \le (\beta-\alpha)^{\eta}. \tag{0.1}$$

由 α, β 的任意性，可取 $x_0 \le \alpha < \beta < x_0+\delta$，使得

$$\beta-\alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\eta}},$$

此时(0.1)不成立，矛盾. 从而原命题成立，即 $f \equiv 0$. □

7. (本题满分 10 分) 设 n 次首一多项式 $p(x)$ 有 n 个实零点 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.

(1)(5 分) 求 $p'(x)$ (用 $x_1, \cdots, x_n$ 表示).

解: 由题意，

$$p(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

从而

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(x)}{x-x_k}.$$

□

(2)(5 分) 证明：对任意的 $x \in \mathbb{R}$，有

$$[p'(x)]^2 - p(x)p''(x) \ge 0.$$

证明: 易计算得：

$$p''(x) = \sum_{1\le i,\, j\le n,\, i\ne j} \frac{p(x)}{(x-x_i)(x-x_j)}.$$

结合 (1) 知

$$(p'(x))^2 - p(x)p''(x) = (\sum_{k=1}^{n} \frac{p(x)}{x-x_k}))^2 - \sum_{1\le i,\, j\le n,\, i\ne j} \frac{p^2(x)}{(x-x_i)(x-x_j)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p^2(x)}{(x-x_k)^2} \ge 0.$$

□

8. (本题满分 15 分)

(1)(5 分) 设 $k \in \mathbb{N}_+$. 证明：

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2kx}{\sin x}\right) dx = 0.$$

证明: 注意到

$$
\begin{aligned}
&\sin x\left(\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2k-1)x\right)\\
=&\frac{\sin 2x-\sin 0}{2}+\frac{\sin 4x-\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin 2kx-\sin(2k-2)x}{2}\\
=&\frac{\sin 2kx}{2},
\end{aligned}
$$

从而

$$\frac{\sin 2kx}{\sin x}=2\left(\cos x+\cos 3x+\cdots\cos(2k-1)x\right).$$

故

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2kx}{\sin x}\right)dx=\int_0^{2\pi}2\left(\cos x+\cos 3x+\cdots\cos(2k-1)x\right)dx=0.$$

□

(2)(10 分) 设 $n\in\mathbb{N}_+$. 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2dx=\frac{n\pi}{2}.$$

证明: n 为偶数时，由 (1) 知，

$$\frac{\sin nx}{\sin x}=2\left(\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(n-1)x\right).$$

从而，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2=&4\left(\cos x+\cos 3x+\cdots\cos(n-1)x\right)^2\\
=&4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\cos^2(2k-1)x+\sum_{1\le i,j\le\frac{n}{2},\,i\ne j}\cos(2i-1)x\cos(2j-1)x\right)\\
=&4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1+\cos 2(2k-1)x}{2}+\sum_{1\le i,j\le\frac{n}{2},\,i\ne j}\frac{\cos 2(i+j)x+\cos 2(i-j)x}{2}\right)\\
=&n+2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\cos 2(2k-1)x+\sum_{1\le i,j\le\frac{n}{2},\,i\ne j}\cos 2(i+j)x+\cos 2(i-j)x)\right).
\end{aligned}
$$

注意到对任意的 $m\in\mathbb{Z}-\{0\}$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2mxdx=\frac{\sin 2mx}{2m}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0,\tag{0.2}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} n+2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \cos 2(2k-1)x + \sum_{1\le i,j\le \frac{n}{2},\, i\ne j} \cos 2(i+j)x+\cos 2(i-j)x)\right) dx \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} n dx \\
=&\frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

n 为奇数时，注意到

$$
\begin{aligned}
&\sin x(\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos(n-1)x) \\
=&\frac{\sin 3x-\sin x}{2}+\frac{\sin 5x-\sin 3x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx-\sin(n-2)x}{2} \\
=&\frac{\sin nx-\sin x}{2},
\end{aligned}
$$

从而

$$
\frac{\sin nx}{\sin x} = 1+2\left(\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos(n-1)x\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 =&1+4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos 2kx\right)+4\left(\cos 2x+\cos 4x+\cdots \cos(n-1)x\right)^2 \\
=&1+4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos 2kx\right)+4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos^2 2kx+\sum_{1\le i,j\le \frac{n-1}{2},\, i\ne j} \cos 2ix\cos 2jx\right) \\
=&1+4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos 2kx\right)+4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1+\cos 4kx}{2}+\sum_{1\le i,j\le \frac{n-1}{2},\, i\ne j} \frac{\cos 2(i+j)x+\cos 2(i-j)x}{2}\right) \\
=&n+4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos 2kx\right)+2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos 4kx+\sum_{1\le i,j\le \frac{n-1}{2},\, i\ne j} \cos 2(i+j)x+\cos 2(i-j)x)\right).
\end{aligned}
$$

由(0.2)，有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} n+4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos 2kx\right)+2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos 4kx+\sum_{1\le i,j\le\frac{n-1}{2},\, i\neq j}\cos 2(i+j)x+\cos 2(i-j)x\right) dx\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} n dx\\
=&\frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

综上，对任意的 $n\in\mathbb{N}_+$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx=\frac{n\pi}{2}.$$

□