人工智能引论

Homework 1

内容：数学基础

学号：　姓名：

1. **题目：** 某公司有四个生产车间，各车间员工人数分别为：A 车间 10 人，B 车间 15 人，C 车间 20 人，D 车间 5 人。各车间员工生产的产品合格率分别为 0.9、0.8、0.7、0.6。现从公司中随机任选一名员工，求其生产的产品合格的概率。

   解答：

   四个车间总人数为 $10 + 15 + 20 + 5 = 50$ 人。

   从中任取一人，记抽到的人属于 A 车间的概率为 $P(A)$，其余车间定义类似。

   则有
   $$P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(C) = 0.4, P(D) = 0.1 \tag{1}$$

   那么产品合格的概率为
   $$P = P(A) \times 0.9 + P(B) \times 0.8 + P(C) \times 0.7 + P(D) \times 0.6 = 0.76 \tag{2}$$

2. **题目：** 在一所学校中，男生中有 30%是近视，女生中有 20%是近视，现在从男女生人数相等的学生群体中随机挑选一名学生，已知该学生是近视，问此人是男生的概率是多少?

   解答：

   记男生近视的概率为 $P(A) = 0.3$，女生近视的概率为 $P(B) = 0.2$；学生群体中一学生为男生的概率为 $P(C) = 0.5$，为女生的概率为 $P(D) = 1 - P(C) = 0.5$。

   则一学生近视的概率为
   $$P(E) = P(A) + P(B) = 0.5 \tag{3}$$

   那么
   $$P(C|E) = \frac{P(CE)}{P(E)} = \frac{P(A)}{P(E)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6 \tag{4}$$

3. **题目：**某人给四位亲友各写了一封信，然后随机地装入 4 个写好地址的信封中，且每个信封装一封信，问：
(1) 4 封信都装对了的概率；
(2) 4 封信都装错了的概率。

解答：

(1) 将 4 封信装入 4 个信封，共有 $4! = 24$ 种装法。

4 封信都装对的概率为 $P_1 = \dfrac{1}{24}$。

(2) 记四个信封分别为 A, B, C, D，四封信分别为 a, b, c, d。

先考虑 a，它有 B, C, D 这 3 种选择，不妨设它放进了 B，然后考虑放 b。

(i) 如果它放在了 A，那么 c 和 d 只有 1 种放法。

(ii) 如果它不放在 A，那么有 C 和 D 两种选择。放入以后剩下的 c 和 d 放法都是唯一的。

故共有 $3 \times (1 + 2) = 9$ 种放法。

4 封信都装错的概率 $P_2 = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$。

4. **题目：**一袋中有 8 个球，编号为 1 至 8. 现从中随机取出 5 个球，设随机变量 X 表示取出的 5 个球中的最小号码。求 X 的分布律和分布函数。

解答：

易知 $1 \leq X \leq 4$。

从 8 个球中任取 5 个，共有 $C_8^5 = 56$ 种取法。

若 $X = 1$，先取 1，然后从 2-8 中任取 4 个球。故此时的概率为

$$P(X = 1) = \frac{C_7^4}{56} = \frac{5}{8} \tag{5}$$

同理可得：

$$P(X = 2) = \frac{C_6^4}{56} = \frac{15}{56} \tag{6}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_5^4}{56} = \frac{5}{56} \tag{7}$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{56} \tag{8}$$

则 X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,\ x<1\\ \frac{5}{8} & ,\ 1\le x<2\\ \frac{25}{28} & ,\ 2\le x<3\\ \frac{55}{56} & ,\ 3\le x<4\\ 1 & ,\ x\ge 4\end{cases} \tag{9}$$

5. **题目：**一箱产品中有 10 件正品，5 件次品，现从该箱中任取 3 件产品，以 X 表示取出的 3 件产品中的正品数，求 X 的方差。

   解答：

   从 15 件产品中选取 3 件产品，共有 $C_{15}^3=455$ 种选法。

   易得 X 满足 $0\le X\le 3$

   则有

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{455}=\frac{2}{91} \tag{10}$$

$$P(X=1)=\frac{C_{10}^1\cdot C_5^2}{455}=\frac{20}{91} \tag{11}$$

$$P(X=2)=\frac{C_{10}^2\cdot C_5^1}{455}=\frac{45}{91} \tag{12}$$

$$P(X=3)=\frac{C_{10}^3}{455}=\frac{24}{91} \tag{13}$$

   那么 X 的期望为

$$E(X)=\sum_{i=0}^{3} i\cdot P(X=i)=2 \tag{14}$$

   则 X 的方差为

$$D(X)=\sum_{i=0}^{3}(i-E(X))^2\cdot P(X=i)=\frac{52}{91} \tag{15}$$

6. **题目：**连续性随机变量 X 的概率密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}a\sqrt{x} & ,\ 0\le x\le 1\\ 0 & ,\ 其他\end{cases} \tag{16}$$

(1) 求常数 a 的值；

(2) 求随机变量 X 的分布函数；

(3) 求 $P(X>0.25)$。

解答：

(1) 概率密度函数满足归一化条件，有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = a\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}a = 1 \tag{17}$$

得到 $a=\frac{3}{2}$

(2) 当 $X\leq 0$ 时，有

$$P(X\leq x)=0 \tag{18}$$

当 $0<x\leq 1$ 时，有

$$P(X\leq x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{t}\mathrm{d}t = x^{\frac{3}{2}} \tag{19}$$

当 $x>1$ 时，有

$$P(X\leq x)=1 \tag{20}$$

则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,\ x\leq 0 \\ x^{\frac{3}{2}} & ,\ 0<x\leq 1 \\ 1 & ,\ x>1 \end{cases} \tag{21}$$

(3) 考虑到 $F(0.25)=(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$,

我们有

$$P(X>0.25)=1-P(X\leq 0.25)=1-F(0.25)=\frac{7}{8} \tag{22}$$

7. **题目：** 设随机变量 X 的概率密度为：

$$f(x)=2e^{-2x}, \qquad 0<x<+\infty \tag{23}$$

(1) 求 $E(X)$；

(2) 求 $D(X)$。

解答：

(1) 我们有

$$E(X)=\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}xe^{-2x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}(e^{-2x})=\frac{1}{2} \tag{24}$$

(2) 我们有

$$D(X)=\int_0^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}(x-\frac{1}{2})^2\mathrm{d}(e^{-2x})=\frac{1}{4} \tag{25}$$