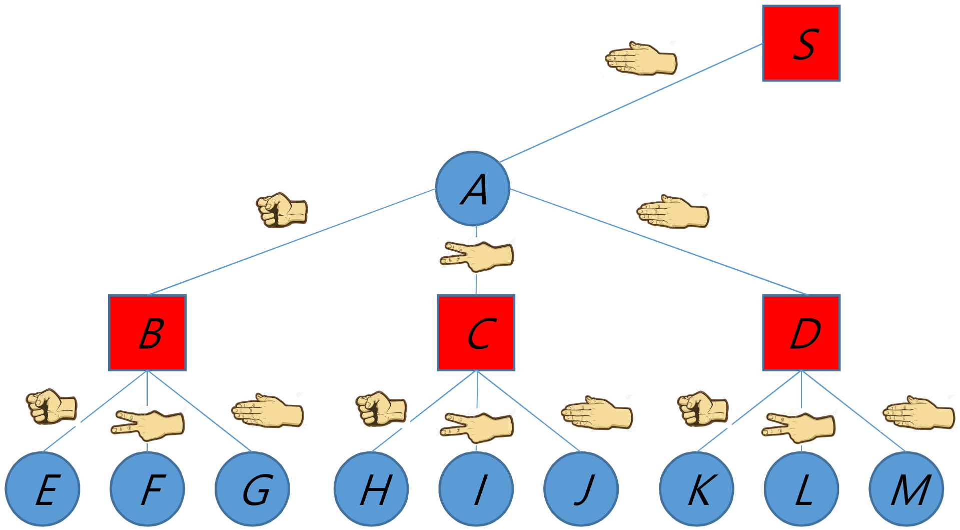
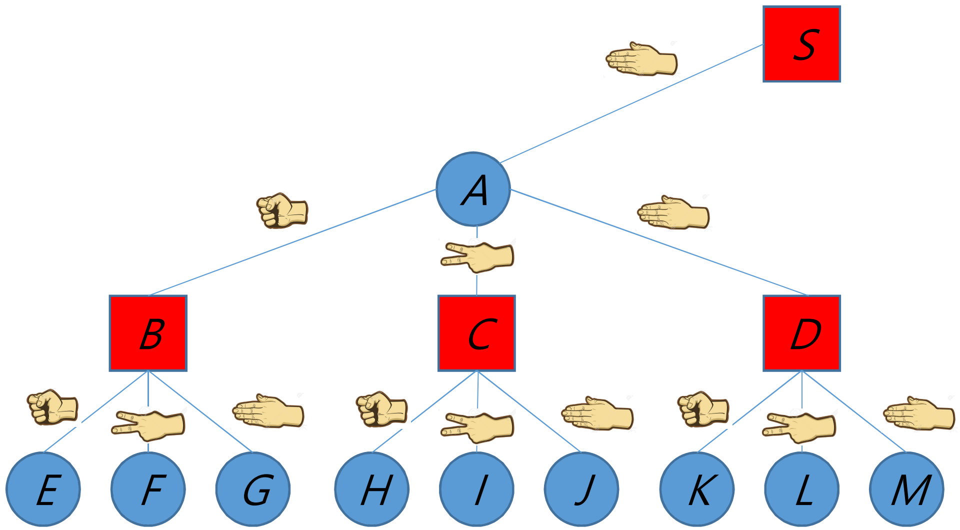
동적 계획법

Quiz #2

- 교대로 가위, 바위, 보를 하는 게임을 가정한다. 선수와 후수 모두 자기 차례에서 상대에게 이기는 수를 내면, 손가락이 펴진 개수만큼 득점을 한다. 지거나 비기면 득점하지 못한다. 당연히 주먹으로 이겨도 득점은 없다. 내가 선수라 가정할 때, 초기 상태가 보자기라고 하면 다음과 같은 트리를 작성할 수 있다.



Quiz #2(cont'd)



- 말단 노드들의 평가값 구하기
  (단, 평가값=내 득점–상대 득점)
- 각 노드의 평가값 구하기
- 가지치기가 가능하면 가지치기를 하고 왜 가지치기 했는가 설명하기

목차

- 다단계 결정 문제
- 동적 계획법
- 동적 계획법의 적용

다단계 결정 문제

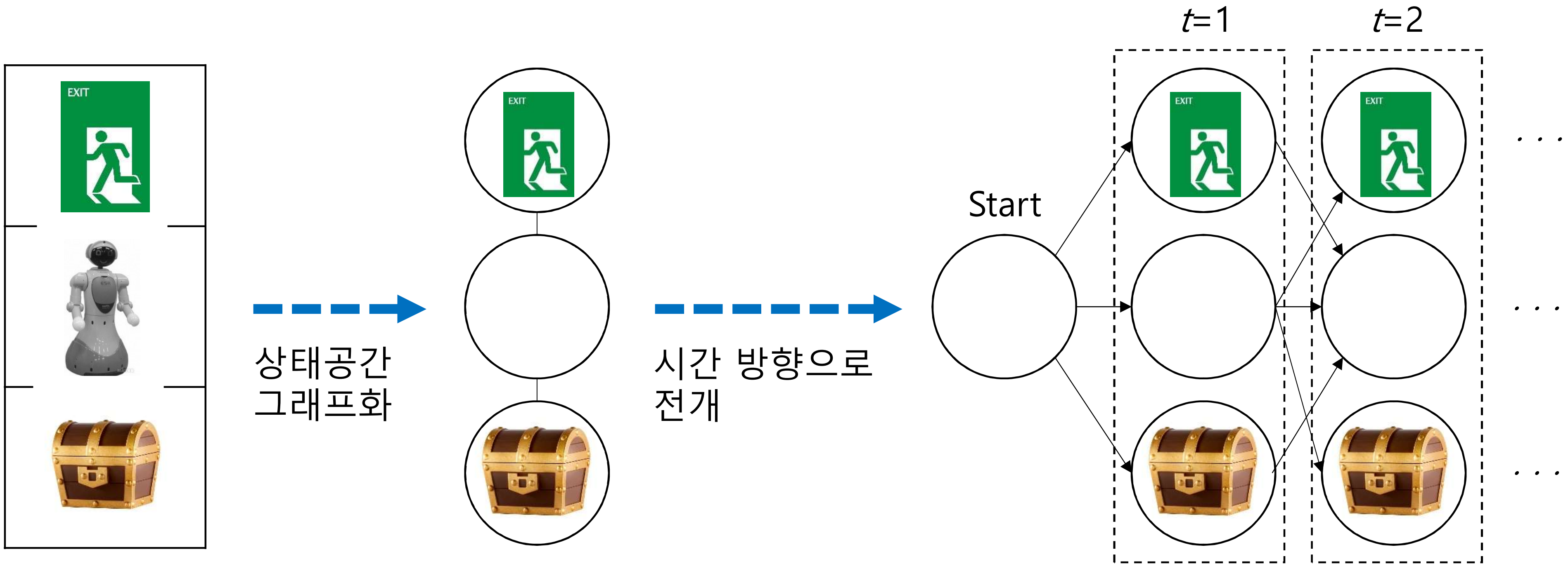
- 깊이우선, 너비우선 탐색, A*알고리즘 등을 사용하여 할 수 있던 것들
  - 상태를 탐색하고, 목표 상태를 도달하는 방법을 찾음
  - 비용까지 고려하여 최소비용으로 목표 상태를 도달하는 방법을 찾음
  - 경로와 목표 상태에 도달하는 것 외에 다른 것을 고려하지는 않았음

- 추가 고려 사항
  - 시간에 따른 상황변화
  - 목표 상태가 여럿인 경우

다단계 결정 문제(cont'd)

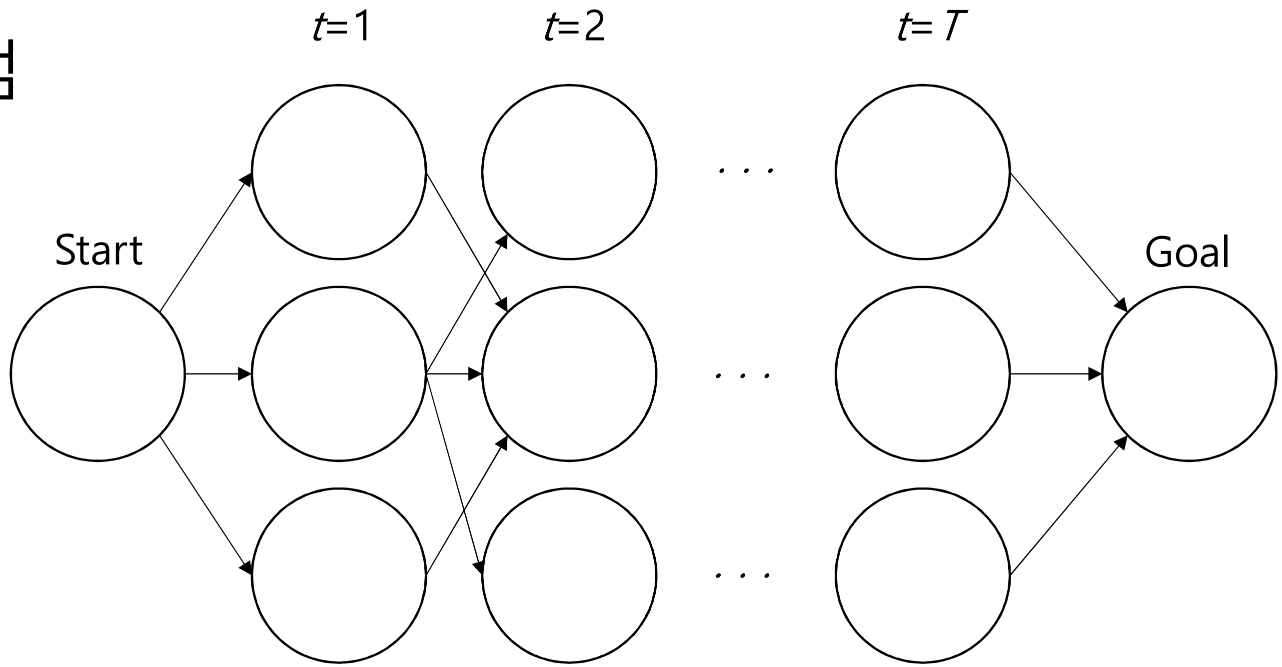
- 시간축이 존재하는 다단계 의사결정 문제
  - 어떤 시점 t의 상태 s_t에서 선택한 행동 a_t가 이득 r_{t+1}과 다음 시각의 상태 s_{t+1}을 결정하고, 시각 $t+1$에서 취한 행동 a_{t+1}이 시각 $t+2$의 상태 s_{t+2}을 결정함
  - 이때 시각 T까지 들게 될 비용의 합, 혹은 이익을 최적화하는 문제를 다단계 결정 문제(multi-stage decision problem)이라 함

다단계 결정 문제(cont'd)



다단계 결정 문제(cont'd)

- 시점 t에서의 상태와 시점 t+1에서의 상태를 잇는 유향 에지가 행동을 나타냄
- 같은 장소라도 시점이 다르면 서로 다른 상태로 표현됨
- 시간은 역행하지 않으므로 유향 에지임



다단계 결정 문제(cont’d)

- 이러한 그래프에서 최대 누적 이득을 얻을 수 있는 행동 연속열은?
- 어떻게 이것을 효율적으로 계산할 수 있을까?
- 이러한 문제에 대한 해를 효율적으로 구하기 위한 방법이 동적 계획법(dynamic programming)임

동적 계획법

- 시각 $t = 1$에서 $t = T$까지에 대한 다단계 결정 문제의 해를 구하는 방법은?
  - 다단계 결정은 선택한 행동의 연속열로 볼 수 있음
  - 결정적 시스템에서는 상태의 연속열을 행동의 연속열로 생각할 수 있으므로 다단계 결정은 T개의 상태 변수의 리스트$(s_1, s_2, \ldots, s_T)$로 나타낼 수 있음
  - 위의 다단계 결정을 통해 얻는 경로의 평가 함수를 J라고 할 때, 이 함수의 값이 최대가 되도록 하는 것이 경로 탐색의 목적이 됨

$$J(s_1, s_2, \ldots, s_T) \rightarrow max$$

동적 계획법(cont'd)

- 시각 $t = 1$에서 $t = T$까지에 대한 다단계 결정 문제의 해를 구하는 방법은?(cont'd)

$$J(s_1, s_2, \dots, s_T) \rightarrow max$$

  - 이때, 상태 공간의 상태 수가 N이라고 하면, 상태 변수의 리스트는 최대 N^T가 존재함
  - 상태가 3개에 10단계라고 하면, 3^{10}으로 약 6만 가지이고, 20단계이면 약 35억개임
  - 그러므로 모든 경로를 열거하며 평가하는 방법을 택하면 계산량은 지수적으로 증가하여 해결할 수가 없는 문제가 됨

동적 계획법(cont’d)

- 시각 $t = 1$에서 $t = T$까지에 대한 다단계 결정 문제의 해를 구하는 방법은?(cont’d)
  - 그러므로 다단계 결정 문제에서 평가 함수 J를 상태의 쌍을 이루는 두 개의 변수에 대한 함수 h_t의 합으로 나타내면 계산량을 많이 줄일 수 있음
  - 동적 계획법을 사용하면 실제 계산량은 지수증가에서 N의 제곱에 비례하는 수준으로 줄어듦

$$J(s_1, s_2, \ldots, s_T) = \sum_{k=2}^{T} h_t(s_{t-1}, s_t)$$

$$r_t = h_t(s_{t-1}, s_t)$$

동적 계획법(cont'd)

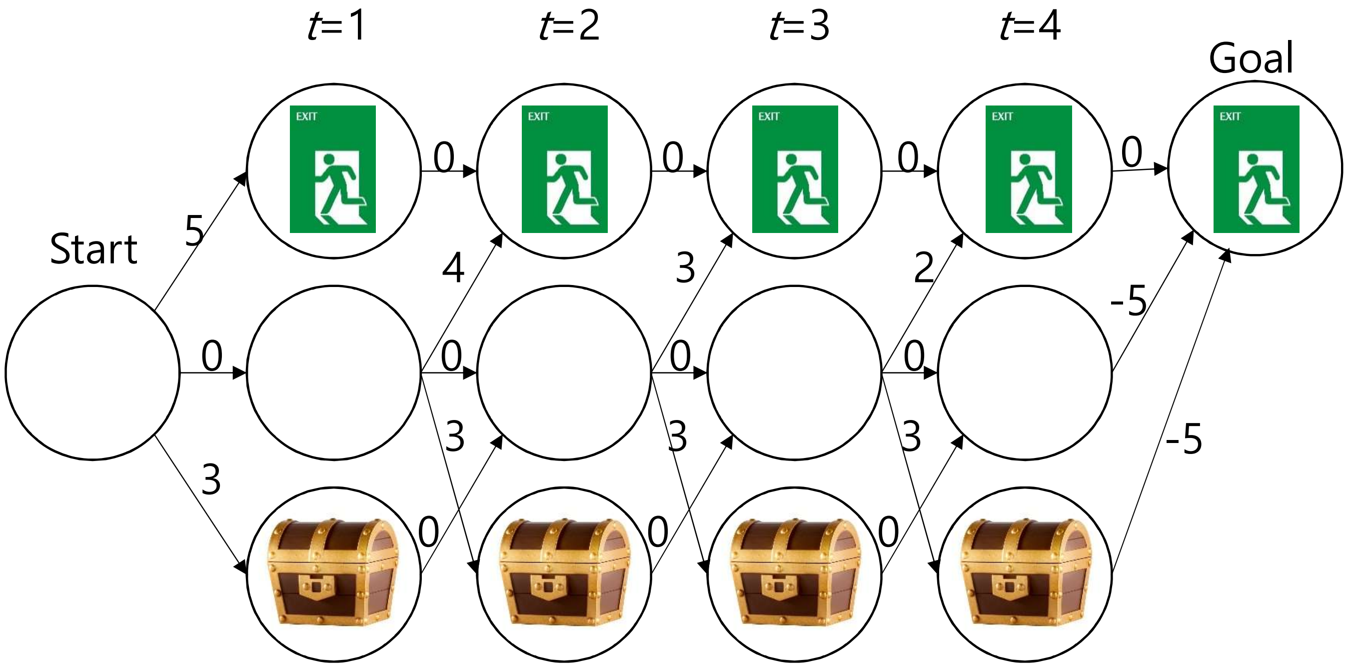
- 시각 $t = 1$에서 $t = T$까지에 대한 다단계 결정 문제의 해를 구하는 방법은?(cont'd)

$$J(s_1, s_2, \ldots, s_T) = \sum_{k=2}^{T} h_t(s_{t-1}, s_t)$$

$$r_t = h_t(s_{t-1}, s_t)$$

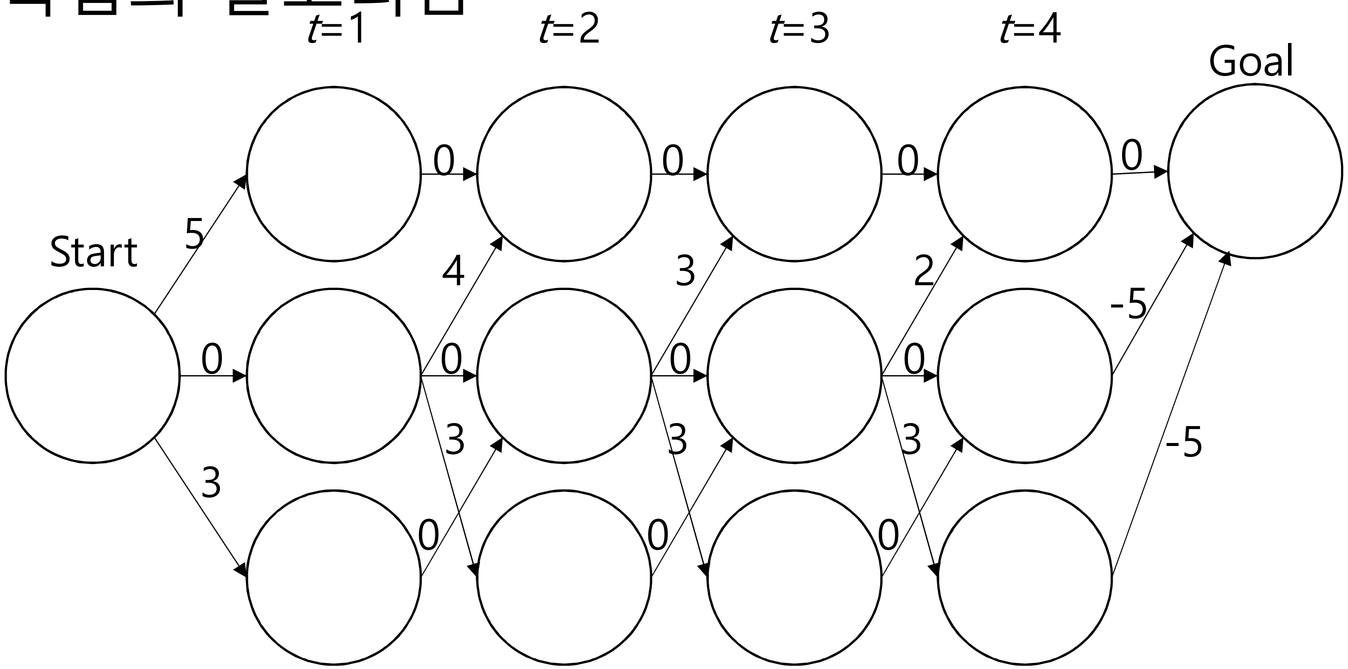
  - h_t는 시점 t에 대한 각각의 유향 에지 (s_{t-1}, s_t)에 대한 평가값을 부여하는 평가 함수임

동적 계획법(cont'd)



동적 계획법(cont'd)

- 동적 계획법의 알고리즘

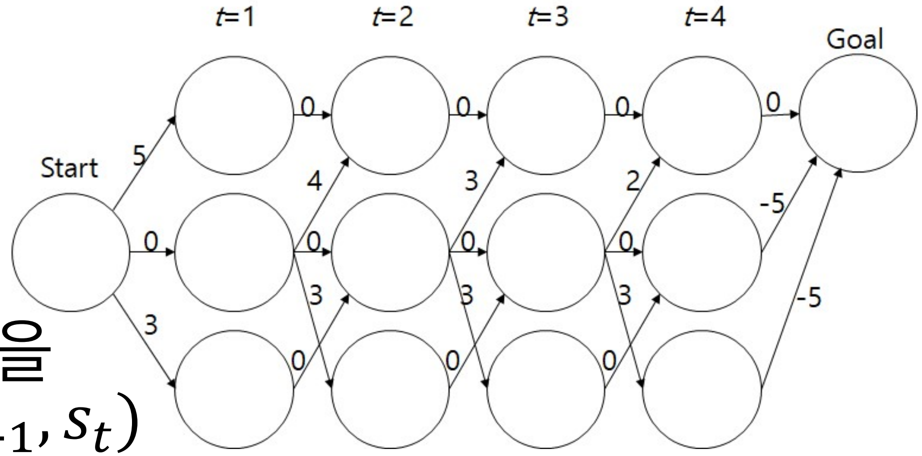


동적 계획법(cont'd)

- 동적 계획법의 알고리즘(cont'd)

for t=1 to T do
  $F_t(s_T) =$

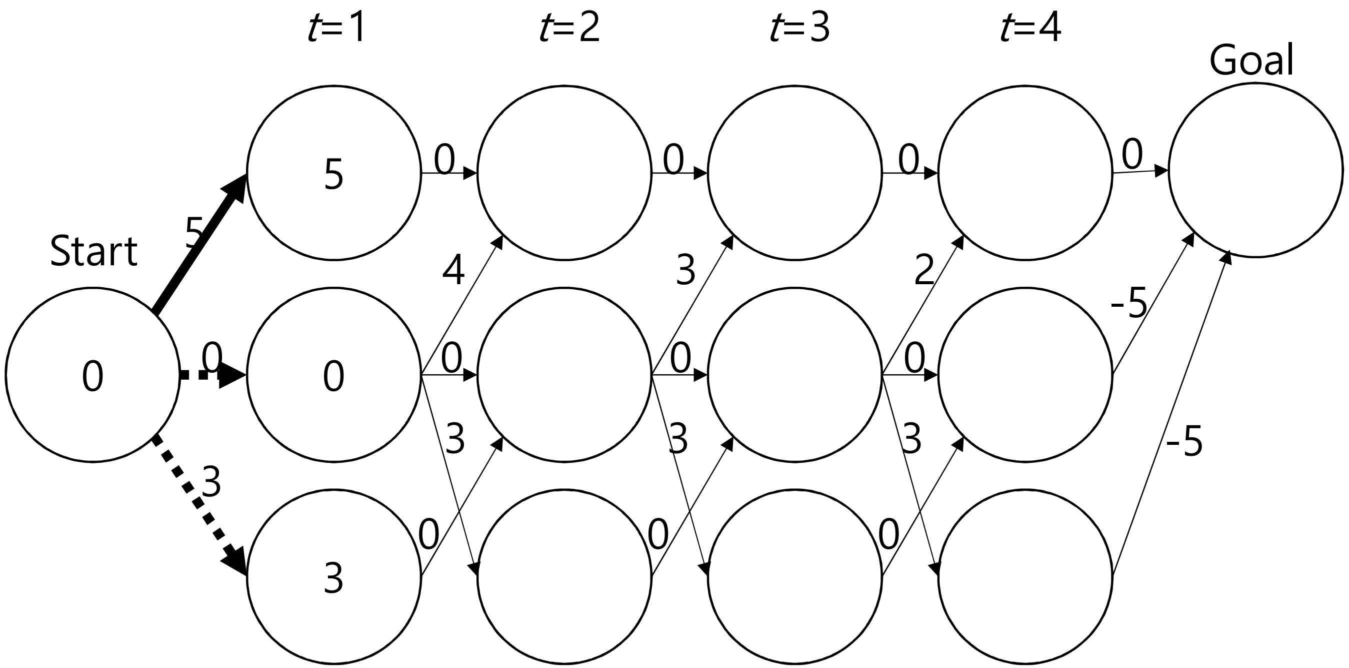
동적 계획법의 적용



- 각각의 유향 에지위의 숫자는 그 행동을 취할 때 얻을 수 있는 이득, $r_t = h_t(s_{t-1}, s_t)$
- 출구에 이르기까지 이득의 합이 최대가 되도록 하는 것이 목표임, t=4까지 출구에 도달하도록 함
- 만약 t=4가 지나도록 출구에 도달하지 못하면 -5의 이득
- 보물 상자를 얻을 때 이득은 3이며 횟수에 제한이 없음
- 출구에 일찍 도달할 수록 이득이 높고 도착이 시각이 1씩 늦을 수록 이득이 줄어듦
- 보물 상자에는 머물러 있을 수가 없음
- 출구에 오면 떠날 수가 없음

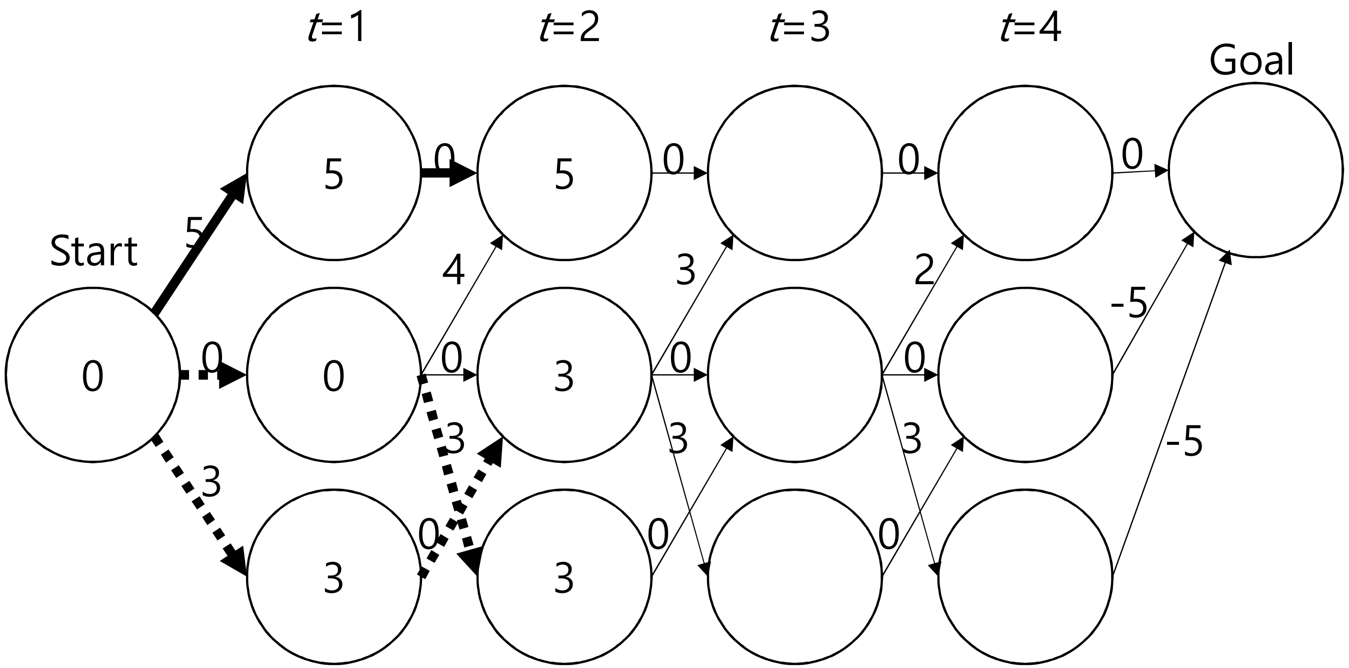
동적 계획법의 적용(cont’d)

- 1단계



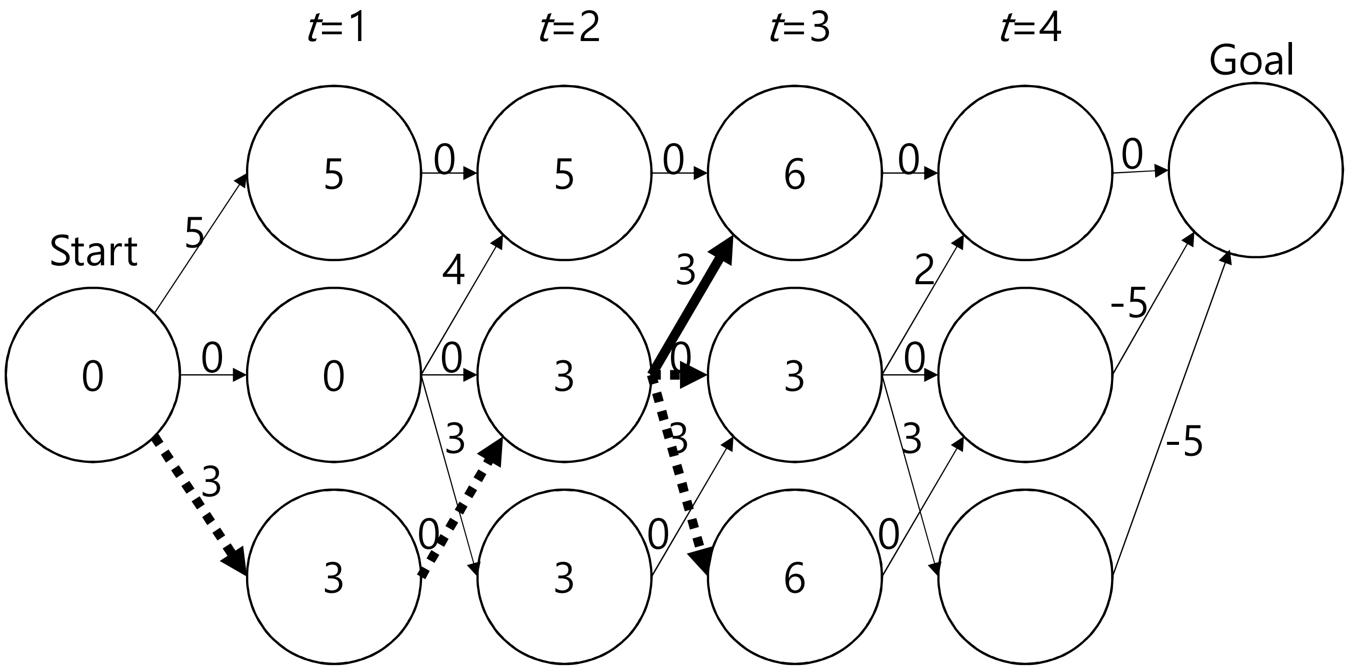
동적 계획법의 적용(cont'd)

- 2단계



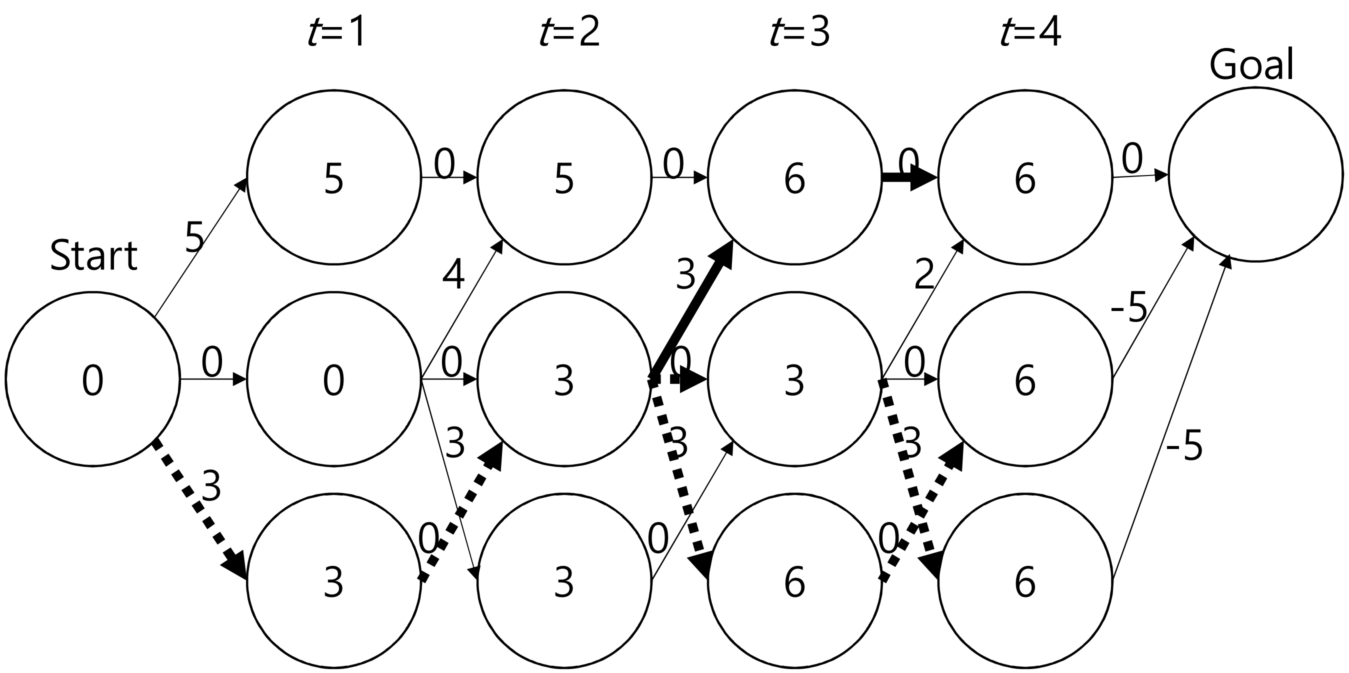
동적 계획법의 적용(cont'd)

- 3단계



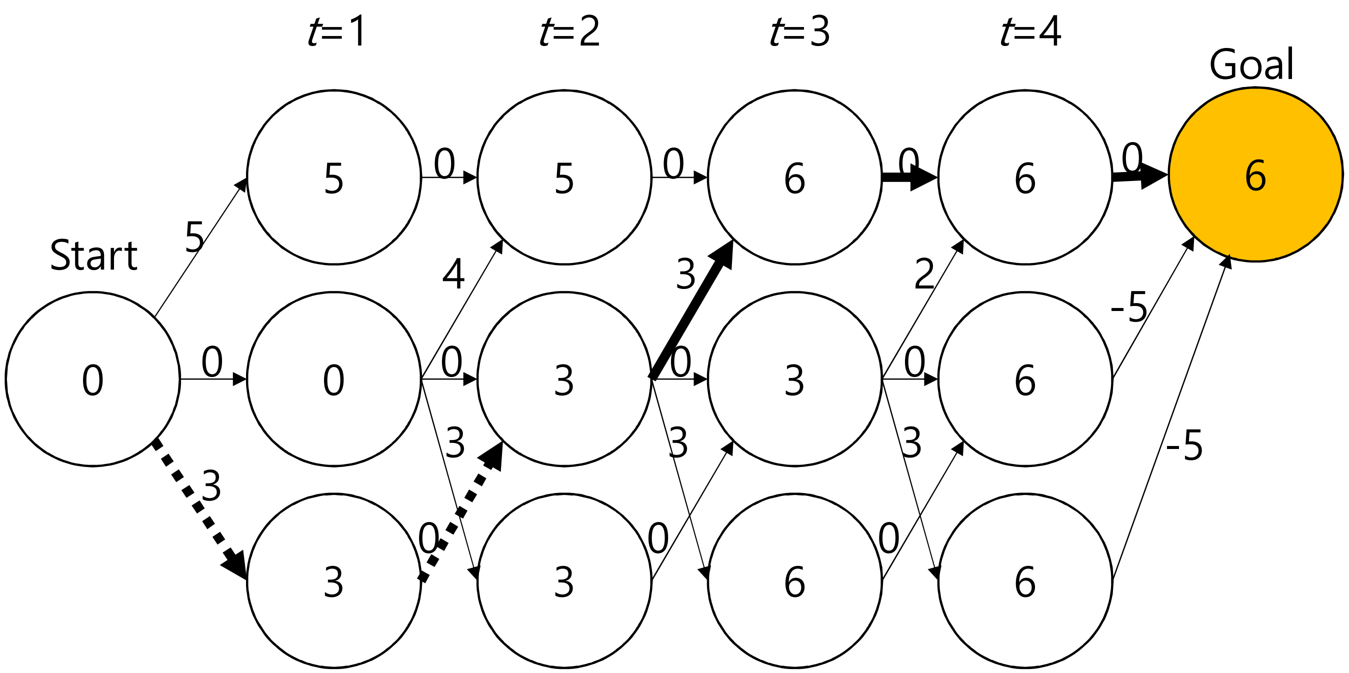
동적 계획법의 적용(cont'd)

- 4단계



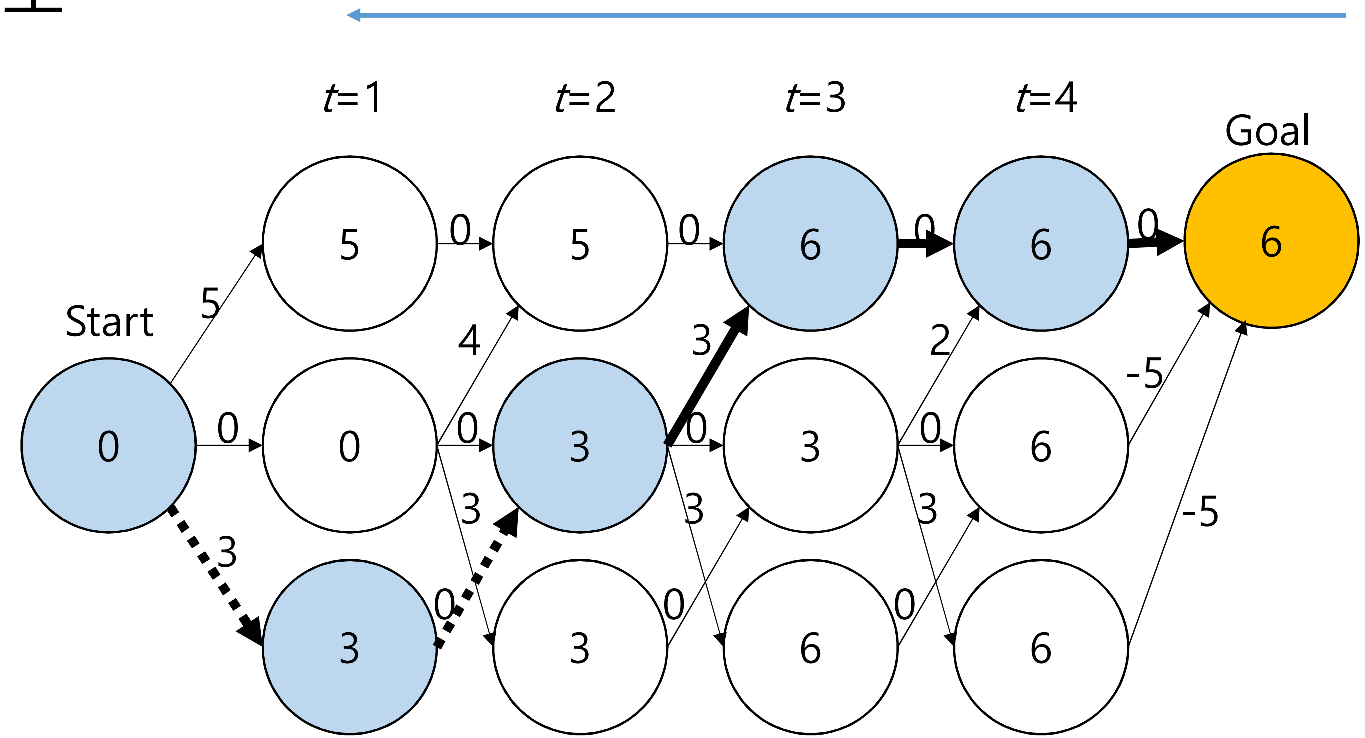
동적 계획법의 적용(cont'd)

- 5단계



동적 계획법의 적용(cont'd)

- 최적 경로



동적 계획법의 적용(cont'd)

- 편집 거리(edit distance)
  - 문자열과 문자열의 거리를 재는 척도
  - 두 문자열이 얼마나 다른가?(ex. DNA 염기 서열이 얼마나 다른가?)

- 문자열 사이의 거리를 정의하는 가장 심플한 방법으로 해밍 거리(Hamming distance)도 있음
  - 문자열에 포함된 문자를 앞에서부터 하나씩 비교하여 몇 개나 다른가를 출력하는 거리 함수임
    'ILOVEYOU'와 'YLOVEIOU'는 첫 번째 I, Y 그리고 여섯 번째, Y와 I가 달라서 해밍 거리는 2임

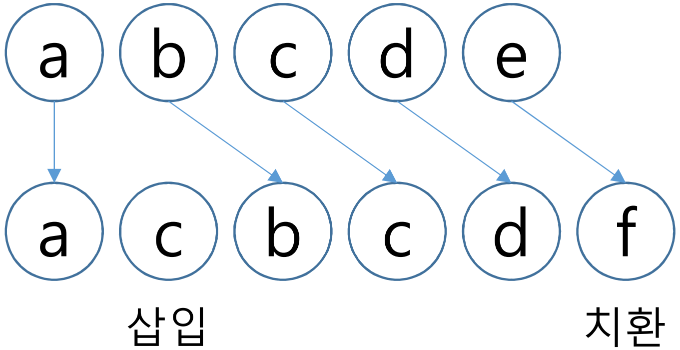
동적 계획법의 적용(cont'd)

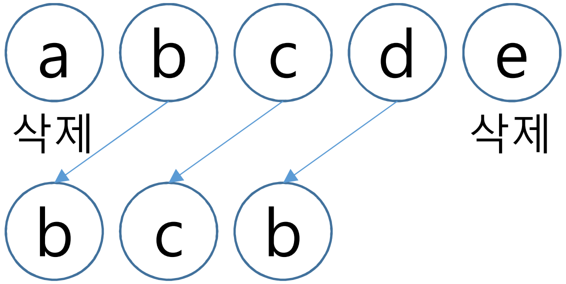
- 그런데 서로 어긋나는 문자열을 해밍 거리로 계산하면 우리가 직관적으로 인식하는 것보다 거리 차이가 많이 남
  - ILOVEYOU와 LOVEYOU는 I가 하나 빠진 것임에도 불구하고 해밍 거리가 8임
  - 그러므로 문자의 추가나 생략에 대한 변화도 한 글자의 (상태)변화로 생각하여 거리를 계산하는 방법이 편집 거리임

동적 계획법의 적용(cont'd)

문자열1	문자열2	해밍 거리	편집 거리	설명
abcd	abcd	0	0	문자가 바뀌지 않았고 거리는 0임
abcd	abed	1	1	한 문자가 바뀌어 거리 1이 됨
abcd	acd	3	1	해밍 거리로는 3문자가 바뀌었고, 편집 거리로는 'b' 한 글자만 지워진 것임
abcd	axbcd	4	1	해밍 거리로는 4문자가 바뀌었고, 편집 거리로는 'x' 한 글자만 추가된 것임

동적 계획법의 적용(cont'd)





동적 계획법의 적용(cont’d)

	$	a	e	b	c
$	0	1	2	3	4
a	1				
b	2				
c	3				
d	4				**Goal**

동적 계획법의 적용(cont'd)

- 두 문자열 'ab'와 'ae'를 비교하는 경우

	$	a	e
	0	1	
a	1		
b			

치환:1
일치: 0

삭제: 1

삽입: 1

동적 계획법의 적용(cont'd)

	$	a	e	b	c
$	0	1	2	3	4
a	1	0	1	2	3
b	2	1	1	1	2
c	3	2	2	2	1
d	4	3	3	3	2

Summary

- 결정 시스템에 대한 다단계 결정 문제를 형식화 하였음
- 상태 공간을 시간 방향의 그래프로 전개하는 방법을 살폈음
- 동적 계획법의 알고리즘을 배웠음
- 동적 계획법을 이용하여 문자열의 편집 거리를 계산하는 방법을 살폈음