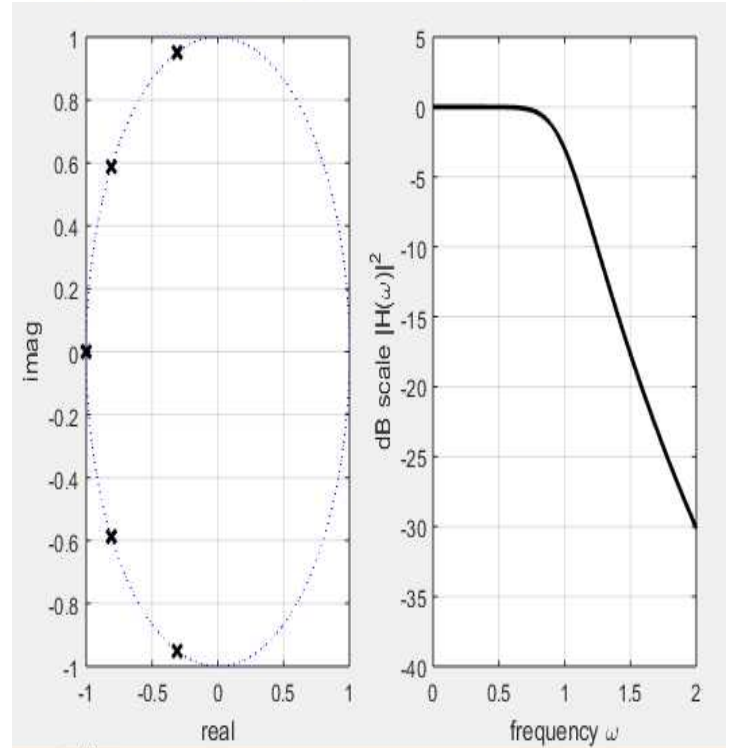


3.1 아날로그 프로토타입 필터

• Butterworth 필터

- (1) **실습** 5차 Butterworth LPF의 전달함수를 구하고 pole-zero plot을 반지름 1인 원과 함께 그래프에 표시하라. (butter 함수 이용)
- (2) **실습** (1)에서 구한 필터의 주파수 응답의 크기를 그래프에 표시하고 설계 목표에 맞는지 확인하라. (주파수 응답은 전력에 대해 dB-scale로 표시하라. 즉, $10 \log_{10} |H(\omega)|^2$ 으로 환산하여 표시할 것.)

```
1 - clc;
2 - clear;
3 - theta = 0:0.01:2*pi;
4 - [z, p, k] = cheblap(5,10);
5 - figure(1)
6 - subplot(1,2,1)
7 - plot(cos(theta),sin(theta),'b:');
8 - hold on;grid on
9 - plot(real(z),imag(z),'ko',real(p),imag(p),'kx','LineWidth',2)
10 - xlabel('real');ylabel('imag')
11
12 - [num, den] = zp2tf(z,p,k);
13 - w = linspace(0,5,1000);
14 - H = freqs(num,den,w);
15 - dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);
16 - subplot(1,2,2)
17 - plot(w,dB_scale_H,'k','LineWidth',2)
18 - grid on;axis([0,2,-40,5])
19 - xlabel('frequency #omega');ylabel('dB scale |H(#omega)|^2')
```



butter()함수를 사용하여 5차 Butterworth LPF를 구현하였습니다. 주어진 조건에 맞게 pole zero를 단위 원과 함께 그렸습니다. Butterworth LPF의 특징은 zero가 없고 시스템이 안정한 좌반평면에 등간격으로 위치하는 pole만 있다는 것과, 통과대역의 응답이 평평하다는 것인데, 실습결과를 통해 Butterworth LPF의 특징을 확인했습니다. 주파수 응답을 dB스케일로 보기 위해 주파수 응답을 dB스케일 수식에 대입하여 나타내었습니다. 또한 버터워스 필터의 차수 'N'이 증가 할수록 천이대역은 날카롭게 된다. 즉, 이상적인 LPF필터와 근접하게 된다. 이러한 필터는 통과 범위 지역에 있어 진폭의 선형성 유지가 필수적인 적용상황에 최적으로 사용할 수 있습니다.

• Chebyshev Type-I/II 필터

- (1) **실습** 다음과 같은 파라미터를 갖는 Chebyshev Type-I/II LPF의 전달 함수를 구하고 pole-zero plot을 반지름 1인 원과 함께 그래프에 표시하라. (cheblap, cheb2ap 함수 이용)

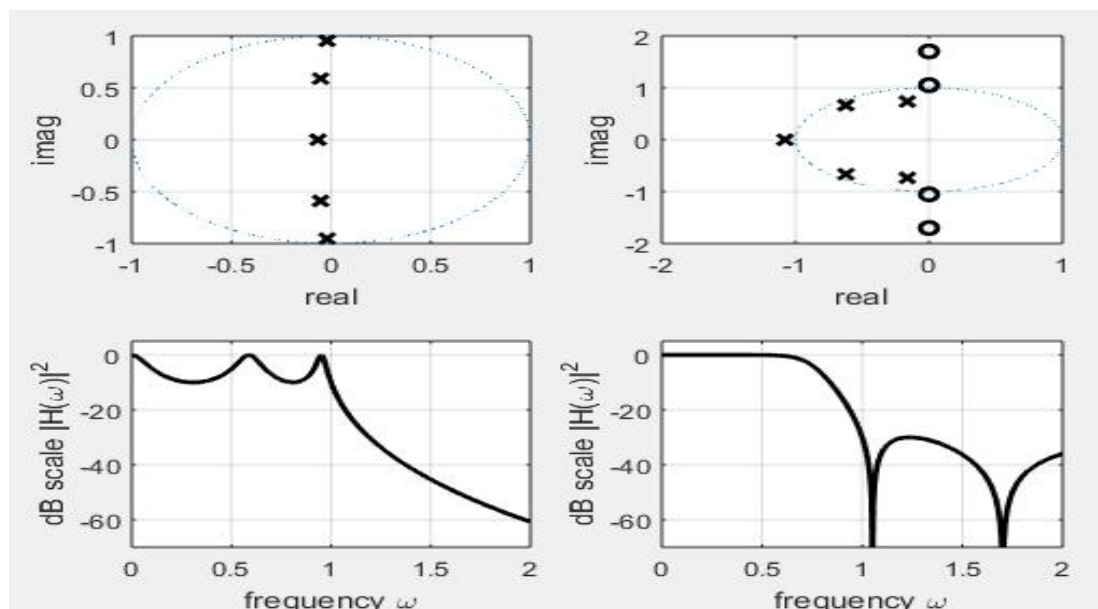
* 차수 : 5차

* $R_p = 10$ dB, $R_s = 30$ dB

- (2) **실습** (1)에서 구한 필터의 주파수 응답의 크기를 그래프에 표시하고 설계 목표에 맞는지 확인하라. (주파수 응답은 전력에 대해 dB-scale로 표시하라. 즉, $10 \log_{10} |H(\omega)|^2$ 으로 환산하여 표시할 것.)

```
1 - clc;
2 - clear;
3 - theta = 0:0.01:2*pi;
4 - [z, p, k] = cheblap(5,10);
5 - figure(1)
6 - subplot(2,2,1)
7 - plot(cos(theta),sin(theta),':')
8 - hold on
9 - plot(real(z),imag(z),'ko',real(p),imag(p),
10 - grid on
11 - xlabel('real')
12 - ylabel('imag')
13
14 - [num, den] = zp2tf(z,p,k);
15 - w = linspace(0,5,1000);
16 - H = freqs(num,den,w);
17 - dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);
18 - subplot(2,2,3)
19 - plot(w,dB_scale_H,'k','LineWidth',2)
20 - grid on;
21 - axis([0,2,-70,5])
22 - xlabel('frequency #omega')
23 - ylabel('dB scale |H(#omega)|^2')
```

```
25 - [z, p, k] = cheb2ap(5,30);
26 - subplot(2,2,2)
27 - plot(cos(theta),sin(theta),':')
28 - hold on
29 - plot(real(z),imag(z),'ko',real(p),imag(p),
30 - grid on
31 - xlabel('real')
32 - ylabel('imag')
33
34 - [num, den] = zp2tf(z,p,k);
35 - w = linspace(0,5,1000);
36 - H = freqs(num,den,w);
37 - dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);
38 - subplot(2,2,4)
39 - plot(w,dB_scale_H,'k','LineWidth',2)
40 - grid on;
41 - axis([0,2,-70,5])
42 - xlabel('frequency #omega')
43 - ylabel('dB scale |H(#omega)|^2')
```



cheblap(), cheb2ap()함수를 사용하여 5차 Chebyshev LPF를 구현하였습니다. 주어진 조건에 맞게 pole zero를 단위 원과 함께 그렸습니다. Chebyshev LPF의 특징은 리플을 허용하여 천이구간을 줄어든다는 것입니다. Chebyshev Type-1 LPF는 통과대역에 리플을 허용하여 천이구간을 줄인다는 장점과 저지대역에 왜곡이 없다는 장점이 있지만, 통과된 신호의 왜곡이 발생한다는 단점이 있습니다. Chebyshev Type-2 LPF는 직전의 필터와 반대로 저지대역에 리플을 허용하여 천이구간을 줄인다는 장점과 통과대역에 왜곡이 없다는 장점이 있지만, 저지대역의 신호가 어느정도 통과될 수 있다는 단점이 있습니다. 신호에 LPF 주파수 응답을 dB스케일로 보기 위해 주파수 응답을 dB스케일 수식에 대입하여 나타내었습니다.

앞서 말했듯이 Chebyshev Type-1 필터와 Chebyshev Type-2 필터는 한쪽 대역에서만 리플을 허용한다는 공통점이 있습니다. 조사해본 결과 Chebyshev Type-1 필터의 간단한 변환을 통해 Chebyshev Type-2 필터를 얻을 수 있고 변환 과정에서 Chebyshev Type-1에 없던 영점이 생기게 됩니다.

✓ dB스케일을 쓰는 이유?

주파수를 가지는 신호의 성질은 자연상태에서의 측정값에 비례하는 것이 아니라, dB 스케일에 정량적으로 비례하는 특성을 가지고 있다. 주파수신호는 그 자체의 magnitude(크기) 값 보다는, 그것의 지수를 취한 log스케일에 비례하는 특성을 가지며, 그것을 개념적으로 쉽게 표현하기 위해 dB 스케일을 사용합니다.

• Elliptic 필터

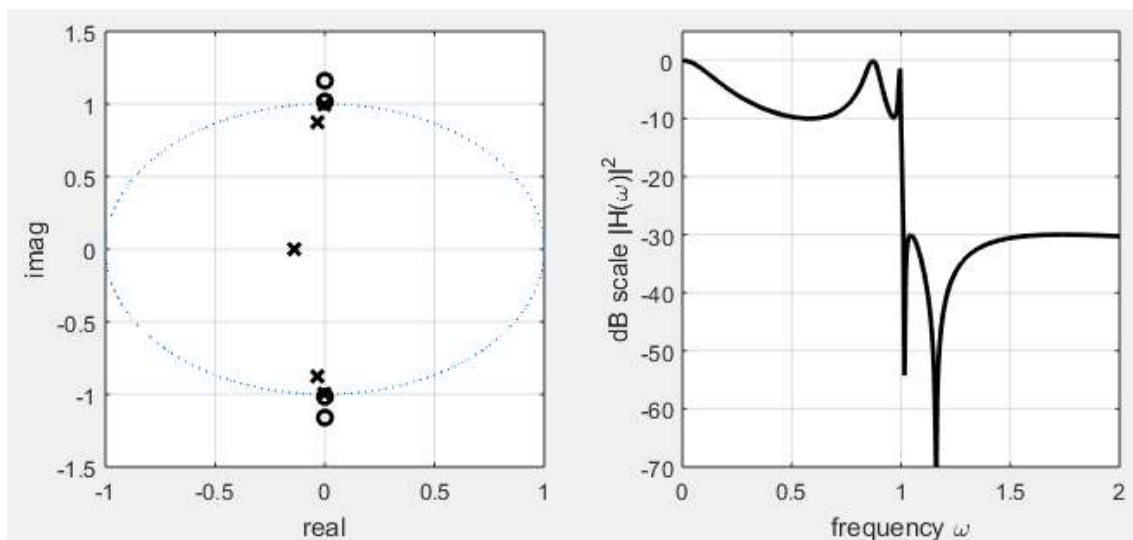
- (1) **실습** 다음과 같은 파라미터를 갖는 Elliptic LPF의 전달함수를 구하고 pole-zero plot을 반지름 1인 원과 함께 그래프에 표시하라. (ellipap 함수 이용)

* 차수 : 5차

* $R_p = 10$ dB, $R_s = 30$ dB

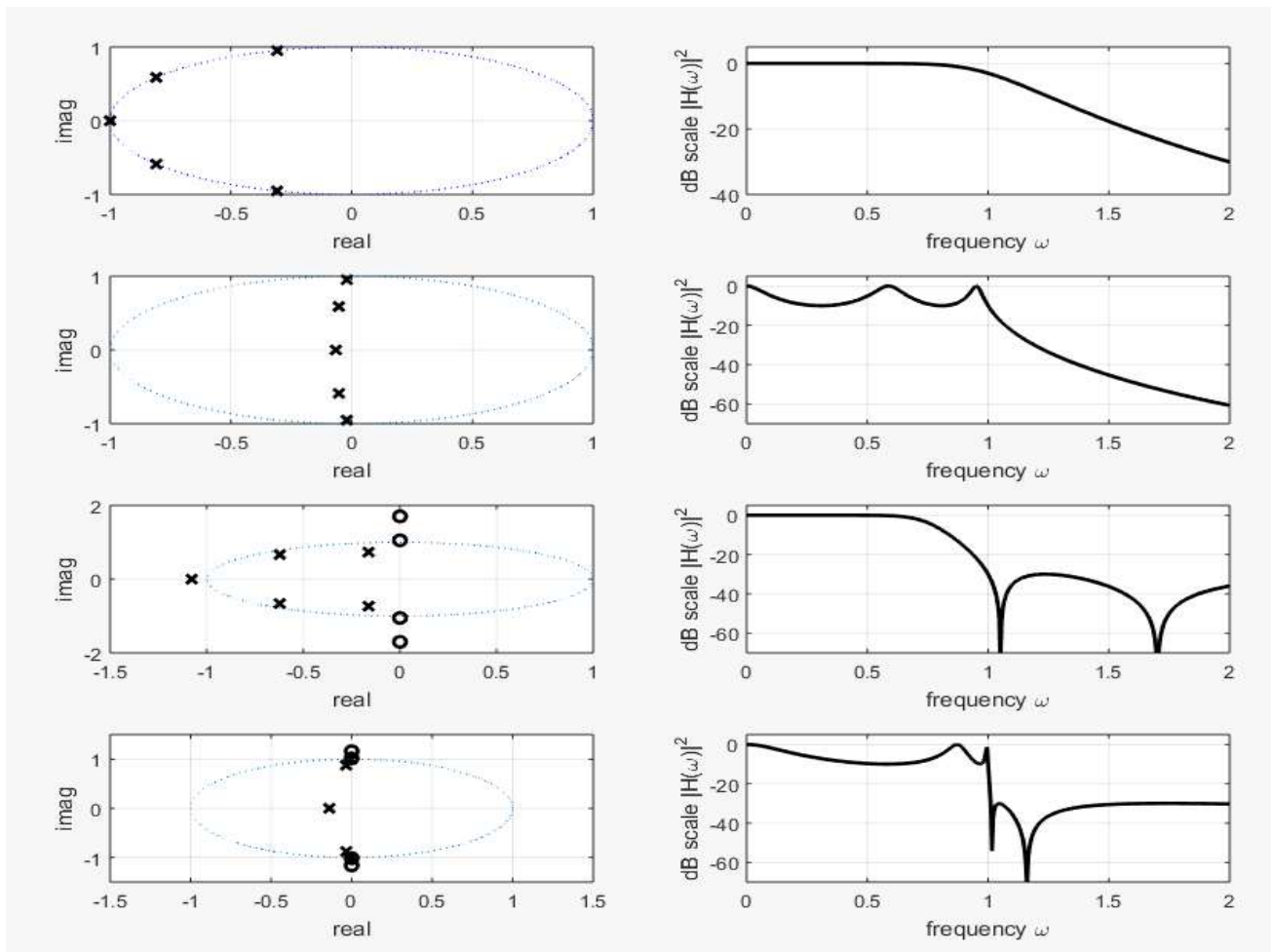
- (2) **실습** (1)에서 구한 필터의 주파수 응답의 크기를 그래프에 표시하고 설계 목표에 맞는지 확인하라. (주파수 응답은 전력에 대해 dB-scale로 표시하라. 즉, $10\log_{10}|H(\omega)|^2$ 으로 환산하여 표시할 것.)

```
1 - clc;clear;
2 - theta = 0:0.01:2*pi;
3 - [z, p, k] = ellipap(5,10,30);
4 - figure(1)
5 - subplot(1,2,1)
6 - plot(cos(theta),sin(theta),':')
7 - hold on;grid on;xlabel('real');ylabel('imag')
8 - plot(real(z),imag(z),'ko',real(p),imag(p),'kx','LineWidth',2)
9 - [num, den] = zp2tf(z,p,k);
10 - w = linspace(0,5,1000);
11 - H = freqs(num,den,w);
12 - dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);
13 - subplot(1,2,2)
14 - plot(w,dB_scale_H,'k','LineWidth',2)
15 - xlabel('frequency #omega');ylabel('dB scale |H(#omega)|^2')
16 - grid on;axis([0,2,-70,5])
```



ellipap()함수를 사용하여 5차 Elliptic LPF를 구현하였습니다. 주어진 조건에 맞게 pole zero를 단위 원과 함께 그렸습니다, Elliptic LPF의 특징은 Chebyshev Type-1/2 Filter를 융합한 필터라는점에 있습니다. 천이구간이 가장 짧다는 장점이 있지만, 통과대역과 저지대역 모두 리플을 허용하기 때문에 통과되는 신호의 왜곡과 저지대역의 신호가 통과하는 단점이 있습니다. 가장 적은 차수로 천이대역을 가장 많이 줄일 수 있는 필터입니다.

- **DEMO** 위 실습의 결과를 그래프에 함께 표시하고 비교하라. (그림 9, 10 참고)



네 가지 필터의 천이구간만 비교해보면 Elliptic LPF의 천이구간이 가장 좁고, Butterworth LPF의 천이구간이 넓습니다. 하지만 통과대역과 저지대역 모두 왜곡이 없는 필터는 Butterworth LPF 필터이므로 차수가 증가한다면 가장 이상적인 필터가 될 것 같습니다. 모든 시스템의 극점들은 좌반평면에 위치해 있으며, 시스템 안정조건을 만족하는 것을 확인할 수 있습니다.

예비보고서를 작성하면서 이상적인 필터가 되기 위해 위상은 어떤 성질을 가져야 하는지 공부를 해 보았습니다. 위의 4가지 필터는 주파수응답에 있어서는 최적의 기능을 나타냅니다. 그러나 이 필터들은 통과대역에서는 매우 비선형적인 위상 응답을 갖습니다. 이것은 여러 응용에서 바람직 하지 않은 것입니다. 위상은 전체 시스템에 있어서 중요한 문제라고 생각합니다.

기능이 가장 나쁜 것은 버터워스 필터입니다. 이것은 극대적으로 평평한 크기 응답을 갖고, 같은 저지대역 사양을 달성하기 위해 더 높은 차수의 N 을 필요로 합니다. 즉, 더 많은 극점이 필요하고, 구현하기는 더 힘들어집니다.

3.2 Butterworth 필터

- (1) **실습** 그림 11과 같은 사양의 LPF를 Butterworth 필터로 구현하고자 할때 필요한 최소 차수는 얼마인가?

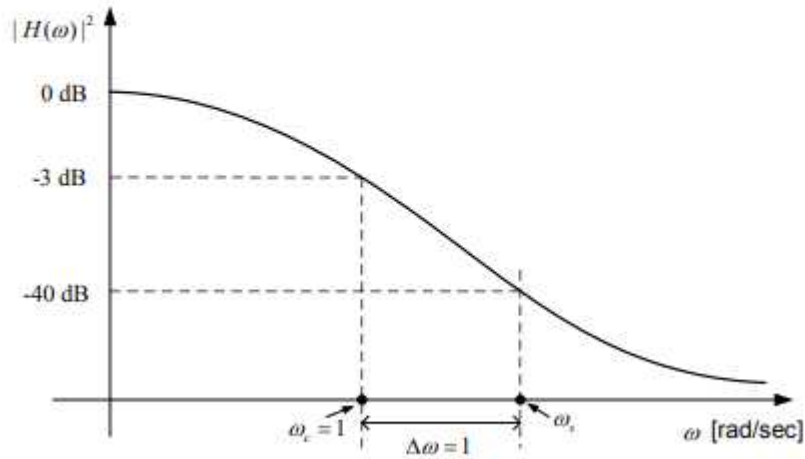


그림 11: 구현하고자 하는 필터사양.

저지대역의 기준을 -40dB로 잡고 $\Delta\omega$ 를 1로해주는 차수를 구하기위해 강의자료에 주어진 수식에 대입하여 풀어보았다.

$$N = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{1}{P_s} - 1\right)}{2\log(1 + \Delta\omega)} \right\rceil$$

여기서 주의할 점은 P_s 에 dB값이 아닌 dB스케일로 변환전의 값을 넣어야한다. -40dB는 $\frac{1}{10000}$ 이고 이를 수식에 대입하면 다음과 같다. $N = \left\lceil \frac{\log(10000 - 1)}{2\log(1 + 1)} \right\rceil$ 매트랩으로 계산해볼 결과

```
>> (log10((10000-1)) / (2*log10(1+1)))
```

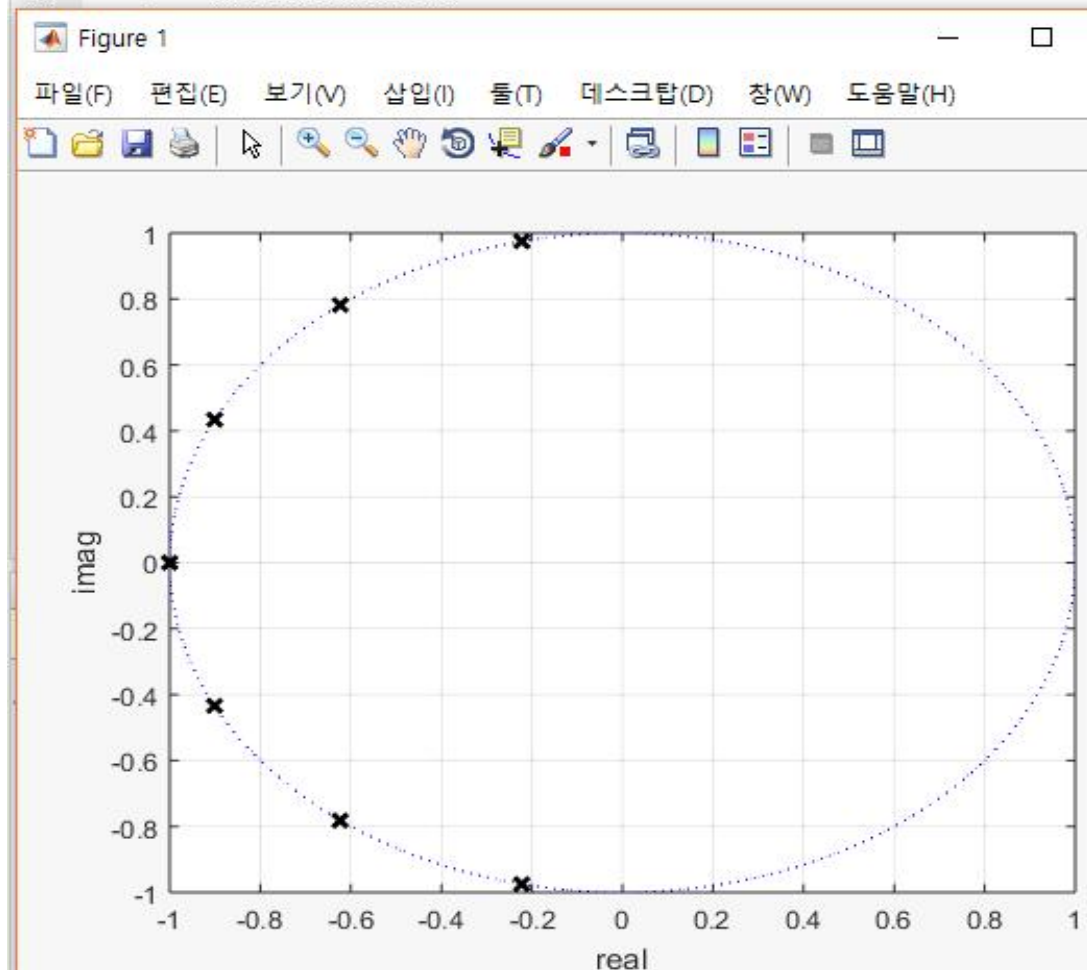
```
ans =
```

```
6.6438
```

6.6538이 나오고 올 성능을 만족하는 최소차수는 7이 된다.

- (2) 실습 DEMO 위에서 구한 차수의 Butterworth 필터 전달함수를 구하고 pole-zero plot을 반지름 1인 원과 함께 그래프에 표시하라. (buttap 함수 이용) (그림 12 참고)

```
1 -   clc;clear;
2 -   n = (log10((10000-1)) / (2*log10(1+1)));% = 6.6438 올리면 7
3 -   n = ceil(n); %7
4 -   [z, p, k] = buttap(n);
5 -   theta = 0:0.01:2*pi;
6 -   figure(1)
7 -   plot(cos(theta),sin(theta),'b:');hold on
8 -   plot(real(z),imag(z),'ko',real(p),imag(p),'kx','LineWidth',2)
9 -   xlabel('real');ylabel('imag');grid on
10 -  [num, den] = zp2tf(z,p,k);%조건을 만족하는지 그래프지표로 설명
11 -  w = linspace(0,5000,100000);
12 -  H = freqs(num,den,w);
```



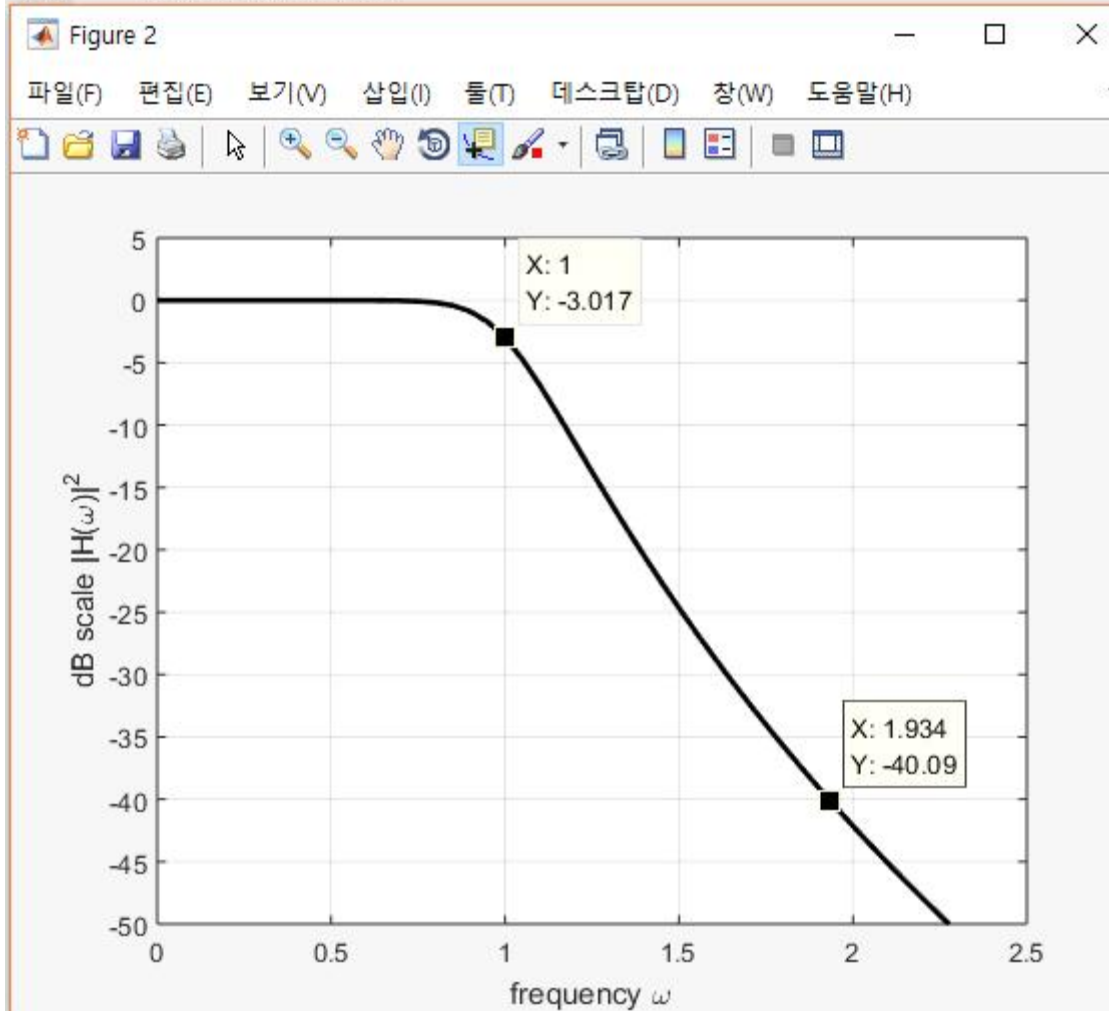
수식을 통해 정확한 차수 n 을 구해주고 Butterworth LPF의 전달함수를 구현했습니다. 전달함수의 입력 인자 중 관찰하고자 하는 주파수 벡터는 뒤에 나올 실습을 위해 큰 범위를 설정하였습니다. n 을 구하는 수식에서 올림 연산자를 구현할 때 `ceil()`함수를 사용하였습니다.

- (3) **실습 DEMO** (2)에서 구한 필터의 주파수 응답의 크기를 그래프에 표시하고 설계 목표에 맞는지 확인하라. (주파수 응답은 전력에 대해 dB-scale로 표시하라. 즉, $10\log_{10}|H(\omega)|^2$ 으로 환산하여 표시할 것.) (그림 13 참고)

```

11 - [num, den] = zp2tf(z,p,k);
12 - w = linspace(0,5000,100000);
13 - H = freqs(num,den,w);
14 - dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);
15 - figure(2)
16 - plot(w,dB_scale_H,'k','LineWidth',2)
17 - grid on; xlabel('frequency #omega');ylabel('dB scale |H(#omega)|^2')
18 - axis([0,2.5,-50,5])

```

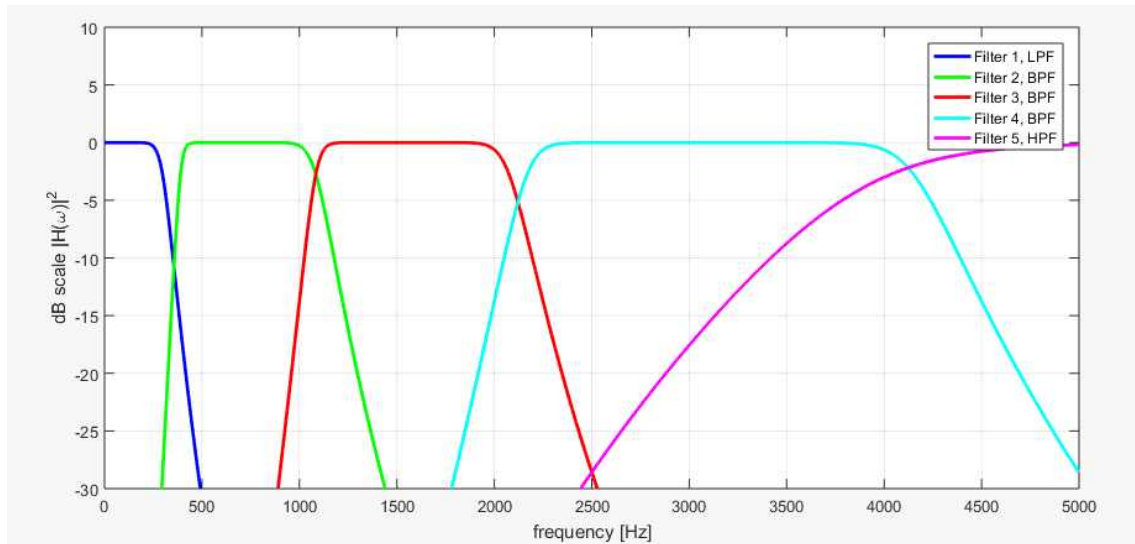


$W_c = 1$ 에서 약 -3dB 이고 $W = 1.934$ 에서 약 -40dB입니다. 문제에서 주어진 조건은 저지대역을 -40dB 기준으로 $\Delta w = 1$ 이하가 나와야 했고 약 0.934로 조건을 만족하는 결과를 볼 수 있습니다. 1번의 5차 Butterworth LPF 와 비교해봐도 천이구간이 다소 줄어든 것 같습니다.

(4) **실습 DEMO** (2)에서 설계한 LPF를 다음과 같은 다섯 종류의 필터로 변환하고 각 필터의 주파수 응답을 전력의 dB-scale로 그래프에 표시하라. (lp2lp, lp2bp, lp2hp, freqs 함수 사용) (그림 14 참고)

1. LPF, cutoff 주파수 = 300 Hz
2. BPF, passband = [300, 1000] Hz
3. BPF, passband = [1000, 2000] Hz
4. BPF, passband = [2000, 4000] Hz
5. HPF, cutoff 주파수 = 4000 Hz

24	<code>%%커트오프프리퀀시 체인지</code>	39	<code>[numt, dent]=lp2bp(num, den, 1500, 1000)</code>
25	<code>[numt, dent]=lp2lp(num, den, 300);</code>	40	<code>H = freqs(numt,dent,w);</code>
26	<code>H = freqs(numt,dent,w);</code>	41	<code>dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);</code>
27	<code>dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);</code>	42	<code>plot(w,dB_scale_H,'r','LineWidth',2)</code>
28	<code>figure(3)</code>	43	
29	<code>plot(w,dB_scale_H,'b','LineWidth',2)</code>	44	<code>[numt, dent]=lp2bp(num, den, 3000, 2000)</code>
30	<code>grid on;xlabel('frequency #omega');</code>	45	<code>H = freqs(numt,dent,w);</code>
31	<code>ylabel('dB scale H(#omega) ^2')</code>	46	<code>dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);</code>
32	<code>axis([0,5000,-30,10])</code>	47	<code>plot(w,dB_scale_H,'c','LineWidth',2)</code>
33		48	
34	<code>[numt, dent]=lp2bp(num, den, 650, 700)</code>	49	<code>[numt, dent]=lp2hp(num, den, 4000)</code>
35	<code>H = freqs(numt,dent,w);</code>	50	<code>H = freqs(numt,dent,w);</code>
36	<code>dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);</code>	51	<code>dB_scale_H = 10*log10(abs(H).^2);</code>
37	<code>plot(w,dB_scale_H,'g','LineWidth',2)</code>	52	<code>plot(w,dB_scale_H,'m','LineWidth',2)</code>



(위의 코드에서 legend부분이 잘렸는데, 마지막 줄에 설정해줬습니다.)

직전에 만들었던 $W_c = 1$, Butterworth LPF를 lp2lp, lp2bp, lp2hp를 사용하여 주어진 조건의 필터를 설계해 주고, freqs 함수를 사용하여 주파수 응답을 확인했습니다. 다른 필터들과 다르게 통과대역에서 평평한 0dB를 유지하여 통과대역에서 좋은 응답이 예상됩니다.