REPORT

DFT 결과보고서

전자 - 임베디드 전공

3조

주성민

목차

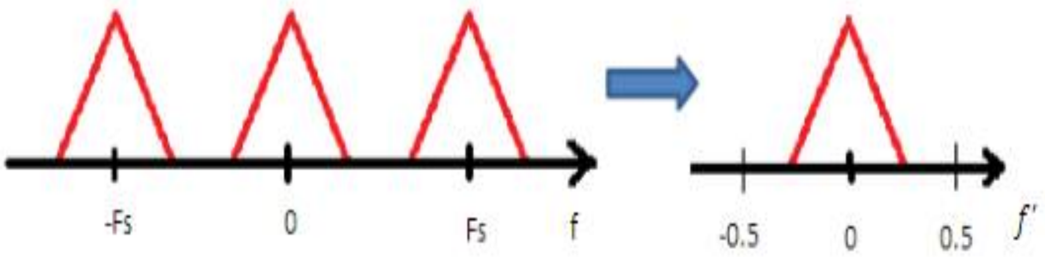
1. 개요

- DFT원리의 이해

2. 본문

- DFT원리의 이해

DFT는 Discrete Fourier Transform 의 약자로, 이산 푸리에 변환이라고 불린다. DFT의 중요특징은 주기의 정규화와 이산화 이다. 지난 시간 실습을 통해 시간축 smapling과정을 확인하면서 DTFT 연산결과를 간접적으로 보게 되었다. 시간축에서 이산화의 영향으로 주파수축에서 주기 스펙트럼이 되는것을 확인 하였고, 무한하게 반복되는 주기 스펙트럼을 디지털 차원에서 다시 처리하기엔 다음 그림과 같은 정규화가 필요했다.



위 그림은 어떠한 이산 신호의 스펙트럼에서 필요한 부분(유효값)만 뽑아내어 다시 표현하는 과정이다. 다음은 이산화 과정이다. 시간축에서 연속신호를 처리할 수 없었기 때문에 이산화를 했던것 처럼 주파수축에서도 똑같이 이산화를 해야하고, 최종 DFT는 다음과 같은 모습이 된다.

주파수축에서의 샘플링 과정은 시간축에서 샘플링과 다르게 주기함수에서 한 주기만 뽑아오는 과정이 있었다. 아마 연속신호가 무한개의 신호여서 샘플링 해줬던것 처럼 무한 주기함수도 무한개의 신호이기때문에 잘라주는것 이라고 생각했었다. 하지만 공부를 조금 더 해보니 유효값의 구간은 Ω[0 ~ 2π] , ($\hat{f}$[0 ~ 1]) 이고 딱 한 주기만큼의 스펙트럼만 알아도 되기 때문에 배재 한다는 것을 알게 되었다. (참고자료에서 유효값의 범위를 Ω [0 ~ π]라고 표현하기도 했었는데 대칭성 때문이라 생각하여 교수님의 표현을 사용)

3. 실습결과

3.1 N-point DFT

- 실습 식 (5)를 기반으로 N-point DFT를 계산하는 함수를 작성하라. (m-file function으로 구현할 것)

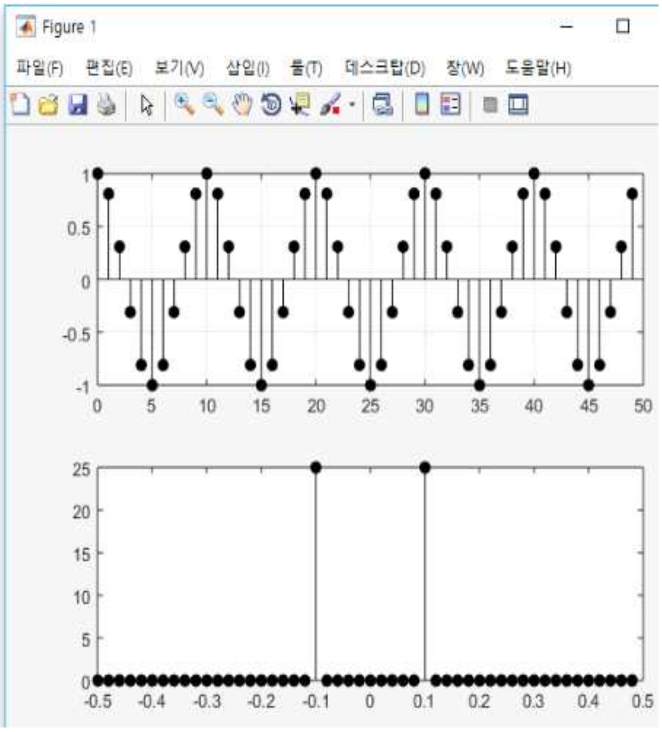
```matlab
function [ F_hat,Xk, N_mult] = my_dft( x )
Xk = [];%DFT 신호가 들어갈 공간(빈 배열)을 만들어줌
N_mult = 0;% 곱 연산이 몇번 사용되는가 카운트하는 변수
N = length(x); %들어온 신호의 길이(N-point 에서 N 이라고 생각하면 됩니다. 문제에서는 다 50)
n = 0 : N-1; %위의 N의 갯수만큼 0부터 차례대로 n을 만들어줍니다. 이산신호라 무조건 간격은 1
for k = n %X(k) 를 하나씩 구하기위해 for문을 사용합니다. k = 0~49 가 들어갑니다
    X_temp = x.*exp(-2i*pi*k.*n*(1/N)); % 변화하는 k 에 따라 N벡터와 x벡터를 서로 곱해주는 표현입니다
    N_mult = N_mult + N; %위의 식에서 N번의 곱셈이 일어났기때문에 (두 벡터의 길이가 N이기때문에)
                         %for문 한번에 N씩 카운트해줍니다.
    Xk = [Xk , sum(X_temp)];%7번줄의 X_temp 는 N개의 값을가지고있는데
                         %시그마를 구현하기위해 sum함수를 사용합니다.
end
Xk = [Xk((N/2)+1:end) , Xk(1:(N/2))];%-0.5~0.5에서 그려주기위해서 쉬프트합니다.
             %여기서 (N/2)+1 부터인 이유는 X(k)의 인덱스가 0이아닌 1부터 시작하기때문에
             %절반값은 Xk((N/2)+1)부분에서 나옵니다.

F_hat = linspace(-0.5,0.5,N+1); %평상시에 자주쓰던 -0.5<= F_hat < 0.5 문법입니다.
F_hat = F_hat(1:end-1);
end
```

매트랩으로 구현한 함수 코드이고, 세부적인 설명은 주석에 있습니다. 코드의 특징 중 하나는 처음에는 for문을 두개 사용하였는데, matlab에서는 반복문을 최대한 사용하지 않는 것이 좋다고 배웠던게 생각나서 간단한 for문을 제거해보았습니다. 나머지 한개의 for문을 제거해보려고 2차원 배열을 사용해보았지만, 실패했습니다. 곱셈의 연산횟수를 세기 위해 반복문 한번 당 N번을 더해줍니다. 마지막 F_hat 변수에 대해 설명이 조금 부족한데, F_hat 변수에 먼저 -0.5 ~ 0.5 구간을 N+1 만큼 나눠주고, 이어서 F_hat 배열에서 마지막 0.5 값만 빼주면 0.5를 포함하지 않는 동일한 간격으로 N개를 나눌 수 있습니다.

- 실습 DEMO 위에서 구현한 N-point DFT를 이용해 다음 이산신호 $x[n]$의 크기 스펙트럼을 구하고 그래프에 표시하라. (단, 이산주파수 $\hat{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$에 대해 그려라.) (그림 4 참고)
  - $x[n] = \cos(2\pi \hat{f}_0 n),\ n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$
  - $\hat{f}_0 = 0.1,\ N = 50$

```
clc;
clear;
N = 50;
f0 = 0.1;
n = 0 : N-1;
x = cos(2*pi*f0*n);
[ F_hat,Xk, N_mult] = my_dft(x);
figure(1)
subplot(2,1,1)
stem(n,x,'k','MarkerFaceColor','k');
grid on

subplot(2,1,2)
stem(F_hat,abs(Xk),'k','MarkerFaceColor','k')
axis([-0.5,0.5,0,25])
```

```
N_mult =

    2500
```



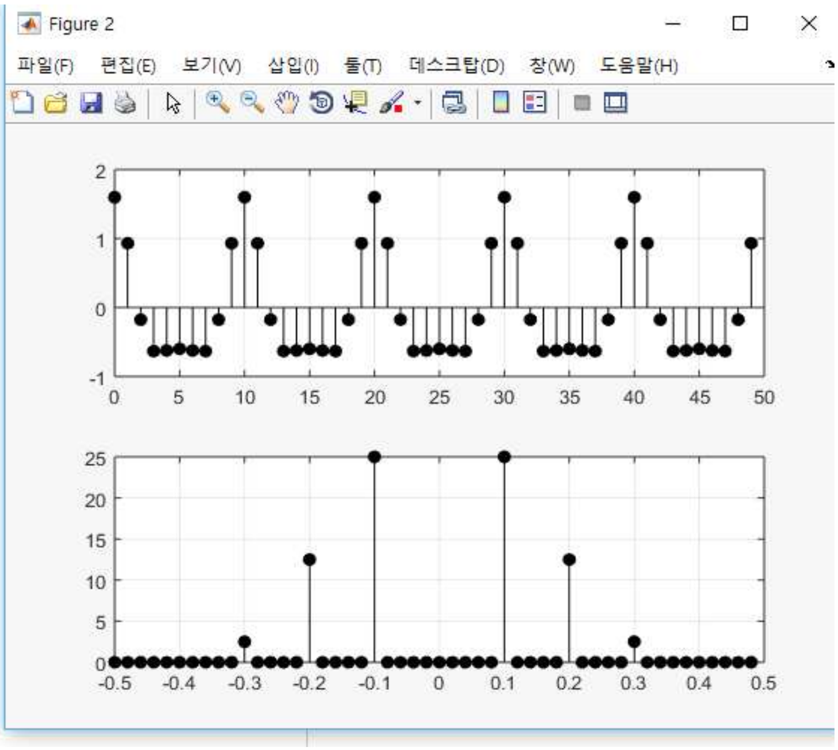
주어진 변수를 입력 후 함수로 구현했던 my_dft()를 실행한 결과입니다. N_mult 값이 2500이 나왔으므로 곱셈 연산의 수는 2500번이라는것을 알 수 있습니다. $\hat{f}$= 0.1인 cos함수의 주파수축 모습이 이상적으로 나온 것을 확인할 수 있었습니다. (구현한 DFT함수가 ---이쪽은 사용하지 않는다.

3.2 DFT를 이용한 신호해석

3.2.1 주파수 분해

- 실습 DEMO 다음 이산신호 $x[n]$을 N-point DFT하여 주파수 성분을 분석하라. (단, 이산주파수 $\hat{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$에 대해 그려라.) (그림 5 참고)
  - $x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n],\ n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$
    - $x_1[n] = \cos(2\pi \hat{f}_1 n),\ \hat{f}_1 = 0.1$
    - $x_2[n] = 0.5\cos(2\pi \hat{f}_2 n),\ \hat{f}_2 = 0.2$
    - $x_3[n] = 0.1\cos(2\pi \hat{f}_3 n),\ \hat{f}_3 = 0.3$
  - $N = 50$

```
clc;
clear;
N = 50;
n = 0 : N-1;

f1 = 0.1;
f2 = 0.2;
f3 = 0.3;

x1 = cos(2*pi*f1*n);
x2 = 0.5*(cos(2*pi*f2*n));
x3 = 0.1*cos(2*pi*f3*n);

x = x1 + x2 + x3;
[ F_hat,Xk, N_mult] = my_dft(x);


figure(2)
subplot(2,1,1)
stem(n,x,'k','MarkerFaceColor','k');
grid on

subplot(2,1,2)
stem(F_hat,abs(Xk),'k','MarkerFaceColor','k')
axis([-0.5,0.5,0,25])
grid on
```



$\hat{f}$의 성분에 따라 주파수 성분이 나오는 결과를 볼 수 있습니다. 이 실습을 수행하면서 두가지 궁금한점이 생겼습니다. 첫번째는 cos함수 자체에 $\hat{f}$ 값을 대입해주는 부분입니다. 애초에 결과 그래프에서 $\hat{f}$의 범위는 -0.5 ~ 0.5로 한정되어있는데 우리가 알던 100Hz가아닌 0.1, 0.2 등의 작은 값을 대입하는 이유가 궁금했었습니다.

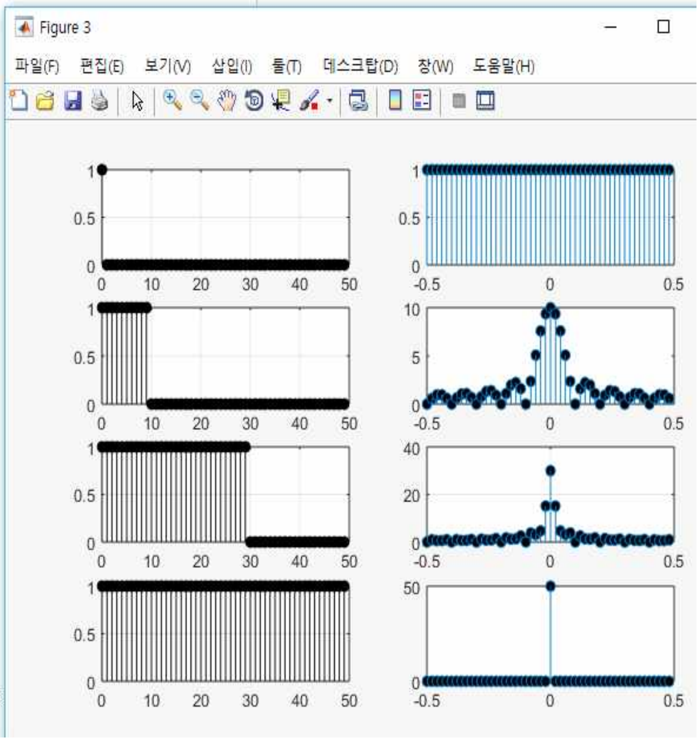
두번째는 해당 주파수 성분의 크기입니다. 연속 시간 신호에서 cos신호의 Fourier Series는 해당 cos신호 계수가 A라고 할 때, 해당 주파수 성분의 크기로 A/2 를 갖는 양측파대 스펙트럼으로 나왔었습니다. 그런데, 50-point DFT 에서 주파수들의 계수는 (50 x A)/2 인 부분 입니다. 첫 번째 의문점은 조원과 고민끝에 이미 샘플링 된 함수라고 가정하고 실습을 진행한다고 추측하였습니다. 예를 들어 원신호 주파수가 100Hz였는데 1000Hz로 샘플링을 진행하여 결과적으로 이미 $\hat{f}$ 이 0.1인 cos함수가 만들어진 것 입니다. 하지만 두번째 궁금증은 해결하지 못하였습니다.

3.2.2 구형파 주파수 해석

- **실습** 다음 파라메터에 대해 식 (6)에 정의된 신호를 N-point DFT하여 크기 스펙트럼을 구하고 그래프에 표시하라. (단, 이산주파수 $\hat{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$에 대해 그려라.)

  1. $L = 1,\ N = 50$
  2. $L = 10,\ N = 50$
  3. $L = 30,\ N = 50$
  4. $L = 50,\ N = 50$

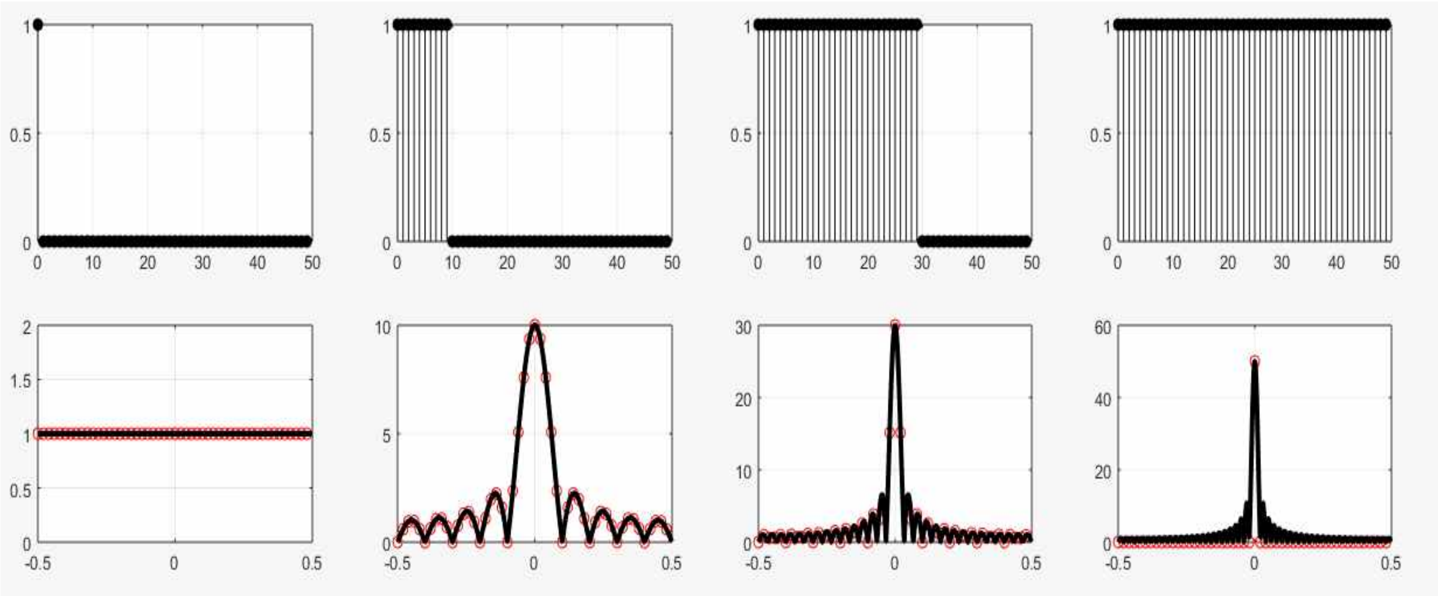
```
1 -   clc;
2 -   clear;
3 -   N = 50;
4 -   n = 0 : N-1;
5
6 -   L1 = 1;
7 -   L2 = 10;
8 -   L3 = 30;
9 -   L4 = 50;
10
11 -  x1 = [ones(1,L1), zeros(1,N-L1)];
12 -  x2 = [ones(1,L2), zeros(1,N-L2)];
13 -  x3 = [ones(1,L3), zeros(1,N-L3)];
14 -  x4 = [ones(1,L4), zeros(1,N-L4)];
15
16 -  [ F_hat1,Xk1, N_mult1] = my_dft(x1);
17 -  [ F_hat2,Xk2, N_mult2] = my_dft(x2);
18 -  [ F_hat3,Xk3, N_mult3] = my_dft(x3);
19 -  [ F_hat4,Xk4, N_mult4] = my_dft(x4);
20
21 -  figure(3)
22 -  subplot(4,2,1)
23 -  stem(n,x1,'k','MarkerFaceColor','k');
24 -  grid on
25
26 -  subplot(4,2,2)
27 -  stem(F_hat1,abs(Xk1),'MarkerFaceColor','k');
28 -  grid on
```



28번째 줄 코드 아래부분은 figure와 관련된 부분 이여서 생략하였습니다. L 의 값이 증가할수록 직류성분(f = 0)의 크기가 커지는 것을 확인할 수 있습니다. 아마 L이 증가할수록 0이 아닌 유효값들이 많아져서 더 많은 덧셈이 이루어지기 때문에 그런 것 같습니다.

- 실습 DEMO N-point DFT 결과를 손으로 계산한 DTFT와 비교하고 본 실습의 의의를 설명하라. (DTFT는 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 구간에서 1024개의 값을 구해 표시하라.) (그림 6 참고)

먼저 매트랩을 사용해서 확인해본 결과입니다.
직전에 사용했던 구형파를 기준으로 비교하였습니다.




```
[F1,X1] = my_dtft(x1);
[F2,X2] = my_dtft(x2);
[F3,X3] = my_dtft(x3);
[F4,X4] = my_dtft(x4);
```

<- 직전 문제 코드에서 추가된 부분입니다. my_dtf() 함수에서 point값을 1024로 바꿔주어 dtft 결과와 비슷해지도록 구현하였습니다.

L값이 1 일때는 마치 임펄스 함수를 푸리에 변환 한 것과 같이 모든 주파수에서 1 값이 나옵니다. L이 증가할수록 DTFT결과가 좀더 간격이 좁아지고 크기도 전체적으로 커지는 모습을 볼 수 있습니다. L과 N의값이 같아졌을때는 DFT그래프와 DTFT그래프의 파형이 비슷하지 않게 되었는데 먼저 손으로 풀어본 후 결과가 동일한지 확인 후 진행하겠습니다.

네개의 신호를 손으로 DTFT 해본결과 매트랩에서 간접적으로 구현한 DTFT와 거의 동일하게 나온것을 볼 수 있습니다. 다음장에 이어서 설명이 있습니다.

(1)번신호

L = 1, N = 50 인 (1)번 신호의 DTFT는 모든 값에서 1이 나왔고, 시간축에서 임펄스 신호를 푸리에변환한 결과와 동일하게 나왔습니다.

(2)번 신호

L = 10, N = 50 인 (2)번 신호의 DTFT는 $\hat{f}$ = 0 에서 크기가 10이고, 값을 0으로 갖는 $\hat{f}$ 의 주기가 1/10 인 스펙트럼이 그려집니다. DFT 결과와 비교해보면 DFT 결과는 1/50간격 마다 점이 찍히기 때문에 (2)번 신호 DTFT변환값의 한 주기에 점이 5개씩 맵핑이 됩니다. DFT만 따로 때어놔도 어느정도 파형을 알아볼 수 있습니다.

(3)번 신호

L = 30, N = 50 인 (3)번 신호는 DTFT의 $\hat{f}$ = 0 에서 크기가 30이고, 값을 0으로 같는 $\hat{f}$ 의 주기가 1/30 인 스펙트럼이 그려집니다. DFT 결과와 비교해보면 DFT 결과는 1/50간격 마다 점이 찍히기 때문에 (3)번신호 DTFT변환값의 한 주기에 점이 1~2개씩 맵핑이 됩니다. DFT만 따로 관찰했으면, 분해능이 많이 떨어지는 것을 볼 수 있습니다.

(4)번 신호

L = 50, N = 50인 (4)번 신호는 DTFT의 $\hat{f}$ = 0 에서 크기가 50이고, 값을 0으로 같는 $\hat{f}$의 주기가 1/50 인 스펙트럼이 그려집니다. DFT 결과와 비교해보면 DFT 결과는 1/50간격마다 점이 찍히기 때문에, 0값을 가지는 $\hat{f}$성분마다 점이 맵핑이 되고 $\hat{f}$ = 0 에서만 50이라는 값을 가지게 됩니다. DTFT와 DFT결과를 따로보면 DFT는 마치 임펄스함수같은 모양이기 때문에 샘플링이 제대로 되지 않았다고 볼 수 있습니다. 직관적으로 관찰해보면, (4)번 신호는 시간축에서 y = 1 인 상수함수를 이산화 한 함수와 동일한 파형입니다. 상수함수 y=1의 푸리의변환은 임펄스함수 가 되는데, 이런 관점에서 보면 샘플링결과가 아예 틀린 값은 아닌 것 같습니다.