第二章　向量与矩阵

习 题 课

一、教材内容的归纳总结

1．n 维向量的概念，实向量、复向量；

2．向量的表示方法：行向量与列向量；

3. n维向量的线性运算及其性质；

向量相等、零向量、负向量

向量加法： $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$,

向量数乘 $k \cdot \alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$, $k \in R$.

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) $\alpha + 0 = \alpha$;

(4) $\alpha + (-\alpha) = 0$;

(5) $1\alpha = \alpha$;

(6) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

(8) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$.

线性方程组的n维向量表示：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 $$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

也 即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$

一、内积

1.定义 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

称为 α 与 β 的内积.

2.性质

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

注意其推广及对称性:

(3) $(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时等号成立.

3. 长度 (1) 定义 $|\alpha|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

单位向量 $|\alpha|=1$：α 为单位向量.

设 $\alpha\neq 0$，令 $\alpha_e=\dfrac{1}{|\alpha|}\alpha$，则 (向量的单位化)

(2) 性质 1^o 非负性 $|\alpha|\geq 0$

2^o 齐次性 $|k\alpha|=|k||\alpha|$;

3^o 三角不等式

$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$;

4. 柯西—布涅柯夫斯基-施瓦茨不等式

对n维空间V中任意两个向量α、β，有 $|(\alpha,\beta)|\le|\alpha||\beta|$

当且仅当α、β满足$\alpha = k\beta$ 时等号成立.

5. 向量α与β的夹角 $<\alpha,\beta>=\arccos\dfrac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha||\beta|}$

柯西不等式 $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|$

$\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\qquad a_i,b_i\in R,\quad i=1,2,\cdots,n.$

三角不等式 对欧氏空间中的任意两个向量 α、β, 有

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$$

定义2： 设α、β为n维空间中两个向量，若内积

$$(\alpha,\beta)=0$$

则称α与β正交或互相垂直，记作 $\alpha\perp\beta$.

注： ① 零向量与任意向量正交.

② $\alpha\perp\beta \Longleftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\cos\langle\alpha,\beta\rangle=0$.

正交向量组及标准（单位）正交向量组：

若一个向量组中的向量两两正交，且不含零向量，则称此向量组为正交向量组。

均为单位向量的正交向量组为标准正交向量组.

勾股定理及推广 设V为n维空间，$\forall\alpha,\beta\in V$

$$\alpha\perp\beta \Longleftrightarrow |\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$$

二、矩阵的定义

$$A = A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij}).$$

三、特殊矩阵： 3.零矩阵 4.负矩阵

5.上(下)三角矩阵 6、对角矩阵 7、阶梯矩阵

(一)、矩阵的线性运算（加法、数乘）及乘法

① $A+B=B+A$

② $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ $A+O=A$

④ $A+(-A)=O$

⑤ $1A=A$

⑥ $k(lA)=(kl)A$

⑦ $k(A+B)=kA+kB$

⑧ $(k+l)A=kA+lA$

(1)只有当左矩阵 A 的列数与右矩阵 B 的行数相同时，AB 才有意义；

(2)AB 有意义时，它的行数等于 A 的行数，它的 列数等于B的列数

（3） 当AB有意义时，AB的元素由A的行元素与

B 的列元素对应元素乘积之和确定。

进行矩阵乘法时需注意

AB≠BA

如果 AB=BA 则称矩阵 A 与 B 是可交换的，可交换

可看出：1)AB=O 不能推出 A=O 或 B=O；

2)AB=AC 且 A≠0 不能推出 B=C。

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

则有： AX=B

线性方程组的矩阵表示，其中A称为方程组的系数矩阵。

$$(1)(AB)C = A(BC);$$

$$(2)A(B+C) = AB + AC; \quad (B+C)A = BA + CA;$$

$$(3)(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB);$$

$$(4)AI = IA = A.$$

（3）方阵的幂

定义 设A为n阶方阵，k个A的连乘积$AA\cdots A$称为 A的k次幂，记作A^k。

但一般地，$(AB)^k \neq A^k B^k$.

当AB可交换时，$(AB)^k = A^k B^k$.

对称阵; 反对称阵.

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$，$\lambda$是一个数;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

一般，$(AB)^T \neq A^T B^T$.

性质 设A,B是同阶对称阵，证明$A+B$也是对称阵。

容易证明：若A是对称阵，则A^T，kA也是对称阵。

但若A,B是同阶对称阵，而AB却不一定是对称阵。

一、方阵的行列式

设A,B是n阶方阵，λ为数，则

$(1)\left|A^T\right| = |A|$;

$(2)|\lambda A| = \lambda^n |A|$,其中$\lambda$是一个数;　　$|A_1 A_2 \cdots A_n| = |A_1||A_2|\cdots|A_n|$.

$(3)|AB| = |A||B|$.

一般说来，两个n阶方阵A,B, $AB \neq BA$, 但$|AB| = |BA|$.

1、逆矩阵的概念和性质

逆矩阵是唯一的

2、伴随矩阵的概念

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$称为A的伴随矩阵.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,$$

3、逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

(4) 若A可逆,则A^T亦可逆,且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$

(5) 若A可逆,则有$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$.

5、 简单的矩阵方程 $(1)AX=B\quad(2)XA=B\quad(3)AXB=C$

其中，A，B，C已知

当A，B可逆时，它们有唯一解

$$(1)AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$(2)XA=B \Rightarrow X=BA^{-1}$$

$$(3)AXB=C \Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$$

2.4 分 块 矩 阵

二、 分块矩阵的运算

2、分块矩阵的数乘

3、分块矩阵的转置

4、分块矩阵的乘法

三、 分块对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

性质

(1)
$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s \end{pmatrix}$, 则 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

若 $|A_i|\neq 0\,(i=1,2,\cdots,s)$,则$|A|\neq 0$,并有

二、 向量的线性相关性

线性表示（组合）、线性相关、线性无关

定义 称n阶单位矩阵 $\mathbf{I}$的行向量组

$e_1 = (1,0,\cdots,0), e_2 = (0,1,\cdots,0),\cdots, e_n = (0,0,\cdots,1).$ 为基本单位向量组.

结论: 任何一个 n维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$可由基本单位向量组线性表示 .$\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$

零向量可由任何一个同维的向量组线性表示.

若齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$

有非零解， 则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关.

否则（即只有零解）就称 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关.

3. 向量组中含有零向量 必相关

4. 一个向量相关 $\Leftrightarrow$ 零向量

5. 两个向量相关 $\Leftrightarrow$ 对应分量成比例

三. 线性组合与线性相关性 的关系

定理 5 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow$

其中至少有一个向量可由其余向量线性表示

向量组线性无关 $\Leftrightarrow$

其中任何一个向量都不能由其余向量线性表示.

定理 9 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,

$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关

则α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示且表示法唯一.

例 1 讨论向量组 $\alpha_1=(1,3,2),\alpha_2=(1,3,-4),\alpha_3=(3,1,5),$ $\alpha_4=(0,5,6)$的线性相关性。

解 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$

这是一个含有 3个方程 4个未知量的线性方程，

即 $m=3<n=4.$ 所以必有非零解，可讨论一下

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关 .

1 个数与维数：个数大于维数 $\Rightarrow$线性相关 p62 定理6

四、关于线性相关性的几个结论

1 个数与维数：个数大于维数 $\Rightarrow$线性相关

特别，n+1 个 n 维向量必线性相关。

2 伸长与缩短组（维数变化）：

分量短的无关 $\Rightarrow$ 伸长组无关

逆否： 分量长的相关 $\Rightarrow$ 缩短组相关

3 部分与全体（向量个数变化）：

全体无关$\Rightarrow$ 部分无关

逆否：部分相关$\Rightarrow$ 全体相关

n个n维向量 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,n,$

$$\text{线性相关}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

$$\text{线性无关}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

即矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ 可逆 **p62,定理11**

由此可知基本单位向量组是线性无关的.$(\because |I|=1)$

四、向量组的极大无关组和秩

定义 1 设有向量组 T,如果它的一个部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足：

1) 线性无关；2) 任取$\alpha\in T$,则$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关.

1) 线性无关； [$2'$)T中任一α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示.]

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量组 T的一个极大线性无关组 .

定义 向量组的极大无关组所含向量的个数

注意 1^0 极大无关组可能不唯一 .

2^0 T内极大无关组所含向量 个数必相同.这个“个数” 称为向量 组的秩

如T本身是线性无关的，极 大线性无关组就是 T自己. 它的秩等于所含向量的 个数

向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ 它的秩小于所含向量的 个数

并规定只含零向量的向量组的秩为 0.

五、向量组间的关系：

定义22 设有两个 n 维向量组 A 和 B，若向量组 A 中的每个向量都能由向量组 B 中的向量线性表示，则称向量组 A 能由向量组 B 线性表示。

若向量组 A 能由向量组 B 线性表示，且向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则称向量组 A 与向量组 B 等价。

显然，一个向量组的极大无关组与向量组本身是等价的.

有如下性质：(1) 反身性：

(2) 对称性：

解释

(3) 传递性：

关于两个向量组的秩，有如下结论：

定理12 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $s < t$.

推论**5** 等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

推论**6** 等价的向量组其秩相同.

推论**7** 线性无关的**n**维向量组最多含**n**个向量.

推论**8** **若向量组 A 可由向量组 B 线性表示，**

则 $r_A \leq r_B$

一、 矩阵的初等变换

2.矩阵等价：

3. 初等方阵 $I(i,j)$; $I(i(k))$; $I(i,j(k))$;

初等方阵的性质:初等方阵都是可逆的，其逆阵也是初等方阵

4. 矩阵A的标准形

定义 形如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的矩阵，称为矩阵的标准形.

注1：任何矩阵都可以经过初等变换化成标准形.

注2：任一可逆矩阵都可通过行初等变换化为单位阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

行最简形矩阵：

1.非零行的第一个非零元为1;

2.这些非零元所在的列的其它元素都为零.

$$\underset{\substack{c_4 + c_1 + c_2 \\ c_5 - 4c_1 - 3c_2 + 3c_3}}{\overset{c_3 \leftrightarrow c_4}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

标准形矩阵：

左上角是一个单位矩阵，其它元素全为零.

定理　设A是一个$m \times n$矩阵

对A施行一次**初等行变换**，相当于在A的**左侧乘以一个相应的初等矩阵**；

对A施行一次**初等列变换**，相当于在A的**右侧乘以一个相应的初等矩阵**；

3)定理：任何可逆方阵都可以表示为有限个初等方阵的乘积.

推论：$m \times n$矩阵 $A \sim B$的充要条件是：

存在m阶可逆矩阵 P及n阶可逆方阵 Q，使$PAQ = B$.

注：$m \times n$矩阵A经初等行变换化为B的充要条件是：

存在可逆方阵P，使$PA = B$。

二、 矩阵的秩

1） 子式　　注：k阶子式是一个数。

矩阵A中不为0的子式的最高阶数，称为A的 秩，记作$r(A)$.

注： 规定零矩阵的秩等于 0. 只有零矩阵的秩等于 0.

等价定义（定理 1） $r(A)=r \Leftrightarrow A$中有 一个

r阶子式 $\neq 0$，而 所有的 $r+1$阶子式(如果有）均为零。

定义: 若 n 阶方阵 A 的秩 $r(A)=n$,则称 A 为满秩矩阵, 否则称为 降秩矩阵.

A为满秩矩阵的充要条件是$|A| \neq 0$，故满秩矩阵就是可逆矩阵.

2.秩的性质

(1) 设A是$m \times n$矩阵，则 $r(A) \le \min\{m, n\}$,

$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}$阶方阵，则 $\boldsymbol{r(A) \le n}$

(2) $r(A^T) = r(A)$.

(3) 矩阵的行秩等于矩阵的列秩等于矩阵的秩.

(4) 阶梯阵的秩等于它的非 零行数.

定理16 若 $A \sim B$,则 $R(A) = R(B)$.

矩阵秩的求法 用初等变换求矩阵的秩 ：

1)$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行(列）变换}}$ 阶梯阵 $\boldsymbol{U}$,

2)$\boldsymbol{r(A) = r(U) = U}$的非零行数。

三、初等变换方法求向量组的极大线性无关组

定理18　矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩，从而不改变列向量组的线性相关性.

此定理给出了向量组线性相关性的判别法和极大无关组的求法

用矩阵初等变换方法判定向量组的线性相关性

即将向量组列排，作行初等变换（这样不改变列向量组的线性相关性），直到化成阶梯形，从中看出相关还是无关。（举例说明）

2.7 逆矩阵的初等变换求法

定理17 可逆矩阵必可表示为一些初等矩阵的乘积

$\because \quad P_l \cdots P_2 P_1 A = I. \quad \Rightarrow \quad P_l \cdots P_2 P_1 I = A^{-1}.$

得求逆阵的方法： $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ 用初等行变换 $\begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$

求 $A^{-1}B$ 构造一个 $n\times 2n$ 阶矩阵 $(A|B)$，对矩阵 $(A|B)$ 作行初等变换，当 A 变成单位矩阵 E 时，矩阵 B 则变成 $A^{-1}B$． 即 $(A|B)$： $(E|A^{-1}B)$.

2.8 向量组的正交化 （标准正交向量组）

定理19 正交向量组一定是线性无关的.

三、化正交向量组的方法——施密特正交化方法

定理20 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一个线性无关向量组，则$\beta_1$，$\beta_2\cdots\beta_s$是一个与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的正交向量组，其中

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}.$$

注意：先正交化，再单位化

二、典型例题

例1　**若方阵 A 可逆，试证 A^* 也可逆，并求 $(A^*)^{-1}$。**

解 $\because A^*A=|A|I$　又 $\because A$ 可逆，$\therefore |A|\neq 0$

两边同除 $|A|$，得 $A^*A\dfrac{1}{|A|}=I$　得 A^* 可逆，　$(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A.$

例 2　若方阵 A 满足 $A^2-2I=0$，证明 $A+I$ 和 $A-I$ 都可逆。

证　由 $A^2-2I=0 \Rightarrow A^2-I=I,$

即 $(A+I)(A-I)=I,$

所以 $A+I$ 和 $A-I$ 都可逆。

例3 设 A 是可逆阵，证明：

(1) 若 $AX = AY \Rightarrow X = Y$

(2) 若 $AB = O \Rightarrow B = O$

证： (1) 由 $AX = AY$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(AY)$$

$$(A^{-1}A)X = (A^{-1}A)Y$$

$EX = EY$ 所以 $X = Y$

(2) 由 $AB = O$，有 $A^{-1}(AB) = A^{-1}O$

$(A^{-1}A)B = O$ 所以 $B = O$

例4 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$求$A^{-1}$.

解 因$|A|=5!\neq 0$, 故A^{-1}存在. 由伴随矩阵法得 $A^{-1}=A^{*}/|A|$,

$$=\frac{1}{5!}\begin{pmatrix}2\cdot3\cdot4\cdot5&0&0&0&0\\0&1\cdot3\cdot4\cdot5&0&0&0\\0&0&1\cdot2\cdot4\cdot5&0&0\\0&0&0&1\cdot2\cdot3\cdot5&0\\0&0&0&0&1\cdot2\cdot3\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1/2&0&0&0\\0&0&1/3&0&0\\0&0&0&1/4&0\\0&0&0&0&1/5\end{pmatrix}.$$

也可以直接用对角矩阵的性质做。

例5

判断题

1、如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的一个线性组合等于零向量，那么该向量组线性相关 (×)

2、如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，那么其中每个向量都是其余向量的线性组合 (×)

3、假定α能用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$表示为

$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，$k_i$为任意常数

$(i=1,2,\cdots,n)$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$线性相关 (√)

4、若有一组不全为零的数$k_1,k_2\cdots k_n$使

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\neq 0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关 (×)

5、如果零向量只能用唯一的方式表示成$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的一个线性组合，那么该$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关 (√)

6、包含零向量的向量组一定是线性相关的。(√)

例6 .设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\b\\2b\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$,

当a,b为何值时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示且表示式唯一?

解　设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\0&b&0\end{vmatrix}=-b(a-1)$$

所以，当$a\neq 1$且$b\neq 0$时，有唯一解，即表示唯一；

例7 .设α_1，α_2，α_3线性无关，问常数k_1, k_2 满足什么条件时，

向量组$k_1\alpha_1-\alpha_2, k_2\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$也线性无关？

解 设 $\lambda_1(k_1\alpha_1-\alpha_2)+\lambda_2(k_2\alpha_2-\alpha_3)+\lambda_3(\alpha_3-\alpha_1)=0$

$(\lambda_1 k_1-\lambda_3)\alpha_1+(\lambda_2 k_2-\lambda_1)\alpha_2+(\lambda_3-\lambda_2)\alpha_3=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，

$$\therefore \begin{cases} \lambda_1 k_1-\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+\lambda_2 k_2=0, \\ -\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$$

要λ_1，λ_2，λ_3都为0，即方程组只有零解，$|A|=\begin{vmatrix} k_1 & 0 & -1 \\ -1 & k_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=k_1k_2-1\neq 0$

$\therefore k_1k_2\neq 1$时线性无关。

例8 设α_1，α_2，α_3线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

(1) α_1能否由α_2，α_3线性表示？证明你的结论；

(2) α_4能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？证明你的结论.

答 (1) 可以，$\because \alpha_2$，α_3,α_4线性无关，$\therefore \alpha_2$，α_3,也线性无关，

而α_1，α_2，α_3线性相关，$\therefore \alpha_1$能由α_2，α_3线性表示.

(2) 不可以。$\because$若α_4能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，由(1)知$\alpha_1$

能由α_2，α_3线性表示,则α_4也能由α_2,α_3 线性表示，

则$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关 .得出矛盾。

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,4,-2)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(2,-4,-1,2)^T$.

(1) 求 $\|\boldsymbol{\alpha}\|,\|\boldsymbol{\beta}\|$ 及 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|$，并使向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 单位化;

(2) 求 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积，以及 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}$ 的内积;

课堂练习

(3) 求 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角;

(4) 证明 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 正交.

2 求向量组的秩和一个极大无关组.

$$\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(2,-3,1,-1),\alpha_3=(1,-1,2,3),\quad \alpha_4=(4,-3,4,3).$$

3 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，试证向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关.

4 用初等变换法求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

课堂练习解答：

1. 解 (1) $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{1^2+2^2+4^2+(-2)^2}=5$, $\|\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2}=5$,

则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的单位向量为:

$$\boldsymbol{\alpha}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right)^{\mathrm{T}}\quad,\qquad \boldsymbol{\beta}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}=\left(\frac{2}{5},-\frac{4}{5},-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)^{\mathrm{T}}.$$

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(1,2,4,-2)(2,-4,-1,2)^{\mathrm{T}}=-14.$

由 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(4,0,7,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}=(-3,10,6,-6)^{\mathrm{T}}$，则

$$(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta})=(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta})=(4,0,7,-2)(-3,10,6,-6)^{\mathrm{T}}=42.$$

也可由内积的性质计算：

$$(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-3(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=2\times25+3\times14-2\times25=42.$$

(3) 因 $\cos\boldsymbol{\theta}=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}=\dfrac{-14}{5\cdot5}=-\dfrac{14}{25}$，则 $\boldsymbol{\theta}=\arccos\left(-\dfrac{14}{25}\right)$.

(4) 因 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(3,-2,3,0)(-1,6,5,-4)^{\mathrm{T}}=0$; 或

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=25-25=0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 正交.

2 求向量组的秩和 3 个极大无关组.

$\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (2,-3,1,-1), \alpha_3 = (1,-1,2,3), \quad \alpha_4 = (4,-3,4,3).$

解 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以向量组的秩为 3,

它的3个极大无关组是 $\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3.$

$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_4.$

$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4.$

3　设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，试证向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关.

证　设　$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_4)+x_4(\alpha_4+\alpha_1)=0$

整理得　$(x_1+x_4)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3+(x_3+x_4)\alpha_4=0$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，故有

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$(按第一行展开)

故有非零解,即x_1,x_2,x_3,x_4不全为零.

所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关.

4 用初等变换法求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & -1 & -3/4 \\ 1/4 & -2 & -3/4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$