后次复习前次的概念

小结：

一、 二次型的概念

二、 二次型的矩阵表示方法

$f = x^T Ax$,其中A为对称矩阵

三、二次型的矩阵及秩

对称矩阵 A叫做二次型 f 的矩阵；

f 叫做对称矩阵 A的二次型；

对称矩阵A的秩叫做二次型 f 的秩.

四、二次型的标准形

把只含有平方项的二次型称为标准形.

五、 正交矩阵

1. 定义 $A^T A = AA^T = E$ 则称 A为正交矩阵 .

2.性质

(1)若A为正交矩阵，则 $|A| = \pm 1$;

(2)若A为正交矩阵，则 $A^T = A^{-1}$也是正交矩阵；

(3)若A, B都是n阶正交矩阵，则AB也是正交矩阵.

(4)正交矩阵的元素之间的关系 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

（5）n阶方阵A为正交矩阵$\Leftrightarrow$

它的行（或列）向量组是两两正交的单位向量组.

（6）若A是正交矩阵，A^*也是正交矩阵.

定义6 对于A,B,若存在可逆矩阵C,使B=C^TAC则称A与B合同；
矩阵之间的合同关系是等价关系

定理7 若A,B合同，则当A为对称矩阵，则B也为对称矩阵，
且 R(A)=R(B)；

定理 8 实对称阵的特征值都是实数.

定理 9 实对称阵的不同特征值对应的特征向量正交.

定理10 设A为n阶对称矩阵,则必有正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP = \Lambda$,其中Λ是以A的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

此定理同时回答了 实对称阵一定可以对角化.

将实对称阵 A 化为对角阵的步骤（$step$）:

1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个特征值 λ_1, $\lambda_1, \cdots \lambda_n$;

2) 对每个 λ_i 求出对应的线性无关的 特征向量，

并将它们正交化，单位化，从而求出 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个

两两正交的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots \boldsymbol{p}_n$;

3) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots \boldsymbol{p}_n)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \Lambda$ 为对角阵.

即

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

§ 5.5 化二次型为标准形

§ 5.5 化二次型为标准形

对于二次型，讨论的主要问题是：

寻找一个可逆线性变换$\mathbf{x}=C\mathbf{y}$（C可逆),即

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

使 $f=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=(C\mathbf{y})^T A(C\mathbf{y})=\mathbf{y}^T(C^T AC)\mathbf{y}$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2.$$

一、正交变换法

定理　对于实二次型 $f = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, 总存在正交变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, 使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中 λ_1，$\lambda_2 \cdots \lambda_n$ 是 A 的特征值

利用正交变换 $x = Py$ 化 $f = x^T Ax$ 为标准形的步骤：

1) 写出 $\boldsymbol{f}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

2) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个特征值 λ_1，$\lambda_1, \cdots \lambda_n$;

3) 对每个 λ_i 求出对应的线性无关的　特征向量，

并将它们正交化，单位　化，从而求出 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个

两两正交的特征向量　$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots \boldsymbol{p}_n$;

4) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots \boldsymbol{p}_n)$, 及 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,

则 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{P}^T A\boldsymbol{P})\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{y}_1^2 + \lambda_2 \boldsymbol{y}_2^2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{y}_n^2$.

例1　将二次型

$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

通过正交变换 $x=Py$,化成标准形.

解　1. 写出对应的二次型矩阵，并求其特征值

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{pmatrix}17-\lambda & -2 & -2\\ -2 & 14-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 14-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

从而得特征值 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18.$

2．求特征向量

将 $\lambda_1 = 9$ 代入 $(A - \lambda E)x = 0$，得基础解系

$$\xi_1 = (1/2,1,1)^T.$$

将 $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ 代入 $(A - \lambda E)x = 0$，得基础解系

$$\xi_2 = (-2,1,0)^T, \ \xi_3 = (-2,0,1)^T.$$

3．将特征向量正交化

取 $\alpha_1 = \xi_1, \alpha_2 = \xi_2, \alpha_3 = \xi_3 - \dfrac{[\alpha_2,\xi_3]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2,$

第77页
定理20

得正交向量组

$$\alpha_1 = (1/2,1,1)^T, \quad \alpha_2 = (-2,1,0)^T,$$
$$\alpha_3 = (-2/5,-4/5,1)^T.$$

4．将正交向量组单位化，得正交矩阵 P

令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \quad (i = 1,2,3),$

得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ -4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

所以 $P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

于是所求正交变换为 $X=PY$：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有 $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2.$

例2　求一个正交变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$，把二次型

$$f = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$$ 化为标准形.

解　$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

求出A的特征值$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$,

得　$\mathbf{P} = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$,

所求正交变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

标准形为

$$f = 2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2.$$

例3　求一个正交变换 $\mathbf{x}=P\mathbf{y}$, 把二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3 \text{化为标准形.}$$

解 1)二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

2)求A的全部特征值:

由$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\0&2-\lambda&0\\-1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(2-\lambda)^2=0$

得A的特征值: $\lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=2.$

3)求正交矩阵P

$\lambda_1 = 0$时，解（$\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I}$）$\boldsymbol{x} = 0$

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_2 = 0 \\ \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_3 \end{cases}$ $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单位化$\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$时， 解（$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$）$\boldsymbol{x} = 0$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 得 $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = -\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_3 \end{cases}$

得$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 取$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $\mathbf{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

4)写出正交变换和标准形

正交变换为 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}$

标准形为 $f = 2y_2^2 + 2y_3^2$

二、拉格朗日配方法*

拉格朗日配方法的步骤：

1. 若二次型含有x_i的平方项，则先把含有x_i的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形;

2. 若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$,则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ \quad x_k = y_k \end{cases} \qquad (k = 1,2,\cdots,n \text{且} k \neq i,j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

例1 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

解

含有平方项

含有x_1的项配方

$$f = \boxed{x_1^2} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

去掉配方后多出来的项

$$\boxed{-x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$
$$= y_1^2 + y_2^2.$$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(|C| = 1 \neq 0\right).$$

例2 化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

成标准形,并求所用的变换矩阵．

解 由于所给二次型中无平方项，所以

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases} \left(即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$

代入 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$,

得 $$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

再配方，得

$$f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3, \\ y_3=z_3 \end{cases}$ $\left(即 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right)$

得 $$f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$$

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \quad (|C|=-2\neq 0).$$

§ 5.6 惯性定理与正定二次型

一、惯性定理

定理 (惯性定理) 设有实二次型$f = x^T Ax$,它的秩为r,有两个实的可逆变换

$$x = Cy \quad 及 \quad x = Pz$$

使 $$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \qquad (k_i \neq 0),$$

及 $$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \qquad (\lambda_i \neq 0),$$

则$k_1,\cdots,k_r$中正数的个数与$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$中正数的个数相等.

二、正(负)定二次型的概念

定义 设有实二次型 $f(x)=x^T Ax$,如果对任何 $x\neq 0$,都有 $f(x)>0$(显然 $f(0)=0$),则称 f 为正定二次型,并称对称矩阵 A 是正定的;如果对任何 $x\neq 0$ 都有 $f(x)<0$,则称 f 为负定二次型,并称对称矩阵 A 是负定的.

例如 $f=x^2+4y^2+16z^2$ 为正定二次型

$f=-x_1^2-3x_2^2$ 为负定二次型

三、正(负)定二次型的判别

定理 实二次型$f = x^T Ax$为正定的充分必要条件是：它的标准形的n个系数全为正.

推论 实二次型$f = x^T Ax$为正定$\Leftrightarrow$

A的特征值全大于零.

定义 n阶方阵A的前k行和前k列交叉处元素构成

k阶子式 $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

称为A的k阶顺序主子式.

定理 实二次型$f = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$为正定$\Leftrightarrow$

A的各阶顺序主子式全大于零;

实二次型$f = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$为负定$\Leftrightarrow$

A的奇数阶顺序主子式全小于零;

而偶数阶顺序主子式全大于零.

例1 判别二次型$f=-x^2-2y^2-3z^2+2xy+2yz$的正定性.

解 $$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

它的各阶顺序主子式

$$a_{11}=-1<0,\qquad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1>0,$$

$|A|=-2<0,$ 所以f为负定.

例2 λ为何值时，二次型

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$$ 为正定.

解 $$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 1 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 > 0, \ \Rightarrow -2 < \lambda < 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2\lambda^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2},$$

故当$-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}$时$f$为正定.

例3 判别二次型

$$f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$$

的正定性.

解 f的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$,

$$a_{11}=-5<0,\qquad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,$$

$$|A|=-80<0,$$

故f为负定二次型.

一、正交变换法

小结：

定理 对于实二次型 $f=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$，总存在正交变换 $\mathbf{x}=P\mathbf{y}$，使 f 化为标准形

$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$ 其中 λ_1，$\lambda_2\cdots\lambda_n$ 是 A 的特征值

利用正交变换 $x=Py$ 化 $f=x^T Ax$ 为标准形的步骤：

1)写出 f 的矩阵 A；

2)求出 A 的 n 个特征值 λ_1，$\lambda_1,\cdots\lambda_n$；

3)对每个 λ_i 求出对应的线性无关的 特征向量，

并将它们正交化，单位 化，从而求出 A 的 n 个两两正交的特征向量 $p_1,p_2,\cdots p_n$；

4)令 $P=(p_1,p_2,\cdots p_n)$，及 $x=Py$，

则 $f=x^T Ax=y^T(P^T AP)y=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

定理 (惯性定理) 设有实二次型 $f = x^T Ax$，它的秩为 r，有两个实的可逆变换

$$x = Cy \quad \text{及} \quad x = Pz$$

使 $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \quad (k_i \neq 0)$,

及 $f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0)$,

则 $k_1, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等．

五. 正定二次型的概念.

六. 正定二次型（正定矩阵）的判别方法:

(1) 定义法;

(2) 顺次主子式判别法;

(3) 特征值判别法.

作　业

第五节　化二次型为标准形、第六节　正定二次型

1. 求一个正交变换使化下列二次型为标准形：

（1） $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$

（2） $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$；

2. 判别下列二次型的正定性：

（1） $f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$

（2） $f = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$