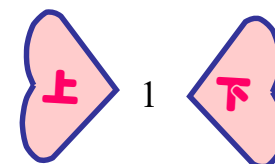


后次复习前次的概念



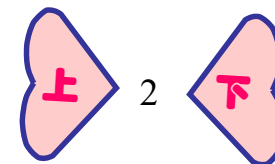
- 1、方阵的行列式及性质
- 2、逆矩阵的概念和性质
- 3 伴随矩阵的概念

$A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 有如下重要性质:

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

定理1 矩阵 $A$ 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$  , 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$



## 4、逆矩阵的运算性质

(1) 若 $A$ 可逆,则 $A^{-1}$ 亦可逆,且 $(A^{-1})^{-1} = A$ .

(2) 若 $A$ 可逆,数 $\lambda \neq 0$ ,则 $\lambda A$ 可逆,且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ .

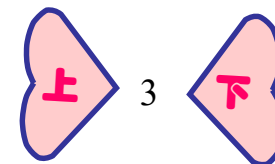
(3) 若 $A, B$ 为同阶方阵且均可逆,则 $AB$ 亦可逆,且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

推广  $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$

(4) 若 $A$ 可逆,则 $A^T$ 亦可逆,且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

(5) 若 $A$ 可逆,则有 $|A^{-1}| = |A|^{-1}.$



## 5、简单的矩阵方程

$$(1) AX = B \quad (2) XA = B \quad (3) AXB = C$$

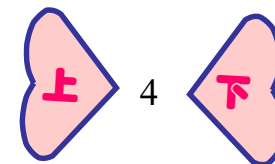
其中， $A$ ， $B$ ， $C$ 已知

## 6、分块矩阵的概念与运算

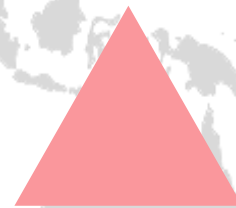
(注意乘法)

## 7、对角块矩阵及性质

(尤其准对角阵)



## §2.5 向量组的线性相关性(1)





**定义** 设有向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \mathbf{b}$ . 如果存在一组数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使  $\mathbf{b} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$  成立, 则称  $\mathbf{b}$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的线性组合, 或称  $\mathbf{b}$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 其中  $k_1, k_2, \dots, k_n$  称为表示系数.

如果方程组有解, 就等价于存在一组数  $k_1, k_2, \dots, k_n$  使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = \mathbf{b}$$

即向量  $\mathbf{b}$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示.

即向量  $\mathbf{b}$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示. 等价于线性方程组  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{b}$  有解.

例1 设向量  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

问  $b$  能否由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示?

解 设  $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 = b$

即  $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  或  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

易知:  $x_1 = 2, x_2 = -1$

即  $2\alpha_1 + (-1)\alpha_2 = b$

故  $b$  可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示.



**定义** 称 $n$ 阶单位矩阵  $\mathbf{I}$ 的行向量组

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1).$$

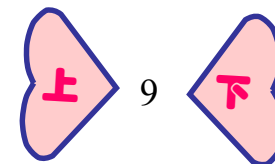
为**基本单位向量组**.

**结论:** 任何一个  $n$ 维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可由基本单位向量组线性表示 .

$$\alpha = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_n \mathbf{e}_n$$

$$\text{又 } 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_n = 0$$

即零向量可由任何一个同维的向量组线性表示.



## 二、向量的线性相关性

定义 设有向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ,

(1) 如果存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_n$  使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \quad (*)$$

成立, 则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

线性相关 (*linear dependence*)

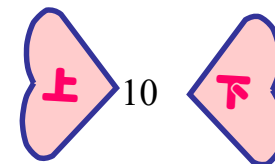
(2) 如果只有当  $k_1, k_2, \dots, k_n$  全为零时, (\*) 式才成立,

则称向量组 线性无关 (*linear independence*).

例  $\alpha_1 = (2, -1, 3), \alpha_2 = (4, -2, 5), \alpha_3 = (2, -1, 4)$

因为  $3\alpha_1 + (-1)\alpha_2 + (-1)\alpha_3 = 0$

所以向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关。



此定义也可表述为：

若齐次线性方程组  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$

有非零解，则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性相关.

否则（即只有零解）就称 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性无关.

**注：** 1. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性无关，则只有当

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$  时，才有

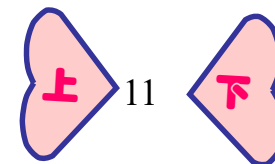
$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n = 0$  成立 .

2. 对于任一向量组，不是线性无关就是线性相关

3. 向量组中含有零向量 必相关

4. 一个向量相关  $\Leftrightarrow$  零向量

5. 两个向量相关  $\Leftrightarrow$  对应分量成比例



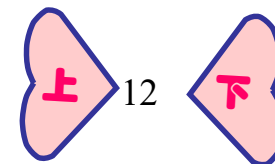
例1 讨论向量组  $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,3,5), \alpha_3 = (1,-1,-3)$  的线性相关性.

解 设  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

用行列式来解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

方程组有非零解，所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关.



例2 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 试证向量组

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  也线性无关

p60  
例26

证 设  $x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + x_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$

整理得  $(x_1 + x_3)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + (x_2 + x_3)\alpha_3 = 0$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 故有

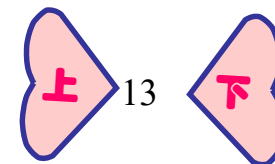
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{系数行列式} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

故方程组只有零解, 即  $x_1, x_2, x_3$  只能全为零.

所以  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  线性无关.

注:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  成单, 线性无关;

成双, 线性相关.



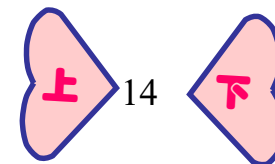
### 三. 线性组合与线性相关性 的关系

**定理 5** 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$   
其中至少有一个向量可由其余向量线性表示  
向量组线性无关  $\Leftrightarrow$   
其中任何一个向量都不能由其余向量线性表示.

**定理 9** 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

则 $\alpha$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示且表示法唯一



#### 四、关于线性相关性的几个结论

例 1 讨论向量组  $\alpha_1 = (1, 3, 2), \alpha_2 = (1, 3, -4), \alpha_3 = (3, 1, 5), \alpha_4 = (0, 5, 6)$  的线性相关性。

解 设  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0$

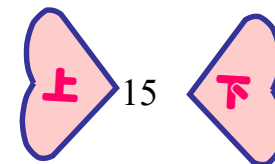
这是一个含有 3 个方程 4 个未知量的线性方程，

即  $m = 3 < n = 4$ . 所以必有非零解，可讨论一下

故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关 .

1 个数与维数: 个数大于维数  $\Rightarrow$  线性相关 p62  
定理6

特别， $n+1$  个  $n$  维向量必线性相关。



例2 设  $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$  新疆政法学院

线性无关. 证明  $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4),$

$\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4), \gamma = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  也线性无关.

<sup>5</sup> 证 设  $\alpha, \beta, \gamma$  线性相关,<sup>6</sup> 即存在不全为零的数  $k_1,$

<sup>7</sup>  $k_2, k_3$  使 <sup>8</sup>  $k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = 0$

<sup>9</sup> 写成分块形式

<sup>10</sup>  $k_1(a, a_4) + k_2(b, b_4) + k_3(c, c_4) = (0, 0)$

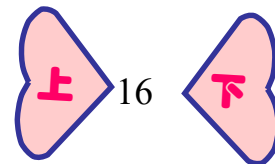
<sup>11</sup> 则有 <sup>12</sup>  $k_1a + k_2b + k_3c = 0$

得  $a, b, c$  线性相关, 与它们线性无关矛盾,

所以  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关。

2 伸长与缩短组 (维数变化):  
分量短的无关  $\Rightarrow$  伸长组无关

p62  
定理7



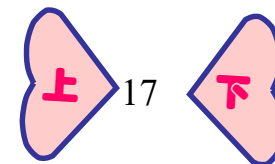


例 4 试证：若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关，  
则它的任一部分组也线性无关.

3 部分与全体（向量个数变化）：

全体无关  $\Rightarrow$  部分无关 p62, 定理8

逆否：部分相关  $\Rightarrow$  全体相关 p62, 定理10



总结如下:

1 个数与维数: **个数大于维数  $\Rightarrow$  线性相关**

特别,  $n+1$  个  $n$  维向量必线性相关。

2 伸长与缩短组 (维数变化):

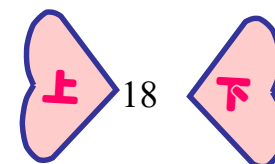
分量短的无关  $\Rightarrow$  伸长组无关

逆否: 分量长的相关  $\Rightarrow$  缩短组相关

3 部分与全体 (向量个数变化):

**全体无关  $\Rightarrow$  部分无关**

**逆否: 部分相关  $\Rightarrow$  全体相关**



可以证明:

$n$ 个 $n$ 维向量  $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T, i = 1, 2, \dots, n,$

$$\text{线性相关} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{线性无关} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

即矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  可逆 **p62,定理11**

由此可知基本单位向量组是线性无关的. ( $\because |I| = 1$ )

## 四、向量组的极大无关组和秩

定义 1 设有向量组  $T$ , 如果它的一个部分组

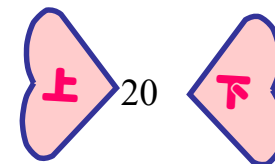
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  满足:

1) 线性无关;

2) 任取  $\alpha \in T$ , 则  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关.

[2')  $T$  中任一  $\alpha$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示.]

则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  为向量组  $T$  的一个极大线性无关组 .



例 求向量组  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  的极大无关组

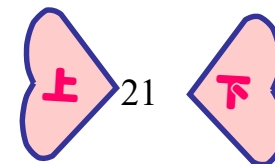
解  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  是一个极大组,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  也是一个极大无关组

**注意** 1<sup>0</sup> 极大无关组可能不唯一 .

2<sup>0</sup>  $T$ 内极大无关组所含向量 个数必相同.

3<sup>0</sup>  $r \leq T$ 中向量的个数 .

如 $T$ 本身是线性无关的, 极大线性无关组就是  $T$ 自己.



## 五、向量组间的关系：

**定义22** 设有两个  $n$  维向量组  $A$  和  $B$ ，若向量组  $A$  中的每个向量都能由向量组  $B$  中的向量线性表示，则称**向量组  $A$  能由向量组  $B$  线性表示**。

若向量组  $A$  能由向量组  $B$  线性表示，且向量组  $B$  能由向量组  $A$  线性表示，则称**向量组  $A$  与向量组  $B$  等价**。

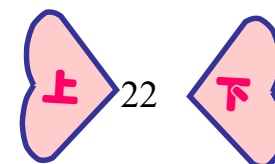
显然，**一个向量组的极大无关组与向量组本身是等价的**。

有如下性质：(1) 反身性：

(2) 对称性：

(3) 传递性：

解释



定义 向量组的极大无关组所含向量的个数  
称为向量组的秩.

并规定只含零向量的向量组的秩为 0.

例 求向量组  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  的秩为2

## 重要结论

向量组线性无关  $\Leftrightarrow$  它的秩等于所含向量的 个数

向量组线性相关  $\Leftrightarrow$  它的秩小于所含向量的 个数

## 关于两个向量组的秩，有如下结论：

**定理12** 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性表示 且向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关，则  $s < t$ .

**推论5** 等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

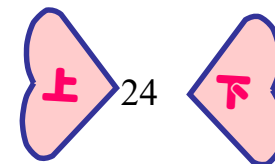
**推论6** 等价的向量组其秩相同.

**推论7** 线性无关的  $n$  维向量组最多含  $n$  个向量.

**推论8** 若向量组  $A$  可由向量组  $B$  线性表示，

$$\text{则 } r_A \leq r_B$$

**推论9** 任意  $n+1$  个  $n$  维向量线性相关.

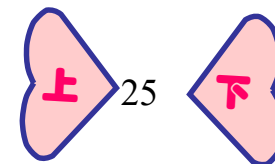




例 试证阶梯阵

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的首非零元  $a_1, b_2, c_5$  对应的列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$   
是  $U$  的列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$  的一个极大无关组 .



证 首先证  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$  线性无关

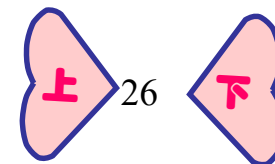
事实上:  $a_1, a_2, a_5$  前三个分量构成的向量组线性无关

(因为行列式不等于零)

由分量短的无关, 则延长分量还无关。

所以  $a_1, a_2, a_5$  线性无关

再证  $U$  的任何一个列向量可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$  线性表示.



设  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_5 = \alpha_i (i = 1, 2, \dots, 7)$

增广矩阵都具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_5 & * \\ 0 & b_2 & b_5 & * \\ 0 & 0 & c_5 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为  $a_1, b_2, c_5$  均不为零，所以方程组

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_5 a_5 = *_{1}$$

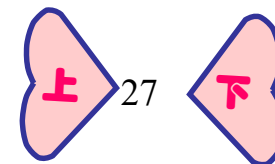
$$x_2 b_2 + x_5 b_5 = *_{2}$$

$$x_5 c_5 = *_{3}$$

| 有解，所以  $\alpha_i$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$  线性表示．

故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$  是  $U$  的列向量组的一个极大无关组。

例 求左边矩阵列向量组的秩  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



# 本节课 内容小结

新疆政法学院

## 向量组的线性相关性

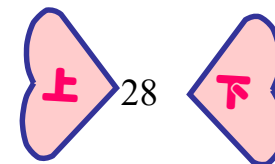
### 一、线性表示（线性组合）

如果存在一组数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使

$$\mathbf{b} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$$

成立, 称  $\mathbf{b}$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \mathbf{b}$$



## 二、线性相关与线性无关

如果存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_n$  使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \quad (*)$$

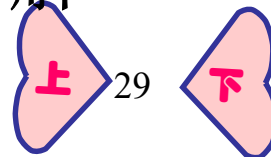
成立，则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$  有非零解

如果只有当  $k_1, k_2, \dots, k_n$  全为零时，(\*)式才成立，

则称向量组线性无关。

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$  只有零解



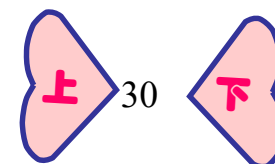
### 三、线性相关性的判别方法

1.根据定义

2.根据有关结论

如：个数与维数； 维数与维数； 个数与个数。

### 四、极大线性无关组和 秩的定义和求法



# 作业P82, 15

新疆政法学院

## 补充

1.判断, 如果错误, 请改正.

(1) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则每一个  $\alpha_i (1 \leq i \leq s)$  都可由其余的向量线性表出. ( )

(2) 若当  $k_1 = k_2 = \dots = k_s$  时,  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关. ( )

(5) 设  $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im})$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . 若  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性无关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  也线性无关. ( )

2.若向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  线性表示, 则下列结论正确的是( ).

(A) 存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_t$  使  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$  成立;

(B) 存在一组全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_t$  使  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$  成立;

(C) 存在一组数  $k_1, k_2, \dots, k_t$  使  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$  成立;

(D) 对  $\beta$  的线性表示式惟一.

3.当向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关时, 使等式  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$  成立的常数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  是 ( ).

(A) 任意一组常数;

(B) 任意一组不全为零的常数;

(C) 某些特定的不全为零的常数;

(D) 唯一的一组不全为零的常数.

