第五章 相似矩阵与二次型的化简

§5.1 方阵的特征值和特征向量

特征值和特征向量的概念

特征值和特征向量的性质

为了定量分析经济发展与环境污染的关系，某地区提出如下增长模型：设x_0 是该地区目前的污染损耗（由土壤、河流、湖泊及大气等污染指数测得），y_0是该地区的农业产值。以5年为一个发展周期，一个周期后的污染损耗和国民生产产值分别记为x_i和y_i ,它们之间的关系是

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{8}{3}x_{i-1} - \dfrac{1}{3}y_{i-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,\cdots,n \\ y_i = -\dfrac{2}{3}x_{i-1} + \dfrac{7}{3}y_{i-1} \end{cases}$$

特别 $x_1 = \dfrac{8}{3}x_0 - \dfrac{1}{3}y_0, y_1 = -\dfrac{2}{3}x_0 + \dfrac{7}{3}y_0$

写成矩阵 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ 或$\alpha_1 = \mathrm{A}\alpha_0$

$$\alpha_i = A\,\alpha_{i-1} \quad i = 0,1,\cdots,n$$

其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{7}{3} \end{pmatrix}$$

如果当前的水平 $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,则

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = A\alpha_0 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

即 $\alpha_1 = 2\alpha_0.$ $\alpha_i = A\,\alpha_{i-1}\quad i = 0,1,\cdots,n$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

由此可测得n个周期后的污染损耗和国民生产产值

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1} = 2^2\alpha_{n-2} = \cdots = 2^n\alpha_0$$

以上运算中，表达式 $A\alpha_0 = 2\alpha_0$

反应了矩阵A 的特征值2和特征向量 α_0 的关系问题，

类似地问题很多

一、特征值和特征向量的概念

定义 设A为n阶方阵，如果数λ和n维非零列向量x满足

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$$

则称数λ为方阵A的特征值

非零向量x称为方阵A的对应于特征值λ的特征向量

例如 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

上例$A\alpha_0=2\alpha_0$ 这里 $A=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3}\end{pmatrix}$

注意 $A\alpha_{i-1}=2\alpha_{i-1}$ 说明属于特征值的特征向量不是唯一地。

求特征值和特征向量的求法:

$$Ax = \lambda x,\quad Ax = \lambda Ix \Rightarrow (\lambda I - A)x = 0$$

$$(\lambda I - A)x = 0\text{有非零解} \Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$$

称 (1) $f(\lambda) = |\lambda I - A|$为$A$的特征多项式

(2) $$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{22} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

为A的特征方程，是关于λ的一元n次方程,

(在复数范围内）有n个根.

求特征值和特征向量的步骤：

（1）求出A的特征方程$|\lambda \boldsymbol{I}-A|=\mathbf{0}$全部根，

即为A的属于特征值λ 的全部特征值；

（2）对A的每一个特征值λ_i，求出$(A-\lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$的非零解，即为$A$的对应于$\lambda_i$的全部特征向量

例1 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$的特征值和特征向量

解　A的特征方程为

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)^2-1=(2-\lambda)(4-\lambda)$$

$$=0$$

A的特征值为：$\lambda_1=2, \lambda_2=4,$

对$\lambda_1 = 2$，解$(A-2I)x = 0$，

$$A-2I=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

得同解方程组$\begin{cases}x_1 = x_2\\ x_2 = x_2\end{cases}$，得到一个基础解系$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

所以A对应于$\lambda_1 = 2$的特征向量为

$$k_1 p_1 = k_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(k_1 \neq 0\text{的常数})$$

对$\lambda_2 = 4$,解$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$

$$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得同解方程组 $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = -\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2 \end{cases}$

得到一个基础解系为 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$(k_2 \neq 0$的常数)

所以 A对应于$\lambda_2 = 4$ 的全部特征向量为

$$\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{k}_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}(\boldsymbol{k}_2 \neq 0\text{的常数})$$

例2 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 A的特征方程为

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

所以 A的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$

对$\lambda_1=\lambda_2=1$,解$(A-I)x=0$

$$A-I=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ 得同解方程组 $$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}$$

得到一个基础解系为$p_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},p_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

A对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$的全部特征向量为

$$k_1p_1+k_2p_2=k_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$ (其中k_1,k_2为不全为零的任意常数)

对$\lambda_3=-1$,解$(A+I)X=0$ $A+I=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

得同解方程组$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\\x_3=x_3\end{cases}$ 得到一个基础解系为$p_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

A对应于$\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$k_3p_3=k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}(k_3\neq0\text{的常数})$$

例3 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$的特征值和特征向量.

解 A的特征方程为

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)^3=0$$

按第2列展开.

$=1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}-(3+\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$=-10-5\lambda+3-(3+\lambda)[(2-\lambda)(-2-\lambda)+2]$

$=-10-5\lambda+3-(3+\lambda)[-(4-\lambda^2)+2]$

$=-10-5\lambda+3+(3+\lambda)(4-\lambda^2)-6-2\lambda$

$=-13-7\lambda+(2-3\lambda^2+4\lambda-\lambda^3$.

$=-(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)$

A的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$

对$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$, 解$(A-\lambda I)x=(A+I)x=0$

$$A+I=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 5 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得$\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-x_3\\ x_3=x_3\end{cases}$，　得到一个基础解系为 $\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$

A对应于$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的全部特征向量为

$$\boldsymbol{kp}=\boldsymbol{k}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}(\boldsymbol{k}\neq 0\text{的任意常数})$$

例4 若λ是A的特征值，则λ^m是A^m的特征值$(m$是任意常数$)$.

证明 $(1)\because Ax=\lambda x$

$$\therefore A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda(\lambda x)\Rightarrow A^2x=\lambda^2x$$

再继续施行上述步骤 $m-2$次，就得 $A^m x=\lambda^m x$

故 λ^m 是矩阵 A^m 的特征值，且 x 是 A^m 对应于 λ^m 的特征向量.

注：A对应于λ的特征向量p，

也是A^m对应于λ^m的特征向量

例5 设A为n阶方阵,且$A^2=A$，试证，A的特征值只能是0和1.

证 设λ是A的特征值,p是对应于λ的特征向量

则$Ap=\lambda p, \Rightarrow A^2p=\lambda^2 p$

$$\because A^2=A, \therefore A^2p=Ap=\lambda p$$

故得$\lambda^2 p=\lambda p$, $(\lambda^2-\lambda)p=0$

$$\because p\neq 0, \therefore \lambda^2-\lambda=0$$

故A的特征值只能是0和1.

例6 设λ是方阵A的对应于特征向量x的特征值，

证明：

(1) $k\lambda$是kA的对应于特征向量x的特征值

(2) λ^n是A^n的对应于特征向量x的特征值 （注意例4）

(3) 若A可逆，则λ^{-1}是A^{-1}的对应于特征向量x的特征值

(4) $g(\lambda)=a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1k+a_0$是矩阵

$g(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0I$的特征值

仅证 (3) 若λ为**A**的特征值, 当A可逆时,λ^{-1}是A^{-1}的特征值.

事实上， 易知,当**A**可逆时,$\lambda \neq$ **0,**

否则，若$\lambda = 0$，则$Ax = \lambda x = 0$，即$Ax = 0$,

又A可逆,两边乘A^{-1},所以必$x = 0$,与$x \neq 0$矛盾。

由$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Ax}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}$$

故λ^{-1}是矩阵A^{-1}的特征值,且x是A^{-1}对应于λ^{-1}的特征向量.

二、特征值与特征向量的性质

1. A与A^T有相同的特征值.

证　由$(A-\lambda I)^T=A^T-\lambda I$有

$$\left|A^T-\lambda I\right|=\left|(A-\lambda I)^T\right|=\left|A-\lambda I\right|$$

得A与A^T有相同的特征多项式，所以特征值相同.

2.设n阶方阵 $A_{n\times n}$的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$(1)\left|A\right|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;(A\text{可逆}\Leftrightarrow\lambda_i\neq 0)$$

$$(2)\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

称为方阵A的迹，记作 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

3. 矩阵A关于特征值 λ_i 的m个特征向量$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$的任意非零线性组合仍为$A$的关于特征值$\lambda_i$ 的特征向量.

4. 设$\lambda_i\,(\boldsymbol{i}=1,2,\cdots,\boldsymbol{m})$是方阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\mathbf{p}_i$是对应于$\lambda_i$的特征向量．若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$互不相等，则 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$线性无关．

如例2 ,A的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=\mathbf{1},\lambda_3=-\mathbf{1}$

对于 $\lambda=1$，特征向量 $p_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},p_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

p_1,p_3线性无关；

p_2,p_3也线性无关。

对特征值$\lambda_3=-1$，得特征向量 $p_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

例7 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为1, 0, -1，求矩阵 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值；

解（1）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $\lambda_i(i=1,2,3)$，则 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $g(\lambda_i)=\lambda_i^2+3\lambda_i+2,\quad(i=1,2,3)$.

对应于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值， g(A)的3个特征值依次为：

$$g(\lambda_1)=\lambda_1^2+3\lambda_1+2=1^2+3\cdot1+2=6\,;$$

$$g(\lambda_2)=\lambda_2^2+3\lambda_2+2=0^2+3\cdot0+2=2\,;$$

$$g(\lambda_3)=\lambda_3^2+3\lambda_3+2=(-1)^2+3\cdot(-1)+2=0\,.$$

例8 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，由于 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $g(\lambda)=\lambda^2+3\lambda+2=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$.

例9 三阶方阵 A 的三个特征值分别为 $2,3,7$，求行列式 $|5A+I|$

解：由例5（4）知 $5\lambda_i+1$ 为 $5A+I$ 的特征值，

即：$5\times2+1$，$5\times3+1$，$5\times7+1$ 为 $5A+I$ 的特征值，

所以，由性质2：$|5A+I|=(5\times2+1)(5\times3+1)(5\times7+1)$

$$11\cdot16\cdot36=6335$$

小结

(1)特征值和特征向量的定义

(2)特征值和特征向量的计算

(3)特征值和特征向量的性质

(包括有些例子)

一、特征值和特征向量的概念

定义 设A为n阶方阵，如果数λ和n维非零列向量x满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称数λ为方阵A的特征值

非零向量x称为方阵A的对应于特征值λ的特征向量

求特征值和特征向量的步骤：

（1）求出A的特征方程$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0}$全部根，

即为A的属于特征值λ的全部特征值；

（2）对A的每一个特征值λ_i，求出$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$的非零解，即为$A$的对应于$\lambda_i$的全部特征向量

二、特征值与特征向量的性质

(1) $k\lambda$是kA的对应于特征向量x的特征值

(2) λ^n是A^n的对应于特征向量x的特征值

(3) 若A可逆，则λ^{-1}是A^{-1}的对应于特征向量x的特征值

(4) $g(\lambda)=a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1k+a_0$是矩阵

$g(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A\ +a_0I$的特征值

设A为n阶方阵,且 $A^2=A$，A的特征值只能是0和1.

1. A与 A^T有相同的特征值.

2.设n阶方阵 $A_{n\times n}$的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$(1)|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;(A可逆\Leftrightarrow\lambda_1\neq 0)$$

$$(2)\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

称为方阵A的迹，记作 $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

3. 矩阵A关于特征值 λ_i 的m个特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的任意非零线性组合仍为A的关于特征值λ_i 的特征向量.

4. 设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$是方阵$A$的特征值，$\mathbf{p}_i$是对应于$\lambda_i$的特征向量． 若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$互不相等，则 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$线性无关 .

注意

1． 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

2． 属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这个特征值的特征向量.

3． 矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的，一个特征值具有的特征向量不唯一；一个特征向量不能属于不同的特征值.

作　业

第一节　方阵的特征值与特征向量

1. 求以下矩阵的特征值和特征向量

（1）$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

2. 设 A 有一个特征值 2，求 $A^2-2A-2E$ 的一个特征值.

3. 设 $A^2-3A+2E=0$，证明 A 的特征值只能取 1 或 2.