第四章 线性方程组

§4.1 高斯消元法

§4.1　高斯消元法

一、　概述

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

— $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$方程组

可表示成向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathrm{b}$$

可写成矩阵形式　$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

若$\mathbf{b}=0$，称$\mathbf{Ax}=0$为齐次的；

若$\mathbf{b}\neq 0$，称$\mathbf{Ax}=b$为非齐次的.

满足方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的向量$\mathbf{x}$，称为它的解向量，

也称为解.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ 称为增广矩阵.

若增广矩阵为阶梯阵， 则称它所对应的方程组为阶梯形方程组.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\ \ x_2 + 2x_3 = 3 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 2 \end{cases}$$

容易求得： $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2.$

二、消元法解线性方程组（回顾）

分析：用消元法解下列方程组的过程.

引例 求解线性方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\
4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \quad \div 2 \\
3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & ④
\end{cases}
\qquad (1)
$$

新疆政法学院

解

(1) $\xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow ②}$ $\begin{cases} \cancel{x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4,} & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & ④ \end{cases}$ (B_1)

$\xrightarrow[④-3①]{\substack{②-③ \\ ③-2①}}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, & ④ \end{cases}$ (B_2)

$\xrightarrow[\substack{③+5② \\ ④-3②}]{② \times \frac{1}{2}}$

$$② \times \frac{1}{2} \qquad ③+5② \qquad ④-3②$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3, & ④ \end{cases} \qquad (B_3)$$

$$③ \leftrightarrow ④ \qquad ④-2③$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0, & ④ \end{cases} \qquad (B_4)$$

用“回代”的方法求出解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0, & ④ \end{cases}$$

于是解得 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 其中x_3为任意取值.

或令$x_3 = c$,方程组的解可记作

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix},$$ 即$x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ 其中c为任意常数.

小结：

1．上述解方程组的方法称为消元法.

2．始终把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换

（1）交换方程次序；

（2）以不等于 0 的数乘某个方程；

（3）一个方程加上另一个方程的***k***倍.

3．上述三种变换都是可逆的.

若$(A)\xrightarrow{①\leftrightarrow ②}(B)$，则$(B)\xrightarrow{①\leftrightarrow ②}(A)$；

若$(A)\xrightarrow{① \times k}(B)$，则$(B)\xrightarrow{① \div k}(A)$；

若$(A)\xrightarrow{① + k②}(B)$，则$(B)\xrightarrow{① - k②}(A)$.

由于三种变换都是可逆的，所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的．故这三种变换是同解变换.

因为在上述变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量并未参与运算.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & ④ \end{cases}$$

若记 $B = (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

则对方程组的变换完全可以转换为对矩阵***B***(方程组（**1**）的增广矩阵）的变换.

这样，关于方程组解的研究，可以转化为增广矩阵的研究。

定理1　若线性方程组 **A*x*=b** 的增广矩阵**(Ab)**经初等行变换化为**(Ud)**,则它与方程组 **U*x*=d** 是同解的.　证明略

证　$\because (Ab)$经初等行变换化为 (Ud), 存在可逆矩阵 P

使 $P(A\ \ b) = (U\ \ d)$, 即$(PA\ \ Pb) = (U\ \ d)$

$\Rightarrow \quad PA = U, Pb = d,$ 或 $A = P^{-1}U, b = P^{-1}d.$

设 α是$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的解，即 $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b}$.　两边左乘$\mathbf{P}$

$\mathbf{PA}\alpha = \mathbf{Pb}$, 即 $\mathbf{U}\alpha = \mathbf{d}$,　故 α是$\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$的解 .

同理可证，$\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$的解也是$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的解.

问题：

1. 如何判断线性方程组是否有解？

2. 有解时解是否唯一？

3. 当解不唯一时，解的结构任何？

三、线性方程组有解的判定条件

问题： 如何利用 $r(A)$和$r(Ab)$的秩，

讨论线性方程组 $Ax=b$ 的解.

定理2 **线性方程组 Ax=b 有解** $\Leftrightarrow$ $r(\mathrm{A})=r(\mathrm{Ab})$

解释：
证明见
103--104

定理3 **设线性方程组 Ax=b 有解。**

如果 $r(\mathrm{A})=\mathrm{n}$，则它有唯一解;

如果 $r(\mathrm{A})<\mathrm{n}$，则它有无穷多解。

用在齐次方程组即：

推论 **n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A)<n$.**

例 1 解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ 2x_1-x_2-x_3=1 \\ 3x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$

解 $(\mathbf{Ab})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 \end{pmatrix}$

$\underset{r_3+r_2}{\overset{(-1)r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

注意：
r(Ab)=r(A)+1
不等于 r(A)
所以方程组无解

事实上：从最后一非零行可知 $0x_1+0x_2+0x_3=-3$

即$0=-3$．这是一个矛盾方程，所以原方程组无解。

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

解 用初等变换把增广矩阵化为行最简形，

$$(\mathbf{Ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \underset{(-1)r_2}{\overset{r_3-\frac{4}{5}r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{5}{3}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{r_2-7r_3}{\overset{r_1-3r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1-2r_2}{\overset{\frac{1}{5}r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

注意：$r(A)=r(Ab)=n$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1.$$

新疆政法学院

例 3 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

解

$$(\mathbf{Ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_3 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1 + r_2}{\overset{\frac{1}{2}r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注意:

$r(A)=r(Ab)<n$

所以有无穷多解

得同解方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad + \frac{1}{2}x_4 = 1 \\ \qquad x_3 + \frac{3}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \quad x_2 \\ x_3 = \qquad -\frac{3}{2}x_4 \\ x_4 = \qquad x_4 \end{cases}$$

令$x_2=k_1, x_4=k_2$

得原方程组的解
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

其中k_1, k_2为任意常数。

例 2 解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

解 把系数矩阵化为行最简形

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{进行初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得同解的阶梯形方程组 为

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

故原方程组的解为

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$$

例 3 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 \quad + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

解 把系数矩阵化为最简形

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{进行初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

零行表示 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0.$

这是一个恒等式，得同解方程组，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{3}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

令 $x_2 = k_1, x_4 = k_2$，得

$$\begin{cases} x_1 = -k_1 - \frac{1}{2}k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = -\frac{3}{2}k_2 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

四、线性方程组解的性质

1. 齐次线性方程组解的性质（§4.2 ）

（1）若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解，则

$$x=\xi_1+\xi_2$$

也是 $Ax=0$ 的解.

（2）若 $x=\xi_1$ 为 $Ax=0$ 的解， k 为实数，则 $x=k\xi_1$ 也是 $Ax=0$ 的解.

一般地，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\ \alpha_s$ 是 $Ax=0$ 的解，

$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是数，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s$ 也是 $Ax=0$ 的解.

2．非齐次线性方程组解的性质（§4.3 ）

（1）设$x = \eta_1$及$x = \eta_2$都是$Ax = b$的解，

则$x = \eta_1 - \eta_2$ 为对应的齐次方程 $Ax = 0$的解.

证明 $\because A\eta_1 = b, \quad A\eta_2 = b \quad \therefore A(\eta_1 - \eta_2) = b - b = 0.$

即$x = \eta_1 - \eta_2$满足方程$Ax = 0.$

(2) 设$x = \eta$是方程$Ax = b$的解，$x = \xi$是方程$Ax = 0$的解，则$x = \xi + \eta$仍是方程 $Ax = b$的解.

证明 $A(\xi + \eta) = A\xi + A\eta = 0 + b = b,$

所以$x = \xi + \eta$ 是方程 $Ax = b$的解.

本次课小结

§4.1　高斯消元法

$$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为增广矩阵.

1. 关于方程组解的研究，可以转化为增广矩阵的研究.

2. 始终把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换:

（**1**）交换方程次序；

（**2**）以不等于 0 的数乘某个方程；

（**3**）一个方程加上另一个方程的***k***倍.

定理 若线性方程组 **A*x*=b** 的增广矩阵**(Ab)**经初等行变换化为**(Ud)**,则它与方程组 **U*x*=d** 是**同解的**.

用初等行变换解线性方 程组:

1)写出增广矩阵($\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b}$);

2)用初等行变换将($\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b}$)化为阶梯阵,

有解时化为行最简形;

3)写出同解的最简形方程 组**,**得出原方程组的解 **.**

三、线性方程组有解的判定条件

定理 线性方程组 Ax=b 有解 $\Leftrightarrow$ r(A)=r(Ab)

定理 设线性方程组 Ax=b 有解。

如果 r(A)=n，则它有唯一解;

如果 r(A)<n，则它有无穷多解。

Ax=0 的解:

1.Ax=0 有非零解 $\Leftrightarrow$ r(A)<n

只有零解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$

推论 2.若A是方阵，$Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

只有零解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

3.$Ax=0$,若$m<n$,则一定有非零解。

m:方程个数 n:未知量个数

4.基本未知量个数 :$r(A)=r$

自由未知量个数 :$n-r$

四、线性方程组解的性质

四、线性方程组解的性质

1．齐次线性方程组解的性质（§4.2 ）

（1）若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解，则

$$x=\xi_1+\xi_2 \text{ 也是 } Ax=0 \text{ 的解.}$$

（2）若 $x=\xi_1$ 为 $Ax=0$的解， k 为实数，则 $x=k\xi_1$ 也是 $Ax=0$的解.

一般地，若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$Ax=0$的解，$k_1,k_2,\cdots,k_s$是数，则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s$也是$Ax=0$的解.

2．非齐次线性方程组解的性质（§4.3 ）

(1）设$x=\eta_1$及$x=\eta_2$都是$Ax=b$的解，

则$x=\eta_1-\eta_2$ 为对应的齐次方程 $Ax=0$的解.

作业

第四章 线性方程组

第一节 高斯消元法

1．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$AX=O$ 是非其次线性方程组 $AX=b$ 所对应齐次线性方程组，则下列结论正确的是（ ）

（A） 若 $AX=O$ 仅有零解，则 $AX=B$ 有惟一解；

（B） 若 $AX=O$ 有非零解，则 $AX=B$ 有无穷多个解；

（C） 若 $AX=B$ 有无穷多个解，则 $AX=O$ 仅有零解；

（D） 若 $AX=B$ 有无穷多个解，则 $AX=O$ 有非零解.

2．设线性方程组 $AX=B$ 有 n 个未知量，m 个方程组，且 $r(A)=r$，则此方程组（ ）.

（A）$r=m$ 时，有解； （B）$r=n$ 时，有惟一解；

（C）$m=n$ 时，有惟一解； （D）$r<n$ 时，有无穷多解.

3. 解方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 4x_1+2x_2+5x_3=4, \\ 2x_1+2x_3=6. \end{cases}$

4. 解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6. \end{cases}$

5. 教材P121 1(3)