后次复习前次的概念

向量组的线性相关性

一、线性表示

如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使

$$\mathbf{b} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

成立，称 b 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{b}$$

二、线性相关与线性无关

如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad (*)$$

成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}$ 线性相关

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0} \text{有非零解}$$

如果只有当 $\boldsymbol{k_1, k_2, \cdots, k_n}$ 全为零时，(*)式才成立，

则称向量组线性无关 .

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0} \text{只有零解}$$

三、线性相关性的判别方法

1.根据定义

2.根据有关结论

如：个数与维数；维数与维数；个数与个数。

3.反证法

四、极大线性无关组和秩的定义和求法

定义 1 设有向量组 T,如果它的一个部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足：

1) 线性无关；

2) 任取$\alpha\in T$,则$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关.

[2′)$\boldsymbol{T}$中任一α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示.]

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量组 $\boldsymbol{T}$的一个极大线性无关组.

可以证明：

n个n维向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})^{\mathrm{T}}, i = 1,2,\cdots,n,$

$$\text{线性相关} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{线性无关} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

即矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ 可逆 **p62,定理11**

由此可知基本单位向量组是线性无关的.$(\because |I| = 1)$

五、向量组间的关系：

新

定义22 设有两个 n 维向量组 A 和 B，若向量组 A 中的每个向量都能由向量组 B 中的向量线性表示，则称向量组 A 能由向量组 B 线性表示。

若向量组 A 能由向量组 B 线性表示，且向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则称向量组 A 与向量组 B 等价。

显然，一个向量组的极大无关组与向量组本身是等价的.

有如下性质：(1) 反身性：

(2) 对称性：

解释

(3) 传递性：

关于两个向量组的秩，有如下结论：

定理12 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性表示 且向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，则$s \le t$.

推论5 等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

推论6 等价的向量组其秩相同.

推论7 线性无关的n维向量组最多含n个向量.

推论8 **若向量组 A 可由向量组 B 线性表示，**

则$r_A \le r_B$

推论9 任意**n+1**个**n**维向量线性相关.

2.6 矩阵的初等变换与初等矩阵

一、 矩阵的初等变换

1.定义：下面的三种变换称为矩阵的初等行变换：

（1）互换两行的位置；

（2）用一个非零数乘某一行；

（3）把一行的倍数加到另一行上.

若把定义中的行换成列，就得到矩阵的初等列变换定义.

初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

2.矩阵等价：

如果矩阵A经有限次初等变换变成 矩阵B，则称矩阵 A与矩阵 B等价，记作$A \sim B$.

有性质：

（**1**）自反性：**A~A;**

（**2**）对称性：若 **A~B,** 则 **B~A;**

（**3**）传递性：若 **A~B,B~C,** 则 **A~C.**

3. 初等方阵

定义 单位矩阵经一次初等变换得到的方阵称为初等方阵.

三种初等变换对应三种初等方阵.

$$I(i,j);\qquad I(i(k));\qquad I(i,j(k));$$

例:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_1\leftrightarrow c_3]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad I(1,3)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{或}c_3+kc_1]{r_1+kr_3}\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad I(1,3(k))$$

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$

$$
I(i,j) = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
& & & \vdots & \ddots & & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & 1 & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \\
& & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$c_i \leftrightarrow c_j$ 也得到 $I(i,j)$

(2) $\lambda \times r_i$

$$
I(i(\lambda)) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & \text{\Huge 0} & \\
& & 1 & & & & \\
& & & \lambda & & & \\
& & & & 1 & & \\
& \text{\Huge 0} & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$\lambda \times c_i$ 也得到 $I(i(\lambda))$

(3) $r_i + \lambda r_j$

$$I(i,\ j(\lambda)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$c_j + \lambda c_i$ 也得到 $I(i, j(\lambda))$

初等方阵的性质:初等方阵都是可逆的，其逆阵也是初等方阵

$$I(i(\frac{1}{k}))I(i(k)) = I \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 矩阵A的标准形

定义 形如
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
的矩阵，称为矩阵的标准形.

注1：任何矩阵都可以经过初等变换化成标准形.

注2：任一可逆矩阵都可通过行初等变换化为单位阵.

（即可逆矩阵与单位阵等价）

定理 设A是一个$m \times n$矩阵

对A施行一次初等行变换，相当于在A的左侧乘以一个相应的初等矩阵；

对A施行一次初等列变换，相当于在A的右侧乘以一个相应的初等矩阵；

例如：
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

(1) $$A \xleftrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$I(1,2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

(2) $A \xleftrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$A\,I(3,4) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3)定理：任何可逆方阵都可以表示为有限个初等方阵的乘积.

推论：$m \times n$矩阵 $A \sim B$的充要条件是：

存在m阶可逆矩阵 P及n阶可逆方阵 Q，

使$PAQ = B$.

注：$m \times n$矩阵A经初等行变换化为B的充要条件是：

存在可逆方阵P，使$PA = B$。

二、 矩阵的秩

1 秩的概念与性质

1） 子式

定义 设A是$m \times n$矩阵，在 A中任取 k行和 k列 $(k \leq m, k \leq n)$，位于这些行列交叉处的 k^2个元素 (保持在A中的相对位置不变）组 成的k阶行列式，称为A的k阶子式. k阶子式有 $c_m^k c_n^k$个.

注：k阶子式是一个数。

例如：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

一个2阶子式 $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$

一个3阶子式 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$

注：

(1) A 的每个元素 a_{ij} 都是 A 的一个一阶子式

(2) 当 A 为 n 阶方阵时，n 阶子式即为 $|A|$

下

2）矩阵的秩

定义 矩阵A中不为0的子式的最高阶数，称为A的**秩**，记作$r(A)$.

注：规定零矩阵的秩等于 0. 只有零矩阵的秩等于 0.

等价定义（定理 1）

$r(A)=r \Leftrightarrow A$中有**一个**r阶子式$\neq 0$，而**所有的**$r+1$阶子式(如果有）均为零。

若A中有一个r阶子式$\neq 0$，则$r(A)$? $\geq r$,

若A中所有r阶子式$=0$，则$r(A)$? $< r$.

例1　已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$，求该矩阵的秩.

解　$\because \begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0,$　计算A的3阶子式，

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ -2 & 1 & 5\end{vmatrix}=0,$$

$=0.$　　$\therefore R(A)=2.$

例2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$ 的秩.

解 在 A 中, $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0.$

又 $\because$ A 的 3 阶子式只有一个 $|A|$, 且 $|A|=0$,

$\therefore \quad R(A)=2.$

例3 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\because$ B是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，

$\therefore$ B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,\quad \therefore \quad R(B)=3.$

2.秩的性质

(1) 设A是$m \times n$矩阵，则 $r(A) \le \min\{m, n\}$,

$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}$阶方阵，则 $\boldsymbol{r(A) \le n}$

(2) $r(A^T) = r(A)$.

(3)矩阵的行秩等于矩阵的列秩等于矩阵的秩.

(4) 阶梯阵的秩等于它的非 零行数.

定义**:** 若 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 **A** 的秩 $\boldsymbol{r(\mathrm{A})=n}$,则称 **A** 为满秩矩阵**,**

否则称为 降秩矩阵**.**

A为满秩矩阵的充要条件 是$|A| \ne 0$，故满秩矩阵就是可逆矩阵.

矩阵秩的求法　用初等变换求矩阵的秩：

因为对于任何矩阵$A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换把他变为行阶梯形.

定理16　若 $A \sim B$，则 $R(A)=R(B)$.　证明略

定理**11**表明初等变换不改变矩阵的秩.结合行阶梯形矩阵的秩，因而得到求矩阵及向量组的秩的方法：

即：　把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.即：

$$1)\ A \xrightarrow{\text{初等行（列）变换}} \text{阶梯阵 } U,$$

$$2)\ r(A)=r(U)=U\text{的非零行数。}$$

例4 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩

解 对 A 作初等行变换，变成行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2-r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 $R(A)=3.$

三、初等变换方法求向量组的极大线性无关组

定理18　矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩，

从而不改变列向量组的线性相关性.

此定理给出了
向量组线性相关性的判别法和极大无关组的
求法

用矩阵初等变换方法判定向量组的线性相关性

即将向量组列排，作行初等变换（这样不改变列向量组的线性相关性），直到化成阶梯形，从中看出相关还是无关。（举例说明）

例 设

$a_1=(1, -2, 2, 3)$；$a_2=(2, 4, -1. 3)$

$a_3=(-1, 2, 2, 3)$；$a_4=(0, 6, 2, 3)$

$a_5=(2, -6, 3, 4)$；

求向量组的一个极大无关组

解，将向量组列排成矩阵，再作行初等变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-2r_1}}{\underset{r_4-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\underset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4+2r_3}{\overset{r_3-3r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

故 $r(A) = r(U) = 3.$

所以向量组的秩为**3**，

且a_1； a_2； a_4 为一个极大无关组

例 2 求向量组的秩和一个最大无关组.

$$\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (2,-3,1,-1), \alpha_3 = (1,-1,2,3),$$

$$\alpha_4 = (4,-3,4,3).$$

解 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以向量组的秩为 3,

它的一个最大无关组是 α_1, α_2, α_3.

本次课小结

一、 矩阵的初等变换

1.定义：下面的三种变换称为矩阵的初等行变换：

（1）互换两行的位置；

（2）用一个非零数乘某一行；

（3）把一行的倍数加到另一行上.

若把定义中的行换成列，就得到矩阵的初等列变换定义.

初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

2.矩阵等价:

如果矩阵A经有限次初等变换变成 矩阵B,

则称矩阵 A与矩阵 B等价，记作$A \sim B$.

有性质：

（1）自反性：**A~A;**

（2）对称性：若 **A~B,** 则 **B~A;**

（3）传递性：若 **A~B,B~C,** 则 **A~C.**

3. 初等方阵

定义 单位矩阵经一次初等变换得到的方阵称为初等方阵.

三种初等变换对应三种初等方阵.

$$\boldsymbol{I(i,j)}; \quad \boldsymbol{I(i(k))}; \quad \boldsymbol{I(i,j(k))};$$

初等方阵的性质:初等方阵都是可逆的，其逆阵也是初等方阵

4. 矩阵A的标准形

定义 形如
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
的矩阵，称为矩阵的标准形.

注1：任何矩阵都可以经过初等变换化成标准形.

注2：任一可逆矩阵都可通过行初等变换化为单位阵.

（即可逆矩阵与单位阵等价）

定理 设A是一个$m \times n$矩阵

对A施行一次初等行变换，相当于在A的左侧乘以一个相应的初等矩阵；

对A施行一次初等列变换，相当于在A的右侧乘以一个相应的初等矩阵；

3)定理：任何可逆方阵都可以表示为有限个初等方阵的乘积.

推论： $m \times n$矩阵 $A \sim B$的充要条件是：

存在m阶可逆矩阵 P及n阶可逆方阵 Q,

使$PAQ = B$.

注：$m \times n$矩阵A经初等行变换化为B的充要条件是：

存在可逆方阵P，使$PA = B$。

二、 矩阵的秩

1 秩的概念与性质

1） 子式

定义 设A是$m \times n$矩阵，在 A中任取 k行和 k列$(k \le m, k \le n)$,位于这些行列交叉处的 k^2个元素(保持在A中的相对位置不变）组 成的k阶行列式，称为A的k阶子式. $\boldsymbol{k}$阶子式有 $\boldsymbol{c_m^k c_n^k}$个.

注：$\boldsymbol{k}$阶子式是一个数。

2）矩阵的秩

定义　矩阵A中不为0的子式的最高阶数，称 为A的秩，记作$r(A)$.

注： 规定零矩阵的秩等于 0. 只有零矩阵的秩等于 0.

等价定义（定理 1）　$r(A)=r \Leftrightarrow A$中有 一个 r阶子式 $\neq 0$，而 所有的 $r+1$阶子式(如果有）均为零。

定义: 若 n 阶方阵 A 的秩 $r(A)=n$,则称 A 为满秩矩阵，否则称为 降秩矩阵.

A为满秩矩阵的充要条件 是$|A|\neq 0$，故满秩矩阵就是可逆矩阵.

2.秩的性质

(1) 设A是$m \times n$矩阵，则 $r(A) \le \min\{m, n\}$,

A是n阶方阵，则 $r(A) \le n$

(2) $r(A^T) = r(A)$.

(3) 矩阵的行秩等于矩阵的列秩等于矩阵的秩.

(4) 阶梯阵的秩等于它的非 零行数.

定理16 若 $A \sim B$,则 $R(A) = R(B)$.

矩阵秩的求法 用初等变换求矩阵的秩 ：

因为对于任何矩阵$A_{m \times n}$,总可经过有限次初等行变换把他变为行阶梯形.

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.即：

$$1)\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行(列）变换}} \text{阶梯阵 } \boldsymbol{U},$$

$$2)r(A) = r(U) = U\text{的非零行数。}$$

作业

第六节　矩阵的初等变换与初等矩阵

1．求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$

）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4.设讨论下面向量组的线性的相关性

（1）$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(1,3,t)$

6.求下列向量组的秩和一个最大无关组：

(1) $\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(2,3,4),\alpha_3=(3,4,5)$

4.设讨论下面向量组的线性的相关性

(1) $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(1,3,\ t)$

解：因为$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5,$

所以，当$t=5$时，向量组线性相关，当$t\neq5$时线性无关。

5.设α_1，α_2，α_3线性无关，讨论$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，$\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_1$，

6.求下列向量组的秩和一个最大无关组：

(1) $\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(2,3,4),\alpha_3=(3,4,5)$

解：对以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量的矩阵$A$进行初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{bmatrix}\underset{r_3+2r_2}{\overset{-1*r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以此向量组的秩为2，它的一个最大无关组为α_1,α_2