后次复习前次的概念

一、相似矩阵的概念及性质

二、矩阵相似对角化

一、 相似矩阵

1.定义 设 A、B 都是 n 阶方阵，若存在可逆方阵 P，使

$$P^{-1}AP=B$$

则称 A 与 B 相似，或称 B 是 A 的相似矩阵. $A\sim B$

对 A 进行的运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换.

2. 矩阵相似关系是等价关系

3. 相似矩阵的性质

(1)若 A 与 B 相似，则 $|A|=|B|$.

(2)若 A 与 B 相似，则 $r(A)=r(B)$.

(3)若 A 与 B 相似，则 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$.

(4)若 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同，特征值相同.

定理. 若 n 阶方阵 A 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 A 的 n 个特征值.

定理 n 阶方阵 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

推论 1 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值 则 A 可对角化.

注意：A 有 n 个不同的特征值是 A 可对角化的充分条件，但不是必要条件.

将方阵A化为对角阵的步骤

1)求出方阵 A的特征值和特征向量；

2)由特征向量的相关性判断A能否化为对角阵；

3)若A能化为对角阵，则写出与A相似的对角阵Λ.

即 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，是$A$的$n$个特征值，

P是由n个线性无关的特征向量作为列向量所构成的矩阵.

§5.3 二次型与二次型的化简

一、 二次型及表示方法

定义1 含有n个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

当a_{ij}是复数时，f称为复二次型；

当a_{ij}是实数时，f称为实二次型.

例如二元二次函数

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2.$$

例如

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2$$

都为二次型；

二、 二次型的表示方法

1）. 用和号表示

对二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

取 $a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，于是

$$\begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\ &+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ &+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ &=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j. \end{aligned}$$

2）．用矩阵表示

$$
\begin{aligned}
f &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
&+ \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
&+ x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
&+ \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \\
&= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则二次型可记作 $f=x^T Ax$,其中A为对称矩阵.

例如三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2$$

$$+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

记 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

$\therefore \quad f=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ (其中A为对称矩阵)

例 1 写出二次型

$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ 的矩阵.

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

例**2** 写出二次型 $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 的矩阵形式.

解

$$f = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二、二次型的矩阵及秩

对称矩阵 A 叫做二次型 f 的矩阵；

f 叫做对称矩阵 A 的二次型；

对称矩阵 A 的秩叫做二次型 f 的秩.

三、二次型的标准形

把只含有平方项的二次型称为标准形.

例 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2$ 为二次型的标准形.

§ 5.4 正交变换与二次型的标准形

一、 正交矩阵

1. 定义 如果实 n阶方阵 A满足

$$A^T A = AA^T = E$$ 则称 A为正交矩阵．

2.性质

(1)若A为正交矩阵，则 $|A| = \pm 1$;

(2)若A为正交矩阵，则 $A^T = A^{-1}$也是正交矩阵 ;

(3)若A, B都是n阶正交矩阵，则 AB也是正交矩阵．

证：A是正交矩阵，则 $AA^T = I$

B是正交矩阵，则 $BB^T = I$

$$AB(AB)^T = ABB^T A^T = AA^T = I$$

(4)正交矩阵的元素之间的关系

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$是正交矩阵，则

$$AA^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

即 $a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=1,$

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=0 \quad (i\neq j),$$

即 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=\begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$ (正交条件）

即 $$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 1,$$
$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

即 $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$ (正交条件）

n阶方阵A为正交矩阵$\Leftrightarrow$

它的行（或列）向量组是两两正交的单位向量组.

$$\alpha_i^T \alpha_i = 1 \qquad \alpha_i^T \alpha_j = 0$$

例 1判定下列矩阵是否为正交矩阵. 新疆政法学院

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

$$1)\because AA^T=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$\therefore A$为正交矩阵.

或 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

且 $\alpha_1^T\alpha_2=0,\|\alpha_1\|=1,\|\alpha_2\|=1,$ $\therefore A$为正交矩阵.

2) B不是正交矩阵.

例2. 若A是正交矩阵，证明 A^*也是正交矩阵 .

证 $\because A^* = A^{-1}|A|$

$$\therefore (A^*)^T = (A^{-1}|A|)^T = |A|(A^{-1})^T$$

$$= |A|(A^T)^T = |A|A,$$

$$\therefore (A^*)^T(A^*) = (|A|A)(A^{-1}|A|)$$

$$= |A|^2(AA^{-1})$$

$$= |A|^2 I$$

$$= I.$$

故A^*是正交矩阵 .

对于二次型，讨论的主要问题是：

寻找一个可逆线性变换 $\mathbf{x}=C\mathbf{y}$（C可逆）即

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

使 $f=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=(C\mathbf{y})^T A(C\mathbf{y})=\mathbf{y}^T(C^T AC)\mathbf{y}$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2.$$

注意：　将$x=Cy$代入$f=x^{T}Ax$,有

$$f=x^{T}Ax=(Cy)^{T}A(Cy)=y^{T}(C^{T}AC)y.$$

定理 任给可逆矩阵C,令$B=C^{T}AC$,如果A为对称矩阵,则B也为对称矩阵,且$R(B)=R(A)$.

证明 A为对称矩阵,即有$A=A^{T}$,于是

$$B^{T}=(C^{T}AC)^{T}=C^{T}A^{T}C=C^{T}AC=B,$$

即B为对称矩阵.

因为左右乘可逆矩阵，相当于作初等变换，

而初等变换不改变矩阵的秩

说明

1. 二次型经可逆变换 $x = Cy$ 后，其秩不变，但 f 的矩阵由 A 变为 $B = C^T AC$；

2. 要使二次型 f 经可逆变换 $x = Cy$ 变成标准形，就是要使

$$y^T C^T ACy = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

也就是要使 $C^T AC$ 成为对角矩阵．

下面先讨论实对称矩阵的对角化问题

二、 实对称阵的对角化

实对称阵的特征值与特征向量有重要性质:

定理 4 实对称阵的特征值都是实数. 证明 略

定理 5 实对称阵的不同的特征值对应的特征向量是正交的.

定理6* A为n阶对称矩阵,则必有正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP = \Lambda$,其中Λ是以A的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

此定理同时回答了 实对称阵一定可以对角化.

说明:这里所提到的对称矩阵,除非特别说明,均指实对称矩阵.

对于定理4的意义

由于对称矩阵A的特征值λ_i为实数,所以齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i E)x=0$$

是实系数方程组,由$|A-\lambda_i E|=0$知必有实的基础解系,从而对应的特征向量可以取实向量.

证 定理5) 实对称阵的不同的特征值对应的特征向量是正交的

设λ_1,λ_2是实对称阵A的两个不同特征值，

p_1,p_2是A的对应于λ_1,λ_2的特征向量，

$$\lambda_1 p_1 = Ap_1, \lambda_2 p_2 = Ap_2 \text{且} A^T = A,$$

$$\lambda_1 p_1^T p_2 = (\lambda_1 p_1)^T p_2 = (Ap_1)^T p_2 = p_1^T A^T p_2$$

$$= p_1^T (Ap_2) = p_1^T (\lambda_2 p_2) = \lambda_2 p_1^T p_2,$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) p_1^T p_2 = 0, \Rightarrow p_1^T p_2 = 0, \text{故} p_1 \text{与} p_2 \text{正交}.$$

将实对称阵 A 化为对角阵的步骤 ($step$):

1)求出 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个特征值 λ_1, $\lambda_1, \cdots \lambda_n$;

2)对每个 λ_i 求出对应的线性无关的 特征向量，

并将它们正交化，单位化，从而求出 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个

两两正交的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots \boldsymbol{p}_n$;

3)令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots \boldsymbol{p}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \Lambda$ 为对角阵 .

即

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

例 对下列各实对称矩阵，分别求出正交矩阵P，使 $P^{-1}AP$为对角阵.

$$(1)A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\quad (2)\,A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解 (1)第一步 求A的特征值

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

得 $\lambda_1=4, \lambda_2=1, \lambda_3=-2.$

第二步　由$(A-\lambda_i E)x=0$,求出 A的特征向量

对 $\lambda_1=4$,由$(A-4E)x=0$,得

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_2+4x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda_2=1$,由$(A-E)x=0$,得

$$\begin{cases} -x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ 2x_2+x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda_3=-2$,由$(A+2E)x=0$,得

$$\begin{cases} -4x_1+2x_2=0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 2x_2-2x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

第三步　　将特征向量正交化

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3是属于A的3个不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的特征向量,故它们必两两正交.

第四步　　将特征向量单位化

令　$\eta_i=\dfrac{\xi_i}{\|\xi_i\|},\quad i=1,2,3.$

得 $\eta_1=\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$, $\eta_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$.

作 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\-1&-2&2\end{pmatrix}$,

则 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

$$(2)\ A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(4-\lambda)^2,$$

得特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4.$

对 $\lambda_1=2$,由$(A-2E)x=0$,得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

对 $\lambda_2=\lambda_3=4$,由$(A-4E)x=0$,得基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$ ξ_2与ξ_3恰好正交，所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3两两正交．

再将 ξ_1,ξ_2,ξ_3单位化，令 $\eta_i=\dfrac{\xi_i}{\|\xi_i\|}(i=1,2,3)$得

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

于是得正交阵

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

不讲

定理7* 设 A 为 n 阶对称矩阵，λ 是 A 的特征方程的 r 重根，则矩阵 $A-\lambda E$ 的秩 $R(A-\lambda E)=n-r$，从而对应特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量.

小结：

新疆政法学院

一、 二次型及表示方法

二、 二次型的表示方法

1）．用和号表示　　2）$f=x^T Ax$,其中A为对称矩阵

三、二次型的矩阵及秩

对称矩阵 A 叫做二次型 f 的矩阵；

f 叫做对称矩阵 A 的二次型；

对称矩阵A的秩叫做二次型 f 的秩.

四、二次型的标准形

把只含有平方项的二次型称为标准形.

五、 正交矩阵

1. 定义 $A^T A = AA^T = E$ 则称 A 为正交矩阵 .

2.性质

(1)若A为正交矩阵，则 $|A| = \pm 1$;

(2)若A为正交矩阵，则 $A^T = A^{-1}$也是正交矩阵；

(3)若A, B都是n阶正交矩阵，则 AB也是正交矩阵.

(4)正交矩阵的元素之间的关系 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

（5）n阶方阵A为正交矩阵$\Leftrightarrow$

它的行（或列）向量组是两两正交的单位向量组.

（6）若A是正交矩阵，A^*也是正交矩阵 .

定理3 任给可逆矩阵 C,令$B = C^T AC$,如果A为对称矩阵,则B也为对称矩阵,且$R(B) = R(A)$.

定理 4 实对称阵的特征值都是实数.

定理 5 实对称阵的不同的特征值对应的特征向量是正交的.

定理6 设A为n阶对称矩阵,则必有正交矩阵 P,使$P^{-1}AP = \Lambda$,其中Λ是以A的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

此定理同时回答了 实对称阵一定可以对角化.

将实对称阵 A 化为对角阵的步骤（$step$）:

1)求出 A 的 n 个特征值 λ_1，$\lambda_1, \cdots \lambda_n$;

2)对每个 λ_i 求出对应的线性无关的　特征向量，

并将它们正交化，单位化，从而求出 A 的 n 个

两两正交的特征向量　$p_1, p_2, \cdots p_n$;

3)令 $P=(p_1, p_2, \cdots p_n)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵．

即 $$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

第三节 二次型与二次型的化简、第四节 正交变换与二次型的标准形

1. 写出下列二次型的矩阵形式并求秩：

（1）$f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$　　（2）$f = 8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$

2. 判断下列矩阵是否为正交矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

3. 求一个正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵：

（1）$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$　　（2）$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$