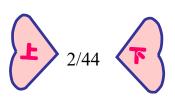
后次复习前次的概念

上次内容

- 一、矩阵的初等变换
- 1.定义:下面的三种变换称为矩阵的初等行变换:
 - (1) 互换两行的位置;
 - (2) 用一个非零数乘某一行;
 - (3) 把一行的倍数加到另一行上.

若把定义中的行换成列,就得到矩阵的初等列变换定义.

初等行变换和初等列变换统称为初等变换.



2.矩阵等价:

如果矩阵A经有限次初等变换变成 矩阵B,

则称矩阵 A与矩阵 B等价,记作 $A \sim B$.

有性质: (1) 自反性: A~A;

(2) 对称性: 若 A~B,则 B~A;

(3) 传递性: 若 A~B,B~C,则 A~C.

3. 初等方阵

定义 单位矩阵经一次初等变换得到的方阵称为初等方阵.

三种初等变换对应三种初等方阵.

 $I(i,j); \quad I(i(k)); \quad I(i,j(k));$

初等方阵的性质:初等方阵都是可逆的,其逆阵也是初等方阵

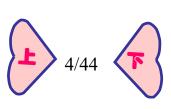
4. 矩阵A的标准形

的矩阵, 称为矩阵的标准形.

注1: 任何矩阵都可以经过初等变换化成标准形.

注2: 任一可逆矩阵都可通过行初等变换化为单位阵,

(即可逆矩阵与单位阵等价)



定理 设A是一个 $m \times n$ 矩阵

对 A 施行一次初等行变换,相当于在 A 的 左侧乘以一个相应的初等矩阵;

对 A 施行一次初等列变换,相当于在 A 的右侧乘以一个相应的初等矩阵;

3)定理: 任何可逆方阵都可以表示为有限个初等方阵的乘积.

推论: $m \times n$ 矩阵 $A \sim B$ 的充要条件是: 存在m阶可逆矩阵 P及n阶可逆方阵 Q,使 PAQ = B.

注: $m \times n$ 矩阵A经初等行变换化为B的充要条件是: 存在可逆方阵P,使PA = B。

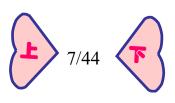
二、矩阵的秩

1 秩的概念与性质

1) 子式

定义 设A是 $m \times n$ 矩阵,在 A中任取 k行和 k列 $(k \le m, k \le n)$,位于这些行列交叉处的 k^2 个元素 (保持在A中的相对位置不变)组 成的k阶行列式, 称为A的k阶子式. k阶子式有 $c_n^k c_n^k \uparrow c_n^k \uparrow$

注: k阶子式是一个数。



2) 矩阵的秩

定义 矩阵A中不为0的子式的最高阶数,称为A的 秩,记作r(A).

注: 规定零矩阵的秩等于 0. 只有零矩阵的秩等于 0. 等价定义(定理1) $r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 一个

r阶子式 $\neq 0$,而 所有的 r+1阶子式(如果有) 均为零。

定义: 若n 阶方阵A 的秩r(A)=n,则称A 为满秩矩阵,否则称为降秩矩阵。

A为满秩矩阵的充要条件 是 $|A| \neq 0$,故满秩矩阵 就是可逆矩阵.

2.秩的性质 新

- (1) 设A是 $m \times n$ 矩阵,则 $r(A) \leq \min\{m, n\}$,A是n阶方阵,则 $r(A) \leq n$
- $(2) r(A^T) = r(A).$
- (3)矩阵的行秩等于矩阵的列秩等于矩阵的秩.
- (4) 阶梯阵的秩等于它的非 零行数.
- 定义: 若n 阶方阵A 的秩r(A)=n,则称A 为满秩矩阵,否则称为降秩矩阵。
 - A为满秩矩阵的充要条件 是 $|A| \neq 0$,故满秩矩阵 就是可逆矩阵.

矩阵秩的求法 用初等变换求矩阵的秩:

因为对于任何矩阵 $A_{m\times n}$,总可经过有限次初等行变换把他变为行阶梯形.

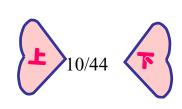
定理16 若
$$A \sim B$$
,则 $R(A) = R(B)$. 证明略

定理16表明初等变换不改变矩阵的秩.结合行阶梯形矩阵的秩,因而得到求矩阵及向量组的秩的方法:

即: 把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵, 行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.即:

$$1)A \xrightarrow{\eta \oplus f(M) \oplus h}$$
 阶梯阵 U ,

$$2)r(A) = r(U) = U$$
的非零行数。



设
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
, 求矩阵 A 的 秩

解 对A作初等行变换,变成行 阶梯形矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

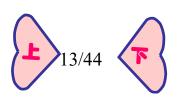
由阶梯形矩阵有三个非零行可知
$$R(A) = 3$$
.

三、初等变换方法求向量组的极大线性无关组

定理18 矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩,

从而不改变列向量组的线性相关性.

此定理给出了 向量组线性相关性的判别法和极大无关组的 求法



用矩阵初等变换方法判定向量组的线性相关性

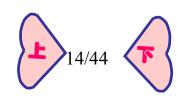
即将向量组列排,作行初等变换(这样不改变列向量组的线性相关性),直到化成阶梯形,从中看出相关还是无关。(举例说明)

例 设

$$a_1 = (1, -2, 2, 3); a_2 = (2, 4, -1, 3)$$

 $a_3 = (-1, 2, 2, 3); a_4 = (0, 6, 2, 3)$
 $a_5 = (2, -6, 3, 4);$

求向量组的一个极大无关组



解,将向量组列排成矩阵,再作行初等变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

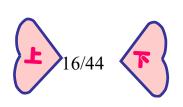
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$r_3 - 3r_2 \begin{cases} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

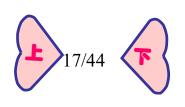
$$\nabla \qquad r(A) = r(U) = 3.$$

所以向量组的秩为3,

且 a_1 ; a_2 ; a_4 为一个极大无关组



2.7 逆矩阵的初等变换求法



由定理16易知,可逆矩阵必可经过行(列)初等变换化成单位矩阵,也即可逆矩阵与单位矩阵等价。

进一步有下面的定理

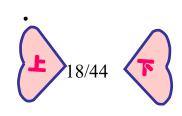
定理**17** 可逆矩阵必可表示为一些初等矩阵的乘积证:设A是可逆方阵,则A可经有限次初等行变换化为单位矩阵I,故存在有限个初等方阵 P_1,P_2,\cdots,P_I ,

使
$$P_1 \cdots P_2 P_1 A = I$$
.

依次用 $P_1^{-1}, \dots, P_2^{-1}, P_1^{-1}$ 左乘上式两边,得

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_l^{-1}$$

其中 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots P_l^{-1}$ 都是初等方阵



于是又得到逆矩阵的初等变换求法

用初等行变换求逆阵

$$P_l \cdots P_2 P_1 A = I.$$

$$\Rightarrow P_l \cdots P_2 P_1 I = A^{-1}.$$

得求逆阵的方法:

$$(A I)$$
 用初等行变换 (IA^{-1})

$$r_{1}+r_{2}\atop r_{3}-r_{2}\atop (-1)r_{3}\atop (-1)r$$

例2 设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 用初等变换求求 $A^{-1}B$

(方法二)构造一个 $n \times 2n$ 阶矩阵(A|B),对矩阵(A|B)作行初等变换,当A

变成单位矩阵 E 时,矩阵 B 则变成 $A^{-1}B$. 即 (A|B) : $(E|A^{-1}B)$.

事实上,因为A可逆,则有初等矩阵 F_1,F_2,\cdots,F_s ,使 $F_s\cdots F_2F_1A=E$. 式子

两端右乘以 $A^{-1}B$, 得 $F_s \cdots F_2 F_1 A A^{-1}B = E A^{-1}B$, 即 $F_s \cdots F_2 F_1 B = A^{-1}B$.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

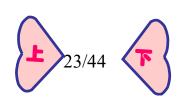
2.8 向量组的正交化

- 一、回顾正交向量与正交向量组
 - (1) 向量内积

定义 两个
$$n$$
维向量, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

它们对应坐标乘积的和, 叫x,y的内积,记作[x,y]

即
$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^T y$$



(2) 正交向量

若[x,y] = 0,则称x与y正交.

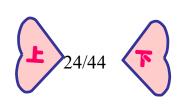
(3)正交向量组

若<u>非零</u>向量组 α_1 , α_2 , ... α_s 两两正交,则称向量组 α_1 , α_2 , ... α_s 为正交向量组 .

(4) 标准正交向量组

若正交向量组中每个向量都是单位向量,

则称此向量组为标准正交向量组.



二、正交向量组有以下性质:

定理19 正交向量组一定是线性无关的.

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一个正交向量组,如果

上式两边左乘 α_i^T ($i = 1, 2, \dots, r$)

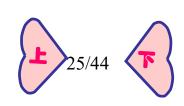
注意: $\alpha^T \alpha = (\alpha, \alpha)$ 即内积

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = \mathbf{0}$$

得 $k_i \alpha_i^T \alpha_i = 0$,

$$\therefore \alpha_i \neq 0, \quad \therefore \alpha_i^T \alpha_i = |\alpha_i|^2 \neq 0, \quad \exists \exists \quad k_i = 0.$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关 .



三、施密特正交化方法

定理20 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是一个线性无关向量组,则 $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_s$ 是一个与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价的正交向量组,其中

$$\beta_{1} = \alpha_{1}$$

$$\beta_{2} = \alpha_{2} - \frac{(\alpha_{2}, \beta_{1})}{(\beta_{1}, \beta_{1})} \beta_{1}$$

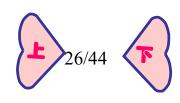
$$\beta_{3} = \alpha_{3} - \frac{(\alpha_{3}, \beta_{1})}{(\beta_{1}, \beta_{1})} \beta_{1} - \frac{(\alpha_{3}, \beta_{2})}{(\beta_{2}, \beta_{2})} \beta_{2}$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$\beta_{s} = \alpha_{s} - \frac{(\alpha_{s}, \beta_{1})}{(\beta_{1}, \beta_{1})} \beta_{1} - \frac{(\alpha_{s}, \beta_{2})}{(\beta_{2}, \beta_{2})} \beta_{2} - \dots - \frac{(\alpha_{s}, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1}.$$

$$\beta_{s} = \alpha_{s} - \frac{(\alpha_{s}, \beta_{1})}{(\beta_{1}, \beta_{1})} \beta_{1} - \frac{(\alpha_{s}, \beta_{2})}{(\beta_{2}, \beta_{2})} \beta_{2} - \dots - \frac{(\alpha_{s}, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1}.$$

证明:略见教材(直接验证)



例4 将
$$\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-1,1)$$
 标准正交化. 注意教材上是写的列向量

解 (1) 正交化 设 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 1)$,

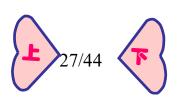
$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, 2, 1) - \frac{4}{3} (1, 1, 1) = \frac{1}{3} (-1, 2, -1),$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \cdots = \frac{1}{2} (-1, 0, 1),$$

(2) 单位化
$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\parallel \beta_2 \parallel} \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 2, -1)$$
 $\gamma_3 = \frac{1}{\parallel \beta_3 \parallel} \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1).$

 γ_1 , γ_2 , γ_3 即为所求。



本次课小结

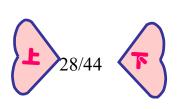
- 2.秩的性质
 - (1) 设A是 $m \times n$ 矩阵,则 $r(A) \leq \min\{m, n\}$, A是n阶方阵,则 $r(A) \leq n$
 - $(2) r(A^T) = r(A).$
 - (3)矩阵的行秩等于矩阵的列秩等于矩阵的秩.
 - (4) 阶梯阵的秩等于它的非 零行数.

定理16 若 $A \sim B$,则R(A) = R(B).

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵,行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.即:

$$1)A \xrightarrow{\eta \in f(M) \in \mathcal{M}}$$
 阶梯阵 U ,

$$2)r(A) = r(U) = U$$
的非零行数。



- 定义: 若n 阶方阵A 的秩r(A)=n,则称A 为满秩矩阵,否则称为降秩矩阵。
 - A为满秩矩阵的充要条件 是 $|A| \neq 0$,故满秩矩阵就是可逆矩阵.
 - 三、初等变换方法求向量组的极大线性无关组
 - 定理18 矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩,

从而不改变列向量组的线性相关性.

此定理给出了向量组线性相关性的判别法和极大无关组的求法

即将向量组列排,作行初等变换(这样不改变列向量组的线性相关性),直到化成阶梯形,从中看出相关还是无关。

用矩阵初等变换方法判定向量组的线性相关性

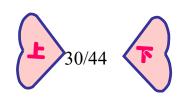
即将向量组列排,作行初等变换(这样不改变列向量组的线性相关性),直到化成阶梯形,从中看出相关还是无关。(举例说明)

例 设

$$a_1 = (1, -2, 2, 3); a_2 = (2, 4, -1, 3)$$

 $a_3 = (-1, 2, 2, 3); a_4 = (0, 6, 2, 3)$
 $a_5 = (2, -6, 3, 4);$

求向量组的一个极大无关组



二、正交向量组有以下性质:

定理19 正交向量组一定是线性无关的.

三、施密特正交化方法

定理20设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 是一个线性无关向量组,则 β_1 , $\beta_2\dots\beta_s$ 是一个与 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 等价的正交向量组,其中

作业

1. 利用初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1
\end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2
\end{pmatrix}$$

2. 已知
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
 $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ 试用行初等变换求 $A^{-1}B$

3. 把下列向量组标准正交化:

$$\alpha_1 = (1,1,1)^T$$
 $\alpha_2 = (1,2,3)^T$ $\alpha_3 = (1,4,9)^T$

4. 将下列矩阵化为行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\
3 & -3 & 0 & 7 & 0 \\
1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\
2 & -2 & 2 & 7 & -3
\end{pmatrix}$$