第二章　向量与矩阵

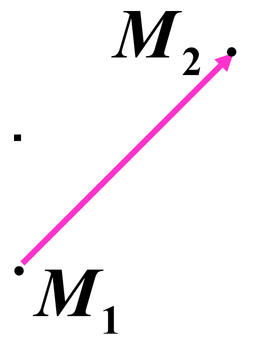
第一节 n 维向量及运算

重点：向量的线性运算

难点：向量的内积

一、从几何向量说起（略讲）

向量： 既有大小又有方向的量（矢量）.



向量表示： $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$

以M_1为起点，M_2为终点的有向线段.

向量的模： 向量的大小. $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$

自由向量： 不考虑起点位置的向量.

单位向量： 模长为1的向量. $\overrightarrow{a^0}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}^0$

零向量： 模长为0的向量. $\vec{0}$

相等向量： 大小相等且方向相同的向量.

$$\vec{a}\ \longrightarrow \qquad \vec{b}\ \longrightarrow$$

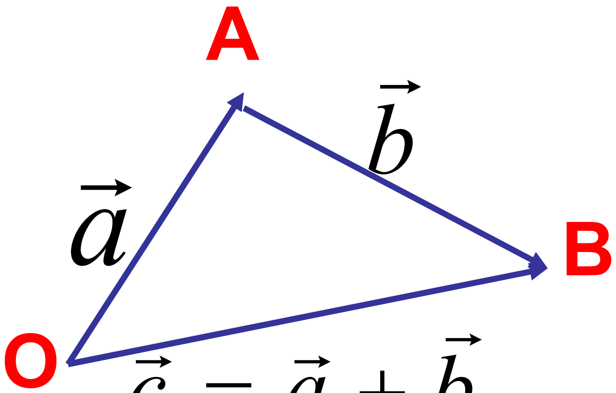
负向量： 大小相等但方向相反的向量. $-\vec{a}$

$$-\vec{a} \longleftarrow \qquad \longrightarrow \vec{a}$$

二　向量的加（减）法

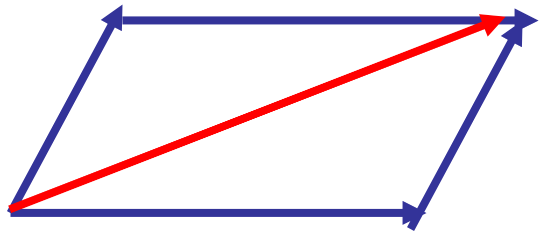
对于向量**a**、**b**,作有向线段

（*三角形法则*）



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

平行四边形法则



$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

（2）结合律：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

三、 数乘向量（标量乘法）

设λ是一个数，向量$\vec{a}$与λ的乘积$\lambda\vec{a}$叫做向量的数乘。

向量的数乘符合下列运算规律：

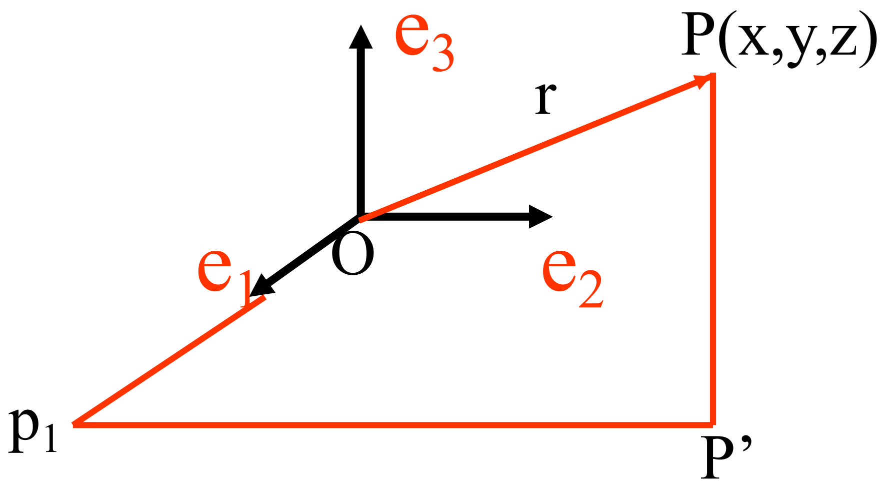
（1）结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

（2）分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

四、向量的坐标表示（用代数方法解决几何问题）

1、分析　$[0;x,y,z] \longrightarrow [0;e_1,e_2,e_3]$



2、定义：称（x,y,z)为向量 r 的坐标

向量与其坐标一一对应，所以，关于向量（几何）的研究可转化为坐标(代数）的研究。

向量坐标与线性运算的关系

1、设$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=x_2,y_2,z_2)$,则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_{2,}y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$$

2、$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$

所有三维向量组成的集合，按上述线性运算，满足：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

称这个集合构成一个三维向量空间，记为**R**^{3}.

上 下

在许多实际问题中，只用二，三维几何向量是远远不够的。比如，在气象观测中，我们不仅要了解在某个时刻云团所处的位置，还希望知道温度，压强等物理参数。因此，有必要将这一概念进行推广，引入**n**元数组构成的**n** 维向量的概念。 $n>3$ 时，n 维向量没有直观的几何形象.

一、 n维向量的概念

定义1 n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组称为n维向量，这 n个数称为该向量的 n个分量，第i个数a_i称为第i个分量．（$a_1.a_2,\ldots,a_n$）

分量全为实数的向量称为实向量，

分量全为复数的向量称为复向量.

例如

$$(1,2,3,\cdots,n) \longrightarrow \text{n维实向量}$$

$$(\underbrace{1+2i}_{\text{第1个分量}},\underbrace{2+3i}_{\text{第2个分量}},\cdots,\underbrace{n+(n+1)i}_{\text{第n个分量}}) \longrightarrow \text{n维复向量}$$

二、 n维向量的表示方法

n 维向量写成一行，称为**行向量**，通常用 $a^T, b^T, \alpha^T, \beta^T$ 等表示，如：

$$a^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

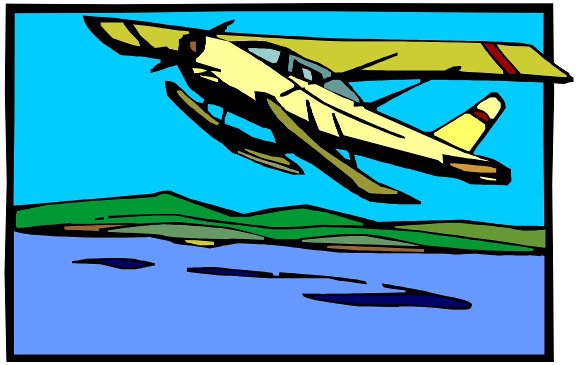
n 维向量写成一列，称为**列向量**，通常用 a, b, α, β 等表示，如：

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

注意

1．行向量和列向量总被看作是**两个不同的向量**；

n 维向量的实际意义



确定飞机的状态，需要以下**6**个参数：

机身的仰角 $\varphi \quad (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

机翼的转角 $\psi \quad (-\pi < \psi \le \pi)$

机身的水平转角 $\theta \quad (0 \le \theta < 2\pi)$

飞机重心在空间的位置参数***P*(*x*,*y*,*z*)**

所以，确定飞机的状态，需用**6**维向量

$$a = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$$

上 下

n维向量的线性运算:

向量相等： $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow a_i = b_i$$

零向量： $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$

负向量： $-\alpha = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$

$\mathbf{R}^n$: n 维向量的全体.

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

向量加法: $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$,

向量数乘： $k \cdot \alpha = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$, $k \in \mathbf{R}$.

加法与数乘满足如下性质：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3) $\alpha+0=\alpha$；

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$；

(5) $1\alpha=\alpha$；

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

称 $\mathbf{R}^n$ 构成 n 维实向量空间.

线性方程组的*n*维向量表示：

新疆政法学院

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 $$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

也 即 $$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

若记 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 则 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X = b,$

上 下

向量的长度、夹角等

问题的引入：

1、在解析几何中，向量的长度，夹角等度量性质还没有反映，

几何中这些是通过内积反映出来：

长度： $|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$

夹角 $<\alpha,\beta>$ ： $\cos<\alpha,\beta> = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|}$

2、需先引入向量的内积的概念并研究其代数性质.

一、内积

1.定义 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

称为 α 与 β 的<u>内积</u>.

2.性质

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 时等号成立.

由对称性又有：

新疆政法学院

1) $(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta), \quad \left(k\alpha, k\beta\right) = k^2(\alpha, \beta)$

2) $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$

推广： $(\alpha, \sum_{i=1}^{s} \beta_i) = \sum_{i=1}^{s} (\alpha, \beta_i)$

3) $(0, \beta) = 0$

上 下

3. 长度

(1) 定义 $\|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$

单位向量 $\|\alpha\| = 1$： α为单位向量．

设 $\alpha \neq 0$， 令 $\alpha_e = \dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$，则

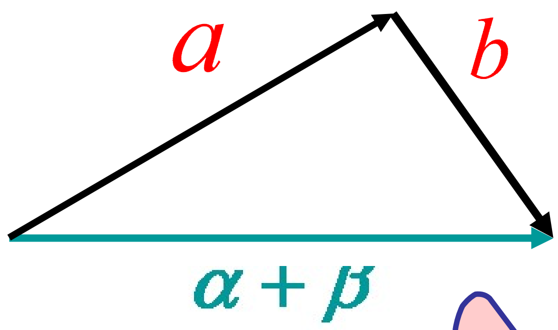
$$\|\alpha_e\| = \sqrt{(\alpha_e, \alpha_e)} = \sqrt{\frac{1}{\|\alpha\|^2}(\alpha, \alpha)} = 1.$$

(2) 性质 1^o 非负性 $\|\alpha\| \geq 0$；

2^o 齐次性 $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$；

3^o 三角不等式

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$



三、向量的夹角

新疆政法学院

1. 引入夹角概念的可能性与困难

1）在 $\boldsymbol{R}^3$ 中向量 α 与 β 的夹角

$$<\alpha,\beta> = \boldsymbol{arc\cos}\frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha||\beta|} \tag{4}$$

2）在一般n维空间中推广（4）的形式，首先

应证明不等式：
$$\left|\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}\right| \leq 1$$

此即：

上 下

2. 柯西－布涅柯夫斯基-施瓦茨不等式

对n维空间V中任意两个向量 α、β, 有

$$|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta| \qquad (5)$$

当且仅当α、β满足 $\alpha = k\beta$ 时等号成立.

证明略

3. 柯西－布涅柯夫斯基不等式的应用

1）

$$\left|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right|$$

$$\le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \qquad (6)$$

$$a_i, b_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

柯西

不等式

上 下

2）对欧氏空间中的任意两个向量 α、β，有

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta| \qquad （7）$$

三角不等式

证：$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$

$$= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$$

$$\le |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = \left(|\alpha| + |\beta|\right)^2$$

两边开方，即得（7）成立.

4. 欧氏空间中两非零向量的夹角

定义1：设V为欧氏空间，α、β为V中任意两非零向量，α、β的**夹角**定义为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$$

$$(\ 0 \le \langle \alpha, \beta \rangle \le \pi\ )$$

例 求向量$\alpha = (1,2,2,3)$与$\beta = (3,1,5,1)$的夹角.

解 $\because \cos\theta = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\|\|\beta\|} = \dfrac{18}{3\sqrt{2} \cdot 6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \therefore \theta = \dfrac{\pi}{4}$.

上 下

定义2： 设α、β 为n维空间中两个向量，若内积

$$(\alpha,\beta)=0$$

则称α与β**正交**或**互相垂直**，记作 $\alpha\perp\beta$.

注： ① 零向量与任意向量正交.

② $\alpha\perp\beta \Longleftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\cos\langle\alpha,\beta\rangle=0$.

1. 正交向量组

若一个向量组中的向量两两正交，且不含零向量，则称此向量组为正交向量组。

$$\text{如}: \alpha_1=(1,1,1),\ \alpha_2=(-1,2,-1),\ \alpha_3=(-1,0,1)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3)=0$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正交向量组 .

标准（单位）正交向量组： 均为单位向量的正交向量组.

$$\text{如}: \varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T,\ \varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

5. 勾股定理

设V为n维空间， $\forall \alpha,\beta \in V$

$$\alpha \perp \beta \Longleftrightarrow |\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

证： $\because$ $|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta,\alpha+\beta)$

$$= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$$

$\therefore$ $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$.

推广： 若欧氏空间V中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，

即 $(\alpha_i,\alpha_j) = 0,\quad i \neq j,\quad i,j = 1,2,\cdots,m$

则 $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2$.

例3、已知 $\alpha=(2,1,3,2)$， $\beta=(1,2,-2,1)$

在通常的内积定义下，求 $|\alpha|,(\alpha,\beta),\langle\alpha,\beta\rangle,|\alpha-\beta|$.

解：$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$(\alpha,\beta)=2\times1+1\times2+3\times(-2)+2\times1=0 \quad \therefore \quad \langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$

又 $\alpha-\beta=(1,-1,5,1)$

$\therefore \quad |\alpha-\beta|=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

通常称 $|\alpha-\beta|$ 为 α 与 β 的距离，记作 $d(\alpha,\beta)$.

上 下

四、本节课小结

1．n 维向量的概念，实向量、复向量；

2． 向量的表示方法：行向量与列向量；

3. *n*维向量的线性运算及其性质；

向量相等、零向量、负向量

向量加法： $\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$,

向量数乘 $k\cdot\alpha=(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$, $k\in R$.

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

线性方程组的*n*维向量表示：

新疆政法学院

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 $$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

也 即 $$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

若记 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 则 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X = b,$

上 下

一、内积

1.定义 1 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

2 $$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

3 称为 α 与 β 的内积.

4 **2.性质**

5 (1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

6 (2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

7 $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

8 (3) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 时等号成立.

推广及对称性又有：

3. 长度

(1) 定义 $\|\alpha\| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \cdots + a_n^{\ 2}} = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$

单位向量 $\|\alpha\| = 1$： α为单位向量 .

设 $\alpha \neq 0$， 令 $\alpha_e = \dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$，则

$$\|\alpha_e\| = \sqrt{(\alpha_e, \alpha_e)} = \sqrt{\frac{1}{\|\alpha\|^2}(\alpha, \alpha)} = 1.$$

(2) 性质 1^o 非负性 $\|\alpha\| \geq 0$；

2^o 齐次性 $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$；

3^o 三角不等式

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

上 下

新疆政法学院

4. 柯西一布涅柯夫斯基-施瓦茨不等式

对n维空间V中任意两个向量α、β，有 $|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta|$

当且仅当α、β 满足 $\alpha = k\beta$ 时等号成立.

5. 向量α与β 的夹角 $<\alpha,\beta> = \arccos\dfrac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha||\beta|}$

柯西不等式 $|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|$

$$\le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \quad a_i, b_i \in R, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

三角不等式 对欧氏空间中的任意两个向量 α、β, 有

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$$

上 下

定义2： 设α、β为n维空间中两个向量，若内积

$$(\alpha,\beta)=0$$

则称α与β **正交**或**互相垂直**，记作 $\alpha\perp\beta$.

注： ① 零向量与任意向量正交.

② $\alpha\perp\beta \Longleftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\cos\langle\alpha,\beta\rangle=0$.

正交向量组及标准（单位）正交向量组：

若一个向量组中的向量两两正交，且不含零向量，则称此向量组为正交向量组。

均为单位向量的正交向量组为标准正交向量组.

勾股定理及推广 设V为n维空间，$\forall\,\alpha,\beta\in V$

$$\alpha\perp\beta \Longleftrightarrow |\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$$

上 下

课堂练习

设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,4,-2)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(2,-4,-1,2)^T$.

(1) 求 $\|\boldsymbol{\alpha}\|,\|\boldsymbol{\beta}\|$ 及 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|$，并使向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 单位化；

(2) 求 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积，以及 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}$ 的内积；

(3) 求 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角；

(4) 证明 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 正交.

课堂练习解答：

解 (1) $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{1^2+2^2+4^2+(-2)^2}=5$, $\|\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2}=5$,

则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的单位向量为：

$$\boldsymbol{\alpha}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}=\left(\frac{2}{5},-\frac{4}{5},-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)^{\mathrm{T}}.$$

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(1,2,4,-2)(2,-4,-1,2)^{\mathrm{T}}=-14.$

由 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(4,0,7,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}=(-3,10,6,-6)^{\mathrm{T}}$，则

$$(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta})=(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta})=(4,0,7,-2)(-3,10,6,-6)^{\mathrm{T}}=42.$$

也可由内积的性质计算：

$$(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-3(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=2\times25+3\times14-2\times25=42.$$

(3) 因 $\cos\boldsymbol{\theta}=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}=\dfrac{-14}{5\cdot5}=-\dfrac{14}{25}$，则 $\boldsymbol{\theta}=\arccos\left(-\dfrac{14}{25}\right)$.

(4) 因 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(3,-2,3,0)(-1,6,5,-4)^{\mathrm{T}}=0$; 或

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=25-25=0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 正交.

下

作业P80： 1， 2

1．设$\alpha=(1,3,6)^T$，$\beta=(2,1,5)^T$，$\gamma=(4,-3,3)^T$，求：

（1）$7\alpha-3\beta-2\gamma$；

（2）$2\alpha-3\beta+\gamma$．

2．设$\alpha=(1,-1,1,-1)^T$，$\beta=(1,2,2,1)^T$

（1）将α,β化为单位向量；

（2）向量α,β是否正交.