第五章

相似矩阵与二次型的化简

习题课

一 、 教材内容的归纳总结

知识结构

- 特征值与特征向量
  - 定义、求法
  - 性质
    - $A\xi=\lambda\xi$, $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$, $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$;
    - 不同特征值对应的特征向量线性无关;
- 相似矩阵
  - 定义
  - 性质
    - 基本性质（自反、对称、传递性）
    - 相似不变性(特征多项式、秩、行列式、迹均相等)
  - 相似对角化
    - 条件 （A可对角化的充要条件A又n个线性无关的特征向量）
    - 用相似变换化方阵为对角阵
- 二次型
  - 概念（定义、矩阵形式、秩、标准形）
  - *合同矩阵
    - 定义
    - 性质
      - 基本性质（自反、对称、传递性）
      - 合同不变性(秩不变、矩阵的对称性不变)
    - $A_{n\times n},B_{n\times n}$合同$\Leftrightarrow X^{T}AX$与$X^{T}BX$的正 正项个数、负项个数相等
  - 正交矩阵
    - 定义、性质
    - 正交变换（定义、性质（不改变向量的内积））
  - 化二次型为标准形的方法 （正交变化法）
  - 惯性定律
  - 正定二次型（定义、判定）
- 矩阵的相似、合同、等价等概念之间的联系和区分

一、特征值和特征向量的概念

定义 设A为n阶方阵，如果数λ和n维非零列向量x满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

则称数λ为方阵$\boldsymbol{A}$的特征值

非零向量 x 称为方阵$\boldsymbol{A}$的对应于特征值λ的特征向量

求特征值和特征向量的步骤：

（1）求出$\boldsymbol{A}$的特征方程$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}$全部根，

即为$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ 的全部特征值；

（2）对$\boldsymbol{A}$的每一个特征值λ_i，求出$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 的非零解，即为$\boldsymbol{A}$的对应于λ_i的全部特征向量

二、特征值与特征向量的性质

(1) $k\lambda$是kA的对应于特征向量x的特征值

(2) λ^n是A^n的对应于特征向量x的特征值

(3) 若A可逆，则λ^{-1}是A^{-1}的对应于特征向量x的特征值

(4) $g(\lambda)=a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1k+a_0$是矩阵

$g(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0I$的特征值

设A为n阶方阵,且 $A^2=A$，A的特征值只能是0和1.

1. A与 A^T有相同的特征值.

2.设n阶方阵 $A_{n\times n}$的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$(1)|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;(A\text{可逆}\Leftrightarrow\lambda_1\neq 0)$$

$$(2)\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

称为方阵A的迹，记作 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

3. 矩阵A关于特征值 λ_i 的m个特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的任意非零线性组合仍为A的关于特征值λ_i 的特征向量.

4. 设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$是方阵$A$的特征值，$\mathbf{p}_i$是对应于$\lambda_i$的特征向量． 若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$互不相等，则 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$线性无关 .

注意

1． 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

2． 属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这个特征值的特征向量.

3． 矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的，一个特征值具有的特征向量不唯一；一个特征向量不能属于不同的特征值.

三、相似矩阵

1.定义 设 A、B 都是 n 阶方阵，若存在可逆方阵 P，使

$$P^{-1}AP=B$$

则称 A 与 B 相似，或称 B 是 A 的相似矩阵. $A \sim B$

对 A 进行的运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换.

2. 矩阵相似关系是等价关系

3. 相似矩阵的性质

(1)若 A 与 B 相似，则 $|A| = |B|$.

(2)若 A 与 B 相似，则 $r(A) = r(B)$.

(3)若 A 与 B 相似，则 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$.

(4)若 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同, 特征值相同.

定理. 若 n 阶方阵 A 与对角阵$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$相似，则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$就是$A$的$n$个特征值.

定理 n阶方阵A与Λ相似[3] $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

推论 1 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值 则 A 可对角化.

注意：A 有 n 个不同的特征值是 A 可对角化的充分条件，但不是必要条件.

将方阵A化为对角阵的步骤

1)求出方阵 A的特征值和特征向量；

2)由特征向量的相关性判 断A能否化为对角阵；

3)若A能化为对角阵，则写出 与A相似的对角阵Λ.

即 $$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，是$A$的$n$个特征值，

P是由n个线性无关的特征向量作为列向量所构成的矩阵.

四、二次型及其矩阵表示

$f = x^T Ax$,其中A为对称矩阵

对称矩阵 A 叫做二次型 f 的矩阵；

f 叫做对称矩阵 A 的二次型；

对称矩阵A的秩叫做二次型 f 的秩.

五、二次型的标准形：只含有平方项的二次型.

六、 正交矩阵

1. 定义 $A^T A = AA^T = E$ **则称** A**为正交矩阵**.

2.性质

(1)若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则 $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$;

(2)若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{T} = \boldsymbol{A}^{-1}$也是正交矩阵 ;

(3)若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$\boldsymbol{n}$阶正交矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$也是正交矩阵 .

(4)正交矩阵的元素之间的关系 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

（5）$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$为正交矩阵$\Leftrightarrow$

它的行（或列）向量组是两两正交的单位向量组.

（6）若A是正交矩阵， A^{*}也是正交矩阵 .

定理3　任给可逆矩阵 C,令$B = C^T AC$,如果A为对称矩阵,则B也为对称矩阵 ,且$R(B) = R(A)$.

定理 4　实对称阵的特征值都是实数.

定理 5 实对称阵的不同的特征值对应的特征向量是正交的.

定理6 设A为n阶对称矩阵,则必有正交矩阵 P,使$P^{-1}AP = \Lambda$,其中 Λ 是以 A的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

此定理同时回答了 实对称阵一定可以对角化.

将实对称阵 A 化为对角阵的步骤 $(step)$:

1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个特征值 λ_1, $\lambda_1, \cdots \lambda_n$;

2) 对每个 λ_i 求出对应的线性无关的 特征向量，

并将它们正交化，单位化，从而求出 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个

两两正交的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots \boldsymbol{p}_n$;

3) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots \boldsymbol{p}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \Lambda$ 为对角阵 .

即 $$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

七、正交变换法

定理 对于实二次型 $f=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$,总存在正交变换 $\mathbf{x}=P\mathbf{y}$,使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

其中λ_1,$\lambda_2\cdots\lambda_n$是A的特征值

利用正交变换 $x=Py$化$f=x^T Ax$为标准形的步骤:

1)写出f的矩阵A;

2)求出A的n个特征值 λ_1, $\lambda_1,\cdots\lambda_n$;

3)对每个 λ_i求出对应的线性无关的 特征向量,

并将它们正交化,单位 化,从而求出 A的n个两两正交的特征向量 $p_1,p_2,\cdots p_n$;

4)令$P=(p_1,p_2,\cdots p_n)$,及$x=Py$,

则$f=x^T Ax=y^T(P^T AP)y=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

八. 惯性定理　　设有实二次型 $f = x^T Ax$，它的秩为 r，有两个实的可逆变换

$$x = Cy \quad 及 \quad x = Pz$$

使 $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \quad (k_i \neq 0)$，

及 $f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0)$，

则 $k_1, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等．

九.　正定二次型的概念.

十.　**正定二次型（正定矩阵）**的判别方法：

(1) 定义法；

(2) 顺次主子式判别法；

(3) 特征值判别法.

二、典型例题

可对角化的矩阵主要有以下几种应用：

1. 由特征值、特征向量反求矩阵

例1：已知方阵 A 的特征值是 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3,$

相应的特征向量是 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解：因为特征向量是3维向量，所以矩阵 A 是3 阶方阵。

因为 A 有 3 个不同的特征值，所以 A 可以对角化。

即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

其中 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$, **求得** $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$,

$$\therefore A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 求方阵的幂

例2：设$A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}$，求$A^{100}$.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$\therefore \lambda_1=-1, \lambda_2=2.$ $\therefore A$可以对角化。

当$\lambda_1=-1$ 时，齐次线性方程组为$(A+E)x=0$

系数矩阵 $(A+E)=\begin{pmatrix}5 & -5\\ 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$x_1=x_2$ 令$x_2=1$ 得基础解系：$p_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2 = 2$ 时，齐次线性方程组为 $(A-2E)x=0$

系数矩阵 $(A-2E)=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = \dfrac{5}{2}x_2$ 令 $x_2 = 1$ 得基础解系: $p_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

令 $P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求得 $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} -1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore\ A = P\Lambda P^{-1}$$

$$A^{100} = P\Lambda^{100}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2+5\times 2^{100} & 5-5\times 2^{100} \\ -2+2^{101} & 5-2^{101} \end{pmatrix}$$

22

3. 求行列式

例3：设A 是n 阶方阵，$2,4,\cdots,2n$ 是A 的n 个特征值，

计算 $|A-3E|$.

解：方法1　求$A-3E$ 的全部特征值，

再求乘积,即为行列式的值。

设 $f(x)=x-3$

$\because$ A 的特征值是 $2,4,\cdots,2n$ 即 $\lambda_i=2i,$

$\therefore$ $A-3E$ 的特征值是 $f(\lambda_i)=2i-3$

$$\therefore |A-3E|=\prod_{i=1}^{n}(2i-3)=(-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)$$

方法2：已知A有n 个不同的特征值，所以A 可以对角化，

即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & & \\ & 4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2n\end{pmatrix}$

$$\therefore A=P\Lambda P^{-1}$$

$$\therefore |A-3E|=|P\Lambda P^{-1}-3PEP^{-1}|=|P(\Lambda-3E)P^{-1}|$$

$$=|P||\Lambda-3E||P^{-1}|=|\Lambda-3E|$$

$$=\begin{vmatrix}2-3 & & & \\ & 4-3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2n-3\end{vmatrix}=(-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)$$

24

4．判断矩阵是否相似

例4：已知3阶矩阵 A 的特征值为1，2，3，

设 $B = A^2 - 3A + E$， 问矩阵 B 能否与对角阵相似?

解：方法1

令 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$B = f(A) = A^3 - 3A + E,$

$\therefore B$ 的特征值为 $f(1) = -1$

$f(2) = 3$

$f(3) = 19$

3阶矩阵 B 有3个不同的特征值，所以 B 可以对角化。

方法2：因为矩阵 A 有3个不同的特征值，所以可以对角化，

即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\therefore P^{-1}BP &= P^{-1}(A^3-3A+E)P \\
&= P^{-1}A^3P-P^{-1}(3A)P+P^{-1}EP \\
&= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)-3P^{-1}AP+E \\
&= \begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}^3-3\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}-1 & & \\ & 3 & \\ & & 19\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

注：对角阵同阶方阵的乘积可交换

所以矩阵 B 能与对角阵相似。

例5：设 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值，
n 阶方阵 B 与 A 有相同的特征值。
证明：A 与 B 相似。

证：设 A 的n个互异的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

则存在可逆矩阵 P_1，使得

$$P_1^{-1}AP_1=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

又 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 也是矩阵 B 的特征值,

所以存在可逆矩阵 P_2, 使得

$$P_2^{-1} B P_2 = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore P_1^{-1} A P_1 = P_2^{-1} B P_2$$

$$\therefore P_2 P_1^{-1} A P_1 P_2^{-1} = B$$

即 $(P_1 P_2^{-1})^{-1} A (P_1 P_2^{-1}) = B$

即存在可逆矩阵 $P_1 P_2^{-1} = P$,使得$P^{-1} A P = B$ 即 A 与 B 相似。

4、用正交变换化二次型为标准型

例6、求一正交变换，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

化为标准型，并指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

解　二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}$,

可求得$\det(A-\lambda E)=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$,

于是A的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$,

29

对应特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$ 将其单位化得

$$q_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix},\ q_2=\frac{p_2}{\|p_2\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\ q_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

故正交变换为 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

化二次型为 $f=4y_2^2+9y_3^2$. 可知$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示椭圆柱面.

30

5、 设4阶方阵 A 满足条件 : $\det(3E+A)=0$, $AA^T=2E$, $\det A<0$, 求 A^* 的一个特征值 .

不讲

解 因为 $\det A<0$, 故 A 可逆.由 $\det(A+3E)=0$ 知 -3 是 A 的一个特征值, 从而 $-\frac{1}{3}$ 是 A^{-1} 的一个特征值.又由 $AA^T=2E$ 得 $\det(AA^T)=\det(2E)=16$, 即

$(\det A)^2=16$, 于是 $\det A=\pm 4$, 但 $\det A<0$, 因此 $\det A=-4$,

故 A^* 有一个特征值为 $\frac{4}{3}$.

三、课堂练习

1. 设λ是正交矩阵A的一个实特征值，证明 $\lambda^2=1$.

2、设3 阶方阵 A 的三个特征值为$1, -1, 2$，求$A^*+3A-2E$ 的特征值.

3.. 已知二次型$f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$

通过正交变换化成标准形$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求常数a.

及所用的正交变换。

课堂练习解答

1. 设λ是正交矩阵A的一个实特征值，证明 $\lambda^2=1$.

证 $\because A^T$与A有相同的特征值，

$$\therefore AP=\lambda P \quad A^TP=\lambda P \quad A^TA=I$$

$$A^TAP=A^T\lambda P=\lambda A^TP=\lambda\cdot\lambda P=\lambda^2P$$

即 $(1-\lambda^2)P=0$,

$\because P\neq 0 \quad \therefore \lambda^2=1$.

2、设3 阶方阵 A 的一个特征值为$1, -1, 2$，求$A^* + 3A - 2E$的特征值.

解： $A^* + 3A - 2E = |A|\, A^{-1} + 3A - 2E = -2A^{-1} + 3A - 2E = \varphi(A)$

（其中$|A| = 1 \times (-1) \times 2 = -2$）． 由性质（矩阵多项式的特征值为其特征值的多项式，得所求

-2*1/1+3*1-2=-1 ；

-2*1/-1+3*(-1)-2=-3;

-2*1/2+3*2-2=3

$A^* + 3A - 2E$的特征值为-1，-3，3

3. 已知二次型$f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$

通过正交变换化成标准形$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求常数 a.

及所用的正交变换。

解 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$,特征值为1,2,5。 则有$|A-1I|=0.$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}2-1&0&0\\0&3-1&a\\0&a&3-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&a\\0&a&2\end{vmatrix}=4-a^2=0,\therefore a=2(\because a>0).$$

模拟试题一

一 、单选题 （2分× 10= 20分）

1、若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$，则 $D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}=$ (　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 2

2、在 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & x+1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ x+1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 展开式中，x^2 的系数为（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 2　　D. 1

3、矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $A^*=$（　　）

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

4、设 A，B，C 为同阶方阵，下面矩阵的运算中不成立的是（　　）

A. $(A+B)^T=A^T+B^T$　　B. $|AB|=|A||B|$

C. $A(B+C)=BA+CA$　　D. $(AB)^T=B^TA^T$

5、下列向量中，可由 $\alpha_1=(0,1,0)^T$ 与 $\alpha_2=(1,0,0)^T$ 线性表示的是（　　）

A. $(0,0,1)^T$　　B. $(0,3,0)^T$　　C. $(0,2,1)^T$　　D. $(2,0,1)^T$

6、已知 A 为 3×4 阶矩阵，下列命题正确的是（　　）

A. 若 A 的所有 3 阶子式都等于零，则 $r(A)=2$

B. 若 A 中存在 2 阶子式不等于零，则 $r(A)=2$

C. 若 $r(A)=2$，则 A 的所有 3 阶子式都等于零

D. 若 $r(A)=2$，则 A 的所有 2 阶子式都不等于零

7、设 α_1，α_2，α_3 均是二维向量，则必有（　　）

A. α_1，α_2，α_3 线性相关　　B. α_1，α_2，α_3 线性无关

C. α_1，α_2 线性相关　　D. α_1，α_2 线性无关

8、下列命题正确的是（　　）

A. 若向量组中向量的个数大于其维数，则该向量组必线性无关.

B. 若向量组线性无关，则其任何一个部分向量组也线性无关.

C. 若向量组线性相关，则该向量组必含有零向量.

D. 若向量组线性无关，则该向量组必含有零向量.

9、设 λ_1，λ_2，λ_3 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 的三个特征值，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$（　　）

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 0

10、设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组 $AX=O$ 只有零解的充分必要条件是（　　）

A. $r(A)=n$　　B. $r(A)=m$

C. $r(A)<n$　　D. $r(A)<m$

二、判断题（对的打√，错的打×； 2 分×5=10 分）

11、设 A 为 n 阶方阵，且 $|A| = 0$，则 A 中至少有一行（列）元素全为零.（　　）

12、单个零向量线性相关.（　　）

13、设 A ,B ,C 为同阶方阵， $AB = AC$，则 $B = C$.（　　）

14、若向量组 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots, \alpha_9$ 线性无关.（　　）

15、相似矩阵的行列式值相等.（　　）

三、填空题（ 2 分×5= 10 分 ）

16、行列式$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & k+1 \end{vmatrix}$=0，则$k=$________

17、设矩阵A的三个特征值为1，2，4，则$|A^2-3A-4E|=$__________（1²-3*1-4）（2²-2*3-4）（4²-3*4-4）=0

18、设A为三阶矩阵，且$|A|=3$，则$|2A|=$____________

19、设行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，$A_{2j}\ (j=1,2,3,4)$为D中第二行元的代数余子式，则

第4行元素与第2行元素的代数余子式乘积之和为0.

$A_{21}+A_{24}=$________

20、若齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + 8x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$有非零解，则$\lambda=$______________

四、解答题（共 6 小题，共计 54 分）

21、（8 分） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$

22、（10 分）求解矩阵方程 $AX=B$ ，其中 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\6&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&4\\-2&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

23、（10 分）求向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3),\alpha_2=(1,0,2,3),\alpha_3=(1,-1,3,3),\alpha_4=(2,1,3,4)$ 的一个极大无关组，并将其余向量用所求的极大无关组线性表示.

24、（10分）已知线性方程组$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = a \end{cases}$，（1）求当$a$为何值时，方程组无解、有解；

（2）当方程组有解时，求出其全部解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

25.（6分） 设$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值与所有的特征向量.

26. 求一个正交变换，化$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$为标准形.

五、证明题（共1小题，共计6分）

27 、（6分）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明：$\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3$也线性无关.