新疆政法学院

线性代数总复习（续）

测试题（二）

解答提示

模拟试题二

新疆政法学院

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1．已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -9a_{12} & -3a_{13} \\ -2a_{21} & 3a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ （ C（要看清题目））

A．9；　　B．12；　　C．18；　　D．27．

2．已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，则 A 的逆矩阵 $A^{-1} =$ （ B ）

A．$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$；　　B．$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$；　　C．$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$；　　D．$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$．

3．设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是（ D ）

A．$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$；　　B．$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$；

C．$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_3$；　　D．$\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$．

4. 已知3元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的3个解 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，且 $\varepsilon_1=(2,3,4)^T,\varepsilon_2+\varepsilon_3=(1,2,3)^T$，$R(A)=2$，

k,k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=b$ 的通解 $x=$（ A ）

C

A. $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$；　B. $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$；　D. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$.

5. 设3阶方阵 A 的特征值为 $2,3,\lambda$，若 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$（ B ）

A. -2；　B. -1；　C. 1；　D. 2.

6. 已知4阶方阵 A 和 B 相似，A 的特征值为 $1,2,3,6$，则 $|B|=$（ D ）

A. 6；　B. 12；　C. 18；　D. 36.

二、判断题（对的打√，错的打×；2 分×5=10 分）

7、若 A, B 为 n 阶方阵，则 $|A+B| = |A| + |B|$.（ x ）

8、可逆方阵 A 的转置矩阵 A^T 必可逆.（ √ ）

9、n 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件 $R(A) = n$.（ x ）

10、A 为正交矩阵的充分必要条件 $A^T = A^{-1}$.（ √ ）

11、设 A 是 n 阶方阵，且 $|A| = 0$，则矩阵 A 中必有一列向量是其余列向量的线性组合.（ √ ）

三、填空题（每题 3 分，共 18 分）

12. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&4&0\\1&1&1&1\\0&-5&0&0\\-5&3&-2&1\end{vmatrix}$，则 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$ ___-30___.

13. 设 A 是3阶方阵，且 $|A-E|=|A+2E|=|A-3E|=0$，则 $|A|=$ ___-6___.

14. 已知 A 是3阶方阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $\left|(\dfrac{1}{3}A)^{-1}-2A^*\right|=$ ___16___.

15. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&2\\3&0&5\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}b\\1\\1\end{pmatrix}$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $b=$ ___-1___.

16. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&a&4\\1&1&2\end{pmatrix}$，$B$ 为3阶非零矩阵，且满足 $AB=O$，则 $a=$ ___1___.

17. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-2x_2^2-x_3^2-2tx_1x_2-2x_2x_3$ 负定，则 t 的取值范围是 ___$-2<t<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<t<2$___

(用)奇数阶主子式 <0，偶数阶主子式 >0. 求得

$\begin{vmatrix}-2&-t\\-t&-2\end{vmatrix}=4-t^2>0\longrightarrow -2<t<2$

$\begin{vmatrix}-2&-t&0\\-t&-2&-1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=2-t^2<0\rightarrow t^2>2$. $t>+\sqrt{2}$, $t<-\sqrt{2}$

三、计算题（共54分）

18．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX=B$，求矩阵 X．（8分）

$AX=B$. $X=A^{-1}B$. $(A\,B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&1\\2&1&2&3&1\\1&3&4&4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&2&1\\0&-3&-4&-1&-1\\0&1&1&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-2&-3\\0&-1&-2&3&3\\0&1&1&2&2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&1&-2&-3\\0&-1&-2&3&3\\0&0&-1&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&3\\0&-1&0&-7&-7\\0&0&-1&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&3\\0&1&0&7&7\\0&0&1&-5&-5\end{pmatrix}$ $\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&3\\7&7\\-5&-5\end{pmatrix}$

$$=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&3\\7&7\\-5&-5\end{pmatrix}$$

19. 计算5阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&0&0&0\\0&2&-2&0&0\\0&0&3&-3&0\\0&0&0&4&-4\end{vmatrix}$．（8分）

$=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-1&-1&-1\\0&2&-2&0&0\\0&0&3&-3&0\\0&0&0&4&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-1&-1&-1\\0&-3&-1&-1\\0&3&-3&0\\0&0&4&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-1&-1&-1\\0&-3&-1&-1\\0&0&-4&-1\\0&0&4&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-1&-1&-1\\0&-3&-1&-1\\0&0&-4&-1\\0&0&0&-5\end{vmatrix}=$ 120

20. 求向量组 $\alpha_1=(1,2,1,3)^T,\alpha_2=(1,1,-1,1)^T,\alpha_3=(4,5,-2,6)^T,\alpha_4=(-3,-5,-1,-7)^T$ 的一个

关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示．（8 分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1.\ \alpha_2$ 为极大无关组. $\alpha_3=\alpha_1+3\alpha_2$

$\alpha_4=-2\alpha_1-\alpha_2$

21. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+k\alpha_1$，讨论 k 为何值时，向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关.（10 分）　院

设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+k\alpha_1)=0$

$\rightarrow (k_1+kk_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

故 $\begin{cases} k_1+kk_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$ 要 $\beta_1.\beta_2.\beta_3$ 线性无关.

只需此方程组只有零解.

而这只需系数行列式 $\neq 0$

但 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1 & -k \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1+k\neq 0 \quad \therefore k\neq -1$

所当 $k\neq -1$ 时 $\beta_1.\beta_2.\beta_3$ 线性无关.

设 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$ 线性无关 问 $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3.\ \alpha_3+\alpha_4.\ \alpha_4+\alpha_1$

是否线性无关，证明你的答案

22. 对于线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 讨论 λ 取何值时，方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，并求出此时方程组的通解.（10 分）

解：$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 3\lambda-3 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & 3\lambda-3 \end{pmatrix}$

可见 $\lambda \neq 1$，$\lambda \neq -2$ 时 系数行列式 $\neq 0$. 此时方程组有唯一解；

$\lambda = -2$ 时 $r(A) = 2$，$r(\bar{A}) = 3$. 方程组无解.

$\lambda = 1$ 时 方程组无穷多解.（$r(A) = r(\bar{A}) = 1 < 3$）

此时方程组为 $x_1 + x_2 + x_3 = -2$

对应的

$x_1 = -2 - x_2 - x_3$.

令 $x_2 = x_3 = 0$ 得 $x_1 = -2$

$\therefore$ 特解 $\gamma = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

又对应的齐次组 $x_1 = -x_2 - x_3$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

得 $\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\gamma_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

44 故通解为 $\gamma + k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2$. $k_1, k_2 \in R$.

23. （10分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

（1）求二次型所对应的矩阵 A，并写出二次型的矩阵表示；

（2）求 A 的特征值与全部特征向量；

（3）求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化二次型为标准形，并写出标准形；

（4）判断该二次型的正定性。

(1) $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-2\lambda^2+2\lambda+8$

$=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4)$

(2) 求特征值：$\therefore\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=4$.

和特征向量.

1° $\lambda_1=1$ 解 $(A-1\cdot E)X=0$ $\because(A-1\cdot E)\to\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore$ 求得特征向量 $\xi_1=(2,1,-2)$

$\lambda_2=-2$. 解 $(A-(-2)E)X=0$ $\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

得特征向量 $\xi_2=(1,2,2)$.

$\lambda_3=4$. 解 $(A-4E)X=0$. $(A-4E)\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

得特征向量 $\xi_3=(2,-2,1)$.

2° 正交化. $\because$ 是不同特征值的特征向量. $\therefore$ 已经正交,

单位化. $\xi_1'=\dfrac{\xi_1}{|\xi_1|}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$. $\xi_2'=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. $\xi_3'=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(3) 作 $P=(\xi_1',\xi_2',\xi_3')$，令 $X=PY$. 则二次型标准形 $f=y_1^2-2y_2^2+4y_3^2$.

(4) $\because f$ 标准形有正、有负. 故即不是正定二次型. 也不是负定二次型.

例. 证明 $A^2-7A+10=0$ 的特征值只能是 2 或 5

证: 设 λ 为 A 的特征值, 则

$\lambda^2-7\lambda+10$ 为 $A^2-7A+10$ 的特征值.

又 $A^2-7A+10=0$. 故 $\lambda^2-7\lambda+10=0 \to (\lambda-5)(\lambda-2)=0$

得 $\lambda=5$ 或 $\lambda=2$. 证毕

重点提醒:

行列式性质提出公因式（要提完）
矩阵A伴随矩阵的行列式与A的行列式的关系， $|A^*| = |A|^{n-1}$
矩阵乘积的行列式问题，数乘矩阵的行列式问题
二阶矩阵逆矩阵的求法
三阶行列式计算，x的系数确定问题，如 $\begin{vmatrix} 4 & x & 1 \\ 3 & 0 & 5x \\ 2 & x & 0 \end{vmatrix}$

齐次线性方程组有唯一解的充要条件，非齐次方程组有多解，则齐次方程组有非零解。
相似矩阵有相同的行列式，相同的特征值。
矩阵多项式的特征值问题（如前面最后一例），及矩阵多项式行列式的特征值问题
向量组整体无关，部分无关，反之不成立。
向量组个数大于维数，则相关；
向量组极大无关组求法，见20题
给定一无关组，求另一形式的向量组无关问题（如21题）
矩阵的行列式等于特征值的乘积（多次讲过），对于三角形（对角形）行列式的特征值问题
A正交矩阵，则逆矩阵等于其转置矩阵。
矩阵方程AX=B解法，先判别A是否可逆，再求$X=A^{-1}B$,$A^{-1}B$的求法，如18题
带参数的方程组求解问题（如22题）
化二次型为标准形问题（如23题）