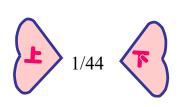
后次复习前次的概念



向量组的线性相关性

一、线性表示

如果存在一组数 k_1, k_2, \cdots, k_n , 使

$$\mathbf{b} = \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + \mathbf{k}_n \boldsymbol{\alpha}_n$$

成立,称 b可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \mathbf{b}$$

二、线性相关与线性形

如果存在一组不全 为零的数 k_1, k_2, \dots, k_n 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \quad (*)$$

成立,则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$$
 有非零解

如果只有当 k_1, k_2, \dots, k_n 全为零时,(*)式才成立,

则称向量组线性无关.

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$$
 只有零解



- 三、线性相关性的判别方法
 - 1.根据定义
 - 2.根据有关结论

如:个数与维数;维数与维数;个数与个数。

3.反证法

四、极大线性无关组和铁的定义和求法

定义 1 设有向量组 T,如果它的一个部分组

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足:

- 1)线性无关;
- 2) 任取 $\alpha \in T$,则 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关.
- [2')T中任一 α 可由, α_1 , α_2 ,…, α_r 线性表示.]

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组 T的一个极大线性无关组



可以证明:

$$n$$
个 n 维向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T, i = 1, 2, \dots, n,$

线性相关
$$\Leftrightarrow$$
 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$
线性无关 \Leftrightarrow $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

即矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ 可涉 **p62**,定理**11**

由此可知基本单位向量组是线性无关的.('美國 = 1) 5/44

五、向量组间的关系: 新

定义22 设有两个 n 维向量组 A 和 B, 若向量组 A 中的每个向量都能由向量组 B 中的向量线性表示,则称向量组 A 能由向量组 B 线性表示。

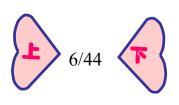
若向量组 A 能由向量组 B 线性表示,且向量组 B 能由向量组 A 线性表示,则称向量组 A 与向量组 B 等价。

显然,一个向量组的极大无关组与向量组本身是等价的.

有如下性质: (1) 反身性:

(2) 对称性: 解释

(3) 传递性:



关于两个向量组的秩,有如下结论:

定理**12** 若向量组 α_1 , α_2 ,…, α_s 可由向量组 β_1 , β_2 ,…, β_t

线性表示 且向量组 α_1 , α_2 ,…, α_s 线性无关,则 s < t.

推论5 等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

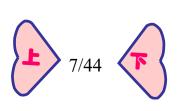
推论6 等价的向量组其秩相同.

推论7 线性无关的n维向量组最多含n个向量.

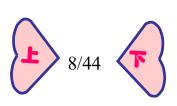
推论8 若向量组 A 可由向量组 B 线性表示,

则
$$r_A \leq r_B$$

推论9 任意n+1个n维向量线性相关.



2.6 矩阵的初等变换与初等矩阵



- 一、矩阵的初等变换
- 1.定义:下面的三种变换称为矩阵的初等行变换:
 - (1) 互换两行的位置;
 - (2) 用一个非零数乘某一行;
 - (3) 把一行的倍数加到另一行上.

若把定义中的行换成列,就得到矩阵的初等列变换定义.

初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

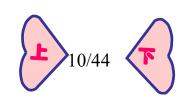


2.矩阵等价:

如果矩阵A经有限次初等变换变成 矩阵B,则称矩阵 A与矩阵 B等价,记作 $A \sim B$.

有性质:

- (1) 自反性: A~A;
- (2) 对称性: 若 A~B,则 B~A;
- (3) 传递性: 若 A~B,B~C,则 A~C.



3. 初等方阵

定义 单位矩阵经一次初等变换得到的方阵称为初等方阵.

三种初等变换对应三种初等方阵.

$$I(i,j); \quad I(i(k)); \quad I(i,j(k));$$
例:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I(1,3)$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}\mathbf{r}_3}
\xrightarrow{\mathbf{g}_3 + \mathbf{k}\mathbf{c}_1}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \mathbf{k} \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\mathbf{I}(1,3(\mathbf{k}))$$

第i行

第 *j*行

 $c_i \leftrightarrow c_j$ 也得到 I(i,j)

$$\begin{array}{c}
\mathbf{(2)} \ \lambda \times \mathbf{r_i} \\
\mathbf{I} \ (\mathbf{i} \ (\lambda)) \\
\mathbf{0}
\end{array}$$

第i行

 $\lambda imes c_i$ 也得到 $I(i(\lambda))$ 12/44

新疆政法学院

$$c_i + \lambda c_i$$
 也得到 $I(i, j(\lambda))$

初等方阵的性质:初等方阵都是可逆的,其逆阵也是初等方阵

$$I(i(\frac{1}{k}))I(i(k)) = I \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 矩阵A的标准形

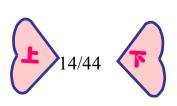
 定义
 形如
 1
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0

的矩阵, 称为矩阵的标准形.

注1: 任何矩阵都可以经过初等变换化成标准形.

注2: 任一可逆矩阵都可通过行初等变换化为单位阵.

(即可逆矩阵与单位阵等价)

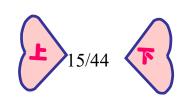


定理 设A是一个 $m \times n$ 矩阵

对A施行一次初等行变换,相当于在A的左侧乘以一个相应的初等矩阵;

对A施行一次初等列变换,相当于在A的右侧乘以一个相应的初等矩阵;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$



$$(1) \quad A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$I(1, 2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

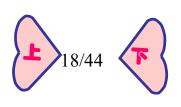
(2)
$$A \stackrel{c_3 \leftrightarrow c_4}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A I(3,4) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3)定理: 任何可逆方阵都可以表示为有限个初等方阵的乘积.

推论: $m \times n$ 矩阵 $A \sim B$ 的充要条件是: 存在m阶可逆矩阵 P及n阶可逆方阵 Q,使 PAQ = B.

注: $m \times n$ 矩阵A经初等行变换化为B的充要条件是: 存在可逆方阵P,使PA = B。



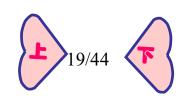
二、 矩阵的秩

1 秩的概念与性质

1) 子式

定义 设A是 $m \times n$ 矩阵,在 A中任取 k行和 k列 $(k \le m, k \le n)$,位于这些行列交叉处的 k^2 个元素 (保持在A中的相对位置不变)组 成的k阶行列式, 称为A的k阶子式. k阶子式有 $c_m^k c_n^k \uparrow c_n^k \uparrow$

注: k阶子式是一个数。



- 注:(1) A 的每个元素 a_{ij} 都是 A 的一个一阶子式
 - (2) 当 A 为 n 阶方阵时,n 阶子式即为 |A|

2) 矩阵的秩

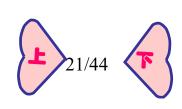
定义 矩阵A中不为0的子式的最高阶数,称为A的 秩,记作r(A).

注: 规定零矩阵的秩等于 0. 只有零矩阵的秩等于 0. 等价定义(定理1)

 $r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 $- \uparrow r$ 阶子式 $\neq 0$,而 所有的 r + 1阶子式(如果有) 均为零。

若A中有一个 r阶子式 ≠ 0, 则 $r(A) \nearrow r$,

若A中所有r阶子式 = 0,则r(A) %r.



例1 已知
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
, 求该矩阵的秩.

$$|\mathbf{m}|$$
 : $|\mathbf{a}|$ = 2 \neq 0, 计算 \mathbf{a} 的3阶子式,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 1 & 3 & 2 & | & 3 & -2 & 2 & | & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & \equiv & 00 & 2 & 3 & \equiv & 20, & -1 & 3 & \equiv & 00, & -1 & 3 = 0, \\ -2 & 0 & 1 & | & -2 & 0 & 5 & | & 0 & 1 & 5 & | & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0. \qquad \therefore R(A) = 2.$$

例2 求矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
的秩.

解 在
$$A$$
中, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

又::A的3阶子式只有一个|A|,且|A|=0,

$$\therefore R(A)=2.$$

例3 求矩阵
$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
的秩.

- \mathbf{m} : \mathbf{B} 是一个行阶梯形矩阵,其非零行有 $\mathbf{3}$ 行,
 - : B 的所有 4 阶子式全为零.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \hline{m} & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \therefore \quad R(B) = 3.$$

- 2. 秩的性质
 - (1) 设A是 $m \times n$ 矩阵,则 $r(A) \leq \min\{m, n\}$, A是n阶方阵,则 $r(A) \leq n$
 - $(2) r(A^T) = r(A).$
- (3)矩阵的行秩等于矩阵的列秩等于矩阵的秩.
- (4) 阶梯阵的秩等于它的非 零行数.
- 定义: 若n 阶方阵A 的秩r(A)=n,则称A 为满秩矩阵,否则称为降秩矩阵。
 - A为满秩矩阵的充要条件 是 $|A| \neq 0$,故满秩矩阵 就是可逆矩阵.

因为对于任何矩阵 $A_{m\times n}$,总可经过有限次初等行变换把他变为行阶梯形.

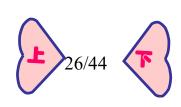
定理16 若
$$A \sim B$$
,则 $R(A) = R(B)$. 证明略

定理11表明初等变换不改变矩阵的秩.结合行阶梯形矩阵的秩,因而得到求矩阵及向量组的秩的方法:

即: 把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵, 行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.即:

$$1)A \xrightarrow{\eta \oplus f(\mathfrak{N}) \ \mathfrak{S}_{\mathfrak{P}}}$$
 阶梯阵 U ,

$$2)r(A) = r(U) = U$$
的非零行数。

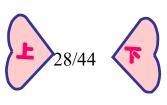


设
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
, 求矩阵 A 的 秩

解 对A作初等行变换,变成行 阶梯形矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 R(A) = 3.



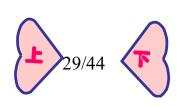
下次讲

三、初等变换方法求向量组的极大线性无关组

定理18 矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩,



此定理给出了 向量组线性相关性的判别法和极大无关组的 求法



用矩阵初等变换方法判定向量组的线性相关性

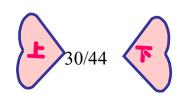
即将向量组列排,作行初等变换(这样不改变列向量组的线性相关性),直到化成阶梯形,从中看出相关还是无关。(举例说明)

例 设

$$a_1 = (1, -2, 2, 3); a_2 = (2, 4, -1, 3)$$

 $a_3 = (-1, 2, 2, 3); a_4 = (0, 6, 2, 3)$
 $a_5 = (2, -6, 3, 4);$

求向量组的一个极大无关组



解,将向量组列排成矩阵,再作行初等变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{r_2 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ r_3 - 2r_1 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

新疆政法学院

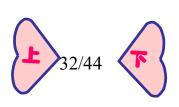
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$r_3 - 3r_2 \begin{cases} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$\nabla r(A) = r(U) = 3.$$

所以向量组的秩为3,

且 a_1 ; a_2 ; a_4 为一个极大无关组



例2求向量组的秩和一个最大无关组.

$$\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (2,-3,1,-1), \alpha_3 = (1,-1,2,3),$$

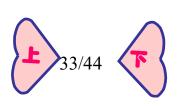
$$\alpha_4 = (4, -3, 4, 3).$$

解
$$A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以向量组的秩为 3,

它的一个最大无关组是 α_1 , α_2 , α_3 .

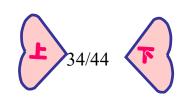


本次课小结

- 一、矩阵的初等变换
 - 1.定义:下面的三种变换称为矩阵的初等行变换:
 - (1) 互换两行的位置;
 - (2) 用一个非零数乘某一行;
 - (3) 把一行的倍数加到另一行上.

若把定义中的行换成列,就得到矩阵的初等列变换定义.

初等行变换和初等列变换统称为初等变换.



2.矩阵等价:

如果矩阵A经有限次初等变换变成 矩阵B,

则称矩阵 A与矩阵 B等价,记作 $A \sim B$.

有性质: (1) 自反性: A~A;

(2) 对称性: 若 A~B,则 B~A;

(3) 传递性: 若 A~B,B~C,则 A~C.

3. 初等方阵

定义 单位矩阵经一次初等变换得到的方阵称为初等方阵.

三种初等变换对应三种初等方阵.

 $I(i,j); \quad I(i(k)); \quad I(i,j(k));$

初等方阵的性质:初等方阵都是可逆的,其逆阵也是初等方阵

4. 矩阵A的标准形

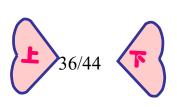
 定义
 形如
 1
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0

的矩阵, 称为矩阵的标准形。

注1: 任何矩阵都可以经过初等变换化成标准形.

注2: 任一可逆矩阵都可通过行初等变换化为单位阵,

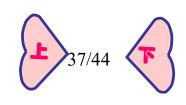
(即可逆矩阵与单位阵等价)



定理 设A是一个 $m \times n$ 矩阵

对 A 施行一次初等行变换,相当于在 A 的 左侧乘以一个相应的初等矩阵;

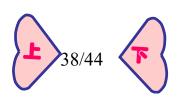
对 A 施行一次初等列变换,相当于在 A 的 右侧乘以一个相应的初等矩阵;



3)定理: 任何可逆方阵都可以表示为有限个初等方阵的乘积.

推论: $m \times n$ 矩阵 $A \sim B$ 的充要条件是: 存在m阶可逆矩阵 P及n阶可逆方阵 Q,使 PAQ = B.

注: $m \times n$ 矩阵A经初等行变换化为B的充要条件是: 存在可逆方阵P,使PA = B。



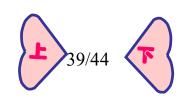
二、 矩阵的秩

1 秩的概念与性质

1) 子式

定义 设A是 $m \times n$ 矩阵,在 A中任取 k行和 k列 $(k \le m, k \le n)$,位于这些行列交叉处的 k^2 个元素 (保持在A中的相对位置不变)组 成的k阶行列式, 称为A的k阶子式. k阶子式有 $c_m^k c_n^k \uparrow c_n^k \uparrow$

注: k阶子式是一个数。



2) 矩阵的秩

定义 矩阵A中不为0的子式的最高阶数,称为A的 秩,记作r(A).

注: 规定零矩阵的秩等于 0. 只有零矩阵的秩等于 0. 等价定义(定理 1) $r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 一个 r阶子式 \neq 0,而 所有的 r + 1阶子式(如果有)均为零。

定义: 若n 阶方阵A 的秩r(A)=n,则称A 为满秩矩阵,否则称为降秩矩阵。

A为满秩矩阵的充要条件 是 $|A| \neq 0$,故满秩矩阵 就是可逆矩阵.

2.秩的性质

- (1) 设A是 $m \times n$ 矩阵,则 $r(A) \leq \min\{m, n\}$, A是n阶方阵,则 $r(A) \leq n$
- (2) $r(A^T) = r(A)$.
- (3)矩阵的行秩等于矩阵的列秩等于矩阵的秩.
- (4) 阶梯阵的秩等于它的非 零行数.

定理16 若 $A \sim B$,则R(A) = R(B).

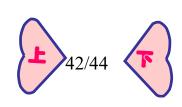
矩阵秩的求法 用初等变换求矩阵的秩:

因为对于任何矩阵 $A_{m\times n}$,总可经过有限次初等行变换把他变为行阶梯形.

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵,行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.即:

$$1)A \xrightarrow{\eta \oplus f(\mathfrak{A}) \oplus \mathfrak{A}}$$
阶梯阵 U ,

$$2)r(A) = r(U) = U$$
的非零行数。



作业 第六节 矩阵的初等变换与初等矩阵

1. 求下列矩阵的秩:

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & 5 & -1 \\
1 & 1 & -2 & 3 \\
3 & -1 & 8 & 1 \\
1 & 3 & -9 & 7
\end{pmatrix}$$

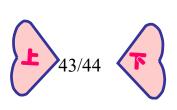
$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

4.设讨论下面向量组的线性的相关性

(1)
$$\alpha_1 = (1,1,1)$$
 , $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_3 = (1,3, t)$

6.求下列向量组的秩和一个最大无关组:

(1)
$$\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 3, 4), \alpha_3 = (3, 4, 5)$$



4.设讨论下面向量组的线性的相关性

(1)
$$\alpha_1 = (1,1,1)$$
 , $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_3 = (1,3, t)$

解: 因为
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = t - 5,$$

所以, 当t = 5时, 向量组线性相关, 当 $t \neq 5$ 时线性无关。

5.设 α_1 , α_2 , α_3 线性无关, 讨论 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$, $\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_1$,

6.求下列向量组的秩和一个最大无关组:

(1)
$$\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 3, 4), \alpha_3 = (3, 4, 5)$$

解:对以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列向量的矩阵A进行初等行变换

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} r_2 - 2r_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} r_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以此向量组的秩为2,它的一个最大无关组为 α_1,α_2