后次复习前次的概念

四. 行列式的性质

性质1： 行列式与它的转置行列式相等。

说明：行列式中行与列地位相同，对行成立的性质对列也成立，反之亦然。

性质2： 互换行列式的两行（列），行列式的值变号。

推论：如果行列式有两行（列）相同，则行列式为 0 。

性质3： 用数 k 乘行列式的某一行（列）中所有元素，等于用数 k 乘此行列式。

推论：行列式中某一行（列）的公因子可以提到行列式符号外面

上 下

推论：若行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式等于0 。

性质4：如果某一行是两组数的和，则此行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式的对应的行一样。

性质5：行列式的某一行（列）的所有元素乘以同一数k后再加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

上一节我们利用行列式的性质把一个行列式化为上三角或下三角行列式，然后根据定义算出行列式的值，或者把一个行列式化成其中含有尽量多个零的行列式，然后算出行列式的值。本节我们沿着另一条思路来计算行列式的值，即通过把高阶行列式转化为低阶行列式来计算行列式的值。

如果我们能把n阶行列式转化为n-1阶行列式，把n-1阶行列式转化为n-2阶，…，而行列式的阶数越小越容易计算，我们就可以化繁为简，化难为易，从而尽快算出行列式的值。

为了这个目的，我们需引进如下概念：

§1.3 行列式依行（列）展开

观察

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

可见，三级行列式可通过二级行列式来表示.

上 下

6

一、行列式的展开定理

定义1 在一个n阶行列式 D_n中，划去元素 a_{ij} 所在的行和列，余下的元素构成一个n-1阶子式，称为元素a_{ij}的余子式，记为M_{ij} ，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称之为代数余子式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}$$

注：行列式的每个元素都分别对应着一个余子式和一个代数余子式。

定理4：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

证明：（略）

例1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

上 下

例2，计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解：按第一行展开，得

$$D=-3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}=27.$$

定理 5 D 的某一行元素与另一行对应元素的代数余子式的乘积之和为 0.

例如 观察3阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$$

综上，得公式

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D, & （当k=i） \\ 0, & （当k\neq i） \end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} D, & （当l=j） \\ 0, & （当l\neq j） \end{cases}$$

？选哪一行（列）展开？

一般原则：

1、找1所在的行（列）

2、找0(1所在的行列 0最多的那一行（列））

3、数字小

二、 行列式的计算

在计算数字行列式时，直接应用行列式展开公式并不一定简化计算，因为把一个n阶行列式换成n个（n－1）阶行列式的计算并不减少计算量，只是在行列式中某一行或某一列含有较多的零时，应用展开定理才有意义。但展开定理在理论上是重要的。

所以，在利用行列式按行按列展开定理，通常是结合行列式性质，来简化计算：即先用行列式的性质将某一行（列）化为仅含1个非零元素，再按此行（列）展开,变为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为三阶或二阶行列式。

亦可以是化为三角形行列式和对角形行列式。

例 1 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解：行列式性质与展开定理同时应用，边做边展开（降阶）

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times (6 + 4) = -20.$$

例4　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解　$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}-2\cdot 5\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$=-10\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{vmatrix}=-10\cdot(-2)\begin{vmatrix}-7 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}$$

$$=20(-42-12)=-1080.$$

新疆政法学院

例 2 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

字母型 ←

解 按第 n 行展开

$$D=y\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}+x\cdot(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}y\cdot y^{n-1}+(-1)^{n+n}x\cdot x^{n-1}=x^n-(-y)^n$$

上 下

例3　n 级行列式 D 中元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n \Rightarrow n$ 为奇数时，$D=0$.

证明：　题设 $a_{ij}=-a_{ji} \rightarrow a_{ii}=0$，$i=1,2,\cdots,n \rightarrow$ 行列式可表示为

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{性1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{提取}}{=}(-1)^{n}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n}D$$

$\rightarrow$ 当 n 为奇数时，得　$D=-D \rightarrow D=0$.

上　下

1.5 Cramer（克拉默）法则

- 克拉默，1704年7月31日生于日内瓦。1752年1月 4日卒於法国塞兹河畔巴尼奥勒。早年在日内瓦读书，1724 年起在日内瓦加尔文学院任教，1734年成为几何学教授，1750年任哲学教授。他自 1727年进行为期两年的旅行访学。在巴塞尔与约翰．伯努利、欧拉等人结为挚友。
- 他一生未婚，专心治学，平易近人且德高望重，先後当选为伦敦皇家学会、柏林研究院和法国、意大利等学会的成员。
- 克拉默为了确定经过5 个点的一般二次曲线的系数，应用了著名的「克莱姆法则」，即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式。该法则於1729年由英国数学家马克劳林得到，1748年发表，但克莱姆的优越符号使之流传。

上 下

一、非齐次与齐次线性方程组的概念

设线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$不全为零，则称此方程组为非齐次线性方程组；若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，此时称方程组为齐次线性方程组.

二、克拉默法则

如果线性方程组（1）的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性方程组(1)有解，并且解是唯一的，解可以表为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

用$Cramer$法则解方程组时，必须满足：

1° 方程个数与未知数个数相等；

2° 系数行列式不等于0(即$D \neq 0$).

例**1** 解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -5.$$

上 下

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -35$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-10}{-5} = 2,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-35}{-5} = 7.$$

例2：　用Cramer法则解线性方程组。

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \overline{\overline{\substack{c_1+2c_2 \\ c_3+2c_2}}} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27 \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

所以 $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3,\quad x_2 = -4,\quad x_3 = -1,\quad x_4 = 1.$

注： 撇开求解公式 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$,

Cramer法则可叙述为下面定理：

定理1： 如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$ 则(1)一定有解, 且解是唯一的 .

定理2： 如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解, 则它的系数行列式必为零.

- 对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

定理3 齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$, 的充要条件方程组只有零解.

定理4 齐次线性方程组有非零解, 的充要条件是它的系数行列式 $D=0$.

课堂练习:

1. 证明 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

2. 用展开定理 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

$= 27.$

3. 问λ取何值时，齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$可能有非零解?

作业

1. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$$

2. 证明：

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_{22} & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3. 利用克拉默法则解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$