后次复习前次的概念

(1)特征值和特征向量的定义

(2)特征值和特征向量的计算

(3)特征值和特征向量的性质
(包括有些例子)

一、特征值和特征向量的概念

定义 设A为n阶方阵，如果数λ和n维非零列向量x满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称数λ为方阵A的特征值

非零向量x称为方阵A的对应于特征值λ的特征向量

说明属于特征值的特征向量不是唯一地。

求特征值和特征向量的求法:

1. 若λ是A的特征值，则λ^m是A^m的特征值$\left(m\text{是任意常数}\right)$.

（1）. $k\lambda$是kA的对应于特征向量x的特征值

（2）设A为n阶方阵,且 $A^2 = A$，则A的特征值只能 是0和1.

（3）. 若A可逆，则λ^{-1}是A^{-1}的对应于特征向量x的特征值

（4）. $g(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1 k + a_0$是矩阵

$g(A) = a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$的特征值

（5）. A与转置矩阵有相同的特征值.

（6）. 矩阵A关于特征值 λ_i 的m个特征向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$

的任意非零线性组合仍为A的关于特征值λ_i 的特征向量.

（7）设n阶方阵$A_{n\times n}$ 的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$\mathbf{(1)}|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;(A\text{可逆} \Leftrightarrow \lambda_1 \neq 0)$$

$$\mathbf{(2)}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

（8）设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$是方阵$A$的特征值， $\mathbf{p}_i$是对应于λ_i的特征向量． 若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$互不相等，则 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$线性无关 .

§5.2 相似矩阵与矩阵的对角化

一、 相似矩阵

1.定义 设 A、B 都是 n 阶方阵，若存在可逆方阵 P，使

$$P^{-1}AP=B$$

则称 A 与 B 相似，或称 B 是 A 的相似矩阵.

记作 $A \sim B$

对 A 进行的运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换.

2. 相似矩阵具有等价性质

(1)反身性　A与A本身相似.

(2)对称性　若A与B相似,则B与A相似.

(3)传递性　若A与B相似,B与C相似,

则A与C相似.　（仅证3）

证　因 A 与 B 相似， 则有可逆矩阵$\mathbf{P}$,使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$,

又因 B 与 C 相似，则有可逆矩阵Q,使$Q^{-1}BQ = C$,

$\therefore Q^{-1}P^{-1}APQ = C$,

令$R = PQ$,　$R^{-1} = (PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

$\therefore R^{-1}AR = C$, $\therefore$ A与C相似.

3. 相似矩阵的性质

(1)若 A 与 B 相似，则 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$.

证　因 A 与 B 相似，则有可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$,

$$|\mathbf{P}^{-1}||\mathbf{P}||\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \qquad \therefore |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|.$$

(2)若 A 与 B 相似，则 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$.

证明：因为相似必等价，即把A经行列变换化为B,

又初等变换不改变矩阵的秩。所以.......

(3)若 A 与 B 相似，则 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$.

证明略

(4)若 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同，特征值相同.

证　因 A 与 B 相似，则有可逆矩阵 P，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$,

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\lambda I\mathbf{P}|$$

$$= |\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^{-1}||\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{P}| = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|.$$

所以特征值也相同.

例1 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$,试证不存在可逆矩阵

$\mathbf{P}$，使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$.　　（即A与B不相似）

证　$\because$ A**的特征值为** 1**(二重)，**

B**的特征值为** -1**(二重)，它们互不相同，**

$\therefore$ A**与**B**不相似，即不存在可逆 矩阵P使**$P^{-1}AP=B$.

注意

特征值相同是相似的必要条件，但不是充分条件。

二、 矩阵的对角化

定理. 若 n 阶方阵 A 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 A 的 n 个特征值.

证明：因为相似有相同的特征值，而，对角矩阵的特征值即为对角线元素，所以……..。

定理 n阶方阵A与Λ相似 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

证 必要性

设$A \sim \Lambda$，故存在可逆矩阵P使 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

即 $AP = P\Lambda$

把P按列分块 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$(Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$$

$\therefore Ap_i = \lambda_i p_i \ (i = 1,2,\cdots, n)$

即$p_1, p_2, \cdots, p_n$是A的n个特征向量 .

又因为 P可逆，所以 $p_1, p_2, \cdots, p_n$线性无关 .

充分性 设 $Ap_i = \lambda_i p_i \ (i = 1,2,\cdots,n)$ 且 p_i 线性无关，

$$\Rightarrow (Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$$

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

即 $AP = P\Lambda$

因为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 线性无关，所以 P 可逆.

推出 $P^{-1}AP = \Lambda$.

从证明中可看出，相似变换矩阵 P 的列向量就是 A 的对应于 λ_i 的 n 个线性无关的特征向量 .Λ 的对角元是 A 的 n 个 特征值 .

推论 1 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 A 可对角化.

$$\text{即}\ A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

注意：A 有 n 个不同的特征值是 A 可对角化的充分条件，但不是必要条件.

例2 判断上一节例1的矩阵$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$能否对角化？

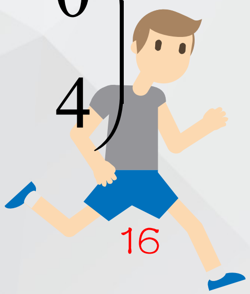
A的特征值为：$\lambda_1=2,\lambda_2=4,$

对特征值$\lambda_1=2$，有特征向量$p_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

对特征值$\lambda_2=4$，有特征向量$p_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

p_1, p_2为属于不同特征值的特征向量，它们线性无关，所以A可以对角化（或者说A有两个不同的特征值，所以……

事实上$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$



例3 判断上一节例2的矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 能否对角化?

解：已求出 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1,$

其特征向量为 $p_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, p_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}; \ p_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

易知A可以对角化，请写出相应的相似变换矩阵（即可逆矩阵）和对角矩阵。

事实上：

对$\lambda_1=\lambda_2=1$,线性无关的特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

对$\lambda_3=-1$,线性无关的特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,

令$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$\because |P|\neq 0,\therefore p_1,p_2,p_3$线性无关$\therefore$ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

例4 判断上一节例3的矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -5 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 能否化为对角阵？

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$

把$\lambda=-1$代入$(A-\lambda E)x=0$, 解之得基础解系

$$\xi=(1,1,-1)^T,$$

即A只有一个无关特征向量, 故A不能化为对角矩阵.

将方阵A化为对角阵的步骤

1)求出方阵 A的特征值和特征向量；

2)由特征向量的相关性判断A能否化为对角阵；

3)若A能化为对角阵，则写出与A相似的对角阵Λ.

即 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，是$A$的$n$个特征值，

P是由n个线性无关的特征向量作为列向量

所构成的矩阵.

例5 设$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

A能否对角化？若能对角化,则求出可逆矩阵 P,使$P^{-1}AP$为对角阵．

解

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

所以A的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2.$

将$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$代入$(A - \lambda E)x = 0$得方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$$

解之得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将$\lambda_3=-2$代入$(A-\lambda E)x=0$,得方程组的基础解系

$$\xi_3=(-1,1,1)^T.$$

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关. 所以A可对角化.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

注意: $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$

注意 若令 $P=(\xi_3,\xi_1,\xi_2)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

则有 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

说明与A相似的对角阵不唯一，但对角元都是A的特征值，只是次序不同.

即矩阵P的列向量和对角矩阵中特征值的位置要相互对应.

例6 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$，求可逆阵**P**,使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\Lambda$为对角阵，

并求A^n.

解 由$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)-24$

$$=(\lambda+3)(\lambda-7)=0$$

得A的特征值，$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=7$,

对$\lambda_1=-3$，解$(A+3I)x=0$,得一个基础解系 $p_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

对$\lambda_2=7$，解$(A-7I)x=0$,得一个基础解系 $p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

令 $P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,

则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$,

$$\therefore \quad A^n=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-3)^n & 0\\ 0 & 7^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-3(-3)^n & 7^n\\ 4(-3)^n & 2\cdot 7^n\end{pmatrix}(-\frac{1}{10})\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6\cdot(-3)^n+4\cdot 7^n & 3\cdot 7^n-3\cdot(-3)^n\\ 8\cdot 7^n-8\cdot(-3)^n & 4\cdot(-3)^n+6\cdot 7^n\end{pmatrix}.$$

小结

一、相似矩阵的概念及性质

二、矩阵相似对角化

一、 相似矩阵

1.定义 设 A、B 都是 n 阶方阵，若存在可逆方阵 P，使

$$P^{-1}AP=B$$

则称 A 与 B 相似，或称 B 是 A 的相似矩阵. $A \sim B$

对 A 进行的运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换.

2. 矩阵相似关系是等价关系

3. 相似矩阵的性质

(1)若 A 与 B 相似，则 $|A| = |B|$.

(2)若 A 与 B 相似，则 $r(A) = r(B)$.

(3)若 A 与 B 相似，则 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$.

(4)若 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同，特征值相同.

定理. 若 n 阶方阵 A 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 A 的 n 个特征值.

定理 n 阶方阵 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

推论 1 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值 则 A 可对角化.

注意：A 有 n 个不同的特征值是 A 可对角化的充分条件，但不是必要条件.

将方阵A化为对角阵的步骤

1)求出方阵 A的特征值和特征向量；

2)由特征向量的相关性判 断A能否化为对角阵；

3)若A能化为对角阵，则写出 与A相似的对角阵Λ.

即 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，是$A$的$n$个特征值，

P是由n个线性无关的特征向量作为列向量所构成的矩阵.

作 业

第二节 相似矩阵与矩阵的对角化

1. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列说法正确的是（　　）.

(*A*) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$;　　(*B*) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均相似于同一对角矩阵；

(*C*) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；　　(*D*) 对于相同的特征值 λ，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量.

2. 求下列矩阵的特征值及对应的线性无关的特征向量．若可以对角化，求出可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 4 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

THANKS