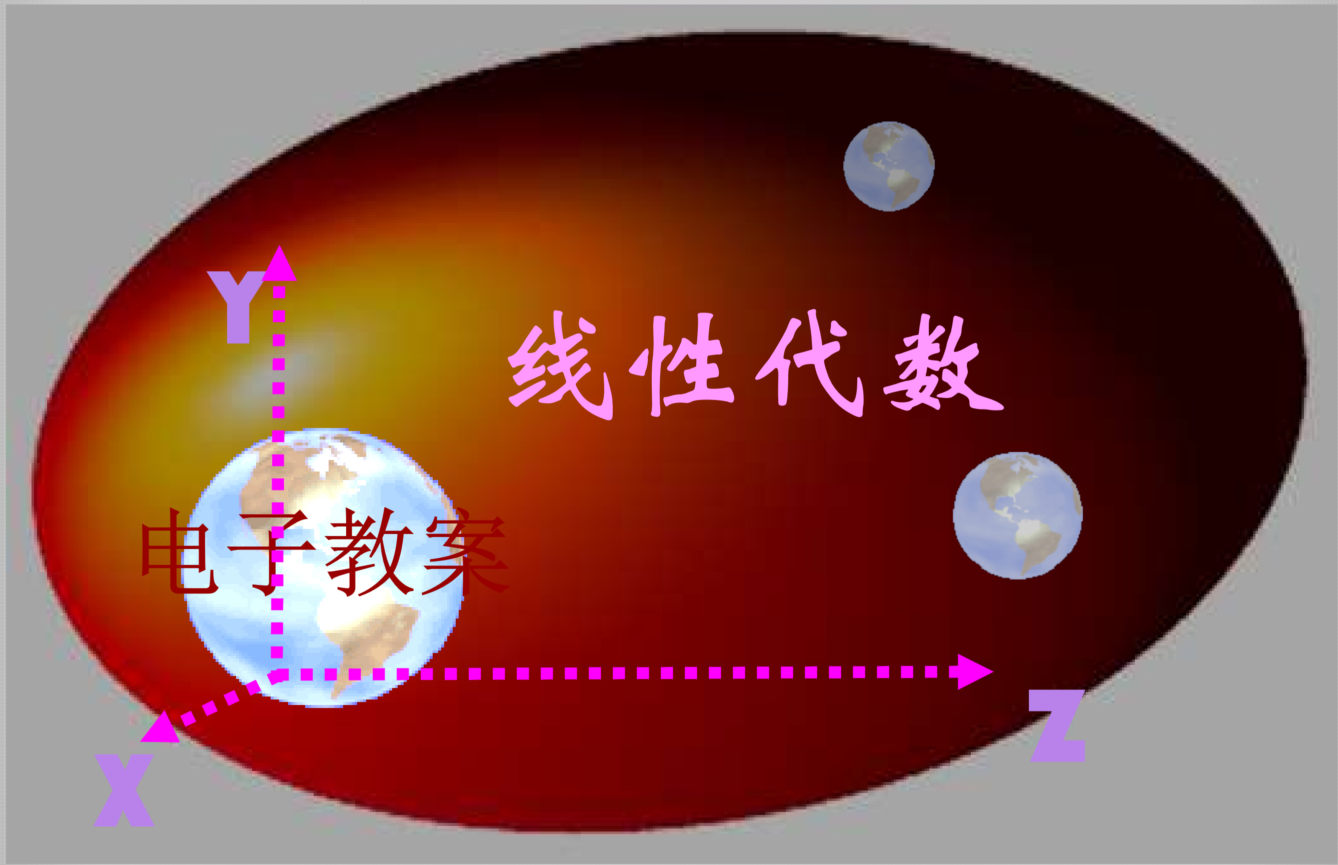

Y
线性代数
电子教案
Z
X

第一章 行列式

行列式的历史

括要筭法卷元

關氏孝和先生遺編

垛積總術

荒木村英

累裁招差之法

大高由昌 訂

夫元積之各數參差者齊之以累裁招差之法求之矣

凡以元積一次相減各積差得等數者招平定一差而依一次相乘之法古所謂相減相乘之法也求之到二次相減各積差得等數者招立平定二差而依二次相乘之法古所謂三差之法也求之到三次相減各積差得等數者招三乘立平定四差而依三次相乘之法求之皆倣之各段得等數者而招諸差率求元積也

解術

- 行列式的概念最早是17世纪由德国数学家莱布尼茨和日本数学家关孝和（独立）提出来的，关孝和在著作《解伏题之法》中对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述。

- 德国数学家雅可比于1841年总结并提出了行列式的系统理论。

高斯曾说：德意志帝国能有这样的数学天才，这的确令高斯高兴。

1804年，拥有一颗“多才多艺的头脑”的雅可比，出生在普鲁士一个富有的银行家庭。

在柏林大学的校园里，这个雄心勃勃的年轻学生。把全部精力献给数学，并以“最惊人的力量和最艰苦的思考制服这个庞然大物而不怕被它撞毁”。

本章主要内容

一. 二（三）阶行列式

二. 排列与逆序

三. **n** 阶行列式的定义

行列式概念的形成（定义）

四. 行列式的性质

五. 行列式按一行（列）展开

行列式的基本性质及计算方法

六. **Cramer** 法则

利用行列式求解线性方程组

一、行列式的引入—二阶与三阶行列式

解方程是代数中一个基本问题，在中学我们经常求解二元和三元一次线性方程组，一般运用代入消元法和加减消元法。例如，对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1\cdots\cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2\cdots\cdots(2) \end{cases} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

利用加减消元法，由 $(1)\times b_2-(2)\times b_1$ 和 $(2)\times a_1-(1)\times a_2$ 得

$$\begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2 \\ (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \end{cases}$$

上 下

若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，则有

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases}$$

用记号 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 表示 $a_1b_2 - a_2b_1$ 称之为二阶行列式

$-$ $+$

同理可得 $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2c_1 - b_1c_2$，$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$

若 $D \neq 0$，则 $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$ 是方程组（**1.1.1**）的公式解

上 下

对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1.1.2)$$

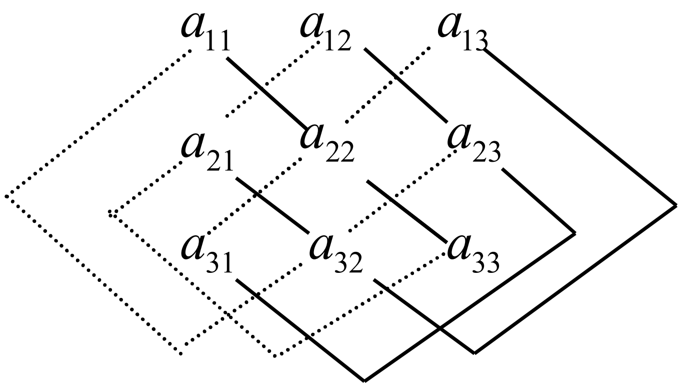
引进记号

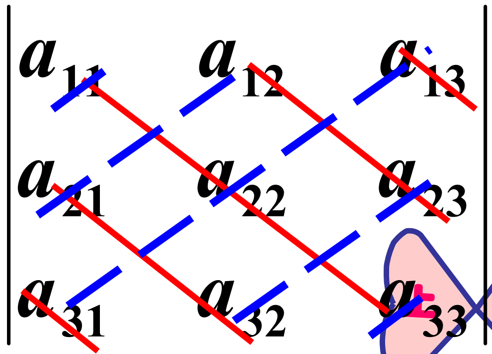
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称之为
三阶行列式

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

计算方法
对角线法则





对于三元线性方程组，若其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

可以验证，方程组有唯一解，

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中，

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

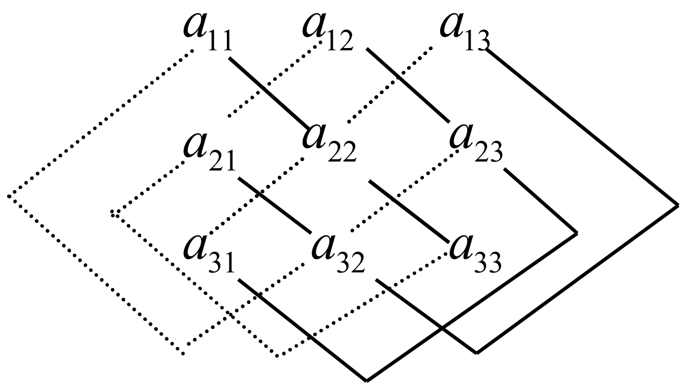
是方程组（**1.1.2**）的公式解。

注：(1) 三阶行列式 算出来也是一个数。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(2) 记忆方法：对角线法则



以上给出了二阶和三阶行列式的定义以及相应线性方程组的公式解。那么，对于一般的***n***元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (\mathbf{1.1.3})$$

我们自然要问，对于**n**元一次线性方程组

是否也有类似的***n***阶行列式的定义以及相应的公式解？

项数？
元素？
符号？

这首先就必须解决：能否把二阶、三阶行列式推广到**n**阶行列式？要解决这个问题，必须回答以下一系列问题：

- 这个**n**阶行列式如何定义？
- **n**阶行列式中一共包含有多少项？
- 每一项由哪些元素组成？
- 哪些项前面带正号？
- 哪些项前面带负号？

有了**n**阶行列式的定义后，我们才能研究方程组（**1.1.3**）有没有类似于二元、三元方程组的公式解。

如何给出**n**阶行列式定义？

§1.1.2 排 列

一、排列与对换

- **排列的定义：** 由**n**个数码**1，2，…，n**组成的一个无重复的有序数组称为这**n**个数码的一个排列，简称为**n**元排列。

例如， **312**是一个**3**元排列，**45321**是一个**5**元排列，等等。

3元排列共有多少种不同的排列？ **123 132 213 231 312 321**

一个**n**元排列共有**n!**种不同的排列.

在**n**元排列中，只有**123…n**这个排列是按自然顺序排列，其他排列或多或少破坏自然排列。

- **反序（逆）的定义:** 在一个**n**元排列中，如果有一个较大的数码排在一个较小的数码前面，则称这两个数码在这个排列中构成一个反序，一个**n**元排列中所有反序的总和称为这个排列的反序数，记为

$$\tau\left(j_1 j_2 \cdots j_n\right) \quad 或 \quad \pi\left(j_1 j_2 \cdots j_n\right)$$

上 下

排列逆序数的计算方法：

法1：n个数的任一n元排列，先看数1，看有多少个比1大的数排在1前面，记为 m_1；

再看有多少个比2大的数排在2前面，记为 m_2；

继续下去，最后至数n，前面比n大的数显然没有，

记为 $m_n = 0$；

则此排列的逆序数为 $\tau = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

例： 求排列 32514 的逆序数。

解：（法1） $m_1 = 3,\quad m_2 = 1,\quad m_3 = 0,\quad m_4 = 1,\quad m_5 = 0$

$$\tau(32514) = 3 + 1 + 1 = 5$$

上 下

对换的定义：在一个n元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果交换某两个数码的位置而别的数码不动，则称对这个排列施行了一个对换。

如果交换的两个数码是 i 和 j，就把这个对换记为 (i,j)

例如 $341625 \xrightarrow{(1,5)} 345621$

问题1：任意两个n元排列是否可经一系列对换而互变？

引理1：任意一个n元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 可经一系列对换变为自然排列12... n。

证明（略）：

推论1：自然排列12...n可经一系列的对换变到任意一个n元排列：$j_1j_2\cdots j_n$

由引理1和推论1，我们圆满地解决上面提出的问题1，即：

定理2.2.1：任意两个n元排列可经一系列对换互化。

二、排列的奇偶性。

定义：如果一个n元排列的反序数是一个奇数，则称该排列为奇排列；反序数是偶数的排列称为偶排列。

例如：$\tau(321), \tau(45321)$ 是奇排列，而 $\tau(3241)$ 是偶排列。

问题2：对n元排列施行一次对换，对排列的奇偶性有没有影响？

例如，$\tau(321)=3$，$\tau(123)=0$。

上 下

定理2.2.2： 每一个对换均改变排列的奇偶性。

证明（略，举一个例子说明）

问题3： 在全体n元排列中，究竟是奇排列多还是偶排列多？

定理2.2.3： 当 $n \geq 2$ 时，在n!个n元排列中，奇、偶排列各占一半，即各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个。

证明（略）

例如，在 1，2，3 的全排列中

有　3 个偶排列：　　123，231，312

有　3 个奇排列：　　132，213，321

三. n阶行列式的定义 （观察三阶行列式）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

寻找规律：

1. 三阶行列式是 3！ 项的代数和。

2. 每一项都是取自不同行、不同列的 3 个元素的乘积。

其任一项可写成：$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 其中 $j_1\, j_2\, j_3$ 是123的一个排列

3.（每项的符号规律）

当 $j_1\, j_2\, j_3$ 是偶排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 取正号

当 $j_1\, j_2\, j_3$ 是奇排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 取负号

二阶行列式有类似规律。

根据二、三阶行列式的构造规律，我们来定义n阶行列式

定义1：n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

指的是n！项的代数和，

其中每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，

其一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是12⋯n的一个排列

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，项前面带正号

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，项前面带负号

上 下

即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有n元排列取和

注： (1) 当n=1时，一阶行列式 $|a| = a$

此处 $|a|$ 不是a的绝对值，例如行列式 $|-1| = -1$

(2) 定义表明，计算n阶行列式，首先必须作出所有的可能的位于不同行、不同列的n个元素的乘积，把这些乘积的元素的第一个下标（行标）按自然顺序排列，然后看第二个下标（列标）所成的奇偶性来决定这一项的符号。

例1： 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

例2： 若 $a_{13}a_{2i}a_{32}a_{4k}$， $a_{11}a_{22}a_{3i}a_{4k}$，

为四阶行列式的项，试确定i与k，使前两项带正号，后两项带负号。

例3： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

四个结论:

(1) 上三角形行列式（主对角线下侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角形行列式（主对角线上侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$ （显然）

(4)
$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

举例

符号定理： 令 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是n阶行列式中的任一项，

则项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号等于$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$

由此，得行列式的等价定义（分别称为定义**1**、定义**2**、定义**3**）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{\substack{j_1 j_2 \cdots j_n \\ i_1 i_2 \cdots i_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

上 下

本节内容小结：

二阶与三阶行列式

排列与对换

排列的奇偶性。

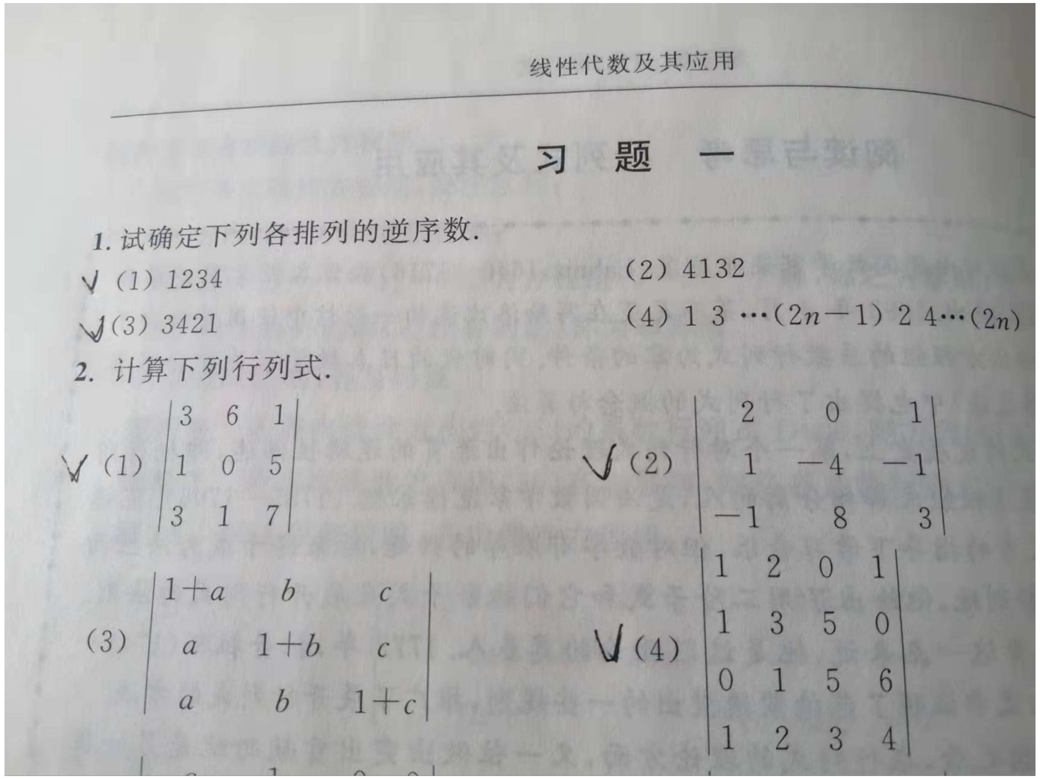
n阶行列式的定义

四个结论（特殊行列式的计算）

作业：P24（注：下图中标号前面打钩的题，

1. (1) (3)

2. (用行列式定义计算）（1）（2）（4）



习 题 一

1. 试确定下列各排列的逆序数.

√ (1) 1234 (2) 4132

√ (3) 3421 (4) $1\ 3 \cdots (2n-1)\ 2\ 4 \cdots (2n)$

2. 计算下列行列式.

√ (1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ √ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$ √ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

上 下