后次复习前次的概念

1、方阵的行列式及性质

2、逆矩阵的概念和性质

3　**伴随矩阵的概念**

A的伴随矩阵A^*有如下重要性质：

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

定理1　矩阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,$$

4、逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

(2) 若A可逆,数$\lambda \neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1\ A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}\ A_1^{-1}.$

(4) 若A可逆,则A^T亦可逆,且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$

(5) 若A可逆,则有$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}.$

5、 简单的矩阵方程

$$(1)AX = B \qquad (2)XA = B \qquad (3)AXB = C$$

其中，A，B，C已知

6、分块矩阵的概念与运算

（注意乘法）

7、 对角块矩阵及性质

（尤其准对角阵）

§2.5 向量组的线性相关性(1)

一、 向量的线性组合

线性方程组的向量表示

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m .
\end{cases}
$$

$$
x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{b}
$$

定义 设有向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \mathbf{b}$.如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使 $\mathbf{b} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$ 成立，则称 $\mathbf{b}$是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的线性组合，或称$\mathbf{b}$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，其中$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 称为表示系数 .

如果方程组有解，就等价于存在一组数$k_1, k_2, \cdots, k_n$使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \mathbf{b}$$

即向量 $\mathbf{b}$可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示 .

即向量$\mathbf{b}$可由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n}$线性表示 .等价于

线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = b$ 有解.

例1 设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

问b能否由 α_1，α_2线性表示？

解 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = b$

即 $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

易知： $x_1 = 2.\ x_2 = -1$

即 $2a_1 + (-1)\ a_2 = b$

故b可由 α_1，α_2线性表示．

定义 称n阶单位矩阵 **I**的行向量组

$$e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1).$$

为**基本单位向量组**.

结论： 任何一个 n维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可由基本单位向量组线性表示 .

$$\alpha=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\cdots+a_n\mathbf{e}_n$$

又 $\mathbf{0}\alpha_1+\mathbf{0}\alpha_2+\cdots+\mathbf{0}\alpha_n=\mathbf{0}$

即零向量可由任何一个同维的向量组线性表示.

二、 向量的线性相关性

定义 设有向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,

(1) 如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0 \quad (*)$$

成立，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 (*linear dependence*)

(2) 如果只有当 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全为零时，(*)式才成立，则称向量组线性无关 (*linear independence*).

例 $\alpha_1=(2,-1,3),\alpha_2=(4,-2,5),\alpha_3=(2,-1,4)$

因为 $3\alpha_1+(-1)\alpha_2+(-1)\alpha_3=0$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,线性相关。

此定义也可表述为：

若齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$

有非零解，则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关.

否则（即只有零解）就称 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关.

注：1. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关 ，则只有当

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$时，才有

$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n = 0$ 成立 .

2. 对于任一向量组，不是线性无关就是线性相关.

3. 向量组中含有零向量 必相关

4. 一个向量相关 $\Leftrightarrow$ 零向量

5. 两个向量相关 $\Leftrightarrow$ 对应分量成比例

例1 讨论向量组 $\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,3,5),\alpha_3=(1,-1,-3)$ 的线性相关性.

解 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

用行列式来解

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 5 & -3\end{vmatrix}=0$$

方程组有非零解，所以 α_1，α_2，α_3 线性相关.

例2　设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，试证向量组

$$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1 \quad \text{也线性无关}$$

p60
例26

证　设 $x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

整理得 $(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad\quad = 0 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{系数行列式} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

故方程组只有零解，即 x_1,x_2,x_3 只能全为零.

所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

注：　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 成单，线性无关；

成双，线性相关。

三. 线性组合与线性相关性 的关系

定理 5 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow$
其中至少有一个向量可由其余向量线性表示

向量组线性无关 $\Leftrightarrow$

其中任何一个向量都不能由其余向量线性表示.

定理 9 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,

$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关

则α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示且表示法唯一.

四、关于线性相关性的几个结论

例 1 讨论向量组 $\alpha_1=(1,3,2),\alpha_2=(1,3,-4),\alpha_3=(3,1,5),$

$\alpha_4=(0,5,6)$的线性相关性。

解 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$

这是一个含有 3个方程 4个未知量的线性方程，

即 $m=3<n=4$. 所以必有非零解，可讨论一下

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关 .

1 个数与维数:个数大于维数 $\Rightarrow$线性相关 p62 定理6

特别，**n+1** 个 **n** 维向量必线性相关。

例2 设$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3),\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3),\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3)$线性无关.证明$\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4)$,

$\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4),\gamma=(c_1,c_2,c_3,c_4)$也线性无关.

证 设α,β,γ线性相关，即存在不全为零的数k_1,

k_2,k_3使$k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=0$

写成分块形式

$$k_1(a,a_4)+k_2(\mathbf{b},b_4)+k_3(\mathbf{c},c_4)=(0,0)$$

则有$k_1a+k_2\mathbf{b}+k_3\mathbf{c}=0$

得α,b,c 线性相关,与它们线性无关矛盾,

所以α，β，γ线性无关。

2 伸长与缩短组（维数变化）：

分量短的无关$\Rightarrow$伸长组无关

p62
定理7

例 4 试证：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则它的任一部分组也线性无关.

3 部分与全体（向量个数变化）：

全体无关$\Rightarrow$ 部分无关 p62，定理8

逆否：部分相关$\Rightarrow$ 全体相关 p62，定理10

总结如下：

1 个数与维数：个数大于维数 $\Rightarrow$线性相关

特别，n+1 个 n 维向量必线性相关。

2 伸长与缩短组（维数变化）：

分量短的无关$\Rightarrow$伸长组无关

逆否：分量长的相关$\Rightarrow$缩短组相关

3 部分与全体（向量个数变化）：

全体无关$\Rightarrow$部分无关

逆否：部分相关$\Rightarrow$全体相关

可以证明：

n个n维向量 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,n,$

$$\text{线性相关}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

$$\text{线性无关}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

即矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ 可逆 **p62,定理11**

由此可知基本单位向量组是线性无关的.$(\because |I|=1)$

四、向量组的极大无关组和秩

定义 1 设有向量组 T,如果它的一个部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足:

1) 线性无关;

2) 任取 $\alpha\in T$,则 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关.

[2′) T 中任一 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示.]

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组 T 的一个极大线性无关组 .

例 求向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ 的极大无关组

解 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 是一个极大组，$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ 也是一个极大无关组

注意 1^0 极大无关组可能不唯一 .

2^0 T内极大无关组所含向量 个数必相同.

3^0 $r \le T$中向量的个数 .

如T本身是线性无关的，极 大线性无关组就是 T自己.

五、向量组间的关系：

定义22 设有两个 n 维向量组 A 和 B，若向量组 A 中的每个向量都能由向量组 B 中的向量线性表示，则称**向量组 A 能由向量组 B 线性表示**。

若向量组 A 能由向量组 B 线性表示，且向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则称**向量组 A 与向量组 B 等价**。

显然，**一个向量组的极大无关组与向量组本身是等价的**.

有如下性质：(1) 反身性：

(2) 对称性：　　解释

(3) 传递性：

定义 向量组的极大无关组所含向量的个数称为向量组的**秩**.

并规定只含零向量的向量组的秩为 **0**.

例 求向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ 的秩为**2**

重要结论

向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 它的秩等于所含向量的 个数

向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ 它的秩小于所含向量的 个数

关于两个向量组的秩，有如下结论：

定理12 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $s < t.$

推论5 等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

推论6 等价的向量组其秩相同.

推论7 线性无关的**n**维向量组最多含**n**个向量.

推论8 **若向量组 A 可由向量组 B 线性表示，**

则 $r_A \le r_B$

推论9 任意**n+1**个**n**维向量线性相关.

例 试证阶梯阵

$$U=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的首非零元 a_1, b_2, c_5对应的列向量 α_1，α_2，α_5

是U的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_7$的一个极大无关组 .

证　首先证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$线性无关

事实上：a_1, a_2, a_5 前三个分量构成的向量组线性无关

（因为行列式不等于零）

由分量短的无关，则延长分量还无关。

所以　a_1, a_2, a_5　线性无关

再证U的任何一个列向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$线性表示.

设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_5 = \alpha_i (i = 1,2,\cdots,7)$

增广矩阵都具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_5 & * \\ 0 & b_2 & b_5 & * \\ 0 & 0 & c_5 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 a_1, b_2, c_5 均不为零，所以方程组

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_5a_5 = *_1$$

$$x_2b_2 + x_5b_5 = *_2$$

$$x_5c_5 = *_3$$

有解，所以 α_i **可由** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ **线性表示.**

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 是 U 的列向量组的一个 极大无关组。

例 求左边矩阵列向量组的秩 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

本节课　内容小结

向量组的线性相关性

一、线性表示（线性组合）

如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使

$$\mathbf{b} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

成立，称 b 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{b}$$

二、线性相关与线性无关

如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \quad (*)$$

成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 有非零解

如果只有当 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 全为零时，(*)式才成立，

则称向量组线性无关.

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 只有零解

三、线性相关性的判别 方法

1.根据定义

2.根据有关结论

如：个数与维数；维数与维数；个数与个数。

四、极大线性无关组和 秩的定义和求法

作业P82， 15

补充

1.判断，如果错误,请改正.

（1）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性相关，则每一个$\alpha_i(1\le i\le s)$都可由其余的向量线性表出.　（　　）

（2）若当$k_1=k_2=\cdots=k_s$时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性相关.　（　　）

（5）设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in})$，$i=1,2,...,s$，$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in},b_{i1},b_{i2},...,b_{im})$，$i=1,2,...,s$．若$\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$

线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$也线性无关.　（　　）

2.若向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性表示，则下列结论正确的是(　　　).

(A) 存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_t$使$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$成立；

(B) 存在一组全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_t$使$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$成立；

(C) 存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_t$使$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$成立；

(D) 对$\boldsymbol{\beta}$的线性表示式惟一.

3.当向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关时，使等式$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{O}$成立的常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$是（　　　）.

(A) 任意一组常数；　(B) 任意一组不全为零的常数；

(C) 某些特定的不全为零的常数；　(D) 唯一的一组不全为零的常数.