后次复习前次的概念

本次课内容小结

矩阵的概念

矩阵的线性运算及性质

矩阵的乘法及性质

转置矩阵，对称矩阵，反对称矩阵

矩阵乘法虽然不满足交换律、零因子律和消去律，

线性方程组的矩阵表示。

§2.3 方阵的行列式及其逆矩阵（1）

一、方阵的行列式

定义　设A是n阶方阵，由A的元素按其在矩阵中的位置构成的n阶行列式，称为方阵A的行列式,记作$|A|$.

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{n}$阶方阵，$\lambda$为数，则

(1) $|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|$;

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$,其中$\lambda$是一个数;

(3) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

一般说来，两个n阶方阵$A, B, AB \neq BA$，但$|AB| = |BA|$.

例13 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\3&2&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&3&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 求 $|A||B|$

解 因为 $AB=\begin{pmatrix}-2&1&-2\\-4&5&1\\-6&9&0\end{pmatrix}$ $|AB|=\begin{vmatrix}-2&1&-2\\-4&5&1\\-6&9&0\end{vmatrix}=24$

又因为 $|AB|=|A||B|$. 所以 $|A|\cdot|B| \quad =24$

事实上 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\3&2&-1\end{vmatrix}=-2$ $|B|=\begin{vmatrix}-2&1&0\\0&3&1\\0&0&2\end{vmatrix}=-12$ 也有 $|A|\cdot|B| \quad =24$

此结论可推广到 n个同阶方阵的情形 .

$$|A_1A_2\cdots A_n|=|A_1||A_2|\cdots|A_n|.$$

二、可逆矩阵

1、逆矩阵的概念和性质

定义 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵.

A的逆矩阵记作A^{-1}.

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E,\quad \therefore B$是$A$的一个逆矩阵.

说明： 1、 若 A是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是唯一的.

2. 若A可逆，则B也可逆，且$B^{-1}=A$ 不证

下面讨论逆矩阵的求法，为此，先介绍伴随矩阵的概念

2、伴随矩阵的概念

定义 设$A=(a_{ij})$为n阶方阵，由元素$a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式A_{ij}组成的方阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

称为A的伴随矩阵.

例 1

求三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵 A^*.

解

$$A_{11}=2,\quad A_{12}=-3,\quad A_{13}=2,$$

$$A_{21}=6,\quad A_{22}=-6,\quad A_{23}=2,$$

$$A_{31}=-4,\quad A_{32}=5,\quad A_{33}=-2,$$

故

$$A^*=\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}.$$

A的伴随矩阵A^*有如下重要性质：

$$AA^* = A^*A = |A|E$$ 不证

定理1 矩阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,$$

其中A^*为矩阵A的伴随矩阵.

可见，此定理给出了逆矩阵的一种求法

若方阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$ 则称 A 为非奇异方阵，否则称 A 为奇异方阵。

3、逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1 A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

(4) 若A可逆,则A^T亦可逆,且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

(5) 若A可逆,则有$\left|A^{-1}\right|=\left|A\right|^{-1}$.

仅证明（3） 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证明 $$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

当$|A|\neq 0,\lambda,\mu$为整数时,有

$$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu},\qquad (A^{\lambda})^{\mu}=A^{\lambda\mu}.$$

新疆政法学院

例1 讨论矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的可逆性，可逆时求$A^{-1}$.

解 (1) $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$

当$ad-bc=0$时，A不可逆；

当$ad-bc\neq 0$时，A可逆；

主对角线上元素交换，
副对角线上元素反号

(2) $A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(3) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

两调一除

例 2 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ 求A^{-1}

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&3\end{vmatrix}=2,$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3&1\\-3&3&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3&1\\-3&3&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

5、 简单的矩阵方程 （了解）

$(1)AX = B$ $(2)XA = B$ $(3)AXB = C$

其中，A，B，C已知

当A，B可逆时，它们有唯一解

$(1)AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$(2)XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$

$(3)AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

例1 解矩阵方程 $(1)\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$;

解 (1) $\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}$,

得 $\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}}}_{E}X=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17 & -28\\ -4 & -6\end{pmatrix}.$$

例2 已知$AXB = C$,求X.

其中$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

解:

$$\because |A| = -1 \quad \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\because |B| = -2 \quad \therefore B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

2.4 分 块 矩 阵

一、 分块矩阵的概念

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 具体做法是：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

定义： 用一组横线和纵线将矩阵 A 分割成若干个小矩阵，

每个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵

称为分块矩阵。

例 1： $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ 记$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

例2 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix},$

其中$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

二、 分块矩阵的运算

1、分块矩阵的加法

设矩阵 A 与 B 的行数相同，列数相同，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数相同，列数相同，则

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

注：1）A与B的分块方式相同 2）子块相加

2、分块矩阵的数乘

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$为数，则 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$.

3、分块矩阵的转置

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$， 则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

1) 块转置； 2) 子块转置

例2 设$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right)$ 求A^T

解：$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$

$$A^T=\begin{pmatrix} A_1^T & A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

4、分块矩阵的乘法

设 A 为 $m \times l$ 矩阵，B 为 $l \times n$ 矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{tj}$ 的行数，那末

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj} \quad (i=1, \cdots, s;\ j=1, \cdots, r).$

注：A的列分块与B的行分块方式相同.

例1

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline -1&2&1&0\\1&-3&0&1\end{array}\right)\quad B=\left(\begin{array}{cc}1&-2\\-1&1\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right)$$

用分块矩阵方法求 AB

$$AB=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\\-2&4\\4&-4\end{pmatrix}$$

三、 分块对角矩阵

定义 设A为n阶矩阵,若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且非零子块都是方阵.即

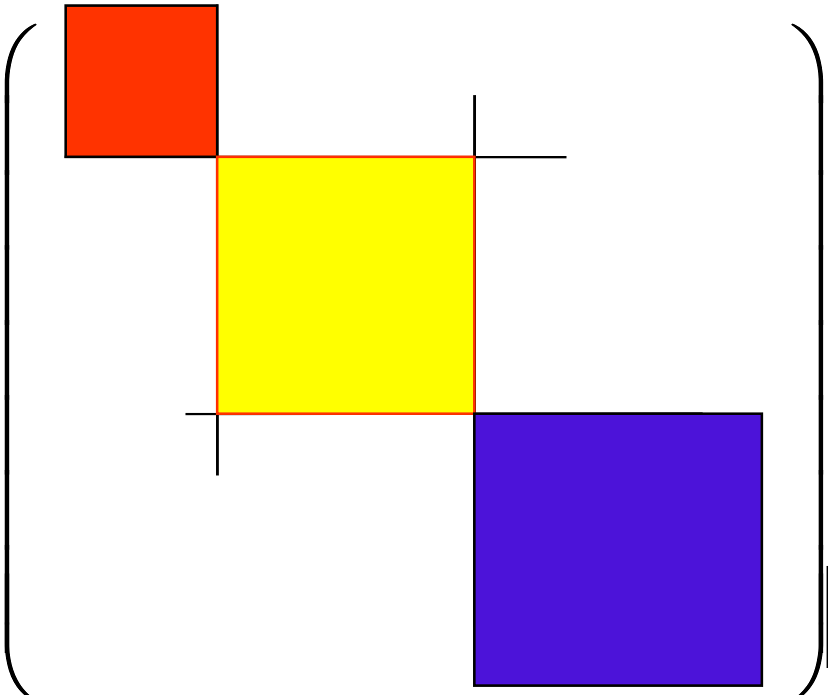
$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_r\end{pmatrix}$$

称为分块对角阵.

(又称准对角矩阵)

($A_1, A_2, \cdots, A_r$均为方阵)

形如:



例1：

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

例2：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & A_2 & \\ \mathbf{0} & & A_3 \end{pmatrix}$$

为准对角矩阵。

分块对角矩阵的行列式具有下述性质：

$$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

性质

（1）

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

（2）设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s \end{pmatrix}$，则 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$,

若 $|A_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$,则 $|A|\neq 0$,并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例题　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&3&2&0&0\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&4&2\end{pmatrix}$，求|**A**|及**A**$^{-1}$

解　将**A**分块：一行、三行，之间各插入横线，

在一列、三列之间各插入竖线，则

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&&\\&A_{22}&\\&&A_{33}\end{pmatrix}\quad \text{其中 } A_{11}=1, A_{22}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}, A_{33}=\begin{pmatrix}-1&3\\4&2\end{pmatrix}$$

所以　$|A|=-14$　$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&-1&0&0\\0&-3&2&0&0\\0&0&0&-1/7&3/14\\0&0&0&2/7&1/14\end{pmatrix}$

本节课　内容小结

1、方阵的行列式

2、逆矩阵的概念和性质

3　伴随矩阵的概念

A的伴随矩阵A^*有如下重要性质：

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

定理1　矩阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,$$

4、逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆，数$\lambda\neq 0$，则λA可逆，且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且

$$\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

(4) 若A可逆，则A^T亦可逆，且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

(5) 若A可逆，则有$\left|A^{-1}\right|=\left|A\right|^{-1}$.

5、 简单的矩阵方程

$$(1) AX = B \qquad (2) XA = B \qquad (3) AXB = C$$

其中，A，B，C已知

6、分块矩阵的概念与运算（注意乘法）

7、 对角块矩阵及性质

作业 P82 13; 17(1); 19(1); 20(1)

1.求下列矩阵的逆矩阵 (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2．求解下列矩阵方程：(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

3.用分块法求 AB：

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4.用分块法求下列矩阵的逆矩阵

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$