后次复习前次的概念

上次内容

一、 矩阵的初等变换

1.定义：下面的三种变换称为矩阵的初等行变换：

（**1**）互换两行的位置；

（**2**）用一个非零数乘某一行；

（**3**）把一行的倍数加到另一行上.

若把定义中的行换成列，就得到矩阵的初等列变换定义.

初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

2.矩阵等价:

如果矩阵A经有限次初等变换变成 矩阵B,

则称矩阵 A与矩阵 B等价，记作$A \sim B$.

有性质: （1）自反性：A~A;

（2）对称性：若 A~B，则 B~A;

（3）传递性：若 A~B,B~C，则 A~C.

3. 初等方阵

定义 单位矩阵经一次初等变换得到的方阵称为初等方阵.

三种初等变换对应三种初等方阵.

$$I(i,j); \quad I(i(k)); \quad I(i,j(k));$$

初等方阵的性质:初等方阵都是可逆的，其逆阵也是初等方阵

上 下

4. 矩阵A的标准形

定义 形如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的矩阵，称为矩阵的标准形.

注1：任何矩阵都可以经过初等变换化成标准形.

注2：任一可逆矩阵都可通过行初等变换化为单位阵.

（即可逆矩阵与单位阵等价）

定理 设A是一个$m \times n$矩阵

对A施行一次**初等行变换**，相当于在A的**左侧乘以一个相应的初等矩阵**；

对A施行一次**初等列变换**，相当于在A的**右侧乘以一个相应的初等矩阵**；

3)定理：任何可逆方阵都可以表示为有限个初等方阵的乘积.

推论：　$m \times n$矩阵 $A \sim B$的充要条件是：

存在m阶可逆矩阵 P及n阶可逆方阵 Q，

使$PAQ = B$.

注：$m \times n$矩阵A经初等行变换化为B的充要条件是：

存在可逆方阵P，使$PA = B$。

二、 矩阵的秩

1 秩的概念与性质

1） 子式

定义 设A是$m\times n$矩阵，在 A中任取 k行和 k列$(k\le m,k\le n)$,位于这些行列交叉处的 k^2个元素(保持在A中的相对位置不变）组 成的k阶行列式，称为A的k阶子式. k阶子式有 $c_m^k c_n^k$个.

注：k阶子式是一个数。

2）矩阵的秩

定义　矩阵A中不为0的子式的最高阶数，称为A的秩，记作$r(A)$.

注：规定零矩阵的秩等于 0. 只有零矩阵的秩等于 0.

等价定义（定理 1）　$r(A)=r \Leftrightarrow A$中有一个r阶子式$\neq 0$，而所有的$r+1$阶子式(如果有）均为零。

定义: 若 n 阶方阵 A 的秩 $r(A)=n$,则称 A 为满秩矩阵,否则称为降秩矩阵.

A为满秩矩阵的充要条件是$|A| \neq 0$，故满秩矩阵就是可逆矩阵.

2.秩的性质　　新

(1) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A)\le \min\{m,n\}$,

A 是 n 阶方阵，则 $r(A)\le n$

(2) $r(A^T)=r(A)$.

(3) 矩阵的行秩等于矩阵的列秩等于矩阵的秩.

(4) 阶梯阵的秩等于它的非 零行数.

定义: 若 n 阶方阵 A 的秩 $r(A)=n$,则称 A 为满秩矩阵,

否则称为 降秩矩阵.

A 为满秩矩阵的充要条件 是 $|A|\neq 0$，故满秩矩阵

就是可逆矩阵.

矩阵秩的求法　用初等变换求矩阵的秩：

因为对于任何矩阵$A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换把他变为行阶梯形.

定理16　若 $A\sim B$，则 $R(A)=R(B)$.　　证明略

定理16表明初等变换不改变矩阵的秩.结合行阶梯形矩阵的秩，因而得到求矩阵及向量组的秩的方法：

即：把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.即：

$$1)\,A\xrightarrow{\text{初等行(列)变换}}\text{阶梯阵}\ U,$$

$$2)\,r(A)=r(U)=U\text{的非零行数。}$$

例4 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的 秩

解 对A作初等行变换，变成行 阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_4 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

上 下

$$\xrightarrow{\substack{r_3-3r_2\\ r_4-4r_2}}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 $R(A)=3.$

上 下

三、初等变换方法求向量组的极大线性无关组

定理18　矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩，

从而不改变列向量组的线性相关性.

此定理给出了
向量组线性相关性的判别法和极大无关组的
求法

用矩阵初等变换方法判定向量组的线性相关性

即将向量组列排，作行初等变换（这样不改变列向量组的线性相关性），直到化成阶梯形，从中看出相关还是无关。（举例说明）

例　　设

$a_1 =（1，-2，2，3）$；$a_2 =（2，4，-1．3）$

$a_3 =（-1，2，2，3）$；$a_4 =（0，6，2，3）$

$a_5 =（2，-6，3，4）$；

求向量组的一个极大无关组

解，将向量组列排成矩阵，再作行初等变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \underset{r_4-3r_1}{\overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4+2r_3}{\overset{r_3-3r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

故 $r(A) = r(U) = 3.$

所以向量组的秩为**3**，

且a_1； a_2； a_4 为一个极大无关组

2.7 逆矩阵的初等变换求法

由定理**16**易知，可逆矩阵必可经过行（列）初等变换化成单位矩阵，也即可逆矩阵与单位矩阵等价。

进一步有下面的定理

定理17 可逆矩阵必可表示为一些初等矩阵的乘积

证：设A**是可逆方阵，则**A**可经有限次初等行变换化为单位矩阵**I**，故存在有限个初等方阵**$P_1, P_2, \cdots, P_l$，

使 $P_l \cdots P_2 P_1 A = I.$

依次用 $P_l^{-1}, \cdots, P_2^{-1}, P_1^{-1}$**左乘上式两边，得**

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_l^{-1}$$

其中 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots P_l^{-1}$都是初等方阵 .

于是又得到逆矩阵的初等变换求法

用初等行变换求逆阵

$$\because \quad P_l \cdots P_2 P_1 A = I.$$

$$\Rightarrow \quad P_l \cdots P_2 P_1 I = A^{-1}.$$

得求逆阵的方法：

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{用初等行变换}} \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$$

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解

$$(A \quad I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 - 3r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3 - r_2 \\ (-1)r_3}}{\overset{r_1 + r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

上 下

$$\underset{(-1)r_3}{\overset{r_1+r_2}{\underset{r_3-r_2}{\sim}}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2+5r_3}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-\frac{1}{2})r_2}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & -5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ 用初等变换求求 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

（方法二）构造一个 $n\times 2n$ 阶矩阵 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$，对矩阵 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ 作行初等变换，当 $\boldsymbol{A}$ 变成单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 则变成 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$．即 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$： $(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$.

事实上，因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有初等矩阵 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_s$，使 $\boldsymbol{F}_s\cdots\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$．式子两端右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{F}_s\cdots\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{F}_s\cdots\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1&2\\1&0&0&1&1&1\end{array}\right)\overset{\substack{r_1-r_2\\r_3-r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&0&-1\\0&1&1&1&1&2\\0&0&2&1&2&2\end{array}\right)\overset{r_3\cdot\frac{1}{2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&0&-1\\0&1&1&1&1&2\\0&0&1&\frac{1}{2}&1&1\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{r_1+r_3\\r_2-r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&1&1\end{array}\right)\qquad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&1&1\end{pmatrix}$$

2.8 向量组的正交化

一、回顾正交向量与正交向量组

（1）向量内积

定义 两个n维向量，$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

它们对应坐标乘积的和，叫$\mathbf{x},\mathbf{y}$的内积，记作 $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$

即 $$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = x^T y$$

(2) 正交向量

若$[\mathbf{x},\mathbf{y}]=0$，则称$\mathbf{x}$与$\mathbf{y}$正交.

(3)正交向量组

若非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$两两正交，

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$为正交向量组 .

（4）标准正交向量组

若正交向量组中每个向量都是单位向量，

则称此向量组为标准正交向量组.

二、正交向量组有以下性质：

定理19　正交向量组一定是线性无关的.

证　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一个正交向量组，如果

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\mathbf{0}$$

上式两边左乘 $\alpha_i^T(i=1,2,\cdots,r)$

注意：$\alpha^T\alpha=(\alpha,\alpha)$ 即内积

得　$k_i\alpha_i^T\alpha_i=0,$

$\because \alpha_i\neq 0,\ \therefore \alpha_i^T\alpha_i=|\alpha_i|^2\neq 0,$ 即　$k_i=0.$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 .

三、施密特正交化方法

定理20 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一个线性无关向量组，则$\beta_1$，$\beta_2\cdots\beta_s$是一个与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的正交向量组，其中

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}.$$

证明：略见教材（直接验证）

例4 将 $\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,2,1),\alpha_3=(0,-1,1)$ 标准正交化.

注意教材上是写的列向量

解 （1）正交化 设 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,2,1)-\frac{4}{3}(1,1,1)=\frac{1}{3}(-1,2,-1),$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\cdots=\frac{1}{2}(-1,0,1),$$

（2）单位化 $\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1) \qquad \gamma_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).$$

γ_1，γ_2，γ_3即为所求。

本次课小结

2.秩的性质

(1) 设A是$m \times n$矩阵，则 $r(A) \le \min\{m, n\}$,

$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}$阶方阵，则 $\boldsymbol{r(A) \le n}$

(2) $r(A^T) = r(A)$.

(3) 矩阵的行秩等于矩阵的列秩等于矩阵的秩.

(4) 阶梯阵的秩等于它的非 零行数.

定理16 若 $A \sim B$,则 $R(A) = R(B)$.

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.即：

$$1)\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行（列）变换}} \text{阶梯阵}\ \boldsymbol{U},$$

$$2)\boldsymbol{r(A) = r(U) = U}\text{的非零行数。}$$

定义: 若 n 阶方阵 A 的秩 $r(A)=n$,则称 A 为满秩矩阵,

否则称为 降秩矩阵.

A为满秩矩阵的充要条件 是$|A| \neq 0$，故满秩矩阵

就是可逆矩阵.

三、初等变换方法求向量组的极大线性无关组

定理18　矩阵的初等行变换不改变矩阵的秩,

从而不改变列向量组的线性相关性.

此定理给出了向量组线性相关性的判别法和极大无关组的求法

即将向量组列排，作行初等变换（这样不改变列向量组的线性相关性），直到化成阶梯形，从中看出相关还是无关。

用矩阵初等变换方法判定向量组的线性相关性

即将向量组列排，作行初等变换（这样不改变列向量组的线性相关性），直到化成阶梯形，从中看出相关还是无关。（举例说明）

例　　设

a_1=（1，-2，2，3）；a_2=（2，4，-1．3）

a_3=（-1，2，2，3）；a_4=（0，6，2，3）

a_5=（2，-6，3，4）；

求向量组的一个极大无关组

二、正交向量组有以下性质：

定理19　正交向量组一定是线性无关的.

三、施密特正交化方法

定理20 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是一个线性无关向量组，则 β_1，$\beta_2\cdots\beta_s$ 是一个与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价的正交向量组，其中

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}.$$

上

下

作　　业

1. 利用初等变换求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ 试用行初等变换求 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

3．把下列向量组标准正交化：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,9)^{\mathrm{T}}$$

4．将下列矩阵化为行最简形矩阵

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

上　　下