CS320 Programming Languages
Exercise #7

Draw type derivations of the following expressions.

1. $(\lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num}).\mathsf{x} + \mathsf{y})(8)$
2. $(\mathsf{if\ false}\ (\lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}).\mathsf{x})\ (\lambda(\mathsf{y} : \mathsf{num}).2))(57)$
3. $(\lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}).\mathsf{y}(\mathsf{x} + 17))(42, \lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}).\mathsf{x} > 72)$
   where the type of $>$ is $(\mathsf{num}, \mathsf{num}) \to \mathsf{bool}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{x} \in \mathit{Domain}([\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num}])}{[\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num}] \vdash \mathsf{x} : \mathsf{num}} \quad \dfrac{\mathsf{y} \in \mathit{Domain}([\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num}])}{[\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num}] \vdash \mathsf{y} : \mathsf{num}}}{[\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num}] \vdash \mathsf{x} + \mathsf{y} : \mathsf{num}}}{\emptyset \vdash \lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num}).\mathsf{x} + \mathsf{y} : (\mathsf{num}, \mathsf{num}) \to \mathsf{num}} \quad \emptyset \vdash 8 : \mathsf{num}}{\emptyset \vdash (\lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num}).\mathsf{x} + \mathsf{y})(8) : \mathsf{no\ type}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\emptyset \vdash \mathsf{false} : \mathsf{bool} \quad \dfrac{\dfrac{\mathsf{x} \in \mathit{Domain}([\mathsf{x} : \mathsf{num}])}{[\mathsf{x} : \mathsf{num}] \vdash \mathsf{x} : \mathsf{num}}}{\emptyset \vdash \lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}).\mathsf{x} : \mathsf{num} \to \mathsf{num}} \quad \dfrac{[\mathsf{y} : \mathsf{num}] \vdash 2 : \mathsf{num}}{\emptyset \vdash \lambda(\mathsf{y} : \mathsf{num}).2 : \mathsf{num} \to \mathsf{num}}}{\emptyset \vdash \mathsf{if\ false}\ (\lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}).\mathsf{x})\ (\lambda(\mathsf{y} : \mathsf{num}).2) : \mathsf{num} \to \mathsf{num}} \quad \emptyset \vdash 57 : \mathsf{num}}{\emptyset \vdash (\mathsf{if\ false}\ (\lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}).\mathsf{x})\ (\lambda(\mathsf{y} : \mathsf{num}).2))(57) : \mathsf{num}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{y} \in \mathit{Domain}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \mathsf{y} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}} \quad \dfrac{\dfrac{\mathsf{x} \in \mathit{Domain}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \mathsf{x} : \mathsf{num}} \quad \Gamma \vdash 17 : \mathsf{num}}{\Gamma \vdash \mathsf{x} + 17 : \mathsf{num}}}{\Gamma \vdash \mathsf{y}(\mathsf{x} + 17) : \mathsf{bool}}}{\emptyset \vdash \lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}).\mathsf{y}(\mathsf{x} + 17) : (\mathsf{num}, \mathsf{num} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{bool}} \quad \emptyset \vdash 42 : \mathsf{num} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{x} \in \mathit{Domain}(\Gamma')}{\Gamma' \vdash \mathsf{x} : \mathsf{num}} \quad \Gamma' \vdash 72 : \mathsf{num}}{\Gamma' \vdash \mathsf{x} > 72 : \mathsf{bool}}}{\emptyset \vdash \lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}).\mathsf{x} > 72 : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}}}{\emptyset \vdash (\lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}).\mathsf{y}(\mathsf{x} + 17))(42, \lambda(\mathsf{x} : \mathsf{num}).\mathsf{x} > 72) : \mathsf{bool}}$$

where $\Gamma = [\mathsf{x} : \mathsf{num}, \mathsf{y} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}]$ and $\Gamma' = [\mathsf{x} : \mathsf{num}]$