

Métodos machine learning aplicados em estrelas de nêutrons

André G. da Silva

Orientador: Ricardo L. S. Farias

Departamento de Física
Universidade Federal de Santa Maria

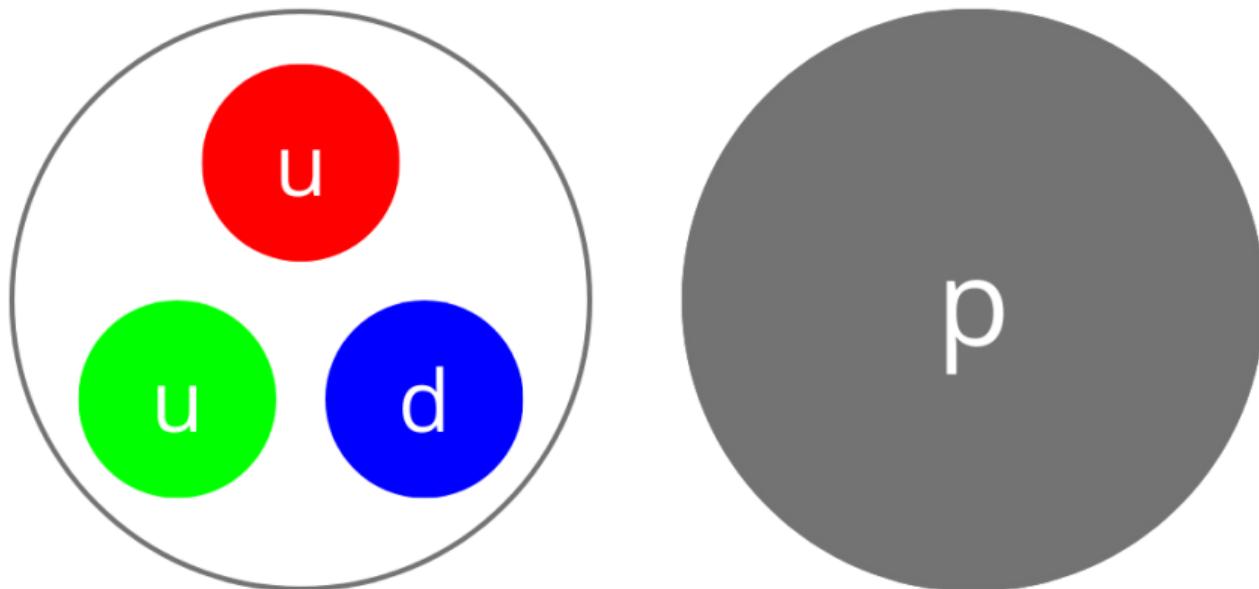
2 de dezembro de 2025

Conteúdo

1. Introdução
2. Objetivos
3. Estrelas de nêutrons
4. Machine learning
5. Resultados
6. Conclusão e perspectivas

Introdução

- A cromodinâmica quântica (QCD) como a teoria da interação forte;
- Liberdade assintótica e simetria quiral;



- Regimes extremos;
- Diagrama de fases;
- Equação de estado da matéria densa;

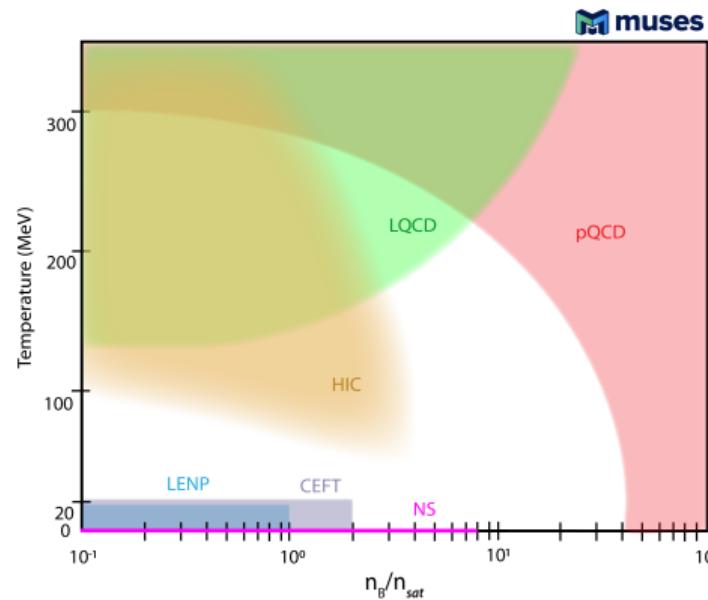


Figura: Regiões acessíveis por meio de experimentos e simulações. Imagem de R. Kumar et al., *Living Rev. Rel.*, 2024, 27, 3.

Por que obter a equação de estado de estrelas de nêutrons?



Por que obter a equação de estado de estrelas de nêutrons?



- Exclusão de modelos que não descrevem a equação de estado;
- Ajuste de parâmetros de modelos;
- Fornecimento da EoS para simulações como, por exemplo, mergers de estrelas de nêutrons;

Quantificação de incertezas

- Incertezas com análises Bayesianas;

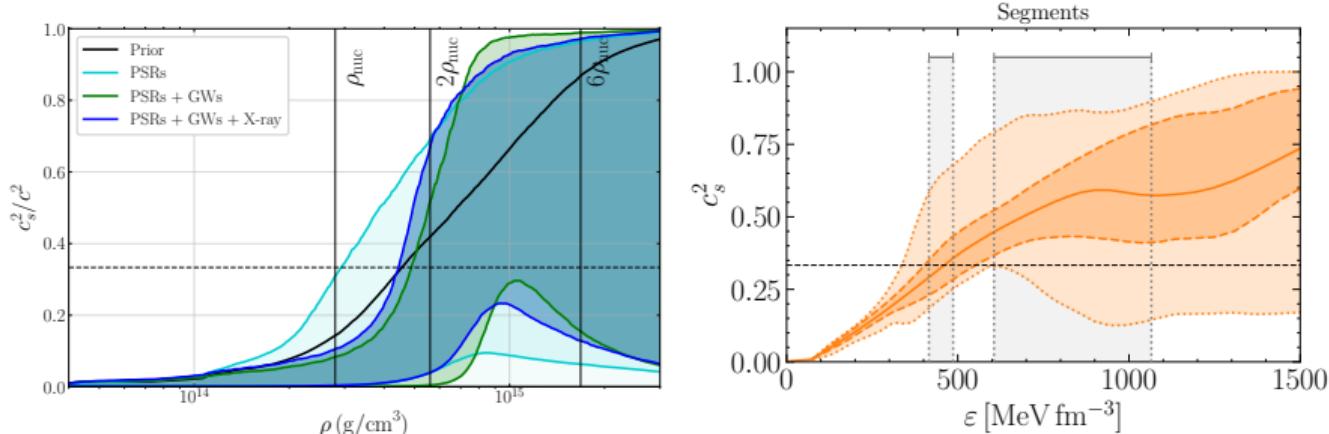


Figura: (Esquerda) resultados de P. Landry et al., *Phys. Rev. D*, 2020, **101**, 123007, CIs de 90%.
(Direita) resultados de L. Brandes et al., *Physical Review D*, 2023, **107**, DOI:
[10.1103/physrevd.107.014011](https://doi.org/10.1103/physrevd.107.014011), CIs de 68% (bandas escuras) e 95% (bandas claras).

- Incertezas com redes neurais;

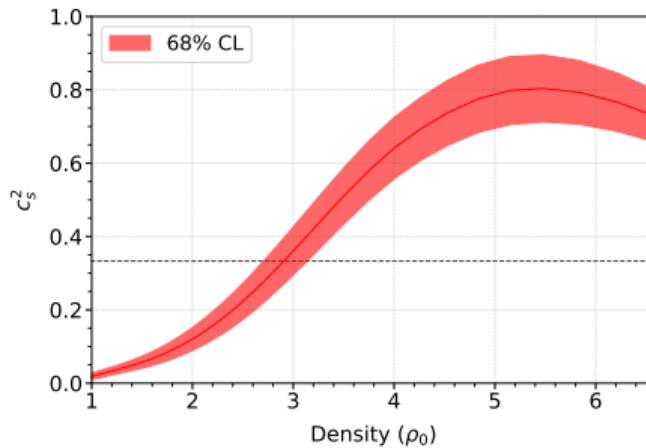
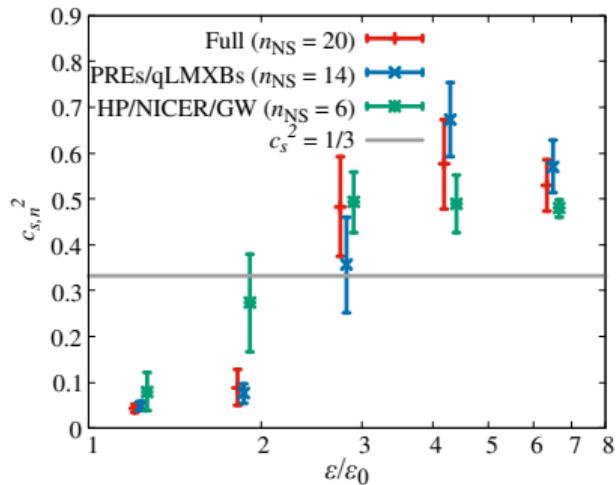


Figura: (Esquerda) resultados de Y. Fujimoto et al., *Phys. Rev. D*, 2024, **110**, 034035, utilizando médias e desvios padrão. (Direita) resultados de S. Soma et al., *Physical Review D*, 2023, **107**, DOI: [10.1103/physrevd.107.083028](https://doi.org/10.1103/physrevd.107.083028), CIs de 90%.

Objetivos

- Desenvolver um processo de inferência da equação de estado baseado em uma forma paramétrica;
- Desenvolver os modelos de inferência com base em rede neural e análise Bayesiana;
- Quantificar as incertezas relacionadas ao processo de inversão;
- Obtenção da equação de estado de matéria densa, juntamente com o diagrama massa-raio associado

Estrelas de Nêutrons

- Um dos objetos mais densos conhecidos;
- Rotações e campos magnéticos altos;
- Temperaturas baixas;



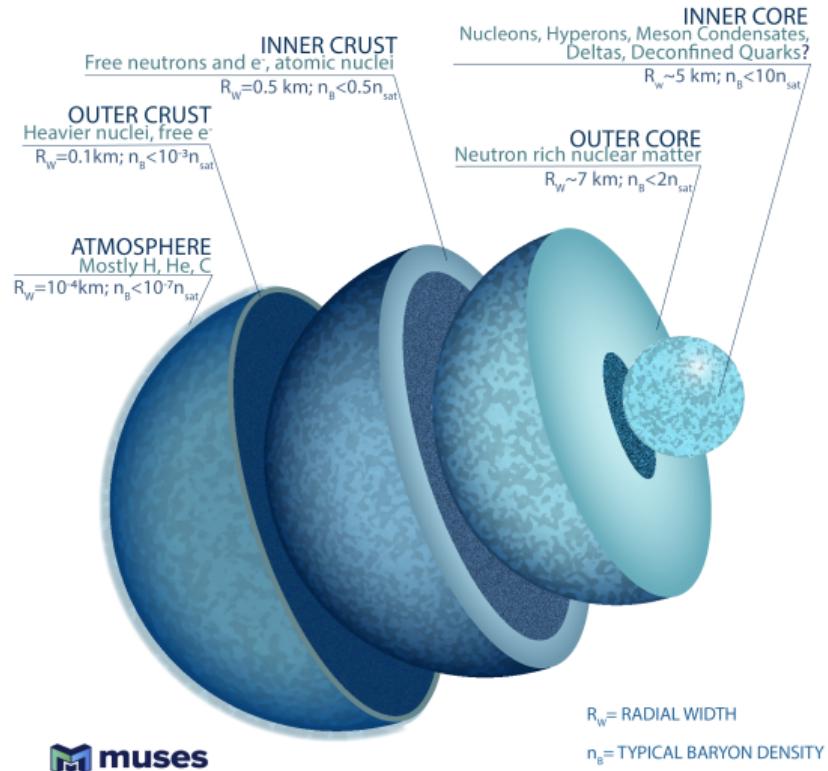


Figura: Seções de uma estrela de nêutrons. Imagem de R. Kumar et al., *Living Rev. Rel.*, 2024, **27**, 3.

- Dados mais recentes do NICER e LIGO/Virgo;

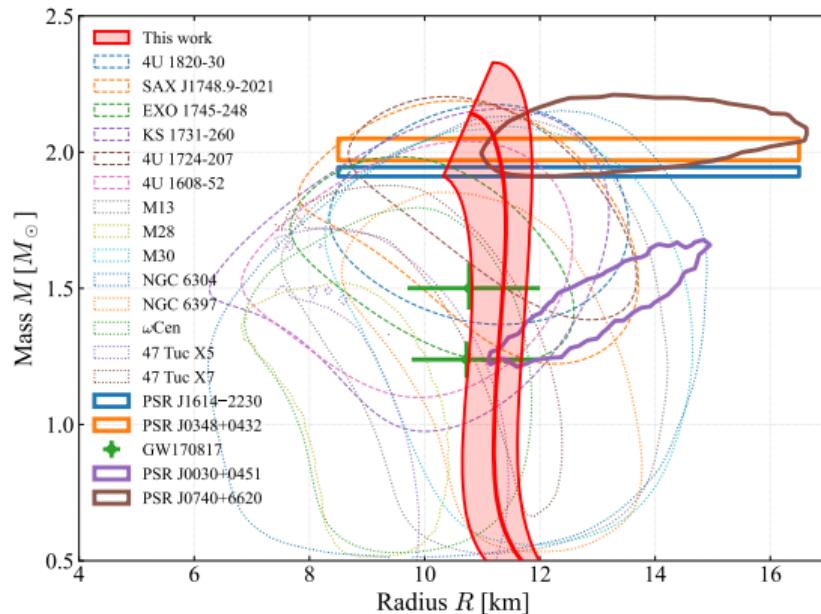


Figura: Compilação de medidas massa-raio medidas. Imagem de Y. Fujimoto et al., *Phys. Rev. D*, 2024, **110**, 034035.

Equilíbrio hidrostático

Observações de massa e raio podem ser ligadas à equação de estado (calculada por modelos de QCD) via as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff¹:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[p(r) + \epsilon(r)] [Gm(r) + 4\pi Gr^3 p(r)]}{r [r - 2Gm(r)]}, \quad (1)$$
$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r),$$

onde resta uma incógnita $\epsilon(r)$ que pode ser colocada na forma $\epsilon(p)$ e é chamada de equação de estado (EoS). A EoS pode ser determinada por um modelo de física nuclear ou de forma paramétrica.

¹Aqui são utilizadas unidades em que $c = 1$

Para obter raios finitos, é necessário definir uma pressão de corte $p(r = R) \sim 1 \times 10^{-8}$ [u.p.], que pode depender fortemente da EoS utilizada. As equações de TOV podem ser colocadas na forma de pseudo-entalpia,

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dh} &= -\frac{r(r - 2m)}{m + 4\pi r^3 p(h)}, \\ \frac{dm}{dh} &= -\frac{4\pi \epsilon(h) r^3 (r - 2m)}{m + 4\pi r^3 p(h)},\end{aligned}\tag{2}$$

onde a h é dado por

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\epsilon(p') + p'}.\tag{3}$$

Essas equações foram apresentadas originalmente por^{2,3} e foram resolvidas para um gás de fermions degenerados. A equação de estado toma a forma⁴

$$\begin{aligned}\epsilon(x) &= \frac{\epsilon_n}{8} \left[(2x^3 + x)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - \sinh^{-1}(x) \right], \\ p(x) &= \frac{\epsilon_n}{24} \left[(2x^3 - 3x)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + 3 \sinh^{-1}(x) \right], \quad x = \frac{k_F}{m_n}\end{aligned}\tag{4}$$

²R. C. Tolman, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 364–373.

³J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 374–381.

⁴I. Sagert et al., *European Journal of Physics*, 2006, **27**, 577–610.

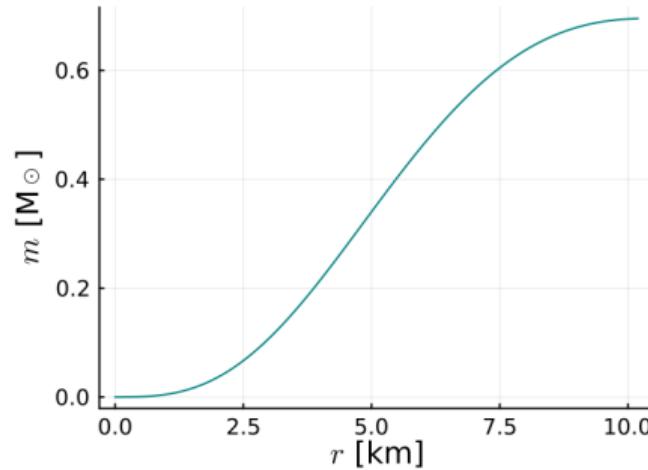
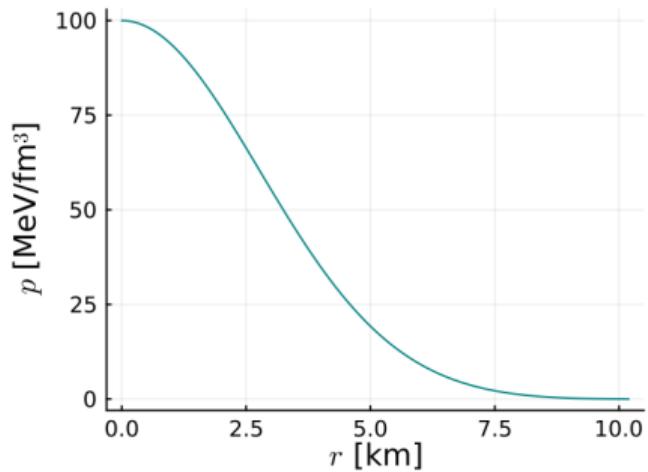


Figura: Solução das equações de TOV para $p(r = 0) = 100$ MeV fm $^{-3}$.

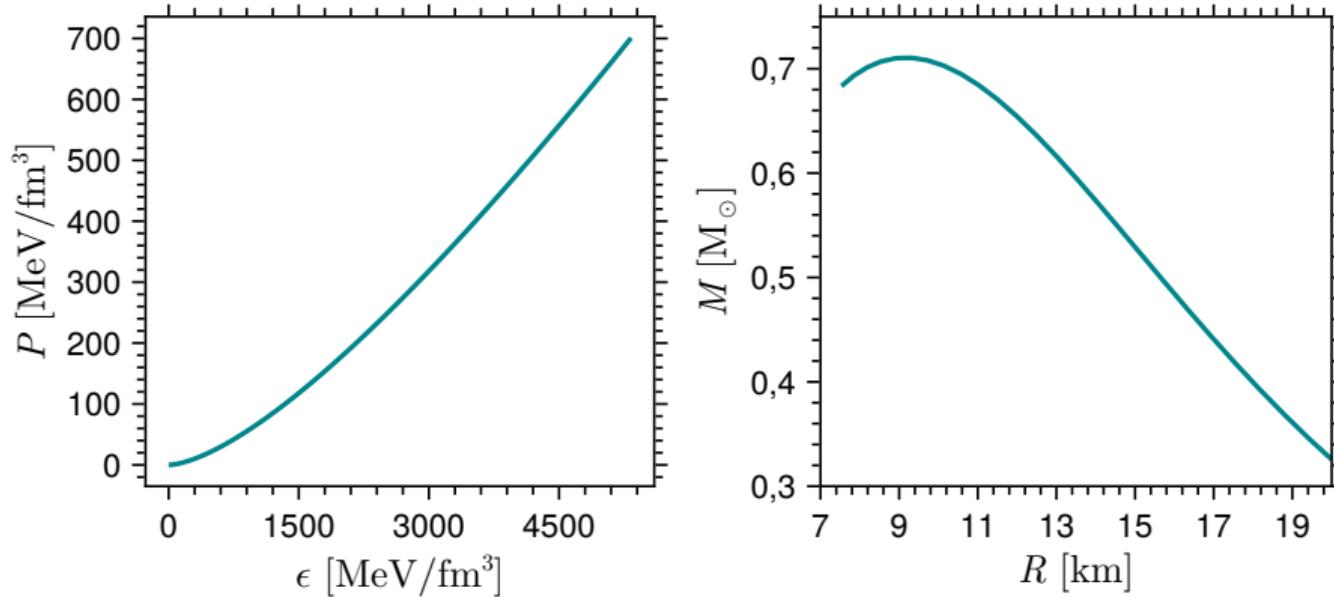


Figura: Diagrama massa-raio gerado pela equação de estado de gás de Fermi.

Parametrização da EoS

- Queremos encontrar uma forma da equação de estado que seja mais independente do modelo utilizado;

Uma forma paramétrica interessante é a que utiliza a velocidade do som definida por

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right)_S. \quad (5)$$

Dividindo o intervalo de densidade de energia em 5 segmentos uniformemente espaçados no logaritmo no intervalo $(\epsilon_0, 8\epsilon_0]$ ($\epsilon_0 = 150 \text{ MeV fm}^{-3}$) podemos obter as pressões e densidades de energia nas interfaces desses segmentos a partir da velocidade do som média no intervalo⁵.

$$p_i = p_{i-1} + c_{s,i}^2 (\epsilon_i - \epsilon_{i-1}). \quad (6)$$

⁵Y. Fujimoto et al., *JHEP*, 2021, **03**, 273.

Utilizamos uma interpolação politrópica em que, no intervalo i a pressão é dada por parâmetros K_i e Γ_i

$$p = K_i \epsilon^{\Gamma_i}. \quad (7)$$

Resumindo:

- Podemos obter o diagrama massa-raio a partir da equação de estado utilizando as equações de TOV;
- A EoS pode ser aproximada por uma forma paramétrica. Aqui utiliza-se a velocidade do som média em intervalos de densidade de energia;
- Essa forma paramétrica depende de uma equação de estado inicial (crosta), aqui é utilizada a Ska⁶;

⁶F. Gulminelli e A. R. Raduta, *Phys. Rev. C*, 2015, **92**, 055803.

■ Aprendizado de máquina;

Tendo uma forma paramétrica da equação de estado, podemos nos voltar ao problema de encontrar os parâmetros c_s^2 que melhor ajustam os dados observacionais. Focaremos em duas abordagens:

- Análise Bayesiana;
- Redes neurais;

Análise Bayesiana

Utilizamos o teorema de Bayes

$$P(\mathbf{c}_s^2, \epsilon_c | \mathbf{D}, I) \propto P(\mathbf{D} | \mathbf{c}_s^2, \epsilon_c, I) P(\mathbf{c}_s^2, \epsilon_c | I), \quad (8)$$

em que as pressões centrais das estrelas de cada dado observacional foram adicionadas para a definição da *likelihood*. Ainda, assumimos independência dos dados e *priors*

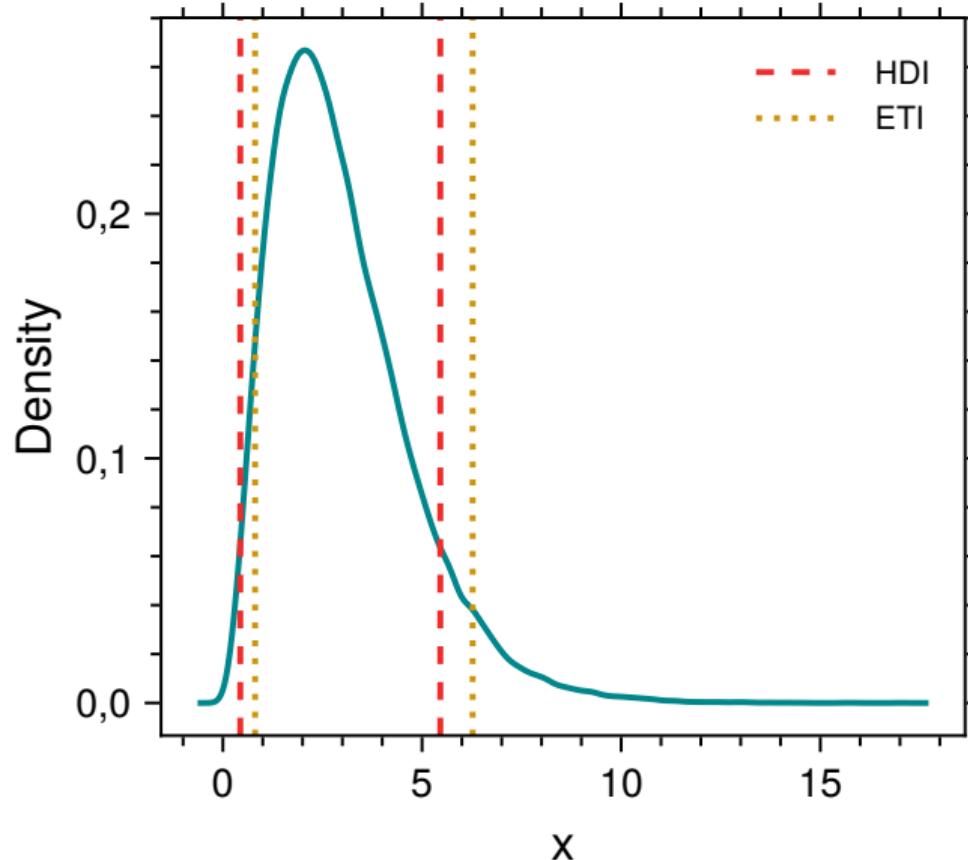
$$\begin{aligned} P(\mathbf{D} | \mathbf{c}_s^2, \epsilon_c, I) &= \prod_{k=1}^N P(D_k | \mathbf{c}_s^2, \epsilon_{c,k}, I), \\ P(\mathbf{c}_s^2, \epsilon_c | I) &= \left[\prod_{i=1}^n P(c_{s,i}^2 | I) \right] \left[\prod_{k=1}^N P(\epsilon_{c,k} | I) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Por fim, utilizamos *likelihoods* gaussianas

$$P(\mathbf{D}|\mathbf{c}_s^2, \epsilon_c, I) \propto \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right),$$
$$\chi^2 = \sum_{k=1}^N \frac{[M(\mathbf{c}_s^2, p_{c,k}) - M_k]^2}{\sigma_{M,k}^2} + \sum_{k=1}^N \frac{[R(\mathbf{c}_s^2, p_{c,k}) - R_k]^2}{\sigma_{R,k}^2}. \quad (10)$$

Os dados observacionais são ajustados por distribuições gaussianas com parâmetros $\{R_k, M_k, \sigma_{R,k}, \sigma_{M,k}\}$ e então é utilizado um *sampler* que retirará amostras da distribuição posterior $P(\mathbf{c}_s^2, \epsilon_c | \mathbf{D}, I)$.

- Intervalos de credibilidade e convenções desse trabalho;



Faz parte da análise

- Parametrização utilizada;
- Escolha dos *likelihoods*;
- *Priors*;
- Algoritmo de amostragem, *sampler*;

Redes neurais

- Teorema de aproximação universal;
- Redes neurais profundas (DNNs);

O *output* de uma unidade de uma DNN é dado por

$$a_j^l = \sigma \left(\sum_k w_{jk}^l a_k^{l-1} + b_j^l \right) = \sigma(z_j^l). \quad (11)$$

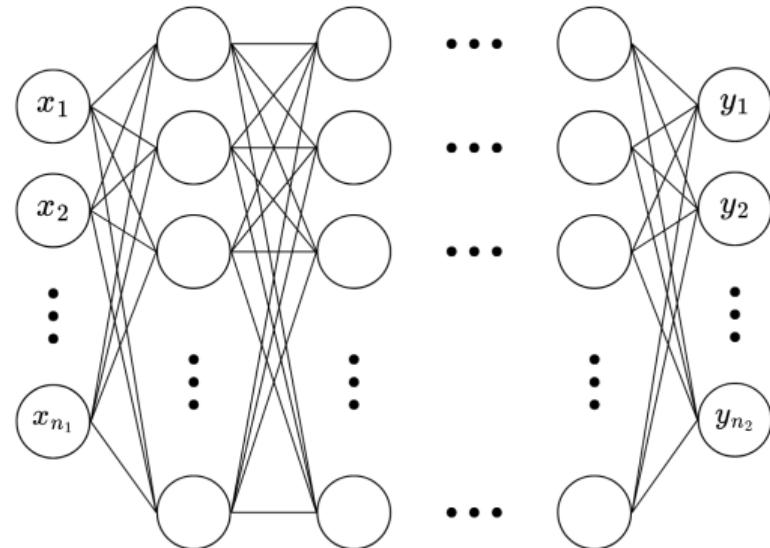


Figura: Representação de uma DNN.

- O teorema de aproximação universal não nos dá a arquitetura necessária (número de camadas, por exemplo) para aproximar uma função;
- Encontramos os parâmetros da rede utilizando um algoritmo de otimização de modo a minimizar uma função de erro;
- Para isso são necessários dados de treino que em alguns problemas podem ser gerados;

A prática geral é gerar (ou extrair) um conjunto de dados $\{\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_k\}$ e separar em duas partes: treino ($\sim 80\%$) e validação ($\sim 20\%$). Então temos a atualização dos parâmetros

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \eta \nabla_{\theta} E(\theta). \quad (12)$$

Alternativamente, isso é feito em *minibatches*

$$\theta_{i+1,k} = \theta_{i,k} - \eta \nabla_{\theta} E_k(\theta), \quad k = 1, \dots, n/M. \quad (13)$$

Todos os seguintes são ajustáveis:

- Número de camadas e unidades por camada;
- Funções de ativação;
- Tamanho do *minibatch* M ;
- Taxa de aprendizado η ;
- Função de erro $E(\theta)$;
- Algoritmo de otimização;
- Número de épocas;

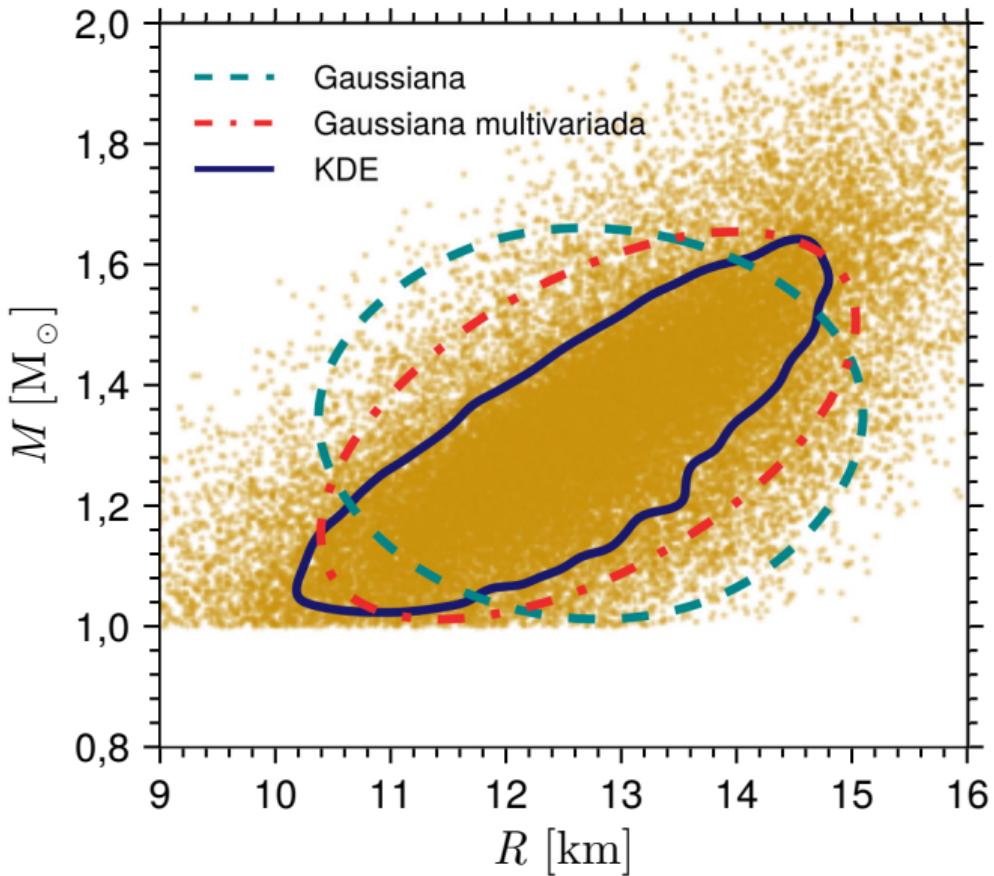
Resultados da análise Bayesiana

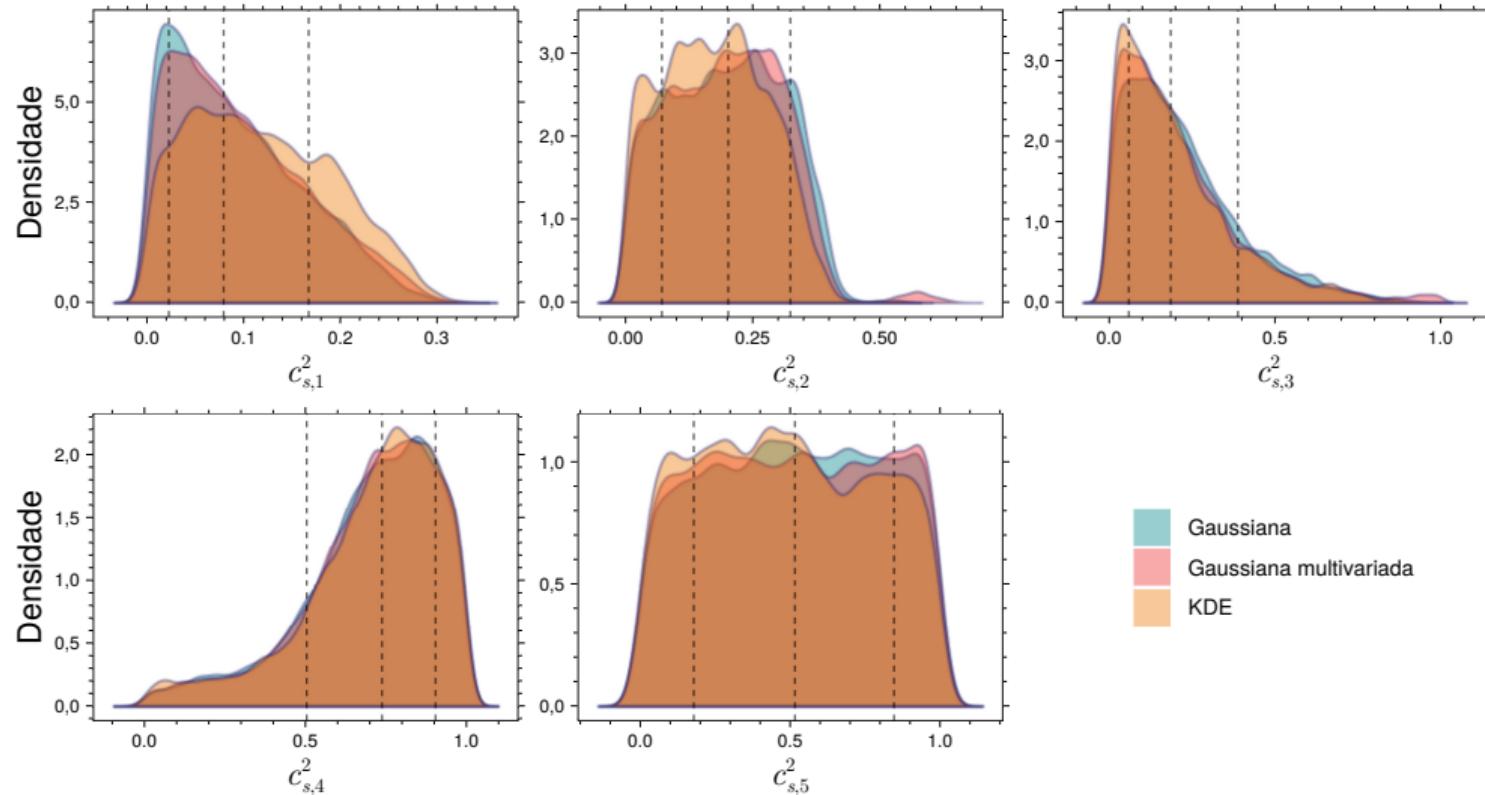
- Priors uniformes: $c_{s,i}^2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $\epsilon_{c,i} \sim \mathcal{U}(3 \text{ MeV fm}^{-3}, 1200 \text{ MeV fm}^{-3})$;

Testamos as seguintes *likelihoods*:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G &\propto \prod_i \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{(M_i - \mu_{M,i})^2}{\sigma_{M,i}^2} + \frac{(R_i - \mu_{R,i})^2}{\sigma_{R,i}^2} \right] \right), \\ \mathcal{L}_{GM} &\propto \prod_i \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_i) \right), \\ \mathcal{L}_{KDE} &\propto \sum_i K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad K(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T H^{-1} \mathbf{x} \right),\end{aligned}\tag{14}$$

onde $\mathbf{x}_i = (M_i, R_i)$ e $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_{M,i}, \mu_{R,i})$.





Resultados da rede neural

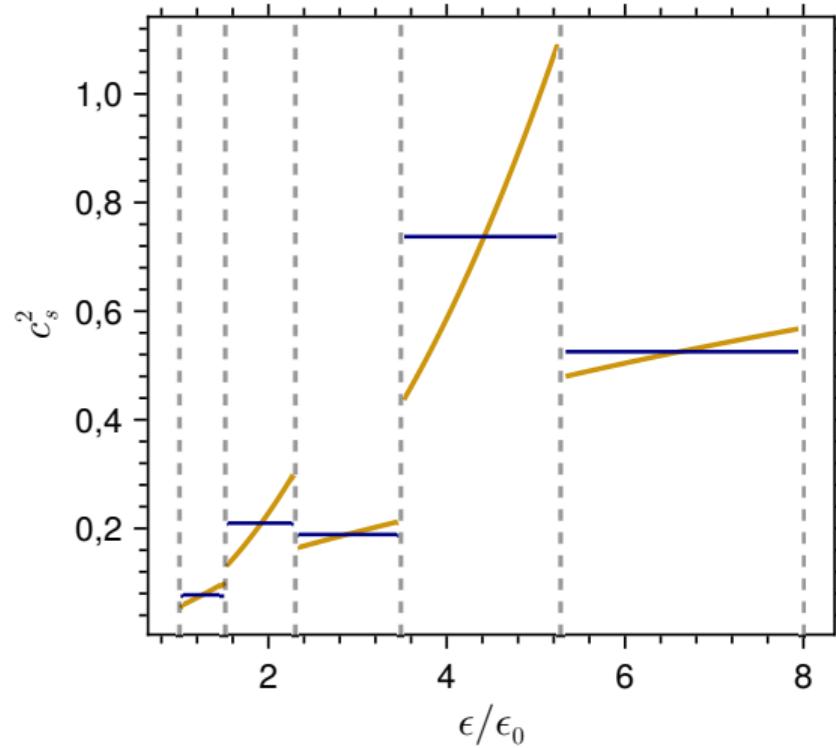
- Geração dos dados de treino e validação;
- Arquitetura da rede neural;

Camada	Número de neurônios	Função de ativação
Input	$2n_{ns}$	—
Camada oculta 1	$8n_{ns}$	ReLU
Camada oculta 2	$8n_{ns}$	ReLU
Camada oculta 3	$4n_{ns}$	ReLU
Output	$5 + n_{ns}$	sigmoid

Tabela: Arquiterura da rede neural⁷, onde $n_{ns} = 8$.

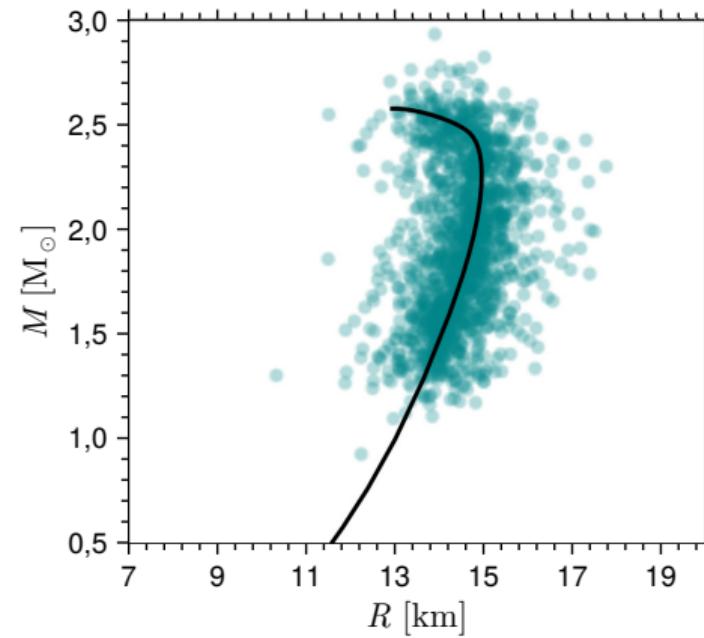
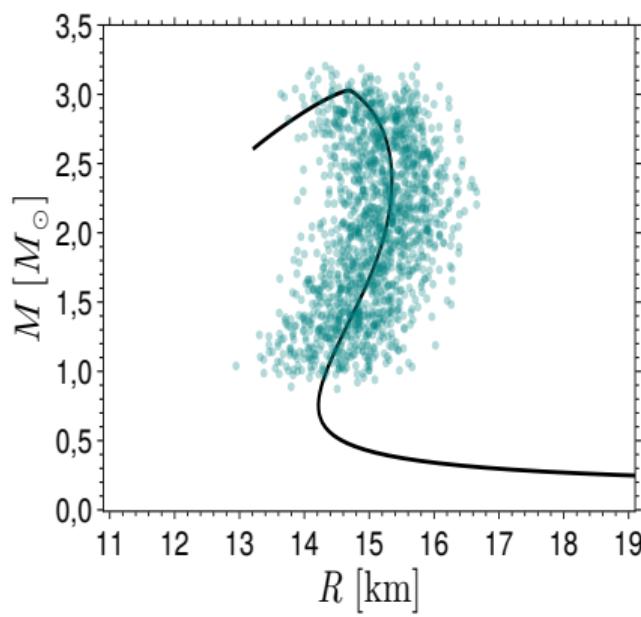
⁷Y. Fujimoto et al., *Phys. Rev. D*, 2024, **110**, 034035.

- Exemplo de $c_s^2(\epsilon)$ gerado para treino e validação;

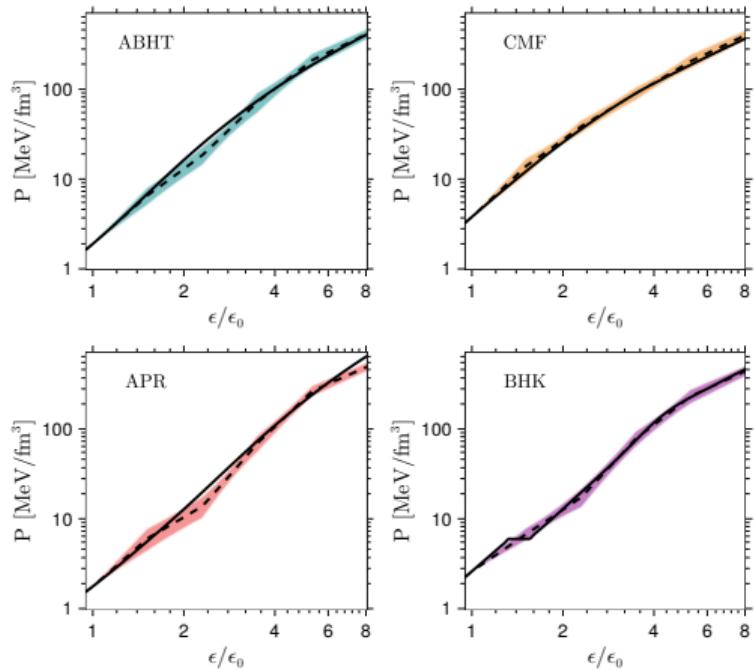


Geramos 200.000 EoS e extraímos dados de massa e raio como segue:

$$\begin{aligned} M_i &\sim \mathcal{U}(1,0 M_{\odot}, M_{\max}), \quad R_i = R(M_i), \quad n_{\text{ns}} = 0, \quad n_{\text{amostras}} = 20 \\ M_i^* &\sim \mathcal{N}(M_i, \sigma_{M,i}), \quad R_i^* \sim \mathcal{N}(R_i, \sigma_{R,i}), \quad n_{\text{gerações}} = 10 \\ \sigma_{M,i} &\sim \mathcal{U}(0, 0,2 M_{\odot}), \quad \sigma_{R,i} \sim \mathcal{U}(0, 1,2 \text{ km}) \end{aligned} \quad (15)$$



Minimizamos a função de erro msle com o otimizador Adam e taxa de aprendizado $\eta = 0,001$ e tamanho de *minibatch* de 100.000. Para testar a performance da rede neural, utilizamos equações de estado da literatura disponíveis no CompOSE⁸.



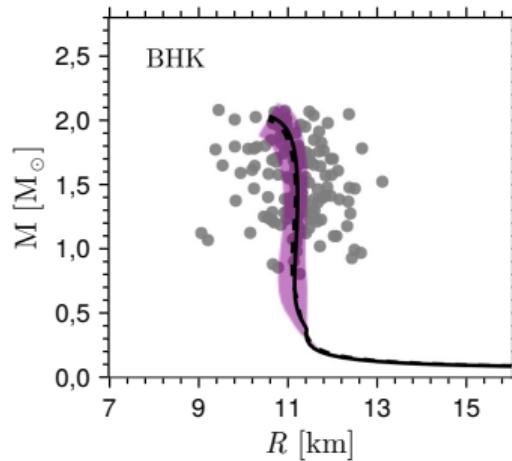
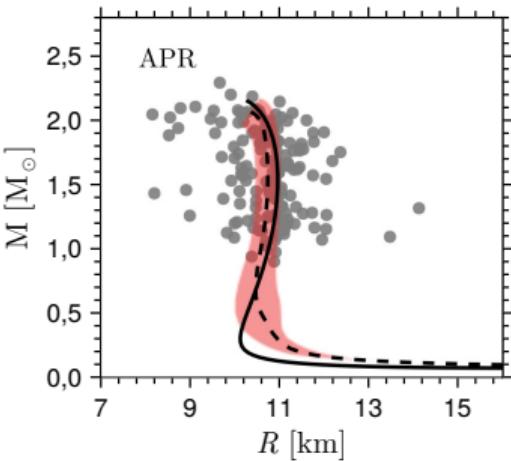
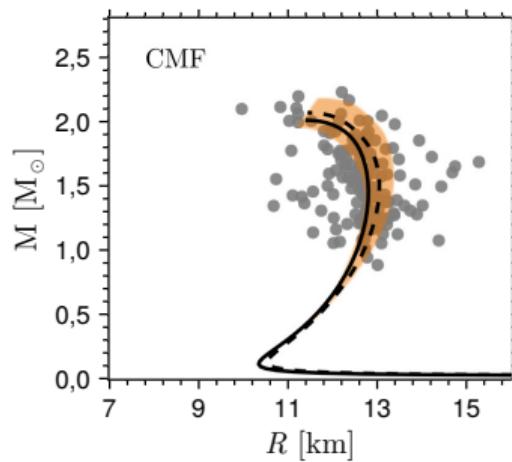
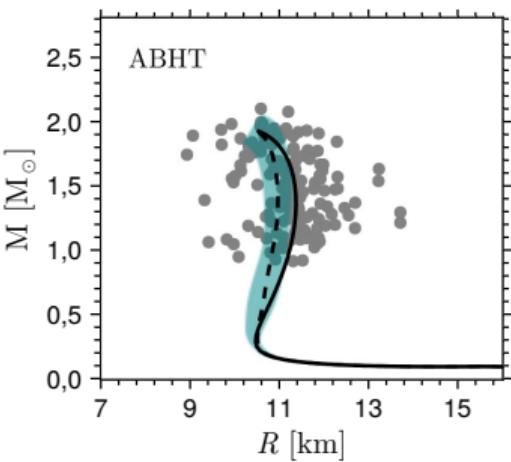
⁸ M. Oertel et al., *Rev. Mod. Phys.*, 2017, **89**, 015007

M. G. Alford et al., *Phys. Rev. C*, 2022, **106**, 055804

V. Dexheimer et al., *Phys. Rev. C*, 2021, **103**, 025808

A. Akmal et al., *Phys. Rev. C*, 1998, **58**, 1804–1828

G. Baym et al., *Reports on Progress in Physics*, 2018, **81**, 056902



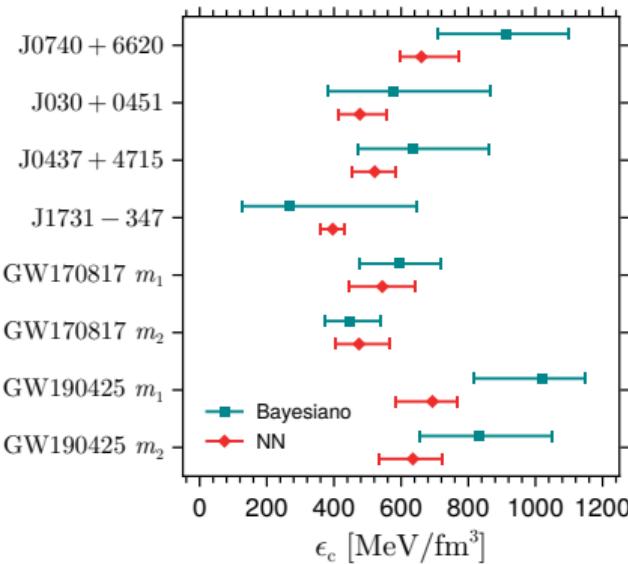
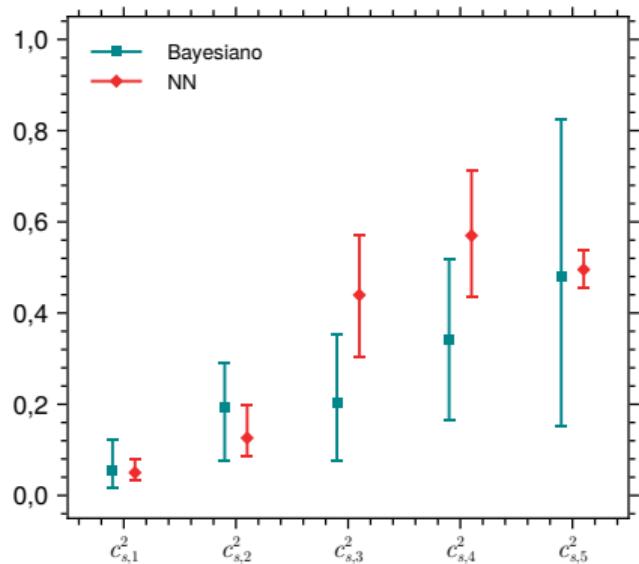
Comparação das abordagens

Dados utilizados para inferência:

$$\mu_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} (\mu_{\text{PSR}})_{8 \times 1} \\ (\mu_{\text{GW17}})_{4 \times 1} \\ (\mu_{\text{GW19}})_{4 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} (\Sigma_{\text{PSR}})_{8 \times 8} & 0 & 0 \\ 0 & (\Sigma_{\text{GW17}})_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & 0 & (\Sigma_{\text{GW19}})_{4 \times 4} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

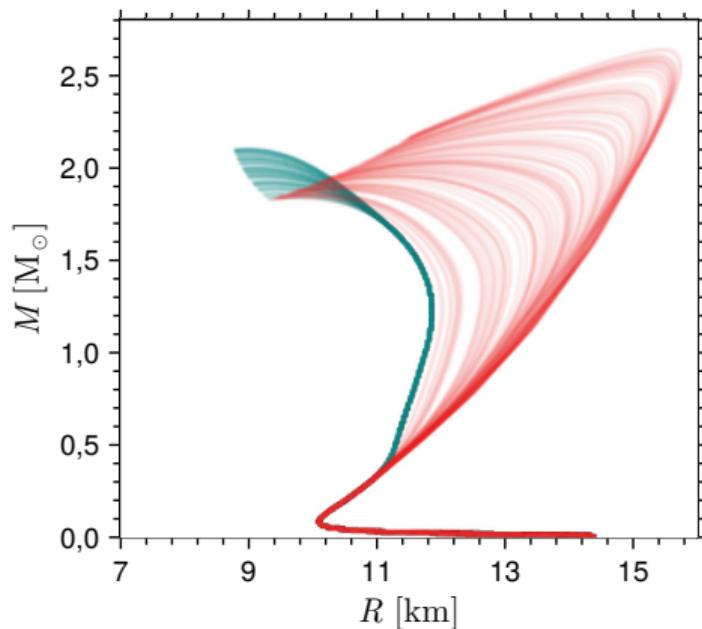
onde μ_{PSR} inclui os pares (μ_M, μ_R) de PSR e μ_{GW} inclui os pares $(\mu_{M,1}, \mu_{R,1}, \mu_{M,2}, \mu_{R,2})$ de eventos de ondas gravitacionais.

Utilizando o conjunto completo de dados de massa e raio, obtemos os seguintes intervalos de credibilidade para os parâmetros inferidos:



- Espera-se que, ao menos nessa parametrização, a incerteza na velocidade do som aumente com a densidade, pois há menos estrelas que chegam a essas densidades centrais;

Gerando equações de estado com $c_{s,1}^2$ e $c_{s,5}^2$ amostrados de uma distribuição uniforme, $c_{s,i}^2 \sim \mathcal{U}(\bar{c}_{s,i}^2 - \sigma/2, \bar{c}_{s,i}^2 + \sigma/2)$, onde $\sigma = 0, 5$.



- A rede neural consegue quantificar incertezas aleatórias, mas falha em quantificar as incertezas epistêmicas;
- Isso pode ser explicado pelo fato de que está sendo feita uma representação determinística, há apenas uma saída para cada entrada;

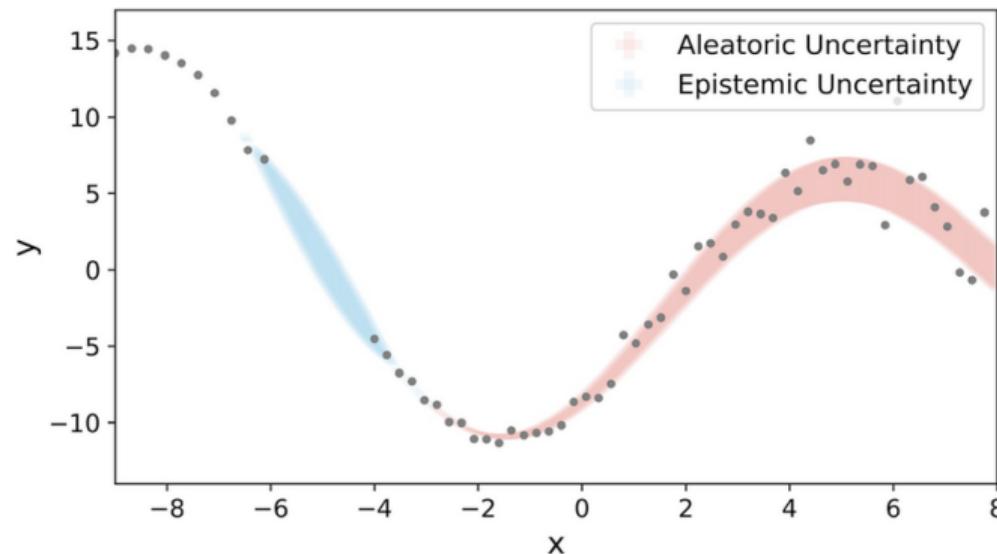
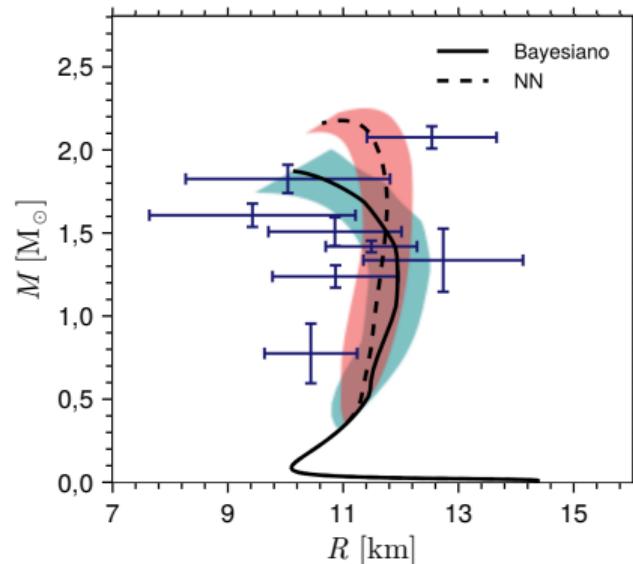
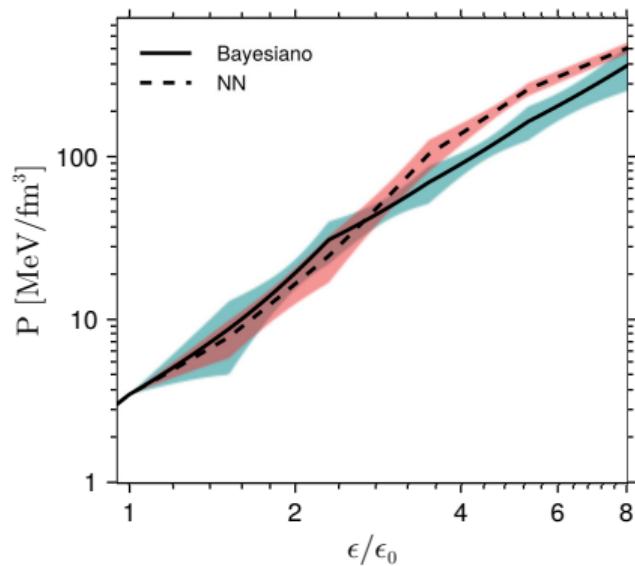


Figura: C.-I. Yang, *An-illustration-of-the-difference-between-aleatoric-and-epistemic-uncertainties*,
Acessado em 02 nov 2023, 2023

Por fim, conseguimos obter a equação de estado e diagrama massa-raio associado:



Conclusão e perspectivas

Mostramos que:

- *Likelihoods Gaussianas;*
- Possibilidade de representar a EoS via $c_{s,i}^2$;
- Diferenças na quantificação de incertezas;
- Custo computacional de ambas as abordagens;
- Resultado de um trabalho mais recente;

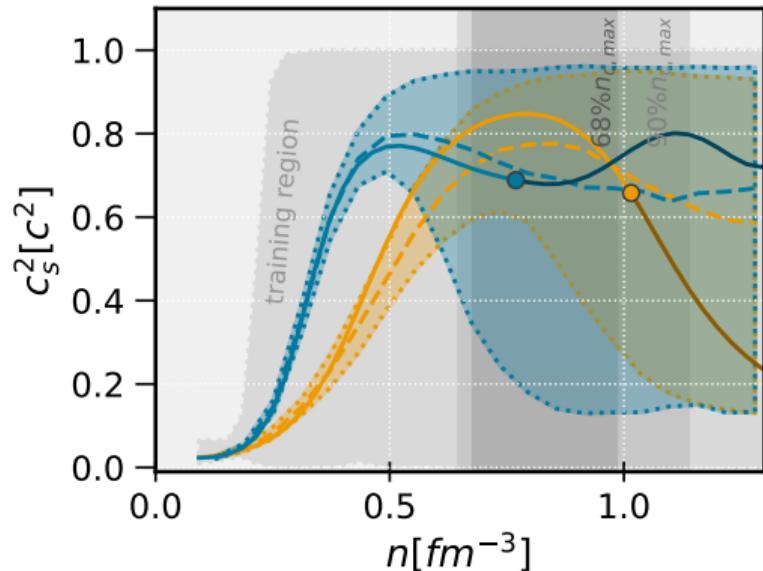


Figura: V. Carvalho et al., *Phys. Rev. D*, 2025, **112**, 083044

Agradecimentos



FAPERGS

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul



1992



INCT-FNA

INSTITUTO NACIONAL DE CIÉNCIA E TECNOLOGIA
FÍSICA NUCLEAR E APLICAÇÕES



*Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico*

Referências I

- (1) R. Kumar et al., *Living Rev. Rel.*, 2024, **27**, 3.
- (2) P. Landry, R. Essick e K. Chatzioannou, *Phys. Rev. D*, 2020, **101**, 123007.
- (3) L. Brandes, W. Weise e N. Kaiser, *Physical Review D*, 2023, **107**, DOI: [10.1103/physrevd.107.014011](https://doi.org/10.1103/physrevd.107.014011).
- (4) Y. Fujimoto, K. Fukushima, S. Kamata e K. Murase, *Phys. Rev. D*, 2024, **110**, 034035.
- (5) S. Soma, L. Wang, S. Shi, H. Stöcker e K. Zhou, *Physical Review D*, 2023, **107**, DOI: [10.1103/physrevd.107.083028](https://doi.org/10.1103/physrevd.107.083028).
- (6) R. C. Tolman, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 364–373.
- (7) J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 374–381.
- (8) I. Sagert, M. Hempel, C. Greiner e J. Schaffner-Bielich, *European Journal of Physics*, 2006, **27**, 577–610.

Referências II

- (9) Y. Fujimoto, K. Fukushima e K. Murase, *JHEP*, 2021, **03**, 273.
- (10) F. Gulminelli e A. R. Raduta, *Phys. Rev. C*, 2015, **92**, 055803.
- (11) M. Oertel, M. Hempel, T. Klähn e S. Typel, *Rev. Mod. Phys.*, 2017, **89**, 015007.
- (12) M. G. Alford, L. Brodie, A. Haber e I. Tews, *Phys. Rev. C*, 2022, **106**, 055804.
- (13) V. Dexheimer, R. O. Gomes, T. Klähn, S. Han e M. Salinas, *Phys. Rev. C*, 2021, **103**, 025808.
- (14) A. Akmal, V. R. Pandharipande e D. G. Ravenhall, *Phys. Rev. C*, 1998, **58**, 1804–1828.
- (15) G. Baym, T. Hatsuda, T. Kojo, P. D. Powell, Y. Song e T. Takatsuka, *Reports on Progress in Physics*, 2018, **81**, 056902.

Referências III

- (16) C.-I. Yang,
An-illustration-of-the-difference-between-aleatoric-and-epistemic-uncertainties,
Acessado em 02 nov 2025, 2023.
- (17) V. Carvalho, M. Ferreira, M. Bejger e C. ç. Providênciia, *Phys. Rev. D*, 2025, **112**, 083044.
- (18) N. K. Glendenning, *Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity*, Springer, 1997.
- (19) P. de Forcrand, *PoS*, 2009, **LAT2009**, ed. C. Liu e Y. Zhu, 010.
- (20) C. Gattringer e C. B. Lang, *Quantum chromodynamics on the lattice*, Springer, Berlin, 2010, vol. 788.

A função de erro utilizada na rede neural foi a `msle`, dada por

$$\mathcal{L}_{\text{NN}}(y, \hat{y}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\log(1 + \hat{y}_i) - \log(1 + y_i))^2, \quad (17)$$

se o output fosse uma distribuição teríamos algo da forma

$$\mathcal{L}_{\text{BNN}} = -\mathbb{E}_{q_\phi(\theta)} [\log(p(D|\theta))] + \text{KL}(q_\phi(\theta) \parallel p(\theta)), \quad (18)$$

e as incertezas epistêmicas seriam quantificadas, mesmo que apenas em parte.

Esse resultado ainda pode ser dito em outras palavras: como existem muitas escolhas de parâmetros, mas a NN pode escolher apenas um conjunto, a melhor escolha possível é a média. A abordagem Bayesiana evita esse problema pois ela pode de certa forma escolher todos os conjuntos possíveis, de acordo com suas probabilidades.

Massa máxima de estrelas de nêutrons

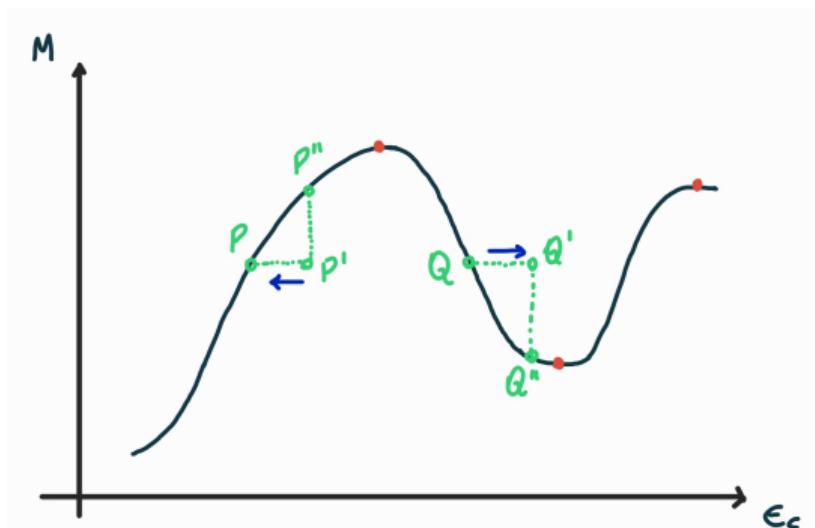


Figura: Ilustração de equilíbrio estável. Reproduzida de N. K. Glendenning, *Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity*, Springer, 1997.

Markov Chain Monte Carlo



Distribuição desejada $P(x)$ e a distribuição estacionária (processo de Markov) $\pi(x)$. Do teorema de Bayes

$$P(x) = P(x|D) = \frac{P(D|x)P(x)}{P(D)} = Kf(x). \quad (19)$$

Exigimos um processo detalhado no equilíbrio

$$P(x'|x)P(x) = P(x|x')P(x'), \quad (20)$$

que temporariamente não vai ser satisfeito com

$$P(x'|x)P(x) > P(x|x')P(x'), \quad (21)$$

estão acontecendo mais transições $x \rightarrow x'$.

Podemos separar a probabilidade de transição em duas partes

$$g(x'|x)\alpha(x'|x)P(x) > g(x|x')\alpha(x|x')P(x'), \quad (22)$$

se queremos que esse equilíbrio aconteça, podemos maximizar o lado direito escolhendo $\alpha(x|x') = 1$ (estamos deixando todos as transições $x' \rightarrow x$ acontecer). Então impomos novamente o equilíbrio

$$\alpha(x'|x) = \frac{P(x)g(x|x')}{P(x')g(x'|x)}, \quad (23)$$

Esse expressão ainda pode ser maior que 1 (caso em que acontecem mais transições $x \rightarrow x'$), finalmente chegamos à *acceptance function* de Metropolis

$$\alpha(x'|x) = \min \left(1, \frac{P(x)g(x|x')}{P(x')g(x'|x)} \right). \quad (24)$$

Algorítmo:

1. Escolha um ponto inicial x_0 ;
2. Gere um candidato x' a partir de uma distribuição $g(x'|x_i)$;
3. Calcule a taxa de aceitação $\alpha(x'|x_i)$;
4. Gere um número aleatório u uniformemente distribuído em $[0, 1]$;
5. Se $u < \alpha(x'|x_i)$ aceite o candidato e defina $x_{i+1} = x'$, caso contrário rejeite o candidato e defina $x_{i+1} = x_i$;

Problema de sinal

Em LQCD geralmente são calculados valores médios utilizando integrais de caminho da forma

$$\langle A \rangle_\rho = \frac{\int \mathcal{D}\sigma A[\sigma] \rho[\sigma]}{\int \mathcal{D}\sigma \rho[\sigma]}, \quad (25)$$

quando a parte fermiônica já é integrada analiticamente

$$\rho = \det M[\sigma] e^{-S[\sigma]}, \quad (26)$$

e temos algo do tipo

$$M = \not{D} + m + \mu \gamma^0. \quad (27)$$

O operador \not{D} satisfaz

$$\gamma_5 \not{D} \gamma_5 = \not{D}^\dagger, \quad (28)$$

enquanto que $\gamma_5 \gamma^0 \gamma_5 = -\gamma^0$. Então

$$\det(\not{D} + m + \mu \gamma^0) = \det(\not{D} + m - \mu^* \gamma^0)^\dagger, \quad (29)$$

ou seja, para termos um determinante real precisamos de μ zero ou puramente imaginário⁹.

⁹P. de Forcrand, *PoS*, 2009, **LAT2009**, ed. C. Liu e Y. Zhu, 010.

Voltando ao valor médio, precisamos ter um determinante real e positivo para podermos utilizar o método de Monte Carlo utilizado para calcular as integrais de caminho com dimensionalidade muito alta. Temos algo do tipo

$$\int \mathcal{D}\sigma e^{-S} \sim \int d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_N e^{-S}. \quad (30)$$

Podemos reescrever integrais difíceis como valores médios utilizando uma distribuição uniforme¹⁰

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b dx f(x) = \langle f \rangle_\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (31)$$

em que x_i são amostras retiradas da distribuição uniforme $\rho(x) = 1/(b-a)$.

¹⁰C. Gattringer e C. B. Lang, *Quantum chromodynamics on the lattice*, Springer, Berlin, 2010, vol. 788.

Porém, pontos que não contribuem tanto ainda são amostrados e com a mesma importância, aumentando bastante a variância do resultado. Vemos que no caso da integral de caminho o fator e^{-S} da importância diferente para diferentes configurações de campo. Podemos fazer uma amostragem com *importance sampling*, considere

$$\langle f \rangle_\rho = \frac{\int_a^b dx f(x) \rho(x)}{\int_a^b dx \rho(x)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (32)$$

em que x_i agora são amostrados de acordo com a probabilidade

$$dP(x) = \frac{\rho(x)dx}{\int_a^b dx \rho(x)}. \quad (33)$$

Em particular

$$\langle A \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A[\sigma_n], \quad (34)$$

em que as configurações de campo U_n são amostradas de acordo com a probabilidade

$$dP[\sigma] = \frac{e^{-S[\sigma]} \mathcal{D}\sigma}{\int \mathcal{D}\sigma e^{-S[\sigma]}}. \quad (35)$$

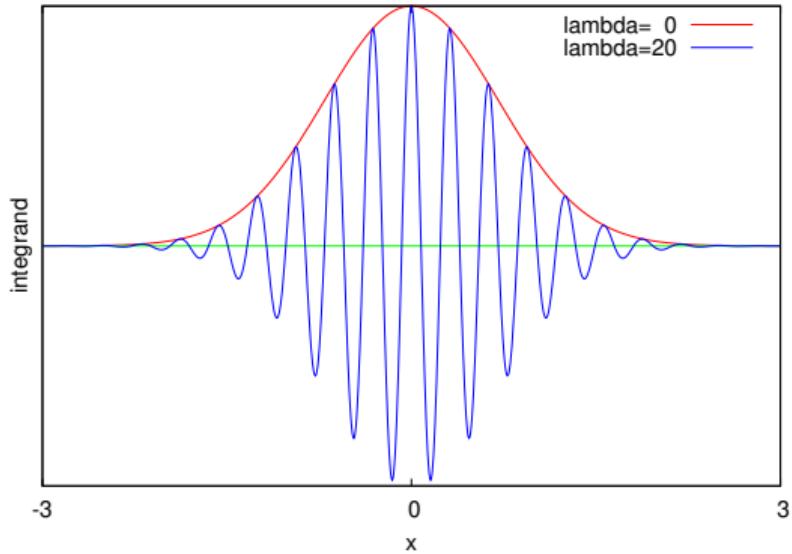


Figura: Integração de uma função oscilatória $f(x) = \exp(-x^2 + i\lambda x)$. Imagem de P. de Forcrand, PoS, 2009, LAT2009, ed. C. Liu e Y. Zhu, 010