

Estimação de parâmetros Bayesiana

André G. da Silva¹

¹Departamento de Física,
Universidade Federal de Santa Maria

Junho de 2025

Conteúdos

Introdução

Teorema de Bayes

Regras de probabilidade¹:

$$\text{prob}(X|I) + \text{prob}(\bar{X}|I) = 1, \quad (1)$$

$$\text{prob}(X, Y|I) = \text{prob}(X|Y, I) \text{prob}(Y|I). \quad (2)$$

¹D. Sivia e J. Skilling. *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. Oxford science publications. OUP Oxford, 2006. ISBN: 9780198568322.

Como entender probabilidades condicionais?

Imagine, por exemplo, que você tem uma com 3 bolas vermelhas e 4 azuis. Você retira uma bola e, sem ver qual foi a primeira a ser retirada, retira outra. Sabendo que a segunda bola é vermelha, qual é a probabilidade de que a primeira tenha sido azul?

- No caso limite onde temos uma bola vermelha e uma azul, a resposta é 1.
- Podemos utilizar (??) para calcular a probabilidade de que a primeira bola seja azul dado que a segunda é vermelha:

$$\text{prob}(A_1|V_2) = \frac{12/42}{18/42} = \frac{2}{3}. \quad (3)$$

- ***Não se trata de uma ligação causal!!***

Podemos então encontrar o teorema de Bayes quando reconhecemos que $\text{prob}(X, Y|I) = \text{prob}(Y, X|I)$:

$$\begin{aligned}\text{prob}(X|Y, I)\text{prob}(Y|I) &= \text{prob}(Y|X, I)\text{prob}(X|I), \\ \text{prob}(X|Y, I) &= \frac{\text{prob}(Y|X, I)\text{prob}(X|I)}{\text{prob}(Y|I)}.\end{aligned}\tag{4}$$

Caso contínuo

No caso contínuo, o teorema de Bayes segue o mesmo, apenas temos a normalização e marginalização da forma:

$$\begin{aligned}\int \text{prob}(Y|I)dY &= 1, \\ \int \text{prob}(Y, X|I)dX &= \text{prob}(Y|I).\end{aligned}\tag{5}$$

Estimação de parâmetros

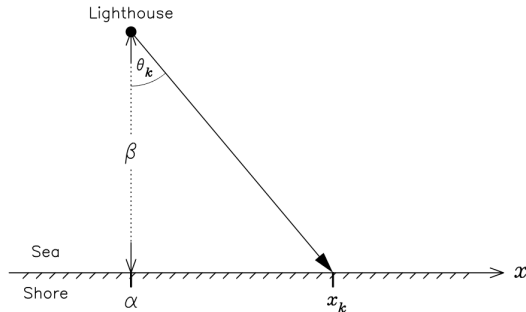


Fig. 2.7 A schematic illustration of the geometry of the lighthouse problem.

Figura: Esquemática de um problema com dois parâmetros: α e β^2 .

²Ibid.

- Para o caso analítico, vamos focar em apenas um dos parâmetros: a posição do farol na costa, α , assumindo que sabemos a distância dele da costa, β .

Podemos definir o ângulo θ com

$$\beta \tan(\theta_k) = x_k - \alpha, \quad (6)$$

Então definimos uma distribuição uniforme em θ :

$$\text{prob}(\theta|\alpha, \beta, I) = \frac{1}{\pi} \quad (7)$$

Podemos obter uma distribuição e x :

$$\text{prob}(x_k|\alpha, \beta, I) = \frac{\beta}{\pi [\beta^2 + (x_k - \alpha)^2]} \quad (8)$$

É uma distribuição de Cauchy (ou Lorentz(iana) ou de Breit-Wigner).

Utilizamos o teorema de Bayes:

$$\text{prob}(\alpha|x_k, \beta, I) \propto \text{prob}(x_k|\alpha, \beta, I)\text{prob}(\alpha|\beta, I) \quad (9)$$

Com a distribuição inicial (prior)

$$\text{prob}(\alpha|\beta, I) \sim \mathcal{U}(\alpha_{\min}, \alpha_{\max}), \quad (10)$$

podemos atualizar nossa confiança da posição do farol ao longo da costa

$$\text{prob}(x_k|\alpha, \beta, I) = \prod_{k=1}^N \text{prob}(x_k|\alpha, \beta, I) \quad (11)$$

então obter a melhor estimativa da posição do farol α_0 (segundo uma estimação de máximo a posteriori):

$$2 \sum_{k=1}^N \frac{x_k - \alpha_0}{\beta^2 + (x_k - \alpha_0)^2} = 0. \quad (12)$$

(13)

Referências

- [1] D. Sivia e J. Skilling. *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. Oxford science publications. OUP Oxford, 2006. ISBN: 9780198568322.