Estimação de parâmetros Bayesiana

André G. da Silva[1]
[1]Departamento de Física,
Universidade Federal de Santa Maria

Junho de 2025

Conteúdos

Introdução

Introdução

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Regras de probabilidade[1]:

$$\text{prob}(X|I) + \text{prob}(\bar{X}|I) = 1, \tag{1}$$

$$\text{prob}(X, Y|I) = \text{prob}(X|Y, I)\,\text{prob}(Y|I). \tag{2}$$

[1] D. Sivia e J. Skilling. *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. Oxford science publications. OUP Oxford, 2006. ISBN: 9780198568322.

Como entender probabilidades condicionais?

Imagine, por exemplo, que você tem uma com 3 bolas vermelhas e 4 azuis. Você retira uma bola e, sem ver qual foi a primeira a ser retirada, retira outra. Sabendo que a segunda bola é vermelha, qual é a probabilidade de que a primeira tenha sido azul?

- No caso limite onde temos uma bola vermelha e uma azul, a resposta é 1.
- Podemos utilizar (2) para calcular a probabilidade de que a primeira bola seja azul dado que a segunda é vermelha:

$$\text{prob}(A_1|V_2) = \frac{12/42}{18/42} = \frac{2}{3}. \tag{3}$$

- ***Não se trata de uma ligação causal!!***

Podemos então encontrar o teorema de Bayes quando reconhecemos que $\text{prob}(X, Y|I) = \text{prob}(Y, X|I)$:

$$
\begin{aligned}
\text{prob}(X|Y, I)\text{prob}(Y|I) &= \text{prob}(Y|X, I)\text{prob}(X|I), \\
\text{prob}(X|Y, I) &= \frac{\text{prob}(Y|X, I)\text{prob}(X|I)}{\text{prob}(Y|I)}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Caso contínuo

No caso contínuo, o teorema de Bayes segue o mesmo, apenas temos a normalização e marginalização da forma:

$$
\begin{aligned}
\int \mathsf{prob}(Y|I)dY = 1, \\
\int \mathsf{prob}(Y, X|I)dX = \mathsf{prob}(Y|I).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Estimação de parâmetros

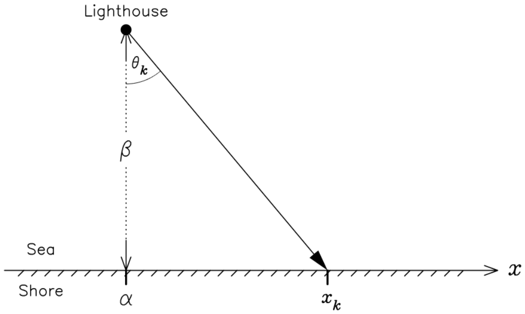

Fig. 2.7 A schematic illustration of the geometry of the lighthouse problem.

Figura: Esquemática de um problema com dois parâmetros: α e β[2].

[2]Sivia e Skilling, *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*.

- Para o caso analítico, vamos focar em apenas um dos parâmetros: a posição do farol na costa, α, assumindo que sabemos a distância dele da costa, β.

Podemos definir o ângulo θ com

$$\beta \tan(\theta_k) = x_k - \alpha, \tag{6}$$

Então definimos uma distribuição uniforme em θ:

$$\mathrm{prob}(\theta|\alpha, \beta, I) = \frac{1}{\pi} \tag{7}$$

Podemos obter uma distribuição e x:

$$\mathrm{prob}(x_k|\alpha, \beta, I) = \frac{\beta}{\pi\left[\beta^2 + (x_k - \alpha)^2\right]} \tag{8}$$

É uma distribuição de Cauchy (ou Lorentz(iana) ou de Breit-Wigner).

Utilizamos o teorema de Bayes:

$$\text{prob}(\alpha|x_k, \beta, I) \propto \text{prob}(x_k|\alpha, \beta, I)\text{prob}(\alpha|\beta, I) \tag{9}$$

Com a distribuição inicial (prior)

$$\text{prob}(\alpha|\beta, I) \sim \mathcal{U}(\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}}), \tag{10}$$

podemos atualizar nossa confiança da posição do farol ao longo da costa

$$\text{prob}(x_k|\alpha, \beta, I) = \prod_{k=1}^{N} \text{prob}(x_k|\alpha, \beta, I) \tag{11}$$

então obter a melhor estimativa da posição do farol α_0 (segundo uma estimação de máximo a posteriori):

$$2\sum_{k=1}^{N} \frac{x_k - \alpha_0}{\beta^2 + (x_k - \alpha_0)^2} = 0. \tag{12}$$

Referências

[1] D. Sivia e J. Skilling. *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. Oxford science publications. OUP Oxford, 2006. ISBN: 9780198568322.