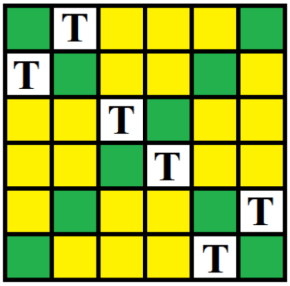
1 OMpD 2022

Problema 1. Considere um tabuleiro quadriculado 6×6, formado de 36 casinhas unitárias. Desejamos colocar 6 torres neste tabuleiro, uma torre em cada casinha, de modo que não haja duas torres numa mesma linha, nem duas torres numa mesma coluna. Note que, uma vez colocadas as torres dessa maneira, temos que, para toda casinha onde não foi colocada uma torre, há uma torre na mesma linha que ela e uma torre na mesma coluna que ela. Diremos que tais torres são alinhadas com essa casinha.

Para cada uma dessas 30 casas sem torres, pinte-a de verde se as duas torres alinhadas com essa mesma casinha estão a uma mesma distância dela, e pinte-a de amarelo caso contrário. Por exemplo, ao colocarmos as 6 torres (T) como abaixo, temos:



(a) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas verdes?

(b) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas amarelas?

(c) É possível colocarmos as torres de modo que haja 15 casas verdes e 15 amarelas?

Problema 2. Seja $ABCD$ um retângulo. O ponto E está sobre o lado $\overline{AB}$ e o ponto F está sobre o lado $\overline{AD}$, de modo que $\angle FEC = \angle CEB$ e $\angle DFC = \angle CFE$.

Determine a medida do ângulo $\angle FCE$ e da razão AD/AB.

Problema 3. Seja N um inteiro positivo. Inicialmente, um número inteiro positivo A está escrito no quadro. A cada passo, podemos realizar uma das duas operações seguintes com o número escrito no quadro:

(i) Somar N ao número escrito no quadro e trocar tal número pela soma obtida;

(ii) Se o número no quadro for maior do que 1 e tiver pelo menos um algarismo 1, então podemos remover o algarismo 1 desse número, e trocar o número escrito inicialmente por este (com remoção de possíveis zeros à esquerda).

Por exemplo, se $N = 63$ e $A = 25$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$25 \to 88 \to 151 \to 51 \to 5$$

E se $N = 143$ e $A = 2$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$2 \to 145 \to 288 \to 431 \to 574 \to 717 \to 860 \to 1003 \to 3$$

Para quais valores de N sempre é possível, não importando o valor inicial de A na lousa, obter o número 1 na lousa, mediante um número finito de operações?

Problema 4. Dizemos que uma sêxtupla de números reais positivos $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ é *phika* se $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

(a) Prove que existe uma sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ tal que:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) > 1 - \frac{1}{20222022}.$$

(b) Prove que para toda sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, temos:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) < 1.$$

2 OMpD 2023

Problema 1. Alguns amigos internautas formaram 6 equipes de futebol, e decidiram realizar um torneio onde cada equipe enfrenta outra exatamente uma vez em uma partida. Em cada partida, quem vence ganha 3 pontos, quem perde não ganha ponto, e se as duas equipes empatarem, cada uma leva 1 ponto.

Ao final do torneio, verificou-se que as pontuações das equipes foram $10, 9, 6, 6, 4$ e 2 pontos. A respeito deste torneio, responda os seguintes itens, justificando sua resposta em cada um deles.

(a) Quantas partidas terminaram empatadas no torneio?

(b) Determine, para cada um das 6 equipes, o número de vitórias, empates e derrotas.

(c) Se considermos apenas as partidas disputadas entre a equipe que fez 9 pontos contra as duas equipes que fizeram 6 pontos, e a disputada entre as duas equipes que fizeram 6 pontos, explique porque dentre essas três partidas, há pelo menos 2 empates.

Problema 2. Encontre todos os pares a, b de números reais tais que o número $\lfloor an + b \rfloor$ é um quadrado perfeito, para todo inteiro positivo n.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 1 + \frac{5}{2} \rfloor = 1$ e $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$.

Problema 3. Para cada inteiro positivo x, seja $\varphi(x)$ o número de inteiros $1 \leq k \leq x$ que não possuem fatores primos em comum com x. Por exemplo, $\varphi(12) = 4$, pois $1, 5, 7$ e 11 são todos os números naturais menores ou iguais a 12 que não possuem fatores primos em comum com 12. Determine todos os inteiros positivos n tais que existem inteiros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de modo que o conjunto:

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)\}$$

possui exatamente $2n$ inteiros consecutivos (em alguma ordem).

Problema 4. Seja ABC um triângulo acutângulo escaleno, e seja O seu circuncentro. Seja K um ponto sobre o lado BC. A reta OK intersecta o circuncírculo do triângulo BOC novamente em M. Seja L o simétrico de K relativo a AC. Demonstre que os circuncírculos dos triângulos LCM e ABC são tangentes se, e somente se, $AK \perp BC$.

3 OMpD 2024

Problema 1. Sejam O, M, P, D algarismos distintos entre si, e distintos de zero, tais que $O < M < P < D$ e a seguinte equação é verdadeira:

$$OMPD \times (OM - D) = MDDMP - OM.$$

(a) Usando estimativas, explique por que é impossível que o valor de O seja maior do que ou igual a 3.

(b) Explique por que O não pode ser igual a 1.

(c) É possível termos M maior do que ou igual a 5? Justifique.

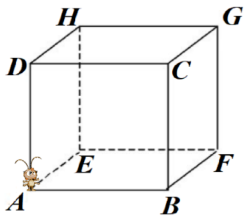
(d) Determine os valores de M, P e D.

Observação: $X_1X_2 \ldots X_n$ é o número obtido da justaposição dos algarismos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, nessa ordem. Por exemplo, se $n = 4, X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 2$ e $X_4 = 2$, então $X_1X_2 \ldots X_n = 2024$.

Problema 2. Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo, M, N e P os pontos médios das diagonais AC e BD e do lado AD, respectivamente. Suponha também que $\angle ABC + \angle DCB = 90°$ e que $AB = 6, CD = 8$. Calcule o perímetro do triângulo MNP.

Problema 3. Uma barata tonta está inicialmente no vértice A de um cubão $ABCDEFGH$ de aresta medindo 1 metro, conforme a figura ao lado.

A cada segundo, a barata anda 1 metro, sempre escolhendo ir para um dos três vértices adjacentes ao vértice que ela está. Por exemplo, após 1 segundo a barata pode parar no vértice B, D ou E.



(a) De quantas maneiras a barata pode parar no vértice G após 3 segundos?

(b) É possível a barata parar no vértice A após exatamente 2023 segundos?

(c) De quantas maneiras a barata pode parar em A após exatamente 2024 segundos?

Observação: uma maneira de a barata parar em um vértice após uma quantidade de segundos difere da outra maneira se, em algum segundo, a barata estaria em vértices distintos na trajetória. Dessa forma, há 2 maneiras de a barata parar em C após 2 segundos: uma delas passa por A, B, C e a outra passa por A, D, C.

Problema 4. Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos com as seguintes propriedades:

- a_0 é um inteiro positivo dado;
- Para cada $n \geq 1$ inteiro, a_n é o menor inteiro maior do que a_{n-1} de tal modo que $a_n + a_{n-1}$ é um quadrado perfeito.

Por exemplo, se $a_0 = 3$, então $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 15$ e assim por diante.

(a) Seja T o conjunto dos números da forma $a_k - a_\ell$, com $k \geq \ell \geq 0$ inteiros. Demonstre que, independentemente do valor de a_0, o número de inteiros positivos que não estão em T é finito.

(b) Calcule, em função de a_0, a quantidade de inteiros positivos que não estão em T.

4 OBM 2017

Problema 1. Os pontos X, Y e Z estão marcados nos lados AB, BC e AC do triângulo ABC, respectivamente. Os pontos A', B' e C' estão nos lados XZ, XY e YZ do triângulo XYZ, respectivamente, de modo que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$$

e $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $ACC'A'$ são trapézios em que os lados do triângulo ABC são bases.

(a) Determine a razão entre a área do trapézio $ABB'A'$ e a área do triângulo $A'B'X$.

(b) Determine a razão entre a área do triângulo XYZ e a área do triângulo ABC.

Problema 2. Sabemos que o número real C e números reais não-nulos x, y e z, dois a dois distintos, satisfazem:

$$x + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = y + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = z + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C.$$

(a) Mostre que $C = -1$;

(b) Exiba pelo menos uma solução (x, y, z) para a equação dada.

Problema 3. Seja $n > 1$ um inteiro e considere um tabuleiro $n \times n$, em que algumas das n^2 casas foram pintadas de preto, e as restantes foram pintadas de branco. Prove que é possível escolhermos uma das n^2 casas do tabuleiro, de modo que, ao removermos completamente a linha e a coluna que a contém, haja um número diferente de casas pretas e de casas brancas, dentre as $(n-1)^2$ casas restantes.

Problema 4. Na Terra dos Impas, somente os algarismos ímpares são utilizados para contar e escrever números. Assim, em vez dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$ os Impas têm os números correspondentes $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, \ldots$ (note que os números dos Impas têm somente algarismos ímpares). Por exemplo, se uma criança tem 11 anos, os Impas diriam que ela tem 31 anos.

(a) Como os Impas escrevem o nosso número 20?

(b) Numa escola desse lugar, a professora escreveu no quadro-negro a continha de multiplicar abaixo. Se você fosse um aluno Impa, o que escreveria como resultado?

$$13 \times 5$$

(c) Escreva, na linguagem dos Impas, o número que na nossa representação decimal é escrito como 2017.

Problema 5. No triângulo ABC, com $AB \neq AC$, seja I seu incentro. Os pontos P e Q são definidos como os pontos onde o circuncírculo do triângulo BCI intersecta novamente as retas AB e AC, respectivamente. Seja D o ponto de interseção de AI e BC.

(a) Prove que P, Q e D são colineares;

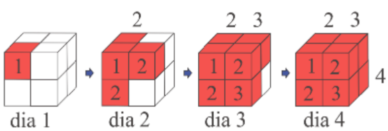
(b) Sendo T, diferente de P, o ponto de encontro dos circuncírculos dos triângulos PDB e QDC, prove que T está no circuncírculo do triângulo ABC.

Observação: O Incentro de um triângulo é o ponto de interseção de suas bissetrizes internas e o Circuncírculo de um triângulo é a circunferência que passa pelos seus três vértices.

Problema 6. Demonstre que, para todo n inteiro positivo, existem inteiros positivos a e b, sem fatores primos em comum, de modo que $a^2 + 2017b^2$ possui mais de n fatores primos distintos.

5 OBM 2018

Problema 1. Um cubo $n \times n \times n$ é formado por n^3 cubinhos unitários e tem, inicialmente, um cubinho vermelho em somente um de seus vértices. Numeramos esse cubinho com o número 1. A cada dia a partir do dia 2, os cubinhos vizinhos (cubinhos com faces comuns) a cubinhos vermelhos também ficam vermelhos e são numerados com o número do dia.



Por exemplo, o cubo $2 \times 2 \times 2$ acima, no primeiro dia, tem um cubinho vermelho com o número 1, no segundo dia tem quatro cubinhos vermelhos, um com o número 1 e três com o número 2, no terceiro dia tem sete, um cubinho com o número 1, três com o número 2 e três com o número 3, e somente no quarto dia terá todos os seus cubinhos na cor vermelha. Para representar a numeração final podemos usar n tabuleiros representando cada uma n das camadas do cubo vistas de frente. Por exemplo, para o cubo $2 \times 2 \times 2$ acima temos as seguintes camadas:

1	2
2	3

2	3
3	4

(a) Na figura a seguir temos as quatro camadas do cubo $4 \times 4 \times 4$ e os cubos numerados com 1 e 2. Copie esses 4 tabuleiros no caderno de respostas e preencha os números de cada cubinho.

1	2		
2			

2			

(b) Em um cubo $10 \times 10 \times 10$, quantos cubinhos são numerados com 7? E quantos são numerados com 13?

(c) Em um cubo $2018 \times 2018 \times 2018$, qual o número que aparece mais vezes na numeração dos cubinhos? (Se houver mais de um número que aparece o maior número de vezes liste todos.)

Problema 2. Uma quádrupla (A, B, C, D) é dita dobarulho quando A, B e C são algarismos não nulos e D é um inteiro positivo tais que:

1. $A \leq 8$.
2. $D > 1$.
3. D divide os seis números de três algarismos ABC, BCA, CAB, $(A+1)CB$, $CB(A+1)$ e $B(A+1)C$.

Determine todas as quádruplas dobarulho.

Observação: Estamos usando uma barra para distinguir a representação decimal do número de três algarismos ABC do produto $A \cdot B \cdot C$. Por exemplo, se $ABC = 126$, então $A = 1$, $B = 2$ e $C = 6$.

Problema 3. Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e ortocentro H. A circunferência de centro X_A passa pelos pontos A e H e tangencia o circuncírculo do triângulo ABC. Defina de maneira análoga os pontos X_B e X_C. Sejam O_A, O_B e O_C os simétricos de O em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que as retas O_AX_A, O_BX_B e O_CX_C são concorrentes.

Problema 4.

(a) Num triângulo XYZ, o incírculo tangencia os lados XY e XZ nos pontos T e W, respectivamente. Prove que

$$XT = XW = \frac{XY + XZ - YZ}{2}.$$

Seja ABC um triângulo e D o pé da altura relativa ao lado A. Sejam I e J os incentros dos triângulos ABD e ACD, respectivamente. Os incírculos de ABD e ACD tangenciam AD nos pontos M e N, respectivamente. Seja P o ponto de tangência do incírculo inscrito de ABC com o lado AB. O círculo de centro A e raio AP intersecta a altura AD em K.

(b) Mostre que os triângulos IMK e KNJ são congruentes.

(c) Mostre que o quadrilátero $IDJK$ é inscritível.

Problema 5. Numa lousa estão escritos inicialmente os números $1, 2, \ldots, 10$. Para quaisquer dois números a e b na lousa chamamos de $S_{a,b}$ a soma de todos os números na lousa com exceção de a e b. Uma operação permitida é escolher dois números a e b na lousa, apagá-los e escrever o número $a + b + \frac{ab}{S_{a,b}}$. Após realizar essa operação algumas vezes restam na lousa apenas dois números x e y, com $x \geq y$.

(a) Quantas operações foram realizadas?

(b) Determine o maior valor possível para x.

Problema 6. Para todo inteiro positivo n definimos $s(n)$ como a soma dos dígitos de n. Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos para os quais

$$\frac{s(an + b) - s(n)}{}$$

assume um número finito de valores ao variar n nos inteiros positivos.

6 OBM 2019

Problema 1. Um número de oito dígitos é dito robusto se cumprir ambas condições a seguir:

(i) Nenhum dos seus algarismos é 0.

(ii) A diferença entre dois algarismos consecutivos é 4 ou 5.

Responda às perguntas a seguir:

(a) Quantos são os números robustos?

(b) Um número robusto é dito super-robusto se todos os seus algarismos são distintos. Calcule a soma de todos os números super-robustos.

Problema 2. Sejam a, b e k inteiros positivos com $k > 1$ tais que

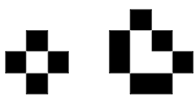
$$\text{mmc}(a, b) + \text{mdc}(a, b) = k(a + b).$$

Prove que $a + b \geq 4k$.

Problema 3. Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito em um círculo Γ de centro O. Seja D o pé da altura relativa ao vértice A. Sejam E e F pontos sobre Γ tais que $AE = AD = AF$. Sejam P e Q os pontos de interseção da reta EF com os lados AB e AC, respectivamente. Seja X o segundo ponto de interseção de Γ com o círculo circunscrito ao triângulo APQ. Mostre que as retas XD e AO encontram-se em um ponto que está sobre Γ.

Problema 4. Seja ABC um triângulo acutângulo e D um ponto qualquer sobre o lado BC. Seja E o simétrico de D em relação a AC e seja F o simétrico de D em relação a AB. A reta ED intersecta a reta AB em G, enquanto a reta FD intersecta a reta AC em H. Prove que os pontos A, E, F, G e H estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 5. Na figura abaixo, um quadradinho branco é cercado por quatro quadradinhos pretos e três quadradinhos brancos são cercados por sete quadradinhos pretos.



Qual o número máximo de quadradinhos brancos que podem ser cercados por n quadradinhos pretos?

Problema 6. No plano cartesiano, todos os pontos com ambas coordenadas inteiras são pintados de azul. Dois pontos azuis são ditos mutuamente visíveis se o segmento de reta que os conecta não possui outros pontos azuis. Prove que existe um conjunto de 2019 pontos azuis que são mutuamente visíveis dois a dois.

7 OBM 2020

Problema 1. Seja ABC um triângulo acutângulo, e D um ponto sobre BC tal que AD é perpendicular a BC. A bissetriz do ângulo $\angle DAC$ intesecta o segmento DC em E. Seja F o ponto sobre a reta AE tal que BF é perpendicular a AE. Se $\angle BAE = 45°$, calcule a medida do ângulo $\angle BFC$.

Problema 2. Em uma lousa encontra-se o seguinte texto:

A equação $x^2 - 824x + \_\_\_143 = 0$ possui duas soluções inteiras.

Onde $\_\_\_$ representa alguma quantidade de algarismos de um número que está borrada na lousa. Quais são as possíveis equações originalmente na lousa?

Problema 3. Consideremos uma sequência infinita $x_1, x_2, \ldots$ de números inteiros positivos tais que, para todo inteiro $n \geq 1$:

- Se x_n é par, então $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$;
- Se x_n é ímpar, então $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{2} + 2^{k-1}$, onde k é o inteiro tal que $2^{k-1} \leq x_n < 2^k$.

Determine o menor valor possível de x_1 para o qual a sequência contenha algum termo igual a 2020.

Problema 4. Um número inteiro positivo é dito cilíndrico se o primeiro algarismo e o último algarismo de sua representação decimal são iguais. Por exemplo, 4 e 4104 são cilíndricos, pois os seus primeiros e últimos algarismos são 4, mas 10 não é cilíndrico, pois o seu primeiro algarismo é 1, enquanto o seu último algarismo é 0. Um número cilíndrico é dito supercilíndrico se pode ser escrito como a soma de dois números cilíndricos. Por exemplo $101 = 99 + 2$ e $22 = 11 + 11$ são supercilíndricos, mas $561 = 484 + 77$ não é supercilíndrico, pois não é cilíndrico. Quantos números de 4 algarismos são supercilíndricos?

Problema 5. Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O. Seja M o ponto médio de AB e K, C o segundo ponto de interseção dos circuncírculos dos triângulos ABC e CMO. As retas CK e OM encontram-se em P. Prove que $\angle KAP = \angle MCB$.

Problema 6. Seja k um número inteiro positivo. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo em um tabuleiro 2020×2020. Inicialmente todas as casas do tabuleiro estão vazias. Uma jogada consiste em escolher uma casa vazia e colocar nesta uma ficha azul ou uma ficha vermelha. Arnaldo vence o jogo se em algum momento existirem k casas consecutivas em uma mesma linha ou coluna preenchidas com fichas de uma mesma cor. Bernaldo vence se todo o tabuleiro é preenchido sem que Arnaldo vença. Arnaldo é o primeiro a jogar e, a partir de então, cada jogador joga alternadamente. Quais são os valores de k para os quais Arnaldo tem uma estratégia vencedora?

8 OBM 2021

Problema 1. Um matemático está se divertindo com números naturais e seus divisores positivos. Para cada inteiro positivo $n \geq 3$, ele faz a seguinte sequência de operações: calcula a quantidade de divisores positivos de n, depois ele toma o número obtido e calcula a quantidade de divisores positivos e assim sucessivamente, até obter o número 2, quando ele finalmente para. A *lonjura* de n é definida como a quantidade de operações necessárias para se obter o número 2. Note que sempre se chega em 2. Por exemplo, a lonjura de 12 é 4, pois 12 tem 6 divisores positivos $\{1,2,3,4,6,12\}$, o 6 tem 4 divisores positivos $\{1,2,3,6\}$, o 4 tem 3 divisores positivos $\{1,2,4\}$ e o 3 tem 2 divisores positivos $\{1,3\}$. Note também que 6 tem lonjura 3, 4 tem lonjura 2, e 3 tem lonjura 1.

(a) Quantos números de 3 a 1000 possuem lonjura 2?

(b) Qual é a maior lonjura possível dentre os números de 3 a 1000?

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo. Defina A_1 como o ponto médio do maior arco BC do circuncírculo de ABC. Sejam A_2 e A_3 os pés das perpendiculares de A_1 até as retas AB e AC, respectivamente. Defina B_2, B_3, C_2 e C_3 de modo análogo.

(a) Prove A_2A_3 intersecta BC em seu ponto médio.

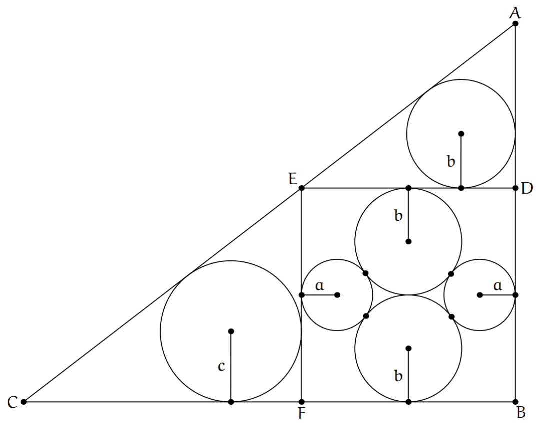
(b) Mostre que as retas A_2A_3, B_2B_3 e C_2C_3 são concorrentes.

Problema 3. Em um campeonato de futebol com 2021 times, todos jogam contra todos exatamente uma vez. Ao final de cada partida, em caso de empate, cada time ganha 1 ponto e, caso contrário, o vencedor da partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha e nem perde ponto. Ao final do campeonato, os dois times com as maiores pontuações disputam uma final. O OBM Futebol Clube venceu a sua primeira partida e sabe-se que, por terem vencido o campeonato anterior, eles levam vantagem em qualquer caso de empate na soma de pontos final. Qual é a pontuação final mínima para que o OBM Futebol Clube tenha alguma chance de ir para a final?

Problema 4. Na figura a seguir temos um triângulo ABC, retângulo em B, e $BDEF$ é um quadrado inscrito nesse triângulo. As circunferências inscritas nos triângulos CFE e EDA possuem raios c e b, respectivamente. No interior do quadrado desenham-se duas circunferências de raio b e duas circunferências de raio a, cada uma tangente a um dos lados do quadrado, como mostra a figura. Sabe-se que as circunferências de raio b no interior do quadrado são tangentes entre si e tangentes às duas de raio a. Lembre-se que quando temos duas circunferências tangentes, o centro é colinear com o ponto de tangência. Determine a razão $\frac{c}{a}$.

Problema 5. Uma tripla de inteiros positivos (a,b,c) é chamada miranha se

- a divide $bc+1$;



- b divide $ca+1$;
- c divide $ab+1$.

Determine todas as triplas miranhas.

Problema 6. Seja $\alpha \geq 1$ um número real. Considere o conjunto

$$A(\alpha) = \{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \text{ inteiro positivo}\} = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \lfloor 4\alpha \rfloor, \ldots\}.$$

Suponha que todos os inteiros positivos que não pertencem ao conjunto $A(\alpha)$ são exatamente os inteiros positivos que deixam um determinado resto r na divisão por 2021, com $0 \leq r < 2021$. Determine todos os possíveis valores de α.

Observação: O símbolo $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, se $\alpha = \sqrt{3}$, temos $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = \lfloor 1,73\ldots \rfloor = 1$, $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor = \lfloor 2 \cdot 1,73\ldots \rfloor = 3$, $\lfloor 3\sqrt{3} \rfloor = \lfloor 3 \cdot 1,73\ldots \rfloor = 5$, $\lfloor 4\sqrt{3} \rfloor = \lfloor 4 \cdot 1,73\ldots \rfloor = 6$ e assim por diante. Nesse caso temos $A(\alpha) = \{1, 3, 5, 6, \ldots\}$.

9 OBM 2022

Problema 1. Um jogo para uma pessoa tem as seguintes regras: inicialmente há dez pilhas de pedras, com $1, 2, 3, \ldots, 10$ pedras, respectivamente. Uma jogada consiste em fazer uma das duas seguintes operações:

(i) escolher duas pilhas, cada uma com pelo menos duas pedras, juntá-las e depois adicionar mais duas pedras a nova pilha;

(ii) escolher uma pilha com pelo menos 4 pedras, tirar duas pedras dela e separá-la em duas pilhas de quantidades de pedras positivas escolhidas pelo jogador.

O jogo continua até não ser mais possível fazer uma operação.

(a) Dê um exemplo de uma sequência de jogadas que conduzem ao término do jogo.

(b) Faça uma tabela informando qual é o número total de pedras e o número de pilhas no início e após cada uma das 5 primeiras operações no seu exemplo acima.

(c) Mostre que o número de pilhas com apenas uma pedra ao final do jogo é sempre o mesmo, independentemente de como se realizam as jogadas.

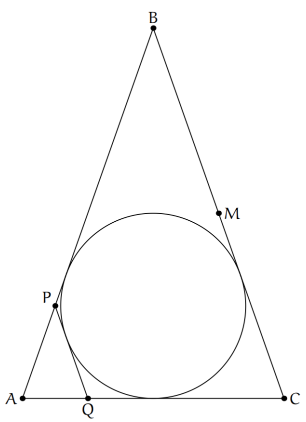
Problema 2. Os números reais a, b, c são diferentes de zero e cumprem o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
a + ab &= c \\
b + bc &= a \\
c + ca &= b
\end{aligned}
$$

Determine os possíveis valores de abc.

Problema 3. Seja ABC um triângulo com incentro I e seja Γ sua circunferência circunscrita. Sejam M o ponto médio de BC, K o ponto médio do arco BC que não contém A, L o ponto médio do arco BC que contém A e J a reflexão de I pela reta KL. A reta LJ intersecta Γ novamente no ponto $T\,(\neq L)$. A reta TM intersecta Γ novamente no ponto $S\,(\neq T)$. Prove que S, I, M e K estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 4. Na figura, PQ e BC são paralelos, $AB = BC$ e $MB = MC$. Além disso, $\angle CQM = \angle MQP$ e PQ é tangente à circunferência inscrita ao triângulo ABC. Dado que $AQ = 1$, calcule o perímetro do triângulo ABC.



Problema 5. Inicialmente um número está escrito no quadro. Então, a cada minuto, Esmeralda escolhe um divisor $d > 1$ do número n escrito na

lousa, apaga n e escreve $n + d$. Se o número inicial é 2022, qual é o maior número composto que Esmeralda nunca poderá escrever no quadro?

Problema 6. Determine o maior inteiro positivo k para o qual a seguinte afirmação é verdadeira: dados k subconjuntos distintos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2023\}$, cada um com 1011 elementos, é possível particionar os subconjuntos em duas coleções de forma que quaisquer dois subconjuntos em uma mesma coleção possuem algum elemento em comum.

10 OBM 2023

Problema 1. Um número inteiro positivo é dito vaivém quando, considerando a sua representação na base dez, o primeiro algarismo da esquerda para a direita é maior que o segundo, o segundo é menor que o terceiro, o terceiro é maior que o quarto e assim por diante alternando maior e menor até o último algarismo. Por exemplo, 2021 é vaivém, pois $2 > 0$ e $0 < 2$ e $2 > 1$. O número 2023 não é vaivém, pois $2 > 0$ e $0 < 2$, mas 2 não é maior do que 3.

(a) Existem quantos inteiros positivos vaivéns de 2000 até 2100?

(b) Qual é o maior número vaivém sem algarismos repetidos?

(c) Quantos números de 7 algarismos distintos formados pelos dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7 são vaivéns? Por exemplo, 4253617 é um destes números. Mas 5372146 não é (2 é maior do que 1 e 1 é menor do que 4) e 2163457 também não é (4 é menor do que 5).

Problema 2. Considere um triângulo ABC com $AB < AC$ e sejam H e O seu ortocentro e circuncentro, respectivamente. Uma reta partindo de B corta as retas AO e AH em M e M' de modo que M' é ponto médio de BM. Outra reta partindo de C corta as retas AH e AO em N e N' de modo que N' é ponto médio de CN. Prove que M, M', N, N' estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 3. Seja n um inteiro positivo. Mostre que existem inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$, não todos iguais, satisfazendo

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 + \cdots + x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n^2 = 0 \end{cases}$$

se, e somente se, $2^n - 1$ é composto.

Problema 4. Determine o menor inteiro k para o qual existem inteiros positivos a, b e c, dois a dois distintos, tais que

$$a^2 = bc \quad \text{e} \quad k = 2b + 3c - a.$$

Problema 5. Um inteiro $n \geq 3$ é fabuloso quando existe um inteiro a com $2 \leq a \leq n - 1$ para o qual $a^n - a$ é divisível por n. Encontre todos os inteiros fabulosos.

Problema 6. Seja m um inteiro positivo com $m \leq 2024$. Ana e Banana jogam um jogo alternadamente em em um tabuleiro 1×2024, com quadrados inicialmente pintados de branco. Ana começa o jogo. Cada jogada de Ana consiste em escolher $k \leq m$ quadrados brancos quaisquer do tabuleiro e pintá-los todos de verde. Cada jogada de Banana consiste em escolher qualquer sequência de quadrados verdes consecutivos e pintá-los todos de branco. Qual é o menor valor de m para o qual Ana consegue garantir que, após alguma de suas jogadas, o tabuleiro inteiro estará pintado de verde?

11 OBM 2024

Problema 1. Considere uma sequência cujo primeiro termo é um inteiro positivo dado $N > 1$. Considere a fatoração de N em primos. Se N é uma potência de 2, a sequência é formada por um único termo: N. Caso contrário, o segundo termo da sequência é obtido trocando o maior fator primo p de N por $p + 1$ na fatoração em primos. Se o novo número não é uma potência de 2, repetimos o mesmo procedimento com ele, lembrando de fatorá-lo novamente em primos. Caso contrário, a sequência numérica termina. E assim sucessivamente.

Por exemplo, se o primeiro termo da sequência é $N = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, como o seu maior fator primo é $p = 5$, o segundo termo é $2^2 \cdot 3 \cdot (5+1)^2 = 2^4 \cdot 3^3$. Repetindo o procedimento, o maior fator primo do segundo termo é $p = 3$ e então o terceiro termo é $2^4 \cdot (3 + 1)^3 = 2^{10}$. Como obtivemos uma potência de 2, a sequência tem 3 termos: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 3^3$ e 2^{10}.

(a) Quantos termos tem a sequência cujo primeiro termo é $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$?

(b) Mostre que se um fator primo p deixa resto 1 na divisão por 3, então $\frac{p+1}{2}$ é um número inteiro que também deixa resto 1 na divisão por 3.

(c) Apresente um termo inicial N menor do que 1.000.000 (um milhão) tal que a sequência iniciada por N tem exatamente 11 termos.

Problema 2. Seja ABC um triângulo escaleno. Sejam E e F os pontos médios dos lados AC e AB, respectivamente, e seja D um ponto qualquer no segmento BC. As circunferências circunscritas aos triângulos BDF e CDE intersectam a reta EF em K, F e L, E, respectivamente, e intersectam-se em X, D. O ponto Y está sobre a reta DX de modo que AY é paralelo a BC. Prove que os pontos K, L, X e Y estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 3. Os números de 1 a 100 são colocados sem repetição em cada casinha de um tabuleiro 10×10. Um caminho crescente de tamanho k nesse tabuleiro é uma sequência de casinhas $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tal que, para cada $i = 2, 3, \ldots, k$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- as casinhas c_i e c_{i-1} compartilham um lado ou um vértice;
- o número em c_i é maior que o número em c_{i-1}.

Qual é o maior inteiro positivo k para o qual sempre podemos encontrar um caminho crescente de tamanho k, independentemente de como os números de 1 a 100 estão dispostos no tabuleiro?

Problema 4. Um número é chamado trilegal se seus algarismos pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3\}$ e se ele é divisível por 99. Quantos são os números trilegais de 10 algarismos?

Problema 5. Esmeralda escolhe dois inteiros positivos distintos a e b, com $b > a$, e escreve a equação $x^2 - ax + b = 0$ no quadro. Se a equação possui raízes inteiras positivas distintas c e d, com $d > c$, ela escreve a equação $x^2 - cx + d = 0$ no quadro. Ela repete o procedimento enquanto obtiver raízes inteiras positivas distintas. Caso ela escreva uma equação na qual isso não ocorre, ela para.

(a) Mostre que Esmeralda pode escolher a e b de modo que ela vá escrever exatamente 2024 equações no quadro.

(b) Qual é a maior quantidade de equações que ela pode escrever sabendo que um dos números escolhidos inicialmente é 2024?

Problema 6. Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = BC$. Seja D um ponto sobre o segmento AB, E um ponto sobre o segmento BC e P um ponto sobre o segmento DE, tal que $AD = DP$ e $CE = PE$. Seja M o ponto médio de DE. A reta paralela a AB por M intersecta AC em X e a reta paralela a BC por M intersecta AC em Y. As retas DX e EY intersectam-se em F. Prove que FP é perpendicular a DE.