OBM 2025 - Nível 2
Critério de Correção - Problema 1

1 Enunciado

Determine o menor valor possível para a soma dos dígitos de uma potência de 2 que tenha pelo menos dois dígitos e justifique por que não é possível encontrar uma potência de 2 com soma dos dígitos menor que a resposta encontrada.

1.1 Começo de qualquer solução

Resposta: 32.

Testando os primeiros, temos que:

$$2^4 = 16 \qquad 2^5 = 32 \qquad 2^6 = 64 \qquad 2^7 = 128 \qquad 2^8 = 256 \qquad 2^9 = 512 \qquad 2^{10} = 1024 \cdots$$

Provemos, por absurdo, de quatro modos distintos, que não há menor.

2 Solução 1

Uma hipotética potência de 2 com soma dos dígitos menor que 5 seria divisível por 2^3.

O critério de divisibilidade por 8 é que o número formado pelos três últimos algarismos seja divisível por 8.

Dessa forma, sendo o número par e não divisível por 5 (potências de 2 só possuem fatores primos 2's), temos que o menor número possível de ser formado pelos três últimos algarismos, nas condições desse problema, é 112, pois 002, 012, 102, 022, 202 e 004 <u>não</u> são múltiplos de 8.

Porém, 112 não é potência de 2, pois está entre 2^6 e 2^7 (outra forma de ver é provar que $112 = 2^4 \cdot 7$) e qualquer hipotética potência de 2 com três últimos algarismos iguais a 112, teria, pelo menos, um outro 1 de modo que a soma dos algarismos, no mínimo, igualaria a 5. Logo, a resposta é $\boxed{32}$.

Está provado, depois dos critérios, a título de curiosidade, a existência de uma potência de 2 cujos últimos algarismos são 112.

3 Solução 2

Analisando os dígitos da unidade das potências de 2 maiores que 2, temos quatro possibilidades: 2, 4, 6 e 8.

Para haver uma possível soma menor que 5, o algarismo da unidade tem que 2, afinal para 4, teríamos, se houver, uma soma, no mínimo, igual a 5, que seria um número da forma $10\cdots04$. (Como 004 não é múltiplo de 8 e nem 104 ou 14 são potências de 2, logo esse caso nem existe, de fato.)

Para o algarismo da unidade ser 2, então a potência de 2 deve ser da forma 2^{4K+1}, para k inteiro positivo.

Analisando $\pmod 3$, temos que o número e a soma dos algarismos deixam o mesmo resto na divisão por 3. Daí, podemos analisar alguns casos para uma eventual potência de 2 com, pelo menos, dois algarismos, cuja soma dos algarismos menor que 5:

1. Se a soma dos algarismos for menor que 3: absurdo, pois há, pelo menos, o algarismo 2 da unidade
2. Se a soma dos algarismos for igual a 3: absurdo, pois, nesse caso, a potência de 2 seria múltipla de 3
3. Se a soma dos algarismos for igual a 4: analisando $\pmod 3$ teríamos:
$$2^{4K+1} \equiv (-1)^{4K+1} \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow$$
absurdo, pois $4 \equiv 1 \pmod 3$.

Uma solução análoga, porém, um pouco maior é possível, analisando $\pmod 9$.

4 Solução 3

Aproveitemos a solução anterior até a parte em que o algarismo da unidade é igual a 2 para uma possível potência de 2 com soma dos algarismos menor que 5.

Daí, teríamos as seguintes possibilidades:

1. $2^n = 1\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}2$. (Exemplos: 12, 102, 1002, $\cdots$)
Daí, considerando que 12 não é potência de 2, para $m \geqslant 1$, temos que:
$$2^{n-1} = 5 \quad \underbrace{0\cdots0}_{(m-1) \text{ zeros}} \quad 1$$
que é ímpar e, portanto, não é potência de 2.
2. $2^n = 2\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}2$. (Exemplos: 22, 202, 2002, $\cdots$)
Daí, temos que:
$$2^{n-1} = 1\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}1$$
que é ímpar e, portanto, não é potência de 2.
3. $2^n = 1\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}1\underbrace{0\cdots0}_{z \text{ zeros}}2$. (Exemplos: 112, 1012, 1102, 10012, 10102, 11002, $\cdots$)
Se $z > 0$, analogamente ao que já foi visto, temos que:
$$2^{n-1} = 5\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}5 \quad \underbrace{0\cdots0}_{(z-1) \text{ zeros}} \quad 1$$

que é ímpar e, portanto, não é potência de 2.

Se $z = 0$, considerando que 112 não é potência de 2, para $m \geqslant 1$, podemos concluir que:

$$2^n = 1\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}12 \Rightarrow 2^{n-1} = 5\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}6 \Rightarrow 2^{n-2} = 25\underbrace{0\cdots0}_{(m-1) \text{ zeros}}3$$

que é ímpar e, portanto, não é potência de 2.

5 Solução 4

Da mesma forma que percebemos que os dígitos da unidade de potências de 2 são: 2, 4, 6 ou 8, podemos analisar apenas os dois últimos algarismos de potências de 2 e perceber que há um ciclo até 2^{22}:

2^2 termina em 04	2^3 termina em 08	2^4 termina em 16	2^5 termina em 32
2^6 termina em 64	2^7 termina em 28	2^8 termina em 56	2^9 termina em 12
2^{10} termina em 24	2^{11} termina em 48	2^{12} termina em 96	2^{13} termina em 92
2^{14} termina em 84	2^{15} termina em 68	2^{16} termina em 36	2^{17} termina em 72
2^{18} termina em 44	2^{19} termina em 88	2^{20} termina em 76	2^{21} termina em 52
2^{22} termina em 04	2^{23} termina em 08	$\cdots$	(igual à primeira linha)

Note que o ciclo é formado exatamente pelos múltiplos de 4 de 0 a 100, exceto os múltiplos de 5, de modo que o critério de divisibilidade por 4 seria outro meio para chegar nesse resultado.

Daí, para uma eventual potência de 2 com soma dos algarismos menor que 5, ela só poderia terminar em 12.

Para concluir, pode-se usar a parte final do último caso da solução anterior. Pode-se, também, avaliar que o anterior teria que terminar em 56, de modo que para terminar em 12, o algarismo da centena seria, pelo menos, 1 e, dessa forma, a soma seria pelo, menos, $1 + 1 + 2 = 4$.

Como 112 não é potência de 2, então esse caso precisaria de, pelo menos, outro algarismo 1, totalizando uma soma dos algarismos, no mínimo, igual a 5.

6 Critérios de Correção

A pontuação deve ser a maior possível, dentro da mesma solução. Por exemplo, o aluno **NÃO** pode usar critérios da solução 1 e da solução 4 para somar mais.

Também não é possível somar pontuação de uma solução com outras possíveis pontuações parciais.

1. Solução 1:
   (a) Analisar critério de divisibilidade por 8. .... **5 pontos**
   (b) Verificar que 112 é a única possibilidade para os três últimos algarismos de uma eventual potência de 2 com soma dos dígitos menor que 5. .... **4 pontos**
   (c) Verificar, ainda que indiretamente, que 112 não é potência de 2. .... **1 ponto**
2. Solução 2:
   (a) Analisar que os dígitos da unidade de potências de 2 são 2, 4, 6 ou 8. .... **1 ponto**
   (b) Analisar que o dígito da unidade de uma possível potência de 2 cuja soma dos algarismos é menor que 5 só pode ser 2, implicando que o expoente da potência de 2 deve ser da forma $4K+1$. .... **2 pontos**
   (c) Analisar que a soma dos algarismos não pode ser 1 ou 2. .... **2 pontos**
   (d) Analisar que a soma dos algarismos não pode ser 3, por exemplo, pelo critério de divisibilidade por 3. .... **2 pontos**
   (e) Analisar que a soma dos algarismos não pode ser 4, por exemplo, pelo critério de resto na divisão por 3. .... **3 pontos**
3. Solução 3:
   (a) Analisar que os dígitos da unidade de potências de 2 são 2, 4, 6 ou 8. .... **1 ponto**
   (b) Analisar que os três possíveis casos para soma dos dígitos menor que 5 e maior que 2, algarismo da unidade, são: $2^n = 1\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}2$, $2^n = 2\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}2$ e $2^n = 1\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}1\underbrace{0\cdots0}_{z \text{ zeros}}2$. .... **2 pontos**
   (c) Fazer, corretamente, o caso : $2^n = 1\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}2$ (pode até ser pela critério de divisibilidade por 3). .... **2 pontos**
   (d) Fazer, corretamente, o caso : $2^n = 2\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}2$. .... **2 pontos**
   (e) Fazer, corretamente, o caso : $2^n = 1\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}1\underbrace{0\cdots0}_{z \text{ zeros}}2$. .... **3 pontos**
4. Solução 4:
   (a) Achar, corretamente, o ciclo dos dois últimos dígitos das potências de 2. .... **5 pontos**
   (b) Concluir que a única possibilidade para soma dos dígitos menor que 5 é 12. .... **3 pontos**
   (c) Provar que não há potência de 2 na forma $1\underbrace{0\cdots0}_{m \text{ zeros}}12$. .... **2 pontos**
5. **Obs.:** Exceto na solução 2 ou caso seja usado $\pmod 9$, perde-se, pelo menos, 1 ponto quem não demonstrar, de qualquer forma, que 112 não é potência de 2.
6. Outras possíveis pontuações parciais (não cumulativas entre si, exceto os itens a e algum dos pontos do item b):

(a) Perceber que para uma potência de 2 com algarismo 2 na unidade, então a potência anterior tem um algarismo 6 na unidade, de modo que tal potência tem que ter, pelo menos, um algarismo 1 na dezena. .... **8 pontos**

(b) Obtém a pontuação máxima a partir do critério anterior com algum argumento válido como, por exemplo:

- Analisando o ciclo dos dois últimos (solução 4), não há potência de 2 terminada em 06 e quando terminada em 56, a seguinte será, no caso mínimo, terminada em 112, sendo que 112 não é potência de 2;
- Voltando ao anterior do anterior, temos que há um 8 na unidade, de modo que a potência de 2 que termina em 6 tem dígito da unidade ímpar e, assim, a caso mínimo é se ela terminar em 56, de modo que o seguinte será, no caso mínimo, terminado em 112, sendo que 112 não é potência de 2.

(c) Analisar que o ciclo $\pmod 9$, das potências de 2 é: 1, 2, 4, 8, 7, 5, sem concluir de modo similar à solução 2. .... **5 pontos**

- Considera-se a solução 2, com ajustes, para quem fez $\pmod 9$. Por exemplo, para uma potência de 2 que tenha soma dos algarismos igual a 4, então, no $\pmod 9$, ela deve ser da forma $6K + 2$.

7. A seguinte observação **<u>NÃO</u>** vale ponto:

- Só afirmar que a resposta é 32 ou, no máximo, testar alguns casos de potências de 2, não importando quantos foram testados .... **0 ponto**

7 Curiosidades

7.1 Existe potência de 2 cujos três últimos algarismos são 112

Existe uma (ou várias) potência de 2 cujo três últimos algarismos é igual a 112. Uma forma de achá-la é usar Teorema Chinês dos Restos, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2^k \equiv 112 \equiv 0 \pmod{8} \\ 2^k \equiv 112 \pmod{125} \end{cases}$$

Para resolver a segunda equação, podemos partir de $2^7 \equiv 3 \pmod{125}$ e concluir que:

$$\left(2^7\right)^5 \equiv 3^5 \equiv -7 \pmod{125}$$

Além disso, pelo Teorema de Euler, sendo $\text{mdc}\,(2, 125) = 1$, temos que:

$$2^{\phi(125)} \equiv 2^{100} \equiv 1 \pmod{125} \Rightarrow 125 \mid \left(2^{50} - 1\right) \cdot \left(2^{50} + 1\right) \Rightarrow \begin{cases} 125 \mid 2^{50} - 1 \quad \text{ou} \\ 125 \mid 2^{50} + 1 \end{cases}$$

Provemos que $125 \mid 2^{50} + 1$, a partir do resultado anterior:

$$2^{50} \equiv 2^{35} \cdot \left(2^7\right)^2 \cdot 2 \equiv (-7) \cdot 3^2 \cdot 2 \equiv -126 \equiv -1 \pmod{125}$$

Por fim, lembrando que $112 = 7 \cdot 2^4$, podemos concluir que:

$$2^{89} \equiv 2^{50} \cdot 2^{35} \cdot 2^4 \equiv (-1) \cdot (-7) \cdot 2^4 \equiv 112 \pmod{125}$$

Portanto, 2^{89} possui os três últimos algarismos iguais a 112.

Sendo $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, então todas potências de 2 da forma $2^{89+100\cdot t}$, para t inteiro não negativo, também, possuem os três últimos algarismos iguais a 112.

7.2 Existe potência de 2 com diversos 0's consecutivos

Provemos que há com dois zeros consecutivos, sendo análogo provar com mais.

Pelo Teorema de Euler, sendo $\text{mdc}\left(2, 5^3\right) = 1$, temos que:

$$2^{\phi\left(5^3\right)} \equiv 2^{5^3 - 5^2} \equiv 2^{100} \equiv 1 \pmod{5^3}$$

Daí, existe um inteiro positivo tal que:

$$\left(2^{100} = 5^3 \cdot t + 1\right) \cdot 2^3 \Rightarrow 2^{103} = 10^3 \cdot t + 8$$

Naturalmente que 2^{103} tem mais que 4 algarismos, pois 2^{14} tem.

Como $10^3 \cdot t$ não influencia nos três últimos algarismos, logo o número formado pelos três últimos algarismos de 2^{103} será 008.

Analogamente, poderíamos provar que os últimos cinco algarismos de 2^{2505} serão 00032 e etc.