# 47ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

**Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)**

**PRIMEIRO DIA**

Olimpíada Brasileira de Matemática

| | |
|---|---|
| Nome: | Samuel de Araújo Brandão |
| CPF: | 177.814.886 - 79 |

---

**4.** Seja $ABC$ um triângulo com incentro $I$ e exincentro relativo ao vértice $A$ igual a $K$. Seja $D$ o pé da bissetriz interna relativa ao vértice $A$ e $E$ o circuncentro do triângulo $BDK$. Seja também $F \neq C$ a segunda interseção de $AC$ com a circunferência circunscrita a $BEC$.

(a) Prove que os pontos $D, E, F$ são colineares.

(b) Prove que $ID = IF$.

- *O* incentro *de ABC é o ponto de interseção das bissetrizes internas de* $\angle A$, $\angle B$ *e* $\angle C$.
- *O* exincentro *de ABC relativo ao vértice A é o ponto de interseção da bissetriz interna de* $\angle A$, *a bissetriz do ângulo externo de B e a bissetriz do ângulo externo de C.*

---

**5.** A equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c$ inteiros não nulos, tem uma solução real positiva menor do que $\frac{1}{2025}$.

(a) Dê um exemplo de equação satisfazendo o enunciado em que um dos números $a, b, c$ é igual a 2025 e os outros dois números têm valor absoluto menor ou igual a 2025. Lembre-se de que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

(b) Prove que pelo menos um dos números $a$, $b$ ou $c$ tem valor absoluto maior ou igual a 2025.

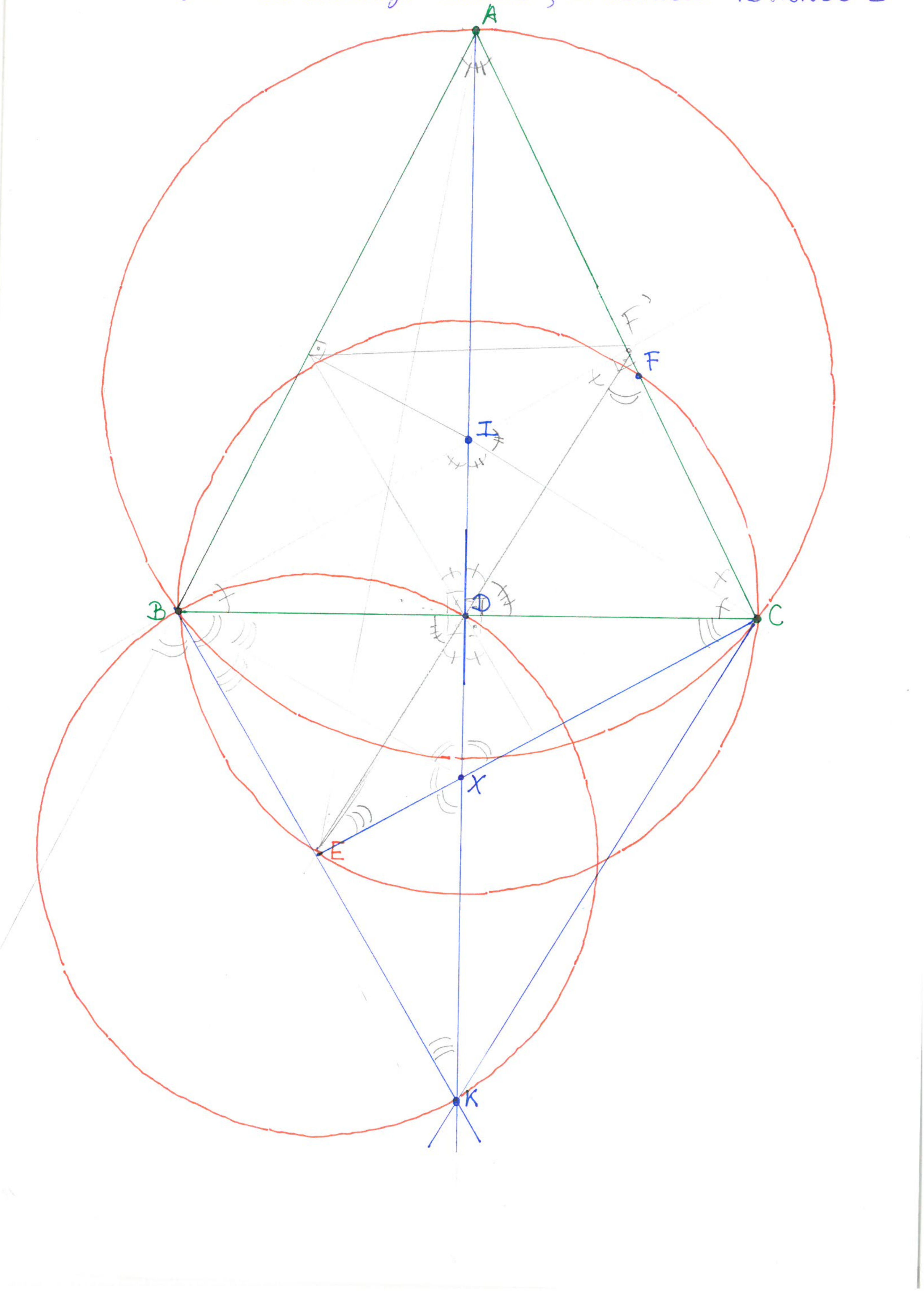
---

**6.** Seja $\mathcal{P}$ um polígono convexo de $n$ vértices, $n \geq 4$. Podemos particionar $\mathcal{P}$ em triângulos, traçando diagonais que não se intersectam no interior de $\mathcal{P}$. Uma partição desse tipo é chamada de *triangulação*. Um conjunto $X$ de diagonais de $\mathcal{P}$ é dito *obstrutivo* se tem a seguinte propriedade:

Qualquer triangulação de $\mathcal{P}$ utiliza ao menos uma diagonal que pertence ao conjunto $X$.

Determine, em função de $n$, qual é a menor quantidade possível de elementos de um conjunto obstrutivo.

Problema 4. , Samuel de Araújo Brandão , 177.814.886-79 . Nível 2



Problema 4, Nível 2. Samuel de Araújo Brandão, 177.814.886-79

(a) Para provar que $D, E, F$ são colineares, basta provar que $D$ é o centro de $(BEC)$ e $EF$ é diâmetro da mesma.

Lema — $D$ é o centro de $(BEC)$.

Prova. ~~É certo que D é o ponto médio de BC já que~~ Digamos, SPDG, que $\triangle ABC$ é isósceles e $AB = AC$. Portanto, $D$ é o ponto médio de $BC$. Sendo assim, se $\angle BEC = 90°$, $BC$ é certamente diâmetro de ~~$\triangle$~~ $(BEC)$.

Já que $AB = AC$, $AD \perp BC$. Portanto, $\angle DBX = \angle DCX$, sendo $X$ a intercessão de $CE$ e $AD$. Assim como $\angle BXD = \angle DXC$, pois $\triangle BCX$ é isósceles e $DX$ é a bissetriz de $\angle BXC$. Decorrente disso, é certo que $X$ é o ~~pont~~ centro de $(BCI)$ pelo lema do incentro-excentro. Isso resulta em $BX = XK$, sendo ambos raios de $(BCI)$, já que $K$ está sobre $(BCI)$ também pelo lema do incentro-excentro. ~~O O r~~

O resultado é que $BXK \equiv BXC$, sendo $EX$ a altura relativa a $X$, culminando em $\angle BEX = 90° = \angle BEC$.

Observação — $X$ está sobre o eixo radical de $(BEC)$ e $(BDK)$, culminando em $EX = DX$.

Agora, deve-se provar que $\angle ACE = 90°$ para que $EF$ seja diâmetro de $(BEC)$.

Lema — $\angle ACE = 90°$.

Prova. Já que $D$ é o centro de $(BCE)$, ~~$DE = CE$~~ $DE = CD$, logo $\triangle CDE$ é isósceles e $\angle DCE = \angle DEC$. Sendo assim, é possível provar que $\triangle BCE \sim \triangle CEF$, sendo suficiente provar que $\angle CBE = \angle EFC$, ou seja, provar que $BCEF$ é cíclico, o que é verdade, já que $F$ está sobre $(BCE)$. Logo $\triangle BCE \sim \triangle CEF$

Portanto, $D$ é centro de $(BCE)$ e $EF$ é diâmetro. Logo $D, E, F$ são colineares.

(b) ~~$ID = IF \iff$~~ $ID = IF$ somente se $F$ for pé da bissetriz de $\angle ABC$, que ocorre somente se $B, I, F$ forem colineares, que por sua vez, ocorre somente se ~~$\angle BFC = 90°$~~ $IF \perp AC$, ou seja, ~~se I for~~ se $\angle IFC = 90°$. Mas tal fato é claramente verdadeiro, já que [...]

Problema 4, Nível 2. Samuel de Araújo Brandão, 177.814.886-79

(b) [...] $\angle CFE = \angle EBC$, pois $BCEF$ é cíclico como visto em (a).
~~(a)~~ Além disso, já que $D$ é o centro de $\angle BCE$, $BD = DF$, culminando em $\angle DFB = \angle DBF$. Mas deve-se perceber, que $\angle FBE = 90° = \angle EBC + \angle DBF$, já que $\angle ECF = 90°$ e $\angle ECF + \angle FBE = 180°$. Portanto, $\angle CFE + \angle DFB = 90°$, resultando em $ID = IF$ já que $AC$ é tangente ao incírculo de $\Delta ABC$, ~~e~~ culminando em $\angle IFC = 90°$, sendo $ID$ e $IF$ ambos raios do incírculo de $\Delta ABC$.

Problema 5, Nível 2. Samuel de Araújo Brandão, 177.814.886-79

(a) ~~Deve-se perceber que~~ $\cancel{a = 2025}$ ~~resulta em~~ $\cancel{2025 \cdot (\frac{1}{2025})^2 = 1 \cdot \frac{1}{2025}}$~~. Portanto, basta que~~ $\cancel{bx + c = -\frac{1}{2025}}$ ~~para que~~ $\cancel{ax^2+bx+c=0}$~~. Já que~~ $\cancel{c \neq 0}$~~, não pode-se afirmar que~~ $\cancel{b=-1}$ ~~e~~ $\cancel{c=0}$~~, por mais que resultasse em~~ $\cancel{bx+c=-\frac{1}{2025}}$ ~~[...] Contudo, podemos afirmar que b é arbitrariamente menor que -1, ou seja, levemente menor, e c é arbitrariamente maior que 0, ou seja, bem pouquinho maior, de modo que~~ $\cancel{c \neq 0}$ ~~e~~ $\cancel{b(\frac{1}{2025})+c=-\frac{1}{2025}}$~~. Um exemplo que funcionaria seria~~ $\cancel{b=-2}$ ~~e~~ $\cancel{c=\frac{1}{2025}}$~~, resultando que~~ $\cancel{-\frac{2}{2025}+\frac{1}{2025}=-\frac{1}{2025}}$~~. Para provar, perceba que~~ $\cancel{2025\cdot(\frac{1}{2025})^2+-2\cdot\frac{1}{2025}+\frac{1}{2025}=0}$~~.~~

⚠ A resposta da (a) completa está na outra folha.

(b) Visando contradição, digamos que # $|a|,|b|,|c| < 2025$.
Portanto,

$$a\cdot\left(\frac{1}{2025}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2025}\right) + c = \left(\frac{1}{2025}\right)\left(\frac{a}{2025}+b\right)+c = 0 \iff \frac{a}{2025}+b = -2025c$$
$$\iff a + 2025b = -2025^2\cdot c.$$

Logo, o ~~menor~~ maior valor negativo que $-2025^2\cdot c$ pode assumir é $-2025^2\cdot 1$, e o menor valor positivo que tal pode assumir é $-2025^2\cdot -1 = 2025^2$.
Contradição! Se $|a|,|b| < 2025$, é impossível que $a+2025b$ seja tão grande quanto $2025^2$, já que são equivalentes a, no máximo, $2024+2025\cdot 2024 < 2025^2$. Ao mesmo tempo que é impossível que seja tão pequeno quanto $-2025^2$, já que são equivalentes a, no mínimo, $-2024-2025\cdot 2024 > -2025^2$.

Portanto, é impossível que ~~$|a|,|b|,|c| < 2025$~~ nem sequer um entre a, b, c seja igual ou maior que 2025, já que, se c for negativo e menor que $-1$, $-2025^2\cdot c$ ~~$> a + 20$~~ permanecerá sendo maior que $a+2025b$, e se c for positivo e maior que 1, $-2025^2\cdot c$ permanecerá sendo menor que $a+2025b$. Já que c não pode assumir nenhum outro valor (é inteiro não nulo), é certo que pelo menos um entre $|a|$ e $|b|$ deve ser maior ou igual a 2025.

Problema 5, Nível 2, Samuel de Araújo Brandão, 177.814.886-79

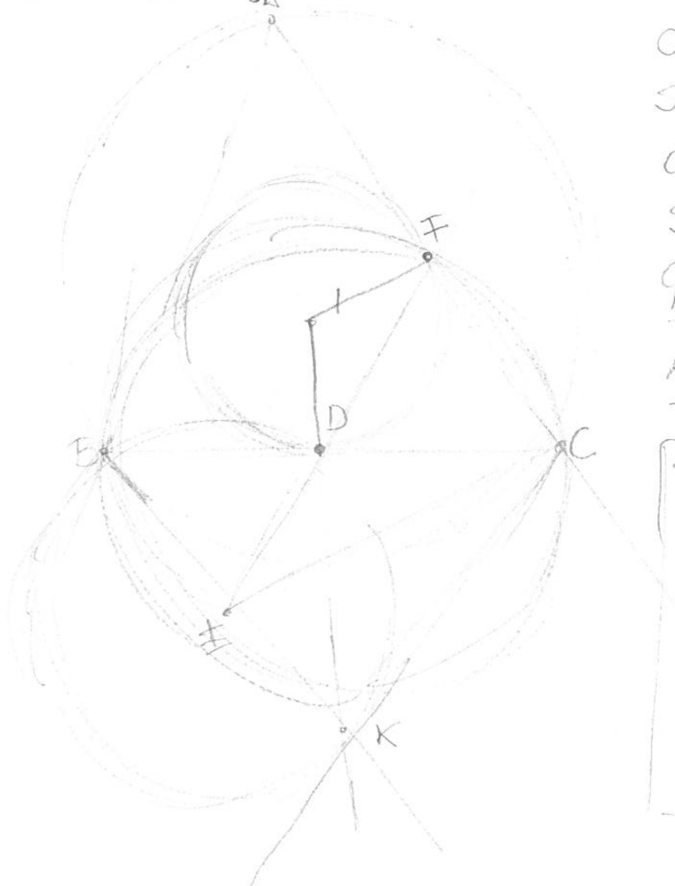
(a). ~~[...] Portanto, um exemplo que funciona é b = - 2025 e c = 1, o que resultaria em $ax^2+bx+c = 0$ =~~

$\cancel{ax^2+bx+c = 2025\cdot\left(\frac{1}{2025}\right)^2 - 2025\cdot\frac{1}{2025} + 1 = \frac{1}{2025} - 1}$

Como pode-se ver na questão (b), $a + 2025b = -2025^2c$. Portanto, devemos encontrar um valor para $a, b, c$ que respeitem esse ~~a~~ igualdade. Sendo assim, uma possível solução é $a = 2025$, $b = 2024$ e $c = -1$. Perceba que realmente funciona: $\cancel{2024\cdot\left(\frac{1}{2025}\right)^2 + 2025\cdot\frac{1}{2025} =}$ $\cancel{2024\cdot\left(\frac{1}{2025}\right)^2 + 2025\cdot\frac{1}{2025} - 1 = 0}$ $2025\cdot\left(\frac{1}{2025}\right)^2 + 2024\cdot\frac{1}{2025} - 1 = 0$.

⚠ A solução para (b) deve ser lida antes da solução (a).

Rascunho 1, Nível 2. Samuel de Araújo Brandão, 177.814.886-49




Os pontos D, E, F são colineares somente se EF for diâmetro e D for centro de (BCE), ou seja, somente se ∠BEC = 90°. Portanto, provemos que ∠BEC = 90°.

Ao mesmo tempo, deve-se perceber também que ∠ACE = 90°.

Provará-se também que B, I, F são colineares, ou seja, F é o pé da bissetriz de B, o que culminaria em ID = IF já que F seria um ponto sobre o ~~incírculo~~ incírculo de AEC.

Portanto, basta provar que ∠BEC = ∠ACE = 90°.

Para provar que ∠BEC = 90°, deve-se ver que ∠EBC + ∠ECB = 90°, ou seja, ∠BKD = ∠DCE, ou seja, ∠DXC = ∠DEK

(5) $a(\frac{1}{2025})^2 + b(\frac{1}{2025}) + c = 0$ $\quad a = 2025 \Rightarrow \frac{1}{2025} + \frac{1}{2025}b + c = 0$

$-\frac{2}{2025} + x = -\frac{1}{2025}$

(b) Visando contradição, digamos que $|a, b, c| < 2025$. Portanto, $a\cdot(\frac{1}{2025})^2 + b(\frac{1}{2025}) + c = (\frac{1}{2025})(\frac{a}{2025} + b) + c$. Logo $(\frac{1}{2025})(\frac{a}{2025}+b) = -c$, $\frac{a}{2025} + b = -2025c \Rightarrow a + 2025b = -2025^2 \cdot c$.

$-2024 - 2025 \cdot 2024 = -2025^2 \cdot c$ $\quad \frac{-4}{2025} +$

$a + 2025b = -2025^2 \cdot c$ $\quad \cancel{-2024}$

$a + 2025b = -2025^2$ $\quad b(\frac{1}{2025}) + c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad b = -2025$

$a(\frac{1}{2025})^2 + b(\frac{1}{2025}) + c = 0$ $\quad a + 2025b = -2025^2 \cdot c$