OMpD 2023 N2 Fase 2

Samuel de Araújo Brandão

1 de outubro de 2025

Este documento contém soluções para os problemas da OMpD 2023 N2 Fase 2, escritos por mim durante minha preparação para a Olimpíada Internacional de Matemática.

O conteúdo reflete meu próprio entendimento e processo de resolução de problemas. Algumas soluções podem ter sido inspiradas pelo trabalho de outras pessoas ou requerido ajuda externa; nesses casos, a devida atribuição é dada (veja a seção 3).

Se você notar algum erro ou tiver sugestões de melhoria, eu ficaria muito grato em recebê-las em samuelbaraujo19@gmail.com.

Conteúdo

1 Problemas

1. Alguns amigos internautas formaram 6 equipes de futebol, e decidiram realizar um torneio onde cada equipe enfrenta outra exatamente uma vez em uma partida. Em cada partida, quem vence ganha 3 pontos, quem perde não ganha ponto, e se as duas equipes empatarem, cada uma leva 1 ponto.

Ao final do torneio, verificou-se que as pontuações das equipes foram $10, 9, 6, 6, 4$ e 2 pontos. A respeito deste torneio, responda os seguintes itens, justificando sua resposta em cada um deles.

(a) Quantas partidas terminaram empatadas no torneio?

(b) Determine, para cada um das 6 equipes, o número de vitórias, empates e derrotas.

(c) Se considermos apenas as partidas disputadas entre a equipe que fez 9 pontos contra as duas equipes que fizeram 6 pontos, e a disputada entre as duas equipes que fizeram 6 pontos, explique porque dentre essas três partidas, há pelo menos 2 empates.

2. Encontre todos os pares a, b de números reais tais que o número $\lfloor an + b \rfloor$ é um quadrado perfeito, para todo inteiro positivo n.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor = 1$ e $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$.

3. Para cada inteiro positivo x, seja $\varphi(x)$ o número de inteiros $1 \leq k \leq x$ que não possuem fatores primos em comum com x. Por exemplo, $\varphi(12) = 4$, pois $1, 5, 7$ e 11 são todos os números naturais menores ou iguais a 12 que não possuem fatores primos em comum com 12. Determine todos os inteiros positivos n tais que existem inteiros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de modo que o conjunto:

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)\}$$

possui exatamente $2n$ inteiros consecutivos (em alguma ordem).

4. Seja ABC um triângulo acutângulo escaleno, e seja O seu circuncentro. Seja K um ponto sobre o lado BC. A reta OK intersecta o circuncírculo do triângulo BOC novamente em M. Seja L o simétrico de K relativo a AC. Demonstre que os circuncírculos dos triângulos LCM e ABC são tangentes se, e somente se, $AK \perp BC$.

2 Soluções

2.1 Problema 1.

Enunciado do Problema

Alguns amigos internautas formaram 6 equipes de futebol, e decidiram realizar um torneio onde cada equipe enfrenta outra exatamente uma vez em uma partida. Em cada partida, quem vence ganha 3 pontos, quem perde não ganha ponto, e se as duas equipes empatarem, cada uma leva 1 ponto.
Ao final do torneio, verificou-se que as pontuações das equipes foram $10, 9, 6, 6, 4$ e 2 pontos. A respeito deste torneio, responda os seguintes itens, justificando sua resposta em cada um deles.

(a) Quantas partidas terminaram empatadas no torneio?

(b) Determine, para cada um das 6 equipes, o número de vitórias, empates e derrotas.

(c) Se considermos apenas as partidas disputadas entre a equipe que fez 9 pontos contra as duas equipes que fizeram 6 pontos, e a disputada entre as duas equipes que fizeram 6 pontos, explique porque dentre essas três partidas, há pelo menos 2 empates.

(**a**) 8 partidas terminaram em empate.

É trivial perceber isso ao notar que, já que existem 6 times e cada time jogou contra exatos 5 times, houveram $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ partidas no total. Portanto, caso não houvessem empates na partida, o total de pontos seria $15 \cdot 3 = 45$ pontos. Mas pode-se ver que foram distribuídos apenas $10 + 9 + 6 + 6 + 4 + 2 = 37$ pontos no total. Ou seja, $45 - 37 = 8$ pontos "sumiram". Já que apenas 2 pontos são distribuídos a cada empate, houveram $(3 - 2) \cdot 8 = 8$ empates.

(**b**) Sejam os times A, B, C, D, E e F aqueles que pontuaram, respectivamente, 10, 9, 6, 6, 4, 2. Abaixo encontra-se a única possível configuração, onde $V =$ vitória, $E =$ empate e $D =$ derrota.

- Time A: $3V$, $1E$, $1D$
- Time B: $2V$, $3E$, $0D$
- Time C: $1V$, $3E$, $1D$
- Time D: $1V$, $3E$, $1D$
- Time E: $0V$, $4E$, $1D$
- Time F: $0V$, $2E$, $3D$

Nenhuma outra configuração é válida por não cumprir todas as seguintes obrigações indispensáveis:

- todos os times devem jogar 5 partidas,
- devem haver 8 empates entre 15 partidas totais,
- o time A deve ganhar 3 partidas, empatar 1 e perder 1,
- o time F deve empatar 2 partidas e perder 3,

- o time E deve empatar 4 partidas e perder 1, já que, caso ganhe 1, empate 1 e perca 3, os times B, C e D teriam que ganhar, no total, 12 pontos provenientes de empates, uma tarefa claramente impossível, já que cada um desses times deve ganhar, no máximo, 3 pontos culminados de empate,
- B, C e D, devem ganhar, cada um, 3 pontos provenientes de empate.

(**c**) Sabe-se que o tanto de empates do grupo 1: A, E e F é $1 + 4 + 2 = 7$, e o tanto de empates do grupo 2: B, C e D é $3 + 3 + 3 = 9$ empates. É fato que a partida entre E e F terminou em empate. Portanto, A empatou,no máximo, com 1 time do grupo 2, E empatou, no máximo, com 3 times do grupo 2 e F empatou, no máximo, com 1 time do grupo 2. Logo, houverão, no máximo, $1 + 3 + 2 = 5$ empates entre os grupos 1 e 2. Logo entre os times do grupo 2, houveram, no mínimo, $(9 - 5) \cdot \frac{1}{2} = 2$ empates, já que cada partida empatada resulta em dois times participantes de um empate.

2.2 Problema 2.

Enunciado do Problema

Encontre todos os pares a, b de números reais tais que o número $\lfloor an + b \rfloor$ é um quadrado perfeito, para todo inteiro positivo n.
Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor = 1$ e $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$.

Apenas os pares $(a, b) = (0, b)$, onde $b \in [m^2, m^2 + 1)$ e $m \in \mathbb{Z}$

Perceba, primeiramente, que para todo n, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\lfloor an + b \rfloor = m^2$. Para isso, é trivial perceber que basta sempre anular n e fazer com que $b \in [m^2, m^2 + 1)$. Ou seja, $a = 0$.

Perceba que essa é a única configuração possível, já que:

- $a < 0$: é impossível, pois, basta que $n > \frac{b}{|a|}$, resultando em $\lfloor an + b \rfloor < 0$. Portanto, nunca será um quadrado perfeito.

- $a > 0$: também é impossível. Visando contradição, seja $x_n^2 := \lfloor an + b \rfloor$ com $x_n \in \mathbb{Z}$. Deve-se perceber que $x_{n+1} \geq x_n + 1$ para infinitos n, já que, caso contrário, a sequência ficaria constante a partir de algum momento. Isso é impossível porque $a > 0$. Podemos ver que a diferença entre termos consecutivos nos mostra algo bem interessante:

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \lfloor an + a + b \rfloor - \lfloor an + b \rfloor.$$

Como vimos anteriormente, $x_{n+1} \geq x_n + 1$ para infinitos n. Portanto,

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 \geq (x_n + 1)^2 - x_n^2 = 2x_n + 1.$$

Agora, para finalizar, perceba que $\lfloor an + a + b \rfloor \leq an + a + b$ e $\lfloor an + b \rfloor > an + b - 1$. Portanto,

$$\lfloor an + a + b \rfloor - \lfloor an + b \rfloor < an + a + b - an - b + 1 = a + 1 \iff 2x_n + 1 < a + 1.$$

Contradição! É impossível que $2x_n + 1$ seja cotado por $a + 1$, já que $x_n \to \infty$.

Portanto, nos resta apenas os pares $(a, b) = (0, b)$, onde $b \in [m^2, m^2 + 1)$ e $m \in \mathbb{Z}$

Observação — O mais complicado foi realmente mostrar que $a > 0$ é impossível. Para tanto, foi de extrema importância conhecer o seguinte padrão: geralmente, quando é dito "válido para todos os n" é bem importante comparar termos consecutivos. Para tanto, foi relativamente trivial perceber que $x_{n+1} \geq x_n + 1$ para infinitos n.

Observação — Após comparar os termos consecutivos, existe outro padrão muito recorrente que deveríamos conhecer:

$$\lfloor r + s \rfloor - \lfloor r \rfloor \leq \lfloor s \rfloor + 1 = \lceil s \rceil.$$

Após isso, ficou relativamente fácil, já que é trivial perceber que

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 < a + 1,$$

e relembrar que $x_{n+1} \geq x_n + 1$, culminando em $x_{n+1}^2 - x_n^2 \geq (x_n + 1)^2 - x_n^2 = 2x_n + 1$.

2.3 Problema 3.

Enunciado do Problema

Para cada inteiro positivo x, seja $\varphi(x)$ o número de inteiros $1 \leq k \leq x$ que não possuem fatores primos em comum com x. Por exemplo, $\varphi(12) = 4$, pois $1, 5, 7$ e 11 são todos os números naturais menores ou iguais a 12 que não possuem fatores primos em comum com 12. Determine todos os inteiros positivos n tais que existem inteiros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de modo que o conjunto:

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)\}$$

possui exatamente $2n$ inteiros consecutivos (em alguma ordem).

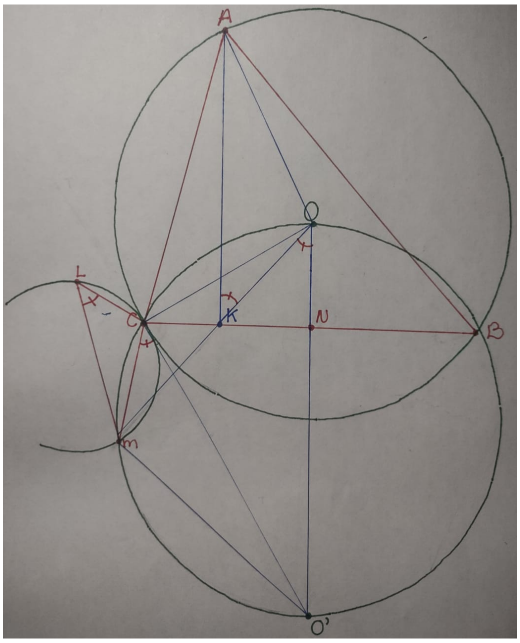
2.4 Problema 4.

Enunciado do Problema

Seja ABC um triângulo acutângulo escaleno, e seja O seu circuncentro. Seja K um ponto sobre o lado BC. A reta OK intersecta o circuncírculo do triângulo BOC novamente em M. Seja L o simétrico de K relativo a AC. Demonstre que os circuncírculos dos triângulos LCM e ABC são tangentes se, e somente se, $AK \perp BC$.

Permita $\measuredangle$ denotar ângulos orientados.

Para provar que (LCM) e (ABC) são tangentes se, e somente se, $AK \perp BC$, devemos demonstrar que existe uma reta que tangencia as duas circunferências em C.



Alegação — $\triangle CLM \sim \triangle AKO$ pelo caso LAL.

Demonstração. Sabe-se que $CMBO$ é um quadrilátero cíclico, já que seus vértices são concíclicos em (BCO). Portanto, torna-se trivial perceber que $\frac{BO}{CM} = \frac{BK}{KM} = \frac{KO}{CK}$, ou seja, $\frac{AO}{CM} = \frac{OK}{CL}$. Além disso, sabemos que

$$\measuredangle LCM = \measuredangle LCK + \measuredangle KCM = 2\measuredangle ACK + \measuredangle BOK = \measuredangle AOB + \measuredangle BOK = \measuredangle AOK. \qquad \square$$

Alegação — O ponto antipodal em relação a O pertence à tangente de (ABC).

Demonstração. Chamemos o pé da mediatriz do lado $\overline{BC}$ de N. A reta $\overline{NO}$ intersecta (BCO) novamente em O', sendo esse o ponto antipodal em relação a O. Já que OO' é um diâmetro de tal circunferência, $\measuredangle O'CO = 90°$. Portanto, $\overline{CO'}$ tangencia (ABC). $\square$

Agora, para provar que (LCM) e (ABC) são tangentes se, e somente se, $AK \perp BC$, devemos demonstrar que $\measuredangle MCO' = \measuredangle MLC$. Já que $CMOO'$ é cíclico, $\measuredangle MCO' = \measuredangle MOO'$. Mas é necessário lembrar que $\measuredangle AKO = \measuredangle MLC$. Ou seja,

$$\measuredangle AKO = \measuredangle MOO' \iff AK \parallel NO \iff AK \perp BC,$$

já que $NO \perp BC$.

Observação — A principal função de desenhar diagramas muito bem construídos é tentar perceber padrões e desenvolver estratégias que aparentam certas no diagrama, mas ainda têm de ser provadas formalmente. Aproveite disso! No diagrama, $\triangle CLM \sim \triangle AKO$ realmente aparenta ser verdadeiro, sendo bem fácil comprovar isso sabendo que $CMBO$ é um quadrilátero cíclico.

Observação — Para descobrir o ponto N, o pensamento chave foi tentar achar uma reta tangente a (ABC) baseado em informações que já tinhamos antes. Portanto, em problemas que envolvem provar uma certa tangência entre circunferências, pode ser válido usar informações já conhecidas para provar que uma reta é tangente à uma circunferência, e depois provar que tal reta também é tangente à outra circunferência, caso cumpra certo requerimento.

3 Referências