OBM 2025 - Nível 3
Critério de Correção - Problema 1

1 Enunciado

Prove que existe um inteiro positivo n e $2n$ números reais não negativos

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \quad \text{e} \quad 0 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots \leq b_n$$

satisfazendo as três propriedades a seguir:

(i) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 2025^{2025}$;

(ii) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq 2025^{2025}$;

(iii) $c_1 + c_2 + \cdots + c_n \leq \dfrac{1}{2025^{2025}}$, onde $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Além disso, encontre o menor inteiro positivo n com tal propriedade.

2 Solução

Seja $k = 2025^{2025}$. Veja que

$$k \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n \cdot a_n \implies a_n \geq \frac{k}{n},$$

analogamente, $b_n \geq \frac{k}{n}$, então, $c_n = \min\{a_n, b_n\} \geq \frac{k}{n}$, logo,

$$\frac{k}{n} \leq c_1 + c_2 + \cdots + c_n \leq \frac{1}{k} \implies n \geq k^2.$$

Agora, um exemplo para $n = k^2$ é

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{k}\ , \ b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 0 \text{ e } b_n = k \implies$$

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0 \text{ e } c_n = \frac{1}{k},$$

então, temos que $n = k^2 = 2025^{4050}$ satisfaz a propriedade e é o mínimo n possível.

3 Critério de Correção

1. Mostrar que $c_n \geq \frac{k}{n}$ .... **3 pontos**
   - Mostrar que a_n ou $b_n \geq \frac{k}{n}$ .... **2 pontos**
2. Concluir que $n \geq k^2$ .... **2 pontos**
3. Encontrar um exemplo para $n = k^2$ .... **5 pontos**
   - Exibir um exemplo válido para $n \neq k^2$ .... **2 pontos**

Observações

1. Exibir um exemplo incorreto .... **0 ponto**
2. Considerar desigualdades estritas ($<$ e $>$) e encontrar $n > k^2$ .... **-1 ponto**
3. Pequenos erros .... **-1 ponto**