47ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

Nome: Samuel de Araújo Brandão	
CPF: 177.814.886-79	

---

1. Determine o menor valor possível para a soma dos dígitos de uma potência de 2 que tenha pelo menos dois dígitos e justifique por que não é possível encontrar uma potência de 2 com soma dos dígitos menor que a resposta encontrada.

---

2. Seja m um inteiro positivo. Ana e Banana jogam o seguinte jogo em um tabuleiro 5×5, inicialmente com 0 em todas as casas. Alternadamente, elas escolhem uma casa do tabuleiro e somam ao número escrito nela um inteiro do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, de forma que o número escrito na casa não ultrapasse o número m. Ganha quem fizer uma jogada que complete as cinco casas de uma linha, uma coluna ou uma das duas diagonais com o número m em todas as casas. Para quais inteiros positivos m, Ana, a primeira a jogar, possui uma estratégia vencedora?

---

3. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$. Sejam D, E, F os pés das alturas de A, B, C, respectivamente, e seja M o ponto médio de BC. Seja P o ponto de interseção das retas EF e BC. Seja H o ortocentro de ABC. A reta PH intersecta o círculo de diâmetro AH novamente no ponto J. Seja R a reflexão de A por BC. As retas JD e PR se encontram em K. Prove que o quadrilátero $KDMR$ é cíclico.

Samuel de Araújo Brandão, Nível 2. CPF: [redacted]

Problema 1. O menor valor possível para a soma dos dígitos de uma potência de 2 é 5, podendo ser encontrado com $2^5 = 32$, por exemplo.

~~É possível provar tal fato notando~~ Para provar tal fato, digamos que α seja o menor valor para a soma dos dígitos de 2^x, sendo x um inteiro não nulo. Seja também UN a casa das unidades de 2^x e PM o primeiro dígito da esquerda para a direita de 2^x.

Perceba que os únicos valores possíveis para UN são: $\{2, 4, 8, 6\}$. Tal é verdadeiro pois $2^1 \equiv 2 \pmod{10}$, $2^1 + 2^1 \equiv 4 \pmod{10}$, $2^2 + 2^2 \equiv 8 \pmod{10}$, $2^3 + 2^3 \equiv 6 \pmod{10}$ e $2^4 + 2^4 \equiv 2 \pmod{10}$, repetindo assim infinitamente. Portanto, ~~UN = 2,~~ UN equivale a 2 ou 4, já que vimos que $\alpha = 5$ para 2^5, mas para qualquer outro valor de UN, é garantido que ~~$\alpha >$~~ $\alpha > 5$.

Sendo assim, os possíveis valores de α são 3, 4 ou 5 (2 é impossível pois $PM \geq 1$, resultando em $\alpha \geq 3$). A seguir, provamos que 3 e 4 são impossíveis.

- Visando contradição, $\alpha = 3$. A única configuração possível é $PM = 1$ e $UN = 2$, podendo existir apenas números 0 entre PM e UN. Portanto, ao dividir essa potência de 2 por 2, encontraremos $PM = 5$ e $UN = 1$ ($UN = 6$ é inviável, já que culminaria em outro dígito 1 ~~em~~ quando $\alpha = 3$, pois $6 \cdot 2 = 12$ ~~e~~). Contradição! UN é obrigatoriamente par para formar uma potência de 2.
- Visando contradição, $\alpha = 4$. Logo $PM = UN = 2$, havendo apenas dígitos 0 entre os dois ou nenhum dígito, ou $PM = 1$ e $UN = 2$, havendo um dígito 1 entre os dois e podendo haver dígitos 0. $PM = UN = 2$ é visivelmente impossível pois, ao dividir por 2, $UN = 1$ pelo mesmo motivo já visto. Já se $PM = 1$ e $UN = 2$, ~~é possível~~ a divisão por 2 resulta em $PM = 5$ e $UN = 6$, sendo possível já que ~~pode hav~~ existem dois algarismos 1 em $\alpha = 4$. Ao dividir novamente, $PM = 2$ e $UN = 3$ ($UN = 8$ é inviável, já que culminaria em um dígito 1 antes de 6, impossibilitando $\alpha = 4$). Contradição! UN deve ser par.

Logo, sobra apenas $\alpha = 5$.

Samuel de Araújo Brandão, 177.814.886-79. Nível 2

Problema 3. Primeiramente, deve-se perceber no diagrama do rascunho 2, que ~~E~~ $\triangle EFD$ é um triângulo órtico, culminando em BDHF, AFHE, DHEC, BFEC, DFAC e BDEA sendo todos quadriláteros cíclicos. ~~Além disso, podemos afirmar que~~

Para provar que KDMR é cíclico, ~~de~~ temos alguns métodos: demonstrar que $\angle KDR = \angle KMR$, $\angle RKM = \angle MDR$ e $\angle PDK = \angle PRM$, sendo os mais fáceis.

~~Se~~ Pode-se perceber que $\angle MDR = 90°$ já que R é reflexão de A em relação a BC. ~~Além disso~~, Decorrente disso, $\overline{RM}$ é diâmetro de (MDR). Logo, se $\angle MKR = 90°$, KDMR certamente será cíclico. ~~Se isso for verdade,~~ Para isso ser verdade, $\angle PKM = 90°$, ou seja PKXD é cíclico, sendo X a intercessão de KM e DR.

~~Ao procurar alguns ângulos, desc descobrimos que~~ Já que $\triangle DEF$ é órtico, $\triangle FBD \sim \triangle CED \sim \triangle AFE \sim \triangle ABC$.

É possível provar que $\overline{PR} \parallel \overline{AC}$, já que isso resultaria em $\angle RPC = \angle PCA$, ~~fazendo com que $\triangle EDC \sim \triangle DPK \sim \triangle MRP$, já que $\angle EDC =$~~

Para $\angle MKR = 90°$, é certo que $\angle KPM + \angle KMP = 90°$. Além disso, $\overline{BE} \parallel \overline{KM}$ também, resultando em $\angle KPC = \angle PCA$ e $\angle EBC = \angle BMK$. Já que ~~$\angle AFE = 90° =$~~ $\angle AFC = 90° = \angle AFE + \angle EFC$ e $\angle AFE = \angle ACB$ e $\angle EFC = \angle EBC$, é certo que $\angle KPM + \angle KMP = 90°$. $\overline{BE} \parallel \overline{MK}$ pois $\triangle HDB \sim \triangle DKM$

RASCUNHO 1 N2   Samuel de Araújo Brandão, 177.814.886-79

(1) $16 = 7$, $32 = 5$, $64 = 10$, $128 = 11$ 5   56   258
                                                    556 25008

$2 \equiv 2 \pmod{10}$ 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6... Portanto, estes são os únicos valores possíveis para potências de 2 módulo 10, ou seja, são os únicos valores possíveis para a casa das unidades.

~~Pode-se afirmar que o menor~~ Seja α o menor valor possível para a soma dos dígitos da potência de 2 em questão. Pode-se afirmar que $\alpha \leq 5$, já que o α de $2^5 = 32$ equivale a 5, além de que, se a casa dos unidades de 2^x, sendo ~~o~~ x qualquer número inteiro ~~posi~~ não negativo, for igual a 4, é certo que o ~~menor valo~~ α é no mínimo 5, caso ~~o~~ o primeiro dígito da esquerda para direita for 1. Além disso, se a casa das unidades for 2, ~~o menor valor poss.~~ $\alpha \geq 3$. Com isso, sabe-se que α pode ser 3, 4 ou 5.

Se $\alpha = 3$, ~~a casa dos unidades que 2 igual a 2 e~~ pode-se afirmar que $50...06 \cdot 2 = 10...02$. Mas isso é impossível

10...02   20...04   40...08   80...16

1024   10...02 · 2^4 1024, 2048, 4096, 8192,

$\alpha = 3 \Rightarrow 100...02$

$\alpha = 4 \Rightarrow 20...02$ ou $10...1...02$

$\alpha = 5 \Rightarrow 10...04$ ou $10...1...1...02$ ou $20...1...02$ ou $30...02$

Já que nenhum número multiplicado por 2 ...

Se $\alpha = 4$, é certo que 10...06 (impossível) ~~ou 10...1...02.~~

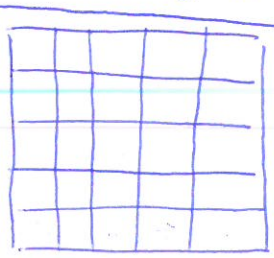
~~5...1...6~~ pois, caso fosse possível, 5...8. Mas não é possível pois...

Ou 10...1...2 é possível. ~~tas~~ Se for, logo 10...1...2 12 =

~~5...1...6~~ 5...6, logo 10...012

• $\alpha = 3$. Logo, 10...02. Portanto, 5...6

---

(2) 

Rascunho 2 A Samuel de Araújo Brandão, 177.814.886-79. Nível 2

③ Deve-se provar que $\angle KDR = \angle KMR$, $\angle RKM = \angle MDR$ ou $\angle RDK = \angle PRM$.

Querendo provar que $\angle RKM = \angle MDR$, é fato que $\angle MDR = 90^\circ$. Portanto, mostrar que $\angle RKM = 90^\circ$ também, sendo $\triangle RKM$ um triângulo retângulo, seria suficiente.

Para tanto, poderíamos mostrar que $\angle KMR + \angle KRM = 90^\circ$.

Deve-se provar que $\overline{AC} \parallel \overline{PR}$ e $\overline{FC} \parallel \overline{PX}$. Talvez até $\overline{FE} \parallel \overline{KM}$?

RM é diâmetro de (MDR)