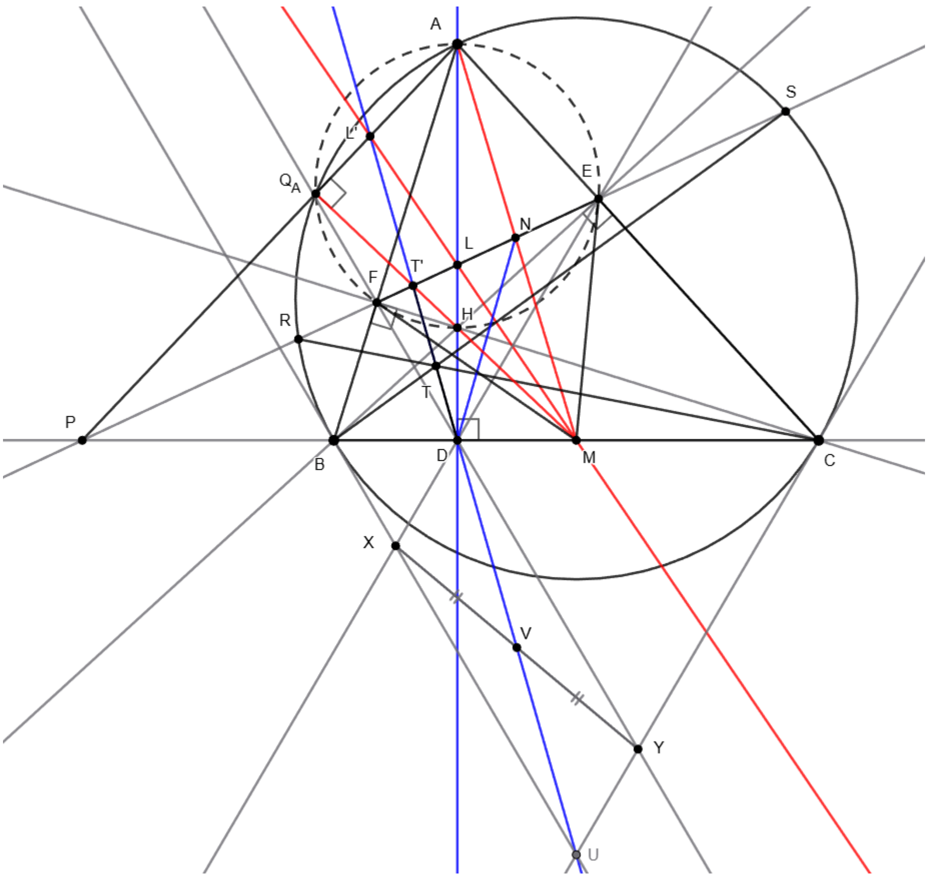
OBM 2025 - Nível 3
Critério de Correção - Problema 2

1 Enunciado

Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$ e seja Γ sua circunferência circunscrita. Defina M como o ponto médio do lado BC, e D, E e F como os pés das alturas relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente. Tome o ponto N como a interseção de EF e AM. Sejam R, S as interseções de EF e Γ, de forma que R esteja no arco menor AB de Γ e S esteja no arco menor AC de Γ. Além disso, suponha que BS e CR se encontram no ponto T. Mostre que DA é bissetriz do ângulo $\angle TDN$.



2 Soluções

Serão apresentadas duas soluções, mas podem existir outras. Essas soluções servirão apenas como referências para os critérios de correção. Outras soluções serão pontuadas fazendo equivalências com essas. Soluções completas receberão 10 pontos. As parciais de soluções diferentes não se somam. Caso um aluno consiga parciais nas duas soluções, ele receberá o máximo das parciais.

2.1 Solução 1 - Geometria Projetiva

Seja P o encontro das retas EF e BC. Suponha que DT intersecta EF em T'. É um fato conhecido de Geometria Projetiva que se $\angle PDL = 90°$ e $(P, L; T', N) = -1$, então DL é bissetriz do $\angle T'DN = \angle TDN$. Vamos provar que $(P, L; T', N) = -1$.
Usando o triângulo autopolar $T \in p$. Por Ceva e Menelaus, $(C, B; D, P) = -1$ e $D \in p$. Logo $TD = p$ é a polar de P. Podemos concluir que $(S, R; T', P) = -1$.
Seja Q_A o queue point do A ($Q_A \in \Gamma$, $\angle AQ_AM = 90°$, Q_A, H e M colineares e A, Q_A e P colineares). Seja O o centro de Γ. Como AO é isogonal de AD temos $\angle CAO = \angle BAD = 90° - B$. O quadrilátero $BFEC$ é cíclico ($\angle BFC = \angle BEC = 90°$) e $\angle AEF = B$. Segue que $AO \perp EF$, AO é mediatriz de RS e A é ponto médio do arco RS. Dessa forma, Q_AP é bissetriz externa do triângulo RQ_AS e a bissetriz interna que é perpendicular a Q_AP corta RS no conjugado harmônico de P. Logo, Q_A, T', H e M são colineares.
Seja L' o cojunto harmônico de P em relação a AQ_A, ou seja, $(A, Q_A; L', P) = -1$. Veja que a polar de P em relação a Γ passa por L', então D, T, T' e L' são colineares (polar de P em relação a Γ). Seja ω o circuncírculo de AEF. É um fato conhecido que as tangentes por E e F a ω se encontram em M. A polar m de M em relação a ω é EF. Como $P \in EF$, temos $M \in p'$ polar de P em realão a ω. Projetando $(C, B; D, P) = -1$ em EF por A temos $(E, F; L, P) = -1$ e L está em p'. Segue que $ML = p'$ é a polar e encontrar Q_AA em L'.
Projetando $(A, Q_A; L', P) = -1$ em EF por M temos $(N, T'; L, P) = -1$. Portanto, $(P, L; T', N) = -1$ e, como vimos no início, isso é suficiente para concluir que DL é bissetriz do $\angle TDN$.

2.2 Solução 2 - Trigonometria

Considere o ponto P de encontro de EF e BC. As tangentes por B e C a Γ se encontram em U. As retas DE e DF encontram BU e CU em X e Y respectivamente.
A polar u de U em relação a Γ é BC. Temos $P \in u \Rightarrow U \in p$. Logo, D, T e U colineares. Seja V o encontro de DU e XY.
Como o quadrilátero $AEDB$ é cíclico temos $\angle EDC = A$. Analogamente, $\angle FDB = A$. Usando os ângulos das tangentes e opostos pelos vértices temos $\angle XBD = \angle XDB = \angle YDC = \angle YCD = A$. Veja que $DXUY$ é um paralelogramo (lados opostos paralelos por ângulos com BC) e DU corta XY no ponto médio.
Note que DL é bissetriz de EDF (separa em dois ângulos $90° - A$), então precisamos provar que DN e DT são isogonais no triângulo EDF. Provaremos isso por trigonometria.
Suponha que $\angle FDT = x$ e $\angle TDE = y$. Por OPV, $\angle YDV = x$ e $\angle XDV = y$. Por Ceviana Qualquer (duas leis dos senos), $\frac{XV}{VY} = \frac{XD}{DY} \cdot \frac{sen\ y}{sen\ x} \Rightarrow \frac{sen\ x}{sen\ y} = \frac{XD}{DY} = \frac{BD}{DC} = \frac{c\ cosB}{b\ cosC}$ (usamos que os triângulos BDX e CDY são semelhantes e lei dos senos).
Por Ceviana Qualquer, $\frac{EN}{NF} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{sen\ \angle EAN}{sen\ \angle FAN}$ e também $\frac{CM}{MB} = \frac{CA}{AB} \cdot \frac{sen\ \angle EAN}{sen\ \angle FAN} \Rightarrow \frac{sen\ \angle EAN}{sen\ \angle FAN} = \frac{c}{b}$. Aplicando na primeira equação $\frac{EN}{NF} = \frac{c\ cosA}{b\ cosA} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c^2}{b^2}$ (isso pode ser visto mais facilmente usando propriedades da simediana). Sejam $\angle EDN = x'$ e $\angle FDN = y'$. Por Ceviana Qualquer, $\frac{EN}{NF} = \frac{ED}{DF} \cdot \frac{sen\ x'}{sen\ y'}$. Vimos que $\angle EDF = 180° - 2A$. Usando os análogos dele e fazendo lei dos senos temos $\frac{ED}{DF} = \frac{sen\ 2C}{sen\ 2B}$. Logo, $\frac{sen\ x'}{sen\ y'} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{sen\ 2B}{sen\ 2C} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{2\ sen\ B\ cos\ B}{2\ sen\ C\ cos\ C} = \frac{c\ cosB}{b\ cosC}$ (lembre-se que $\frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$).
Sege que $\frac{sen\ x}{sen\ y} = \frac{sen\ x'}{sen\ y'}$. Como $\angle EDF = S = x + y = x' + y'$ temos $\frac{sen(S-y)}{seny} = \frac{sen(S-y')}{seny'} \Rightarrow senS \cdot cotg\ y - cosS = senS \cdot cotg\ y' - cosS \Rightarrow cotg\ y = cotg\ y' \Rightarrow y = y'$ e $x = x'$. Nos passos intermediários usamos que $0 < S < 180°$, $sen\ S \neq 0$ e $0 < y, y' < 180°$ intervalo em que $cotg$ é injetora.
Portanto, DT e DN são isogonais e DL é bissetriz.

3 Critério de Correção

3.1 Solução 1

1. Citar o fato conhecido de geometria projetiva e concluir que basta provar que $(P, L; T', N) = -1$ **2 pontos**
2. Provar que DT é a polar do ponto P .... **1 ponto**
3. Provar que A é ponto médio do arco RS (não será aceito como fato conhecido) .... **1 ponto**
4. Provar que Q_A, T' e M são colineares .... **2 pontos**
5. Provar que LM e DT cortam Q_AA no mesmo ponto L' .... **2 pontos**
6. Projetar por M e concluir que $(P, L; T', N) = -1$ .... **2 pontos**

3.2 Solução 2

1. Provar que DL é bissetriz de EDF (pode usar triângulo órtico, mas não pode apenas citar como conhecido) .... **1 ponto**
2. Provar que basta provar que DT e DN são isogonais (poderia ser $\angle FDT = \angle EDN$) ... **1 ponto**
3. Provar que DT passa no ponto U .... **1 ponto**
4. Provar que DT corta XY no ponto médio .... **1 ponto**
5. Provar que $x = x'$ e $y = y'$ .... **6 pontos**
6. Parciais do último item serão muito restritos, pois serão contas trigonométricas ... **até 3 pontos**

3.3 As seguintes observações não valem ponto:

1. Apenas marcar pontos extras como P e Q_A sem entrar em especificidades do problema . **0 ponto**
2. Soluções com contas que não tenham paralelo em geometria sintética .... **0 ponto**

Observações:

1. Propriedades mais importantes do Humpty Point e do Queue Point podem ser usadas sem justificativa como fatos conhecidos.
2. Houve alguns descontos por falta de justificativa. Por exemplo, DA ser bissetriz de $\angle EDF$ vale 1 ponto e não pode ser colocado apenas como fato conhecdo. Justificativas simples como H incentro do triângulo órtico ou apenas pelo triângulo órtico são aceitas. Outro exemplo que precisa justificar é que $AR = AS$ que também vale 1 ponto. Um exemplo de justificativa aceita é inversão de centro A e raio $\sqrt{AH \cdot AD}$. Outro exemplo, é $AO \perp EF$ por isogonais e AO mediatriz de RS.