

Soluções Jacob Palis 2023 N2

Samuel de Araújo Brandão

4 de Setembro de 2025

Uma coleção de soluções para a **Jacob Palis 2023 Nível 2**, inspirada no estilo de Evan Chen. Pode-se encontrar todos os problemas e respostas oficiais [aqui](#).

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

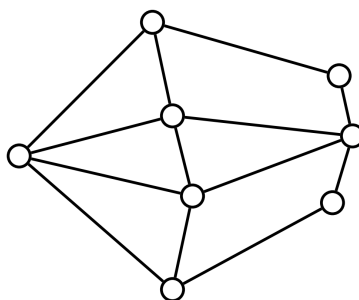
Conteúdos

1	Problemas	2
1.1	Testes	2
1.2	Respostas Numéricas	3
2	Soluções	5
2.1	Testes	5
2.2	Respostas Numéricas	5
3	Referências	6

1 Problemas

1.1 Testes

1. Ana foi à feira com 20 reais, comprou 3 bananas e 2 peras e recebeu certo valor de troco. Mais tarde, seu irmão João foi ao mesmo local com 29 reais, comprou 5 bananas e 3 peras e também recebeu troco. Depois Maria, mãe de João e Ana, comprou mais uma banana e uma pera. Sabendo que Ana, João e Maria receberam a mesma quantia de troco, quantos reais Maria levou para a feira?
2. Regis vai comprar uma capinha personalizada de celular na internet. A capinha custa 100 reais, o frete custa 20 reais e a personalização custa 30 reais. Regis possui dois cupons de desconto, mas só pode usar um deles. O primeiro dá frete grátis e o segundo dá desconto de 20% no total da compra (capinha, frete e personalização). Se Regis usar o cupom no qual paga o menor valor possível, quanto Regis vai pagar?
3. José preencheu um tabuleiro 3×3 com os números de 1 a 9 e notou que a soma dos números em k filas (linhas ou colunas) era ímpar. Quantos são os possíveis valores para k ?
4. Qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir as bolinhas da figura abaixo de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores distintas?



5. José escreveu no quadro a igualdade

$$2^n + 2^n + \cdots + 2^n = 15360.$$

Maria percebeu que havia $2m + 1$ parcelas iguais a 2^n no lado esquerdo, sendo m um número inteiro. Quanto vale $m + n$?

6. O número de seis algarismos $N = (2aaaa6)$ é divisível por 24. A soma dos algarismos de N é quanto?

7. Sendo x e y reais tais que

$$\frac{x+1}{2^y+1} = \frac{x+2}{2^y+2} = k,$$

quanto vale k ?

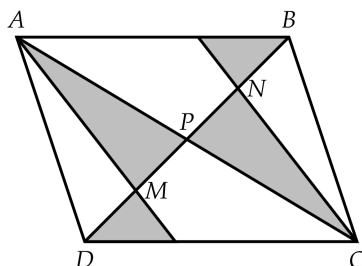
8. De quantas maneiras podemos pintar as letras da palavra JACOB se as vogais devem ser coloridas de azul ou vermelho e as consoantes devem ser coloridas de azul ou verde e, além disso, não podemos ter letras adjacentes com a mesma cor?

9. As letras O, B, M, J, P representam algarismos distintos. Sabendo que

$$OBM + OBM = JP \cdot JP,$$

qual é o valor de $O + B + M + J + P$?

10. Na figura a seguir, $ABCD$ é um paralelogramo. Os pontos M e N são pontos médios de DP e BP , respectivamente. Se a área do paralelogramo $ABCD$ é 24, qual é a área da região sombreada?



11. Seja $X \subset \{1, 2, \dots, 2023\}$ tal que, se $a, b \in X$, então $a + b$ não é múltiplo de 3. Qual é o maior valor possível da quantidade de elementos de X ?

12. O número

$$\sqrt{2022^2 + 2023^2 + (2022 \cdot 2023)^2} + \sqrt{2023^2 + 2024^2 + (2023 \cdot 2024)^2}$$

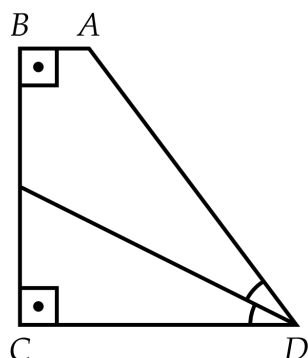
é qual tipo de número (irracional, inteiro e múltiplo de 3, inteiro e múltiplo de 5, inteiro e múltiplo de 8, primo)?

13. No triângulo acutângulo ABC , AH é altura, com H sobre BC . Sejam P e Q as projeções de H em AB e AC , respectivamente. Sabendo que $\angle ABC - \angle ACB = 20^\circ$. Qual é o ângulo agudo determinado pelas retas PQ e AH ?
14. Sejam a e b números reais. As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são r e s , e as raízes da equação $x^2 - (b + 3)x + (a + 3) = 0$ são $1/r$ e $1/s$. Então $(b + 1)^3$ é igual a quê?
15. Considere que n times de futebol jogam exatamente uma vez contra cada um dos outros $n - 1$ times. Em cada partida, o time vencedor ganha 3 pontos e o perdedor 0; em caso de empate, cada time ganha 1 ponto. Ao fim do campeonato, ordenamos os times por pontos em ordem decrescente. Para $n = 3$, há sete possibilidades de pontuações dos três times listadas. Para $n = 4$, há quantas possibilidades de pontuação dos quatro times?

1.2 Respostas Numéricas

16. Se a e b são inteiros positivos tais que $\gcd(a, b) = 6$ e $\text{lcm}(a, b) = 36a^2$, quanto vale $a + b$?
17. De quantos modos podemos colorir um tabuleiro 2×8 de modo que cada quadrado unitário seja verde ou amarelo e cada quadrado 2×2 possua três quadrados unitários de uma cor e o outro da cor oposta?

18. No trapézio retângulo $ABCD$, com $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, a base AB mede 104 e a base CD mede 234. Sabendo que a bissetriz do ângulo D intersecta BC no seu ponto médio, determine a medida do lado BC .



19. Um número é chamado de perfeito quando nenhum dos seus algarismos é zero e a soma dos seus algarismos é um quadrado perfeito. Por exemplo, 97, 112 e 1111 são números perfeitos com 2, 3 e 4 algarismos, respectivamente. Luiz escreveu todos os números perfeitos de 2023 algarismos. Quantos valores possíveis para a soma dos algarismos dos números da lista?
20. A sequência de Fibonacci começa com 1, 1, e cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois anteriores. Entre os 100 primeiros termos, quantos são múltiplos de 3 ou de 4?

2 Soluções

2.1 Testes

2.2 Respostas Numéricas

3 Referências