

Soluções TM² 2021A 2º fase

Samuel de Araújo Brandão

9 de Agosto de 2025

Uma coleção de soluções para a **TM² 2021 nível A 2º Fase**, inspirada no estilo de Evan Chen.

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

Conteúdos

| | |
|-------------------------|----------|
| 1 Problemas | 2 |
| 2 Soluções | 3 |
| 2.1 Problema 1. | 3 |
| 2.2 Problema 2. | 4 |
| 2.3 Problema 3. | 5 |
| 2.4 Problema 4. | 6 |
| 3 Referências | 7 |

1 Problemas

1. Sejam a, b, c números reais positivos tais que:

$$ab - c = 3$$

$$abc = 18$$

Calcule o valor numérico de $\frac{ab}{c}$.

2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo em que $\angle ACB = 40^\circ$ e $\angle BAC = 60^\circ$. Seja D um ponto no interior do segmento BC tal que $CD = \frac{AB}{2}$ e seja M o ponto médio do segmento AC . Quanto mede o ângulo $\angle CMD$ em graus?
3. Um número natural é chamado *caótigal* se ele e seu sucessor possuem, ambos, a soma dos seus algarismos divisível por 2021. Quantos algarismos tem o menor número *caótigal*?
4. Mariana brinca com um tabuleiro 8×8 com todas as suas casas em branco. Ela diz que duas casas são vizinhas se elas possuírem um lado ou um vértice em comum, ou seja, duas casas podem ser vizinhas verticalmente, horizontalmente ou diagonalmente. A brincadeira consiste em preencher as 64 casas do tabuleiro, uma após a outra, cada uma com um número de acordo com a seguinte regra: ela escolhe sempre uma casa em branco e a preenche com o número inteiro igual à quantidade de casas vizinhas desta que ainda estejam em branco. Feito isso, a casa não é mais considerada em branco.

Demonstre que o valor da soma de todos os 64 números escritos no tabuleiro ao final da brincadeira não depende da ordem do preenchimento. Além disso, calcule o valor dessa soma. *Observação: Uma casa não é vizinha a si mesma.*

2 Soluções

2.1 Problema 1.

Enunciado do problema

Sejam a, b, c números reais positivos tais que:

$$ab - c = 3$$

$$abc = 18$$

Calcule o valor numérico de $\frac{ab}{c}$.

Já que $ab - c = 3$,

$$ab = 3 + c \implies c^2 + 3c = 18 \implies c^2 + 3c - 18 = 0.$$

Pela *Fórmula de Bhaskara*,

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 9}{2}.$$

Logo, $c_1 = 3$, $c_2 = -6$. Segundo o enunciado, a, b, c são positivos, logo $c = 3$.

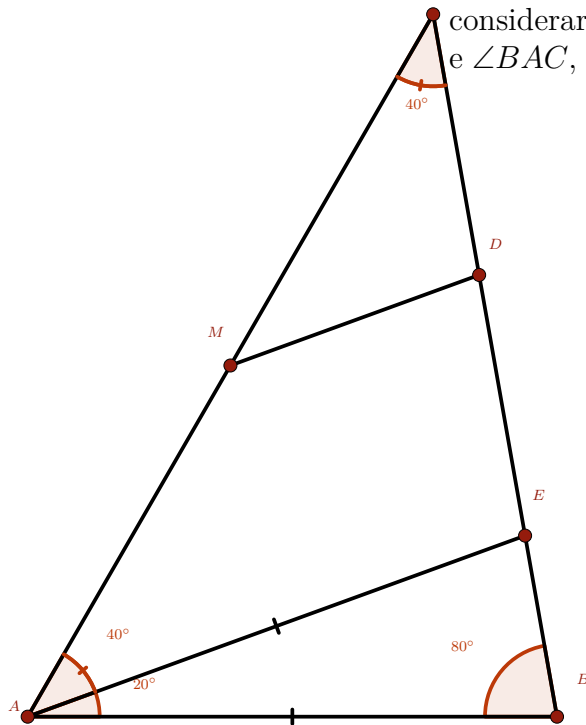
$$\frac{ab}{c} = \frac{3 + c}{c} = \frac{6}{3} = 2.$$

2.2 Problema 2.

Enunciado do problema

Seja $\triangle ABC$ um triângulo em que $\angle ACB = 40^\circ$ e $\angle BAC = 60^\circ$. Seja D um ponto no interior do segmento BC tal que $CD = \frac{AB}{2}$ e seja M o ponto médio do segmento AC . Quanto mede o ângulo $\angle CMD$ em graus?

Este problema é um clássico da geometria envolvendo triângulos e ângulos internos. A figura ao lado ajuda a visualizar os pontos e os segmentos mencionados no enunciado. Podemos usar propriedades de triângulos e razões para determinar a medida do ângulo $\angle CMD$. Para isso, é importante considerar as informações sobre os ângulos $\angle ACB$ e $\angle BAC$, bem como as posições dos pontos D e M .



2.3 Problema 3.

Enunciado do problema

Um número natural é chamado *caótigal* se ele e seu sucessor possuem, ambos, a soma dos seus algarismos divisível por 2021. Quantos algarismos tem o menor número *caótigal*?

2.4 Problema 4.

Enunciado do problema

Mariana brinca com um tabuleiro 8×8 com todas as suas casas em branco. Ela diz que duas casas são vizinhas se elas possuírem um lado ou um vértice em comum, ou seja, duas casas podem ser vizinhas verticalmente, horizontalmente ou diagonalmente. A brincadeira consiste em preencher as 64 casas do tabuleiro, uma após a outra, cada uma com um número de acordo com a seguinte regra: ela escolhe sempre uma casa em branco e a preenche com o número inteiro igual à quantidade de casas vizinhas desta que ainda estejam em branco. Feito isso, a casa não é mais considerada em branco.

Demonstre que o valor da soma de todos os 64 números escritos no tabuleiro ao final da brincadeira não depende da ordem do preenchimento. Além disso, calcule o valor dessa soma. *Observação: Uma casa não é vizinha a si mesma.*

3 Referências