Soluções Jacob Palis 2023 N2

Samuel de Araújo Brandão

4 de Setembro de 2025

Uma coleção de soluções para a **Jacob Palis 2023 Nível 2**, inspirada no estilo de Evan Chen. Pode-se encontrar todos os problemas e respostas oficiais **aqui**.

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

Conteúdos

1 Problemas

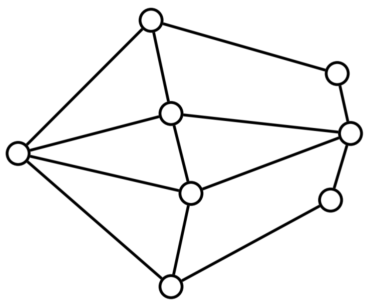
1.1 Testes

1. Ana foi à feira com 20 reais, comprou 3 bananas e 2 peras e recebeu certo valor de troco. Mais tarde, seu irmão João foi ao mesmo local com 29 reais, comprou 5 bananas e 3 peras e também recebeu troco. Depois Maria, mãe de João e Ana, comprou mais uma banana e uma pera. Sabendo que Ana, João e Maria receberam a mesma quantia de troco, quantos reais Maria levou para a feira?

2. Regis vai comprar uma capinha personalizada de celular na internet. A capinha custa 100 reais, o frete custa 20 reais e a personalização custa 30 reais. Regis possui dois cupons de desconto, mas só pode usar um deles. O primeiro dá frete grátis e o segundo dá desconto de 20% no total da compra (capinha, frete e personalização). Se Regis usar o cupom no qual paga o menor valor possível, quanto Regis vai pagar?

3. José preencheu um tabuleiro 3×3 com os números de 1 a 9 e notou que a soma dos números em k filas (linhas ou colunas) era ímpar. Quantos são os possíveis valores para k?

4. Qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir as bolinhas da figura abaixo de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores distintas?



5. José escreveu no quadro a igualdade

$$2^n + 2^n + \cdots + 2^n = 15360.$$

Maria percebeu que havia $2m + 1$ parcelas iguais a 2^n no lado esquerdo, sendo m um número inteiro. Quanto vale $m + n$?

6. O número de seis algarismos $N = (2aaaa6)$ é divisível por 24. A soma dos algarismos de N é quanto?

7. Sendo x e y reais tais que

$$\frac{x + 1^2}{y + 1} = \frac{x + 2^2}{y + 2} = k,$$

quanto vale k?

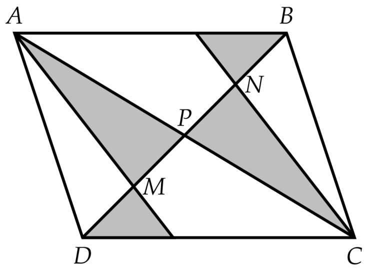
8. De quantas maneiras podemos pintar as letras da palavra JACOB se as vogais devem ser coloridas de azul ou vermelho e as consoantes devem ser coloridas de azul ou verde e, além disso, não podemos ter letras adjacentes com a mesma cor?

9. As letras O, B, M, J, P representam algarismos distintos. Sabendo que

$$OBM + OBM = JP \cdot JP,$$

qual é o valor de $O + B + M + J + P$?

10. Na figura a seguir, $ABCD$ é um paralelogramo. Os pontos M e N são pontos médios de DP e BP, respectivamente. Se a área do paralelogramo $ABCD$ é 24, qual é a área da região sombreada?



11. Seja X um subconjunto de $1, 2, \ldots, 2023$ (conjunto dos inteiros de 1 até 2023) tal que se a e b pertencem a X, então $a + b$ não é múltiplo de 3. Qual é o maior valor possível da quantidade de elementos de X?

12. O número

$$\sqrt{2022^2 + 2023^2 + (2022 \cdot 2023)^2} + \sqrt{2023^2 + 2024^2 + (2023 \cdot 2024)^2}$$

é

(A) número irracional

(B) inteiro e múltiplo de 3

(C) inteiro e múltiplo de 5

(D) inteiro e múltiplo de 8

(E) primo?

13. No triângulo acutângulo ABC, AH é altura, com H sobre BC. Sejam P e Q as projeções de H em AB e AC, respectivamente. Sabendo que $\angle ABC - \angle ACB = 20°$. Qual é a medida do ângulo agudo determinado pelas retas PQ e AH?

14. Sejam a e b números reais. As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são r e s, e as raízes da equação $x^2 - (b + 3)x + (a + 3) = 0$ são $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{s}$. Então $(b + 1)^3$ é igual a quê?

15. Considere que n times de futebol jogam exatamente uma vez contra cada um dos outros $n - 1$ times. Em cada partida, o time vencedor ganha 3 pontos e o perdedor 0; em caso de empate, cada time ganha 1 ponto. Ao fim do campeonato, ordenamos os times por pontos em ordem decrescente.

Para $n = 3$, há sete possibilidades de pontuações dos três times: (6; 3; 0), (6; 1; 1), (4; 4; 0), (4; 3; 1), (4; 2; 1), (3; 3; 3) e (2; 2; 2).

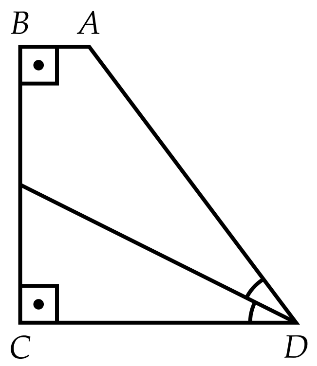
Para $n = 4$, há quantas possibilidades de pontuação dos quatro times?

1.2 Respostas Numéricas

16. Se a e b são inteiros positivos tais que $\text{mdc}(a, b) = 6$ e $\text{mmc}(a, b) = 36a^2$, quanto vale $a + b$?

17. De quantos modos podemos colorir um tabuleiro 2×8 de modo que cada quadrado unitário seja verde ou amarelo e cada quadrado 2×2 possua três quadrados unitários de uma cor e o outro da cor oposta?

18. No trapézio retângulo $ABCD$, com $\angle ABC = \angle BCD = 90°$, a base AB mede 104 e a base CD mede 234. Sabendo que a bissetriz do ângulo D intersects BC no seu ponto médio, determine a medida do lado BC.



19. Um número é chamado de perfeitoso quando nenhum dos seus algarismos é zero e a soma dos seus algarismos é um quadrado perfeito. Por exemplo, 97, 112 e 1111 são números perfeitosos com 2, 3 e 4 algarismos, respectivamente. Luiz escreveu todos os números perfeitosos de 2023 algarismos. Quantos valores possíveis para a soma dos algarismos dos números da lista?

20. A *sequência de Fibonacci* é uma sequência em que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores, sendo os dois termos iniciais iguais a 1. Então, os primeiros termos da sequência são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Dentre os 100 primeiros termos da sequência, quantos são múltiplos de 3 **ou** 4?

2 Soluções

2.1 Problema 1

Enunciado

Ana foi à feira com 20 reais, comprou 3 bananas e 2 peras e recebeu certo valor de troco. Mais tarde, seu irmão João foi ao mesmo local com 29 reais, comprou 5 bananas e 3 peras e também recebeu troco. Depois Maria, mãe de João e Ana, comprou mais uma banana e uma pera. Sabendo que Ana, João e Maria receberam a mesma quantia de troco, quantos reais Maria levou para a feira?

2.2 Problema 2

Enunciado

Regis vai comprar uma capinha personalizada de celular na internet. A capinha custa 100 reais, o frete custa 20 reais e a personalização custa 30 reais. Regis possui dois cupons de desconto, mas só pode usar um deles. O primeiro dá frete grátis e o segundo dá desconto de 20% no total da compra (capinha, frete e personalização). Se Regis usar o cupom no qual paga o menor valor possível, quanto Regis vai pagar?

2.3 Problema 3

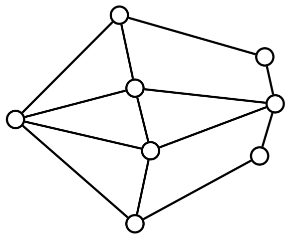
Enunciado

José preencheu um tabuleiro 3×3 com os números de 1 a 9 e notou que a soma dos números em k filas (linhas ou colunas) era ímpar. Quantos são os possíveis valores para k?

2.4 Problema 4

Enunciado

Qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir as bolinhas da figura abaixo de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores distintas?



2.5 Problema 5

Enunciado

José escreveu no quadro a igualdade

$$2^n + 2^n + \cdots + 2^n = 15360.$$

Maria percebeu que havia $2m + 1$ parcelas iguais a 2^n no lado esquerdo, sendo m um número inteiro. Quanto vale $m + n$?

2.6 Problema 6

Enunciado

O número de seis algarismos $N = (2aaaa6)$ é divisível por 24. A soma dos algarismos de N é quanto?

2.7 Problema 7

Enunciado

Sendo x e y reais tais que

$$\frac{x+1^2}{y+1} = \frac{x+2^2}{y+2} = k,$$

quanto vale k?

2.8 Problema 8

Enunciado

De quantas maneiras podemos pintar as letras da palavra JACOB se as vogais devem ser coloridas de azul ou vermelho e as consoantes devem ser coloridas de azul ou verde e, além disso, não podemos ter letras adjacentes com a mesma cor?

2.9 Problema 9

Enunciado

As letras O, B, M, J, P representam algarismos distintos. Sabendo que

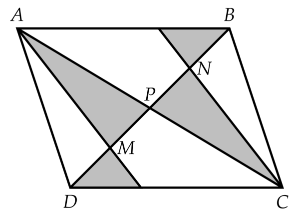
$$OBM + OBM = JP \cdot JP,$$

qual é o valor de $O + B + M + J + P$?

2.10 Problema 10

Enunciado

Na figura a seguir, $ABCD$ é um paralelogramo. Os pontos M e N são pontos médios de DP e BP, respectivamente. Se a área do paralelogramo $ABCD$ é 24, qual é a área da região sombreada?



2.11 Problema 11

Enunciado

Seja X um subconjunto de $1, 2, \dots, 2023$ (conjunto dos inteiros de 1 até 2023) tal que se a e b pertencem a X, então $a + b$ não é múltiplo de 3. Qual é o maior valor possível da quantidade de elementos de X?

2.12 Problema 12

Enunciado

O número

$$\sqrt{2022^2 + 2023^2 + (2022 \cdot 2023)^2} + \sqrt{2023^2 + 2024^2 + (2023 \cdot 2024)^2}$$

é

(A) número irracional

(B) inteiro e múltiplo de 3

(C) inteiro e múltiplo de 5

(D) inteiro e múltiplo de 8

(E) primo?

2.13 Problema 13

Enunciado

No triângulo acutângulo ABC, AH é altura, com H sobre BC. Sejam P e Q as projeções de H em AB e AC, respectivamente. Sabendo que $\angle ABC - \angle ACB = 20°$. Qual é a medida do ângulo agudo determinado pelas retas PQ e AH?

2.14 Problema 14

Enunciado

Sejam a e b números reais. As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são r e s, e as raízes da equação $x^2 - (b+3)x + (a+3) = 0$ são $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{s}$. Então $(b+1)^3$ é igual a quê?

2.15 Problema 15

Enunciado

Considere que n times de futebol jogam exatamente uma vez contra cada um dos outros $n-1$ times. Em cada partida, o time vencedor ganha 3 pontos e o perdedor 0; em caso de empate, cada time ganha 1 ponto. Ao fim do campeonato, ordenamos os times por pontos em ordem decrescente.

Para $n = 3$, há sete possibilidades de pontuações dos três times: (6; 3; 0), (6; 1; 1), (4; 4; 0), (4; 3; 1), (4; 2; 1), (3; 3; 3) e (2; 2; 2).

Para $n = 4$, há quantas possibilidades de pontuação dos quatro times?

2.16 Problema 16

Enunciado

Se a e b são inteiros positivos tais que $\text{mdc}(a, b) = 6$ e $\text{mmc}(a, b) = 36a^2$, quanto vale $a + b$?

2.17 Problema 17

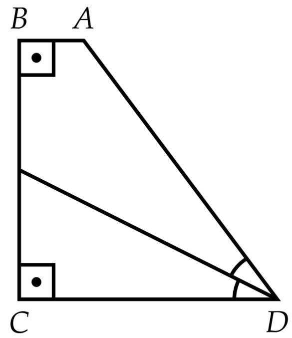
Enunciado

De quantos modos podemos colorir um tabuleiro 2×8 de modo que cada quadrado unitário seja verde ou amarelo e cada quadrado 2×2 possua três quadrados unitários de uma cor e o outro da cor oposta?

2.18 Problema 18

Enunciado

No trapézio retângulo $ABCD$, com $\angle ABC = \angle BCD = 90°$, a base AB mede 104 e a base CD mede 234. Sabendo que a bissetriz do ângulo D intersects BC no seu ponto médio, determine a medida do lado BC.



2.19 Problema 19

Enunciado

Um número é chamado de perfeitoso quando nenhum dos seus algarismos é zero e a soma dos seus algarismos é um quadrado perfeito. Por exemplo, 97, 112 e 1111 são números perfeitosos com 2, 3 e 4 algarismos, respectivamente. Luiz escreveu todos os números perfeitosos de 2023 algarismos. Quantos valores possíveis para a soma dos algarismos dos números da lista?

2.20 Problema 20

Enunciado

A *sequência de Fibonacci* é uma sequência em que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores, sendo os dois termos iniciais iguais a 1. Então, os primeiros termos da sequência são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Dentre os 100 primeiros termos da sequência, quantos são múltiplos de 3 **ou** 4?

3 Referências