

Soluções OMpD 2022 N2 Fase 1

Samuel de Araújo Brandão

5 de Setembro de 2025

Uma coleção de soluções para a **OMpD 2022 Nível 2 Fase 1**, inspirada no estilo de Evan Chen. Pode-se encontrar todos os problemas [aqui](#) e as respostas oficiais [aqui](#).

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

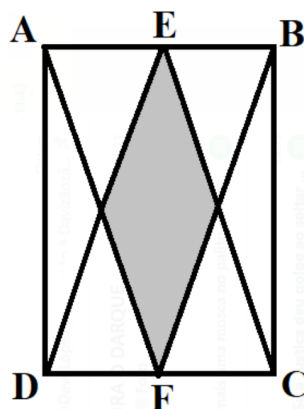
Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

Conteúdos

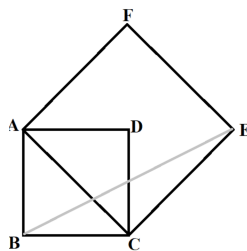
1	Problemas	2
2	Soluções	6
2.1	Problema 1	6
2.2	Problema 2	7
2.3	Problema 3	8
2.4	Problema 4	9
2.5	Problema 5	10
2.6	Problema 6	11
2.7	Problema 7	12
2.8	Problema 8	13
2.9	Problema 9	14
2.10	Problema 10	15
2.11	Problema 11	16
2.12	Problema 12	17
2.13	Problema 13	18
2.14	Problema 14	19
2.15	Problema 15	20
2.16	Problema 16	21
2.17	Problema 17	22
2.18	Problema 18	23
2.19	Problema 19	24
2.20	Problema 20	25
3	Referências	26

1 Problemas

- Qual o valor de $(-1)^{1^1} + (-1)^{2^2} + (-1)^{3^3} + \dots + (-1)^{2022^{2022}}$?
(A) 2022 (B) 1 (C) -1 (D) -2022 (E) 0
- Ana pensou em um número de dois dígitos N , onde o último dígito de N é 7. Ela somou os dígitos de $4N$ e obteve soma 13. Qual o primeiro dígito de N ?
(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9
- Temos 33 chocolates e colocamos cada um deles em uma dentre 7 caixas (algumas caixas podem ficar vazias). É possível afirmar que:
(A) Existe uma caixa com pelo menos 6 chocolates
(B) Existe uma caixa com no máximo 3 chocolates
(C) Existe uma caixa com um número par de chocolates
(D) Existe uma caixa com um número ímpar de chocolates
(E) Existem duas caixas com o mesmo número de chocolates
- Sabendo que $ABCD$ é um retângulo e que E, F são os pontos médios de \overline{AB} e \overline{CD} , respectivamente, qual a porcentagem da área do retângulo corresponde à área hachurada?

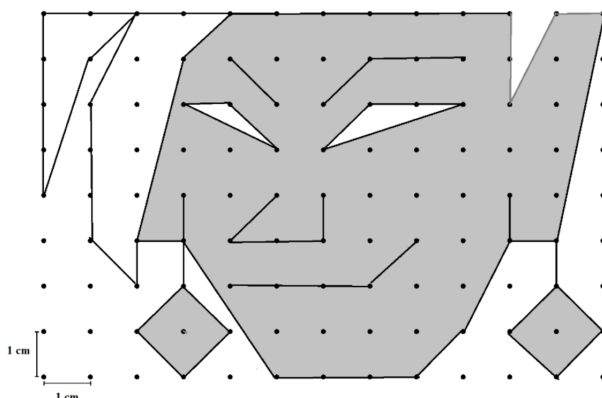


- (A) 5% (B) 10% (C) 15% (D) 20% (E) 25%
- Na figura abaixo, os polígonos $ABCD$ e $ACEF$ são quadrados. Se $AB = 1$, quanto é a medida do segmento BE ?



- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{3}$

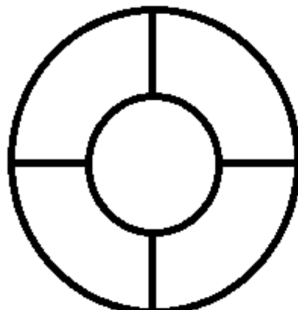
6. Qual o resto da divisão de $113333 + 331111$ por 7?
(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 6
7. Uma loja de computadores teve a seguinte ideia pensando na “Black Friday”: no mês de outubro, aumentou o valor dos computadores em $(5p)\%$ em relação a setembro, e no mês de novembro, reduziu o valor dos mesmos em $(4p)\%$ em relação a outubro. Sabe-se que o preço do computador é o mesmo em setembro e novembro (que novidade...). Qual é o valor de p ?
(a) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 15
8. Dizemos que um inteiro positivo é avizinhado se a diferença entre quaisquer dois de seus dígitos consecutivos é sempre igual a 1. Por exemplo, 123456, 987654 e 45656765 são avizinhados. Quantos são os inteiros entre 500.000 e 600.000 que são avizinhados?
(A) 8 (B) 10 (C) 31 (D) 32 (E) 64
9. De quantas maneiras podemos colocar 5 garotas em fila, sendo 3 delas Ana, Beatriz e Carla, de modo que Ana fique entre Beatriz e Carla?
(A) 6 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 60
10. Uma cidade euclidiana possui 2 pontos turísticos A e B , ligados por uma linha reta de 420 metros de comprimento. Ana e Beatriz partem, do ponto A , em linha reta, em direção ao ponto B , com velocidades constantes de 5 metros por segundo e 3 metros por segundo, respectivamente. Enquanto isso, Carla parte do ponto B , em linha reta, em direção ao ponto A , com velocidade constante de 3 metros por segundo. Sabendo que as 3 garotas partem simultaneamente, quanto tempo após a partida Carla estará novamente a uma mesma distância de Ana e Beatriz?
(A) 30 segundos (B) 40 segundos (C) 50 segundos (D) 60 segundos (E) 70 segundos
11. No reticulado a seguir, a distância entre quaisquer dois pontos adjacentes na horizontal ou na vertical é igual a 1 cm. Qual é a área, em cm^2 , da região hachurada?



- (A) 60 (B) 61 (C) 62 (D) 63 (E) 64
12. Sabe-se que o número $\underbrace{111 \dots 11}_{k \text{ 1's}}$ é múltiplo de 17, onde k é um inteiro positivo. Qual é o menor valor possível de k ?
(A) 4 (B) 11 (C) 16 (D) 18 (E) 34

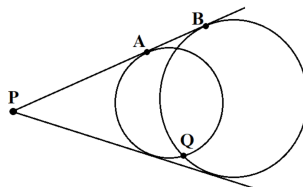
13. De quantos modos podemos pintar as 5 regiões da figura abaixo, usando em cada região uma dentre as cores preto, amarelo, rosa, azul e vermelho, de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes?

Observação: não é obrigatório que todas as 5 cores sejam usadas na pintura.



- (A) 120 (B) 240 (C) 420 (D) 540 (E) 1280
14. Numa sala de aula, a quantidade de meninos é o dobro da quantidade de meninas. Certa vez, foi aplicada uma prova de matemática, e nessa prova a média dos meninos foi 7,4 enquanto a média das meninas foi 8,6. Qual foi a média das notas dos alunos da sala?
- (A) 7,6 (B) 7,8 (C) 8 (D) 8,2 (E) 8,4
15. No triângulo ABC , temos $AB = 2AC$. Sejam D, E pontos em $\overline{AB}, \overline{BC}$, respectivamente, tais que $\angle BAE = \angle ACD$. Seja F a interseção dos segmentos \overline{AE} e \overline{CD} , e suponha que o triângulo CFE é equilátero. Qual é a medida do ângulo $\angle ACB$?
- (A) 60° (B) 75° (C) 90° (D) 105° (E) 120°
16. Para cada inteiro positivo n , sejam:
- $$T_n = 1 + 2 + \cdots + n$$
- $$P_n = \left(\frac{T_2}{T_2 - 1}\right) \left(\frac{T_3}{T_3 - 1}\right) \cdots \left(\frac{T_n}{T_n - 1}\right)$$
- Qual é a alternativa mais próxima do valor numérico de P_{2022} ?
- (A) 2,90 (B) 2,93 (C) 2,96 (D) 2,99 (E) 3,02
17. Dizemos que um número inteiro é um “Matemático por Diversão” se ele pode ser escrito como a diferença de 2 quadrados perfeitos não nulos. Por exemplo, 3 é Matemático por Diversão, pois $3 = 2^2 - 1^2$. Quantos são os inteiros positivos, que não excedem 2022, que são Matemáticos por Diversão?
- (A) 506 (B) 507 (C) 1514 (D) 1516 (E) 2020
18. Seja $M = 3318084147$. Qual dos números abaixo é um quadrado perfeito?
- (A) M (B) $3M$ (C) $5M$ (D) $7M$ (E) $11M$
19. Sejam x, y números reais positivos tais que $x^2 + y^2 = 7$ e $x^3 + y^3 = 18$. Quanto vale $x^4 + y^4$?
- (A) 25 (B) 29 (C) 31 (D) 47 (E) 49

20. Duas circunferências, de raios 3 e 4, se cortam em dois pontos, sendo Q um desses pontos. Traçam-se as tangentes externas comuns às duas circunferências. As duas tangentes se cortam em P e uma dessas tangentes tangencia as circunferências nos pontos A e B , conforme a figura abaixo:
Se $AB = 6$, quanto vale PQ ?



- (A) 12 (B) $12\sqrt{3}$ (C) 21 (D) $21\sqrt{3}$ (E) 15

2 Soluções

2.1 Problema 1

Enunciado

Qual o valor de $(-1)^{1^1} + (-1)^{2^2} + (-1)^{3^3} + \cdots + (-1)^{2022^{2022}}$?

(A) 2022 (B) 1 (C) -1 (D) -2022 (E) 0

2.2 Problema 2

Enunciado

Ana pensou em um número de dois dígitos N , onde o último dígito de N é 7. Ela somou os dígitos de $4N$ e obteve soma 13. Qual o primeiro dígito de N ?

(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

2.3 Problema 3

Enunciado

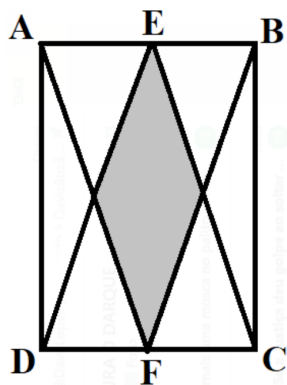
Temos 33 chocolates e colocamos cada um deles em uma dentre 7 caixas (algumas caixas podem ficar vazias). É possível afirmar que:

- (A) Existe uma caixa com pelo menos 6 chocolates
- (B) Existe uma caixa com no máximo 3 chocolates
- (C) Existe uma caixa com um número par de chocolates
- (D) Existe uma caixa com um número ímpar de chocolates
- (E) Existem duas caixas com o mesmo número de chocolates

2.4 Problema 4

Enunciado

Sabendo que $ABCD$ é um retângulo e que E, F são os pontos médios de \overline{AB} e \overline{CD} , respectivamente, qual a porcentagem da área do retângulo corresponde à área hachurada?

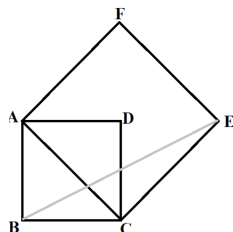


(A) 5% (B) 10% (C) 15% (D) 20% (E) 25%

2.5 Problema 5

Enunciado

Na figura abaixo, os polígonos $ABCD$ e $ACEF$ são quadrados. Se $AB = 1$, quanto é a medida do segmento BE ?



- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{3}$

2.6 Problema 6

Enunciado

Qual o resto da divisão de $113333 + 331111$ por 7?
(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 6

2.7 Problema 7

Enunciado

Uma loja de computadores teve a seguinte ideia pensando na “Black Friday”: no mês de outubro, aumentou o valor dos computadores em $(5p)\%$ em relação a setembro, e no mês de novembro, reduziu o valor dos mesmos em $(4p)\%$ em relação a outubro. Sabe-se que o preço do computador é o mesmo em setembro e novembro (que novidade...). Qual é o valor de p ?

(a) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 15

2.8 Problema 8

Enunciado

Dizemos que um inteiro positivo é avizinado se a diferença entre quaisquer dois de seus dígitos consecutivos é sempre igual a 1. Por exemplo, 123456, 987654 e 45656765 são avizinados. Quantos são os inteiros entre 500.000 e 600.000 que são avizinados?

(A) 8 (B) 10 (C) 31 (D) 32 (E) 64

2.9 Problema 9

Enunciado

De quantas maneiras podemos colocar 5 garotas em fila, sendo 3 delas Ana, Beatriz e Carla, de modo que Ana fique entre Beatriz e Carla?

(A) 6 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 60

2.10 Problema 10

Enunciado

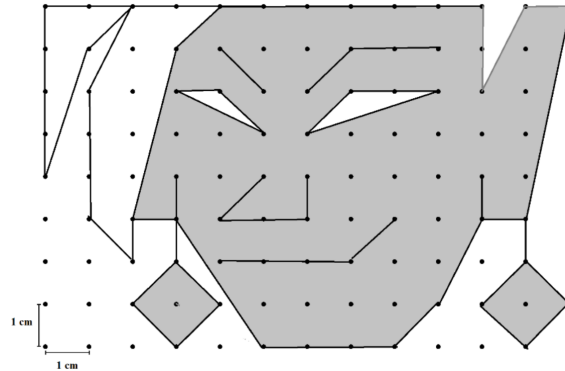
Uma cidade euclidiana possui 2 pontos turísticos A e B , ligados por uma linha reta de 420 metros de comprimento. Ana e Beatriz partem, do ponto A , em linha reta, em direção ao ponto B , com velocidades constantes de 5 metros por segundo e 3 metros por segundo, respectivamente. Enquanto isso, Carla parte do ponto B , em linha reta, em direção ao ponto A , com velocidade constante de 3 metros por segundo. Sabendo que as 3 garotas partem simultaneamente, quanto tempo após a partida Carla estará novamente a uma mesma distância de Ana e Beatriz?

(A) 30 segundos (B) 40 segundos (C) 50 segundos (D) 60 segundos (E) 70 segundos

2.11 Problema 11

Enunciado

No reticulado a seguir, a distância entre quaisquer dois pontos adjacentes na horizontal ou na vertical é igual a 1 cm. Qual é a área, em cm^2 , da região hachurada?



- (A) 60 (B) 61 (C) 62 (D) 63 (E) 64

2.12 Problema 12**Enunciado**

Sabe-se que o número $\underbrace{111 \dots 11}_{k \text{ 1's}}$ é múltiplo de 17, onde k é um inteiro positivo.

Qual é o menor valor possível de k ?

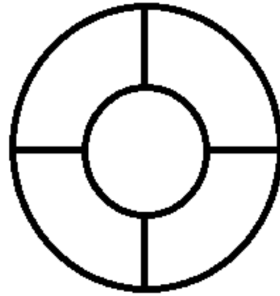
(A) 4 (B) 11 (C) 16 (D) 18 (E) 34

2.13 Problema 13

Enunciado

De quantos modos podemos pintar as 5 regiões da figura abaixo, usando em cada região uma dentre as cores preto, amarelo, rosa, azul e vermelho, de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes?

Observação: não é obrigatório que todas as 5 cores sejam usadas na pintura.



(A) 120 (B) 240 (C) 420 (D) 540 (E) 1280

2.14 Problema 14

Enunciado

Numa sala de aula, a quantidade de meninos é o dobro da quantidade de meninas. Certa vez, foi aplicada uma prova de matemática, e nessa prova a média dos meninos foi 7,4 enquanto a média das meninas foi 8,6. Qual foi a média das notas dos alunos da sala?

(A) 7,6 (B) 7,8 (C) 8 (D) 8,2 (E) 8,4

2.15 Problema 15**Enunciado**

No triângulo ABC , temos $AB = 2AC$. Sejam D, E pontos em $\overline{AB}, \overline{BC}$, respectivamente, tais que $\angle BAE = \angle ACD$. Seja F a interseção dos segmentos \overline{AE} e \overline{CD} , e suponha que o triângulo CFE é equilátero. Qual é a medida do ângulo $\angle ACB$?
(A) 60° (B) 75° (C) 90° (D) 105° (E) 120°

2.16 Problema 16**Enunciado**

Para cada inteiro positivo n , sejam:

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$P_n = \left(\frac{T_2}{T_2 - 1} \right) \left(\frac{T_3}{T_3 - 1} \right) \cdots \left(\frac{T_n}{T_n - 1} \right)$$

Qual é a alternativa mais próxima do valor numérico de P_{2022} ?

(A) 2,90 (B) 2,93 (C) 2,96 (D) 2,99 (E) 3,02

2.17 Problema 17

Enunciado

Dizemos que um número inteiro é um “Matemático por Diversão” se ele pode ser escrito como a diferença de 2 quadrados perfeitos não nulos. Por exemplo, 3 é Matemático por Diversão, pois $3 = 2^2 - 1^2$. Quantos são os inteiros positivos, que não excedem 2022, que são Matemáticos por Diversão?

(A) 506 (B) 507 (C) 1514 (D) 1516 (E) 2020

2.18 Problema 18

Enunciado

Seja $M = 3318084147$. Qual dos números abaixo é um quadrado perfeito?
(A) M (B) $3M$ (C) $5M$ (D) $7M$ (E) $11M$

2.19 Problema 19**Enunciado**

Sejam x, y números reais positivos tais que $x^2 + y^2 = 7$ e $x^3 + y^3 = 18$. Quanto vale $x^4 + y^4$?

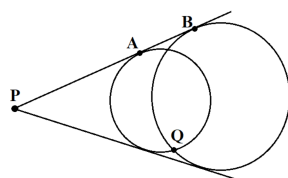
(A) 25 (B) 29 (C) 31 (D) 47 (E) 49

2.20 Problema 20

Enunciado

Duas circunferências, de raios 3 e 4, se cortam em dois pontos, sendo Q um desses pontos. Traçam-se as tangentes externas comuns às duas circunferências. As duas tangentes se cortam em P e uma dessas tangentes tangencia as circunferências nos pontos A e B , conforme a figura abaixo:

Se $AB = 6$, quanto vale PQ ?



- (A) 12 (B) $12\sqrt{3}$ (C) 21 (D) $21\sqrt{3}$ (E) 15

3 Referências