

OMpD 2022 N2 Fase 2

Samuel de Araújo Brandão

19 de setembro de 2025

Este documento contém soluções para os problemas da OMpD 2022 N2 Fase 2, escritos por mim durante minha preparação para a Olimpíada Internacional de Matemática.

O conteúdo reflete meu próprio entendimento e processo de resolução de problemas. Algumas soluções podem ter sido inspiradas pelo trabalho de outras pessoas ou requerido ajuda externa; nesses casos, a devida atribuição é dada (veja a [seção 3](#)).

Se você notar algum erro ou tiver sugestões de melhoria, eu ficaria muito grato em recebê-las em samuelbaraujo19@gmail.com.

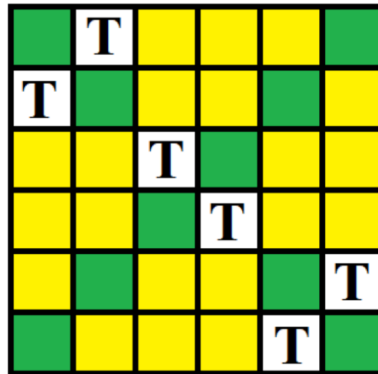
Conteúdo

1	Problemas	2
2	Soluções	4
2.1	Problema 1.	4
2.2	Problema 2.	6
2.3	Problema 3.	7
2.4	Problema 4.	8
3	Referências	9

1 Problemas

1. Considere um tabuleiro quadriculado 6×6 , formado de 36 casinhas unitárias. Desejamos colocar 6 torres neste tabuleiro, uma torre em cada casinha, de modo que não haja duas torres numa mesma linha, nem duas torres numa mesma coluna. Note que, uma vez colocadas as torres dessa maneira, temos que, para toda casinha onde não foi colocada uma torre, há uma torre na mesma linha que ela e uma torre na mesma coluna que ela. Diremos que tais torres são alinhadas com essa casinha.

Para cada uma dessas 30 casas sem torres, pinte-a de verde se as duas torres alinhadas com essa mesma casinha estão a uma mesma distância dela, e pinte-a de amarelo caso contrário. Por exemplo, ao colocarmos as 6 torres (T) como abaixo, temos:



- (a) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas verdes?
- (b) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas amarelas?
- (c) É possível colocarmos as torres de modo que haja 15 casas verdes e 15 amarelas?
2. Seja $ABCD$ um retângulo. O ponto E está sobre o lado \overline{AB} e o ponto F está sobre o lado \overline{AD} , de modo que $\angle FEC = \angle CEB$ e $\angle DFC = \angle CFE$. Determine a medida do ângulo $\angle FCE$ e da razão AD/AB .
3. Seja N um inteiro positivo. Inicialmente, um número inteiro positivo A está escrito no quadro. A cada passo, podemos realizar uma das duas operações seguintes com o número escrito no quadro:
- (i) Somar N ao número escrito no quadro e trocar tal número pela soma obtida;
 - (ii) Se o número no quadro for maior do que 1 e tiver pelo menos um algarismo 1, então podemos remover o algarismo 1 desse número, e trocar o número escrito inicialmente por este (com remoção de possíveis zeros à esquerda).

Por exemplo, se $N = 63$ e $A = 25$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$25 \rightarrow 88 \rightarrow 151 \rightarrow 51 \rightarrow 5$$

E se $N = 143$ e $A = 2$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$2 \rightarrow 145 \rightarrow 288 \rightarrow 431 \rightarrow 574 \rightarrow 717 \rightarrow 860 \rightarrow 1003 \rightarrow 3$$

Para quais valores de N sempre é possível, não importando o valor inicial de A na lousa, obter o número 1 na lousa, mediante um número finito de operações?

4. Dizemos que uma sêxtupla de números reais positivos $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ é *phika* se $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

(a) Prove que existe uma sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ tal que:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) > 1 - \frac{1}{20222022}.$$

(b) Prove que para toda sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, temos:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) < 1.$$

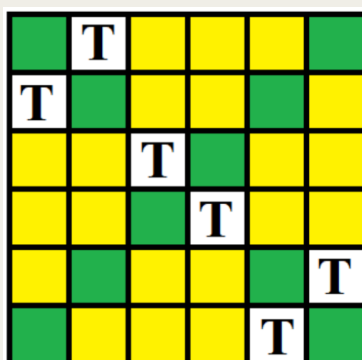
2 Soluções

2.1 Problema 1.

Enunciado do Problema

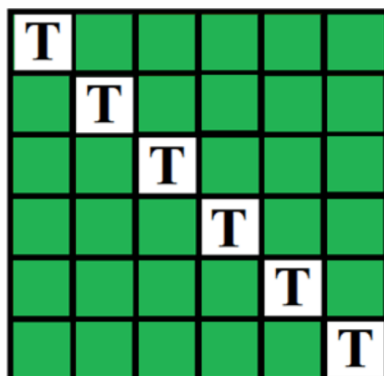
Considere um tabuleiro quadriculado 6×6 , formado de 36 casinhas unitárias. Desejamos colocar 6 torres neste tabuleiro, uma torre em cada casinha, de modo que não haja duas torres numa mesma linha, nem duas torres numa mesma coluna. Note que, uma vez colocadas as torres dessa maneira, temos que, para toda casinha onde não foi colocada uma torre, há uma torre na mesma linha que ela e uma torre na mesma coluna que ela. Diremos que tais torres são alinhadas com essa casinha.

Para cada uma dessas 30 casas sem torres, pinte-a de verde se as duas torres alinhadas com essa mesma casinha estão a uma mesma distância dela, e pinte-a de amarelo caso contrário. Por exemplo, ao colocarmos as 6 torres (T) como abaixo, temos:

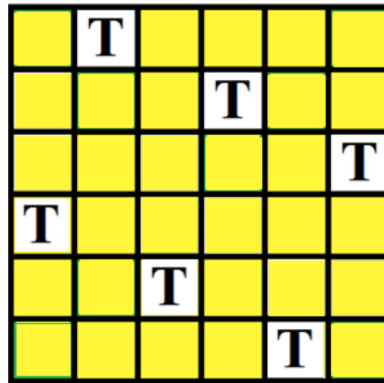


- (a) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas verdes?
- (b) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas amarelas?
- (c) É possível colocarmos as torres de modo que haja 15 casas verdes e 15 amarelas?

(a) Sim, como pode-se ver a seguinte configuração



(b) Sim, como pode-se ver a seguinte configuração



(c) Não. Já que é impossível encontrar um número ímpar de casas verdes.

Pode-se provar tal fato ao perceber que existe apenas uma maneira de formar casas verdes: alinhar duas torres diagonalmente, o que resulta em um par de casas verdes únicos, que não podem ser conquistados por meio de nenhuma outra alinhamento de torres na diagonal. Ou seja, haverá sempre um número par de casas verdes no tabuleiro, impossibilitando haver 15 casas verdes em tal.

2.2 Problema 2.

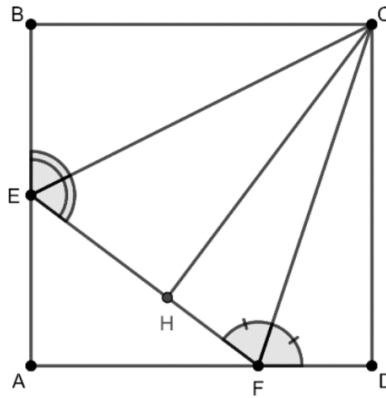
Enunciado do Problema

Seja $ABCD$ um retângulo. O ponto E está sobre o lado \overline{AB} e o ponto F está sobre o lado \overline{AD} , de modo que $\angle FEC = \angle CEB$ e $\angle DFC = \angle CFE$.

Determine a medida do ângulo $\angle FCE$ e da razão AD/AB .

$$\angle FCE = 45^\circ \text{ e } \frac{AB}{AD} = 1.$$

É possível encontrar a medida de $\angle FCE$ notando que \overline{CF} é a bissetriz de $\angle EFD$ e \overline{CE} é a bissetriz de $\angle BEF$. Já que o ângulo interno total de $EFDCB$ é 540° e $\angle FDC + \angle DCB + \angle CBE = 270^\circ$, pode-se afirmar que $\angle BEF + \angle EFD = 270^\circ$, logo, $\angle CEF + \angle EFC = 135^\circ \iff \angle FCE = 45^\circ$.



Visando encontrar o resultado de $\frac{AD}{AB}$, digamos que H é o pé da altura \overline{CH} relativa a \overline{EF} . Podemos afirmar que $\triangle CBE \cong \triangle CEH$ pelo caso ALA . Assim como podemos afirmar, pelo mesmo caso, que $\triangle CHF \cong \triangle CFD$. Essas similaridades resultam em $\overline{BC} = \overline{CD}$, ou seja, $\overline{AB} = \overline{AD} \iff \frac{AB}{AD} = 1$.

2.3 Problema 3.

Enunciado do Problema

Seja N um inteiro positivo. Inicialmente, um número inteiro positivo A está escrito no quadro. A cada passo, podemos realizar uma das duas operações seguintes com o número escrito no quadro:

- (i) Somar N ao número escrito no quadro e trocar tal número pela soma obtida;
- (ii) Se o número no quadro for maior do que 1 e tiver pelo menos um algarismo 1, então podemos remover o algarismo 1 desse número, e trocar o número escrito inicialmente por este (com remoção de possíveis zeros à esquerda).

Por exemplo, se $N = 63$ e $A = 25$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$25 \rightarrow 88 \rightarrow 151 \rightarrow 51 \rightarrow 5$$

E se $N = 143$ e $A = 2$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$2 \rightarrow 145 \rightarrow 288 \rightarrow 431 \rightarrow 574 \rightarrow 717 \rightarrow 860 \rightarrow 1003 \rightarrow 3$$

Para quais valores de N sempre é possível, não importando o valor inicial de A na lousa, obter o número 1 na lousa, mediante um número finito de operações?

2.4 Problema 4.

Enunciado do Problema

Dizemos que uma sêxtupla de números reais positivos $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ é *phika* se $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

(a) Prove que existe uma sêxtupla *phika* $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ tal que:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) > 1 - \frac{1}{20222022}.$$

(b) Prove que para toda sêxtupla *phika* $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, temos:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) < 1.$$

(a) a

(b) Pela desigualdade AM-GM, sabe-se que

$$\frac{a_i^2 + b_i}{2} \geq a_i \sqrt{b_i}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1\sqrt{b_1} + a_2\sqrt{b_2} + a_3\sqrt{b_3} + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 &\leq \frac{a_1^2 + b_1}{2} + \frac{a_2^2 + b_2}{2} + \frac{a_3^2 + b_3}{2} + \\ &\quad a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \\ &= \frac{a_1^2 + b_1 + a_2^2 + b_2 + a_3^2 + b_3}{2} + \\ &\quad \frac{2a_1a_2 + 2a_2a_3 + 2a_3a_1}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Contudo, pode-se ver facilmente que não existe igualdade, já que, se ouvesse, $1 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, um absurdo, pois $0 < a_1, a_2, a_3 < 1 \implies a_1 > a_1^2, a_2 > a_2^2, a_3 > a_3^2$.

3 Referências