OBM 2025 - Nível 2
Critério de Correção - Problema 4

1 Enunciado

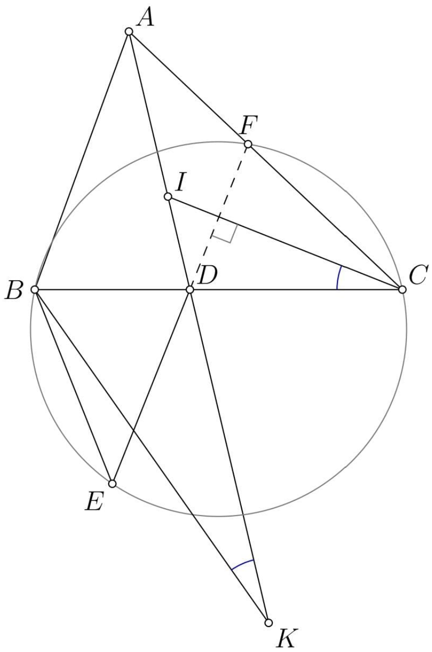
Seja ABC um triângulo com incentro I e exincentro relativo ao vértice A igual a K. Seja D o pé da bissetriz interna relativa ao vértice A e E o circuncentro do triângulo BDK. Seja também $F \neq C$ a segunda interseção de AC com a circunferência circunscrita a BEC.

(a) Prove que os pontos D, E, F são colineares.

(b) Prove que $ID = IF$.

- *O* incentro *de ABC é o ponto de interseção das bissetrizes internas de $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$.*
- *O* exincentro *de ABC relativo ao vértice A é o ponto de interseção da bissetriz interna de $\angle A$, a bissetriz do ângulo externo de B e a bissetriz do ângulo externo de C.*

2 Solução



1. Note que $\angle IBK = \angle ICK = 90°$, e então $BICK$ é cíclico de diâmetro IK. Logo, temos que $\angle BKD = \angle ICB = \angle FCB/2$. Mas note que $\angle BED = 2\angle BKD$ pela definição de E, de modo que $\angle BED = \angle FCB = \angle BEF$ (pois $BECF$ é cíclico), e então D, E, F são colineares, como desejado.

2. Note que $\angle FDC = \angle BDE$ por o.p.v. e que $\angle CFD = \angle DBE = \angle BDE$ pois $BE = DE$, de modo que $\angle FDC = \angle DFC$, e então $CD = CF$. Como CI é bissetriz de $\angle DCF$, segue que é mediatriz, uma vez que $CD = CF$, de modo que $ID = IF$.

3 Critério de Correção

1. Mostrar que $BICK$ é inscritível .... **1 ponto**
2. Mostrar que $B\hat{K}D = \hat{C}/2$ .... **1 ponto**
3. Mostrar que $B\hat{E}D = 2B\hat{K}D = 2\hat{C}/2$ .... **2 pontos**
4. Mostrar que $B\hat{E}F = B\hat{C}F = \hat{C}$ .... **1 ponto**
5. Concluir que os pontos são colineares .... **1 ponto**
6. Mostrar que $\Delta BED \sim \Delta DCF$ .... **2 pontos**
7. Concluir que $ID = IF$ usando a congruência gerada pela bissetriz .... **2 pontos**