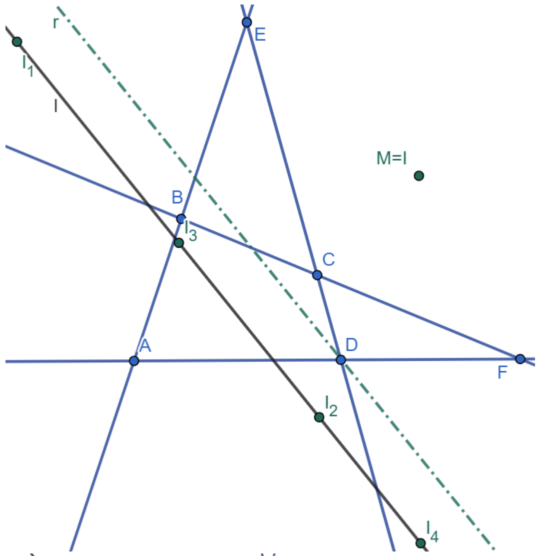
Enunciado. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo satisfazendo $90^\circ > \angle ABC > \angle CDA > \angle DAB$. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto das retas r tais que existe uma circunferência tangente às quatro reflexões de r pelos quatro lados do quadrilátero $ABCD$. Prove que $\mathcal{R}$ pode ser particionado em 8 conjuntos de modo que as retas de cada conjunto são todas concorrentes ou todas paralelas.

Solução.

Sejam $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$ e M o ponto de Miquel de $ABCD$. Também defina l como a reta de Steiner de M para o quadriátero. Das condições de ângulo do enunciado, concluímos que E, F, M existem e são distintos. Também temos que $ABCD$, $AECF$ e $BEDF$ não são cíclicos, e portanto M não está nas retas EF, BD e AC. E por último, sabemos que o quadrilátero não tem dois lados paralelos nem perpendiculares, o que garante que as reflexões de r são não paralelas duas a duas, logo são distintas. Por ora, vamos usar apenas essas condições sobre o quadrilátero completo, de modo que o problema é simétrico nos quatro lados. Considere todas as marcações de ângulos orientadas.

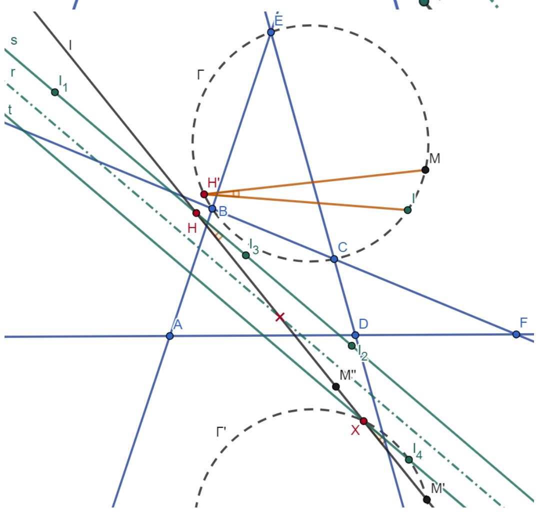
Seja I o centro e d o raio da circunferência tangete às quatro reflexões. Denote por I_1, I_2, I_3, I_4 as reflexões de I por AB, BC, CD, DA, respectivamente. Assim temos que I_1, I_2, I_3, I_4 estão a distância d de r. Agora vamos dividir em três casos. (Considere $d > 0$ para dividir os casos, $d = 0$ pode ser considerado em qualquer caso.)



Caso 1: Os pontos I_1, I_2, I_3, I_4 estão do mesmo lado de r.

Defina s como a paralela por r que passa por esses quatro pontos. Veja que I_1, I_2, I_3, I_4 são colineares. Portanto I tem uma reta de Steiner em relação aos triângulos ABF, CDF, ADE e BCE, e assim está nos seus circuncírculos.

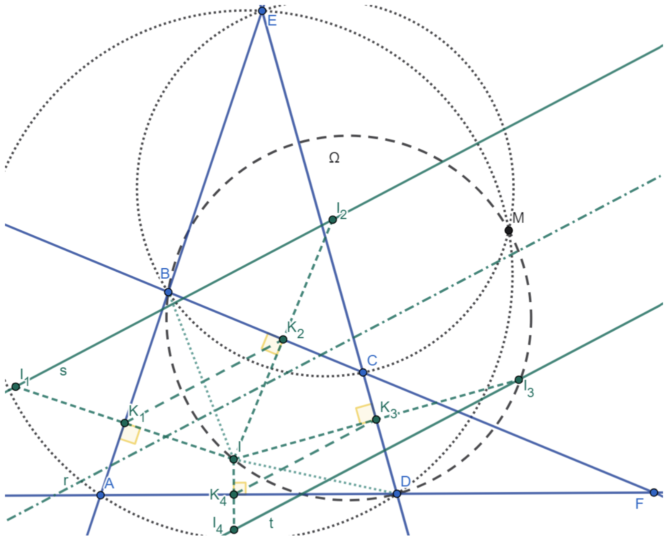
Segue que $I = M$, $s = l$ e todas essas retas r são paralelas a l.

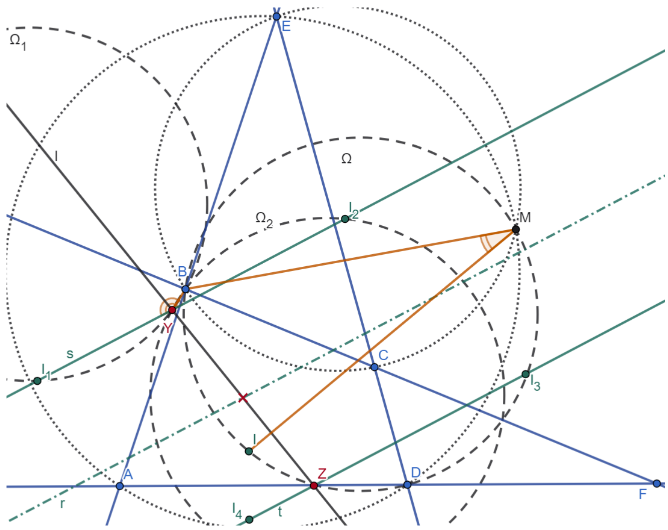


Caso 2: Exatamente um dentre I_1, I_2, I_3, I_4 está separado dos outros por r, sem perda de generalidade I_4.

Sejam s e t as paralelas a r por I_1, I_2, I_3 e por I_4, respectivamente. Veja que s é a reta de Steiner de I no triângulo BCE, assim I está no seu cincuncírculo Γ e s passa pelo seu ortocentro H. Sejam M' e Γ' as reflexões de M e Γ por AD, respectivamente, e seja X a segunda interseção de Γ' com l (a primeira é M'). Também defina M'', H' como as reflexões de M, H por BC, respectivamente. Veja que $\angle(I_4X, l) = \angle I_4XM' = \frac{\widehat{(I_4M')}_{\Gamma'}}{2} = -\frac{\widehat{(IM)}_{\Gamma}}{2} = -\angle IH'M = \angle I_2HM'' = \angle(s, l)$, logo temos $I_4X \parallel s \iff t = I_4X$.

Note que X e H não dependem de I e r. Segue que todas essas retas r passam pelo ponto médio de HX, que é fixo.





Caso 3: A reta r divide dois dentre I_1, I_2, I_3, I_4 para cada lado, sem perda de generalidade I_1, I_2 estão do mesmo lado.

Sejam s e t as paralelas a r por I_1, I_2 e por I_3, I_4, respectivamente. Também defina $\Omega = (BDM)$ e K_1, K_2, K_3, K_4 os pontos médios de II_1, II_2, II_3, II_4, respectivamente. Veja que $s \parallel t \iff K_1K_2 \parallel K_4K_3 \iff \angle K_1K_2I + \angle K_2IK_3 + \angle IK_3K_4 = 0 \iff \angle ABI + \angle BCD + \angle IDA = 0 \iff \angle IDA + \angle DAB + \angle ABI = \angle DAB + \angle DCB \iff \angle DIB = \angle DAE + \angle ECB = \angle DME + \angle EMB = \angle DMB \iff$ I pertence a Ω.

Sejam Ω_1, Ω_2 as reflexões de Ω por AB, BC, respectivamente, e seja Y a segunda interseção de Ω_1 e Ω_2 (a primeira é B). Veja que $\angle I_1YB = \frac{\widehat{(I_1B)}_{\Omega_1}}{2} = -\frac{\widehat{(IB)}_{\Omega}}{2} = \frac{\widehat{(I_2B)}_{\Omega_2}}{2} = \angle I_2YB$, logo Y está em I_1I_2. Analogamente t passa pela segunda interseção Z de Ω_3 e Ω_4.

Note que os pontos Y e Z são fixos. Portanto todas essas retas r passam pelo ponto médio de YZ, que é fixo.

Desse modo, temos o caso 1, quatro variações do caso 2 e três do caso 3, e em cada todas as retas passam por um ponto fixo (o ponto do infinito de l no caso 1). □

Critério:

(a) Refletir I pelos lados do quadrilátero e perceber divisão de casos .... **[2 pontos]**

(b) Resolver o caso 1 .... **[1 ponto]**

(c) Resolver o caso 2 .... **[3 pontos]**

- (c1) Provar que I está no circuncírculo de BCE e que s passa por H .... **[1 ponto]**
- (c2) Conjecturar quem é o ponto fixo sobre t .... **[1 ponto]**
- (c3) Concluir esse caso .... **[1 ponto]**

(d) Resolver o caso 3 .... **[4 pontos]**

- (d1) Provar que I está no circuncírculo de BDM .... **[2 pontos]**
- (d2) Conjecturar quem é o ponto fixo sobre s .... **[1 ponto]**
- (d3) Concluir esse caso .... **[1 ponto]**