

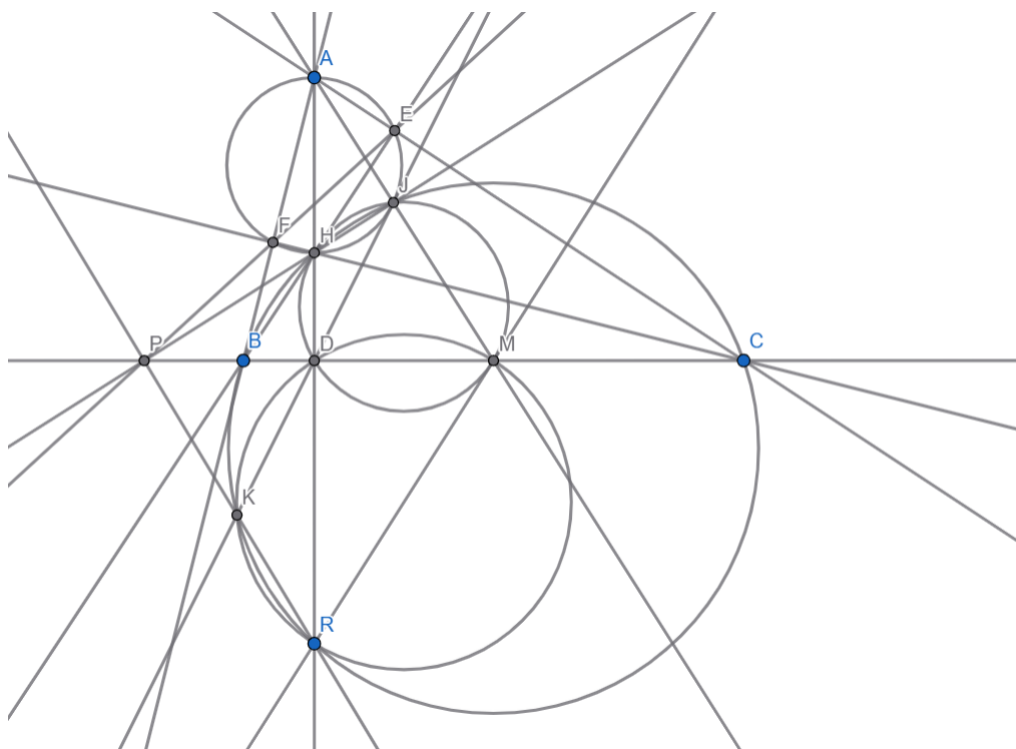
OBM 2025 - Nível 2

Critério de Correção - Problema 3

1 Enunciado

Problema 3. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$. Sejam D, E, F os pés das alturas de A, B, C , respectivamente, e seja M o ponto médio de BC . Seja P o ponto de interseção das retas EF e BC . Seja H o ortocentro de ABC . A reta PH intersecta o círculo de diâmetro AH novamente no ponto J . Seja R a reflexão de A por BC . As retas JD e PR se encontram em K . Prove que o quadrilátero $KDMR$ é cíclico.

2 Solução



Primeiramente, da definição de J , é fácil concluir que este é o A -Humpty do $\triangle ABC$. Das propriedades do Dumpty, temos:

- A, J, M colineares.
- $BHJC$ cíclico.

Agora, observe que

$$\angle BRC = \angle BAC = 180 - \angle BHC$$

e termos que $BHJCR$ é cíclico. Também, $\angle MDH = \angle MJH = 90^\circ$ e portanto $MDHJ$ é cíclico. Considere K' a interseção do circuncirculo do $\triangle DMR$ com o circuncirculo de $BHJC$ e , pelo centro radical de $MDJH$, $BHJCRK'$ e $MDK'R$ obtemos que P, K', R são colineares.

Por fim, veja que

$$\angle DK'R = 180 - \angle DMR = 180 - \angle DMA = \angle DHJ = \angle JK'R$$

e então J, K', D são colineares e $K = K'$.

3 Critério de Correção

1. Demonstrar as propriedades do ponto de Humpty, ou seja, que A, J, M são colineares e $BHJC$ é cíclico **4 ponto**
2. Definir K' como acima e concluir que P, K', R são colineares **3 ponto**
3. Demonstrar que J, D, K' são colineares e concluir **3 ponto**

Os seguintes critérios não valem ponto:

1. Desenhar a figura com régua e compasso **0 ponto**
2. Usar contas e não terminar o problema nem concluir propriedades da configuração **0 ponto**

Observações:

1. Para saber mais sobre os pontos de Humpty e Dumpty, recomendo o material:
https://olimpedia.fandom.com/pt-br/wiki/Pontos_de_Humpty