OBM 2025 - Nível 3
Critério de Correção - Problema 4

1 Enunciado

Para todo n inteiro positivo, defina

$$f(n) = \lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

Determine todos os inteiros positivos k tais que existe um inteiro positivo n satisfazendo $f(n) = nk$.

2 Solução

Seja m o maior inteiro positivo tal que $n \geq m^2$. Então $n \leq (m+1)^2 - 1 = m^2 + 2m$, e podemos escrever $n = m^2 + t$ para algum $t \in \{0, 1, \ldots, 2m\}$. Agora, vamos reescrever $f(n) = f(m^2 + t)$ fixando i e agrupando pelos valores de $\lfloor\sqrt{a}\rfloor = i$:

$$\begin{aligned}
f(m^2+t) &= (\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor) + (\lfloor\sqrt{4}\rfloor + \lfloor\sqrt{5}\rfloor + \lfloor\sqrt{6}\rfloor + \lfloor\sqrt{7}\rfloor + \lfloor\sqrt{8}\rfloor) + \cdots \\
&\quad + (\lfloor\sqrt{m^2}\rfloor + \lfloor\sqrt{m^2+1}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{m^2+t}\rfloor) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{a=i^2}^{(i+1)^2-1} \lfloor\sqrt{a}\rfloor\right) + \sum_{a=m^2}^{m^2+t} \lfloor\sqrt{a}\rfloor \\
&= m(t+1) + \sum_{i=1}^{m-1} i(2i+1) \\
&= m(t+1) + \sum_{i=1}^{m-1} i + 2\sum_{i=1}^{m-1} i^2 \\
&= m(t+1) + \frac{m(m-1)}{2} + 2\cdot\frac{m(m-1)(2m-1)}{6} \\
&= \frac{6mt + 6m + 3m^2 - 3m + 4m^3 - 6m^2 + 2m}{6} \\
&= \frac{4m^3 - 3m^2 + 5m + 6mt}{6}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $n \mid f(n)$ e escrevemos $n = m^2+t$ como acima, segue que $6(m^2+t) \mid 4m^3 - 3m^2 + 5m + 6mt$. Logo,

$$m^2 + t \mid 4m^3 - 3m^2 + 5m + 6mt, \tag{1}$$

e portanto

$$m^2 + t \mid 2mt - 3m^2 + 5m. \tag{2}$$

Como $0 \leq t \leq 2m$, então $-3m^2 < -3m^2 + 5m \leq 2mt - 3m^2 + 5m \leq m^2 + 5m$. Se escrevemos $2mt - 3m^2 + 5m = l(m^2 + t)$ para algum l inteiro, então temos $l = \frac{2mt - 3m^2 + 5m}{m^2+t}$, logo $l \leq \frac{m^2+5m}{m^2+t} \leq \frac{m^2+5m}{m^2} < 2$ para $m \geq 6$ e $l > \frac{-3m^2}{m^2+t} \geq -3$. Assim,

$$\text{para } m \geq 6 \text{ vale } l \in \{-2, -1, 0, 1\}. \tag{3}$$

Além disso, de $2mt-3m^2+5m=l(m^2+t)$ podemos isolar t para obter $t(2m-l)=(l+3)m^2-5m \iff t=\frac{(l+3)m^2-5m}{2m-l} \implies 2m-l \mid 4(l+3)m^2-20m \implies 2m-l \mid l^2(l+3)-10l=l^3+3l^2-10l$.

Vamos fazer os quatro casos:

- Se $l=-2$, então $2m+2 \mid 24 \implies m+1 \mid 12 \implies m \in \{1,2,3,5,11\}$;
- Se $l=-1$, então $2m+1 \mid 12 \implies m=1$;
- Se $l=0$, então $2m \mid 0$, que vale para todo m;
- Se $l=1$, então $2m-1 \mid -6 \implies m \in \{1,2\}$.

Logo, a menos dos casos $m \in \{1,2,3,4,5,11\}$, o único caso que a divisibilidade pode valer é o caso $l=0$, que em $2mt-3m^2+5m=l(m^2+t)$ significa que $t=\frac{3m-5}{2}$ (logo m é ímpar), e $f(m^2+t)=\frac{4m^3-3m^2+5m+3m(3m-5)}{6}=\frac{4m^3+6m^2-10m}{6}=\frac{2m}{3}\left(m^2+\frac{3m-5}{2}\right)=\frac{2m}{3}(m^2+t)$. Portanto, para todo inteiro positivo s tal que $k=\frac{4s+2}{3}$ é inteiro, esse k satisfaz o enunciado. Veja que $\frac{4(3s'+1)+2}{3}=4s'+2$, logo todo número da forma $4s'+2$ de fato satisfaz o enunciado. Além disso, $\frac{4s+2}{3} \equiv -(4s+2) \equiv 2 \pmod 4$, logo de fato não há outros inteiros representáveis na forma $\frac{4s+2}{3}$.

Agora, precisamos verificar os casos $m \in \{1,2,3,4,5,11\}$. Se $m=11$, sabemos que $l=-2$, e portanto $t=\frac{(l+3)m^2-5m}{2m-l}=\frac{121-55}{24}=\frac{11}{4}$, que não é inteiro. Falta verificar os casos $m \in \{1,2,3,4,5\}$. São só 35 casos, que podem ser feitos na mão:

n	$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$	$f(n)$	$n \mid f(n)$?
1	1	1	SIM: $f(n)/n = 1$
2	1	2	SIM: $f(n)/n = 1$
3	1	3	SIM: $f(n)/n = 1$
4	2	5	NÃO
5	2	7	NÃO
6	2	9	NÃO
7	2	11	NÃO
8	2	13	NÃO
9	3	16	NÃO
10	3	19	NÃO
11	3	22	SIM: $f(n)/n = 2$
12	3	25	NÃO
13	3	28	NÃO
14	3	31	NÃO
15	3	34	NÃO
16	4	38	NÃO
17	4	42	NÃO
18	4	46	NÃO
19	4	50	NÃO
20	4	54	NÃO
21	4	58	NÃO
22	4	62	NÃO
23	4	66	NÃO
24	4	70	NÃO
25	5	75	SIM: $f(n)/n = 3$
26	5	80	NÃO
27	5	85	NÃO
28	5	90	NÃO
29	5	95	NÃO
30	5	100	NÃO
31	5	105	NÃO
32	5	110	NÃO
33	5	115	NÃO
34	5	120	NÃO
35	5	125	NÃO

Logo, para $m \le 5$, k pode atingir os valores $1, 2, 3$. Assim, a resposta final é

$$k \in \{1, 3\} \cup \{4s + 2 : s \ge 0\}.$$

3 Critério de Correção

1. Escrever $n = m^2 + t$ com $m \ge 1$ e $0 \le t \le 2m$ e calcular $f(n) = f(m^2 + t)$ como um polinômio em m e t ou análogo .... **2 pontos**

   Pontuação parcial de 1 ponto para contas montadas corretamente mas com erros na expressão final.

2. Obter a relação (1) ou análoga .... **1 ponto**

   Reduzir a divisibilidade $n \mid f(n)$ a uma divisibilidade polinomial com duas variáveis em que o lado esquerdo tem grau ≥ 2 e o lado direito tem grau ≤ 3.

3. Obter a relação (2) ou análoga . . . . **2 pontos**

   A partir da divisibilidade do item anterior, reduzir a divisibilidade $n \mid f(n)$ a uma divisibilidade polinomial em duas variáveis tal que o lado direito tem grau menor ou igual ao lado esquerdo.

4. Reduzir o problema a uma quantidade finita explícita de n's . . . . **2 ponto**

   Obter de (3) que, a menos de $l = 0$, resta uma quantidade finita de n's para analisar. Para a pontuação desse critério ser concedida, é necessário que a solução dê cotas numéricas sobre as variáveis. Não serão aceitas justificativas do tipo "esse polinômio tem grau menor que esse, logo a divisibilidade só pode ocorrer para um número finito de n's" sem cotas explícitas sobre as variáveis. Em particular, soluções que negligenciarem a classe $k = 4s + 2$ por argumentos incompletos de "redução a finitos casos" não receberão os pontos desse critério.

5. Demonstrar que $k = 4s + 2$ é solução para todo $s \geq 0$ . . . . **1 ponto**

6. Concluir que a resposta final é $k \in \{1, 3\} \cup \{4s + 2 : s \geq 0\}$ analisando o número finito de casos restantes . . . . **2 pontos**

   Análises incompletas de casos finitos não eliminados anteriormente receberão pontuações parciais da seguinte forma de acordo com o número b de casos que não foram analisados:

   (a) $b = 0$*: dedução de 0 ponto;*

   (b) $1 \leq b \leq 5$*: dedução de 1 ponto;*

   (c) $5 = 6 \leq b$*: dedução de 2 pontos.*

   Observação: a pontuação é sobre o número de casos que faltatam para a solução ficar correta, e não sobre a resposta final. Por exemplo, caso a solução negligencie o caso $n = 25$, mas deixe de analisar apenas $b = 5$ casos não excluídos anteriormente, então a pontuação no critério será de 2 pontos, mesmo com a conclusão excluindo $k = 3$.

As seguintes observações não valem ponto:

1. Construir qualquer quantitade finita de k's que satisfazem o problema . . . . **0 ponto**

2. Conjecturar a resposta correta . . . . **0 ponto**

Observações:

1. Construir uma quantidade infinita de k's que satisfazem o problema . . . . **1 ponto**

2. Erro de conta pequenos em uma solução fora isso correta (*minor flaws*) . . . . **até 2 pontos**