

# OMpD 2023 N2 Fase 2

Samuel de Araújo Brandão

20 de outubro de 2025

Este documento contém soluções para os problemas da OMpD 2023 N2 Fase 2, escritos por mim durante minha preparação para a Olimpíada Internacional de Matemática.

O conteúdo reflete meu próprio entendimento e processo de resolução de problemas. Algumas soluções podem ter sido inspiradas pelo trabalho de outras pessoas ou requerido ajuda externa; nesses casos, a devida atribuição é dada (veja a [seção 3](#)).

Se você notar algum erro ou tiver sugestões de melhoria, eu ficaria muito grato em recebê-las em [samuelbaraujo19@gmail.com](mailto:samuelbaraujo19@gmail.com).

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Problemas</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Soluções</b>	<b>3</b>
2.1	Problema 1.	3
2.2	Problema 2.	5
2.3	Problema 3.	6
2.4	Problema 4.	7
<b>3</b>	<b>Referências</b>	<b>9</b>

# 1 Problemas

1. Alguns amigos internautas formaram 6 equipes de futebol, e decidiram realizar um torneio onde cada equipe enfrenta outra exatamente uma vez em uma partida. Em cada partida, quem vence ganha 3 pontos, quem perde não ganha ponto, e se as duas equipes empatarem, cada uma leva 1 ponto.

Ao final do torneio, verificou-se que as pontuações das equipes foram 10, 9, 6, 6, 4 e 2 pontos. A respeito deste torneio, responda os seguintes itens, justificando sua resposta em cada um deles.

- (a) Quantas partidas terminaram empatadas no torneio?
  - (b) Determine, para cada uma das 6 equipes, o número de vitórias, empates e derrotas.
  - (c) Se considermos apenas as partidas disputadas entre a equipe que fez 9 pontos contra as duas equipes que fizeram 6 pontos, e a disputada entre as duas equipes que fizeram 6 pontos, explique porque dentre essas três partidas, há pelo menos 2 empates.
2. Encontre todos os pares  $a, b$  de números reais tais que o número  $\lfloor an + b \rfloor$  é um quadrado perfeito, para todo inteiro positivo  $n$ .
- Observação:  $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . Por exemplo,  $\lfloor 4 \rfloor = 4$ ,  $\lfloor -5 \rfloor = -5$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor = 1$  e  $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$ .
3. Para cada inteiro positivo  $x$ , seja  $\varphi(x)$  o número de inteiros  $1 \leq k \leq x$  que não possuem fatores primos em comum com  $x$ . Por exemplo,  $\varphi(12) = 4$ , pois 1, 5, 7 e 11 são todos os números naturais menores ou iguais a 12 que não possuem fatores primos em comum com 12. Determine todos os inteiros positivos  $n$  tais que existem inteiros positivos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de modo que o conjunto:

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n)\}$$

possui exatamente  $2n$  inteiros consecutivos (em alguma ordem).

4. Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo escaleno, e seja  $O$  seu circuncentro. Seja  $K$  um ponto sobre o lado  $BC$ . A reta  $OK$  intersecta o circuncírculo do triângulo  $BOC$  novamente em  $M$ . Seja  $L$  o simétrico de  $K$  relativo a  $AC$ . Demonstre que os circuncírculos dos triângulos  $LCM$  e  $ABC$  são tangentes se, e somente se,  $AK \perp BC$ .

## 2 Soluções

### 2.1 Problema 1.

#### Enunciado do Problema

Alguns amigos internautas formaram 6 equipes de futebol, e decidiram realizar um torneio onde cada equipe enfrenta outra exatamente uma vez em uma partida. Em cada partida, quem vence ganha 3 pontos, quem perde não ganha ponto, e se as duas equipes empatarem, cada uma leva 1 ponto.

Ao final do torneio, verificou-se que as pontuações das equipes foram 10, 9, 6, 6, 4 e 2 pontos. A respeito deste torneio, responda os seguintes itens, justificando sua resposta em cada um deles.

- (a) Quantas partidas terminaram empatadas no torneio?
- (b) Determine, para cada uma das 6 equipes, o número de vitórias, empates e derrotas.
- (c) Se considermos apenas as partidas disputadas entre a equipe que fez 9 pontos contra as duas equipes que fizeram 6 pontos, e a disputada entre as duas equipes que fizeram 6 pontos, explique porque dentre essas três partidas, há pelo menos 2 empates.

- (a)** 8 partidas terminaram em empate.

É trivial perceber isso ao notar que, já que existem 6 times e cada time jogou contra exatos 5 times, houveram  $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$  partidas no total. Portanto, caso não houvessem empates na partida, o total de pontos seria  $15 \cdot 3 = 45$  pontos. Mas pode-se ver que foram distribuídos apenas  $10 + 9 + 6 + 6 + 4 + 2 = 37$  pontos no total. Ou seja,  $45 - 37 = 8$  pontos “sumiram”. Já que apenas 2 pontos são distribuídos a cada empate, houveram  $(3 - 2) \cdot 8 = 8$  empates.

- (b)** Sejam os times  $A, B, C, D, E$  e  $F$  aqueles que pontuaram, respectivamente, 10, 9, 6, 6, 4, 2. Abaixo encontra-se a única possível configuração, onde  $V$  = vitória,  $E$  = empate e  $D$  = derrota.

- Time  $A$ : 3V, 1E, 1D
- Time  $B$ : 2V, 3E, 0D
- Time  $C$ : 1V, 3E, 1D
- Time  $D$ : 1V, 3E, 1D
- Time  $E$ : 0V, 4E, 1D
- Time  $F$ : 0V, 2E, 3D

Nenhuma outra configuração é válida por não cumprir todas as seguintes obrigações indispensáveis:

- todos os times devem jogar 5 partidas,
- devem haver 8 empates entre 15 partidas totais,
- o time  $A$  deve ganhar 3 partidas, empatar 1 e perder 1,
- o time  $F$  deve empatar 2 partidas e perder 3,

- o time  $E$  deve empatar 4 partidas e perder 1, já que, caso ganhe 1, empate 1 e perca 3, os times  $B$ ,  $C$  e  $D$  teriam que ganhar, no total, 12 pontos provenientes de empates, uma tarefa claramente impossível, já que cada um desses times deve ganhar, no máximo, 3 pontos culminados de empate,
- $B$ ,  $C$  e  $D$ , devem ganhar, cada um, 3 pontos provenientes de empate.

(c) Sabe-se que o tanto de empates do grupo 1:  $A$ ,  $E$  e  $F$  é  $1 + 4 + 2 = 7$ , e o tanto de empates do grupo 2:  $B$ ,  $C$  e  $D$  é  $3 + 3 + 3 = 9$  empates. É fato que a partida entre  $E$  e  $F$  terminou em empate. Portanto,  $A$  empatou, no máximo, com 1 time do grupo 2,  $E$  empatou, no máximo, com 3 times do grupo 2 e  $F$  empatou, no máximo, com 1 time do grupo 2. Logo, houverão, no máximo,  $1 + 3 + 2 = 5$  empates entre os grupos 1 e 2. Logo entre os times do grupo 2, houveram, no mínimo,  $(9 - 5) \cdot \frac{1}{2} = 2$  empates, já que cada partida empatada resulta em dois times participantes de um empate.

## 2.2 Problema 2.

### Enunciado do Problema

Encontre todos os pares  $a, b$  de números reais tais que o número  $\lfloor an + b \rfloor$  é um quadrado perfeito, para todo inteiro positivo  $n$ .

Observação:  $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . Por exemplo,  $\lfloor 4 \rfloor = 4$ ,  $\lfloor -5 \rfloor = -5$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor = 1$  e  $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$ .

Apenas os pares  $(a, b) = (0, b)$ , onde  $b \in [m^2, m^2 + 1]$  e  $m \in \mathbb{Z}$

Perceba, primeiramente, que para todo  $n$ , existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\lfloor an + b \rfloor = m^2$ . Para isso, é trivial perceber que basta sempre anular  $n$  e fazer com que  $b \in [m^2, m^2 + 1]$ . Ou seja,  $a = 0$ .

Perceba que essa é a única configuração possível, já que:

- $a < 0$ : é impossível, pois, basta que  $n > \frac{b}{|a|}$ , resultando em  $\lfloor an + b \rfloor < 0$ . Portanto, nunca será um quadrado perfeito.
- $a > 0$ : também é impossível. Visando contradição, seja  $x_n^2 := \lfloor an + b \rfloor$  com  $x_n \in \mathbb{Z}$ . Deve-se perceber que  $x_{n+1} \geq x_n + 1$  para infinitos  $n$ , já que, caso contrário, a sequência ficaria constante a partir de algum momento. Isso é impossível porque  $a > 0$ . Podemos ver que a diferença entre termos consecutivos nos mostra algo bem interessante:

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \lfloor an + a + b \rfloor - \lfloor an + b \rfloor.$$

Como vimos anteriormente,  $x_{n+1} \geq x_n + 1$  para infinitos  $n$ . Portanto,

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 \geq (x_n + 1)^2 - x_n^2 = 2x_n + 1.$$

Agora, para finalizar, perceba que  $\lfloor an + a + b \rfloor \leq an + a + b$  e  $\lfloor an + b \rfloor > an + b - 1$ . Portanto,

$$\lfloor an + a + b \rfloor - \lfloor an + b \rfloor < an + a + b - an - b + 1 = a + 1 \iff 2x_n + 1 < a + 1.$$

Contradição! É impossível que  $2x_n + 1$  seja cotado por  $a + 1$ , já que  $x_n \rightarrow \infty$ .

Portanto, nos resta apenas os pares  $(a, b) = (0, b)$ , onde  $b \in [m^2, m^2 + 1]$  e  $m \in \mathbb{Z}$

**Observação —** O mais complicado foi realmente mostrar que  $a > 0$  é impossível. Para tanto, foi de extrema importância conhecer o seguinte padrão: geralmente, quando é dito “válido para todos os  $n$ ” é bem importante comparar termos consecutivos. Para tanto, foi relativamente trivial perceber que  $x_{n+1} \geq x_n + 1$  para infinitos  $n$ .

**Observação —** Após comparar os termos consecutivos, existe outro padrão muito recorrente que deveríamos conhecer:

$$\lfloor r + s \rfloor - \lfloor r \rfloor \leq \lfloor s \rfloor + 1 = \lceil s \rceil.$$

Após isso, ficou relativamente fácil, já que é trivial perceber que

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 < a + 1,$$

e relembrar que  $x_{n+1} \geq x_n + 1$ , culminando em  $x_{n+1}^2 - x_n^2 \geq (x_n + 1)^2 - x_n^2 = 2x_n + 1$ .

## 2.3 Problema 3.

### Enunciado do Problema

Para cada inteiro positivo  $x$ , seja  $\varphi(x)$  o número de inteiros  $1 \leq k \leq x$  que não possuem fatores primos em comum com  $x$ . Por exemplo,  $\varphi(12) = 4$ , pois 1, 5, 7 e 11 são todos os números naturais menores ou iguais a 12 que não possuem fatores primos em comum com 12. Determine todos os inteiros positivos  $n$  tais que existem inteiros positivos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de modo que o conjunto:

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n)\}$$

possui exatamente  $2n$  inteiros consecutivos (em alguma ordem).

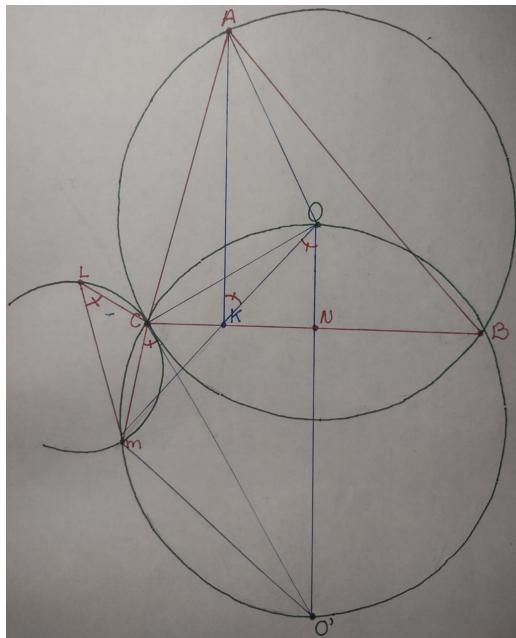
## 2.4 Problema 4.

### Enunciado do Problema

Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo escaleno, e seja  $O$  seu circuncentro. Seja  $K$  um ponto sobre o lado  $BC$ . A reta  $OK$  intersecta o circuncírculo do triângulo  $BOC$  novamente em  $M$ . Seja  $L$  o simétrico de  $K$  relativo a  $AC$ . Demonstre que os circuncírculos dos triângulos  $LCM$  e  $ABC$  são tangentes se, e somente se,  $AK \perp BC$ .

Permita  $\angle$  denotar ângulos orientados.

Para provar que  $(LCM)$  e  $(ABC)$  são tangentes se, e somente se,  $AK \perp BC$ , devemos demonstrar que existe uma reta que tangencia as duas circunferências em  $C$ .



**Alegação** —  $\triangle CLM \sim \triangle AKO$  pelo caso  $LAL$ .

*Demonstração.* Sabe-se que  $CMBO$  é um quadrilátero cíclico, já que seus vértices são concílicos em  $(BCO)$ . Portanto, torna-se trivial perceber que  $\frac{BO}{CM} = \frac{BK}{KM} = \frac{KO}{CK}$ , ou seja,  $\frac{AO}{CM} = \frac{OK}{CL}$ . Além disso, sabemos que

$$\angle LCM = \angle LCK + \angle KCM = 2\angle ACK + \angle BOK = \angle AOB + \angle BOK = \angle AOK. \quad \square$$

**Alegação** — O ponto antipodal em relação a  $O$  pertence à tangente de  $(ABC)$ .

*Demonstração.* Chamemos o pé da mediatrix do lado  $\overline{BC}$  de  $N$ . A reta  $\overline{NO}$  intersecta  $(BCO)$  novamente em  $O'$ , sendo esse o ponto antipodal em relação a  $O$ . Já que  $OO'$  é um diâmetro de tal circunferência,  $\angle O'CO = 90^\circ$ . Portanto,  $\overline{CO'}$  tangencia  $(ABC)$ .  $\square$

Agora, para provar que  $(LCM)$  e  $(ABC)$  são tangentes se, e somente se,  $AK \perp BC$ , devemos demonstrar que  $\angle MCO' = \angle MLC$ . Já que  $CMOO'$  é cíclico,  $\angle MCO' = \angle MOO'$ . Mas é necessário lembrar que  $\angle AKO = \angle MLC$ . Ou seja,

$$\angle AKO = \angle MOO' \iff AK \parallel NO \iff AK \perp BC,$$

já que  $NO \perp BC$ .

**Observação** — A principal função de desenhar diagramas muito bem construídos é tentar perceber padrões e desenvolver estratégias que aparecam certas no diagrama, mas ainda têm de ser provadas formalmente. Aproveite disso! No diagrama,  $\triangle CLM \sim \triangle AKO$  realmente aparenta ser verdadeiro, sendo bem fácil comprovar isso sabendo que  $CMB$ O é um quadrilátero cíclico.

**Observação** — Para descobrir o ponto  $N$ , o pensamento chave foi tentar achar uma reta tangente a  $(ABC)$  baseado em informações que já tínhamos antes. Portanto, em problemas que envolvem provar uma certa tangência entre circunferências, pode ser válido usar informações já conhecidas para provar que uma reta é tangente à uma circunferência, e depois provar que tal reta também é tangente à outra circunferência, caso cumpra certo requerimento.

### 3 Referências