

OBM 2025 Problema 1

Samuel de Araújo Brandão

4 de dezembro de 2025

Eu acredito que minha solução para o Problema 1 mereça ser avaliada em **10 pontos**. Abaixo encontra-se o motivo.

Para solucionar o primeiro problema da OBM 2025, utilizei da terceira solução, apresentada no critério de solução. É evidente que os critérios (a), (b), (c) e (d) foram satisfeitos. Porém, imagino que o corretor(a) tenha considerado que o critério (e) não fora satisfeito com excelência. Contudo, argumento que no penúltimo parágrafo de minha solução, tal critério tenha sido satisfeito sim.

Compreendo que minha estratégia difere levemente daquela utilizada na solução oficial, já que não separei explicitamente a solução em $z > 0$ e $z = 0$. Contudo, acredito que isso não interfere na qualidade de minha solução, pois deixei claro o que ocorre quando $z = 0$.

Sobre $z > 1$, eu já havia deixado claro anteriormente que uma potência de 2 deve ser obviamente par, portanto, a casa das unidades não pode equivaler a 1. Abaixo encontram-se os dois trechos que mencionei tal fato.

Portanto, ao dividir essa potência de 2 por 2, encontraremos $PM = 5$ e $UN = 1$ ($UN = 6$ é inviável, já que culminaria em outro dígito 1 quando $\alpha = 3$, pois $6 \cdot 2 = 12$). Contradição! UN é obrigatoriamente par para formar uma potência de 2.

O trecho acima pode ser encontrado no quinto parágrafo, onde provo que $\alpha = 3$ é impossível. O seguinte trecho, pode ser encontrado no sexto parágrafo, onde demonstro que $\alpha = 4$ também é impossível

$PM = UN = 2$ é visivelmente impossível pois, ao dividir por 2, $UN = 1$ pelo mesmo motivo já visto.

Portanto, pode-se ver que a impossível existência de $UN = 1$ para uma potência de 2 já era um fato conhecido por mim. Logo, acredito que minha solução possa ser avaliada em **10 pontos**, como citei anteriormente.

~~Samuel~~ Samuel de Araújo Brandão, Nível 2. CPF: 177.814.886-79

Problema 1. O menor valor possível para a soma dos dígitos de uma potência de 2 é 5, podendo ser encontrado com $2^5 = 32$, por exemplo.

~~É possível provar tal fato notando~~ Para provar tal fato, digamos que α seja o menor valor para a soma dos dígitos de 2^x , sendo x um inteiro não nulo. Seja também UN a soma dos dígitos de 2^x e PM o primeiro dígito da esquerda para a direita de 2^x .

Perceba que os únicos valores possíveis para UN são: $\{2, 4, 8, 6, 3\}$. Tal é verdadeiro pois $2^1 \equiv 2 \pmod{10}$, $2^1 + 2^1 \equiv 4 \pmod{10}$, $2^2 + 2^2 \equiv 8 \pmod{10}$, $2^3 + 2^3 \equiv 6 \pmod{10}$ e $2^4 + 2^4 \equiv 2 \pmod{10}$, repetindo assim infinitamente. Portanto, ~~UN = 2~~, UN equivale a 2 ou 4, já que vimos que $\alpha = 5$ para 2^5 , mas para qualquer outro valor de UN, é garantido que ~~$\alpha > 5$~~ $\alpha > 5$.

Sendo assim, os possíveis valores de α são 3, 4 ou 5 (2 é impossível pois $PM \geq 1$, resultando em $\alpha \geq 3$). A seguir, provamos que 3 e 4 são impossíveis.

- Visando contração, $\alpha = 3$. A única configuração possível é $PM = 1$ e $UN = 2$, podendo existir apenas números 0 entre PM e UN. Portanto, ao dividir essa potência de 2 por 2, encontraremos $PM = 5$ e $UN = 1$ ($UN = 6$ é inviável, já que culminaria em outro dígito 1 ~~em~~ quando $\alpha = 3$, pois $6 \cdot 2 = 12$ ~~e~~). Contração! UN é obrigatoriamente par para formar uma potência de 2.

- Visando contração, $\alpha = 4$. Logo $PM = UN = 2$, havendo apenas dígitos 0 entre os dois ou nenhum dígito, ou $PM = 1$ e $UN = 2$, havendo um dígito 1 entre os dois e podendo haver dígitos 0. $PM = UN = 2$ é visivelmente impossível pois, ao dividir por 2, $UN = 1$ pelo mesmo motivo já visto. Já se $PM = 1$ e $UN = 2$, ~~é possível a divisão por 2 resulta em~~ $PM = 5$ e $UN = 6$, sendo possível já que ~~deve~~ existem dois algarismos 1 em $\alpha = 4$. Ao dividir novamente, $PM = 2$ e $UN = 3$ ($UN = 8$ é inviável, já que culminaria em um dígito 1 antes de 6, impossibilitando $\alpha = 4$). Contração! UN deve ser par. Logo, sobra apenas $\alpha = 5$.