OMpD 2022 N2 Fase 2

Samuel de Araújo Brandão

26 de setembro de 2025

Este documento contém soluções para os problemas da OMpD 2022 N2 Fase 2, escritos por mim durante minha preparação para a Olimpíada Internacional de Matemática.

O conteúdo reflete meu próprio entendimento e processo de resolução de problemas. Algumas soluções podem ter sido inspiradas pelo trabalho de outras pessoas ou requerido ajuda externa; nesses casos, a devida atribuição é dada (veja a seção 3).

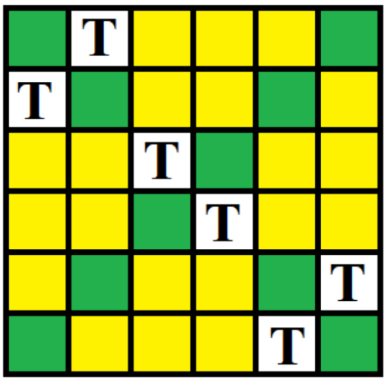
Se você notar algum erro ou tiver sugestões de melhoria, eu ficaria muito grato em recebê-las em samuelbaraujo19@gmail.com.

Conteúdo

1 Problemas

1. Considere um tabuleiro quadriculado 6×6, formado de 36 casinhas unitárias. Desejamos colocar 6 torres neste tabuleiro, uma torre em cada casinha, de modo que não haja duas torres numa mesma linha, nem duas torres numa mesma coluna. Note que, uma vez colocadas as torres dessa maneira, temos que, para toda casinha onde não foi colocada uma torre, há uma torre na mesma linha que ela e uma torre na mesma coluna que ela. Diremos que tais torres são alinhadas com essa casinha.

Para cada uma dessas 30 casas sem torres, pinte-a de verde se as duas torres alinhadas com essa mesma casinha estão a uma mesma distância dela, e pinte-a de amarelo caso contrário. Por exemplo, ao colocarmos as 6 torres (T) como abaixo, temos:



(a) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas verdes?

(b) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas amarelas?

(c) É possível colocarmos as torres de modo que haja 15 casas verdes e 15 amarelas?

2. Seja $ABCD$ um retângulo. O ponto E está sobre o lado $\overline{AB}$ e o ponto F está sobre o lado $\overline{AD}$, de modo que $\angle FEC = \angle CEB$ e $\angle DFC = \angle CFE$.

Determine a medida do ângulo $\angle FCE$ e da razão AD/AB.

3. Seja N um inteiro positivo. Inicialmente, um número inteiro positivo A está escrito no quadro. A cada passo, podemos realizar uma das duas operações seguintes com o número escrito no quadro:

(i) Somar N ao número escrito no quadro e trocar tal número pela soma obtida;

(ii) Se o número no quadro for maior do que 1 e tiver pelo menos um algarismo 1, então podemos remover o algarismo 1 desse número, e trocar o número escrito inicialmente por este (com remoção de possíveis zeros à esquerda).

Por exemplo, se $N = 63$ e $A = 25$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$25 \to 88 \to 151 \to 51 \to 5$$

E se $N = 143$ e $A = 2$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$2 \to 145 \to 288 \to 431 \to 574 \to 717 \to 860 \to 1003 \to 3$$

Para quais valores de N sempre é possível, não importando o valor inicial de A na lousa, obter o número 1 na lousa, mediante um número finito de operações?

4. Dizemos que uma sêxtupla de números reais positivos $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ é *phika* se $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

(a) Prove que existe uma sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ tal que:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) > 1 - \frac{1}{2022^{2022}}.$$

(b) Prove que para toda sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, temos:

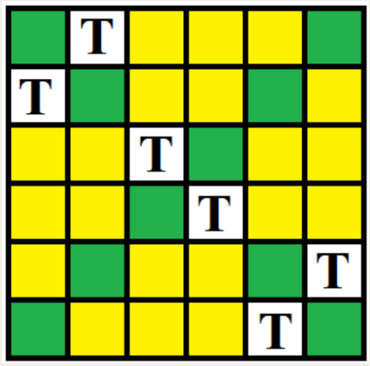
$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) < 1.$$

2 Soluções

2.1 Problema 1.

Enunciado do Problema

Considere um tabuleiro quadriculado 6×6, formado de 36 casinhas unitárias. Desejamos colocar 6 torres neste tabuleiro, uma torre em cada casinha, de modo que não haja duas torres numa mesma linha, nem duas torres numa mesma coluna. Note que, uma vez colocadas as torres dessa maneira, temos que, para toda casinha onde não foi colocada uma torre, há uma torre na mesma linha que ela e uma torre na mesma coluna que ela. Diremos que tais torres são alinhadas com essa casinha.
Para cada uma dessas 30 casas sem torres, pinte-a de verde se as duas torres alinhadas com essa mesma casinha estão a uma mesma distância dela, e pinte-a de amarelo caso contrário. Por exemplo, ao colocarmos as 6 torres (T) como abaixo, temos:

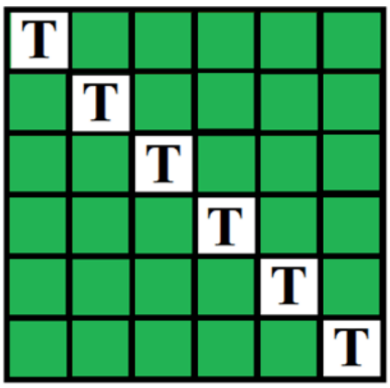


(a) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas verdes?

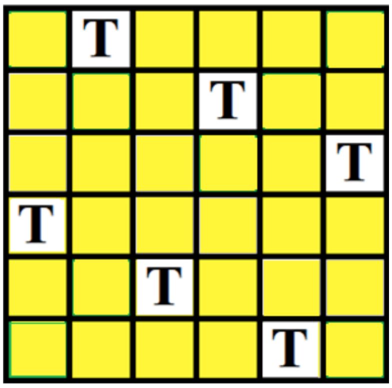
(b) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas amarelas?

(c) É possível colocarmos as torres de modo que haja 15 casas verdes e 15 amarelas?

(a) Sim, como pode-se ver a seguinte configuração



(b) Sim, como pode-se ver a seguinte configuração



(c) Não. Já que é impossível encontrar um número ímpar de casas verdes.

Pode-se provar tal fato ao perceber que existe apenas uma maneira de formar casas verdes: alinhar duas torres diagonalmente, o que resulta em um par de casas verdes únicos, que não podem ser conquistados por meio de nenhuma outra alinhação de torres na diagonal. Ou seja, haverá sempre um número par de casas verdes no tabuleiro, impossibilitando haver 15 casas verdes em tal.

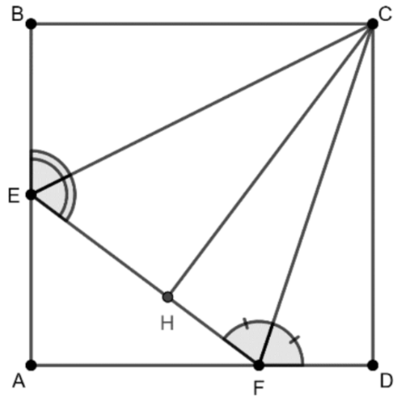
2.2 Problema 2.

Enunciado do Problema

Seja $ABCD$ um retângulo. O ponto E está sobre o lado $\overline{AB}$ e o ponto F está sobre o lado $\overline{AD}$, de modo que $\angle FEC = \angle CEB$ e $\angle DFC = \angle CFE$.
Determine a medida do ângulo $\angle FCE$ e da razão AD/AB.

$\angle FCE = 45°$ e $\frac{AB}{AD} = 1$.

É possível encontrar a medida de $\angle FCE$ notando que $\overline{CF}$ é a bissetriz de $\angle EFD$ e $\overline{CE}$ é a bissetriz de $\angle BEF$. Já que o ângulo interno total de EFDCB é 540° e $\angle FDC + \angle DCB + \angle CBE = 270°$, pode-se afirmar que $\angle BEF + \angle EFD = 270°$, logo, $\angle CEF + \angle EFC = 135° \iff \angle FCE = 45°$.



Visando encontrar o resultado de $\frac{AD}{AB}$, digamos que H é o pé da altura $\overline{CH}$ relativa a $\overline{EF}$. Podemos afirmar que $\triangle CBE \cong \triangle CEH$ pelo caso ALA. Assim como podemos afirmar, pelo mesmo caso, que $\triangle CHF \cong \triangle CFD$. Essas similaridades resultam em $\overline{BC} = \overline{CD}$, ou seja, $\overline{AB} = \overline{AD} \iff \frac{AB}{AD} = 1$.

2.3 Problema 3.

Enunciado do Problema

Seja N um inteiro positivo. Inicialmente, um número inteiro positivo A está escrito no quadro. A cada passo, podemos realizar uma das duas operações seguintes com o número escrito no quadro:

(i) Somar N ao número escrito no quadro e trocar tal número pela soma obtida;

(ii) Se o número no quadro for maior do que 1 e tiver pelo menos um algarismo 1, então podemos remover o algarismo 1 desse número, e trocar o número escrito inicialmente por este (com remoção de possíveis zeros à esquerda).

Por exemplo, se $N = 63$ e $A = 25$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$25 \to 88 \to 151 \to 51 \to 5$$

E se $N = 143$ e $A = 2$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$2 \to 145 \to 288 \to 431 \to 574 \to 717 \to 860 \to 1003 \to 3$$

Para quais valores de N sempre é possível, não importando o valor inicial de A na lousa, obter o número 1 na lousa, mediante um número finito de operações?

Para todos os números N que satisfazem o enunciado e $\gcd(10, N) = 1$, é sempre possível obter o número 1 na lousa.

Alegação — N não é múltiplo nem de 2, nem de 5.

Demonstração. Caso A seja um número par, N certamente não pode ser múltiplo de 2, já que, caso tal fosse possível, nem (i) nem (ii) seriam capazes de chegar à um número ímpar, pois toda soma de números pares resulta em números pares. Sabendo que 1 é ímpar, é impossível que N seja múltiplo de 2.

O mesmo serve para N múltiplo de 5. Tal é impossível, porque se tanto N quanto A fossem múltiplos de 5, o número escrito no lousa jamais seria 1, pois continuará para sempre sendo múltiplo de 5, ja que 1 não é múltiplo de 5 e toda soma de números múltiplos de 5 resultam em múltiplos de 5. Com isso, podemos afirmar que $\gcd(10, N) = 1$. □

Alegação — Para algum $k \geq 1$, é certo que $10^k \equiv 1 \pmod N$

Demonstração. Imagine o conjunto $\{10^1, 10^2, \ldots, 10^{N+1}\}$. É certo que, entre os números desse conjunto, pelo princípio da casa dos pombos, existem dois números de resto equivalente na divisão por N, digamos 10^x e 10^y. SPDG, $x > y$. Perceba que $10^x - 10^y \equiv 0 \pmod N$. Sabe-se que $10^x - 10^y = 10^y(10^{x-y} - 1)$, mas já que N não é múltiplo de 10, pode-se afirmar que N é múltiplo de $10^{x-y} - 1$. □

Agora, deve-se perceber que, ao somar o número N repetidas vezes, encontraremos o número $10^k - 1 + A$, que é composto por 1, seguido de vários números 0, e no final, um número que nomearemos de B. Já que $B \equiv A - 1 \pmod N$, depois de apagar o primeiro número 1 da esquerda para direita, teremos escrito no lousa o número B. Após realizarmos esse processo sucessivamente, encontraremos o número 0.

Alegação — N é múltiplo de $111\ldots1$.

Demonstração. Como visto na alegação anterior, $10^k \equiv 1 \pmod N$, portanto, $10^k - 1$ é múltiplo de N, assim como $\frac{10^k-1}{9} = 111\ldots1$. □

Portanto, agora basta somarmos o número N repetidas vezes até encontrarmos o número $111\ldots1$, e proceder apagando todos os números 1, com exceção de apenas um deles.

2.4 Problema 4.

Enunciado do Problema

Dizemos que uma sêxtupla de números reais positivos $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ é *phika* se $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

(a) Prove que existe uma sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ tal que:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) > 1 - \frac{1}{2022^{2022}}.$$

(b) Prove que para toda sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, temos:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) < 1.$$

(a) Imagine que $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ são números naturais. Nesse caso, poderiamos afirmar que $a_1 = 0$,$a_2 = 0$,$a_3 = 1$, assim como $b_1 = 0$,$b_2 = 0$,$b_3 = 0$. Nesse caso,

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) = 1$$

Já que $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ são, na verdade, números naturais, basta imaginar números a_1,a_2,b_3,b_4 ridiculamente maiores que 0, ou seja, muito perto de 0. Podemos dizer também que a_3,b_3 são muito, muito próximos de 1. Desse modo, por mais que a soma não seja equivalente a 1, podemos dizer que é muito próxima de 1.

Observação — O fato de 1 ser dividido por 2022^{2022} não é importante, já que simplesmente ilustra o quão próximo de 1 o número $1 - \frac{1}{2022^{2022}}$ é.

(b) Pela desigualdade AM-GM, sabe-se que

$$\frac{a_i^2 + b_i}{2} \geq a_i\sqrt{b_i}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1\sqrt{b_1} + a_2\sqrt{b_2} + a_3\sqrt{b_3} + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 &\leq \frac{a_1^2 + b_1}{2} + \frac{a_2^2 + b_2}{2} + \frac{a_3^2 + b_3}{2} + \\ &\quad a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \\ &= \frac{a_1^2 + b_1 + a_2^2 + b_2 + a_3^2 + b_3}{2} + \\ &\quad \frac{2a_1a_2 + 2a_2a_3 + 2a_3a_1}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Contudo, pode-se ver facilmente que não existe igualdade, já que, se ouvesse, $1 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_1^3$, um absurdo, pois $0 < a_1, a_2, a_3 < 1 \implies a_1 > a_1^2, a_2 > a_2^2, a_3 > a_3^2$.

3 Referências