Soluções TM^2 2023A

Samuel de Araújo Brandão

2 de Agosto de 2025

Uma coleção de soluções para a TM^2 2024 nível A, inspirada no estilo de Evan Chen.
Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).
Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

Contents

1 Problemas **2**

2 Soluções **3**

2.1 Problema 1. 3
2.2 Problema 2. 4
2.3 Problema 3. 5
2.4 Problema 4. 6

3 Referências **7**

1 Problemas

1. Definimos a sequência $(a_n)_n$ de forma recursiva, onde os termos iniciais são $a_1 = 12$ e $a_2 = 24$, e para $n \geq 3$, temos

$$a_n = a_{n-2} + 14.$$

(a) O número 2023 aparece na sequência?

(b) Mostre que não existem quadrados perfeitos nessa sequência.

2. Sejam a, b, c números reais tais que $a^n + b^n = c^n$ para três valores inteiros positivos consecutivos de n. Prove que $abc = 0$.

3. Em um triângulo acutângulo ABC, sejam D e E os pés das alturas relativas aos vértices A e B, respectivamente, e seja M o ponto médio de AC. O círculo que passa por D e é tangente à reta BE em B intersecta a reta BM em um ponto F, com $F \neq B$. Mostre que FM é bissetriz de $\angle AFD$.

4. Determine todos os inteiros positivos n para os quais existe um tabuleiro $n \times n$, onde podemos escrever n vezes cada um dos números de 1 a n (um número em cada casa), de modo que as n somas dos números em cada linha deixem n restos distintos na divisão por n, e as n somas dos números em cada coluna deixem n restos distintos na divisão por n.

2 Soluções

2.1 Problema 1.

Enunciado do problema

Definimos a sequência $(a_n)_n$ de forma recursiva, onde os termos iniciais são $a_1 = 12$ e $a_2 = 24$, e para $n \geq 3$, temos

$$a_n = a_{n-2} + 14.$$

(a) O número 2023 aparece na sequência?

(b) Mostre que não existem quadrados perfeitos nessa sequência.

(**a**) Não, já que não existem números ímpares nesta sequência. Basta perceber que a_1 e a_2 são pares, logo a_{n-2} nunca será ímpar.

(**b**) Digamos que existem quadrados perfeitos na sequência, logo, podemos dizer que $x^2 = 12 + 14y$ ou $x^2 = 24 + 14y \Rightarrow y = \frac{x^2-12}{14}$ ou $y = \frac{x^2-24}{14} \Rightarrow x^2 \equiv 12 \pmod{14}$. A tabela abaixo mostra que isso é um absurdo, já que $\forall x \in \{k \in \mathbb{Z}^+ \mid k < 14\}, \quad x \not\equiv 12 \pmod{14}$

1 $x^2 = 1 \Rightarrow 1 \equiv 1 \pmod{14}$
2 $x^2 = 4 \Rightarrow 4 \equiv 4 \pmod{14}$
3 $x^2 = 9 \Rightarrow 9 \equiv 9 \pmod{14}$
4 $x^2 = 16 \Rightarrow 16 \equiv 2 \pmod{14}$
5 $x^2 = 25 \Rightarrow 25 \equiv 11 \pmod{14}$
6 $x^2 = 36 \Rightarrow 36 \equiv 8 \pmod{14}$
7 $x^2 = 49 \Rightarrow 49 \equiv 7 \pmod{14}$
8 $x^2 = 64 \Rightarrow 64 \equiv 8 \pmod{14}$
9 $x^2 = 81 \Rightarrow 81 \equiv 11 \pmod{14}$
10 $x^2 = 100 \Rightarrow 100 \equiv 2 \pmod{14}$
11 $x^2 = 121 \Rightarrow 121 \equiv 9 \pmod{14}$
12 $x^2 = 144 \Rightarrow 144 \equiv 4 \pmod{14}$
13 $x^2 = 169 \Rightarrow 169 \equiv 1 \pmod{14}$

2.2 Problema 2.

Enunciado do problema

Sejam a, b, c números reais tais que $a^n + b^n = c^n$ para três valores inteiros positivos consecutivos de n. Prove que $abc = 0$.

Dado:

$$a^n + b^n = c^n, a^{n+1} + b^{n+1} = c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} = c^{n+2}$$

Pode-se afirmar que

$$c = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \quad \text{e} \quad c = \frac{a^{n+2} + b^{n+2}}{a^{n+1} + b^{n+1}}$$

Isso resulta em:

$$(a^{n+1} + b^{n+1})^2 = (a^{n+2} + b^{n+2})(a^n + b^n)$$

Logo,

$$2ab = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2ab - b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a - b)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Para finalizar, veja abaixo que pelo menos um dentre a, b, c é 0

$$c^n = 2a^n \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2a^{n+1}}{2a^n} \quad \Rightarrow \quad c = a \quad \Rightarrow \quad a^n = 2a^n \quad \Rightarrow \quad a^n = 0$$

2.3 Problema 3.

Enunciado do problema

Em um triângulo acutângulo ABC, sejam D e E os pés das alturas relativas aos vértices A e B, respectivamente, e seja M o ponto médio de AC. O círculo que passa por D e é tangente à reta BE em B intersecta a reta BM em um ponto F, com $F \neq B$. Mostre que FM é bissetriz de $\angle AFD$.

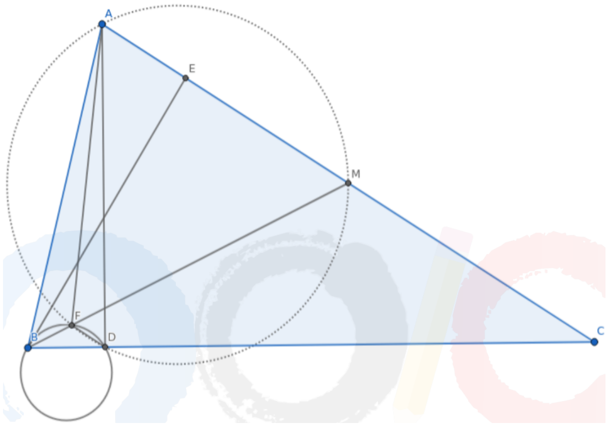

Figure 1: Uma figura ilustrando a solução do terceiro problema. Fonte

Dado:

$$\angle DAC = \angle EBC = 90^\circ - \angle C \quad \text{e} \quad \angle EBC = \angle EBM + \angle MBC.$$

Pelo *teorema do segmento alterno*:

$$\angle EBM = \angle FDB \Rightarrow \angle MFD = \angle FDB + \angle FBD = 90^\circ - \angle C,$$

portanto, $AFDM$ é um quadrilátero cíclico. Além disso:

$$\angle DFM = \angle DAM \quad \text{e} \quad \angle AFM = \angle ADM.$$

Como MD é mediana de $\triangle ADC$, tem-se:

$$MA = MD = MC \Rightarrow \triangle ADC \text{ é isósceles} \Rightarrow \angle MAD = \angle ADM.$$

2.4 Problema 4.

Enunciado do problema

Determine todos os inteiros positivos n para os quais existe um tabuleiro $n \times n$, onde podemos escrever n vezes cada um dos números de 1 a n (um número em cada casa), de modo que as n somas dos números em cada linha deixem n restos distintos na divisão por n, e as n somas dos números em cada coluna deixem n restos distintos na divisão por n.

Deve-se perceber que para todo n ímpar, a configuração abaixo satisfaz o enunciado, mas nenhum n par satisfaz tal.

$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	n
$n-2$	$n-2$	$n-2$	$\cdots$	$n-2$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$
2	2	2	$\cdots$	2	n
1	1	1	$\cdots$	1	n
1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n

Figure 2: Uma possível configuração para o quarto problema. Fonte.

Para provar que todas as linhas têm somas diferentes $\pmod n$, deve-se perceber que, para quaisquer duas linhas distintas entre si e distintas entre a última linha, é possível achar este absurdo:

$$x(n-1)+n \equiv y(n-1)+n \pmod n \Rightarrow x \equiv y \pmod n$$

Já para qualquer linha distinta da última linha, é possível encontrar este outro absurdo, já que n é um número ímpar e $\frac{n}{2}$ não é um inteiro:

$$x(n-1)+n \equiv \frac{n(n+1)}{2} \pmod n \Rightarrow x \equiv \frac{n}{2} \pmod n$$

Já para n igual a um número par, a soma de todos os números no tabuleiro é igual a $\frac{n^2(n+1)}{2}$ e a soma de todos os números $\pmod n$ é igual a $0+1+2+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, logo:

$$\frac{n^2(n+1)}{2} \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod n \Rightarrow \frac{n(n^2+1)}{2} \equiv 0 \pmod n$$

n é par, logo $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$. Logo, pode-se encontrar o absurdo abaixo, que anula a existência de um número n par:

$$\frac{n(n^2+1)}{2} \equiv \frac{n}{2} \equiv 0 \pmod n$$

3 Referências

Só foi possível escrever este documento graças a ajuda e inspiração dos seguintes:

[1] NOIC - Núcleo Olímpico de Iniciação Científica. *Soluções TM^2 Nível A*, 2023. Disponível em: //noic.com.br/wp-content/uploads/2025/03/Solucoes_do_TM2_2024_Nivel_A.pdf