

Soluções Jacob Palis 2024 N2

Samuel de Araújo Brandão

4 de Setembro de 2025

Uma coleção de soluções para a **Jacob Palis 2024 Nível 2**, inspirada no estilo de Evan Chen. Pode-se encontrar todos os problemas e respostas oficiais [aqui](#).

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

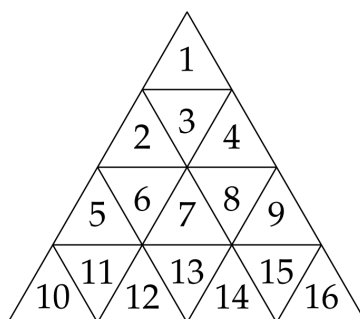
Conteúdos

1	Problemas	2
1.1	Testes	2
1.2	Respostas Numéricas	4
2	Soluções	6
2.1	Testes	6
2.2	Respostas Numéricas	6
3	Referências	7

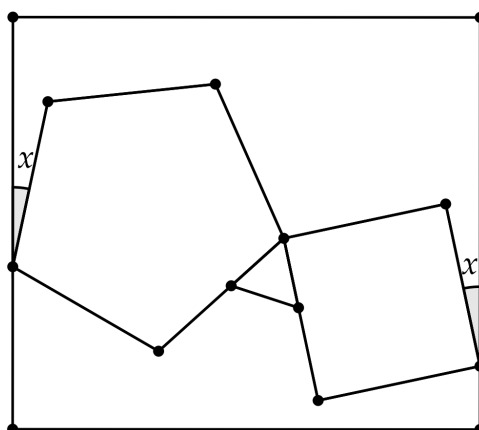
1 Problemas

1.1 Testes

1. Sejam x, y, z, w inteiros positivos tais que $2024 = 2^x \cdot 5^y = 8^z \cdot 25^w$. Qual é o valor de $x + y + z + w$?
2. Lucas estava participando de uma corrida de rua de 21 quilômetros e monitorava o tempo médio por quilômetro. Ao final do quilômetro 14, seu ritmo médio era de 6 minutos e 42 segundos por quilômetro. Nos últimos 7 quilômetros, o ritmo caiu, e seu tempo médio no total da prova tornou-se 6 minutos e 50 segundos por quilômetro. Qual foi o tempo médio de Lucas nos últimos 7 quilômetros?
3. Qual o número máximo de meses com 5 quintas-feiras que um ano pode ter?
4. Quantos triângulos na figura abaixo têm soma de seus números par?

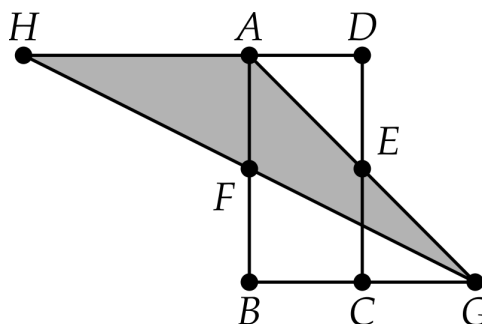


5. Em um retângulo está um pentágono regular, um triângulo equilátero e um quadrado. Os três polígonos compartilham um vértice. Os outros dois vértices do triângulo equilátero estão situados, respectivamente, sobre os lados do pentágono e do quadrado. Os outros vértices do pentágono e do quadrado estão sobre lados do retângulo. Sabe-se que os lados do pentágono e do quadrado formam ângulos iguais x com lados opostos do retângulo. Qual é o valor de x em graus?

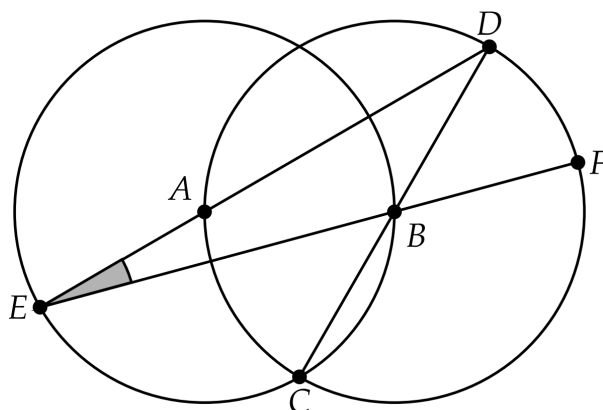


6. Uma professora tem menos de 100 alunos e dispõe de 2024 balas para distribuí-las igualmente entre os alunos. Constatou que deveria comprar no mínimo 41 balas a mais para isso. Quantos alunos há na sala?

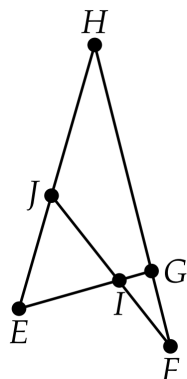
7. Em uma cidade com 2025 habitantes, cada pessoa é mentirosa (mentem sempre) ou sincera (dizem sempre a verdade). Um dia, Ana diz: “Nessa cidade há um número ímpar de mentirosos!”. Com base nisso, quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?
8. No retângulo $ABCD$, $AB = 8$ e $BC = 4$. E e F são os pontos médios de CD e AB , respectivamente. A reta AE intersecta BC no ponto G , e a reta GF intersecta AD no ponto H . Qual é a área do triângulo AGH ?



9. No planeta Xorpzorp, as semanas têm 11 dias (1ª-feira a 11ª-feira); os meses alternam entre 50 e 51 dias; o ano tem exatamente 5 meses, alternando entre 252 e 253 dias. Hoje é 4ª-feira, dia 51 do mês 4 de 2024. Após 24 anos terrestres, qual será a data no calendário de Xorpzorp?
10. No triângulo isósceles com base BC , pontos E em AB e F, G em AC satisfazem: (i) A, F, G, C estão nessa ordem; (ii) $AF = EF$; (iii) EF é bissetriz de $\angle AEG$; (iv) GB é bissetriz de $\angle EGC$; (v) $BC = BG$. Qual é o valor de $\angle BAC$?
11. Maria escreveu os primeiros 1000 múltiplos de 23, em ordem, e José apagou os dígitos de ordem a partir das centenas (por exemplo, 12345 vira 345). Restou uma lista de 1000 números com até 3 dígitos. Qual número dessa lista aparece por último em ordem (entre 112, 113, 114, 115 e 116)?
12. As circunferências ω_1 , centro A , passando por B , e ω_2 , centro B , passando por A , se intersectam em C . A reta BC intersecta ω_2 novamente em D . A reta DA intersecta ω_1 em E (com A entre D e E). A reta EB intersecta ω_2 em F (com B entre E e F). Determine $\angle DEF$ em graus.



13. Em uma figura, os pontos E, F, G, H, I, J devem ser pintados, um por um, com as cores vermelho, verde ou azul, de modo que três pontos colineares não tenham a mesma cor. Quantas pinturas possíveis existem?



14. O sistema

$$\begin{cases} a^3 + b = 4c, \\ a + b^3 = c, \\ ab = -1 \end{cases}$$

tem solução real. Quantos valores de a satisfazem o sistema?

15. Um tabuleiro 15×36 será coberto, sem sobreposição, por quadrados de lado 5×5 e 7×7 . Nenhuma parte das peças pode sair do tabuleiro. Qual é o número mínimo de quadradinhos que permanecerão descobertos?

1.2 Respostas Numéricas

16. Seja N um inteiro positivo de quatro algarismos cujo algarismo das unidades é igual a 3 e seja M o número obtido de N apagando esse algarismo 3 e escrevendo-o no começo de N . Sabe-se que M é 2025 unidades menor que N . Qual é o valor de N ?
17. Um número a ganha de outro b se $a > b$ e o número obtido invertendo os dígitos de a na base decimal é maior do que o número obtido invertendo os dígitos de b . Por exemplo, 314 ganha de 291, pois 314 > 291 e 413 > 192. Por outro lado, 314 não ganha de 309, pois 413 < 903. Quantos números de quatro algarismos ganham de 2024?
18. Considere a expressão

$$1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 2023 \ 2024.$$

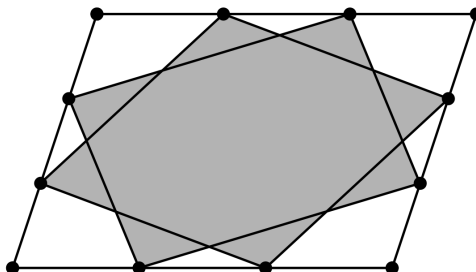
Em cada espaço vazio, coloque um $+$ ou um $-$ e calcule o resultado. Quantos são os possíveis restos desse resultado na divisão por 2024?

19. Sejam a, b, c tais que

$$\begin{cases} a + b + c = 10, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 20, \\ a^3 + b^3 + c^3 = 30. \end{cases}$$

Calcule o valor de $a^5 + b^5 + c^5$.

20. Na figura a seguir temos um paralelogramo em que cada lado foi dividido em três partes iguais. Os pontos sobre os lados foram ligados alternadamente para formar dois quadriláteros. A figura sombreada é formada pela união das regiões desses dois quadriláteros. A razão entre a área sombreada e a área do paralelogramo pode ser escrita como fração irredutível $\frac{p}{q}$, com p, q inteiros positivos. Quanto vale $p + q$?



2 Soluções

2.1 Testes

2.2 Respostas Numéricas

3 Referências