Critério P5 N2

a)

Solução 1

Como $x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}$ e queremos $0 < x < \frac{1}{2025}$, faz sentido tomar $c = -1$ e $b = 2025$. Assim,

$$x = \frac{1}{2025} - \frac{ax^2}{2025}.$$

Tomando a inteiro positivo, a equação $ax^2 + 2025x - 1 = 0$ tem o produto de suas raízes $P = \frac{-1}{a}$ negativo e o delta $\Delta = 2025^2 + 4a$ positivo. Ou seja, uma das raízes r será um real positivo com

$$0 < r = \frac{1}{2025} - \frac{ar^2}{2025} < \frac{1}{2025}.$$

Pode-se demonstrar que as equações que satisfazem as condições do problema são equivalentes a uma das apresentadas acima com $1 \leq a \leq 2025$.

Outra maneira de concluir o argumento é observar que, sendo $f(x) = ax^2 + 2025x - 1$, $f(0) = -1 < 0$ e $f\left(\frac{1}{2025}\right) = \frac{a}{2025^2} > 0$.

Ou, ainda:

$$0 < x = \frac{1}{2025 + ax} < \frac{1}{2025}.$$

Solução 2

Considere a equação $ax^2 + 2025x - 1 = 0$, com $1 \leq a \leq 2025$.
Basta mostrar que

$$0 < \frac{-2025 + \sqrt{2025^2 + 4a}}{2a} < \frac{1}{2025} \Leftrightarrow \frac{2025}{2a} < \frac{\sqrt{2025^2 + 4a}}{2a} < \frac{2025}{2a} + \frac{1}{2025}$$

Que, como a é positivo, é equivalente a

$$2025 < \sqrt{2025^2 + 4a} < 2025 + \frac{2a}{2025} \Leftrightarrow$$

$$2025^2 < 2025^2 + 4a < 2025^2 + 4a + \left(\frac{2a}{2025}\right)^2 \Leftrightarrow 0 < 4a < 4a + \left(\frac{2a}{2025}\right)^2$$

O que completa a demonstração.

b)

Solução 1 (Com a Fórmula do Delta)

Considere $y = \frac{1}{x}$, a equação $cy^2 + by + a = 0$ deve ter uma raiz maior do que 2025. Sejam $a = \alpha c$ e $b = \beta c$ em que α e β são números racionais. Basta mostrar que um destes valores deve ser maior ou igual a 2025. Podemos assumir que $c > 0$.

Então

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2c} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha} > 2025 \Leftrightarrow -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} > 2 \cdot 2025.$$

• *Caso* $\beta < 0$.

Supondo que $-\beta = 2025 - k$ para um certo k não negativo menor do que 2025:

$$2025 - k + \sqrt{(2025 - k)^2 - 4\alpha} > 2 \cdot 2025 \Leftrightarrow \sqrt{(2025 - k)^2 - 4\alpha} > 2025 + k.$$

Assim:

$$-4\alpha > (2025 + k)^2 - (2025 - k)^2 \Leftrightarrow -\alpha > 2025k \Leftrightarrow -a > 2025kc.$$

Logo não podemos ter $kc \geq 1$.

Falta analisar o caso em que $0 \leq kc < 1$.

$$-\beta = 2025 - k \Leftrightarrow -\frac{b}{c} = 2025 - k \Rightarrow -b = c(2025 - k) = 2025c - kc.$$

Logo $c = 1, k = 0, -b = 2025 \Leftrightarrow b = -2025$ e $-a > 2025kc = 0 \Leftrightarrow a < 0$.

• *Caso* $\beta > 0$.

Supondo que $\beta = 2025 - k$ para um certo k não negativo menor do que 2025:

$$-(2025 - k) + \sqrt{(2025 - k)^2 - 4\alpha} > 2 \cdot 2025 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(2025 - k)^2 - 4\alpha} > 3 \cdot 2025 - k.$$

Assim:

$$-4\alpha > (3 \cdot 2025 - k)^2 - (2025 - k)^2 \Rightarrow -\alpha > 2025(2 \cdot 2025 - k) > 2025.$$

I.e.:

$$-a > 2025c \geq 2025 \ (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Observação:

O argumento acima permite concluir que as únicas equações que satisfazem as condições do problema são as apresentadas no item a.

Solução 2 (Com a Desigualdade Triangular)

Existe r real tal que $0 < r < \frac{1}{2025}$ e

$$ar^2 + br + c = 0 \Leftrightarrow -c = ar^2 + br \Rightarrow |-c| = |ar^2 + br|$$

Pela Desigualdade Triangular:

$$|-c| = |ar^2 + br| \Rightarrow |c| \leq |a|r^2 + |b|r \Rightarrow |c| < |a|\left(\frac{1}{2025}\right)^2 + |b|\left(\frac{1}{2025}\right)$$

Ou seja,

$$2025^2|c| < |a| + 2025|b| \ (*)$$

Supondo que $|a|$ e $|b|$ sejam menores do que 2025:

$$2025^2 \leq 2025^2|c| < |a| + 2025|b| \leq 2024 + 2025 \cdot 2024 = 2025^2 - 1$$

Uma contradição. O que conclui nossa demonstração.

Observação:

Podemos também concluir de $(*)$ que $|c| = 1$ e $|b| = 2025$. Vamos novamente caracterizar todas as equações que satisfazem as condições do problema.

Vamos supor que b e c tenham o mesmo sinal. Sem perda de generalidade vamos supor que ambos são negativos. Consequentemente:

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2025 \pm \sqrt{2025^2 + 4a}}{2a}$$

Se a também é negativo, a equação não terá raiz positiva (observe que a situação é equivalente a todos parâmetros serem positivos). Logo $a > 0$ e podemos concluir que $\frac{2025 - \sqrt{2025^2+4a}}{2a} < 0$. Finalmente:

$$\frac{2025 + \sqrt{2025^2 + 4a}}{2a} \geq \frac{2 \cdot 2025}{2a} = \frac{2025}{a} \geq 1 > \frac{1}{2025}$$

O que nos leva à conclusão de que b e c têm sinais opostos e as únicas equações são da forma $ax^2 + 2025x - 1 = 0$. Falta apenas mostrar que a é positivo.

Sendo r a raiz:

$$r = \frac{1}{2025} - \frac{ar^2}{2025}$$

E o argumento está completo.

Solução 3 (Com Continuidade)

Vamos, inicialmente, mostrar que ambas as raízes não podem estar entre 0 e $\frac{1}{2025}$.

Neste caso, considerando o produto das raízes e assumindo sem perda da generalidade que $a > 0$:

$$0 < \frac{c}{a} < \frac{1}{2025^2} \Leftrightarrow 0 < 2025^2 c < a \Rightarrow a > 2025 \ (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Ainda assumindo que $a > 0$, temos dois casos a analisar:

i) $f(0) < 0$ e $f\left(\frac{1}{2025}\right) > 0$, ou seja, $c < 0$ e $\frac{a}{2025^2} + \frac{b}{2025} + c > 0$.

Assim, $c \leq -1$ e, portanto,

$$\frac{a}{2025^2} + \frac{b}{2025} > -c \geq 1$$

Sendo $1 \le a \le 2024$,

$$b > 2025\left(1 - \frac{a}{2025^2}\right) \ge 2025 - \frac{2024}{2025}$$

Logo $b = 2025$. E também podemos concluir que $c = -1$.

ii) $f(0) > 0$ e $f\left(\frac{1}{2025}\right) < 0$, ou seja, $c > 0$ e $\frac{a}{2025^2} + \frac{b}{2025} + c < 0$.
Assim, $c \ge 1$ e, portanto,

$$\frac{a}{2025^2} + \frac{b}{2025} < -c \le -1$$

Sendo $1 \le a \le 2024$,

$$b < 2025\left(-1 - \frac{a}{2025^2}\right) \le -2025 - \frac{1}{2025}$$

Logo $b \le -2026$. Contradição.

Solução 4 (Variação da anterior, mais direta)

A equação dada é equivalente a:

$$b = -\frac{c}{x} - ax \Leftrightarrow ax + b = -\frac{c}{x}$$

Seja r uma raiz tal que $0 < r < \frac{1}{2025}$.

– Se a e c têm o mesmo sinal.

Podemos supor sem perda da generalidade que ambos são positivos. Então, como $\frac{1}{r} > 2025$:

$$\frac{c}{r} > 2025c \ge 2025 \Rightarrow b = -\frac{c}{r} - ar < -2025 - ar < -2025$$

Logo $b \le -2026 \Leftrightarrow |b| \ge 2026$. E não existe equação nas condições do problema.

– Se a e c têm sinais opostos.

Podemos supor sem perda da generalidade que a é positivo. Consequentemente:

$$ar + b = -\frac{c}{r} > -2025c \ge 2025 \Rightarrow \frac{a}{2025} + b > 2025$$

Logo $b = 2025$. De fato, também concluímos que $c = -1$.

Solução 5 (Com a Fórmula do Delta, Menos Truques Algébricos)

• *Caso* $a > 0$ e $b > 0$.

Devemos ter (a outra solução é negativa)

$$0 < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{1}{2025} \Leftrightarrow 0 < -b + \sqrt{b^2 - 4ac} < \frac{2a}{2025} \Leftrightarrow$$

$$b < \sqrt{b^2 - 4ac} < b + \frac{2a}{2025} \Leftrightarrow b^2 < b^2 - 4ac < b^2 + \frac{4ab}{2025} + \left(\frac{2a}{2025}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$0 < -4ac < \frac{4ab}{2025} + \left(\frac{2a}{2025}\right)^2 \Leftrightarrow 0 < -c < \frac{b}{2025} + \frac{a}{2025^2}$$

E a condição é equivalente a

$$0 < -2025c < b + \frac{a}{2025}$$

Portanto, se a e b são menores do que 2025:

$$b + \frac{a}{2025} \leq 2024 + \frac{2024}{2025} < 2025, \text{i. e.}, -1 < c < 0$$

Uma contradição.

De fato, podemos concluir que $b = 2025$ e $c = -1$.

• *Caso* $a < 0$ e $b > 0$.

Vamos iniciar analisando o caso (1) em que

$$0 < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{1}{2025} \Leftrightarrow 0 > -b + \sqrt{b^2 - 4ac} > \frac{2a}{2025} \Leftrightarrow$$

$$b > \sqrt{b^2 - 4ac} > b + \frac{2a}{2025} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} b > \sqrt{b^2 - 4ac} (*) \\ \sqrt{b^2 - 4ac} > b + \frac{2a}{2025} (**) \end{array} \right.$$

Analisando cada desigualdade:

$$(*) \Leftrightarrow b^2 > b^2 - 4ac \geq 0 \Leftrightarrow (-4ac < 0 \text{ e } b^2 \geq 4ac) \ \Leftrightarrow (c < 0 \text{ e } b^2 \geq 4ac)$$

$(**)$ será dividida em dois casos.

i) $b + \frac{2a}{2025} \geq 0$

$$\sqrt{b^2 - 4ac} > b + \frac{2a}{2025} \Leftrightarrow b^2 - 4ac > b^2 + \frac{4ab}{2025} + \left(\frac{2a}{2025}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$-4ac > \frac{4ab}{2025} + \left(\frac{2a}{2025}\right)^2 \Leftrightarrow -c < \frac{b}{2025} + \frac{a}{2025^2}$$

E a condição é equivalente a

$$0 < -2025c < b + \frac{a}{2025}$$

Portanto, se $|a|$ e $|b|$ são menores do que 2025:

$$b + \frac{a}{2025} < 0 + \frac{2024}{2025} < 1, \text{i. e.}, -\frac{1}{2025} < c < 0$$

Uma contradição.

ii) $b + \frac{2a}{2025} < 0$

Considerando $(*)$,

$$\left| \begin{array}{c} b + \frac{2a}{2025} < 0 \\ b^2 \geq 4ac \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} -2a > 2025b \\ b \geq \frac{4ac}{b} \end{array} \right. \Rightarrow -2a > \frac{2025 \cdot 4ac}{b} \Leftrightarrow b > -4050c$$

Como $c < 0$, $b > 4050$. $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Falta o caso (2) em que

$$0 < \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < \frac{1}{2025} \Leftrightarrow 0 > \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > -\frac{1}{2025} \Leftrightarrow$$

Como a é negativo, a expressão $\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ também é negativa, resta-nos estudar

$$\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > -\frac{1}{2025} \Leftrightarrow b+\sqrt{b^2-4ac} < -\frac{2a}{2025} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{b^2-4ac} < -\left(b+\frac{2a}{2025}\right) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} b+\dfrac{2a}{2025} < 0 \\ b^2 \geq 4ac \end{array}\right.$$

E podemos concluir como no caso ii acima.

Isso completa a resolução.

Observação (um fato que pode ajudar em qualquer abordagem)

Caso $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$: demonstração que quando b aumenta, então a raiz no intervalo desejado diminui de valor.

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > \frac{-(b+1)+\sqrt{(b+1)^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$1 > \sqrt{(b+1)^2-4ac} - \sqrt{b^2-4ac} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(b+1)^2-4ac} + \sqrt{b^2-4ac} > (b+1)^2 - 4ac - (b^2-4ac) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(b+1)^2-4ac} + \sqrt{b^2-4ac} > 2b+1 \Leftrightarrow$$

$$(b+1)^2 - 4ac + 2\sqrt{(b+1)^2-4ac}\sqrt{b^2-4ac} + b^2 - 4ac > 4b^2+4b+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(b+1)^2-4ac}\sqrt{b^2-4ac} - 4ac > b^2 + b$$

Porém

$$\sqrt{(b+1)^2-4ac}\sqrt{b^2-4ac} - 4ac > \sqrt{(b+1)^2}\sqrt{b^2} = b^2 + b$$

Como queríamos demonstrar.

Critério de Correção

a) Valor: 3 pontos.

– Apresentar uma equação com a propriedade: 2 pontos.

– Justificar: 1 ponto.

b) Valor: 7 pontos.

Solução 1

– Caso equivalente a $\beta < 0$: até 4 pontos.

– Caso equivalente a $\beta > 0$: até 3 pontos.

Solução 2
– Desigualdade equivalente a $|c| \leq |a|r^2 + |b|r$: até 3 pontos.
– Desigualdade equivalente a $2025^2|c| < |a| + 2025|b|$: até 2 pontos.
– Conclusão: até 2 pontos.

Solução 3
– Duas raízes no intervalo $\left(0;\frac{1}{2025}\right)$: até 2 pontos.
– Uma no intervalo e outra negativa: até 3 pontos.
– Uma no intervalo e outra positiva: até 2 pontos.

Solução 4
– a e c com o mesmo sinal: até 3 pontos.
– a e c com sinais opostos: até 4 pontos.

Solução 5
– $a > 0$ e $b > 0$: até 4 pontos.
– $a < 0$ e $b > 0$: até 3 pontos. Neste caso, é imprescindível a análise do sinal de $2a + 2025b$ para obter pontos.

Pontuações não cumulativas
– No item a, apresentar uma equação com algum coeficiente 2025 em módulo, demais menores ou iguais, raiz pequena (menor do que $0{,}01$) e, idealmente, irracional: até 1 ponto.
– No item a: equação com raiz $1/2025$: 1 ponto.
– Fazer a substituição $y = 1/x$: 1 ponto.
– No item b, obter $|c| = 1$. Pode somar com pontuação do item a.
- Fato citado na observação: até 2 pontos.

Vale 0 ponto
– Escrever a fórmula do delta.
– Escrever alguns coeficientes no item a. É necessário apresentar todos os coeficientes para ganhar ponto.
– Equação com coeficiente não inteiro no item a.
– Observações como “é pequeno”, “é menor”, “no mínimo”, “é grande”, “é maior”, “no máximo”, “se aproxima de”, “aproximadamente” sem justificativa algébrica/analítica.
– Considerar os possíveis sinais de a, b e c.

– Dizer simplesmente que o outro caso é análogo. Podemos perceber nas resoluções que existem analogias, mas são muito sutis.
– Uso de propriedades de divisibilidade. Apesar de a, b e c serem inteiros, todas as raízes dos casos relevantes para o problema são irracionais.
– Estudar o que ocorre quando delta igual a zero.
– Equação com $1/2026$ como solução.

Observações
– Não é pedido na questão para caracterizar todas as equações com a propriedade.
– No item a, basta apresentar uma equação e a justificativa para tal equação.
– No item b, para ganhar ponto, é imprescindível encaminhar claramente uma abordagem que leve a uma das soluções. Veja, por exemplo, o que vale 0 ponto.
– Se o estudante fizer algum desenvolvimento relevante em qualquer abordagem que leve à resolução, ele receberá pelo menos 2 pontos.
– Não se somam pontuações de abordagens diferentes no item b. O estudante recebe pontuação apenas pelo ataque mais sólido ao problema.
– Não se recebe pontuação extra por obter mais de uma equação no item a.