Soluções TM^2 2024A

Samuel de Araújo Brandão

2 de Agosto de 2025

Uma coleção de soluções para a TM^2 2024 nível A, inspirada no estilo de Evan Chen.

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

Contents

1 Problemas

1. Uma *palavra* é uma sequência de letras maiúsculas do nosso alfabeto (isto é, há 26 possíveis letras). Uma palavra é chamada de *palíndromo* se tem pelo menos duas letras e ela é a mesma palavra se lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, as palavras ARARA e NOON são palíndromos, mas BOBO e AÑÃ não são palíndromos.

Dizemos que uma palavra x *contém* uma palavra y se existem letras *consecutivas* de x que juntas formam y. Por exemplo, a palavra ARARA contém a palavra RARA e também a palavra ARARA, mas não contém a palavra ARRA.

Calcule a quantidade de palavras de 14 letras que contêm algum palíndromo.

2. Mostre que não existem triplas de inteiros não negativos (x, y, z) satisfazendo a equação

$$x^2 = 5^y + 3^z.$$

3. No triângulo escaleno ABC, sejam I o seu incentro e D o ponto onde AI intersecta BC. Sejam M e N os pontos onde o incírculo de ABC toca AB e AC, respectivamente. Seja F o segundo encontro do circuncírculo (AMN) com o circuncírculo (ABC). Seja T o encontro de AF com o prolongamento de BC. Seja J a interseção de TI com a paralela a FI que passa por D. Prove que AJ é perpendicular a BC.

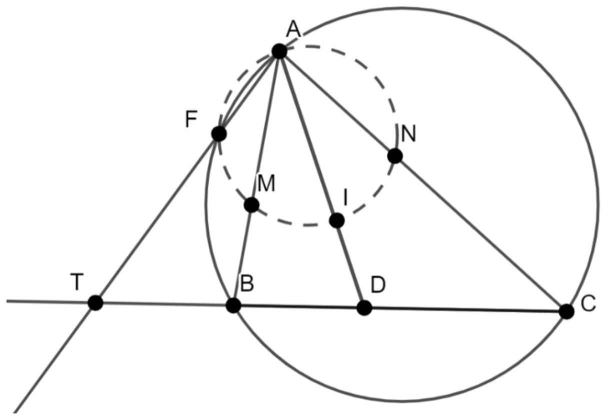


Figure 1: Uma ilustração do terceiro problema.

Nota: o incentro de um triângulo é a interseção das bissetrizes internas.

4. Encontre todos os inteiros positivos a, b e c tais que $3ab = 2c^2$ e $a^3 + b^3 + c^3$ seja o dobro de um número primo.

2 Soluções

2.1 Problema 1.

Enunciado do problema

Uma *palavra* é uma sequência de letras maiúsculas do nosso alfabeto (isto é, há 26 possíveis letras). Uma palavra é chamada de *palíndromo* se tem pelo menos duas letras e ela é a mesma palavra se lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, as palavras ARARA e NOON são palíndromos, mas BOBO e AÑÃ não são palíndromos.
Dizemos que uma palavra x *contém* uma palavra y se existem letras *consecutivas* de x que juntas formam y. Por exemplo, a palavra ARARA contém a palavra RARA e também a palavra ARARA, mas não contém a palavra ARRA.
Calcule a quantidade de palavras de 14 letras que contêm algum palíndromo.

Sabe-se que existem 26^{14} possibilidades de palavras de 14 letras no total. Além disso, podemos afirmar também que toda palavra contém no mínimo um palíndromo de 2 ou 3 letras. Isso ocorre porque, ao retirar as primeira e última letras de um palíndromo, será obtido outro palíndromo (caso tenha mais de 2 letras). É possível repetir isso até chegar a xx (um palíndromo de 2 letras), ou xyx (um palíndromo de 3 letras).

Existem 26 possíveis letras para a 1ª letra de um não palíndromo de 14 totais letras. Afim de evitar um palíndromo, a 2ª deve ser diferente da 1ª, (25 opções). Pelo mesmo motivo, a 3ª é diferente da 1ª e da 2ª, (24 opções). Esse argumento da 3ª letra será válido para todas as outras 11 letras. Com isso podemos concluir que existem $26^{14} - 26 \cdot 25 \cdot 24^{12}$ palíndromos no total.

2.2 Problema 2.

Enunciado do problema

Mostre que não existem triplas de inteiros não negativos (x, y, z) satisfazendo a equação

$$x^2 = 5^y + 3^z.$$

Já que *ímpar + ímpar = par*, $5^y + 3^z$ é par, logo x é par. Se $x = 2k$, $x^2 = 4k^2$, logo $x^2 \equiv 0 \pmod 4$. Neste caso, $0 \equiv 5^y + 3^z \equiv 1 + (-1)^z \pmod 4$, por conseguinte, z é um número ímpar. Claramente, $x \not\equiv 0 \pmod 3$, pois

$$x \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 5^y = x^2 - 3^z \Rightarrow 5^y \equiv 0 \pmod 3$$

Absurdo! Agora, nos resta apenas $x \equiv 1 \pmod 3$ ou $x \equiv 2 \pmod 3$. Perceba abaixo que $x \not\equiv 1 \pmod 3$ e $x \not\equiv 2 \pmod 3$, e como já vimos que $x \not\equiv 0 \pmod 3$, não existem soluções para x.

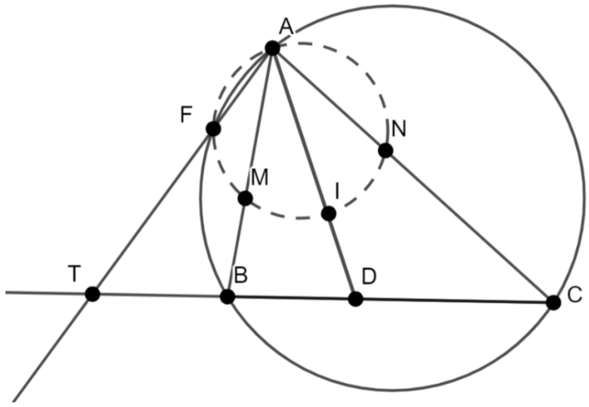
1. *Caso 1:* $x \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x^2 - 5^y = 3^z \Rightarrow y = 2w$. Neste caso, podemos afirmar que $x^2 - 5^{2w} = 3^z \Rightarrow (x+5^w)(x-5^w) = 3^z$. Para que esta igualdade seja verdadeira, ou $x+5^w \equiv 0 \pmod 3 \quad \text{e} \quad x-5^w = 1$, ou, tanto $x+5^w$ quanto $x-5^w$ são múltiplos de 3. Evidentemente $x - 5^w \neq 1$, pois se $x - 5^w = 1$, $5^w + 1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 5^w \equiv 0 \pmod 3$, absurdo! Mas é impossível também que tanto $x + 5^w$ quanto $x - 5^w$ sejam múltiplos de 3, pois neste caso, $x \equiv 5^w \pmod 3 \Rightarrow x \equiv 5^w \equiv 1 \pmod 3$, impossibilitando que $x - 5^w \equiv 0 \pmod 3 \therefore x \not\equiv 1 \pmod n$)

2. *Caso 2:* $x \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow x^2 \equiv 5^w \equiv 1 \pmod 3$. Evidentemente $x + 5^w \not\equiv 0 \pmod 3$, logo a única opção é que $x + 5^w = 1$, claramente impossível já que tanto x quanto w são números inteiros positivos $\therefore x \not\equiv 2 \pmod 3$)

2.3 Problema 3.

Enunciado do problema

No triângulo escaleno ABC, sejam I o seu incentro e D o ponto onde AI intersecta BC. Sejam M e N os pontos onde o incírculo de ABC toca AB e AC, respectivamente. Seja F o segundo encontro do circuncírculo (AMN) com o circuncírculo (ABC). Seja T o encontro de AF com o prolongamento de BC. Seja J a interseção de TI com a paralela a FI que passa por D. Prove que AJ é perpendicular a BC.



Nota: o incentro de um triângulo é a interseção das bissetrizes internas.

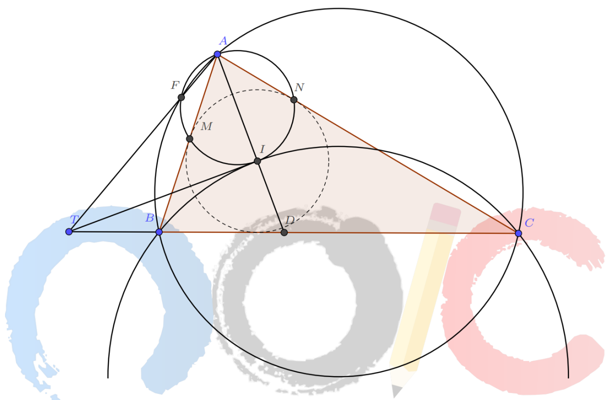


Figure 2: Uma figura ilustrando a solução para o terceiro problema. Fonte.

$\overline{AI}$ é um diâmetro de (AMN), pois $\overline{AB}$ é tangente a (MND), logo $\angle AMI = 90°$. Por conseguinte, $\angle AIT = 90°$ resulta em $\angle AJ'J = 90°$, quando J' é a projeção de $\overline{AJ}$ sobre o segmento $\overline{BC}$. Logo, basta que $\overline{TI}$ seja tangente a (AMN).

Alegação — T é o centro radical de (ABC), (AMN) e (BIC).

Prova. Digamos que $\overline{TI}$ é uma tangente de (BIC) passando por I. $\overline{AF}$ é o eixo radical de (ABC) e (AMN) e $T \in \overline{AF}$, logo, $TF \cdot TA = TB \cdot TC$. Isso prova com excelência que $\overline{TI}$ é o eixo radical de (AMN) e (BIC), pois

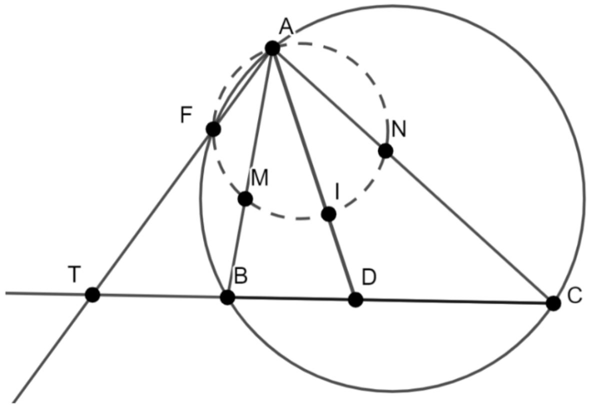
$$\begin{aligned} &= TB \cdot TC \\ \text{Pot}_{(AMN)}(T) &= TF \cdot TA \\ &= \text{Pot}_{(BIC)}(T). \end{aligned}$$

Já que $\overline{TI}$ é tangente à (BIC), tal deve ser tangente a (AMN) também, para que $\overline{TI}$ seja o eixo radical dessas circunferências.

2.4 Problem 3.

Problem Statement

In the scalene triangle ABC, let I be its incentre and D the point where AI meets BC. Let M and N be the points where the incircle of ABC touches AB and AC, respectively. Let F be the second intersection of the circumcircle (AMN) with the circumcircle (ABC). Let T be the intersection of AF with the extension of BC. Let J be the intersection of TI with the line through D parallel to FI. Prove that AJ is perpendicular to BC.



Note: the incentre of a triangle is the intersection of its internal angle bisectors.

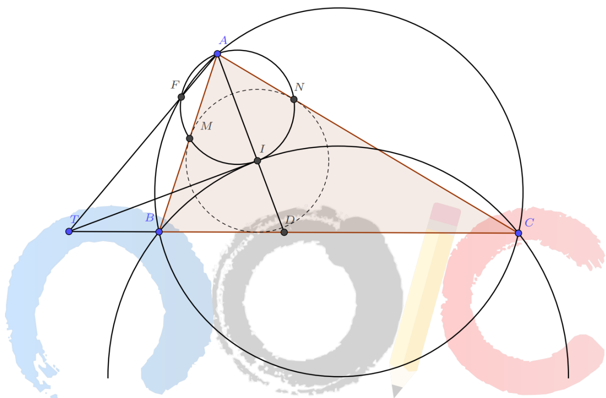


Figure 3: A figure illustrating the solution to the third problem. Source.

$\overline{AI}$ is a diameter of (AMN), since $\overline{AB}$ is tangent to (MND), hence $\angle AMI = 90°$. Consequently, $\angle AIT = 90°$ implies $\angle AJ'J = 90°$, where J' is the projection of $\overline{AJ}$ onto segment $\overline{BC}$. Therefore, it suffices to show that $\overline{TI}$ is tangent to (AMN).

Claim — T is the radical centre of (ABC), (AMN) and (BIC).

Proof. Suppose that $\overline{TI}$ is a tangent to (BIC) at I. The line $\overline{AF}$ is the radical axis of (ABC) and (AMN), and $T \in \overline{AF}$, so

$$TF \cdot TA \ = \ TB \cdot TC.$$

This shows that $\overline{TI}$ is also the radical axis of (AMN) and (BIC), since

$$\begin{aligned} &= TB \cdot TC, \\ \text{Pot}_{(AMN)}(T) &= TF \cdot TA, \\ &= \text{Pot}_{(BIC)}(T). \end{aligned}$$

Since $\overline{TI}$ is tangent to (BIC), it must also be tangent to (AMN), and thus $\overline{TI}$ is the common radical axis of these circles, completing the proof.

2.5 Problema 4.

Enunciado do problema

Encontre todos os inteiros positivos a, b e c tais que $3ab = 2c^2$ e $a^3 + b^3 + c^3$ seja o dobro de um número primo.

3 Referências

Só foi possível escrever este documento graças a ajuda e inspiração dos seguintes:

[1] NOIC - Núcleo Olímpico de Iniciação Científica. *Soluções do TM^2 Nível A*, 2025. Disponível em: https://noic.com.br/wp-content/uploads/2025/03/Solucoes_do_TM2_2024_Nivel_A.pdf