

Soluções Jacob Palis 2022 N2

Samuel de Araújo Brandão

4 de Setembro de 2025

Uma coleção de soluções para a **Jacob Palis 2025 Nível 2**, inspirada no estilo de Evan Chen. Pode-se encontrar todos os problemas e respostas oficiais [aqui](#).

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

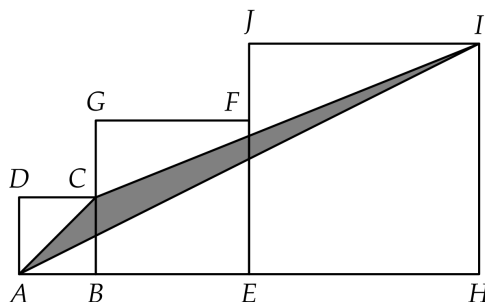
Conteúdos

1	Problemas	2
1.1	Testes	2
1.2	Respostas Numéricas	4
2	Soluções	6
2.1	Problema 1	6
2.2	Problema 2	7
2.3	Problema 3	8
2.4	Problema 4	9
2.5	Problema 5	10
2.6	Problema 6	11
2.7	Problema 7	12
2.8	Problema 8	13
2.9	Problema 9	14
2.10	Problema 10	15
2.11	Problema 11	16
2.12	Problema 12	17
2.13	Problema 13	18
2.14	Problema 14	19
2.15	Problema 15	20
2.16	Problema 16	21
2.17	Problema 17	22
2.18	Problema 18	23
2.19	Problema 19	24
2.20	Problema 20	25
3	Referências	26

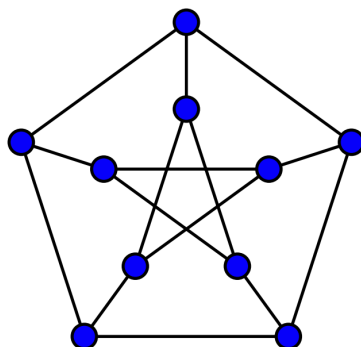
1 Problemas

1.1 Testes

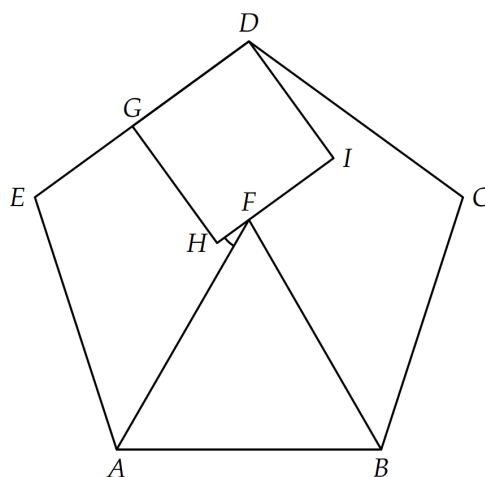
1. No dia 08/06/2025, se uma pessoa somar sua idade e o ano do seu nascimento, qual será o resultado?
2. Lucas acompanha os preços de cartas colecionáveis numa loja online. Certo dia a carta especial custava V reais. No dia seguinte o preço da mesma carta teve um aumento de $P\%$ e passou a custar $V + \frac{P}{2}$ reais. Qual é o valor de V ?
3. Um número é dito “grandinho” quando pelo menos um dos seus algarismos é maior ou igual a 5. Por exemplo, 99, 50 e 25 são grandinhos, mas 20 e 13 não são. Existem quantos números grandinhos de dois algarismos?
4. Os pontos A , B , E e H estão sobre uma reta. Do mesmo lado dessa reta são construídos os quadrados $ABCD$, $BEFG$ e $EHIJ$ com lados 1, 2 e 3, respectivamente. Qual é a área do triângulo ACI ?



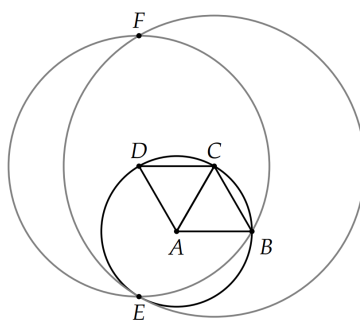
5. Diamantino nasceu no ano 19AB, em que A e B são algarismos. Sua filha Rubi nasceu em 20CD, em que C e D são algarismos. Se Diamantino tivesse nascido em 19CD e Rubi tivesse nascido em 20AB, a diferença entre os dois anos de nascimento seria sete vezes a diferença entre os dois anos de nascimento verdadeiros. Qual a diferença verdadeira entre os anos de nascimento?
6. A figura abaixo representa o mapa do Reino Estrelado. As bolinhas representam cidades e as ligações representam estradas entre as cidades. Um conjunto de cidades é chamado independente se não existem duas cidades pertencentes a ele que estejam conectadas por uma estrada. Qual é o número máximo de cidades que um conjunto independente no Reino Estrelado pode ter?



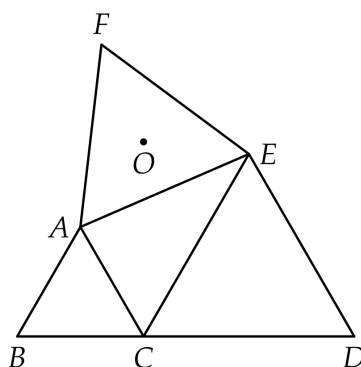
7. Sabemos que o conjunto de números $\{a, b, c\}$ é igual ao conjunto $\{1, 2, 3\}$, mas não sabemos qual letra é cada número. Sobre os números $a + b + c$, $ab + c$ e abc podemos afirmar que
- (A) exatamente um deles é par
 (B) exatamente dois deles são pares.
 (C) exatamente três deles são pares
 (D) há duas possibilidades para a quantidade de pares.
 (E) há três possibilidades para a quantidade de pares.
8. A figura a seguir mostra um pentágono regular $ABCDE$, um triângulo equilátero ABF e um quadrado $DGHI$. Sabe-se que o ponto F está sobre o lado HI . Qual é a medida em graus do ângulo $\angle AFH$?



9. Seja A um subconjunto do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ de modo que não existem dois elementos a e b de A tal que a diferença $a - b$ seja um número primo. Qual é o número máximo de elementos que o conjunto A pode ter?
10. Na figura a seguir uma circunferência de centro A passa pelos pontos B , C , D e E . O ponto A é o ponto médio de CE . A circunferência de centro D que passa por E e a circunferência de centro C que passa por E se encontram novamente no ponto F diferente de E . Sabendo que os triângulos ABC e ACD são equiláteros, qual é a medida do ângulo $\angle EFB$ em graus?



11. Qual é o menor inteiro positivo $n \geq 3$ tal que se girarmos um polígono regular P de n lados 2025° em torno do seu centro obtemos um polígono regular P' com vértices nas mesmas posições de P ?
12. Os reais não nulos a e b são raízes da equação $x^2 - (a^2 - b^2)x + a^2b^2 = 0$. Se $a > b > 0$, qual o valor de $a^3 + b^3$?
13. Na figura a seguir, ABC , CDE e AEF são triângulos equiláteros, com C sobre o segmento BD . O ponto O é o centro do triângulo AEF .



A medida do ângulo $\angle ACO$

- (A) é sempre 30°
 (B) é sempre 60°
 (C) é 30° ou 60° , assumindo os dois valores dependendo de C .
 (D) é 15° ou 30° , assumindo os dois valores dependendo de C .
 (E) pode assumir infinitos valores.
14. Quantos divisores positivos de $20^{25} \cdot 25^{20}$ são múltiplos de 20^{25} ou de 25^{20} ?
15. Esmeralda escreve na casa na linha m e coluna n de um tabuleiro 201×201 o produto $m \cdot n$. O tabuleiro é pintado como no xadrez, de preto e branco. Esmeralda soma os números nas casas brancas, obtendo B , e soma os números nas casas pretas, obtendo P . Qual a diferença, em módulo, entre P e B ?

1.2 Respostas Numéricas

16. O professor Reginaldo gosta de se exercitar na esteira. Certo dia ele decidiu correr 3,5 km com velocidade de 10 km/h. Durante a corrida o painel mostra 8 algarismos, os primeiros 4 algarismos K_1K_2, V_1V_2 indicam a distância percorrida em quilômetros com duas casas depois da vírgula (no começo mostra 00,00) e os outros 4 algarismos indicam $X_1X_2 : Y_1Y_2$, os minutos e segundos que faltam para o professor terminar sua corrida (no final deve mostrar 00:00). Em certo momento o professor percebeu que os primeiros 4 algarismos ficaram exatamente iguais aos 4 últimos (o primeiro algarismo igual ao quinto, o segundo igual ao sexto e assim por diante). Nesse momento a soma de todos os 8 algarismos era igual a quanto?
17. Certo inteiro positivo n tem dois algarismos. O algarismo das dezenas é a , e o das unidades é b . Sabe-se que $n = b^3 - 2^a$. Qual é a soma dos possíveis valores de n ?

18. Dizemos que dois números estão conectados se é possível ir de um para o outro somando dois algarismos consecutivos de um deles e trocando pelo resultado, mantendo os demais algarismos como estão. Por exemplo, 206 e 2015 estão conectados, pois podemos trocar 15 por $6 = 1+5$, e 2078 e 2015 também estão conectados, pois podemos trocar 78 por $15 = 7+8$. Dizemos que dois números estão ligados se é possível ir de um até o outro usando zero ou mais números conectados intermediários. Por exemplo, 206 e 2078 estão ligados, pois podemos usar 2015 como intermediário. Quantos números de 1 a 2025 são ligados ao 2025 (incluindo ele mesmo)?
19. O produto de 2025 inteiros positivos é 2025^k , para algum k inteiro positivo. Sabe-se que nenhum dos 2025 inteiros é igual a 1. Qual é o menor valor possível de k ?
20. Seja PABCD um pentágono inscritível com $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$. Além disso, sabe-se que $PA = 9$, $PB = 15$ e $PC = 16$. Se o valor de PD pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, determine o valor de $p + q$.

2 Soluções

2.1 Problema 1

Enunciado

No dia 08/06/2025, se uma pessoa somar sua idade e o ano do seu nascimento, qual será o resultado?

2.2 Problema 2

Enunciado

Lucas acompanha os preços de cartas colecionáveis numa loja online. Certo dia a carta especial custava V reais. No dia seguinte o preço da mesma carta teve um aumento de $P\%$ e passou a custar $V + \frac{P}{2}$ reais. Qual é o valor de V ?

2.3 Problema 3

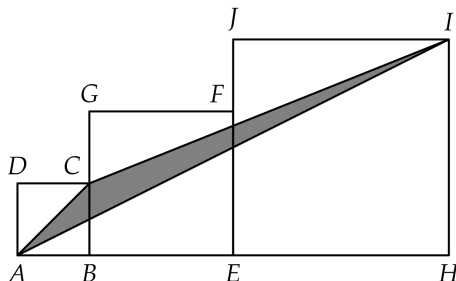
Enunciado

Um número é dito “grandinho” quando pelo menos um dos seus algarismos é maior ou igual a 5. Por exemplo, 99, 50 e 25 são grandinhos, mas 20 e 13 não são. Existem quantos números grandinhos de dois algarismos?

2.4 Problema 4

Enunciado

Os pontos A, B, E e H estão sobre uma reta. Do mesmo lado dessa reta são construídos os quadrados ABCD, BEFG e EHIJ com lados 1, 2 e 3, respectivamente. Qual é a área do triângulo ACI?



2.5 Problema 5

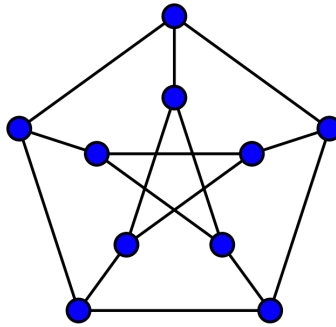
Enunciado

Diamantino nasceu no ano $19AB$, em que A e B são algarismos. Sua filha Rubi nasceu em $20CD$, em que C e D são algarismos. Se Diamantino tivesse nascido em $19CD$ e Rubi tivesse nascido em $20AB$, a diferença entre os dois anos de nascimento seria sete vezes a diferença entre os dois anos de nascimento verdadeiros. Qual a diferença verdadeira entre os anos de nascimento?

2.6 Problema 6

Enunciado

A figura abaixo representa o mapa do Reino Estrelado. As bolinhas representam cidades e as ligações representam estradas entre as cidades. Um conjunto de cidades é chamado independente se não existem duas cidades pertencentes a ele que estejam conectadas por uma estrada. Qual é o número máximo de cidades que um conjunto independente no Reino Estrelado pode ter?



2.7 Problema 7

Enunciado

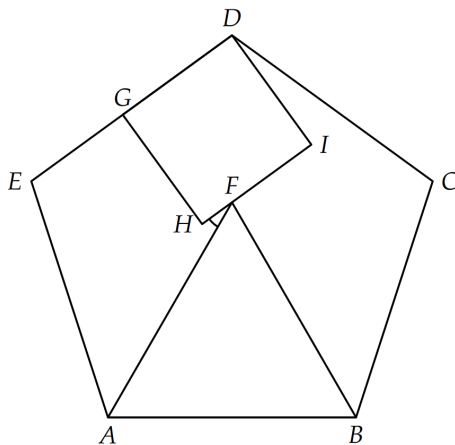
Sabemos que o conjunto de números $\{a, b, c\}$ é igual ao conjunto $\{1, 2, 3\}$, mas não sabemos qual letra é cada número. Sobre os números $a + b + c$, $ab + c$ e abc podemos afirmar que

- (A) exatamente um deles é par
- (B) exatamente dois deles são pares.
- (C) exatamente três deles são pares
- (D) há duas possibilidades para a quantidade de pares.
- (E) há três possibilidades para a quantidade de pares.

2.8 Problema 8

Enunciado

A figura a seguir mostra um pentágono regular $ABCDE$, um triângulo equilátero ABF e um quadrado $DGHI$. Sabe-se que o ponto F está sobre o lado HI . Qual é a medida em graus do ângulo $\angle AFH$?



2.9 Problema 9

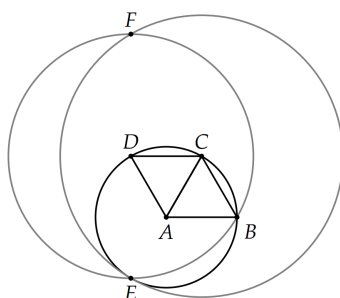
Enunciado

Seja A um subconjunto do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ de modo que não existem dois elementos a e b de A tal que a diferença $a - b$ seja um número primo. Qual é o número máximo de elementos que o conjunto A pode ter?

2.10 Problema 10

Enunciado

Na figura a seguir uma circunferência de centro A passa pelos pontos B , C , D e E . O ponto A é o ponto médio de CE . A circunferência de centro D que passa por E e a circunferência de centro C que passa por E se encontram novamente no ponto F diferente de E . Sabendo que os triângulos ABC e ACD são equiláteros, qual é a medida do ângulo $\angle EFB$ em graus?



2.11 Problema 11

Enunciado

Qual é o menor inteiro positivo $n \geq 3$ tal que se girarmos um polígono regular P de n lados 2025° em torno do seu centro obtemos um polígono regular P' com vértices nas mesmas posições de P ?

2.12 Problema 12

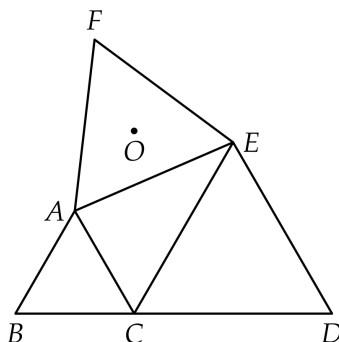
Enunciado

Os reais não nulos a e b são raízes da equação $x^2 - (a^2 - b^2)x + a^2b^2 = 0$. Se $a > b > 0$, qual o valor de $a^3 + b^3$?

2.13 Problema 13

Enunciado

Na figura a seguir, ABC , CDE e AEF são triângulos equiláteros, com C sobre o segmento BD . O ponto O é o centro do triângulo AEF .



A medida do ângulo $\angle ACO$

- (A) é sempre 30°
- (B) é sempre 60°
- (C) é 30° ou 60° , assumindo os dois valores dependendo de C .
- (D) é 15° ou 30° , assumindo os dois valores dependendo de C .
- (E) pode assumir infinitos valores.

2.14 Problema 14

Enunciado

Quantos divisores positivos de $20^{25} \cdot 25^{20}$ são múltiplos de 20^{25} ou de 25^{20} ?

2.15 Problema 15

Enunciado

Esmeralda escreve na casa na linha m e coluna n de um tabuleiro 201×201 o produto $m \cdot n$. O tabuleiro é pintado como no xadrez, de preto e branco. Esmeralda soma os números nas casas brancas, obtendo B, e soma os números nas casas pretas, obtendo P. Qual a diferença, em módulo, entre P e B?

2.16 Problema 16

Enunciado

O professor Reginaldo gosta de se exercitar na esteira. Certo dia ele decidiu correr 3,5 km com velocidade de 10 km/h. Durante a corrida o painel mostra 8 algarismos, os primeiros 4 algarismos K_1K_2, V_1V_2 indicam a distância percorrida em quilômetros com duas casas depois da vírgula (no começo mostra 00,00) e os outros 4 algarismos indicam $X_1X_2 : Y_1Y_2$, os minutos e segundos que faltam para o professor terminar sua corrida (no final deve mostrar 00:00). Em certo momento o professor percebeu que os primeiros 4 algarismos ficaram exatamente iguais aos 4 últimos (o primeiro algarismo igual ao quinto, o segundo igual ao sexto e assim por diante). Nesse momento a soma de todos os 8 algarismos era igual a quanto?

2.17 Problema 17

Enunciado

Certo inteiro positivo n tem dois algarismos. O algarismo das dezenas é a , e o das unidades é b . Sabe-se que $n = b^3 - 2^a$. Qual é a soma dos possíveis valores de n ?

2.18 Problema 18

Enunciado

Dizemos que dois números estão conectados se é possível ir de um para o outro somando dois algarismos consecutivos de um deles e trocando pelo resultado, mantendo os demais algarismos como estão. Por exemplo, 206 e 2015 estão conectados, pois podemos trocar 15 por 6 = 1+5, e 2078 e 2015 também estão conectados, pois podemos trocar 78 por 15 = 7+8. Dizemos que dois números estão ligados se é possível ir de um até o outro usando zero ou mais números conectados intermediários. Por exemplo, 206 e 2078 estão ligados, pois podemos usar 2015 como intermediário. Quantos números de 1 a 2025 são ligados ao 2025 (incluindo ele mesmo)?

2.19 Problema 19

Enunciado

O produto de 2025 inteiros positivos é 2025^k , para algum k inteiro positivo. Sabe-se que nenhum dos 2025 inteiros é igual a 1. Qual é o menor valor possível de k ?

2.20 Problema 20

Enunciado

Seja $PABCD$ um pentágono inscritível com $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$. Além disso, sabe-se que $PA = 9$, $PB = 15$ e $PC = 16$. Se o valor de PD pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, determine o valor de $p + q$.

3 Referências