OBM 2017 N2

Samuel de Araújo Brandão

1 de outubro de 2025

Este documento contém soluções para os problemas da OBM 2017 N2, escritos por mim durante minha preparação para a Olimpíada Internacional de Matemática.

O conteúdo reflete meu próprio entendimento e processo de resolução de problemas. Algumas soluções podem ter sido inspiradas pelo trabalho de outras pessoas ou requerido ajuda externa; nesses casos, a devida atribuição é dada (veja a seção 3).

Se você notar algum erro ou tiver sugestões de melhoria, eu ficaria muito grato em recebê-las em samuelbaraujo19@gmail.com.

Conteúdo

1 Problemas

1. Os pontos X, Y e Z estão marcados nos lados AB, BC e AC do triângulo ABC, respectivamente. Os pontos A', B' e C' estão nos lados XZ, XY e YZ do triângulo XYZ, respectivamente, de modo que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$$

e $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $ACC'A'$ são trapézios em que os lados do triângulo ABC são bases.

(a) Determine a razão entre a área do trapézio $ABB'A'$ e a área do triângulo $A'B'X$.

(b) Determine a razão entre a área do triângulo XYZ e a área do triângulo ABC.

2. Sabemos que o número real C e números reais não-nulos x, y e z, dois a dois distintos, satisfazem:

$$x + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = y + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = z + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C.$$

(a) Mostre que $C = -1$;

(b) Exiba pelo menos uma solução (x, y, z) para a equação dada.

3. Seja $n > 1$ um inteiro e considere um tabuleiro $n \times n$, em que algumas das n^2 casas foram pintadas de preto, e as restantes foram pintadas de branco. Prove que é possível escolhermos uma das n^2 casas do tabuleiro, de modo que, ao removermos completamente a linha e a coluna que a contém, haja um número diferente de casas pretas e de casas brancas, dentre as $(n-1)^2$ casas restantes.

4. Na Terra dos Impas, somente os algarismos ímpares são utilizados para contar e escrever números. Assim, em vez dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$ os Impas têm os números correspondentes $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, \ldots$ (note que os números dos Impas têm somente algarismos ímpares). Por exemplo, se uma criança tem 11 anos, os Impas diriam que ela tem 31 anos.

(a) Como os Impas escrevem o nosso número 20?

(b) Numa escola desse lugar, a professora escreveu no quadro-negro a continha de multiplicar abaixo. Se você fosse um aluno Impa, o que escreveria como resultado?

$$13 \times 5$$

(c) Escreva, na linguagem dos Impas, o número que na nossa representação decimal é escrito como 2017.

5. No triângulo ABC, com $AB \neq AC$, seja I seu incentro. Os pontos P e Q são definidos como os pontos onde o circuncírculo do triângulo BCI intersecta novamente as retas AB e AC, respectivamente. Seja D o ponto de interseção de AI e BC.

(a) Prove que P, Q e D são colineares;

(b) Sendo T, diferente de P, o ponto de encontro dos circuncírculos dos triângulos PDB e QDC, prove que T está no circuncírculo do triângulo ABC.

Observação: O Incentro de um triângulo é o ponto de interseção de suas bissetrizes internas e o Circuncírculo de um triângulo é a circunferência que passa pelos seus três vértices.

6. Demonstre que, para todo n inteiro positivo, existem inteiros positivos a e b, sem fatores primos em comum, de modo que $a^2 + 2017b^2$ possui mais de n fatores primos distintos.

2 Soluções

2.1 Problema 1.

Enunciado do Problema

Os pontos X, Y e Z estão marcados nos lados AB, BC e AC do triângulo ABC, respectivamente. Os pontos A', B' e C' estão nos lados XZ, XY e YZ do triângulo XYZ, respectivamente, de modo que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$$

e $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $ACC'A'$ são trapézios em que os lados do triângulo ABC são bases.

(a) Determine a razão entre a área do trapézio $ABB'A'$ e a área do triângulo $A'B'X$.

(b) Determine a razão entre a área do triângulo XYZ e a área do triângulo ABC.

2.2 Problema 2.

Enunciado do Problema

Sabemos que o número real C e números reais não-nulos x, y e z, dois a dois distintos, satisfazem:

$$x + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = y + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = z + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C.$$

(a) Mostre que $C = -1$;

(b) Exiba pelo menos uma solução (x, y, z) para a equação dada.

2.3 Problema 3.

Enunciado do Problema

Seja $n > 1$ um inteiro e considere um tabuleiro $n \times n$, em que algumas das n^2 casas foram pintadas de preto, e as restantes foram pintadas de branco. Prove que é possível escolhermos uma das n^2 casas do tabuleiro, de modo que, ao removermos completamente a linha e a coluna que a contém, haja um número diferente de casas pretas e de casas brancas, dentre as $(n-1)^2$ casas restantes.

2.4 Problema 4.

Enunciado do Problema

Na Terra dos Impas, somente os algarismos ímpares são utilizados para contar e escrever números. Assim, em vez dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$ os Impas têm os números correspondentes $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, \ldots$ (note que os números dos Impas têm somente algarismos ímpares). Por exemplo, se uma criança tem 11 anos, os Impas diriam que ela tem 31 anos.

(a) Como os Impas escrevem o nosso número 20?

(b) Numa escola desse lugar, a professora escreveu no quadro-negro a continha de multiplicar abaixo. Se você fosse um aluno Impa, o que escreveria como resultado?

$$13 \times 5$$

(c) Escreva, na linguagem dos Impas, o número que na nossa representação decimal é escrito como 2017.

2.5 Problema 5.

Enunciado do Problema

No triângulo ABC, com $AB \neq AC$, seja I seu incentro. Os pontos P e Q são definidos como os pontos onde o circuncírculo do triângulo BCI intersecta novamente as retas AB e AC, respectivamente. Seja D o ponto de interseção de AI e BC.

(a) Prove que P, Q e D são colineares;

(b) Sendo T, diferente de P, o ponto de encontro dos circuncírculos dos triângulos PDB e QDC, prove que T está no circuncírculo do triângulo ABC.

Observação: O Incentro de um triângulo é o ponto de interseção de suas bissetrizes internas e o Circuncírculo de um triângulo é a circunferência que passa pelos seus três vértices.

2.6 Problema 6.

Enunciado do Problema

Demonstre que, para todo n inteiro positivo, existem inteiros positivos a e b, sem fatores primos em comum, de modo que $a^2 + 2017b^2$ possui mais de n fatores primos distintos.

3 Referências