

# Soluções Jacob Palis 2022 N2

Samuel de Araújo Brandão

4 de Setembro de 2025

Uma coleção de soluções para a **Jacob Palis 2024 Nível 2**, inspirada no estilo de Evan Chen. Pode-se encontrar todos os problemas e respostas oficiais [aqui](#).

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

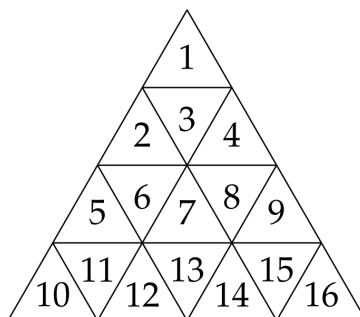
## Conteúdos

<b>1</b>	<b>Problemas</b>	<b>2</b>
1.1	Testes . . . . .	2
1.2	Respostas Numéricas . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Soluções</b>	<b>6</b>
2.1	Problema 1 . . . . .	6
2.2	Problema 2 . . . . .	7
2.3	Problema 3 . . . . .	8
2.4	Problema 4 . . . . .	9
2.5	Problema 5 . . . . .	10
2.6	Problema 6 . . . . .	11
2.7	Problema 7 . . . . .	12
2.8	Problema 8 . . . . .	13
2.9	Problema 9 . . . . .	14
2.10	Problema 10 . . . . .	15
2.11	Problema 11 . . . . .	16
2.12	Problema 12 . . . . .	17
2.13	Problema 13 . . . . .	18
2.14	Problema 14 . . . . .	19
2.15	Problema 15 . . . . .	20
2.16	Problema 16 . . . . .	21
2.17	Problema 17 . . . . .	22
2.18	Problema 18 . . . . .	23
2.19	Problema 19 . . . . .	24
2.20	Problema 20 . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Referências</b>	<b>26</b>

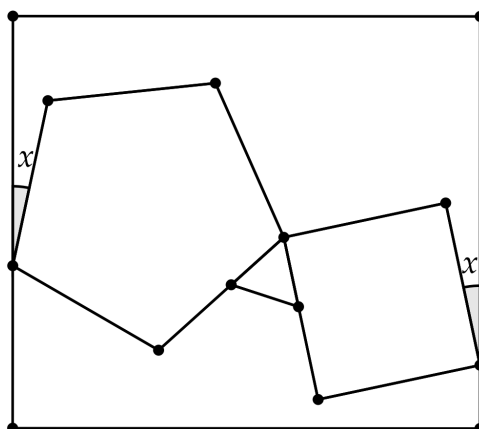
# 1 Problemas

## 1.1 Testes

1. Sejam  $x, y, z, w$  inteiros positivos tais que  $20^{24} = 2^x \cdot 5^y = 8^z \cdot 25^w$ . Qual é o valor de  $x + y + z + w$ ?
2. Lucas estava participando de uma corrida de rua de 21 quilômetros e olhando sempre o tempo médio por quilômetro. Ao final do quilômetro 14 o seu tempo médio era de 6 minutos e 42 segundos por quilômetro. Nos últimos 7 quilômetros o ritmo dele baixou e ele concluiu o quilômetro 21 com tempo médio de 6 minutos e 50 segundos por quilômetro no percurso completo. Qual foi o tempo médio de Lucas nos últimos 7 quilômetros?
3. Qual o número máximo de meses com 5 quintas-feiras que um ano pode ter?
4. Quantos triângulos na figura abaixo têm soma de seus números par?



5. Na figura a seguir no interior de um retângulo há um pentágono regular, um triângulo equilátero e um quadrado. Os três polígonos regulares possuem um vértice em comum, os outros dois vértices do triângulo equilátero estão sobre os lados do pentágono e do quadrado e o pentágono e o quadrado possuem um vértice sobre os lados do retângulo. Sabe-se que lados do pentágono e do quadrado formam ângulos com medida  $x$  com lados opostos do retângulo (como na figura). Quanto vale  $x$  em graus?



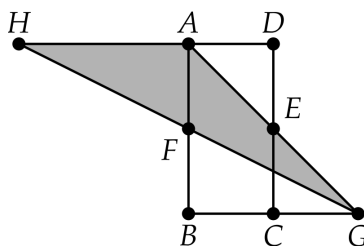
6. Uma professora tem uma sala com menos de 100 alunos e possui 2024 balas para dar para eles. Ela gostaria de distribuir uma quantidade igual de balas para cada aluno e observou que precisaria comprar no mínimo 41 balas para fazê-lo. Quantos alunos a sala possui?
7. Em uma cidade com 2025 habitantes, cada pessoa sempre mente ou sempre fala a verdade. Um dia Ana, que é habitante desta cidade, faz o seguinte anúncio: “Nessa cidade há um número ímpar de mentirosos!”

Considere as seguintes afirmações:

- i. Ana sempre fala a verdade.
- ii. Existe pelo menos um mentiroso na cidade.
- iii. Existe pelo menos uma pessoa que diz a verdade na cidade.
- iv. Existe pelo menos uma pessoa diferente de Ana que sempre diz a verdade na cidade.

Quantas afirmações são necessariamente verdadeiras?

8. O retângulo  $ABCD$  possui lados com medidas  $AB = 8$  e  $BC = 4$ . Os pontos  $E$  e  $F$  são pontos médios dos lados  $CD$  e  $AB$ , respectivamente. A reta  $AE$  encontra a reta  $BC$  em  $G$  e a reta  $GF$  encontra a reta  $AD$  em  $H$ . Qual é a área do triângulo  $AGH$ ?



9. No planeta Xorpzorp, as semanas têm 11 dias (chamados de  $1^a$  feira,  $\dots$ ,  $11^a$  feira); os meses alternam entre 50 e 51 dias, e os anos têm exatamente 5 meses, ou seja, alternam entre 252 ou 253 dias. Em Xorpzorp, um dia tem a mesma duração de um dia terrestre.

Hoje, nesse planeta, é  $4^a$  feira, dia 51 do mês 4 de 2024. Daqui a 24 anos terrestres, qual será o dia no calendário Xorpzorp?

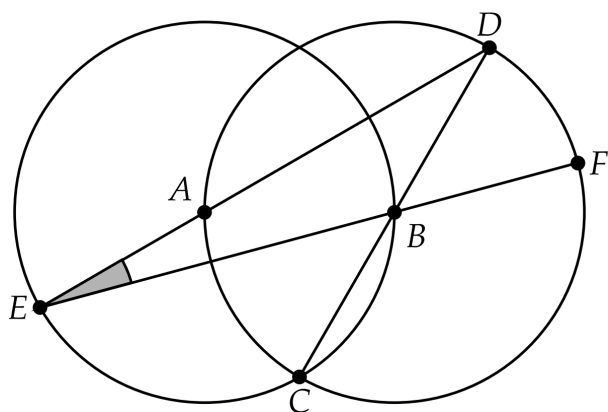
10. O triângulo  $ABC$  é isósceles de base  $BC$ . Os pontos  $E$  no segmento  $AB$  e  $F, G$  no segmento  $AC$  satisfazem:
- i.  $A, F, G$  e  $C$  estão dispostos nessa ordem;
  - ii.  $AF = EF$ ;
  - iii.  $EF$  é bissetriz de  $\angle AEG$ ;
  - iv.  $GB$  é bissetriz de  $\angle EGC$ ;
  - v.  $BC = BG$ .

Quanto vale o ângulo  $\angle BAC$ ?

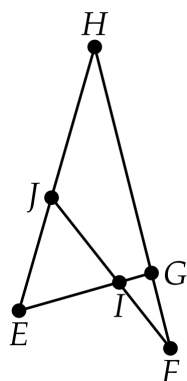
11. Maria escreveu no quadro branco os primeiros 1000 múltiplos de 23, começando com 23 e em ordem crescente. José, em seguida, apagou os dígitos a partir do quarto, em cada número (então 12345 vira 345). Sobrou uma lista de 1000 números de 3 (ou menos) dígitos.

Entre as alternativas a seguir, qual delas aparece por último no quadro branco?

12. As circunferências  $\omega_1$  de centro  $A$  que passa por  $B$  e  $\omega_2$  de centro  $B$  que passa por  $A$  se encontram no ponto  $C$ . A reta  $BC$  corta  $\omega_2$  novamente em  $D$ . A reta  $DA$  corta  $\omega_1$  em  $E$  (o ponto  $A$  está entre  $D$  e  $E$ ). Finalmente, a reta  $EB$  corta  $\omega_2$  em  $F$  (o ponto  $B$  está entre  $E$  e  $F$ ). Determine a medida em graus do ângulo  $\angle DEF$ .



13. De quantas maneiras podemos pintar os pontos  $E, F, G, H, I, J$  da figura a seguir, cada um com exatamente uma cor, se temos disponíveis as cores vermelho, verde e azul, e se não devemos permitir que três pontos colineares recebam a mesma cor?



14. O sistema

$$\begin{cases} a^3 + b = 4c, \\ a + b^3 = c, \\ ab = -1 \end{cases}$$

tem solução real. Quantos valores de  $a$  satisfazem o sistema?

15. Um tabuleiro  $15 \times 36$  será coberto, sem sobreposição, por peças quadradas de lado  $5 \times 5$  e  $7 \times 7$ . Se nenhuma parte dessas peças pode ficar fora do tabuleiro, qual o número mínimo de quadradinhos que não serão cobertos?

## 1.2 Respostas Numéricas

16. Seja  $N$  um inteiro positivo de quatro algarismos cujo algarismo das unidades é igual a 3 e seja  $M$  o número obtido de  $N$  apagando esse algarismo 3 e escrevendo-o no começo de  $N$ . Sabe-se que  $M$  é 2025 unidades menor que  $N$ . Qual é o valor de  $N$ ?
17. Um número  $a$  *ganha* de outro  $b$  se  $a > b$  e o número obtido invertendo os dígitos de  $a$  na base decimal é maior do que o número obtido invertendo os dígitos de  $b$  na base decimal. Por exemplo, 314 ganha de 291, pois  $314 > 291$  e  $413 > 192$ . Por outro lado, 314 não ganha de 309, pois  $413 < 903$ . Quantos números de quatro algarismos ganham de 2024?
18. Considere a expressão

$$\_\_1\_\_2\_\_3\ldots\_\_{2023}\_\_{2024}$$

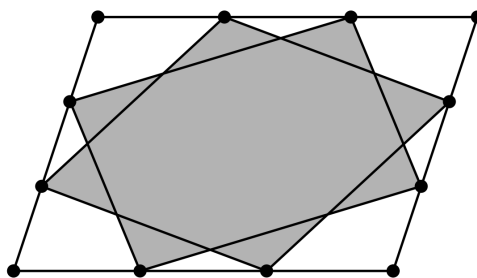
Em cada espaço vazio, coloque um  $+$  ou um  $-$  e calcule o resultado. Quantos são os possíveis restos desse resultado na divisão por 2024?

19. Sejam  $a, b, c$  tais que

$$\begin{cases} a + b + c = 10, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 20, \\ a^3 + b^3 + c^3 = 30. \end{cases}$$

Calcule o valor de  $a^5 + b^5 + c^5$ .

20. Na figura a seguir temos um paralelogramo em que cada lado foi dividido em três partes iguais. Os pontos sobre os lados foram ligados alternadamente para formar dois quadriláteros. A figura sombreada é formada pela união das regiões desses dois quadriláteros. A razão entre a área sombreada e a área do paralelogramo pode ser escrita como fração irredutível  $\frac{p}{q}$ , com  $p, q$  inteiros positivos. Quanto vale  $p + q$ ?



## 2 Soluções

### 2.1 Problema 1

#### Enunciado

Sejam  $x, y, z, w$  inteiros positivos tais que  $20^{24} = 2^x \cdot 5^y = 8^z \cdot 25^w$ . Qual é o valor de  $x + y + z + w$ ?

## 2.2 Problema 2

### Enunciado

Lucas estava participando de uma corrida de rua de 21 quilômetros e olhando sempre o tempo médio por quilômetro. Ao final do quilômetro 14 o seu tempo médio era de 6 minutos e 42 segundos por quilômetro. Nos últimos 7 quilômetros o ritmo dele baixou e ele concluiu o quilômetro 21 com tempo médio de 6 minutos e 50 segundos por quilômetro no percurso completo. Qual foi o tempo médio de Lucas nos últimos 7 quilômetros?

## 2.3 Problema 3

### Enunciado

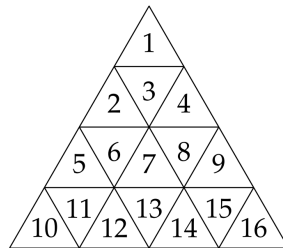
Qual o número máximo de meses com 5 quintas-feiras que um ano pode ter?



## 2.4 Problema 4

### Enunciado

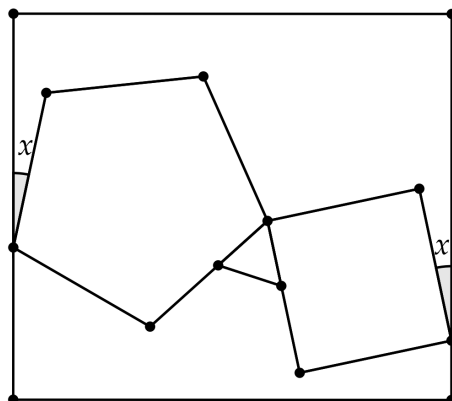
Quantos triângulos na figura abaixo têm soma de seus números par?



## 2.5 Problema 5

### Enunciado

Na figura a seguir no interior de um retângulo há um pentágono regular, um triângulo equilátero e um quadrado. Os três polígonos regulares possuem um vértice em comum, os outros dois vértices do triângulo equilátero estão sobre os lados do pentágono e do quadrado e o pentágono e o quadrado possuem um vértice sobre os lados do retângulo. Sabe-se que lados do pentágono e do quadrado formam ângulos com medida  $x$  com lados opostos do retângulo (como na figura). Quanto vale  $x$  em graus?



## 2.6 Problema 6

### Enunciado

Uma professora tem uma sala com menos de 100 alunos e possui 2024 balas para dar para eles. Ela gostaria de distribuir uma quantidade igual de balas para cada aluno e observou que precisaria comprar no mínimo 41 balas para fazê-lo. Quantos alunos a sala possui?

## 2.7 Problema 7

### Enunciado

Em uma cidade com 2025 habitantes, cada pessoa sempre mente ou sempre fala a verdade. Um dia Ana, que é habitante desta cidade, faz o seguinte anúncio: “Nessa cidade há um número ímpar de mentirosos!”

Considere as seguintes afirmações:

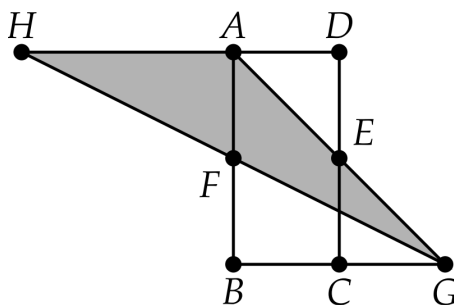
- i. Ana sempre fala a verdade.
- ii. Existe pelo menos um mentiroso na cidade.
- iii. Existe pelo menos uma pessoa que diz a verdade na cidade.
- iv. Existe pelo menos uma pessoa diferente de Ana que sempre diz a verdade na cidade.

Quantas afirmações são necessariamente verdadeiras?

## 2.8 Problema 8

## Enunciado

O retângulo  $ABCD$  possui lados com medidas  $AB = 8$  e  $BC = 4$ . Os pontos  $E$  e  $F$  são pontos médios dos lados  $CD$  e  $AB$ , respectivamente. A reta  $AE$  encontra a reta  $BC$  em  $G$  e a reta  $GF$  encontra a reta  $AD$  em  $H$ . Qual é a área do triângulo  $AGH$ ?



## 2.9 Problema 9

### Enunciado

No planeta Xorpzorp, as semanas têm 11 dias (chamados de 1<sup>a</sup> feira, ..., 11<sup>a</sup> feira); os meses alternam entre 50 e 51 dias, e os anos têm exatamente 5 meses, ou seja, alternam entre 252 ou 253 dias. Em Xorpzorp, um dia tem a mesma duração de um dia terrestre.

Hoje, nesse planeta, é 4<sup>a</sup> feira, dia 51 do mês 4 de 2024. Daqui a 24 anos terrestres, qual será o dia no calendário Xorpzorp?

## 2.10 Problema 10

### Enunciado

O triângulo  $ABC$  é isósceles de base  $BC$ . Os pontos  $E$  no segmento  $AB$  e  $F, G$  no segmento  $AC$  satisfazem:

- i.  $A, F, G$  e  $C$  estão dispostos nessa ordem;
- ii.  $AF = EF$ ;
- iii.  $EF$  é bissetriz de  $\angle AEG$ ;
- iv.  $GB$  é bissetriz de  $\angle EGC$ ;
- v.  $BC = BG$ .

Quanto vale o ângulo  $\angle BAC$ ?

## 2.11 Problema 11

### Enunciado

Maria escreveu no quadro branco os primeiros 1000 múltiplos de 23, começando com 23 e em ordem crescente. José, em seguida, apagou os dígitos a partir do quarto, em cada número (então 12345 vira 345). Sobrou uma lista de 1000 números de 3 (ou menos) dígitos. Entre as alternativas a seguir, qual delas aparece por último no quadro branco?



## 2.12 Problema 12

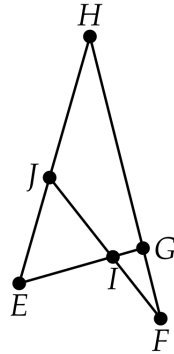
### Enunciado

As circunferências  $\omega_1$  de centro  $A$  que passa por  $B$  e  $\omega_2$  de centro  $B$  que passa por  $A$  se encontram no ponto  $C$ . A reta  $BC$  corta  $\omega_2$  novamente em  $D$ . A reta  $DA$  corta  $\omega_1$  em  $E$  (o ponto  $A$  está entre  $D$  e  $E$ ). Finalmente, a reta  $EB$  corta  $\omega_2$  em  $F$  (o ponto  $B$  está entre  $E$  e  $F$ ). Determine a medida em graus do ângulo  $\angle DEF$ .

### 2.13 Problema 13

#### Enunciado

De quantas maneiras podemos pintar os pontos  $E, F, G, H, I, J$  da figura a seguir, cada um com exatamente uma cor, se temos disponíveis as cores vermelho, verde e azul, e se não devemos permitir que três pontos colineares recebam a mesma cor?



## 2.14 Problema 14

### Enunciado

O sistema

$$\begin{cases} a^3 + b = 4c, \\ a + b^3 = c, \\ ab = -1 \end{cases}$$

tem solução real. Quantos valores de  $a$  satisfazem o sistema?

## 2.15 Problema 15

### Enunciado

Um tabuleiro  $15 \times 36$  será coberto, sem sobreposição, por quadrados de lado  $5 \times 5$  e  $7 \times 7$ . Nenhuma parte das peças pode sair do tabuleiro. Qual é o número mínimo de quadradinhos que permanecerão descobertos?

## 2.16 Problema 16

### Enunciado

Seja  $N$  um inteiro positivo de quatro algarismos cujo algarismo das unidades é igual a 3 e seja  $M$  o número obtido de  $N$  apagando esse algarismo 3 e escrevendo-o no começo de  $N$ . Sabe-se que  $M$  é 2025 unidades menor que  $N$ . Qual é o valor de  $N$ ?

## 2.17 Problema 17

### Enunciado

Um número  $a$  *ganha* de outro  $b$  se  $a > b$  e o número obtido invertendo os dígitos de  $a$  na base decimal é maior do que o número obtido invertendo os dígitos de  $b$  na base decimal. Por exemplo, 314 ganha de 291, pois  $314 > 291$  e  $413 > 192$ . Por outro lado, 314 não ganha de 309, pois  $413 < 903$ . Quantos números de quatro algarismos ganham de 2024?

## 2.18 Problema 18

### Enunciado

Considere a expressão

$$\_\_1\_\_2\_\_3\ldots\_\_2023\_\_2024$$

Em cada espaço vazio, coloque um  $+$  ou um  $-$  e calcule o resultado. Quantos são os possíveis restos desse resultado na divisão por 2024?

## 2.19 Problema 19

### Enunciado

Sejam  $a, b, c$  tais que

$$\begin{cases} a + b + c = 10, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 20, \\ a^3 + b^3 + c^3 = 30. \end{cases}$$

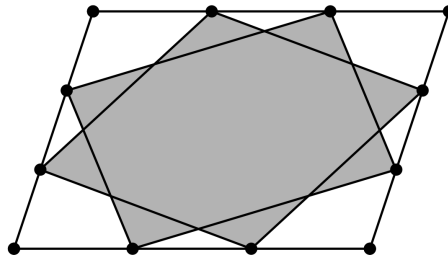
Calcule o valor de  $a^5 + b^5 + c^5$ .



## 2.20 Problema 20

## Enunciado

Na figura a seguir temos um paralelogramo em que cada lado foi dividido em três partes iguais. Os pontos sobre os lados foram ligados alternadamente para formar dois quadriláteros. A figura sombreada é formada pela união das regiões desses dois quadriláteros. A razão entre a área sombreada e a área do paralelogramo pode ser escrita como fração irredutível  $\frac{p}{q}$ , com  $p, q$  inteiros positivos. Quanto vale  $p + q$ ?



### 3 Referências