

OMpD 2022 N2 Fase 2

Samuel de Araújo Brandão

15 de setembro de 2025

Este documento contém soluções para os problemas da OMpD 2022 N2 Fase 2, escritos por mim durante minha preparação para a Olimpíada Internacional de Matemática.

O conteúdo reflete meu próprio entendimento e processo de resolução de problemas. Algumas soluções podem ter sido inspiradas pelo trabalho de outras pessoas ou requerido ajuda externa; nesses casos, a devida atribuição é dada (veja a [seção 3](#)).

Se você notar algum erro ou tiver sugestões de melhoria, eu ficaria muito grato em recebê-las em samuelbaraujo19@gmail.com.

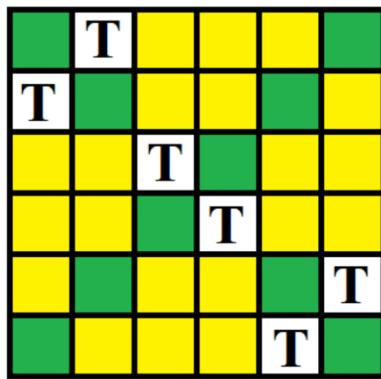
Conteúdo

1	Problemas	2
2	Soluções	4
2.1	Problema 1.	4
2.2	Problema 2.	5
2.3	Problema 3.	6
2.4	Problema 4.	7
3	Referências	8

1 Problemas

1. Considere um tabuleiro quadriculado 6×6 , formado de 36 casinhas unitárias. Desejamos colocar 6 torres neste tabuleiro, uma torre em cada casinha, de modo que não haja duas torres numa mesma linha, nem duas torres numa mesma coluna. Note que, uma vez colocadas as torres dessa maneira, temos que, para toda casinha onde não foi colocada uma torre, há uma torre na mesma linha que ela e uma torre na mesma coluna que ela. Diremos que tais torres são alinhadas com essa casinha.

Para cada uma dessas 30 casas sem torres, pinte-a de verde se as duas torres alinhadas com essa mesma casinha estão a uma mesma distância dela, e pinte-a de amarelo caso contrário. Por exemplo, ao colocarmos as 6 torres (T) como abaixo, temos:



- (a) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas verdes?
 - (b) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas amarelas?
 - (c) É possível colocarmos as torres de modo que haja 15 casas verdes e 15 amarelas?
2. Seja $ABCD$ um retângulo. O ponto E está sobre o lado \overline{AB} e o ponto F está sobre o lado \overline{AD} , de modo que $\angle FEC = \angle CEB$ e $\angle DFC = \angle CFE$. Determine a medida do ângulo $\angle FCE$ e da razão AD/AB .
3. Seja N um inteiro positivo. Inicialmente, um número inteiro positivo A está escrito no quadro. A cada passo, podemos realizar uma das duas operações seguintes com o número escrito no quadro:

- (i) Somar N ao número escrito no quadro e trocar tal número pela soma obtida;
- (ii) Se o número no quadro for maior do que 1 e tiver pelo menos um algarismo 1, então podemos remover o algarismo 1 desse número, e trocar o número escrito inicialmente por este (com remoção de possíveis zeros à esquerda).

Por exemplo, se $N = 63$ e $A = 25$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$25 \rightarrow 88 \rightarrow 151 \rightarrow 51 \rightarrow 5$$

E se $N = 143$ e $A = 2$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$2 \rightarrow 145 \rightarrow 288 \rightarrow 431 \rightarrow 574 \rightarrow 717 \rightarrow 860 \rightarrow 1003 \rightarrow 3$$

Para quais valores de N sempre é possível, não importando o valor inicial de A na lousa, obter o número 1 na lousa, mediante um número finito de operações?

4. Dizemos que uma sêxtupla de números reais positivos $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ é *phika* se $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

(a) Prove que existe uma sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ tal que:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) > 1 - \frac{1}{20222022}.$$

(b) Prove que para toda sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, temos:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) < 1.$$

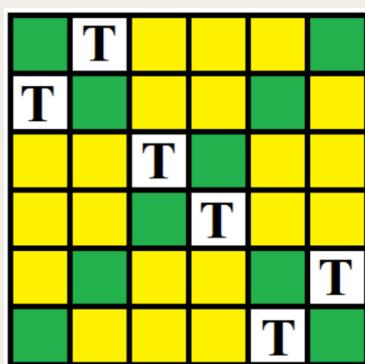
2 Soluções

2.1 Problema 1.

Enunciado do Problema

Considere um tabuleiro quadriculado 6×6 , formado de 36 casinhas unitárias. Desejamos colocar 6 torres neste tabuleiro, uma torre em cada casinha, de modo que não haja duas torres numa mesma linha, nem duas torres numa mesma coluna. Note que, uma vez colocadas as torres dessa maneira, temos que, para toda casinha onde não foi colocada uma torre, há uma torre na mesma linha que ela e uma torre na mesma coluna que ela. Diremos que tais torres são alinhadas com essa casinha.

Para cada uma dessas 30 casas sem torres, pinte-a de verde se as duas torres alinhadas com essa mesma casinha estão a uma mesma distância dela, e pinte-a de amarelo caso contrário. Por exemplo, ao colocarmos as 6 torres (T) como abaixo, temos:



- (a) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas verdes?
- (b) É possível colocarmos as torres de modo que haja 30 casas amarelas?
- (c) É possível colocarmos as torres de modo que haja 15 casas verdes e 15 amarelas?

2.2 Problema 2.

Enunciado do Problema

Seja $ABCD$ um retângulo. O ponto E está sobre o lado \overline{AB} e o ponto F está sobre o lado \overline{AD} , de modo que $\angle FEC = \angle CEB$ e $\angle DFC = \angle CFE$.

Determine a medida do ângulo $\angle FCE$ e da razão AD/AB .

2.3 Problema 3.

Enunciado do Problema

Seja N um inteiro positivo. Inicialmente, um número inteiro positivo A está escrito no quadro. A cada passo, podemos realizar uma das duas operações seguintes com o número escrito no quadro:

- (i) Somar N ao número escrito no quadro e trocar tal número pela soma obtida;
- (ii) Se o número no quadro for maior do que 1 e tiver pelo menos um algarismo 1, então podemos remover o algarismo 1 desse número, e trocar o número escrito inicialmente por este (com remoção de possíveis zeros à esquerda).

Por exemplo, se $N = 63$ e $A = 25$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$25 \rightarrow 88 \rightarrow 151 \rightarrow 51 \rightarrow 5$$

E se $N = 143$ e $A = 2$, podemos fazer a seguinte sequência de operações:

$$2 \rightarrow 145 \rightarrow 288 \rightarrow 431 \rightarrow 574 \rightarrow 717 \rightarrow 860 \rightarrow 1003 \rightarrow 3$$

Para quais valores de N sempre é possível, não importando o valor inicial de A na lousa, obter o número 1 na lousa, mediante um número finito de operações?

2.4 Problema 4.

Enunciado do Problema

Dizemos que uma sêxtupla de números reais positivos $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ é *phika* se $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

- (a) Prove que existe uma sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ tal que:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) > 1 - \frac{1}{20222022}.$$

- (b) Prove que para toda sêxtupla phika $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, temos:

$$a_1(\sqrt{b_1} + a_2) + a_2(\sqrt{b_2} + a_3) + a_3(\sqrt{b_3} + a_1) < 1.$$

3 Referências