Problema 6. Seja P um polígono convexo de n vértices, $n \geq 4$. Podemos particionar P em triângulos traçando diagonais que não se interceptam no interior de P. Uma tal partição é chamada de *triangulação*. Um conjunto X de diagonais de P é dito *obstrutivo* se qualquer triangulação de P utiliza ao menos uma diagonal de X. Determine, em função de n, a menor quantidade possível de elementos de um conjunto obstrutivo.

Solução. Vamos mostrar que a menor quantidade de elementos de um conjunto obstrutivo de um polígono P de n vértices é $n-2$. Para isso, comecemos provando o seguinte

Lema. Dado um vértice v qualquer de um polígono de n vértices, todo conjunto obstrutivo possui ao menos uma diagonal que tenha v como extremidade.

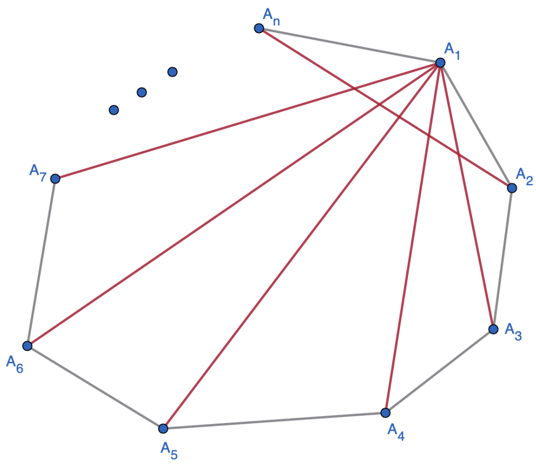
Prova. Considere a triangulação em "leque", obtida traçando todas as diagonais a partir de v. Se S é um conjunto obstrutivo, então alguma diagonal dessa triangulação deve estar em S. Como toda diagonal dessa triangulação tem como extremo v, o resultado segue. □

Agora exibamos um conjunto obstrutivo com $n-2$ diagonais:

Considere o conjunto obstrutivo (figura ao lado)

$$S = \{A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, \ldots, A_{n-1}A_1, A_2A_n\}.$$

Fixe o vértice A_1 do polígono e considere o conjunto das diagonais $A_1A_3, A_1A_4, \ldots, A_1A_{n-1}$. Esse conjunto possui $n-3$ diagonais. Além disso, acrescente a diagonal A_2A_n, totalizando $n-2$ diagonais. Dada uma triangulação qualquer, há duas possibilidades: ou A_1 é extremo de uma diagonal, ou faz parte da "orelha" $A_nA_1A_2$. De qualquer forma, S contém ao menos uma dessas diagonais e, portanto, o conjunto é obstrutivo.



Resta mostrar que um conjunto obstrutivo não pode ter menos do que $n-2$ elementos. Faremos isso por indução em n.

Para $n = 4$, só há duas triangulações possíveis, cada uma usando exatamente uma das duas diagonais possíveis. Sendo assim, nosso S tem 2 elementos.

Suponha que para algum $n \geq 4$ todo conjunto obstrutivo em um polígono de n lados possui ao menos $n-2$ diagonais. Considere agora um polígono de $(n+1)$ lados e suponha que exista um conjunto obstrutivo S com $|S| \leq n-2$ diagonais. Fixe um vértice A_i do polígono. Note que, pelo lema, existe alguma diagonal de S que tem A_i como extremo. Assim, removendo o vértice A_i e todas as diagonais incidentes a ele, obtemos um polígono P' de n lados com um conjunto obstrutivo S' com no máximo $(n-3)$ diagonais, já que $|S'| \leq |S| - 1 \leq (n-2) - 1 = n-3$. Mas, pela hipótese de indução, um conjunto obstrutivo de P' possui pelo menos $n-2$ elementos, absurdo!

Assim, todo conjunto obstrutivo possui pelo menos $n-2$ diagonais. Como já exibimos um exemplo com $n-2$ diagonais, essa é a menor quantidade possível. ■

Critérios de Correção

Soluções diferentes serão pontuadas de forma equivalente aos critérios abaixo.
Qualquer solução completa e correta vale 10 pontos.

Problema 6

Pontuações principais

As pontuações não são cumulativas dentro de cada critério principal.

1. Provar o lema, ou alguma afirmação equivalente .... **até 2 pontos**
    (a) Apenas citar o lema, ou afirmação equivalente, mas sem provar .... *1 ponto*
2. Exibir um exemplo de conjunto obstrutivo com $n-2$ diagonais, justificando o fato dele ser obstrutivo. **até 2 pontos**
    (a) Apenas exibir o conjunto obstrutivo, sem justificar .... *1 ponto*
3. Provar que um conjunto obstrutivo não pode ter menos do que $n-2$ elementos, por indução ou qualquer outra técnica. .... **até 6 pontos**
    (a) Iniciar a demonstração por indução, sem conseguir concluir .... *até 2 pontos*

Outras pontuações (não cumulativas)

1. Fazer pelo menos dois casos particulares e conjecturar corretamente o tamanho mínimo de um conjunto obstrutivo do caso geral .... **1 ponto**