

OBM 2025 - Nível 3

Critério de Correção - Problema 3

1 Enunciado

Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência infinita de inteiros positivos tal que

- (i) $a_1, a_2, \dots, a_{10000}$ são inteiros positivos distintos dois a dois;
- (ii) para $n > 10000$, define-se a_n como o menor inteiro positivo diferente de a_1, a_2, \dots, a_{n-1} tal que $|a_n - a_{n-1}|$ é uma potência de 2025 (note que 1 é uma potência de 2025).

Prove que todo inteiro positivo aparece na sequência.

2 Solução

Primeiramente, suponha por absurdo que $X > 0$ não aparece na sequência, e seja $N > 0$ mínimo tal que $2025^N > X + \max(a_1, \dots, a_{10000})$.

Note que $a_i < 2025^N$ para $i < 10000$ e, portanto, $\nexists j$ com $a_j = X + 2025^N$, pois se existisse, necessariamente $j > 10000$ e portanto $a_{j+1} = X$ pois $|X - a_j| = 2025^N$ e $a_j < 2025^{N+1}$ (portanto $|a_j - X|$ é a menor potência de 2025 possível), absurdo pela escolha de X .

Agora provamos por indução forte que $X + k \cdot 2025^n$ também não aparece na sequência, $k \geq 1$. Notamos que a base já foi feita acima. ($k = 0, k = 1$)

Para o passo indutivo, suponha que $a_j \neq X, X + 2025^N, X + 2 \cdot 2025^N, \dots, X + k \cdot 2025^N$ para todo j . Se, por absurdo, $a_j = X + (k + 1) \cdot 2025^N$, então novamente $j > 10000$ e portanto $a_{j+1} \leq X + k \cdot 2025^N$ (pois esse tem uma diferença potência de 2025, e está livre, e a_{j+1} é o menor dos números com essa propriedade.) Concluimos que $a_j - a_{j+1} \geq 2025^N$ e portanto, como é potência de 2025, $a_j - a_{j+1} = 2025^{N+l}$ com $l \geq 0$; em particular $2025^N \mid a_j - a_{j+1}$ e portanto $a_{j+1} = X + s \cdot 2025^N$ com $s \leq k$, contradizendo a hipótese indutiva. Isso conclui o passo indutivo e com ele a indução.

Vamos agora generalizar essa indução. Vamos provar que:

Lema: Suponha que, para alguns n_0, r, Z fixados, e para todo $j \geq n_0$, $a_j \neq Z + k \cdot 2025^r$ para qualquer k . (Equivalentemente, $a_j \not\equiv Z \pmod{2025^r}$) Então existe n_1 tal que, para todo $j > n_1$, a sequência $a_j \neq Z + 2025^{r-1} + k \cdot 2025^r$ para qualquer k .

(Note que já provamos essa hipótese para $n_0 = 10000, Z = X, r = N$).

Demonstração: Considere a lista finita de elementos $a_j \equiv Z \pmod{2025^r}$. Essa lista tem um máximo $W \cdot 2025^r$ (se for vazia, tome $W = 1$.) Forme um "conjunto proibido"

$$\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \dots, a_{10000}, 2025^r, 2025^r + 2025^{r-1}, 2 \cdot 2025^r, 2 \cdot 2025^r + 2025^{r-1}, \dots, W \cdot 2025^r, W \cdot 2025^r + 2025^{r-1}\}$$

O conjunto \mathcal{S} é finito, e portanto intersecta a sequência pela última vez. Tome n_1 a última intersecção, que existe pois $a_{10000} \in \mathcal{S}$, e note que $a_j \notin \mathcal{S}$ para $j > n_1$

Suponha por absurdo que n_1 não satisfaz a propriedade desejada; existe portanto pelo menos um $s > n_1$ com $a_s \equiv Z + 2025^{r-1} \pmod{2025^r}$, e tome, dentre $s > n_1$, o índice onde a_s seja o menor possível.

Por hipótese, $s > 10000$. Por outro lado, como $a_s \notin \mathcal{S}$ e $a_s \equiv Z + 2025^{r-1} \pmod{2025^r}$, temos que ter $a_s = Z + 2025^{r-1} + K \cdot 2025^r$ com $K > W$ (senão $a_s \in \mathcal{S}$). Em particular, como $K > W$, temos que $Z + K \cdot 2025^r$ não aparece na sequência. Como antes, $a_{s+1} \leq Z + K \cdot 2025^r$, e então $a_s - a_{s+1} \geq 2025^{r-1}$.

Mas então, ou $a_s - a_{s+1} = 2025^{r-1}$ que implicaria $a_{s+1} = Z + K \cdot 2025^r$, absurdo, ou $2025^r \mid a_s - a_{s+1}$ e portanto $a_{s+1} = Z + 2025^{r-1} + (K - \ell) \cdot 2025^r \equiv Z + 2025^{r-1} \pmod{2025^r}$, contradição novamente. Chegamos em um absurdo de qualquer maneira, provando que vale a propriedade desejada. \square

Já sabemos que $a_j \not\equiv X \pmod{2025^N}$, e pelo Lema $a_j \not\equiv X + 2025^{N-1} \pmod{2025^N}$ para $j \gg 1$, e pelo Lema $a_j \not\equiv X + 2 \cdot 2025^{N-1} \pmod{2025^N}$ para $j \gg 1 \dots$

Portanto $a_j \not\equiv X \pmod{2025^{N-1}}$ para $j \gg 1$ (pois senão $a_j \equiv X + K \cdot 2025^{N-1} \pmod{2025^N}$ para algum $0 \leq K \leq 2024$)

Pelo Lema, $a_j \not\equiv X + 2025^{N-2} \pmod{2025^{N-1}}$ para $j \gg 1$, e o processo se repete, até que obtemos $a_j \not\equiv X \pmod{1}$ que é absurdo. Isso prova que é impossível que X não apareça na sequência, como desejado.

3 Critério de Correção

Escrevemos o critério de acordo com a direção natural de atacar o problema por contradição. (Ou seja, suponha que X não aparece na sequência). Cada solução vale no máximo 10 pontos (portanto deve-se multiplicar a pontuação final por 5)

1. Mostrar que existe uma progressão aritmética infinita fora da sequência **2 pontos**
2. Exibir uma segunda progressão infinita faltante (disjunta) a partir da primeira **2 pontos**
3. Corretamente demonstrar a implicação anterior **2 pontos**
4. Concluir o problema **4 pontos**

A seguinte observação vale ponto parcial que **não acumula com o critério acima**:

1. Corretamente demonstrar que basta supor que 1 não aparece na sequência **até 1 ponto**

As seguintes observações não valem ponto:

1. Mostrar que existem infinitos termos faltantes **0 ponto**
2. Casos particulares dos 10000 termos iniciais **0 ponto**
3. Análise incompleta ou incorreta do crescimento da sequência **0 ponto**