Solução P2 N2 2025

2. Seja m um inteiro positivo. Ana e Banana jogam o seguinte jogo em um tabuleiro 5×5, inicialmente com 0 em todas as casas. Alternadamente, elas escolhem uma casa do tabuleiro e somam ao número escrito nela um inteiro do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, de forma que o número escrito na casa não ultrapasse o número m. Ganha quem fizer uma jogada que complete as cinco casas de uma linha, uma coluna ou uma das duas diagonais com o número m em todas as casas. Para quais inteiros positivos m, Ana, a primeira a jogar, possui uma estratégia vencedora?

Solução: Ana tem estratégia vencedora se e somente se m não é múltiplo de 6.

Vamos olhar para tudo módulo 6.

Caso 1: $m \equiv 0 \pmod 6$: Banana vence.

Sempre que Ana jogar x em uma casa, Banana responde jogando $6-x$ na mesma casa.

- Ana sempre recebe uma casa $0 \pmod 6$ e, jogando $1, 2, 3, 4$ ou 5, nunca consegue devolver essa casa com $0 \pmod 6$. Em particular, ela nunca completa m.
- Banana sempre recebe uma casa $1, 2, 3, 4$ ou $5 \pmod 6$ e pode jogar, respectivamente, $5, 4, 3, 2$ ou $1 \pmod 6$, deixando $0 \pmod 6$ nessa casa. Eventualmente, Banana completará m nas casas.

Como a quantidade de jogadas é finita, Banana eventualmente ganha com essa estratégia.

Caso 2: $m \equiv r \neq 0 \pmod 6$: Ana vence.

Vamos dizer que a jogadora "controla a casa $a(i, j)$" quando ela é a primeira a colocar um $r \pmod 6$ nessa casa. Veja que, depois disso, é possível garantir que a outra nunca atinja $m = r \pmod 6$ nessa casa, repetindo o caso 1. Além disso, ao controlar uma casa $a(i, j)$, a jogadora também controla a linha i (L_i), a coluna j (C_j) e, em alguns casos, diagonais, pois a outra não consegue mais terminar a partida nessas filas.

Solução 1 – estratégia do espelhamento

Inicialmente, Ana controla o centro jogando r em $a(3, 3)$. Em seguida:

- Sempre que Banana jogar numa casa em que Ana já jogou, Ana responde levando o número da casa de volta para $r \pmod 6$, mantendo o controle da casa.

- "Sempre" que Banana jogar x numa casa $a(i, j)$ fora do centro, Ana responde espelhando, jogando x na casa $a(6-i, 6-j)$, que é a simétrica de $a(i, j)$ com relação ao centro.

Essa estratégia quase funciona, mas ela tem um "furo". Banana fica com a chance de controlar uma fila que não passe pelo centro.

Nesse caso, se Ana for controlar a casa $a(5, 2)$ simétrica de uma jogada de Banana, ela pode acabar permitindo que Banana controle $a(1, 5)$ e vença o jogo.

Para resolver isso, vamos criar uma exceção para o "Sempre" anterior:

Exceção: Caso Ana receba o tabuleiro com uma fila da forma $m, m, m, m, m-x$ (em alguma ordem), para $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ela ignora o espelhamento e simplesmente vence o jogo levando $m-x$ para m.

Isso fecha o problema porque garante que Banana não vence antes. De fato:

- Banana não vence em uma fila que passe pelo centro (Ana sempre controla pelo menos uma casa).
- Banana não vence em uma fila fora do centro, pois antes disso Ana receberia a situação $m, m, m, m, m-x$ e aplicaria a exceção.

Solução 2 – estratégia da permutação

O início é igual: Ana controla o centro jogando r em $a(3, 3)$. Em seguida:

- Sempre que Banana jogar numa casa em que Ana já jogou, Ana responde levando o número da casa de volta a $r \pmod 6$, mantendo o controle da casa.
- Nas primeiras 2 vezes que Banana jogar em uma casa nova, Ana responde controlando (colocando r) uma casa livre de L_1 e de L_2, sem repetir duas numa mesma coluna e sem usar a coluna do meio.

Isso é sempre possível pois temos 4 casas disponíveis em L_2 e Banana consegue bloquear no máximo 2.

Na 3a vez que Banana jogar em uma casa nova, Ana olha para L_4 e L_5 com o objetivo de controlar as duas colunas dentre C_1–C_4 que não foram usadas no parágrafo anterior. Ela quer tentar controlar uma dessas 4 casas e, como Banana controlou no máximo 3 casas dessas duas linhas até então, isso é sempre possível. Apenas para facilitar a notação, digamos que Ana controle L_4 (o caso L_5 é idêntico)

Após isso, existirá uma única linha (L_5) e uma única coluna (digamos, C_j) que Ana não controlou. As demais 4 linhas e 4 colunas estão controladas por Ana, assim como a diagonal.

Na quarta vez que Banana jogar em uma casa nova, há dois casos:

- Se Banana ainda não jogou em $a(5, j)$, Ana a controla colocando r e garante vitória.
- Se Banana jogou em $a(5, j)$, Ana faz a exceção:
  - Se C_j tiver mais casas preenchidas por Banana que L_5, Ana controla uma casa livre de C_j.
  - Caso contrário, Ana controla uma casa livre de L_5.

Depois disso, haverá apenas uma fila não controlada por Ana (C_j ou L_5) e Ana pode controlar uma casa livre dessa fila (por exemplo, L_5) para garantir a vitória.

Critérios de correção

- **C1:** Escrever que Banana ganha se $6 \mid m$ e/ou que Ana ganha se $6 \nmid m$: 1 ponto
- **C2:** Exibir e explicar estratégia de controle do centro (ou de uma dada casa qualquer) para alguns $m > 5$: 3 pontos

Solução 1 – espelhamento em relação ao centro

- **C3:** Exibir e explicar estratégia de espelhamento, sem exceção: 3 pontos
- **C4:** Identificar e resolver casos de exceção no espelhamento: 3 pontos

Solução 2 – permutação

- **C3':** Exibir e explicar estratégia de permutação, sem exceção: 3 pontos
- **C4':** Identificar e resolver casos de exceção na estratégia de permutação: 3 pontos