OMpD 2024 N2 Fase 2

Samuel de Araújo Brandão

1 de outubro de 2025

Este documento contém soluções para os problemas da OMpD 2024 N2 Fase 2, escritos por mim durante minha preparação para a Olimpíada Internacional de Matemática.

O conteúdo reflete meu próprio entendimento e processo de resolução de problemas. Algumas soluções podem ter sido inspiradas pelo trabalho de outras pessoas ou requerido ajuda externa; nesses casos, a devida atribuição é dada (veja a seção 3).

Se você notar algum erro ou tiver sugestões de melhoria, eu ficaria muito grato em recebê-las em samuelbaraujo19@gmail.com.

Conteúdo

1 Problemas

1. Sejam O, M, P, D algarismos distintos entre si, e distintos de zero, tais que $O < M < P < D$ e a seguinte equação é verdadeira:

$$OMPD \times (OM - D) = MDDMP - OM.$$

(a) Usando estimativas, explique por que é impossível que o valor de O seja maior do que ou igual a 3.

(b) Explique por que O não pode ser igual a 1.

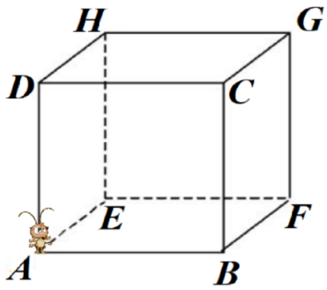
(c) É possível termos M maior do que ou igual a 5? Justifique.

(d) Determine os valores de M, P e D.

Observação: $X_1X_2\dots X_n$ é o número obtido da justaposição dos algarismos $X_1, X_2, \dots, X_n$, nessa ordem. Por exemplo, se $n = 4, X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 2$ e $X_4 = 2$, então $X_1X_2\dots X_n = 2024$.

2. Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo, M, N e P os pontos médios das diagonais AC e BD e do lado AD, respectivamente. Suponha também que $\angle ABC + \angle DCB = 90°$ e que $AB = 6, CD = 8$. Calcule o perímetro do triângulo MNP.

3. Uma barata tonta está inicialmente no vértice A de um cubão $ABCDEFGH$ de aresta medindo 1 metro, conforme a figura ao lado. A cada segundo, a barata anda 1 metro, sempre escolhendo ir para um dos três vértices adjacentes ao vértice que ela está. Por exemplo, após 1 segundo a barata pode parar no vértice B, D ou E.



4. Seja $a_0, a_1, a_2, \dots$ uma sequência infinita de inteiros positivos com as seguintes propriedades:

- a_0 é um inteiro positivo dado;
- Para cada $n \geq 1$ inteiro, a_n é o menor inteiro maior do que a_{n-1} de tal modo que $a_n + a_{n-1}$ é um quadrado perfeito.

Por exemplo, se $a_0 = 3$, então $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 15$ e assim por diante.

(a) Seja T o conjunto dos números da forma $a_k - a_\ell$, com $k \geq \ell \geq 0$ inteiros. Demonstre que, independentemente do valor de a_0, o número de inteiros positivos que não estão em T é finito.

(b) Calcule, em função de a_0, a quantidade de inteiros positivos que não estão em T.

2 Soluções

2.1 Problema 1.

Enunciado do Problema

Sejam O, M, P, D algarismos distintos entre si, e distintos de zero, tais que $O < M < P < D$ e a seguinte equação é verdadeira:

$$OMPD \times (OM - D) = MDDMP - OM.$$

(a) Usando estimativas, explique por que é impossível que o valor de O seja maior do que ou igual a 3.

(b) Explique por que O não pode ser igual a 1.

(c) É possível termos M maior do que ou igual a 5? Justifique.

(d) Determine os valores de M, P e D.

Observação: $X_1X_2 \dots X_n$ é o número obtido da justaposição dos algarismos $X_1, X_2, \dots, X_n$, nessa ordem. Por exemplo, se $n = 4, X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 2$ e $X_4 = 2$, então $X_1X_2 \dots X_n = 2024$.

2.2 Problema 2.

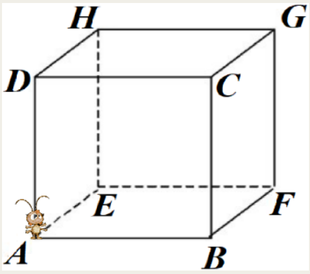
Enunciado do Problema

Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo, M, N e P os pontos médios das diagonais AC e BD e do lado AD, respectivamente. Suponha também que $\angle ABC + \angle DCB = 90°$ e que $AB = 6, CD = 8$. Calcule o perímetro do triângulo MNP.

2.3 Problema 3.

Enunciado do Problema

Uma barata tonta está inicialmente no vértice A de um cubão $ABCDEFGH$ de aresta medindo 1 metro, conforme a figura ao lado. A cada segundo, a barata anda 1 metro, sempre escolhendo ir para um dos três vértices adjacentes ao vértice que ela está. Por exemplo, após 1 segundo a barata pode parar no vértice B, D ou E.



2.4 Problema 4.

Enunciado do Problema

Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos com as seguintes propriedades:

- a_0 é um inteiro positivo dado;
- Para cada $n \geq 1$ inteiro, a_n é o menor inteiro maior do que a_{n-1} de tal modo que $a_n + a_{n-1}$ é um quadrado perfeito.

Por exemplo, se $a_0 = 3$, então $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 15$ e assim por diante.

(a) Seja T o conjunto dos números da forma $a_k - a_\ell$, com $k \geq \ell \geq 0$ inteiros. Demonstre que, independentemente do valor de a_0, o número de inteiros positivos que não estão em T é finito.

(b) Calcule, em função de a_0, a quantidade de inteiros positivos que não estão em T.

3 Referências