Soluções OMpD 2023 N2 Fase 1

Samuel de Araújo Brandão

5 de Setembro de 2025

Uma coleção de soluções para a **OMpD 2023 Nível 2 Fase 1**, inspirada no estilo de Evan Chen. Pode-se encontrar todos os problemas **aqui** e as respostas oficiais **aqui**.

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

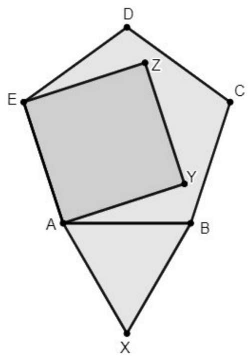
Conteúdos

1 Problemas

1. Um vendedor comprou 1000 bombons pelo preço de cinco por 2 reais. Se ele vender todos esses bombons pelo preço de dois por 1 real, qual será o lucro desse vendedor, em reais?

(A) 100 (B) 200 (C) 300 (D) 400 (E) 500

2. Seja $ABCDE$ um pentágono regular. Externamente a esse pentágono, construímos o triângulo equilátero ABX, e internamente a esse pentágono construímos o quadrado $EAYZ$, conforme a figura a seguir. Qual a medida do ângulo $\angle AXY$?



(A) 9° (B) 19° (C) 21° (D) 39° (E) 51°

3. Dizemos que um inteiro positivo de 3 algarismos é alternante se quaisquer dois algarismos consecutivos possuem paridades distintas. Por exemplo, 123, 703 e 494 são alternantes, mas 231, 772 e 034 não são alternantes. Quantos números alternantes existem?

(A) 200 (B) 225 (C) 250 (D) 275 (E) 300

4. Na multiplicação a seguir, cada quadradinho representa um algarismo não nulo.

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ \times\ \square\ \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{7\ 5\ 9\ 5} \end{array}$$

Qual é a soma dos algarismos nos quadradinhos? (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

5. Na Escola Matemáticos por Diversão, há exatamente 500 estudantes que estão ou no 8° ano ou no 9° ano. Sabemos que exatamente 40% dos estudantes do 9° ano gostam de álgebra, enquanto exatamente 30% dos estudantes do 8° ano não gostam de álgebra. Ao todo, exatamente 234 de todos esses 500 estudantes não gostam de álgebra. Quantos alunos do 8° ano gostam de álgebra?

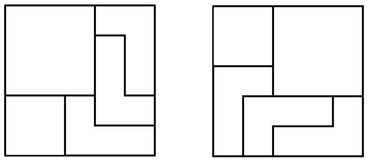
(A) 66 (B) 154 (C) 186 (D) 220 (E) 266

6. Entre os números naturais de 1 até n, inclusive, pelo menos 13 deles são divisíveis por 7, e no máximo 11 deles são divisíveis por 8. Quantos desses números são divisíveis por 9?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

7. Lavi Dopes deseja caminhar sobre o plano. Partindo do ponto A, ele anda 5 metros para o norte, depois 4 metros para o leste, depois 3 metros para o sul, depois 2 metros para o oeste e, finalmente, 1 metro para o norte, chegando assim no ponto B. Podemos afirmar que a distância entre os pontos A e B é: (A) Maior que 2 metros e menor que 2,5 metros. (B) Maior que 2,5 metros e menor que 3 metros. (C) Maior que 3 metros e menor que 3,5 metros. (D) Maior que 3,5 metros e menor que 4 metros. (E) Maior que 4 metros.

8. De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 5×5 com um quadrado de lado 3, um quadrado de lado 2 e três peças idênticas que fazem um L, cada uma ocupando quatro casinhas do tabuleiro? O tabuleiro não pode ser rotacionado, ou seja, as duas possibilidades a seguir devem ser consideradas distintas:



(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 24

9. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de área 24 cm^2. Sejam M e P os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AF}$. Qual é a área do triângulo MPD?

(A) 9 cm^2 (B) 7 cm^2 (C) 6 cm^2 (D) 5 cm^2 (E) 3 cm^2

10. Link está brincando com seus superpoderes recém-adquiridos e decide usar a habilidade "Ascend" para alcançar o topo de um labirinto. Para isso, ele usa tal habilidade para sair do nível onde está e alcançar o chão de alguma sala no nível imediatamente superior, sem passar por paredes que separam salas num mesmo nível horizontal. As figuras 1 e 2 mostram duas maneiras distintas de Link alcançar o topo.

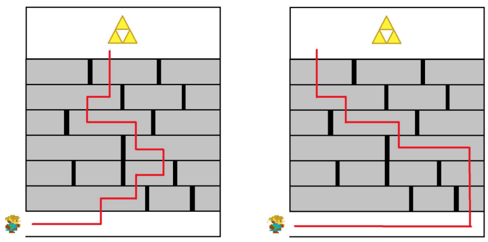


Figura 1 **Figura 2**

Note que em cada maneira levamos em conta apenas quais das 18 salas Link visitou, de modo que duas maneiras são distintas se há ao menos uma sala visitada diferente em cada uma delas. De quantas maneiras Link pode alcançar o topo? (A) 27 (B) 32 (C) 35 (D) 40 (E) 49

11. Luca dirige de sua casa até o aeroporto para ir à Semana Olímpica por meio de uma estrada em linha reta. Ele dirige 35 quilômetros em sua primeira hora, em velocidade constante, mas percebe que se continuar assim, chegará uma hora depois do planejado. Luca decide então pisar no acelerador, aumentando sua velocidade em 15 quilômetros por hora até o fim da viagem, e acaba chegando ao aeroporto meia hora antes do planejado. Qual a distância, em quilômetros, da casa de Luca até o aeroporto?

(A) 140 (B) 175 (C) 210 (D) 245 (E) 280

12. Dizemos que um inteiro positivo $n > 1$ é intrigante se ele é igual a 119 vezes seu maior divisor primo. Por exemplo, 2023 é intrigante, pois $2023 = 119 \times 17$ e 17 é seu maior divisor primo. Quantos inteiros positivos menores que 10000 são intrigantes?

(A) 1 (B) 5 (C) 9 (D) 13 (E) 17

13. Ana, Bernardo, Caíque, Davi e Enzo brincam de Werewolf. Dentre eles, há 3 aldeões, 1 lobo e 1 intruso. As afirmações de cada jogador foram as seguintes:
Ana: Caíque é aldeão.
Bernardo: Davi e Enzo não são ambos aldeões.
Caíque: Enzo é intruso.
Davi: Bernardo não é lobo.
Enzo: Ana e Bernardo não são ambos aldeões.
Sabendo que aldeões nunca mentem, e que o lobo e o intruso podem mentir, mas também podem falar a verdade, pode-se afirmar sempre que: (A) Ana é lobo. (B) Bernardo é intruso. (C) Caíque é aldeão. (D) Davi é lobo. (E) Enzo não é intruso.

14. Inicialmente, temos um tabuleiro 3×3, com um número 0 escrito em cada um dos 9 quadradinhos. Uma operação consiste em escolher 4 quadradinhos que compartilham um mesmo vértice e somar 1 a cada um deles. Por exemplo, podemos realizar a sequência de operações a seguir:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&0\\\hline 1&1&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&0\\\hline 1&2&1\\\hline 0&1&1\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&1\\\hline 1&3&2\\\hline 0&1&1\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&1\\\hline 2&4&2\\\hline 1&2&1\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&1\\\hline 3&5&2\\\hline 1&2&1\\\hline\end{array}$$

Partindo do tabuleiro 3×3 como 9 zeros, qual dos tabuleiros a seguir podemos obter após um número finito de operações?

$$\textbf{(A)} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 14&32&18\\\hline 45&78&33\\\hline 31&56&25\\\hline\end{array} \quad \textbf{(B)} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 10&24&14\\\hline 24&59&43\\\hline 16&35&19\\\hline\end{array} \quad \textbf{(C)} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 11&28&17\\\hline 24&56&32\\\hline 13&25&15\\\hline\end{array} \quad \textbf{(D)} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 12&22&10\\\hline 33&80&47\\\hline 21&58&37\\\hline\end{array} \quad \textbf{(E)} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}$$

15. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AD = BC$, $DB = DC$ e os lados AB e CD são paralelos. Se $AB = 16$ e $CD = 25$, qual é a medida de AD?

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 32 (E) 40

16. Certa vez, tartarugas e zumbis fizeram um rolezinho aleatório. Se cada tartaruga comprasse uma tortuguita e cada zumbi comprasse uma plutonita, eles gastariam ao todo 20 reais a mais do que se cada tartaruga comprasse uma plutonita e cada zumbi comprasse uma tortuguita. Sabendo que há mais tartarugas do que zumbis nesse rolezinho, e que o preço de cada comida é um número inteiro de reais, qual dos valores a seguir não pode ser um possível valor da quantidade de tartarugas a mais do que zumbis.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

17. Sejam a, b, c números reais tais que $a^5 b^8 c^{13} = 32$ e $a^8 b^{13} c^{21} = 128$. Qual é o valor de $ab\,c^2$?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

18. Dizemos que um conjunto de inteiros positivos é triangular se ele possui três elementos distintos que são os lados de um triângulo de área positiva. Por exemplo, $2, 3, 5, 7$ é triangular, pois $3, 5, 7$ são lados de um triângulo de área positiva. Já $1, 2, 4, 6$ não é triangular, pois não é possível escolher três elementos distintos que formem triângulo de área positiva. Seja n um inteiro positivo tal que todo subconjunto de 12 elementos de $1, 2, 3, \ldots, n$ é triangular. Qual é o maior valor possível de n?

(A) 143 (B) 144 (C) 232 (D) 233 (E) 345

19. Quantos inteiros positivos de 10 algarismos, todos eles distintos, são múltiplos de 11111?

(A) 1264 (B) 2842 (C) 3456 (D) 3840 (E) 11111

20. Seja AMD um triângulo acutângulo e escaleno, com $\angle MAD = 48°$, e seja Ω sua circunferência inscrita, isto é, a circunferência tangente aos seus três lados. O ponto B é definido como a interseção das bissetrizes externas de $\angle AMD$ e $\angle ADM$. Seja P um ponto sobre Ω tal que a reta BP é tangente a Ω em P. Qual é a medida do ângulo $\angle MPD$?

(A) 106° (B) 114° (C) 122° (D) 130° (E) 138°

2 Soluções

2.1 Problema 1

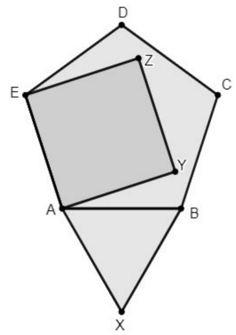
Enunciado

Um vendedor comprou 1000 bombons pelo preço de cinco por 2 reais. Se ele vender todos esses bombons pelo preço de dois por 1 real, qual será o lucro desse vendedor, em reais?
(A) 100 (B) 200 (C) 300 (D) 400 (E) 500

2.2 Problema 2

Enunciado

Seja $ABCDE$ um pentágono regular. Externamente a esse pentágono, construímos o triângulo equilátero ABX, e internamente a esse pentágono construímos o quadrado $EAYZ$, conforme a figura a seguir. Qual a medida do ângulo $\angle AXY$?



(A) 9° (B) 19° (C) 21° (D) 39° (E) 51°

2.3 Problema 3

Enunciado

Dizemos que um inteiro positivo de 3 algarismos é alternante se quaisquer dois algarismos consecutivos possuem paridades distintas. Por exemplo, 123, 703 e 494 são alternantes, mas 231, 772 e 034 não são alternantes. Quantos números alternantes existem?

(A) 200 (B) 225 (C) 250 (D) 275 (E) 300

2.4 Problema 4

Enunciado

Na multiplicação a seguir, cada quadradinho representa um algarismo não nulo.

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ \times\ \square\ \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{7\ 5\ 9\ 5} \end{array}$$

Qual é a soma dos algarismos nos quadradinhos? (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

2.5 Problema 5

Enunciado

Na Escola Matemáticos por Diversão, há exatamente 500 estudantes que estão ou no 8° ano ou no 9° ano. Sabemos que exatamente 40% dos estudantes do 9° ano gostam de álgebra, enquanto exatamente 30% dos estudantes do 8° ano não gostam de álgebra. Ao todo, exatamente 234 de todos esses 500 estudantes não gostam de álgebra. Quantos alunos do 8° ano gostam de álgebra?
(A) 66 (B) 154 (C) 186 (D) 220 (E) 266

2.6 Problema 6

Enunciado

Entre os números naturais de 1 até n, inclusive, pelo menos 13 deles são divisíveis por 7, e no máximo 11 deles são divisíveis por 8. Quantos desses números são divisíveis por 9?
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

2.7 Problema 7

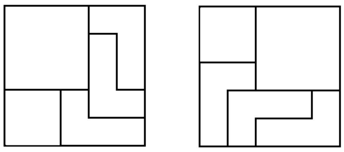
Enunciado

Lavi Dopes deseja caminhar sobre o plano. Partindo do ponto A, ele anda 5 metros para o norte, depois 4 metros para o leste, depois 3 metros para o sul, depois 2 metros para o oeste e, finalmente, 1 metro para o norte, chegando assim no ponto B. Podemos afirmar que a distância entre os pontos A e B é: (A) Maior que 2 metros e menor que 2,5 metros. (B) Maior que 2,5 metros e menor que 3 metros. (C) Maior que 3 metros e menor que 3,5 metros. (D) Maior que 3,5 metros e menor que 4 metros. (E) Maior que 4 metros.

2.8 Problema 8

Enunciado

De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 5×5 com um quadrado de lado 3, um quadrado de lado 2 e três peças idênticas que fazem um L, cada uma ocupando quatro casinhas do tabuleiro? O tabuleiro não pode ser rotacionado, ou seja, as duas possibilidades a seguir devem ser consideradas distintas:



(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 24

2.9 Problema 9

Enunciado

Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de área 24 cm^2. Sejam M e P os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AF}$. Qual é a área do triângulo MPD?
(A) 9 cm^2 (B) 7 cm^2 (C) 6 cm^2 (D) 5 cm^2 (E) 3 cm^2

2.10 Problema 10

Enunciado

Link está brincando com seus superpoderes recém-adquiridos e decide usar a habilidade "Ascend" para alcançar o topo de um labirinto. Para isso, ele usa tal habilidade para sair do nível onde está e alcançar o chão de alguma sala no nível imediatamente superior, sem passar por paredes que separam salas num mesmo nível horizontal. As figuras 1 e 2 mostram duas maneiras distintas de Link alcançar o topo.

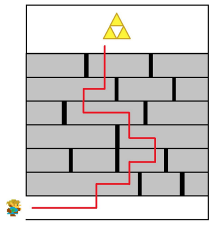


Figura 1

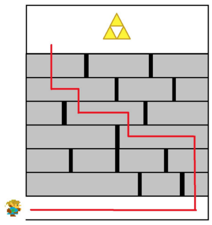


Figura 2

Note que em cada maneira levamos em conta apenas quais das 18 salas Link visitou, de modo que duas maneiras são distintas se há ao menos uma sala visitada diferente em cada uma delas. De quantas maneiras Link pode alcançar o topo? (A) 27 (B) 32 (C) 35 (D) 40 (E) 49

2.11 Problema 11

Enunciado

Luca dirige de sua casa até o aeroporto para ir à Semana Olímpica por meio de uma estrada em linha reta. Ele dirige 35 quilômetros em sua primeira hora, em velocidade constante, mas percebe que se continuar assim, chegará uma hora depois do planejado. Luca decide então pisar no acelerador, aumentando sua velocidade em 15 quilômetros por hora até o fim da viagem, e acaba chegando ao aeroporto meia hora antes do planejado. Qual a distância, em quilômetros, da casa de Luca até o aeroporto?
(A) 140 (B) 175 (C) 210 (D) 245 (E) 280

2.12 Problema 12

Enunciado

Dizemos que um inteiro positivo $n > 1$ é intrigante se ele é igual a 119 vezes seu maior divisor primo. Por exemplo, 2023 é intrigante, pois $2023 = 119 \times 17$ e 17 é seu maior divisor primo. Quantos inteiros positivos menores que 10000 são intrigantes?
(A) 1 (B) 5 (C) 9 (D) 13 (E) 17

2.13 Problema 13

Enunciado

Ana, Bernardo, Caíque, Davi e Enzo brincam de Werewolf. Dentre eles, há 3 aldeões, 1 lobo e 1 intruso. As afirmações de cada jogador foram as seguintes:
Ana: Caíque é aldeão.
Bernardo: Davi e Enzo não são ambos aldeões.
Caíque: Enzo é intruso.
Davi: Bernardo não é lobo.
Enzo: Ana e Bernardo não são ambos aldeões.
Sabendo que aldeões nunca mentem, e que o lobo e o intruso podem mentir, mas também podem falar a verdade, pode-se afirmar sempre que: (A) Ana é lobo. (B) Bernardo é intruso. (C) Caíque é aldeão. (D) Davi é lobo. (E) Enzo não é intruso.

2.14 Problema 14

Enunciado

Inicialmente, temos um tabuleiro 3×3, com um número 0 escrito em cada um dos 9 quadradinhos. Uma operação consiste em escolher 4 quadradinhos que compartilham um mesmo vértice e somar 1 a cada um deles. Por exemplo, podemos realizar a sequência de operações a seguir:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

⇨

1	1	0
1	1	0
0	0	0

⇨

1	1	0
1	2	1
0	1	1

⇨

1	2	1
1	3	2
0	1	1

⇨

1	2	1
2	4	2
1	2	1

⇨

2	3	1
3	5	2
1	2	1

Partindo do tabuleiro 3×3 como 9 zeros, qual dos tabuleiros a seguir podemos obter após um número finito de operações?

(A)

14	32	18
45	78	33
31	56	25

(B)

10	24	14
24	59	43
16	35	19

(C)

11	28	17
24	56	32
13	25	15

(D)

12	22	10
33	80	47
21	58	37

(E)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

2.15 Problema 15

Enunciado

Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AD = BC$, $DB = DC$ e os lados AB e CD são paralelos. Se $AB = 16$ e $CD = 25$, qual é a medida de AD?
(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 32 (E) 40

2.16 Problema 16

Enunciado

Certa vez, tartarugas e zumbis fizeram um rolezinho aleatório. Se cada tartaruga comprasse uma tortuguita e cada zumbi comprasse uma plutonita, eles gastariam ao todo 20 reais a mais do que se cada tartaruga comprasse uma plutonita e cada zumbi comprasse uma tortuguita. Sabendo que há mais tartarugas do que zumbis nesse rolezinho, e que o preço de cada comida é um número inteiro de reais, qual dos valores a seguir não pode ser um possível valor da quantidade de tartarugas a mais do que zumbis.
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

2.17 Problema 17

Enunciado

Sejam a, b, c números reais tais que $a^5b^8c^{13} = 32$ e $a^8b^{13}c^{21} = 128$. Qual é o valor de $ab\,c^2$?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

2.18 Problema 18

Enunciado

Dizemos que um conjunto de inteiros positivos é triangular se ele possui três elementos distintos que são os lados de um triângulo de área positiva. Por exemplo, $2, 3, 5, 7$ é triangular, pois $3, 5, 7$ são lados de um triângulo de área positiva. Já $1, 2, 4, 6$ não é triangular, pois não é possível escolher três elementos distintos que formem triângulo de área positiva. Seja n um inteiro positivo tal que todo subconjunto de 12 elementos de $1, 2, 3, \ldots, n$ é triangular. Qual é o maior valor possível de n?
(A) 143 (B) 144 (C) 232 (D) 233 (E) 345

2.19 Problema 19

Enunciado

Quantos inteiros positivos de 10 algarismos, todos eles distintos, são múltiplos de 11111?
(A) 1264 (B) 2842 (C) 3456 (D) 3840 (E) 11111

2.20 Problema 20

Enunciado

Seja AMD um triângulo acutângulo e escaleno, com $\angle MAD = 48°$, e seja Ω sua circunferência inscrita, isto é, a circunferência tangente aos seus três lados. O ponto B é definido como a interseção das bissetrizes externas de $\angle AMD$ e $\angle ADM$. Seja P um ponto sobre Ω tal que a reta BP é tangente a Ω em P. Qual é a medida do ângulo $\angle MPD$?
(A) 106° (B) 114° (C) 122° (D) 130° (E) 138°

3 Referências