# OBM 2025 - Nível 3
# Critério de Correção - Problema 5

## 1 Enunciado

Seja $\mathcal{P}$ um polígono convexo de $n$ vértices, $n \geq 4$. Podemos particionar $\mathcal{P}$ em triângulos, traçando diagonais que não se intersectam no interior de $\mathcal{P}$. Uma partição desse tipo é chamada de *triangulação*. Um conjunto $X$ de diagonais de $\mathcal{P}$ é dito *obstrutivo* se tem a seguinte propriedade:

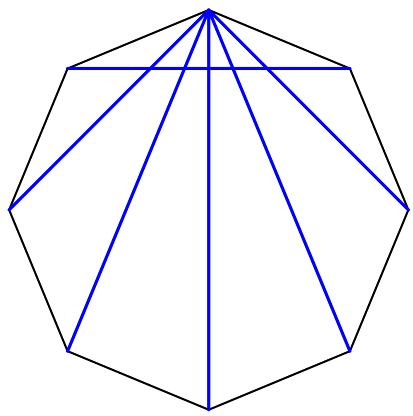
Qualquer triangulação de $\mathcal{P}$ utiliza ao menos uma diagonal que pertence ao conjunto $X$.

Determine, em função de $n$, qual é a menor quantidade possível de elementos de um conjunto obstrutivo.

## 2 Solução

Vamos provar que a menor quantidade possível de elementos de um conjunto obstrutivo é $n-2$.

Para provar que é possível criar um conjunto com $n-2$ diagonais, temos o seguinte exemplo: pegue um vértice qualquer, crie um conjunto com todas as $n-3$ diagonais que saem desse vértice e a diagonal que une seus dois vértices adjacentes.



Tal conjunto é obstrutivo, pois caso em uma triangulação nenhuma das diagonais tenha esse vértice, esse vértice deve pertencer a um triângulo com dois lados do polígono; logo, o terceiro lado será a diagonal que une seus dois vértices adjacentes.

Agora vamos provar por indução que nenhum conjunto com $n-3$ diagonais ou menos é obstrutivo.

Para $n = 4$, temos que $n-3 = 1$, e como um quadrilátero tem 2 diagonais, podemos realizar uma triangulação com a outra diagonal.

Suponha que para $n = k$, todo conjunto com até $k-3$ diagonais não é obstrutivo.

Agora pegue um conjunto com $k-2$ diagonais em um polígono de $k+1$ vértices (chamaremos esses vértices de $P_0, P_1, \ldots, P_k$). Vamos provar que é possível realizar uma triangulação sem usar nenhuma dessas diagonais.

Caso um dos vértices do polígono não pertença a nenhuma diagonal do conjunto, podemos triangular usando todas as diagonais que saem desse vértice.

Caso contrário, cada vértice pertence a pelo menos uma diagonal do conjunto. Temos $k+1$ diagonais da forma $\overline{P_iP_{i+2}}$ (adote $P_{k+1} = P_0$ e $P_{k+2} = P_1$), e como o conjunto possui apenas $k-2$ diagonais, existe alguma diagonal da forma $\overline{P_iP_{i+2}}$ que não pertence ao conjunto.

Se usarmos essa diagonal na triangulação, pelo menos outra diagonal do conjunto não poderá mais ser utilizada, pois o vértice $P_{i+1}$ pertence a alguma diagonal do conjunto. Com isso, teremos no máximo $k-3$ diagonais para realizar uma triangulação no polígono de $k$ vértices separado pela diagonal escolhida. Pela hipótese de indução, essas diagonais não formam um conjunto obstrutivo, e podemos realizar a triangulação sem usar nenhuma das diagonais desse conjunto.

Assim, concluímos que o valor desejado é $n-2$.

## 3 Critério de Correção

1. Exibir um exemplo de conjunto obstrutivo com $n-2$ diagonais ........................ **1 ponto**
2. Provar que esse conjunto é obstrutivo ................................................ **2 pontos**
3. Analisar o caso $n-3$ diagonais com um vértice que não aparece em nenhuma diagonal **2 pontos**
4. Encontrar uma diagonal que permita aplicar a hipótese de indução com uma quantidade correta de diagonais ........................................................................ **3 pontos**
5. Concluir ........................................................................ **2 pontos**