

# Soluções TM<sup>2</sup> 2024A

Samuel de Araújo Brandão

2 de Agosto de 2025

Uma coleção de soluções para a TM<sup>2</sup> 2024 nível A, inspirada no estilo de Evan Chen.

Todas as soluções foram inteiramente escritas por mim, enquanto me preparava para a International Mathematical Olympiad (IMO).

Caso encontre algum erro ou tiver sugestões ou comentários, sinta-se a vontade para entrar em contato!

## Contents

<b>1</b>	<b>Problemas</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Soluções</b>	<b>3</b>
2.1	Problema 1. . . . .	3
2.2	Problema 2. . . . .	4
2.3	Problema 3. . . . .	5
2.4	Problema 4. . . . .	6
<b>3</b>	<b>Referências</b>	<b>7</b>

# 1 Problemas

1. Uma *palavra* é uma sequência de letras maiúsculas do nosso alfabeto (isto é, há 26 possíveis letras). Uma palavra é chamada de *palíndromo* se tem pelo menos duas letras e ela é a mesma palavra se lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, as palavras ARARA e NOON são palíndromos, mas BOBO e AÑÃ não são palíndromos.

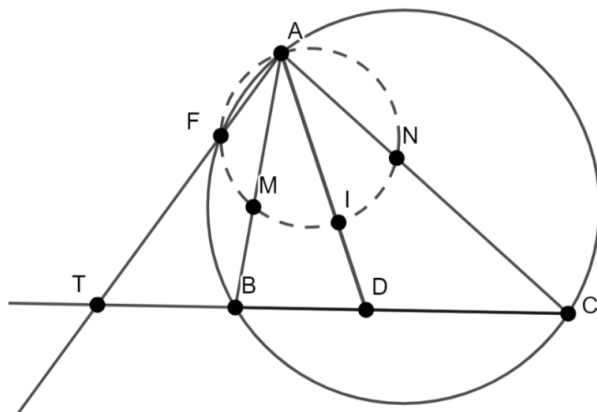
Dizemos que uma palavra  $x$  contém uma palavra  $y$  se existem letras *consecutivas* de  $x$  que juntas formam  $y$ . Por exemplo, a palavra ARARA contém a palavra RARA e também a palavra ARARA, mas não contém a palavra ARRA.

Calcule a quantidade de palavras de 14 letras que contêm algum palíndromo.

2. Mostre que não existem triplas de inteiros não negativos  $(x, y, z)$  satisfazendo a equação

$$x^2 = 5^y + 3^z.$$

3. No triângulo escaleno  $ABC$ , sejam  $I$  o seu incentro e  $D$  o ponto onde  $AI$  intersecta  $BC$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos onde o incírculo de  $ABC$  toca  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Seja  $F$  o segundo encontro do circuncírculo  $(AMN)$  com o circuncírculo  $(ABC)$ . Seja  $T$  o encontro de  $AF$  com o prolongamento de  $BC$ . Seja  $J$  a interseção de  $TI$  com a paralela a  $FI$  que passa por  $D$ . Prove que  $AJ$  é perpendicular a  $BC$ .



**Figure 1:** Uma ilustração do terceiro problema.

*Nota: o incentro de um triângulo é a interseção das bissetrizes internas.*

4. Encontre todos os inteiros positivos  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que  $3ab = 2c^2$  e  $a^3 + b^3 + c^3$  seja o dobro de um número primo.

## 2 Soluções

### 2.1 Problema 1.

#### Enunciado do problema

Uma *palavra* é uma sequência de letras maiúsculas do nosso alfabeto (isto é, há 26 possíveis letras). Uma palavra é chamada de *palíndromo* se tem pelo menos duas letras e ela é a mesma palavra se lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, as palavras ARARA e NOON são palíndromos, mas BOBO e AÑÃ não são palíndromos.

Dizemos que uma palavra  $x$  contém uma palavra  $y$  se existem letras *consecutivas* de  $x$  que juntas formam  $y$ . Por exemplo, a palavra ARARA contém a palavra RARA e também a palavra ARARA, mas não contém a palavra ARRA.

Calcule a quantidade de palavras de 14 letras que contêm algum palíndromo.

Sabe-se que existem  $26^{14}$  possibilidades de palavras de 14 letras no total. Além disso, podemos afirmar também que toda palavra contém no mínimo um palíndromo de 2 ou 3 letras. Isso ocorre porque, ao retirar as primeira e última letras de um palíndromo, será obtido outro palíndromo (caso tenha mais de 2 letras). É possível repetir isso até chegar a  $xx$  (um palíndromo de 2 letras), ou  $xyx$  (um palíndromo de 3 letras).

Existem 26 possíveis letras para a 1ª letra de um não palíndromo de 14 totais letras. Afim de evitar um palíndromo, a 2ª deve ser diferente da 1ª, (25 opções). Pelo mesmo motivo, a 3ª é diferente da 1ª e da 2ª, (24 opções). Esse argumento da 3ª letra será válido para todas as outras 11 letras. Com isso podemos concluir que existem  $26^{14} - 26 \cdot 25 \cdot 24^{12}$  palíndromos no total.

## 2.2 Problema 2.

### Enunciado do problema

Mostre que não existem triplas de inteiros não negativos  $(x, y, z)$  satisfazendo a equação

$$x^2 = 5^y + 3^z.$$

Já que *ímpar* + *ímpar* = *par*,  $5^y + 3^z$  é par, logo  $x$  é par. Se  $x = 2k$ ,  $x^2 = 4k^2$ , logo  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ . Neste caso,  $0 \equiv 5^y + 3^z \equiv 1 + (-1)^z \pmod{4}$ , por conseguinte,  $z$  é um número ímpar. Claramente,  $x \not\equiv 0 \pmod{3}$ , pois

$$x \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 5^y = x^2 - 3^z \Rightarrow 5^y \equiv 0 \pmod{3}$$

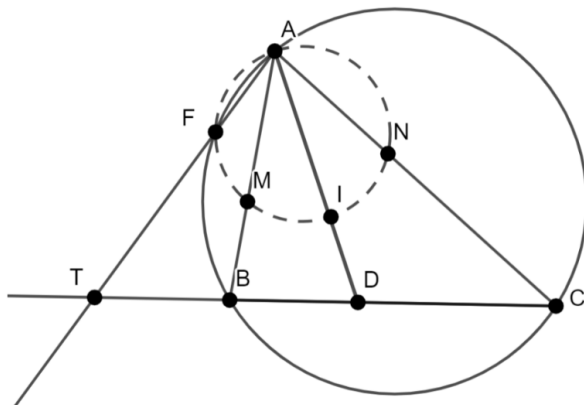
Absurdo! Agora, nos resta apenas  $x \equiv 1 \pmod{3}$  ou  $x \equiv 2 \pmod{3}$ . Perceba abaixo que  $x \not\equiv 1 \pmod{3}$  e  $x \not\equiv 2 \pmod{3}$ , e como já vimos que  $x \not\equiv 0 \pmod{3}$ , não existem soluções para  $x$ .

1. *Caso 1:*  $x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x^2 - 5^y = 3^z \Rightarrow y = 2w$ . Neste caso, podemos afirmar que  $x^2 - 5^{2w} = 3^z \Rightarrow (x + 5^w)(x - 5^w) = 3^z$ . Para que esta igualdade seja verdadeira, ou  $x + 5^w \equiv 0 \pmod{3}$  e  $x - 5^w = 1$ , ou, tanto  $x + 5^w$  quanto  $x - 5^w$  são múltiplos de 3. Evidentemente  $x - 5^w \neq 1$ , pois se  $x - 5^w = 1$ ,  $5^w + 1 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 5^w \equiv 0 \pmod{3}$ , absurdo! Mas é impossível também que tanto  $x + 5^w$  quanto  $x - 5^w$  sejam múltiplos de 3, pois neste caso,  $x \equiv 5^w \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 5^w \equiv 1 \pmod{3}$ , impossibilitando que  $x - 5^w \equiv 0 \pmod{3} \therefore x \not\equiv 1 \pmod{3}$ .
2. *Caso 2:*  $x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow x^2 \equiv 5^w \equiv 1 \pmod{3}$ . Evidentemente  $x + 5^w \not\equiv 0 \pmod{3}$ , logo a única opção é que  $x + 5^w = 1$ , claramente impossível já que tanto  $x$  quanto  $w$  são números inteiros positivos  $\therefore x \not\equiv 2 \pmod{3}$ .

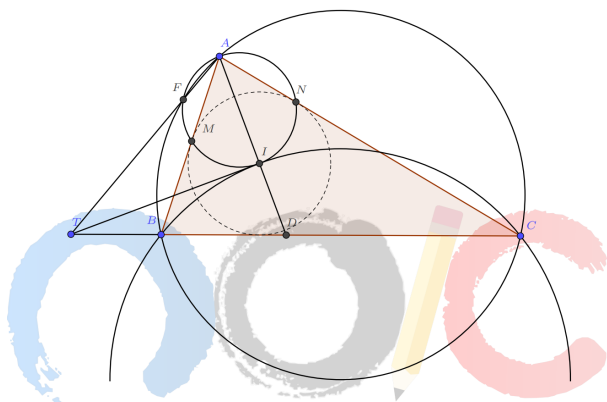
## 2.3 Problema 3.

### Enunciado do problema

No triângulo escaleno  $ABC$ , sejam  $I$  o seu incentro e  $D$  o ponto onde  $AI$  intersecta  $BC$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos onde o incírculo de  $ABC$  toca  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Seja  $F$  o segundo encontro do circuncírculo ( $AMN$ ) com o circuncírculo ( $ABC$ ). Seja  $T$  o encontro de  $AF$  com o prolongamento de  $BC$ . Seja  $J$  a interseção de  $TI$  com a paralela a  $FI$  que passa por  $D$ . Prove que  $AJ$  é perpendicular a  $BC$ .



*Nota: o incentro de um triângulo é a interseção das bissetrizes internas.*



**Figure 2:** Uma figura ilustrando a solução para o terceiro problema. **Fonte.**

$\overline{AI}$  é um diâmetro de  $(AMN)$ , pois  $\overline{AB}$  é tangente a  $(MND)$ , logo  $\angle AMI = 90^\circ$ . Por conseguinte,  $\angle AIT = 90^\circ$  resulta em  $\angle AJ'J = 90^\circ$ , quando  $J'$  é a projeção de  $\overline{AJ}$  sobre o segmento  $\overline{BC}$ . Logo, basta provar que  $\overline{TI}$  é tangente a  $(AMN)$ , o que resultaria em  $\angle AIT = 90^\circ$ .

**Alegação —**  $\overline{TI}$  é tangente às circunferências  $(AMN)$  e  $(BIC)$ .

*Prova.* Já que  $T \in \overline{AF}, \overline{BC}$ , justamente o *Eixo Radical* de, respectivamente,  $(AMN)$ ,  $(ABC)$  e  $(ABC)$ ,  $(BIC)$ , pode-se afirmar que  $T$  é o *Centro Radical* das circunferências  $(ABC)$ ,  $(AMN)$  e  $(BIC)$ .

Seja  $M$  o ponto médio do arco  $\widehat{BC}$ , pelo *Lema do Incentro-Excentro*,  $M$  é o centro da circunferência  $(BIC)$ . O centro das circunferências  $(AMN)$  e  $(BIC)$  estão ambas sobre a reta  $\overline{AI}$ . Para que isso seja possível,  $(AMN)$  e  $(BIC)$  devem ser tangentes em  $I$ . Já que  $T$  é o *Centro Radical*,  $\overline{TI}$  é tangente à  $(AMN)$ , logo  $\angle AJC = 90^\circ$ .  $\square$

## 2.4 Problema 4.

### Enunciado do problema

Encontre todos os inteiros positivos  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que  $3ab = 2c^2$  e  $a^3 + b^3 + c^3$  seja o dobro de um número primo.

### 3 Referências

Só foi possível escrever este documento graças a ajuda e inspiração dos seguintes:

- [1] NOIC - Núcleo Olímpico de Iniciação Científica. *Soluções do  $TM^2$  Nível A*, 2025.  
Disponível em: [https://noic.com.br/wp-content/uploads/2025/03/Solucoes\\_  
do\\_TM2\\_2024\\_Nivel\\_A.pdf](https://noic.com.br/wp-content/uploads/2025/03/Solucoes_do_TM2_2024_Nivel_A.pdf)