Редакторы: ***Писарчик Елизавета, Колбеко Влада, Галуха Павел, Наривончик Александр, Мацуев Николай, Воробей Дарья, Емельяненко Евгений.***

♥ mеmы by Анастасия Рачинская ♥

Содержание

№1. Матрицы и их классификация.

Определение

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица вида

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая $m \times n$ элементов a_{ij} $(i = \overline{1,\ m}, j = \overline{1, n})$, расположенных на пересечении m строк и n столбцов.

Элементы матрицы заключаются в круглые или квадратные скобки, иногда в двойные прямые. Применяется также компактная форма записи матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$.

Каждый элемент a_{ij} матрицы A имеет два индекса. Первый индекс (i) означает номер строки, второй (j) – номер столбца, на пересечении которых расположен элемент.

Две матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{k\times l}$ называются **равными**, если их размеры одинаковы и соответствующие элементы равны, т.е. $m = k$, $n = l$ и $a_{ij} = b_{ij}$.

- Матрица, содержащая одну строку, называется **матрицей-строкой** или **вектором-строкой**:

$A_{1\times n} = (a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \;\; a_{1n})$

- Матрица, содержащая один столбец, называется **матрицей-столбцом** или **вектором-столбцом**:

$$A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Матрица называется **нулевой**, если все её элементы равны нулю, т.е. $a_{ij} = 0$.

$$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Матрица A называется **квадратной**, если число её строк равно числу столбцов, т.е. $m = n$. При этом говорят, что A – квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Выделяют следующие **виды квадратных матриц**:

- **Диагональная** – матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Скалярная** – матрица, у которой все элементы главной диагонали равны между собой:

$$C = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

- **Единичная** – это диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Верхняя треугольная** – это матрица, у которой ниже главной диагонали все элементы равны нулю:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Нижняя треугольная** – это матрица, у которой выше главной диагонали все элементы равны нулю:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Симметрическая** (**симметричная**) – это матрица, у которой элементы симметричные относительно главной диагонали, равны, т.е.

$$a_{ij} = a_{ji},\, i, j = \overline{1, n}\,, i \neq j$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \\ -5 & 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ – симметрическая матрица.

Матрица вида

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

где числа $a_{11},\ a_{22},\ \dots,\ a_{rr}$ $(r \le \min\{m,\ n\})$ отличны от нуля, называется **трапециевидной**.

№2. Операции над матрицами и их свойства. Многочлены от матриц.

Суммой матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ одного и того же размера называется матрица $C_{m\times n}$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B, т.е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1, n}.$$

При этом используется обозначение: $C = A + B$.

Свойства операции сложения

1. Коммутативность: $A + B = B + A$.
2. Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. Существует матрица O, такая что $A + O = O + A = A$. Очевидно, что $O-$ нулевая матрица.
4. Для любой матрицы A существует противоположная матрица $- - A$, такая что $A + (-A) = (-A) + A = O$.

Очевидно, что если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.

- **Произведением матрицы** $A_{m\times n} = (a_{ij})$ **на произвольное число** $\alpha \in R$ называется матрица $C_{m\times n}$ того же размера, что и матрица A, элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A, умноженным на это число α:

$$C_{m\times n} = \alpha A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства операции умножения матрицы на число

1. $1 \cdot A = A;\quad -1 \cdot A = -A;\quad 0 \cdot A = O,$ где $O-$нулевая матрица.
2. $(\alpha\beta) \cdot A = \alpha(\beta A)$ для $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$ для $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
4. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$ для $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

- Действие **умножения двух матриц $A \cdot B$** определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A (т.е. длина её строк) равно числу строк матрицы B (т.е. длине её столбцов). Другими словами, произведение $A_{m\times n} \cdot B_{l\times k}$ существует тогда и только тогда, когда $n = l$. При этом говорят, что матрица A **согласована** с матрицей B.

Но если матрица A согласована с матрицей B, то это не означает, что матрица B согласована с матрицей A.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется матрица

$$C_{m\times k} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = (c_{ij}),\ i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1, n},$$

элементы которой вычисляются по правилу:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}\ (i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1, n}),$$

т.е. элемент c_{ij} равен алгебраической сумме произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B (так называемое произведение «строки на столбец»).

Свойства операции умножения матриц

1. Если произведение матриц определено, то для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ верно

$$(\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha (AB).$$

2. Дистрибутивность относительно сложения: если имеют смысл выражения $A \cdot (B + C)$ и $(A + B) \cdot C$, то

$$A \cdot (B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B) \cdot C = AC + BC.$$

3. Ассоциативность: если определены произведения AB и $(AB) \cdot C$, то определены BC и $A \cdot (BC)$, и верно равенство

$$(AB)\,C = A\,(BC)\,.$$

4. Если A – матрица размера $m \times n$, E_m и E_n – единичные матрицы порядков m и n соответственно, то

$$AE_n = E_m A = A.$$

5. В общем случае операция умножения матриц некоммутативна, т.е. $AB \neq BA$, даже если определены оба произведения.

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются **коммутирующими** (или **перестановочными**). Коммутирующими могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка. Например, единичная матрица перестановочна с любой другой матрицей того же порядка: $AE = EA = A$.

Квадратную матрицу A можно **возводить в целую неотрицательную степень**:
$A^0 = E$, где E – единичная матрица того же размера, что и матрица A;
$A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \ldots, \quad A^n = A^{n-1} \cdot A.$

Определение

Многочленом $P_n(A)$ n-ной степени от квадратной матрицы A называется матрица

$$P_n(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_nE,$$

где E— единичная матрица того же размера, что и матрица A.

- Матрица A^T называется **транспонированной** для матрицы A, а переход от A к A^T – **транспонированием**, если каждую строку матрицы A записать в виде столбца матрицы A^T в том же порядке. При транспонировании матрица-строка переходит в матрицу-столбец, и наоборот:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A^{\mathrm{T}}_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования

1. При транспонировании транспонированной матрицы получается исходная матрица, т.е. $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$.
2. $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.
3. $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$, для $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

№3. Элементарные преобразования матриц и их свойства.

Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицы называются следующие операции:

1. Умножение строки (столбца) матрицы на любое число, не равное нулю.

2. Прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой её строки (столбца), умноженной на одно и то же число.

3. Перестановка местами двух строк (столбцов) матрицы.

Перестановка строк (столбцов) матрицы является следствием первых двух элементарных преобразований.

- Если матрица B получается из матрицы A в результате применения к матрице A одного или нескольких элементарных преобразований строк или (и) столбцов, то говорят, что матрица A **эквивалентна** матрице B и пишут $A \sim B$.

Свойства элементарных преобразований

1. Если $A \sim B$, то $B \sim A$.

2. $A \sim A$.

3. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

- Используя элементарные преобразования, любую ненулевую матрицу $A_{m\times n}$ можно привести к трапециевидной матрице, у которой элементы $a_{ii} = 1$ ($1 \le i \le r \le \min\{m, n\}$), т.е. $a_{11} = \ldots = a_{rr} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют **канонической**.

№4. Определитель матрицы, его свойства и способы вычисления.

Определителем матрицы A n-го порядка (или определителем n-го порядка) называется сумма всех различных членов определителя этой матрицы.

Определитель матрицы A обозначают $\det A$, $|A|$ или элементы матрицы заключают в прямые скобки:

$$\det \mathrm{A} = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Определитель также называют детерминантом матрицы.
- Определитель существует *только* для квадратных матриц.

Способы вычисления определителя:

1. Определитель матрицы *1-го* порядка равен единственному элементу матрицы.
2. Определитель матрицы *2-го* порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

3. Определитель матрицы *3-го* порядка вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

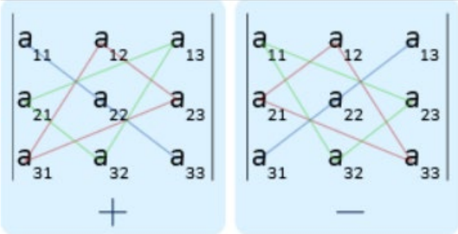
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Структуру этого выражения легко запомнить, если воспользоваться *правилом «треугольников» или правилом Саррюса*.

Правило «треугольников»:

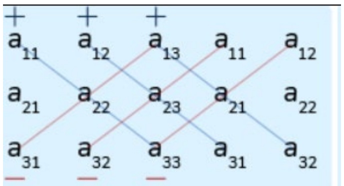
С «плюсом» берут три произведения – произведения элементов главной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, одна из сторон каждого из которых параллельна главной диагонали.

Аналогично, с «минусом» берут произведения элементов побочной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, одна из сторон каждого из которых параллельна побочной диагонали.



Правило Саррюса:

Приписывают справа первый и второй столбцы матрицы. С «плюсом» берут произведения элементов главной диагонали, а также элементов, расположенных на двух параллельных ей прямых. С «минусом» берут произведения элементов побочной диагонали и элементов двух прямых, параллельных побочной диагонали.



4. Определитель *диагональной* матрицы равен произведению всех её диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

5. Определитель *треугольной* матрицы (верхней или нижней) равен произведению всех её диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

Свойства определителей:

1. Определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы: $\det A = \det A^T$.

2. Определитель меняет знак на противоположный при перестановке каких-либо двух его строк (столбцов).

3. Общий множитель какой-либо строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя.

4. Если определитель содержит нулевую строку (столбец), то он равен нулю.

5. Если определитель содержит две одинаковых строки (столбца), то он равен нулю.

6. Если определитель содержит две пропорциональные строки (столбца), то он равен нулю.

7. Если элементы i-той строки определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, у одного из которых i-тая строка составлена из первых слагаемых, а у другого из вторых.

8. Определитель не меняется, если к какой-либо его строке прибавить другую строку, умноженную на любое число.

9. Определитель не меняется, если к какой-либо его строке прибавить линейную комбинацию других его строк.

10. Если какая-либо строка определителя есть линейная комбинация других его строк, то определитель равен нулю.

Свойства 7-10 аналогично справедливы для столбцов.

11.

- **Минором** M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A порядка n называется определитель порядка $n-1$, полученный из определителя матрицы A после вычёркивания в нем i-той строки и j-того столбца.
- **Алгебраическим дополнением** (или **адъюнктом**) элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число, равное $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij}.

Теорема Лапласа:

Определитель матрицы A равен сумме всех произведений элементов какой-либо его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения этих элементов:

$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ - **формула разложения определителя по i-той строке**.

$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$ - **формула разложения определителя по j-тому столбцу**.

Формулами Лапласа очень удобно пользоваться, если получить в строке (столбце), по которой ведётся разложение определителя, как можно больше нулей, воспользовавшись свойствами определителя.

12. Теорема аннулирования:

Сумма всех произведений элементов одной строки определителя на соответствующие алгебраические дополнения другой его строки равна нулю:

$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0,\ i \neq k.$

Аналогичное свойство справедливо для столбцов.

13. Определитель произведения двух матриц A и B одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц:

$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$

№5. Обратная матрица: определение, свойства, способы вычисления. Теорема существования и единственности обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется **обратной** для матрицы A, если выполняется равенство $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица порядка n.

Матрица A называется **невырожденной** (или неособенной), если её определитель отличен от нуля: $\det A \neq 0$ (или $|A| \neq 0$), и называется **вырожденной**, если её определитель равен нулю: $\det A = 0$.

Теорема (о необходимости и достаточности): для того чтобы для матрицы A существовала обратная матрица A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.

Теорема (о существовании и единственности): всякая квадратная невырожденная матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1}.

Доказательство.

Предположим, что матрица A имеет две обратные матрицы $A^{-1}{}_1$ и $A^{-1}{}_2$. Тогда по определению обратной матрицы и в соответствии со свойствами умножения матриц

$A^{-1}{}_1 = A^{-1}{}_1 \cdot E = A^{-1}{}_1 \cdot (A \cdot A^{-1}{}_2) = (A^{-1}{}_1 \cdot A) \cdot A^{-1}{}_2 = E \cdot A^{-1}{}_2 = A^{-1}{}_2.$ ■

Свойства обратных матриц:

1. Матрица, обратная к обратной матрице, совпадает с исходной:

$(A^{-1})^{-1} = A.$

2. Матрица, обратная к произведению двух невырожденных матриц, равна произведению их обратных, взятых в противоположном порядке:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство.

Покажем, что матрица $B^{-1}A^{-1}$ является обратной к матрице AB, используя определение.

$B^{-1}A^{-1} \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)\,B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$

Аналогичный результат получается при умножении $B^{-1}A^{-1}$ на AB слева. ■

3. $(An)^{-1} = (A^{-1})n$.

4. Операции обращения и транспонирования можно менять местами:

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Доказательство.

$(AA^{-1})^T = E^T, \;\Leftrightarrow\; (A^{-1})^T A^T = E, \;\Rightarrow\; (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. ■

5. Определитель матрицы, обратной к матрице A, равен величине, обратной определителю матрицы A:

$$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}.$$

Вычисление обратной матрицы с помощью *присоединённой матрицы*:

1. Вычислить определитель матрицы A: $\det A$.
Если $\det A = 0$, то обратная матрица не существует.

2. Если $\det A \neq 0$ (матрица невырожденная), то построить присоединенную (союзную) матрицу C:

$$C = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам матрицы A.

3. Составить обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C.$$

Вычисление обратной матрицы *методом Гаусса* (с помощью элементарных преобразований):

- **Теорема***:* всякая невырожденная квадратная матрица A порядка n с помощью элементарных преобразований строк может быть преобразована в единичную матрицу E порядка n.
- **Теорема (о нахождении обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк)**: если к единичной матрице порядка n применить те же элементарные преобразования **только строк** и в том же порядке, с помощью которых невырожденная матрица A порядка n приводится к единичной, то полученная при этом матрица будет обратной к матрице A.
- *Правило построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований*: матрицу $(A \mid E)$ с помощью *элементарных преобразований над строками* привести к виду $(E \mid B)$, тогда в силу единственности обратной матрицы матрица $B = A^{-1}$.

№6. Крамеровские системы линейных алгебраических уравнений. Методы решения (матричный метод, метод Крамера, метод Гаусса).

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты системы, b_i – свободные члены.

Если все свободные члены равны нулю, то системы называется *однородной*, если хотя бы один не равен нулю – *неоднородной*.

Матрица A называется *матрицей системы* и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если X – столбец неизвестных и B – столбец свободных членов, то систему линейных уравнений можно представить в матричном виде:

$$\boldsymbol{A \cdot X = B}$$

Решением системы называется совокупность $x_1, \ldots, x_n$, которая обращает каждое уравнение в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*, если не имеет – *несовместной*.

Система линейных уравнений называется *крамеровской*, если в ней число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель её матрицы не равен нулю.

Методы решения:

1. Матричный метод

$$\boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}$$

2. Метод Крамера

Пусть D_j – определитель, получаемый из определителя матрицы A путём замены j-того столбца столбцом свободных членов.

Тогда решение системы можно найти по *формулам Крамера*:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{D_1}{|A|}, x_2 = \frac{D_2}{|A|}, \dots, x_n = \frac{D_n}{|A|}}$$

3. Метод Гаусса

Теорема (лежит в основе метода): если к *уравнениям* системы применить элементарные преобразования, то получится система, эквивалентная исходной. Выполнять преобразования можно **только** со строками.

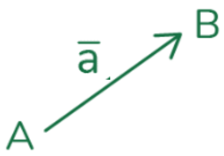
Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Суть метода Гаусса: привести расширенную матрицу системы (A | B) с помощью элементарных преобразований строк к виду (E | C).

Матричный метод и метод Крамера применимы *только к крамеровским* системам линейных уравнений. Метод Гаусса, в свою очередь, применим к *любым* линейным системам – и к тем системам, в которых число уравнений m не совпадает с числом неизвестных n, и к тем, в которых $m = n$ и определитель системы $|A| = 0$.

№7. Векторы. Линейные операции над векторами и их свойства.



Вектор – направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B.

Два вектора, лежащих на одной прямой или параллельных одной прямой, называются *коллинеарными*.

Векторы, лежащие в одной плоскости или параллельные одной плоскости, называются *компланарными*.

Вектор $-\vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \left(-\vec{b}\right) = 0$, называется *противоположным*.

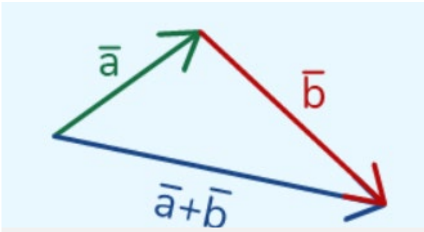
Если точки A и B совпадают, то вектор называется *нулевым*. Его длина равна нулю, а направление не определено (произвольно).

Вектор $\vec{a}$, длина которого равна единице: $|\vec{a}| = 1$, называется *единичным*. Чаще всего единичный вектор обозначают $\vec{e}$.

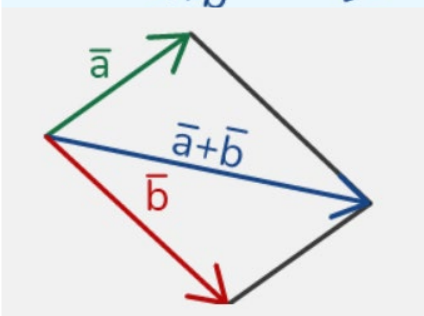
Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\overrightarrow{a^0}$.

<u>*Линейные операции над векторами*</u>:

1. Сложение векторов



a) **Правило треугольника**: Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$, проведённый из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$, если конец вектора $\vec{a}$ и начало вектора $\vec{b}$ совмещены.

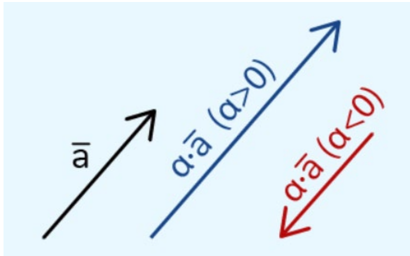


b) **Правило параллелограмма**: совмещают начало вектора $\vec{a}$ с началом вектора $\vec{b}$, достраивают полученную фигуру до параллелограмма, тогда вектор, направленный по диагонали параллелограмма и имеющий общее начало с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и будет их суммой $\vec{a} + \vec{b}$.

<u>*Свойства*</u>:

1) Сложение векторов ассоциативно
2) Сложение векторов коммутативно
3) Сумма с нулевым вектором даёт тот же вектор
4) Сумма с противоположным вектором даёт нулевой вектор

2. Умножение вектора на число



Произведением вектора $\vec{a}$ на $\alpha \in R$ называется вектор $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$.

Свойства:

1) Умножение вектора на число ассоциативно
2) Умножение вектора на единицу не изменяет его
3) Умножение вектора на ноль даёт нулевой вектор
4) Умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел
5) Умножение числа на вектор дистрибутивно относительно сложения векторов

№9. Линейная зависимость/независимость векторов. Базис. Разложение вектора по базису. Координаты вектора.

Линейной комбинацией n векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется вектор вида: $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – некоторые действительные числа, называемые коэффициентами линейной комбинации.

Если вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ *разложен* по векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$.

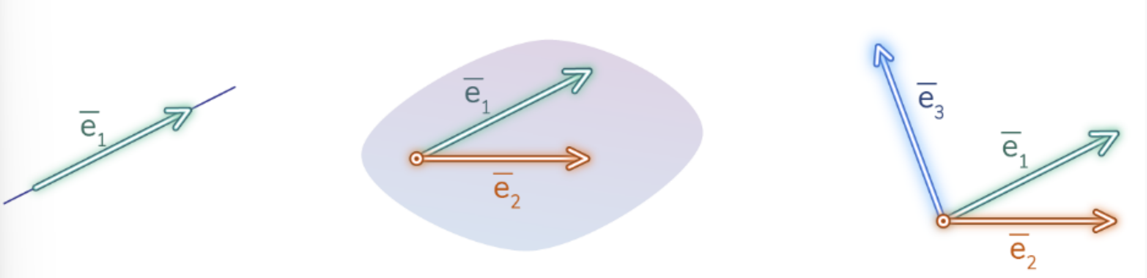
$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}, \alpha_i \in R, i = \overline{1, n}$$

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существуют действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, хотя бы одно из которых не равно нулю, такие, что их линейная комбинация равна нулевому вектору.

Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется *линейно независимой*, если их линейная комбинация равна нулевому вектору тогда и только тогда, когда все коэффициенты линейной комбинации равны нулю.

Базисом векторного пространства называют его максимальную линейно независимую систему векторов.

Векторное пространство	Обозначение	Базис
Прямая	$\mathbb{R}$	Ненулевой вектор
Плоскость	$\mathbb{R}^2$	Два неколлинеарных вектора
Пространство	$\mathbb{R}^3$	Три некомпланарных вектора



Любой вектор $\vec{a}$ векторного пространства однозначно раскладывается по базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$, а коэффициенты этого разложения называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в данном базисе.

$\boldsymbol{\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}}$ – разложение вектора

$\boldsymbol{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$ – координаты вектора

Свойства линейных операций над векторами в координатах:

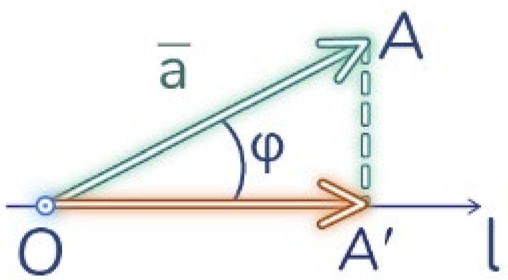
1) При сложении двух векторов их соответствующие координаты складываются
2) При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число

№8. Системы координат на плоскости и в пространстве.

Базис называют *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и их длины равны единицам.

Декартовой (прямоугольной) системой координат (кратко ДСК) называется совокупность фиксированной точки O – начала координат – и ортонормированного базиса.

Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на ось $\vec{l}$:



$$\text{пр}_l \bar{a} = |\bar{a}|\, cos\varphi.$$

Свойства проекции:

1) При сложении векторов их проекции складываются
2) При умножении вектора на число его проекция умножается на это число

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ – это косинусы углов, которые вектор образует с положительными полуосями координат.

Орт вектора $\vec{a}$ – вектор, координатами которого будут направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

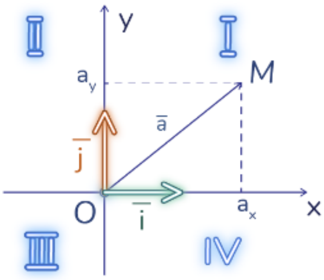
Радиус-вектором точки M называется вектор $\overrightarrow{OM}$, имеющий начало в точке O и конец в точке M. Координаты радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ – координаты точки M.

Условие коллинеарности двух векторов в координатах: если два вектора коллинеарны, то их координаты пропорциональны.

Деление отрезков в данном отношении: точка M делит отрезок AB отношении λ, если точка M лежит на прямой, соединяющей точки A и B и при этом вектор $\overrightarrow{AM}$ равен произведению числа λ на вектор $\overrightarrow{MB}$.

$$\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$$

ДСК на плоскости:



- разложение и координаты вектора $\vec{a}$:

$$x = \text{пр}_{\bar{i}}\bar{a} = a_x,$$

$$y = \text{пр}_{\bar{j}}\bar{a} = a_y.$$

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}.$$

- длина (модуль) вектора $\vec{a}$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$cos^2\alpha + cos^2\beta = 1.$$

- орт вектора $\vec{a}$:

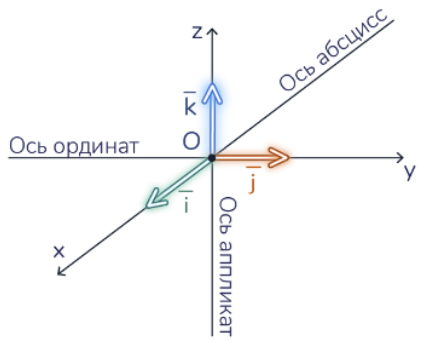
$$\bar{a}^0 = (cos\alpha, cos\beta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

- координаты точки M, делящей отрезок AB в данном отношении λ:

$$x_M = \frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},$$

$$y_M = \frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}.$$

ДСК в пространстве:



- разложение и координаты вектора $\vec{a}$:

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad \bar{a} = (x, y, z)$$

$$x = np_{\bar{i}}\bar{a} = a_x,$$

$$y = np_{\bar{j}}\bar{a} = a_y,$$

$$z = np_{\bar{k}}\bar{a} = a_z.$$

- длина (модуль) вектора $\vec{a}$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

$$cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

- орт вектора $\vec{a}$:

$$\bar{a}^0 = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, , \, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, , \, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

- координаты точки *M*, делящей отрезок *AB* в данном отношении λ:

$$x_M = \frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},$$

$$y_M = \frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},$$

$$z_M = \frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}.$$

- расстояние между точками *A* и *B*:

$$AB = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (\, z_B - z_A)^2}.$$

№10. Скалярное произведение векторов, его свойства. Скалярное произведение в координатной форме. Физический смысл скалярного произведения.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (скаляр), обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$ и равное произведению модулей этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\varphi$$

Формула скалярного произведения векторов может принимать вид:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$$

Косинус угла между двумя векторами: $\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$.

<u>Свойства</u>:

1) Скалярное произведение векторов коммутативно

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}.$$

2) Числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения

$$(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

3) Скалярное произведение векторов дистрибутивно

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right) = \bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

4) Критерий ортогональности двух векторов:

$$\bar{a}\perp\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} = 0.$$

5) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$\bar{a}\cdot\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2.$$

6) Скалярное произведение векторов положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда угол между векторами острый (тупой):

$$\bar{a}\cdot\bar{b} > 0 \Leftrightarrow 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{2},$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} < 0 \Leftrightarrow \tfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi.$$

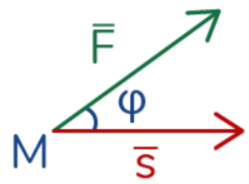
Скалярное произведение векторов в координатах:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Косинус угла между двумя векторами в координатах:

$$\cos\left(\widehat{\bar{a}\bar{b}}\right) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}}.$$

<u>Физический смысл скалярного произведения:</u>



$A = \bar{F} \cdot \bar{s}$ или $A = |\bar{F}|\,|\bar{s}|\,cos\ \varphi.$

A – работа, скалярная величина;

$\bar{s}$ – вектор перемещения материальной точки;

$\bar{F}$ – вектор постоянной силы, действующей на эту точку;

φ – угол силы $\bar{F}$ действующий к перемещению $\bar{s}$.

№11. Векторное произведение векторов, его свойства, геометрический смысл. Векторное произведение в координатной форме.

Упорядоченная **тройка** некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется **правой,** если при наблюдении из конца третьего вектора $\vec{c}$ движение от первого ко второму совершается против часовой стрелки.

Результат **векторного произведения** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – новый **вектор** $\vec{c}$. Причём новый вектор удовлетворяет *условиям*:

1. $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ— угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$
2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен и вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$.
3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая тройка векторов.

<u>Свойства векторного произведения</u>:

1. Антикоммутативность: при перестановке множителей знак результата меняется на противоположный: $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}.$
2. Ассоциативность:

$$(\alpha\bar{a}) \times \bar{b} = \alpha \cdot (\bar{a} \times \bar{b}),\ \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\bar{a} \times (\alpha\bar{b}) = \alpha \cdot (\bar{a} \times \bar{b}),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Дистрибутивность:

$$(\bar{a}+\bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c},$$

$$\bar{a} \times (\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}.$$

4. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Отметим, что если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, то координаты вектора $\vec{c}$ можно получить с помощью *определителя матрицы*:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

<u>Геометрический смысл</u>: модуль векторного произведения сторон параллелограмма равен его *площади*:

№12. Смешанное произведение векторов, его свойства, геометрический смысл. Смешанное произведение в координатной форме.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется **число**, которое получается в результате скалярного произведения вектора на векторное произведение. Его можно обозначать:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$$

<u>*Свойства смешанного произведения*</u>:

1. Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0.$$

2. Круговая перестановка 3 сомножителей смешанного произведения не меняет знака произведения, перестановка же двух соседних меняет знак на противоположный.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

Если три вектора заданы своими координатами, то их скалярное произведение можно найти с помощью *определителя матрицы*:

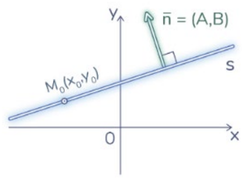
$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Геометрический смысл: модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$\left|\left(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\right)\right| = V.$$

№13. Прямая линия на плоскости. Различные уравнения прямой на плоскости.

Положение **прямой на плоскости** определяется какой-либо *точкой* $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на прямой, и ненулевым *нормальным вектором* $\vec{n}$:



Нормальный вектор $\vec{n}$ – вектор, перпендикулярный заданной прямой, $\vec{n} = (A, B)$.

Направляющий вектор $\vec{s}$ – вектор, имеющий такое же направление, что и прямая, $\vec{s} = (m, n)$.

Точка $M(x, y)$ – текущая точка на прямой.

1. Уравнение прямой, заданной *точкой и нормальным вектором*:

$$A\,(x - x_0) + B\,(\,y - y_0\,) = \ 0.$$

2. *Общее* уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0.$$

Частные случаи:

- $C = 0$: $Ax + By = 0$ – прямая проходит через начало координат.
- $B = 0$: $Ax + C = 0$ – прямая параллельна оси Oy.
- $A = 0$: $By + C = 0$ – прямая параллельна оси Ox.
- $B = 0$, $C = 0$: $Ax = 0$ – прямая совпадает с Oy.
- $A = 0$, $C = 0$: $By = 0$ – прямая совпадает с Ox.

3. Уравнение прямой *в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

4. *Векторно-параметрическое* уравнение:

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{s}$

5. *Векторно-параметрическое* уравнение *в координатах*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

6. Уравнение прямой *с заданным угловым коэффициентом*:

$y = kx + b$

7. Уравнение прямой, *проходящей через точку*:

$y - y_0 = k(x - x_0)$

8. Уравнение прямой, *проходящей через точку и заданный направляющий вектор*:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$$

9. Уравнение прямой, *проходящей через две точки*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

№14. Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой s: $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Две прямые s_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и s_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ на плоскости могут:

- пересекаться: $$\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2 \qquad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$
- быть параллельными: $$\bar{n}_1 = (A_1, B_1) \quad \bar{n}_2 = (A_2, B_2) \qquad \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$
- совпадать: $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$
- быть перпендикулярными: $$\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \qquad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

Угол φ между пересекающимися прямыми s_1 и s_2 – величина наименьшего из смежных углов, образованных этими прямыми.

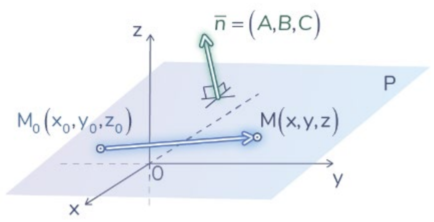
Угол между пересекающимися прямыми:

$$\bar{n}_1=(A_1,B_1) \quad \bar{n}_2=(A_2,B_2) \quad \varphi=\left(\widehat{s_1,s_2}\right)=\left(\widehat{\bar{n}_1,\bar{n}_2}\right)$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

№15. Плоскость в пространстве. Различные уравнения плоскости. Уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором.

Положение **плоскости в пространстве** определяется какой-либо *точкой* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей в этой плоскости, и ненулевым *нормальным вектором* $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярным к данной плоскости.



1. Уравнение плоскости, проходящей через *заданную точку с заданным нормальным вектором*:

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0.$$

2. *Общее* уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Частные случаи:

- $D = 0$:

L: $Ax + By + Cz = 0 \Rightarrow L$ проходит через начало координат.

- $C = 0$, $D = 0$ (аналогично для $A = 0$ и $B = 0$ вместо C):

L: $Ax + By = 0 \Rightarrow L$ параллельна Oz.

- $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ (аналогично для $A = 0$, $B = 0$ и $A = 0$, $C = 0$ вместо B, C):

L: $Ax = 0 \Rightarrow L$ совпадает с xOy.

3. Уравнение плоскости, проходящей *через 3 заданные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

4. Уравнение плоскости *в отрезках*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

№16. Взаимное расположение плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

Пусть заданы плоскости P_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и P_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

- Плоскости *параллельны*:

$$P_1 || P_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} || \overline{n_2} \Leftrightarrow [\overline{n_1}, \overline{n_2}] = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

- Плоскости *перпендикулярны*:

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow (\overline{n_1}, \overline{n_2}) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов. Он находится как угол между их нормальными векторами:

$$\mathrm{Cos}\varphi = \cos\ \left(\overline{n_1} \stackrel{\wedge}{;} \overline{n_2}\right) = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} =$$

$$= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P: $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = d(M_0;P) = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p| =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

№17. Прямая в пространстве. Различные уравнения прямой в пространстве.

Прямая в пространстве L однозначно определена, если известны:

1) точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую она проходит, и ненулевой *направляющий вектор* $\vec{l} = (m, n, p)$, параллельный данной прямой

2) две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ этой прямой.

1. *Каноническое* уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

2. *Векторно-параметрическое* уравнение прямой:

- векторная форма:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{s}$$

- координатная форма:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \text{ , } t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

3. Уравнение прямой, проходящей *через две заданные точки*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4. Уравнение прямой, заданной *как пересечение двух плоскостей* (*общее* уравнение прямой в пространстве):

$$L : \begin{cases} P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \nparallel \overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

В таком случае *направляющий вектор* $\vec{l}$ может быть представлен в виде:

$$\bar{l} = [\overline{n}_1, \overline{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

№18. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Две прямые L_1 и L_2 на плоскости могут:

- быть параллельными
- пересекаться
- скрещиваться

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; L_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

1) Условие *параллельности* двух прямых:

$$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \overline{l_1} \| \overline{l_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

2) Условие *пересечения* двух прямых:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Условие *скрещивания* двух прямых:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Угол φ между двумя прямыми:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

№19. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Возможны три варианта взаимного расположения *прямой и плоскости в пространстве*:

- Прямая параллельна плоскости
- Прямая лежит в плоскости
- Прямая пересекает плоскость

Пусть прямая L задана:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

а плоскость P:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

1) Прямая *параллельна* плоскости:

$$L \parallel P \Leftrightarrow \bar{l} \perp \bar{n} \Leftrightarrow (\bar{l}, \bar{n}) = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0 -$$

2) Прямая *лежит* в плоскости:

$$L \subset P \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

3) Прямая *пересекает* плоскость:

$$L \cap P \Leftrightarrow Am + Bn + Cp \neq 0.$$

- *Угол между прямой и плоскостью*:

$$\varphi = \arcsin \frac{\left|\left(\bar{n}, \bar{l}\right)\right|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{l}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

- прямая *перпендикулярна* плоскости:

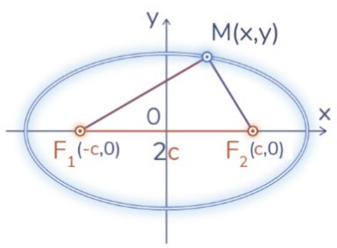
$$L \parallel P \Leftrightarrow \bar{l} \parallel \bar{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

№20. Эллипс: определение, каноническое уравнение, основные свойства и характеристики.

Эллипс – геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек, называемых *фокусами* – величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами.

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$



$$|MF_1| + |MF_2| = 2a \;\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

$\rightarrow$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$x^2a^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$x^2a^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

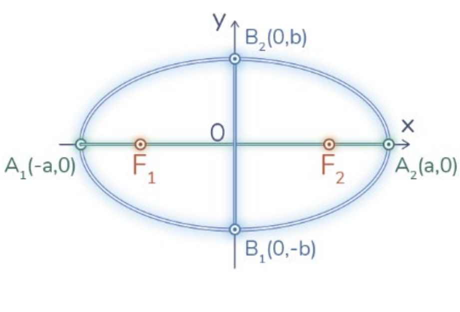
Заметим, что разность $a^2 - c^2 > 0$, так как $a > c$. Обозначим $a^2 - c^2 = b^2$.

Тогда последнее равенство примет вид

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части последнего равенства на a^2b^2, получим *каноническое уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Свойства эллипса:

1) Точки симметричны относительно начала координат $O(0, 0)$.

2) $|A_1A_2|$ – *большая* полуось эллипса, $|A_1A_2| = 2a$, $|B_1B_2|$ – *меньшая* полуось эллипса, $|B_1B_2| = 2b$.

3) Эллипс целиком расположен внутри прямоугольника, образованного прямыми линиями $x = \pm a$ и $y = \pm b$, касаясь его сторон в вершинах.

4) Эллипс с равными полуосями ($a = b$) является *окружностью*.

Если эллипс *смещён*, уравнение принимает вид (x_0 и y_0 – координаты центра эллипса):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad 0 \le \varepsilon < 1.$$

Две прямые, перпендикулярные к большей оси эллипса, расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами эллипса*:

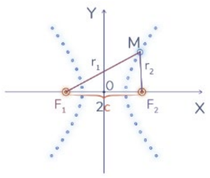
$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$$

Уравнение эллипса *в параметрическом виде*:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

№21. Гипербола: определение, каноническое уравнение, основные свойства и характеристики.

Гипербола – геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояния от каждой из которых до двух точек, называемых *фокусами* – величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами.



$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a \quad \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

→

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(xc - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = x^2a^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - x^2a^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

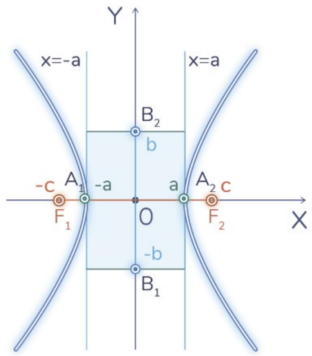
Заметим, что разность $c^2 - a^2 > 0$, так как $c > a$.

Обозначим $c^2 - a^2 = b^2$. Тогда последнее равенство примет вид

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части последнего равенства на a^2b^2, получим *каноническое уравнение гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



<u>*Свойства гиперболы:*</u>

1) Гипербола обладает *центральной симметрией*.

2) $|A_2A_1| = 2a$, $|A_2A_1|$ – *действительная* ось. $|B_2B_1| = 2b$, $|B_2B_1|$ – *мнимая* ось.

3) Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, лежащий на прямых $x = \pm\, a$ и $y = \pm\, b$, называется *основным прямоугольником* гиперболы.

4) Точки, лежащие справа от прямой $x = a$ – *правая ветвь* гиперболы, слева – *левая ветвь* гиперболы.

Если гипербола *смещена*, уравнение принимает вид (x_0 и y_0 – координаты центра гиперболы):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Эксцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad \varepsilon > 1$$

Директрисы гиперболы:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$$

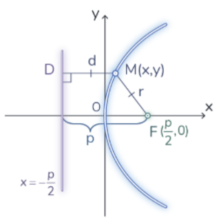
Асимптотой гиперболы называется прямая, обладающая следующим свойством: расстояние от точки гиперболы до этой прямой стремится к нулю, когда точка движется по гиперболе так, что расстояние от неё до начала координат стремится к бесконечности.

$y = \pm \frac{b}{a} x$ – *асимптоты гиперболы.*

№22. Парабола: определение, каноническое уравнение, основные свойства и характеристики.

Парабола – геометрическое место точек, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*.

Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется *параметром* параболы.



Пусть $M(x,\ y)$ – текущая точка параболы с переменными координатами. Расстояние r от точки $M(x,\ y)$ до фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ равно $|MF| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, а расстояние от точки $M(x,\ y)$ до директрисы – $|MD| = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|$.

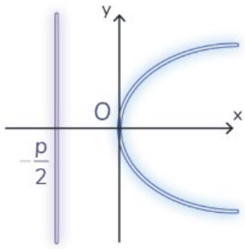
Тогда, согласно определению параболы, имеет место равенство

$$|MD| = |MF| \iff d = r \iff \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

$$\rightarrow \quad \left(\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px.$$



Каноническое уравнение параболы:

$y^2 = 2px.$

Свойства параболы:

1. Парабола симметрична относительно оси Ox, т.е. $y = 0$ – ось симметрии параболы.

2. Каждому значению x соответствует 2 значения y:

$y = \pm\sqrt{2px}$,

$y = \sqrt{2px}$ – верхняя ветвь параболы, $y = -\sqrt{2px}$ – нижняя ветвь параболы.

Эксцентриситет параболы по определению равен единице, то есть $\varepsilon = \frac{c}{a} = 1$.

Если парабола *смещена*, то уравнение принимает вид (x_0 и y_0 – координаты центра параболы):

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p\,(x - x_0)$$

№23. Поверхности второго порядка в пространстве: цилиндрические и конические поверхности; поверхности вращения.

Множество точек пространства, координаты x, y, z которых удовлетворяют равенству: $F(x, y, z) = 0$, называется **поверхностью**.

Уравнение, выражающее свойства, общие всем точкам данной поверхности, называется **уравнением поверхности**.

При $z = 0$: $F(x, y) = 0$ – уравнение кривой, а L – множество точек, удовлетворяющее заданному уравнению, которое будем называть *направляющей линией*. Всевозможные положения движущейся прямой, проходящей через L параллельно Oz, называются *образующими*.

Поверхности второго порядка:

1. *Цилиндрические поверхности* – поверхности, образуемые движением прямой, перемещающейся в пространстве параллельно данной прямой и пересекающей при этом данную кривую линию.

- Направляющая: $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$
- Образующая: $\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{p}$

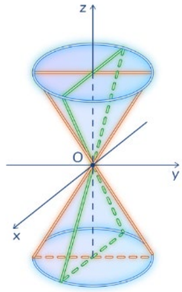
2. *Конические поверхности* – поверхности, образуемые движущейся прямой, проходящей через данную точку и скользящую по данной прямой.

- Вершина конуса: $O(x_0, y_0, z_0)$
- Направляющая: $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$

– Образующая: $\frac{X-x_0}{x-x_0} = \frac{Y-y_0}{y-y_0} = \frac{Z-z_0}{z-z_0}$

- конус:

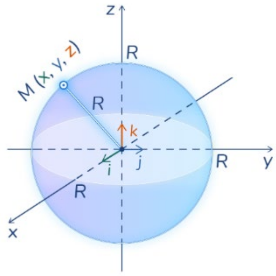
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$



3. *Поверхности вращения* – поверхности, образуемые вращением плоской кривой вокруг прямой, лежащей в её плоскости.

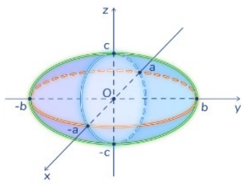
- сфера:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (R > 0)$$



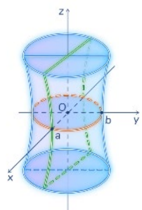
- эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$



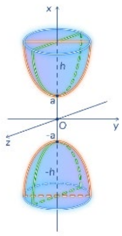
- однополостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$



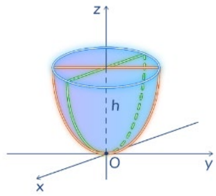
- двуполостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$



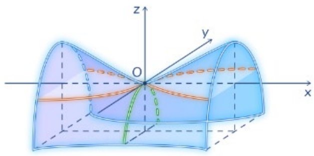
- <u>эллиптический параболоид</u>:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \quad a > 0, \quad b > 0.$$



- <u>гиперболический параболоид</u>:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \quad a > 0, \quad b > 0.$$



24. Ранг матрицы, его свойства и способы вычисления

Ранг матрицы A – наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы A.

Пусть дана матрица размером $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы A можно рассматривать как векторы длины n:

$$\bar{u}_i = (a_{i1}, \ a_{i2}, \ \dots, \ a_{in}) \ , i = \overline{1, \ m}.$$

Говорят, что строки матрицы A *линейно независимы*, если линейно независимы векторы $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$, т.е. их линейная комбинация:

$$\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{u_n}, \alpha_i \in R, i = \overline{1, n}$$

равна $\vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\forall \alpha_i = 0$.

Если хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$, то строки *линейно зависимы*.

Если ранг матрицы A равен k, то существует k *линейно независимых строк матрицы*, от которых зависят остальные строки.

Ранг *диагональной* и *трапециевидной* матриц равен числу их ненулевых диагональных элементов.

<u>*Способы вычисления ранга матрицы:*</u>

1) *С помощью элементарных преобразований*:

- **Теорема:** любая матрица с помощью элементарных преобразований может быть приведена к диагональному или трапециевидному виду.

- **Теорема:** ранг матрицы при элементарных преобразованиях *не меняется*:

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B.$$

Суть метода: матрицу A с помощью элементарных преобразований перевести в эквивалентную матрицу B (диагональную или трапециевидную), ранг которой находится легко.

2) *Методом окаймляющих миноров*:

1. Найти в матрице A какой-нибудь минор порядка k, отличный от нуля ($M_k \neq 0$).

2. Рассмотреть все окаймляющие его миноры порядка $k + 1$ (окаймляющие, т.е. содержащие минор M_k целиком внутри себя).

3. Если все окаймляющие миноры равны нулю, то ранг матрицы A равен k ($r(A) = k$). Если среди миноров порядка $k + 1$ есть не равный нулю ($M_{k+1} \neq 0$), то применить к нему это правило сначала.

№25. Произвольные системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Система называется *однородной*, если все свободные члены равны 0, в противном случае система *неоднородна*.

Система *совместна*, если она имеет хотя бы 1 решение, в противном случае система *несовместна*.

Рассмотрим систему вида и введём обозначения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы линейных уравнений;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов;

$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы.

Базисными строками (столбцами) матрицы A, ранг которой равен r, называются любые её r линейно независимых строк (столбцов).

Теорема Кронекера-Капелли: для того, чтобы система уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы A и расширенной матрицы $\tilde{A}$ *был одинаковым*.

- Если $r(A) = r(\tilde{A}) = n$ (число неизвестных), то решение <u>единственное</u>.
- Если $r(A) = r(\tilde{A}) < n$, то решений <u>бесконечное множество</u>.

- Если $r(A) \neq r(\tilde{A})$, то система несовместна.

Доказательство.

- *Необходимость* ($\Rightarrow$):

Перепишем систему линейных уравнений в виде суммы столбцов:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Так как система совместна, то существует ее решение $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Тогда справедливо равенство:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

которое означает, что столбец свободных членов B является линейной комбинацией столбцов матрицы системы. Значит, добавление этого столбца к матрице A не увеличивает общего числа линейно независимых столбцов и, следовательно, ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы A: $\operatorname{rk}\ (A|B) = \operatorname{rk} A$.

- *Достаточность* ($\Leftarrow$):

По условию $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \tilde{A}$. Тогда вектор-столбец B не входит в число базисных столбцов матрицы $\tilde{A} = (A|B)$, следовательно, он является линейной комбинацией базисных столбцов матрицы A, т. е. может быть записан в виде:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

где не все коэффициенты $\alpha_i = 0 \ \ (i = \overline{1, n})$.

А это означает, что числа $x_1 = \alpha_1, \ \ x_2 = \ \alpha_2, \ \dots \ , \ x_n = \alpha_n$ являются решением системы линейных уравнений, то есть система совместна.

Теорема доказана. ■

№26. Системы однородных линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

– система линейных однородных уравнений

$AX = O$ – матричная форма, где O – нулевой вектор-столбец длины m.

Любая *однородная система является совместной*, так как $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots X_n = 0$ всегда является её решением.

Теорема: для того, чтобы однородная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг её основной матрицы был меньше числа неизвестных.

Следствия из теоремы:

1. Система имеет единственное *нулевое* решение, если определитель матрицы не равен нулю, $\Delta A \neq 0$. Тогда $r(A) = n$.
2. Система имеет *ненулевое* решение, если определитель матрицы равен нулю, $\Delta A = 0$. Тогда $r(A) < n$.

Свойства решений однородных СЛАУ:

1. Если вектор-столбец X – решение однородной системы, то CX – тоже решение этой системы, где C – константа.
2. Сумма двух векторов-столбцов решений системы тоже будет являться решением системы.
3. Если $X_1, X_2 \ldots X_k$ – решения системы, то их линейная комбинация тоже будет решением системы.

Теорема: пусть ранг матрицы $A_{m\times n}$ равен r. Тогда:

1) однородная система m уравнений с n неизвестными $AX = 0$ имеет ровно $n - r$ линейно независимых решений $X_1, X_2 \ldots X_{n-r}$.

2) любое решение этой системы можно представить в виде линейной комбинации линейно независимых решений этой системы:

$$\boldsymbol{\bar{X} = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_{n-r}X_{n-r}}.$$

Фундаментальная система решений – совокупность $n - r$ линейно независимых решений $(X_1, X_2 \ldots X_{n-r})$ однородной системы $AX = 0$, где r – ранг матрицы, а n – число неизвестных.

Общее решение системы – решение системы $AX = 0$, записанное с помощью линейной комбинации $\boldsymbol{\bar{X} = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r}}$, где C_i – произвольные постоянные, X_i – векторы, образующие фундаментальную систему решений.

Подставляя в общее решение конкретные значения констант, можно получать новые *частные решения системы*.

№27. Системы неоднородных линейных алгебраических уравнений. Частное решение. Структура общего решения.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

– система неоднородных линейных уравнений

$AX = B$ – матричная форма, где B – столбец свободных членов, хотя бы один из которых не равен нулю.

Вектор X°, для которого справедливо $AX^{\circ} = B$ – *частное решение системы*.

Теорема: любое решение неоднородной системы $AX = B$ имеет вид

$$\boldsymbol{X = \overline{X} + X^{\circ}},$$

где $\overline{X}$ – общее решение соответствующей однородной системы $AX = 0$, а X° – частное решение неоднородной системы $AX = B$.

Общее решение неоднородной системы $AX = B$ имеет вид

$$\boldsymbol{X = X^{\circ} + C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_{n-r}X_{n-r}},$$

где $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}\}$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы $AX = O$.

№28. Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства.

Линейным пространством называется непустое множество L, для элементов которого выполняются *2 условия*:

1) $\forall x_1, x_2 \in L, x_1 + x_2 \in L.$

2) $\forall x \in L, \forall \alpha \in R, \alpha x \in L.$

И эти условия удовлетворяют следующим *8 аксиомам* линейного пространства:

1. Коммутативность сложения:
$x + y = y + x$

2. Ассоциативность сложения:
$(x + y) + z = x + (y + z)$

3. Существует такой нулевой элемент, что $x + 0 = x$

4. Для любого элемента x существует противоположный элемент $-x$, что
$x - x = 0$

5. Умножение элемента на единичный элемент не изменяет его:
$1x = x$

6. Умножение элемента на число ассоциативно:
$\alpha(\mu x) = \alpha\mu x$

7. Умножение элемента на число дистрибутивно относительно множителя:
$(\alpha + \mu)x = \alpha x + \mu x$

8. Умножение элемента на число дистрибутивно относительно сложения:
$(x + y)\alpha = \alpha x + \alpha y$

Элементы линейного пространства называются *векторами* и система *n* векторов $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in L$ называется:

○ *Линейно независимой*, если $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$,

○ *Линейно зависимой*, если найдётся хотя бы один $\alpha_i \neq 0$.

Базисом линейного пространства называется любая упорядоченная система *n* линейно независимых векторов. Число *n* называется *размерностью пространства*.

Теорема: Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис линейного пространства L, то для $\forall x \in L$ существует единственный набор $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такой, что

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – координаты вектора в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

№29. Линейные операторы. Действия над операторами и их свойства.

L_1и L_2 – линейные пространства.

Отображение $A: L_1 \to L_2$ называется *линейным оператором*, если выполняются равенства:

1) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2,\ x_1, x_2 \in L_1$

2) $A(\alpha x) = A\alpha x,\ x \in L_1, \alpha \in R$

$y = Ax$ называется *образом* вектора *x*, а вектор *x* – его *прообразом*.

<u>*Виды операторов*</u>:

○ Оператор, который каждому элементу *x* из L_1 ставит в соответствие нулевой элемент из L_2, называется *нулевым*.

○ Оператор $Ax = x$ называется *тождественным*.

○ Оператор $Ax = \alpha x$ называется *скалярным*.

Областью значений (imA) линейного оператора $A, y = Ax$ называется множество:

$imA = \{y \in L_2 |\ y = Ax, x \in L_1\}$.

Ядро ($kerA$) линейного оператора:

$kerA = \{x \in L_1 |\ Ax = 0\}$.

Линейный оператор называется *невырожденным*, если его ядро состоит только из нулевого оператора:

$Ax = 0 \Rightarrow x = 0, kerA = \{x \mid Ax = 0\}$.

- Невырожденные операторы *однозначны*:

  $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$,

  $y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Оператор, определяющий вектор x для данного y, называется *обратным* и обозначается $x = A^{-1}y$:

$x = A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = Ex$, где E – тождественный оператор.

Действия над линейными операторами:

1. $(A + B)x = Ax + Bx, \; x \in L$.

2. $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$.

3. $Cx = (AB)x = A(Bx)$, $B: L_1 \to L_2, \; A: L_2 \to L_3 \Rightarrow C: L_1 \to L_3$.

№30. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.

Пусть L_1 – линейное пространство с базисом $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ и L_2 – линейное пространство с базисом $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m})$.

$$A(\overrightarrow{u_j}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overrightarrow{v_j}, j = \overline{1,n}$$

т.е. вектор $A(\overrightarrow{u_j})$ имеет координаты $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ в базисе $\{\overrightarrow{v_i}\}$, $i = \overline{1,m}$.

Матрица линейного оператора $A: L_1 \to L_2$ – матрица размера $m \times n$, столбцами которой являются координаты образов базисных векторов $A(u_j)$:

$$A = \begin{pmatrix} f(\bar{u}_1) & f(\bar{u}_2) & \cdots & f(\bar{u}_n) \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пусть

$$\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{m} t_{ij}\overrightarrow{u_j}, j = \overline{1,n}$$

т.е. вектор $\overrightarrow{v_j}$ имеет координаты $(t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{nj})$ в старом базисе.

Матрицей перехода от старого базиса $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ к новому базису $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m})$ называется матрица T системы векторов нового базиса в старом базисе. Столбцами матрицы перехода являются координаты вектора в старом базисе:

$$T = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \cdots & \bar{u}_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема: если A – матрица оператора в старом базисе, тогда матрица B этого же оператора в новом базисе имеет вид:

$\boldsymbol{B = T^{-1}AT}$.

Доказательство.

Обозначим через X и Y столбцы координат векторов в старом базисе $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$, а через X' и Y' – в новом базисе $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m})$.

Тогда справедливы равенства: $X = TX'$ и $Y = TY'$

С другой стороны, так как $Y = AX$, справедливо равенство $Y' = BX'$.

Отсюда получим:

$$Y = AX, \Leftrightarrow TY' = A(TX'), \Leftrightarrow TY' = (AT)X', \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y' = T^{-1}(AT)X' \Leftrightarrow Y' = \left(T^{-1}AT\right)X' = BX',$$

Следовательно, $B = T^{-1}AT$. ■

№31. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

Пусть дан ненулевой вектор X.

Если после преобразования X с помощью матрицы A: $Y = AX$ полученный вектор $Y = \lambda X$, то вектор X называется **собственным вектором** матрицы A, а λ – **собственным значением** матрицы A.

Характеристическое уравнение матрицы A:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы A:

1. Решить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, т.е. найти все собственные значения λ_i.

2. Для каждого собственного значения λ_i решить систему:

$$(A - \lambda_i E)\overrightarrow{x_i} = \vec{0},$$

и тем самым найти собственные векторы $\overrightarrow{x_i}$, соответствующие собственным значениям λ_i.

№ 32. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

Теорема: для того, чтобы матрица A линейного оператора имела диагональный вид (на диагонали будут собственные значения), необходимо и достаточно, чтобы этот базис состоял из собственных векторов матрицы A.

Теорема:

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ – корни характеристического уравнения n-ного порядка, имеющие кратности $m_1, m_2, \ldots, m_s$, где $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$.

Матрица A представима в диагональной форме тогда и только тогда, когда $r(A - \lambda_k E) = n - m_k, \forall \lambda_k$.

<u>Алгоритм приведения матрицы A к диагональному виду</u>:

1. Находим собственные значения и собственные векторы матрицы A.

2. Составляем матрицу T, столбцами которой являются собственные векторы.

3. $\boldsymbol{\Lambda = T^{-1}AT}$

- Если же A – *симметричная* матрица, то собственные векторы нужно *пронормировать*, составив матрицу B, столбцами которой являются нормированные собственные векторы, тогда $\boldsymbol{\Lambda = T^T A T}$.

№33. Квадратичная форма и её матрица. Канонический вид квадратичной формы. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Квадратичной формой n действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен от этих переменных, каждое слагаемое которого имеет *вторую степень*:

$$Q(\bar{x}) = Q(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) =$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n +$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots +$$
$$+ a_{n1}x_nx_1 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

или

$$Q(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

где $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ – некоторые числа, которые называются **коэффициентами** квадратичной формы, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрицей квадратичной формы называется матрица, составленная из коэффициентов квадратичной формы, причём она *симметрична*. Такой матрице соответствует *единственная* симметрическая форма:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма называется **канонической**, если она *не содержит произведений различных переменных*, т.е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$Q(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2.$$

Канонической квадратичной форме соответствует *диагональная матрица*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **положительно-определенной**, если для любого ненулевого набора элементов она принимает *только положительные значения*, т.е.

$$Q\left(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\right) > 0 \text{ для } \forall\ \left(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\right) \neq (0,\ 0,\ \dots,\ 0).$$

Квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **отрицательно-определенной**, если для любого ненулевого набора элементов она принимает *только отрицательные значения*, т.е.

$$Q\left(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\right) < 0 \text{ для } \forall\ \left(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\right) \neq (0,\ 0,\ \dots,\ 0).$$

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются **знакоопределёнными**. Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если существуют такие наборы переменных, при которых она принимает как отрицательные, так и положительные значения.

Критерий Сильвестра:

- для того, чтобы квадратичная форма была *положительно-определенной*, необходимо и достаточно, чтобы все *главные миноры* её матрицы A были положительны
- для того, чтобы квадратичная была *отрицательно-определенной*, необходимо и достаточно, чтобы все *главные миноры* нечётного порядка её матрицы A были отрицательны, а все *главные миноры* чётного порядка положительны

№34. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Теорема: любую квадратичную форму с помощью ортогонального преобразования переменных можно привести к каноническому виду.

Теорема: квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с матрицей A принимает канонический вид:

$$Q_1(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots\ + \lambda_n y_n^2$$

в ортонормированном базисе, состоящем из собственных векторов матрицы A, числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями матрицы A.

Правила приведения квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием:

1) выписать матрицу A квадратичной формы и найти ее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;

2) найти n попарно ортогональных собственных векторов $\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \ldots,\ \bar{u}_n$ матрицы A и нормировать их:

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{|\bar{u}_1|},\ \bar{v}_2 = \frac{\bar{u}_2}{|\bar{u}_2|},\ \ldots,\ \bar{v}_n = \frac{\bar{u}_n}{|\bar{u}_n|};$$

3) составить матрицу T перехода к новому базису из нормированных собственных векторов $\bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \ldots, \bar{v}_n$:

$$T = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix};$$

4) записать искомое ортогональное преобразование переменных:

$$X = TY \text{ или } \begin{cases} x_1 = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \ldots + t_{1n}y_n, \\ x_2 = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \ldots + t_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \ldots + t_{nn}y_n; \end{cases}$$

5) выписать матрицу Λ квадратичной формы, соответствующую ее каноническому виду, расположив на главной диагонали собственные значения матрицы A (можно убедиться в том, что $\Lambda = T^T A\, T$):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

6) записать канонический вид квадратичной формы:

$$Q_1(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots\ + \lambda_n y_n^2.$$

№35. Применение теории квадратичных форм к исследованию кривых второго порядка.

!!! *Этого не было на лекции, хз, есть ли смысл учить* !!!

Система координат, в которой кривая задаётся своим каноническим уравнением, называется *канонической системой координат* для этой кривой.

- Если в уравнении кривой второго порядка отсутствует слагаемое с произведением переменных xy, то для приведения уравнения к каноническому виду достаточно выделить полные квадраты относительно переменной x и относительно переменной y.
- Если в уравнении кривой есть произведение xy, то задача о приведении кривой второго порядка к каноническому виду сводится к задаче о *приведении к каноническому виду квадратичной формы* этой кривой.

Алгоритм приведения кривой второго порядка к каноническому виду:

1) выписать квадратичную форму $Q\left(x,\ y\right) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, соответствующую кривой, и ее матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$;

2) найти собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A, и ее ортонормированные собственные векторы $\bar{v}_1 = (\alpha_1,\ \beta_1)$ и $\bar{v}_2 = (\alpha_2,\ \beta_2)$;

3) составить матрицу перехода к новому ортонормированному базису $\{\bar{v}_1,\ \bar{v}_2\}$:

$$T = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix};$$

4) перейти к новой системе координат OX_1Y_1 (ее оси направлены по векторам $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ соответственно) с помощью ортогонального преобразования переменных:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1x_1 + \alpha_2y_1, \\ y = \beta_1x_1 + \beta_2y_1, \end{cases}$$

которое осуществляет поворот старой системы координат OXY вокруг точки O на некоторый угол, либо является зеркальным отражением;

5) подставить полученные выражения для x и y в уравнение кривой (при этом сразу учитывая, что квадратичная форма будет иметь канонический вид $Q\left(x,\ y\right) = Q_1\left(x_1,\ y_1\right) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$):

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + a_{13}\left(\alpha_1x_1 + \alpha_2y_1\right) + a_{23}\left(\beta_1x_1 + \beta_2y_1\right) + a_{33} = 0;$$

6) выделить полные квадраты в полученном уравнении кривой:

$$\lambda_1(x_1 + a)^2 + \lambda_2(y_1 + b)^2 + c = 0$$

(где a, b и c – некоторые числа), и перейти от системы координат OX_1Y_1 к новой системе координат $O_1X_2Y_2$ по формулам

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + a, \\ y_2 = y_1 + b, \end{cases}$$

которые соответствуют параллельному переносу системы координат OX_1Y_1 в новое начало – точку $O_1\left(-a,\ -b\right)$. Заметим, что $\left(-a,\ -b\right)$ – это координаты точки O_1 в системе координат OX_1Y_1.

В системе координат $O_1X_2Y_2$ уравнение кривой принимает канонический вид

$$\lambda_1{x_2}^2 + \lambda_2{y_2}^2 + c = 0,$$

при этом $O_1X_2Y_2$ является канонической системой координат для данной кривой.

Остается построить эту кривую, предварительно изобразив все системы координат OXY, OX_1Y_1 и $O_1X_2Y_2$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ (ЕБАЛА РОТ)

№36. Преобразование координат вектора при изменении базиса.

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ – старый базис в пространстве L, $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ – новый базис в пространстве L.

Матрицей перехода от старого базиса к новому называется матрица системы векторов старого базиса в новом базисе:

$$u_1' = t_{11} u_1 + t_{21} u_2 + \dots + t_{n1} u_n$$
$$u_2' = t_{12} u_1 + t_{22} u_2 + \dots + t_{n2} u_n$$
$$\dots$$
$$u_n' = t_{1n} u_1 + t_{2n} u_2 + \dots + t_{nn} u_n$$

Матрица перехода T имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ - & - & - & - \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Столбцами матрицы перехода являются координаты нового вектора в старом базисе.

Теорема: если $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты вектора x в старом базисе, а $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ – координаты этого же вектора в новом базисе, то:

X = TX'.

№37. Неравенство Коши-Буняковского.

Неравенство Коши-Буняковского:

$|(x, y)| \le \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$ – выполняется, когда x и y линейно зависимы

Доказательство.

◊ рассм. вектор $z = x + \lambda y$ $\quad\lambda$ – не знаем

$(z, z) \ge 0$

$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2 (y, y) \ge 0$

пусть $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$

$$(x,x) - 2\frac{(x,y)^2}{(y,y)} + \frac{(x,y)^2}{(y,y)} \ge 0$$

$$(x,x) - \frac{(x,y)^2}{(y,y)} \ge 0 \Rightarrow \boxed{(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)}$$

№38. Евклидовы пространства, норма вектора.

Линейное пространство V называется *евклидовым*, если каждой паре элементов $x, y \epsilon V$ поставлено в соответствие число (x, y), называемое скалярным произведением и удовлетворяющее следующим условиям:

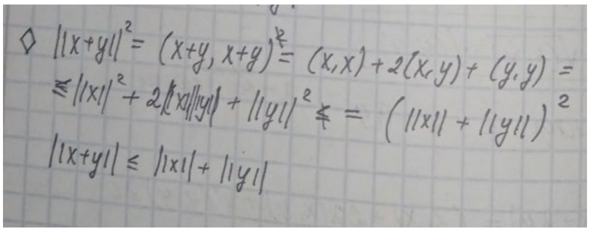
1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
3. $\alpha(x, y) = (\alpha x y), \alpha \in R$
4. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определим *норму* (длину) вектора по формуле: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

<u>*Свойства нормы*</u>:

1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
3) Неравенство Минковского: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

<u>Доказательство.</u>



$\Diamond\ \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) =$
$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$
$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

№39. Угол между векторами и ортогональный базис в евклидовом пространстве.

Угол между векторами:

$cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$.

Попарно ортогональные векторы в евклидовом пространстве линейно независимы:

$x \perp y \Leftrightarrow (x, y) = 0$.

Если взять N попарно ортогональных векторов в пространстве размерности N, то они образуют *ортогональный базис*.

Если затем эти векторы нормировать, получаем *ортонормированный базис*.

Теорема: во всяком N-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

№40. Алгоритм Грама-Шмидта и процесс ортогонализации.

Алгоритм Грама-Шмидта (процесс ортогонализации базиса):

- Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – произвольный базис пространства V.

1. $v_1 = x_1,\ u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

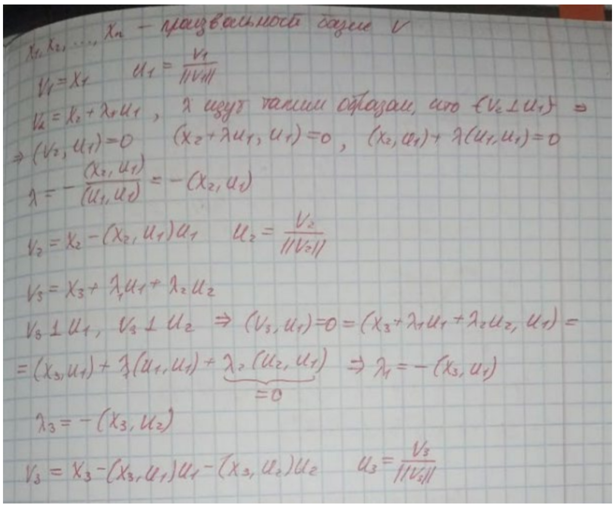
2. $v_2 = x_2 - (x_2, u_1)u_1,\ u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$

3. $v_3 = x_3 - (x_3, u_1)u_1 - (x_3, u_2)u_2,\ u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$

4. и т.д.

5. Повторяем до *N*.

* полный алгоритм:



$x_1, x_2, \dots, x_n$ – произвольный базис V

$v_1 = x_1 \quad u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$v_2 = x_2 + \lambda_1 u_1$, λ ищут таким образом, что $\{v_2 \perp u_1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (v_2, u_1) = 0 \quad (x_2 + \lambda u_1, u_1) = 0, \quad (x_2, u_1) + \lambda(u_1, u_1) = 0$

$\lambda = -\frac{(x_2, u_1)}{(u_1, u_1)} = -(x_2, u_1)$

$v_2 = x_2 - (x_2, u_1)u_1 \quad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$

$v_3 = x_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$

$v_3 \perp u_1,\ v_3 \perp u_2 \Rightarrow (v_3, u_1) = 0 = (x_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, u_1) =$

$= (x_3, u_1) + \lambda_1(u_1, u_1) + \underbrace{\lambda_2 (u_2, u_1)}_{=0} \Rightarrow \lambda_1 = -(x_3, u_1)$

$\lambda_3 = -(x_3, u_2)$

$v_3 = x_3 - (x_3, u_1)u_1 - (x_3, u_2)u_2 \quad u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$

*

№41. Матрица самосопряжённого оператора в ортонормированном пространстве. Свойства ортогонального и симметричного операторов.

Линейный оператор А* называется сопряжённым оператору А, если выполняется:

$(Ax, y) = (x, A^*y),\ x, y \in V.$

- Линейный оператор A^* называется *самосопряжённым*, если выполняется:

$(Ax, y) = (x, Ay),\ x, y \in V.$

В ортонормированном базисе *матрица самосопряжённого оператора* совпадает со своей транспонированной, т.е. $A = A^T \Rightarrow$ матрица A симметрическая.

- Линейный оператор A называется *ортогональным*, если выполняется:

$(Ax, Ay) = (x, y),\ x, y \in V.$

Матрица A называется *ортогональной*, если соответствующая ей система векторов ортонормирована.

Пусть A – ортогональный оператор, A^* – сопряжённый оператор. Тогда:

$(x, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay)$

$A^*A = E \Rightarrow \boldsymbol{A^* = A^{-1}}$ – для ортогонального оператора

- $\boldsymbol{A^{-1} = A^T}$ – для самосопряжённого оператора

Содержание:

21. Гипербола: определение, каноническое уравнение, основные свойства и характеристики.

22. Парабола: определение, каноническое уравнение, основные свойства и характеристики.

23. Поверхности второго порядка в пространстве: цилиндрические и конические поверхности; поверхности вращения.

24. Ранг матрицы, его свойства и способы вычисления.

25. Произвольные системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

26. Системы однородных линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

27. Системы неоднородных линейных алгебраических уравнений. Частное решение. Структура общего решения.

28. Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства.

29. Линейные операторы. Действия над операторами и их свойства.

30. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.

31. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

32. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

33. Квадратичная форма и её матрица. Канонический вид квадратичной формы. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

34. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

35. Применение теории квадратичных форм к исследованию кривых второго порядка.

36. Преобразование координат вектора при изменении базиса.

37. Неравенство Коши-Буняковского.

38. Евклидовы пространства, норма вектора.

39. Угол между векторами и ортогональный базис в евклидовом пространстве.

40. Алгоритм Грама-Шмидта и процесс ортогонализации.

41. Матрица самосопряжённого оператора в ортонормированном пространстве. Свойства ортогонального и симметричного операторов.