1. Алгоритм расчета функции методом разложения в ряд
   1. Полиномиальная интерполяция

Функция представляет собой некий «закон», по которому каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент другого множества. Возникают ситуации, когда напрямую невозможно найти , тогда функцию аппроксимируют некоторой функцией и находят приближенное значение . Если в качестве аппроксимирующих функций используются только многочлены, то говорят, что имеет место полиномиальная интерполяция.

В зависимости от выбора критерия согласия и от количества точек согласования – узлов, т.е. точек, в которых известна информация о , можно рассматривать разные способы аппроксимации. В данной работе используются два метода аппроксимации функции: интерполяционная формула Лагранжа и представление степенного ряда полиномами Чебышева. Выбор данных методов неслучаен: реализация метода Лагранжа менее трудоемка по сравнению с конечно-разностными схемами, а максимальная ошибка разложения в ряд по полиномам Чебышева – знакопеременна и распределена на всем интервале аппроксимации равномерно, что выгодно отличает данный метод от разложения в ряд Тейлора.

1.1.1 Интерполяционная формула Лагранжа

Если существует некоторое множество различных действительных чисел ,то для множества существует единственный полином степени не выше такой, что . Формула Лагранжа имеет следующий вид:

где ,

– значение функции в k-м узле, т.е. точке .

Критерий согласия данного метода – совпадение значений функций и в узлах.

1.1.2 Представление степенного ряда через полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева являются непрерывными рекуррентно вычисляемыми ортогональными функциями. В настоящий момент разработано и исследовано 4 вида полиномов Чебышева, но в данной работе будут рассмотрены только полиномы первого рода.

Полиномы Чебышева первого рода определяются следующим образом:

где

,

либо из следующей рекуррентной формулы:

где

Стоит подметить важное свойство: многочлены при четных выражаются через функции только четных степеней, при нечетных – только нечетных.

Многочлен имеет на отрезке [-1,1] ровно *n* различных действительных корней, которые задаются одной из следующих формул, различаюшихся только порядком следования корней:

где

Максимальная погрешность интерполирования достаточно гладкой функции на отрезке [-1,1] многочленом *n*-й степени будет минимальной, когда в качестве узлов интерполяции берутся корни многочлена Чебышева. Кроме того, если функция бесконечно дифференцируема на и в качестве узлов интерполяции берутся корни многочленов Чебышева, то при

где – функция, аппроксимирующая по формуле Лагранжа.

Представление степенного ряда через полиномы Чебышева можно осуществить несколькими способами: экономизацией степенного ряда, либо через непосредственный расчет коэффициентов разложения.

Процедура преобразования степенного ряда, представляющего собой разложение некоторой функции по системе степенных функций, в разложение функции по полиномам Чебышева называется экономизацией степенного ряда.

Если некоторая функция на некотором промежутке представлена степенным рядом  то подставляя сюда вместо степеней их выражения через многочлены Чебышева и приводя подобные члены, можно получить разложение вида:

В представленной работе метод экономизации не применяется - аппроксимация функции осуществляется непосредственный расчет коэффициентов разложения.

* 1. Коэффициенты интерполяционных полиномов

Разложение функции в ряд по полиномам Чебышева имеет следующую форму:

где – коэффициенты разложения, или коэффициенты интерполяционных полиномов.

Коэффициенты разложения можно определить разными способами, но в данной работе применена интерполяционная формула Лагранжа, где в качестве узлов интерполяции использованы нули полиномов Чебышева. Для тригонометрических функций коэффициенты полиномов рассчитываются по следующим формулам:

где – нули полиномов Чебышева,

– значение функции в узле интерполяции.

* 1. Аппроксимация функции sin(x) полиномами Чебышева
  2. Расчет коэффициентов полиномов Чебышева
  3. Блок-схема алгоритма
  4. Интерполяционные формулы

Функция представляет собой некий «закон», по которому каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент другого множества. Иногда нахождение при большом количестве значений представляет собой трудоемкую задачу. В таких случаях, определяют небольшую таблицу значений функции и на основании этой таблицы находят приближенное значение при помощи интерполяции через полином в промежуточной точке .

Если существует некоторое множество различных действительных чисел ,то для множества существует единственный полином степени не выше такой, что . В зависимости от задачи полином удобно описывать различными по виду формулами: Лагранжа, Ньютона, Стирлинга, Бесселя и т.д.

Интерполяционная формула Лагранжа проста в понимании, ее реализация обладает меньшим временем исполнения по сравнению с реализацией формулы Ньютона – из-за наличия разделенных разностей в формуле Ньютона[1]. По этим причинам в работе рассмотрена именно формула Лагранжа.

Формула Лагранжа имеет следующий вид:

где ,

– значение функции в k-м узле, т.е. точке .

* 1. Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева являются непрерывными рекуррентно вычисляемыми функциями. В настоящий момент разработано 4 типа полиномов Чебышева, но в данной работе будет рассмотрен только первый тип.

Полиномы Чебышева первого рода определяются следующим образом:

где

,

либо из следующего тождества:

где

Нули полиномов Чебышева первого рода определяются как:

либо:

где

Вычисленные по формулам …. И … нули полиномов выберем в качестве узлов интерполирования.

* 1. Разложение в ряд по полиномам Чебышева

Разложение функции для диапазона [-1,1] представлено следующим образом:

где ,

– коэффициенты разложения.

Для полиномов первого рода:

Необходимо учитывать, что при интерполяции полиномами высоких степеней возникает феномен Рунге: эффект нежелательных осцилляций.

* 1. Представление элементарной тригонометрической функции в ряд

Написать про возможность разложения sin(x) в степенной ряд.

* + 1. Преимущества и недостатки разложения функции в ряды Тейлора и по полиномам Чебышева

Из [1], следует, что на вычисление функции с помощью разложения в ряд Тейлора затрачивается меньше времени, чем с помощью разложения по полиномам Чебышева. Но в случае, если значения косинусов узлов полиномов Чебышева будут заданы таблично, аппроксимация полиномами Чебышева выполнится быстрее.

Кроме того, аппроксимация полиномами Чебышева (АПЧ) обеспечивает гарантированно меньшую ошибку, чем разложение в ряд Тейлора (РТ). Ошибка АПЧ знакопеременна и распределена равномерно на всем диапазоне определения аргумента (ДОА). Ошибка РТ быстро растет к границам ДОА.

Из написанного выше следует, что аппроксимация функции полиномами Чебышева предпочтительнее разложения функции в ряд Тейлора.

* + 1. Общий вид разложения в ряд для тригонометрической функции

Форма Лагранжа интерполяции полиномами используется для нахождения полиномов, которые лучшим образом аппроксимируют функцию sin(x).

* + 1. Полная запись разложения в ряд для функции sin(x)
  1. Алгоритм вычисления функции sin(x) методом разложения в ряд по полиномам Чебышева