1. **Алгоритм расчета функции методом разложения в ряд**
   1. **Полиномиальная интерполяция**

Функция представляет собой некий «закон», по которому каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент другого множества. Возникают ситуации, когда напрямую невозможно найти , тогда функцию аппроксимируют некоторой функцией и находят приближенное значение . Если в качестве аппроксимирующих функций используются только многочлены, то говорят, что имеет место полиномиальная интерполяция.

В зависимости от выбора критерия согласия и от количества точек согласования – узлов, т.е. точек, в которых известна информация о , можно рассматривать разные способы аппроксимации. В данной работе используются два метода аппроксимации функции: интерполяционная формула Лагранжа и представление степенного ряда полиномами Чебышева. Выбор данных методов неслучаен: реализация метода Лагранжа менее трудоемка по сравнению с конечно-разностными схемами, а максимальная ошибка разложения в ряд по полиномам Чебышева – знакопеременна и распределена на всем интервале аппроксимации равномерно, что выгодно отличает данный метод от разложения в ряд Тейлора.

**1.1.1 Интерполяционная формула Лагранжа**

Если существует некоторое множество различных действительных чисел ,то для множества существует единственный полином степени не выше такой, что . Формула Лагранжа имеет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.1 |

где ,

– значение функции в k-м узле, т.е. точке .

Критерий согласия данного метода – совпадение значений функций и в узлах.

**1.1.2 Представление степенного ряда через полиномы Чебышева**

Полиномы Чебышева являются непрерывными рекуррентно вычисляемыми ортогональными функциями. В настоящий момент разработано и исследовано 4 вида полиномов Чебышева, но в данной работе будут рассмотрены только полиномы первого рода.

Полиномы Чебышева первого рода определяются следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.2 |

где

,

либо из следующей рекуррентной формулы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.3 |

где

Стоит подметить важное свойство: многочлены при четных выражаются через функции только четных степеней, при нечетных – только нечетных.

Многочлен имеет на отрезке [-1,1] ровно *n* различных действительных корней, которые задаются одной из следующих формул, различающихся только порядком следования корней:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.4 |
|  | 1.5 |

где

Максимальная погрешность интерполирования достаточно гладкой функции на отрезке [-1,1] многочленом *n*-й степени будет минимальной, когда в качестве узлов интерполяции берутся корни многочлена Чебышева. Кроме того, если функция бесконечно дифференцируема на и в качестве узлов интерполяции берутся корни многочленов Чебышева, то при

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.6 |

где – функция, аппроксимирующая по формуле Лагранжа.

Представление степенного ряда через полиномы Чебышева можно осуществить несколькими способами: экономизацией степенного ряда, либо через непосредственный расчет коэффициентов разложения.

Процедура преобразования степенного ряда, представляющего собой разложение некоторой функции по системе степенных функций, в разложение функции по полиномам Чебышева называется экономизацией степенного ряда.

Если некоторая функция на некотором промежутке представлена степенным рядом  то подставляя сюда вместо степеней их выражения через многочлены Чебышева и приводя подобные члены, можно получить разложение вида:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.7 |

В представленной работе метод экономизации не применяется - аппроксимация функции осуществляется через непосредственный расчет коэффициентов разложения.

* 1. **Коэффициенты интерполяционных полиномов**

Разложение функции в ряд по полиномам Чебышева имеет следующую форму:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.8 |

где – коэффициенты разложения, или коэффициенты интерполяционных полиномов.

Коэффициенты разложения можно определить разными способами, но в данной работе применена интерполяционная формула Лагранжа, где в качестве узлов интерполяции использованы нули полиномов Чебышева. Для тригонометрических функций коэффициенты полиномов рассчитываются по следующим формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.9 |
|  | 1.10 |

где – нули полиномов Чебышева,

– значение функции в узле интерполяции.

* 1. **Аппроксимация функции sin(x) полиномами Чебышева**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.11 |

Функция sin(x) –нечетная, поэтому в разложение войдут только нечетные члены ряда. В общем виде разложение в степенной ряд по степеням аргумента выглядит следующим образом:

Заменим выражения в скобках следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.12 |
| где | 1.13 |
|  | 1.14 |
|  | 1.15 |
|  | 1.16 |
|  | 1.17 |
|  | 1.18 |
| – коэффициенты разложения. | 1.19 |

* 1. **Расчет коэффициентов разложения**

Коэффициенты разложения определяются через коэффициенты интерполяционных полиномов Чебышева , которые в свою очередь вычисляются с помощью интерполяционной формулы Лагранжа.

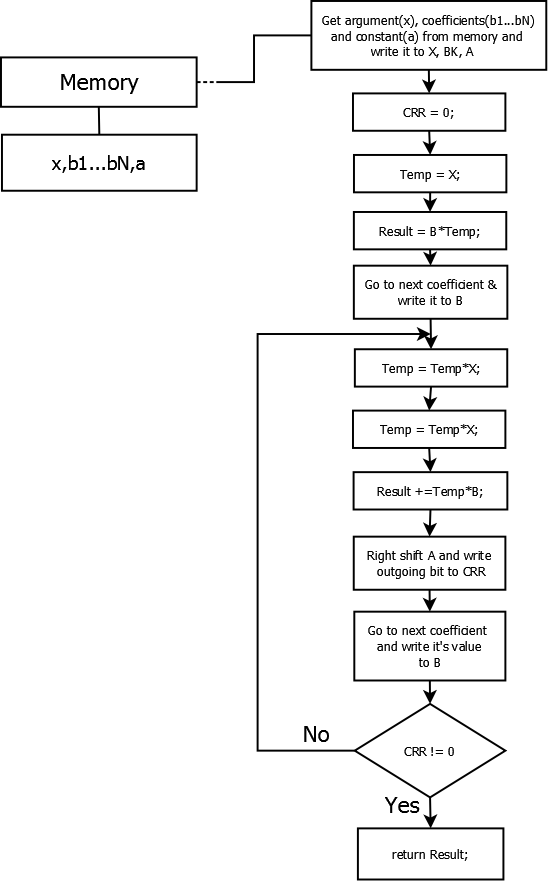
Расчет производится по формуле 1.10, расчет осуществляется по формулам 1.13-1.19. Методика расчета, листинг программы и результаты представлены в Приложении А. Ниже приведена таблица числовых значений коэффициентов .

На основании таблицы […] формула 1.12 примет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1.20 |

* 1. **Блок-схема алгоритма**

На Рисунке 1.1приведена блок-схема алгоритма расчета функции sin(X) через разложение в ряд через полиномы Чебышева.

****

*Рисунок 1.1 – блок схема алгоритма расчета sin(X) методом разложения в ряд.*