

## 灾后运输网络中的最短路修复合作博弈\*

宣洪伟<sup>1</sup> 李振东<sup>1</sup> 盛舟山<sup>2</sup> 刘林冬<sup>1,†</sup>

**摘要** 在最短路修复合作博弈中, 当灾后运输网络规模较大时, 最优成本分摊问题难以直接求解。基于拉格朗日松弛理论, 提出了一种最短路修复合作博弈成本分摊算法。该算法将最短路修复合作博弈分解为两个具有特殊结构的子博弈, 进而利用两个子博弈的结构特性, 可以高效地求解出二者的最优成本分摊, 将这两个成本分摊相加, 可以获得原博弈的一个近乎最优的稳定成本分摊。结果部分既包含运输网络的随机仿真, 也包含玉树地震灾区的现实模拟, 无论数据来源于仿真还是现实, 该算法都能在短时间内为最短路修复合作博弈提供稳定的成本分摊方案。

**关键词** 合作博弈, 运输网络, 灾后修复, 成本分摊

**中图分类号** O221.4, O225

**2010 数学分类号** 91A12, 90C11

## Cost allocation for multiple pairs of shortest paths recovery game on disrupted networks\*

XUAN Hongwei<sup>1</sup> LI Zhendong<sup>1</sup> SHENG Zhoushan<sup>2</sup> LIU Lindong<sup>1,†</sup>

**Abstract** When the scale of disrupted transportation networks is large, the optimal cost allocation problem for multiple pairs of shortest paths recovery game is often intractable. In this paper, we propose a cost allocation algorithm based on Lagrangian relaxation method, which decomposes the multiple pairs of shortest paths recovery game into two subgames approximatively. We then find some properties for these two subgames which can help to solve their optimal cost allocations efficiently. According to the optimal cost allocations of the subgames, we are able to develop a near-optimal stable cost allocation for the original game. In the end, we conduct some computational experiments by checking the performance of our cost allocation algorithm on both simulated networks and the disrupted transportation network of Yushu after earthquake. The results show that our algorithm is both efficient and effective in solve optimal cost allocation problem for multiple pairs of shortest paths recovery game.

**Keywords** cooperative game, transportation network, disruption recovery, cost allocation

**Chinese Library Classification** O221.4, O225

**2010 Mathematics Subject Classification** 91A12, 90C11

收稿日期: 2021-03-15

\* 基金项目: 国家自然科学基金优秀青年科学基金 (No. 72022018), 中国科学院青年创新促进会 (No. 2021454), 国家自然科学基金青年科学基金 (No. 71701192)

1. 中国科学技术大学管理学院国际金融研究院, 安徽合肥 230026; International Institute of Finance, School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, Anhui, China

2. 常熟理工学院计算机科学与工程学院, 江苏苏州 215500; School of Computer Science and Engineering, Changshu Institute of Technology, Suzhou 215500, Jiangsu, China

† 通信作者 E-mail: ldliu@ustc.edu.cn

社会经济的发展与许多不同种类的运输网络息息相关, 如交通运输网、电力输送网、远程通信网等。然而, 各种灾难时有发生, 上述网络遭到破坏后, 轻则降低人们的生活水平, 重则威胁到人类的生命安全, 灾后运输网络修复的研究就变得尤为重要。修复受损网络会涉及多方合作, 并且运送救灾物资会产生相应的运输成本, 如何将成本进行合理的分摊, 促使多方达成合作, 正是合作博弈研究的范畴。合作博弈想要解决的问题就是找一个或一组分配, 使得每个局中人都按照这组分摊来得到他们的支付, 这就是通常说的找到这个合作博弈的解<sup>[1]</sup>。目前研究最多的合作博弈的解是 Shapley 值<sup>[2]</sup> 和核心, 现实背景主要为收益分配<sup>[3]</sup> 或成本分摊 (本文中的分摊, 等同于原定义中的分配), 本文研究的就是成本分摊中的核心。核心是否存在, 主要取决于两类约束条件是否满足, 其一是“联盟稳定性约束”, 即分摊给每个联盟的成本 (联盟中每个局中人的成本之和) 不超过联盟中局中人未结盟时的最低成本之和; 其二是“预算平衡约束”, 即分摊给所有局中人的成本之和等于大联盟 (所有局中人组成的联盟) 成本。同时满足以上两类约束条件的成本分摊集, 被称为合作博弈问题的核心。不过许多合作博弈问题都是空核的, 即不存在一个成本分摊集, 同时满足上面两类约束条件, 例如本文研究的灾后运输网络中的最短路修复合作博弈。

对于合作博弈中的空核问题, 目前主要的解决方案是松弛核心的两类约束条件之一。比如, 松弛联盟稳定性约束的最小核心<sup>[4-7]</sup> 概念, 其表示分摊给每个联盟的成本不超过  $z$  与联盟的最小成本之和, 其中  $z$  是一个最小化的参数。另一个概念是  $\gamma$ -核心<sup>[8]</sup>, 即分摊给所有局中人的总成本不小于  $\gamma$  与大联盟最小成本的乘积, 其中  $0 < \gamma \leq 1$ 。又如  $\varepsilon$ -近似核心<sup>[9,10]</sup> 的概念, 其主要思想是强化预算平衡约束, 松弛联盟稳定性约束, 使分摊给每个联盟的成本之和不超过  $(1 + \varepsilon)$  倍的联盟最低成本。从数学的角度,  $\gamma$ -核心等同于  $\varepsilon$ -近似核心。研究  $\gamma$ -核心或  $\varepsilon$ -近似核心的关键点是在具体的博弈中找到  $\gamma$  或  $\varepsilon$  的连续边界。

本文主要探究  $\gamma$ -核心, 且不限于只寻找  $\gamma$  的连续边界, 而是以最优成本分摊问题 (Optimal Cost Allocation Problem, OCAP) 为研究对象, 尝试设计一种算法精确计算灾后运输网络中最短路修复合作博弈的最优  $\gamma$  值, 从而最大化分摊给所有局中人的总成本。OCAP 由 Caprara 等<sup>[11]</sup> 首先提出, 然而该问题一直未得到充分的研究。求解 OCAP 主要有两大难点。首先, 该问题的约束数量随局中人数量增加而呈指数数量级增加; 其次, 特征函数的求解问题可能是 NP-难问题。因此, 直接求解 OCAP 是非常困难的。Caprara 等曾提出一种基于线性松弛理论的算法, 该方法可求解特征函数为线性的 OCAP; 而当 OCAP 的特征函数为非线性时, 目前主要的解决方法是由 Liu 等<sup>[12]</sup> 提出的一种基于拉格朗日松弛理论的算法。本研究求解的 OCAP, 其特征函数就是线性的, 但是在用 Caprara 等提出的线性松弛方法时, 通常需要引入具有特殊结构的约束 (“可分配”约束) 来重构原问题, 进而得到大联盟成本的线性松弛下界。从理论的角度, 该算法可解决特征函数为线性的 OCAP, 但前提是识别并添加所有的“可分配”约束, 然而大多数情形下很难识别所有的“可分配”约束。并且即使所有“可分配”约束都可被识别的情况下, 如果没有多项式时间算法来处理指数数量级的“可分配”约束, 该线性松弛算法仍然是不适用的。

本文在灾后运输网络被破坏的背景下, 定义出最短路修复合作博弈问题。针对该博弈中的 OCAP, 本研究提出了一种最短路修复合作博弈成本分摊算法, 与以往基于线性松弛理论的求解方法不同, 本算法基于拉格朗日松弛理论, 可避免依赖于“可分配”约束的局限性。其核心思想是将最短路修复合作博弈分解为子博弈 1 和子博弈 2, 其中子博弈 1 为简单的有核合作博弈, 其局中人的最优成本分摊就是每个局中人自身的运输成本; 子博弈 2 虽然为空核合作博弈, 但可通过列生成算法高效地获得其最优成本分摊; 将子博弈 1 和子博弈 2 的最优成本分摊相加, 即可获得原博弈的一个近乎最优的稳定成本分摊方案。

最后,本研究通过随机仿真数据以及玉树地震灾区的现实模拟数据对该算法进行了验证。本研究结合玉树地震灾区的现实数据进行模拟的思路和结果,可以为今后类似的现实问题求解提供一定的借鉴。

全文结构如下:第1节将介绍灾后运输网络中的多条最短路修复成本优化问题,以及合作博弈的基本概念。第2节描述灾后运输网络中的最短路修复合作博弈成本分摊问题,并针对该问题建立数学规划模型。第3节展示基于拉格朗日松弛理论的最短路修复合作博弈成本分摊算法框架及技术细节。第4节呈现不同规模下的随机仿真结果。第5节介绍基于玉树地震灾区现实数据的算法仿真结果。第6节总结全文。

## 1 预备知识

### 1.1 灾后运输网络中的多条最短路修复成本优化问题

交通运输网等现实中的网络,都可抽象为运筹学中网络图的概念,即设施、地点等可看作为点,输送线路、道路等可看作为边,点和边共同组成网络。基于此,灾后网络修复的研究背景大致可分为点的修复和边的修复。Liu 等<sup>[12]</sup>曾以运输网络中的受损道路为研究对象,提出了多条最短路修复成本优化问题。其主要研究内容为,毁坏道路在修复前后,存在不同的运输成本,现有多批物资运输任务,中央决策者需要在有限道路修复资源的情形下,决策修复哪些道路,以使得总运输成本最小化。下面以图1为例,将灾后运输网络中的多条最短路修复成本优化问题进行简单地描述。

**例1** 如图1所示,灾后运输网络中包括6个地点,分别为 $\{A, B, C, D, E, F\}$ ;有5条道路将以上6个地点连接在一起,分别为 $\{AC, BC, CD, DE, DF\}$ ;这5条道路均为受损道路,修复其中任意一条道路所消耗的资源量均为1;图中的 $(3, 1)$ 表示每条道路修复前后的运输成本,分别为3和1;现有两批物资,分别需要从A地点运往F地点,从B地点运往E地点;每批物资的权重均为1;中央决策者拥有的可用来修复毁坏道路的总资源量为1,即仅能选择图中的某一条道路修复;依次选择其中某一条道路修复后,完成两批运输任务的总运输成本分别为 $C_{AC} = 16$ ,  $C_{BC} = 16$ ,  $C_{CD} = 14$ ,  $C_{DE} = 16$ ,  $C_{DF} = 16$ 。显然,中央决策者应该选择受损道路CD修复,修复后总运输成本最小,为14。

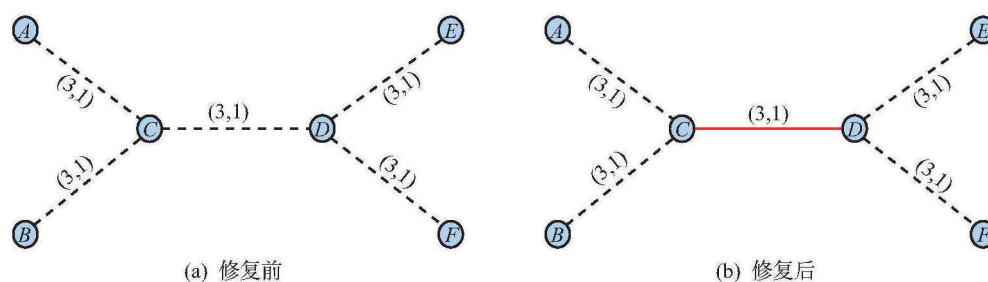


图1 灾后运输网络中的多条最短路修复成本优化问题示意图

### 1.2 合作博弈基本概念

具备可转移效用(Transferable Utilities)性质的合作博弈,也称TU博弈,可用二元向量 $(N, c)$ 表示,其中 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示局中人集合, $c: S \rightarrow \mathbb{R}$ 表示特征函数, $S = 2^N \setminus \emptyset$

表示非空的局中人联盟的集合。特征函数为每个联盟  $s \in S$  映射一个值  $c(s)$ , 表示联盟  $s$  中的所有局中人在合作时需要支付的最小总成本。本文研究的成本分摊问题是将大联盟  $N$  中的所有局中人的合作总成本  $c(N)$ , 以合理的方式分摊给每个局中人, 在保证任一局中人都没有动机脱离大联盟的基础上, 使得所有局中人分摊到的成本之和尽可能达到  $c(N)$ 。

对于一个合作博弈  $(N, c)$ , 其成本分摊可用向量  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  表示。如果成本分摊方案  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  满足联盟稳定性条件:  $\sum_{k \in s} \alpha(k) \leq c(s), \forall s \in S$ , 则称该成本分摊稳定。如果  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  同时满足预算平衡约束条件:  $\sum_{k \in N} \alpha(k) = c(N)$ , 则称  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  位于合作博弈  $(N, c)$  的核内。即:

$$\text{Core}(N, c) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n : \sum_{k \in s} \alpha(k) \leq c(s), \forall s \in S, \sum_{k \in N} \alpha(k) = c(N) \right\}.$$

大量文献表明, 并非每个博弈  $(N, c)$  都存在核心。对于空核博弈问题, 目标是找到一个成本分摊方案  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , 在满足联盟稳定性条件的基础上, 使总分摊成本  $\sum_{k \in N} \alpha(k)$  尽可能接近大联盟成本  $c(N)$ , 以满足预算平衡约束条件。即最优成本分摊问题 (OCAP, Caprara 2010):

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \quad & \sum_{k \in N} \alpha(k), \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k \in s} \alpha(k) \leq c(s), \forall s \in S. \end{aligned} \quad (1)$$

因为式 (1) 包含一组指数数量级的约束条件, 并且特征函数值  $c(s)$  的求解可能是 NP-难问题, 所以通常 OCAP 很难直接求解。本文的重点就是设计算法, 求解灾后运输网络中的最短路修复合作博弈的 OCAP。

另外需要介绍的一个概念是整数最小化博弈<sup>[11]</sup>。该类博弈的特征函数为整数规划问题, 并且其核心可能为空, 其定义如下:

**定义 1** 一个合作博弈  $(N, c)$  被称为整数最小化博弈, 若存在

- 正整数  $r, r'$  和  $t$ ,
- 左侧矩阵  $A \in \mathbb{R}^{r \times t}$  和  $A' \in \mathbb{R}^{r' \times t}$ ,
- 右侧矩阵  $B \in \mathbb{R}^{r \times v}$  和  $B' \in \mathbb{R}^{r' \times v}$ ,
- 非负右侧列向量  $D \in \mathbb{R}^r$  和  $D' \in \mathbb{R}^{r'}$ ,
- 示性列向量  $\gamma^s \in \{0, 1\}^v$  满足:  $\forall k \in N$ , 若  $k \in s$ , 则  $\gamma_k^s = 1$ ; 否则,  $\gamma_k^s = 0$ 。使得对于所有  $s \in S$ , 特征函数  $c(s)$  可用整数规划表示为:

$$c(s) = \min_x \{Cx : Ax \geq B\gamma^s + D, A'x \geq B'\gamma^s + D', x \in \{0, 1\}^{t \times 1}\}, \quad (2)$$

其中  $C$  是  $t$  维行向量。

注意, 在式 (2) 中, 为方便拉格朗日松弛方法的应用, 约束被分为两部分。每个具有非负列向量  $D$  和  $D'$  的整数最小化博弈, 都具有次可加性<sup>[11]</sup>, 即对于任意  $s_1, s_2 \in S$  且  $s_1 \cap s_2 = \emptyset$ , 有  $c(s_1 \cup s_2) \leq c(s_1) + c(s_2)$ 。具有次可加性的整数最小化博弈使得局中人合作成为可能。

## 2 灾后运输网络中的最短路修复合作博弈成本分摊问题

灾后运输网络可以构建为无向网络图  $G = (M, E)$ , 其中  $M$  是节点的集合,  $E$  是受损

道路的集合, 即边的集合。每条边  $(i, j) \in E$  都有一个较高的灾后运输成本  $c_{ij}$  和较低的灾前运输成本  $c'_{ij}$ , 其中  $0 \leq c'_{ij} \leq c_{ij}$ 。每条边可以通过消耗一定量的道路恢复资源  $r_{ij}$ , 从受损状态修复到灾前正常状态。

有  $n$  批起止点可能不同的加权物资运输任务。每批物资的运输者, 即最短路修复合作博弈的局中人, 在不增加自身分摊到的成本的基础上, 可以选择其他运输者结盟, 将各自拥有的修复资源  $R^k$  合并使用, 使得联盟的总加权运输成本  $\sum_{k=1}^m w^k \phi^k$  最小, 其中  $w^k$  表示第  $k$  批物资运输任务的权重, 为正值;  $\phi^k$  表示运输网络修复后, 完成  $k$  批物资运输任务  $(o^k, d^k)$  所行使的最短距离 (沿该最短路径行驶的总运输成本最小)。

本文所用到的符号如表 1 所示:

表 1 灾后运输网络中的最短路修复合作博弈成本分摊研究符号说明

符号	符号的含义
$M$	节点的集合, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 。
$N$	局中人 (本文中指物资运输者) 的集合, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 。
$R$	所有局中人可用来修复毁坏道路的资源总量。
$c_{ij}$	从节点 $i$ 到节点 $j$ 的毁坏道路运输成本。
$c'_{ij}$	从节点 $i$ 到节点 $j$ 的正常道路运输成本。
$r_{ij}$	修复边 $(i, j)$ 所消耗的资源量。
$o^k$	第 $k$ 个局中人完成物资运输任务 $(o^k, d^k)$ 的起点, $\forall k \in N$ 。
$d^k$	第 $k$ 个局中人完成物资运输任务 $(o^k, d^k)$ 的终点, $\forall k \in N$ 。
$w^k$	第 $k$ 个局中人完成物资运输任务 $(o^k, d^k)$ 的权重, $\forall k \in N$ 。
$R^k$	每个局中人拥有的可用来修复毁坏道路的资源, $\forall k \in N$ 。
$\gamma^s$	示性向量 $\gamma^s = [\gamma_1^s, \gamma_2^s, \dots, \gamma_m^s]^T$ , 若第 $k$ 个局中人在联盟 $s$ 中, 则 $\gamma_k^s = 1$ ; 否则 $\gamma_k^s = 0$ , $\forall k \in N, s \in S$ 。
$x_{ij}^k$	决策变量, 若已被修复的边 $(i, j)$ 在完成物资运输任务 $(o^k, d^k)$ 的最短路径上, 则 $x_{ij}^k = 1$ ; 否则 $x_{ij}^k = 0$ , $\forall (i, j) \in E, k \in N$ 。
$y_{ij}^k$	决策变量, 若未被修复的边 $(i, j)$ 在完成物资运输任务 $(o^k, d^k)$ 的最短路径上, 则 $y_{ij}^k = 1$ ; 否则 $y_{ij}^k = 0$ , $\forall (i, j) \in E, k \in N$ 。
$z_{ij}$	决策变量, 若边 $(i, j)$ 被修复, 则 $z_{ij} = 1$ ; 否则 $z_{ij} = 0$ , $\forall (i, j) \in E, k \in N$ 。

**定义 2** 定义  $(N, c_{\text{SPR}})$  为最短路修复 (Shortest Paths Recovery, SPR) 合作博弈, 其中  $N$  表示全体局中人, 特征函数  $c_{\text{SPR}}(s)$  为如下整数规划问题:

$$c_{\text{SPR}}(s) = \min_{x, y, z} \sum_{k \in N} w^k \sum_{(i, j) \in E} (c'_{ij} x_{ij}^k + c_{ij} y_{ij}^k) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_{j: (i, j) \in E} (x_{ij}^k + y_{ij}^k) - \sum_{j: (j, i) \in E} (x_{ji}^k + y_{ji}^k) \\ & = \begin{cases} \gamma_k^s, & \text{如果 } i = o^k, \\ -\gamma_k^s, & \text{如果 } i = d^k, \\ 0, & \text{如果 } i \notin \{o^k, d^k\}, \end{cases} \quad \forall i \in M, k \in N, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_{(i, j) \in E} r_{ij} z_{ij} \leq \sum_{k \in N} R^k \gamma_k^s, \quad (5)$$

$$x_{ij}^k \leq z_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N, \quad (6)$$

$$x_{ij}^k, y_{ij}^k, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N, \quad (7)$$

其中目标函数 (3) 表示最小化总加权运输成本; 约束 (4) 是网络流约束, 即对于网络流上的任意一点来说, 若其中存在某些点满足网络流约束 (4), 就可以定义出每个局中人的物资运输任务  $(o^k, d^k)$  从起点  $o^k$  到终点  $d^k$  的一条路径; 约束 (5) 是预算平衡约束, 表示消耗的总资源量  $\sum_{(i,j) \in E} r_{ij} z_{ij}$  不能超过联盟中的每个局中人可用来修复毁坏道路的资源量之和  $\sum_{k \in N} R^k \gamma_k^s$ ; 约束 (6) 表示只有当某条毁坏的边  $(i, j)$  被修复以后, 才能在一些物资运输任务的最短路径中被当作正常的边使用; 约束 (7) 表示决策变量均为 0-1 变量。注意, 变量  $y$  与变量  $z$  之间存在一定的相互制约关系, 不过他们的关系是由约束 (4) 和约束 (6) 联立共同体现的。

值得一提的是, 特征函数  $c_{\text{SPR}}(s)$  的目标函数的系数向量  $C$  是  $t$  维行向量, 其中  $t = n \times m \times m \times 2 + m \times m$ 。约束 (4) 中决策变量  $x_{ij}^k, y_{ij}^k$  的系数  $(1/-1)$  和决策变量  $z_{ij}$  的系数 (全零矩阵) 共同构成左侧矩阵  $A \in \mathbb{R}^{r \times t}$ , 其中  $r = n \times m$ ; 右侧矩阵  $B \in \mathbb{R}^{r \times v}$  由  $\gamma_k^s$  的系数  $(1/-1/0)$  构成, 其中  $r = n \times m, v = 1$ ; 非负右侧列向量  $D = \mathbf{0}, D \in \mathbb{R}^r$ , 其中  $r = n \times m$ 。同理, 我们也可以获得约束 (5), 约束 (6) 的左侧矩阵  $A' \in \mathbb{R}^{r' \times t}, A'' \in \mathbb{R}^{r'' \times t}$ ; 右侧矩阵  $B' \in \mathbb{R}^{r' \times v}, B'' \in \mathbb{R}^{r'' \times v}$ , 非负右侧列向量  $D' = \mathbf{0}, D' \in \mathbb{R}^{r'}$ ,  $D'' = \mathbf{0}, D'' \in \mathbb{R}^{r''}$ 。很容易看出  $A, A'$  和  $A''$  可以按列拼接为系数矩阵  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times t}$ , 其中  $\tilde{r} = n \times m + 1 + n \times m \times m$ ,  $B, B'$  和  $B''$  以及  $D, D'$  和  $D''$  也可以进行类似的拼接。最后,  $x, y \in \{0, 1\}^{n \times m \times m}, z \in \{0, 1\}^{m \times m}$ 。综上所述, 定义 1 最短路修复合作博弈中的  $N$  和特征函数  $c_{\text{SPR}}(s)$  满足整数最小化博弈的定义, 即该最短路修复合作博弈是整数最小化博弈。

注意, 虽然决策变量  $x_{ij}^k$  的全体组成 3 维矩阵, 但是通过上面的分析可以看出, 在建模时, 我们是将  $x_{ij}^k$  转化为 1 维矩阵  $(1, n \times m \times m)$  构造约束条件, 并对  $y_{ij}^k, z_{ij}$  作相同的操作, 即每条约束条件都含有  $x_{ij}^k, y_{ij}^k, z_{ij}$  的全体元素, 在约束 (4) 的全体网络流约束中,  $x_{ij}^k$  的系数与  $y_{ij}^k, z_{ij}$  的系数共同构成 2 维矩阵, 所以该 3 维整数最小化博弈本质上还是 2 维的, 其与 2 维整数最小化博弈具有相同的性质, 即该博弈具有次可加性, 具有形成大联盟的基础。

本研究的重点就是寻找最短路修复合作博弈的最优成本分摊, 即求解最短路修复合作博弈中的 OCAP。然而, 本研究在求解时遇到两个难点: 一是对其特征函数  $c_{\text{SPR}}(s)$  直接求解非常困难, 因为即使该问题只包含目标函数 (3)、约束 (5) 和约束 (7), 其本身就构成一个只能在伪多项式时间内求解的背包问题<sup>[13]</sup>, 加入其他约束会导致问题变得更难直接求解; 二是 OCAP 的约束数量是指数级的。针对这两个难点, 本文提出基于拉格朗日松弛理论的最短路修复合作博弈成本分摊算法。

### 3 基于拉格朗日松弛理论的成本分摊算法

下面将详细介绍基于拉格朗日松弛理论的最短路修复合作博弈成本分摊算法的框架及其技术细节。拉格朗日松弛方法是一种高效地求解整数线性规划问题的方法, 其首次由 Held 等<sup>[14]</sup> 应用于解决旅行商问题, 并在其后诸多问题中得到推广。例如, 调度问题<sup>[15]</sup>, 设施选址问题<sup>[16,17]</sup>, 路径规划问题<sup>[18]</sup> 等。

#### 3.1 拉格朗日松弛过程和博弈分解

在拉格朗日松弛过程中, 通过松弛式 (2) 中的约束  $\{A'x \geq B'\gamma^s + D'\}$ , 即  $c_{\text{SPR}}(s)$  中的式 (6), 将该约束乘以非负的拉格朗日乘子  $\lambda$  后代入目标函数式 (3), 可推导出最短路

修复合作博弈的拉格朗日松弛特征函数  $c_{\text{LR\_SPR}}(s, \lambda)$  如下:

$$\begin{aligned} c_{\text{LR\_SPR}}(s, \lambda) = & \min_{x, y, z} \sum_{k \in N} w^k \sum_{(i, j) \in E} (c'_{ij} x_{ij}^k + c_{ij} y_{ij}^k) + \sum_{k \in N} \sum_{(i, j) \in E} \lambda_{ij}^k (x_{ij}^k - z_{ij}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j: (i, j) \in E} (x_{ij}^k + y_{ij}^k) - \sum_{j: (j, i) \in E} (x_{ji}^k + y_{ji}^k) \\ & = \begin{cases} \gamma_k^s, & \text{如果 } i = o^k, \\ -\gamma_k^s, & \text{如果 } i = d^k, \\ 0, & \text{如果 } i \notin \{o^k, d^k\}, \end{cases} \quad \forall i \in M, k \in N, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sum_{(i, j) \in E} r_{ij} z_{ij} \leq \sum_{k \in N} R^k \gamma_k^s, \quad (9)$$

$$x_{ij}^k, y_{ij}^k, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N. \quad (10)$$

该松弛函数可以转化为:

$$\begin{aligned} c_{\text{LR\_SPR}}(s, \lambda) = & \min_{x, y, z} \sum_{k \in N} w^k \sum_{(i, j) \in E} \left[ \left( c'_{ij} + \frac{\lambda_{ij}^k}{w^k} \right) x_{ij}^k + c_{ij} y_{ij}^k \right] - \sum_{k \in N} \sum_{(i, j) \in E} \lambda_{ij}^k z_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & (8) \sim (10), \end{aligned}$$

其中  $\lambda$  是一个非负的  $m \times m \times k$  维矩阵。

根据拉格朗日对偶理论, 对于任意的非负拉格朗日乘子  $\lambda$ ,  $c_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda)$  是初始特征函数  $c_{\text{SPR}}(N)$  最优目标值的下界。为了找到最大下界, 需要求解拉格朗日对偶问题  $d_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda)$ , 并在此过程中, 可以找到使  $c_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda)$  最大化的最优拉格朗日乘子  $\lambda^*$ 。其中拉格朗日对偶问题  $d_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda)$  如下:

$$d_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda) = \max_{\lambda \geq 0} c_{\text{LR\_SPR}}(N, \lambda)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_{j: (i, j) \in E} (x_{ij}^k + y_{ij}^k) - \sum_{j: (j, i) \in E} (x_{ji}^k + y_{ji}^k) \\ & = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i = o^k, \\ -1, & \text{如果 } i = d^k, \\ 0, & \text{如果 } i \notin \{o^k, d^k\}, \end{cases} \quad \forall i \in M, k \in N, \end{aligned}$$

$$\sum_{(i, j) \in E} r_{ij} z_{ij} \leq R,$$

$$x_{ij}^k \leq z_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N,$$

$$x_{ij}^k, y_{ij}^k, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N.$$

本算法结合了次梯度方法<sup>[19]</sup>, 在每次迭代中更新  $\lambda$ , 最终计算得到使  $d_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda)$  最优的拉格朗日乘子  $\lambda^*$ , 其递归公式如下:

$$\lambda_{ij}^{k(t+1)} = \left\{ \lambda_{ij}^{k(t)} + \theta^{(t)} \left[ x_{ij}^{k(t)} - z_{ij}^{(t)} \right] \right\}^+, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N. \quad (11)$$

在式 (11) 中,  $\{a\}^+$  表示  $a$  的正部, 即  $\{a\}^+ = \max\{0, a\}$ ;  $\lambda^{(t)}$  和  $\lambda^{(t+1)}$  分别表示拉格朗日乘子  $\lambda$  在第  $t$  次和第  $t+1$  次的迭代值; 向量  $[x^{1(t)} - z^{(t)}, x^{2(t)} - z^{(t)}, \dots, x^{n(t)} - z^{(t)}]$  表示在点  $(\lambda^{(t)}, L(\lambda^{(t)}))$  的梯度;  $\theta^{(t)}$  表示第  $t$  次迭代的步长, 即

$$\theta^{(t)} = \frac{\rho^{(t)} [\text{UB} - c_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda^{(t)})]}{\sum_{k=1}^n \|x^{k(t)} - z^{(t)}\|^2},$$

其中  $\text{UB}$  表示特征函数  $c_{\text{SPR}}(N)$  的上界, 即通过  $t$  次迭代后,  $c_{\text{SPR}}(N)$  所能获得的最小目标函数值;  $c_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda^{(t)})$  表示第  $t$  次迭代的拉格朗日松弛特征函数值;  $\rho^{(t)}$  是一个标量, 初始值设定为 2, 若在给定的迭代次数内, 最大的拉格朗日松弛特征函数值  $c_{\text{LR\_SPR}}(N; \tilde{\lambda}^{(t)})$  停止增大, 则  $\rho^{(t)}$  减半。

在每次迭代的过程中, 通过引入拉格朗日乘子  $\lambda^{(t)}$ , 可以获得一个可行解  $z^{(t)}$ , 并以此计算获得  $c_{\text{SPR}}(N)$  的目标函数值以更新  $\text{UB}$ , 继而迭代计算出第  $t+1$  次的拉格朗日乘子  $\lambda^{(t+1)}$ 。重复该过程, 直到上界  $\text{UB}$  和最大的拉格朗日松弛特征函数值  $c_{\text{LR\_SPR}}(N; \tilde{\lambda}^{(t)})$  之间的差距接近于 0, 或者迭代次数达到设定的最大限制。通过上述次梯度法, 可以获得使  $c_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda)$  最大化的最优拉格朗日乘子  $\lambda^*$ 。

给定任一非负拉格朗日乘子  $\lambda$ , 可以将拉格朗日松弛特征函数  $c_{\text{LR\_SPR}}(\cdot; \lambda)$  分解为两个子特征函数  $c_{\text{LR1\_SPR}}(\cdot; \lambda)$  和  $c_{\text{LR2\_SPR}}(\cdot; \lambda)$ , 满足  $c_{\text{LR\_SPR}}(s; \lambda) = c_{\text{LR1\_SPR}}(s; \lambda) + c_{\text{LR2\_SPR}}(s; \lambda), \forall s \in S$ 。其中, 定义子博弈 1 为  $(N, c_{\text{LR1\_SPR}}(\cdot; \lambda))$ , 其特征函数如下:

$$\begin{aligned} c_{\text{LR1\_SPR}}(s; \lambda) &= \min_{x; y} \sum_{k \in N} w^k \sum_{(i, j) \in E} (c''_{ij} x_{ij}^k + c_{ij} y_{ij}^k) \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{j: (i, j) \in E} (x_{ij}^k + y_{ij}^k) - \sum_{j: (j, i) \in E} (x_{ji}^k + y_{ji}^k) \\ &= \begin{cases} \gamma_k^s, & \text{如果 } i = o^k, \\ -\gamma_k^s, & \text{如果 } i = d^k, \\ 0, & \text{如果 } i \notin \{o^k, d^k\}, \end{cases} \quad \forall i \in M, k \in N, \\ &x_{ij}^k, y_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N, \end{aligned}$$

其中  $c''_{ij} = c'_{ij} + \frac{\lambda_{ij}^k}{w^k}$ 。

定义子博弈 2 为  $(N, c_{\text{LR2\_SPR}}(\cdot; \lambda))$ , 其特征函数如下:

$$c_{\text{LR2\_SPR}}(s; \lambda) = \min_z - \sum_{k \in N} \sum_{(i, j) \in E} \lambda_{ij}^k z_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad &\sum_{(i, j) \in E} r_{ij} z_{ij} \leq \sum_{k \in N} R_k \gamma_k^s, \\ &z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N. \end{aligned}$$

**定理 1** 给定任意的非负拉格朗日乘子  $\lambda$ , 若  $\alpha_{\text{LR1\_SPR}}^\lambda$  和  $\alpha_{\text{LR2\_SPR}}^\lambda$  分别是子博弈  $(N, c_{\text{LR1\_SPR}}(\cdot; \lambda))$  和  $(N, c_{\text{LR2\_SPR}}(\cdot; \lambda))$  的稳定成本分摊, 则原博弈  $(N, c_{\text{SPR}})$  的一个稳定成本分摊是  $\alpha_{\text{LR\_SPR}}^\lambda = \alpha_{\text{LR1\_SPR}}^\lambda + \alpha_{\text{LR2\_SPR}}^\lambda$ 。



**证明** 对任意  $s \in S$ ,  $\alpha_{LR1\_SPR}^\lambda$  和  $\alpha_{LR2\_SPR}^\lambda$  是稳定成本分摊, 表明其满足以下条件:

$$\sum_{k \in s} [\alpha_{LR1\_SPR}^\lambda(k) + \alpha_{LR2\_SPR}^\lambda(k)] \leq c_{LR1\_SPR}(s; \lambda) + c_{LR2\_SPR}(s; \lambda) \leq c_{SPR}(s).$$

由此可得出,

$$\sum_{k \in s} \alpha_{LR\_SPR}^\lambda(k) = \sum_{k \in s} [\alpha_{LR1\_SPR}^\lambda(k) + \alpha_{LR2\_SPR}^\lambda(k)] \leq c_{SPR}(s).$$

其满足联盟稳定性条件的定义。

根据定理 1, 给定任意的非负拉格朗日乘子  $\lambda$ , 可通过求解子博弈 1 和子博弈 2 的 OCAP, 从而得到原博弈的稳定成本分摊。值得一提的是, 我们在求解子博弈 2 的 OCAP 过程中发现, 即使所有子联盟的成本  $c_{LR2\_SPR}(s; \lambda)$  都由最优的拉格朗日乘子  $\lambda^*$  代入求解获得, 也不一定能得到子博弈 2 的最优成本分摊值  $\sum_{k \in N} \alpha_{LR2\_SPR}^\lambda(k)$ 。基于上述情况, 为了获得子博弈 2 更优的成本分摊值, 本研究提出以下算法:

**算法 1** 求解最短路修复合作博弈  $(N, c_{SPR})$  的成本分摊算法

**Step 1** 构造最短路修复合作博弈  $(N, c_{SPR})$  的拉格朗日特征函数  $c_{LR\_SPR}(N, \lambda)$ , 然后利用次梯度法, 求解其拉格朗日对偶问题  $d_{LR\_SPR}(N, \lambda)$  的最优拉格朗日乘子  $\lambda^*$ , 并在迭代过程中将拉格朗日乘子存入集合  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ 。

**Step 2** 利用每个  $\lambda \in \Lambda$ , 将拉格朗日特征函数  $c_{LR\_SPR}(\cdot; \lambda)$  分解为两个子特征函数  $c_{LR1\_SPR}(\cdot; \lambda)$  和  $c_{LR2\_SPR}(\cdot; \lambda)$ 。

**Step 3** 求解两个子博弈  $(N, c_{LR1\_SPR}(\cdot; \lambda))$  和  $(N, c_{LR2\_SPR}(\cdot; \lambda))$  的最优稳定成本分摊  $\alpha_{LR1\_SPR}^\lambda$  和  $\alpha_{LR2\_SPR}^\lambda$ 。

**Step 4** 计算博弈  $(N, c_{SPR})$  的稳定分摊  $\alpha_{LR\_SPR}^\lambda = \alpha_{LR1\_SPR}^\lambda + \alpha_{LR2\_SPR}^\lambda$ , 并在  $\lambda \in \Lambda$  对应的  $\alpha_{LR\_SPR}^\lambda$  中找到分摊成本最多的稳定成本分摊。

值得一提的是, 在选择拉格朗日乘子方面并没有理论研究, 本文是依照仿真结果总结出的经验, 从不同的迭代中选择 3 个拉格朗日乘子, 分别计算其对应的  $\alpha_{LR2\_SPR}^\lambda$ , 然后进行比较取最优值。

### 3.2 子博弈 1-有核合作博弈

本节介绍如何求解子博弈 1  $(N, c_{LR1\_SPR}(\cdot; \lambda))$  的最优成本分摊方案, 下面给出具体的求解过程, 并通过引理 1 给出该过程最后一步的理论推导。

首先, 从算法 1 Step 1 的集合  $\Lambda$  中选择一个  $\lambda$ , 并将选定的  $\lambda$  拆分为  $n$  个  $m \times m$  维矩阵  $\lambda^k: k \in N$ ; 然后, 选择  $c_{ij}''$  和  $c_{ij}$  中的较小值来更新每条边  $(i, j) \in E$  的运输成本; 接着, 将  $\lambda^k$  依次代入特征函数  $c_{LR1\_SPR}(\cdot; \lambda^k)$  并求解, 求解每个特征函数相当于求解一个最短路问题, 即利用 Dijkstra 算法可在多项式时间内获得子博弈 1 中每个局中人的成本  $f(\lambda^k) = c_{LR1\_SPR}(\cdot; \lambda^k): k \in N$ ; 最后, 通过每个局中人的成本可以获得子博弈 1 的最优成本分摊方案  $\alpha_{LR1\_SPR}^\lambda$ 。

**引理 1** 若向量  $\alpha_{LR1\_SPR}^\lambda$  满足

$$\alpha_{LR1\_SPR}^\lambda(k) = f(\lambda^k): \forall k \in N,$$

则  $\alpha_{LR1\_SPR}^\lambda$  在子博弈 1  $(N, c_{LR1\_SPR}(\cdot; \lambda))$  的核心中。

**证明** 因为每个局中人的分摊为

$$\alpha_{LR1\_SPR}^\lambda(k) = f(\lambda^k): \forall k \in N,$$

所以

$$\sum_{k \in s} \alpha_{\text{LR1\_SPR}}^\lambda(k) = \sum_{k \in s} f(\lambda^k) = c_{\text{LR1\_SPR}}(s; \lambda), \forall s \in S。$$

由此, 我们可以发现上述成本分摊方案  $\alpha_{\text{LR1\_SPR}}^\lambda \in \mathbb{R}^n$  既能满足联盟稳定性条件:

$$\sum_{k \in s} \alpha_{\text{LR1\_SPR}}^\lambda(k) \leq c_{\text{LR1\_SPR}}(s; \lambda) : \forall s \in S,$$

又能同时满足预算平衡约束条件:

$$\sum_{k \in N} \alpha_{\text{LR1\_SPR}}^\lambda(k) = c_{\text{LR1\_SPR}}(N; \lambda),$$

即  $\alpha_{\text{LR1\_SPR}}^\lambda \in \mathbb{R}^n$  为子博弈 1  $(N, c_{\text{LR1\_SPR}}(\cdot; \lambda))$  的核心。证毕。

由引理 1 可得, 给定最优拉格朗日乘子, 通过每个局中人的成本可以直接获得子博弈 1  $(N, c_{\text{LR1\_SPR}}(\cdot; \lambda))$  的核心。换言之, 该成本分摊方案已使得子博弈 1 大联盟的总成本分摊达到最大值, 即该成本分摊方案是最优的, 此处最优指的就是总成本分摊最大。

### 3.3 子博弈 2-空核合作博弈

本节的目标是求解子博弈 2  $(N, c_{\text{LR2\_SPR}}(\cdot; \lambda))$  的最优稳定成本分摊, 本节给出一种基于列生成方法 (Column-Generation-Based, CGB) 的求解算法, 其核心思想是选择将每个联盟作为如式 (13) 所定义的主规划问题的一列, 来重新构造主规划问题。

寻找子博弈 2 的最优稳定成本分摊, 就是计算下列 OCAP 的最优解:

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \quad & \sum_{k \in N} \alpha_{\text{LR2\_SPR}}^\lambda(k) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k \in s} \alpha_{\text{LR2\_SPR}}^\lambda(k) \leq c_{\text{LR2\_SPR}}(s; \lambda), \forall s \in S。 \end{aligned} \quad (12)$$

经过拉格朗日松弛过程以后,  $c_{\text{LR2\_SPR}}(s; \lambda)$  在计算上, 相对  $c_{\text{SPR}}(s; \lambda)$  更容易求解。为求解式 (12) 的 OCAP, 考虑求解其对偶问题:

$$\begin{aligned} \min_{\beta} \quad & \sum_{s \in S} c_{\text{LR2\_SPR}}(s; \lambda) \beta_s \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{s \in S} \gamma_k^s \beta_s = 1, \forall k \in N, \\ & \beta_s \geq 0, \forall s \in S, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\{\beta_s : \forall s \in S\} \in \mathbb{R}^{(2^n-1) \times 1}$  是决策变量。根据强对偶理论, 式 (12) 等价于式 (13)。根据标准的列生成算法, 本文提出算法 2 求解式 (13), 并得到子博弈 2 最优成本分摊。

**算法 2** 为求解子博弈 2  $(N, c_{\text{LR2\_SPR}}(\cdot; \lambda))$  的最优稳定成本分摊  $\alpha_{\text{LR2\_SPR}}^\lambda$  的 CGB 算法包含以下四步:

**Step 1** 给定集合  $S' \subset S$  含有多项式数目的元素, 求解主规划问题式 (13) 的最优对偶解  $\pi^*$ 。

**Step 2** 找到定价子问题的最优联盟  $s^*$

$$\min_{s \in S \setminus S'} \left\{ c_{\text{LR2\_SPR}}(s; \lambda) - \sum_{k \in N} \gamma_k^s \pi_k^* \right\}。 \quad (14)$$

在计算上述定价子问题时, 为计算上的方便, 需要对原问题进行改造, 为保持改造后的问题和原问题保持一致, 在原问题中加入两组约束条件如下:

$$z_{ij}^k \leq \gamma_k^s, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N, \quad (15)$$

$$z_{ij}^k \leq z_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N, \quad (16)$$

原定价子问题最终被改造为如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\gamma; z; z^k} \quad & - \sum_{k \in N} \sum_{(i, j) \in E} \lambda_{ij}^k z_{ij}^k - \sum_{k \in N} \gamma_k^s \pi_k^* \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{(i, j) \in E} r_{ij} z_{ij} \leq \sum_{k \in N} R_k \gamma_k^s, \\ & z_{ij}^k \leq \gamma_k^s, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N, \\ & z_{ij}^k \leq z_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N, \\ & z_{ij}, z_{ij}^k, \gamma_k^s \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E, k \in N. \end{aligned} \quad (17)$$

**Step 3** 若存在代入式 (17) 的值为负数的联盟  $s^*$ , 将其添加到集合  $S'$ , 然后返回第一步; 若不存在, 则对偶问题式 (13) 已求得最优解, 进行 Step 4。

**Step 4** 根据更新的联盟集合  $S'$  和其对应的特征函数值  $\{c_{\text{LR2\_SPR}}(s; \lambda) : \forall s \in S'\}$ , 下面的线性规划问题可以求得博弈  $(N, c_{\text{LR2\_SPR}}(\cdot; \lambda))$  的最优稳定成本分摊  $\alpha_{\text{SPR}}^\lambda$ :

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \quad & \sum_{k \in N} \alpha_{\text{LR2\_SPR}}^\lambda(k) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k \in s} \alpha_{\text{LR2\_SPR}}^\lambda(k) \leq c_{\text{LR2\_SPR}}(s, \lambda), \quad \forall s \in S'. \end{aligned} \quad (18)$$

值得一提的是, 算法 2 的 Step 1 中初始集合  $S'$  的选取不会影响最优解, 选取不同的初始集合  $S'$  产生的最优解都是相同的, 并且等于取所有列  $S$  计算获得的最优解。算法 2 最终生成的列的集合 (属于所有列的集合  $S$ ), 一定包含所有会对最优解产生影响的列的最小子集, 同时也包含初始集合  $S'$ 。我们在选取初始集合  $S'$  时, 是从经验的角度, 尽量选取会对目标函数值产生影响的列组成初始集合  $S'$ 。选取不同的初始集合  $S'$  只会稍微影响求解时间, 即初始集合  $S'$  选的越好, 计算效率越高, 但选取不同的初始集合  $S'$  并不会对最优解的值产生影响。

**定理 2** 通过 CGB 算法求得的向量  $\alpha_{\text{LR2\_SPR}}^\lambda$  是子博弈 2  $(N, c_{\text{LR2\_SPR}}(\cdot; \lambda))$  的最优稳定成本分摊。

在以上的 CGB 算法中, 难点是求解定价子问题, 即式 (14)。针对最短路修复合作博弈的子博弈 1 和子博弈 2, 在分别求得其最优的稳定成本分摊  $\alpha_{\text{LR1\_SPR}}^\lambda$  和  $\alpha_{\text{LR2\_SPR}}^\lambda$  后, 可以通过定理 1 求得最短路修复合作博弈的成本分摊。更重要的是, 由定理 2 可知, 如果  $\lambda^*$  是最优的拉格朗日乘子, 并且  $(N; c_{\text{LR2\_SPR}}(\cdot; \lambda^*))$  有一个非空的核心, 则相应的拉格朗日成本分摊  $\sum_{k \in N} \alpha_{\text{LR\_SPR}}^{\lambda^*}(k)$  等于拉格朗日下界  $c_{\text{LR\_SPR}}(N; \lambda^*)$ 。

值得注意的是, 当联盟中的每个局中人所拥有的可用来修复毁坏道路的资源  $R^k$ , 满足以下两个条件之一: (1)  $R^k \rightarrow 0, \forall k \in N$ ; (2)  $R^k \geq \sum_{(i, j) \in E} r_{ij}, \forall k \in N$ , 则该最短路修复合作博弈一定有核。换言之, 当联盟中的每个局中人所拥有的可用来修复毁坏道路的资源极少 (即使所有局中人的资源之和, 也不够修复任意一条道路), 或者资源极多 (每个

局中人的资源都足够修复所有受损道路), 则所有局中人的成本分摊之和就等于大联盟总成本 (满足预算平衡约束), 并且每个局中人的成本分摊, 就等于其自身所花费的运输成本 (满足联盟稳定性约束)。

4 不同规模下的算法仿真结果

本节所有的仿真实验均在同一台计算机上进行, 其系统版本是 Windows 10 专业版, 中央处理器规格为 Intel Core i7-8700, 8.00G RAM, 3.20 GHz CPU。所有的算法均由 Matlab R2019a 编辑运行。下面给出本文提出的基于拉格朗日松弛理论的最短路修复合作博弈成本分摊算法, 在不同情形下的计算效果。

在小规模情形下, 本研究随机仿真三组不同规模的交通网络。每组网络分别包含 10 个节点、20 个节点和 30 个节点, 网络密度均为 50% 左右, 即三组网络图分别对应 20 条边、100 条边和 200 条边, 对应的局中人人数分别为 5 人、10 人和 15 人。灾前运输成本  $\{c'_{ij} : \forall (i, j) \in E\}$  服从  $[10, 30]$  上的整数均匀分布, 灾后运输成本  $c_{ij}$  等于  $c'_{ij}$  和服从  $[1, 2]$  上均匀分布的一个实值的乘积, 边  $(i, j)$  的修复所需资源量  $r_{ij}$  服从  $[10, 30]$  上的整数均匀分布, 所有局中人的权重向量  $w$  服从  $[5, 15]$  上的整数均匀分布。在不同的交通网络中, 设定每个局中人拥有可用于修复道路的资源量, 均服从  $[5, 15]$  上的整数均匀分布, 即修复毁坏路径的总资源量期望分别为 50、100、150。仿真结果如表 2 所示:

表 2 小规模情形下的仿真结果

$(m, n)$	OCA/GCC /%			LRCA/GCC /%			CPU Time/s	
	Avg.	Max.	Min.	Avg.	Max.	Min.	T <sub>OCA</sub>	T <sub>LRCA</sub>
(10,5)	99.22	100.00	96.21	96.03	98.63	92.72	0.29	0.66
(20,10)	99.55	100.00	97.80	93.65	97.32	88.33	44.15	4.60
(30,15)	99.80	100.00	99.52	92.05	93.61	88.92	5940.83	16.85

在中规模情形下, 本文同样随机仿真三组不同规模的交通网络, 每组网络分别包含 40 个节点、60 个节点和 80 个节点, 网络密度均为 50% 左右, 即三组网络图分别对应 400 条边、900 条边和 1 600 条边, 对应的局中人人数分别为 20 人、30 人和 40 人, 其他参数设定与小规模相同。仿真结果如表 3 所示:

表 3 中规模情形下的仿真结果

$(m, n)$	LRCA/LRB/%			LRB/UB/%			CPU Time/s	
	Avg.	Max.	Min.	Avg.	Max.	Min.	T <sub>OCA</sub>	T <sub>LRCA</sub>
(40,20)	99.68	99.93	99.39	90.14	92.41	86.31	—	38.46
(60,30)	99.88	99.99	99.68	88.38	90.88	85.73	—	156.10
(80,40)	99.95	99.99	99.79	86.93	88.40	84.45	—	442.61

在大规模情形下, 本研究随机仿真的交通网络均包含 100 个节点, 均有 50 个局中人负责运送物资。不同的是, 这三组网络图分别包含 500、1 500 和 4 500 条无向边。在不同的交通网络中, 设定每个局中人拥有可用于修复道路的资源量, 分别服从区间  $[5, 15]$ ,  $[15, 25]$ ,  $[25, 35]$  上的均匀分布, 即修复毁坏路径的总资源分别为 500、1 000 和 1 500。换言之, 大联盟的总资源分别平均可以修复 25、50 和 75 条边。仿真结果如表 4、表 5 和表 6 所示:

表 4 大规模情形下的仿真结果, 100 个节点, 50 个局中人, 500 条边

<i>R</i>	LRCA/LRB/%			LRB/UB/%			CPU Time/s
	Avg.	Max.	Min.	Avg.	Max.	Min.	
500	99.98	99.99	99.95	85.31	88.28	83.54	1 300.88
1 000	95.22	98.53	93.46	89.83	93.10	86.98	1 687.64
1 500	86.07	88.77	83.27	96.17	97.97	94.34	1 633.76

表 5 大规模情形下的仿真结果, 100 个节点, 50 个局中人, 1 500 条边

<i>R</i>	LRCA/LRB/%			LRB/UB/%			CPU Time/s
	Avg.	Max.	Min.	Avg.	Max.	Min.	
500	99.97	100.00	99.92	85.52	88.03	82.53	1 045.64
1 000	89.60	92.64	86.79	92.14	94.80	89.97	1 024.83
1 500	80.28	84.28	77.41	98.81	99.66	97.15	1 062.01

表 6 大规模情形下的仿真结果, 100 个节点, 50 个局中人, 4 500 条边

<i>R</i>	LRCA/LRB/%			LRB/UB/%			CPU Time/s
	Avg.	Max.	Min.	Avg.	Max.	Min.	
500	98.75	99.98	94.98	87.04	89.50	84.43	941.11
1 000	83.98	87.17	80.79	96.00	97.18	94.32	904.30
1 500	77.46	81.65	73.78	99.98	100.00	99.67	974.56

在本章的各表中, OCA 表示最优的成本分摊; GCC 表示大联盟的总运输成本的最优值; LRCA 表示通过基于拉格朗日松弛的最短路修复合作博弈成本分摊算法求得的最大成本分摊; LRB 表示通过该算法获得的大联盟总运输成本的下界; UB 表示通过该算法获得的大联盟总运输成本的上界。其中 OCA 和 GCC 的结果, 是通过商用优化求解器 Gurobi 9.1.1 运算求解。

本研究根据商业优化求解器 Gurobi 9.1.1 求解 OCA 的平均运算时间区分小规模和中大规模情形。在每组 20 次随机仿真实验中, 如果最优成本分摊 OCA 的平均求解时间在 2 小时以内, 则将该组随机仿真定义为小规模情形。当最优成本分摊 OCA 的平均求解时间超过 2 小时的时候, 根据运输网络中的节点数目区分中大规模情形, 如果运输网络中的节点在 100 个以下, 则该随机仿真为中规模情形, 否则为大规模情形。

表 2 和表 3 展示中小规模情形下的运算结果, 其中  $(m, n)$  表示仿真网络的规模, 即有  $m$  个节点和  $n$  个局中人;  $T_{OCA}$  表示通过商用求解器求解成本分摊的运行时间,  $T_{LRCA}$  表示基于拉格朗日松弛的最短路修复合作博弈成本分配算法的运行时间。

表 4、表 5 和表 6 呈现大规模情形下的运算结果, 其中  $R$  表示大联盟中的所有局中人拥有可用于修复道路的总资源量; CPU Time 表示通过本研究提出的基于拉格朗日松弛的最短路修复合作博弈成本分摊算法的运行时间。

针对上述每一组交通网络, 本研究分别进行 20 次仿真实验, 并统计获得以上仿真计算结果。通过观察这些结果, 可以得出如下结论:

第一, 该最短路修复合作博弈的成本分摊问题是空核的。在表 2 的小规模情形下, 三组仿真实验均有空核的情况存在。例如, 10 个节点, 5 个局中人的 20 次仿真实验中, 有 9 次的 OCA/GCC 不到 100.00%。

第二, 在表 2 的小规模情形下, Gurobi 9.1.1 求解的最优成本分摊和大联盟总运输成

本比值  $OCA/GCC$  的平均值, 均在 99% 以上, 本算法计算的成本分摊和大联盟总运输成本比值  $LRCA/GCC$  的平均值, 均在 92% 以上; 在表 3 的中规模情形下, 商用优化求解器 Gurobi 9.1.1 计算  $OCA$  的平均运行时间已超过 2 h (7 200 s), 本算法用拉格朗日成本分摊与拉格朗日成本下界之间的比值  $LRCA/LRB$  替代  $OCA/GCC$ , 其比值均在 99% 以上, 拉格朗日松弛成本上下界之间比值  $LRB/UB$  的平均值, 均在 85% 以上; 本算法的计算精度较高。在所有中规模情形下的仿真实验中, 均可以在 10 min 内解决问题; 本算法相比通过商用求解器求最优成本分摊, 在运算时间上具有明显的优势。

第三, 在表 4、表 5 和表 6 的大规模情形下, 本算法计算的拉格朗日松弛成本上下界之间比值  $LRB/UB$  的平均值, 随着每个局中人汇总的修复道路资源量增大而增大, 随着运输网络密度增大而增大。 $LRB/UB$  的值越大, 表示拉格朗日松弛上下界越接近最优成本, 上下界的计算效果越好。当资源量和运输网络密度足够大时, 可以看到  $LRB/UB$  的值几乎均达到 100.00%。由此可以看出, 每个局中人汇总的修复道路资源量和运输网络密度越大, 拉格朗日松弛成本上下界的计算效果越好。

第四, 在表 4、表 5 和表 6 的大规模情形下, 本算法计算的成本分摊和拉格朗日松弛成本下界之间的比值  $LRCA/LRB$  的平均值, 随着每个局中人汇总的修复道路资源量减小而增大, 随着运输网络密度减小而增大。如果我们定义  $LRCA/LRB$  越接近 100%, 代表大联盟合作越容易达成, 那么产生  $LRCA/LRB$  计算结果的原因可能是, 每个局中人汇总的修复道路资源量和运输网络密度越小, 大联盟合作越容易达成。

## 5 基于玉树地震灾区现实数据的算法仿真结果

2010 年 4 月 14 日上午 7 时 49 分, 我国青海玉树发生里氏 7.1 级地震。当地的运输网络遭到严重毁坏, 同时灾区资源匮乏, 主要救灾及灾后恢复重建物资基本依靠外部输入。根据交通运输部相关通知要求, 玉树灾后恢复重建运输保障工作由青海省政府总负责, 统筹调配救援及重建物资, 同时其周边的四川、西藏等省份, 要建立应急运输协调机制, 共同合作完成玉树灾区恢复重建工作。

在玉树灾后恢复重建运输保障工作中, 救援及重建物资主要从青海西宁、四川甘孜、西藏昌都和青海玉树机场四地, 沿主要公路干道送往受灾程度不同的各乡镇灾区。在实际的运输过程中, 每批物资由一个车队 (局中人) 负责运输, 并且每个局中人均拥有一定的道路修复资源。若每个局中人能集中各自的道路修复资源, 合作完成灾区受损道路的修复及物资运输保障工作, 可使得总体运输成本最小。为促使所有局中人达成合作, 需要对每个局中人完成任务所花费的运输成本进行合理的分摊, 分摊完成后的总成本和大联盟总运输成本的缺口, 由中央政府给予一定的财政补贴。

基于玉树地震背景, 本文收集了玉树地震灾区的现实数据, 并对玉树灾区物资运输进行模拟仿真, 验证了本研究提出的基于拉格朗日松弛理论的成本分摊算法的有效性。主要数据来源如下:

(1) 网络图: 玉树地震涉及青海省玉树藏族自治州玉树、称多、治多、杂多、囊谦、曲麻莱县和四川省甘孜藏族自治州石渠县等 7 个县的 27 个乡镇。本网络图以受灾的 27 个乡镇及通往灾区的西宁、甘孜、昌都和玉树机场为关键节点。节点之间若有道路相连通, 则将节点连接, 构造网络图, 如图 2 所示。

(2) 路径的运输成本: 以当前的实际运输时间作为修复后的运输成本。修复前的运输成本由目前运输时间乘以路径两端点的受灾等级对应的系数确定 (玉树地震波及范围划



图 2 玉树地震灾区物资运输路线图

分为极重灾区、重灾区、一般灾区和灾害影响区,其系数分别对应为 2, 1.5, 1.2)。

(3) 修复路径所需资源: 灾后余震不断, 沿途经常有零星塌方。路径越长, 受灾程度越严重, 所需要的资源越多。因此路径修复所需资源, 由路径长度乘以路径两端点的受灾等级对应的系数确定。

(4) 物资运输任务: 起点为玉树机场、西宁、甘孜、昌都。终点为极重灾区-结古镇、重灾区-隆宝镇、重灾区-仲达乡、重灾区-安冲乡、重灾区-巴塘乡。任务共计 20 个。

(5) 各项车队的资源: 每个车队拥有的可用于修复毁坏道路的资源, 根据运输任务的起点物资量以及终点需求量进行比例分配。首先, 在实际的运输过程中, 由于西宁至玉树公路等级高, 昌都、甘孜至玉树公路等级低, 主要的物资由西宁运输, 所以将玉树机场、西宁、甘孜、昌都的物资比例设定为 1:7:1:1。其次, 根据灾区受灾人口比例确定极重灾区-结古镇、重灾区-隆宝镇、重灾区-仲达乡、重灾区-安冲乡、重灾区-巴塘乡的需求为 16:1:1:1。

(6) 各项任务的权重: 每个运输任务的权重根据运输任务的起点权重以及终点权重相乘决定。终点权重根据灾区受灾人口比例确定, 起点权重考虑到机场运输的物资为紧急物资, 将玉树机场、西宁、甘孜、昌都的权重比例设定为 4:4:1:1。

基于以上分析, 本研究首先根据玉树地震现实情况, 建立灾后运输网络中的最短路修复合作博弈问题模型; 然后根据章节 3.1 中的拉格朗日松弛过程和博弈分解的方法, 将问题拆解为子博弈 1 和子博弈 2; 接着根据引理 1 求得子博弈 1 的最优成本分摊, 根据算法 2 求得子博弈 2 的最优成本分摊; 最后将子博弈 1 和子博弈 2 的最优成本分摊进行加和, 获得分摊的总成本  $\alpha$ , 以及每个地点分摊的成本  $\alpha_i$ 。本研究用  $\alpha_i$  表示从  $i$  地点出发的车队 (局中人) 分摊的成本之和; 用每个局中人不进行合作时, 从每个地点出发的车队 (局中人) 花费的运输成本之和  $\beta_i$  和总运输成本  $\beta$  作为对照组; 用  $r_i$  表示大联盟合作以后, 每个地点成本下降的比例, 用  $r$  表示总成本下降的比例, 其中  $r_i = (\beta_i - \alpha_i) / \beta_i$ 。角标  $\{i = A, B, C, D\}$  分别表示玉树机场、西宁、甘孜、昌都四地。主要结果如表 7 所示。

由表 7 中可知, 在合作博弈方面, 当大联盟进行合作以后, 每个地点的成本都有所下降, 其中总成本  $r$  下降了 11.05%, 玉树机场一地的成本之和下降比例  $r_A$  达到了 70.56%, 由此可以看出, 合作会减少社会资源的消耗。在求解精度方面, 本算法不仅精确求得大联

表 7 基于玉树地震灾区现实数据的算法仿真结果

$\alpha_i$				$\alpha$
$\alpha_A$	$\alpha_B$	$\alpha_C$	$\alpha_D$	
1 852.16	49 189.00	19 029.90	11 973.35	82 044.41
$\beta_i$				$\beta$
$\beta_A$	$\beta_B$	$\beta_C$	$\beta_D$	
6 292.00	50 448.35	22 029.28	13 462.30	92 231.93
$r_i$				$r$
$r_A$	$r_B$	$r_C$	$r_D$	
70.56%	2.50%	13.62%	11.06%	11.05%
UB	LRB	GCC	$\alpha$ /GCC	CPU Time/s
83 460.00	83 460.00	83 460.00	98.30%	19.61

盟的最优运输成本 (UB = LRB = GCC), 而且在已知该博弈的核心为空核的情形下, 获得总成本分摊和大联盟的总成本之比  $\alpha_{\text{总}}/\text{GCC}$  达到 98.30% 的结果。在运算时间方面, 对于给定玉树地震灾区现实数据 31 个节点和 20 个局中人的实际问题, 仅用 19.61 s 就得到成本分摊。本研究提出的基于拉格朗日松弛理论的成本分摊算法在求解精度和运算时间上都取得较好的效果, 实际应用价值较高。

6 结 论

本文在灾后运输网络被破坏的背景下, 定义出最短路修复合作博弈问题。针对该博弈中的 OCAP, 本研究提出了一种基于拉格朗日松弛的成本分摊算法, 不同于以往基于线性松弛理论的求解方法, 本算法可避免依赖于“可分配”约束的局限性。该算法的主要思想为将最短路修复合作博弈分解为两个子博弈, 其中子博弈 1 为简单的有核合作博弈, 其局中人的最优成本分摊就是每个局中人自身的运输成本; 子博弈 2 虽然为空核合作博弈, 但可通过列生成算法高效地获得其最优成本分摊; 将子博弈 1 和子博弈 2 的最优成本分摊相加, 即可获得原博弈的一个近乎最优的稳定成本分摊方案, 使其在满足联盟稳定性的条件下, 尽可能地覆盖大联盟的总成本。最后, 本研究通过随机仿真数据以及玉树地震灾区的现实模拟数据对该算法进行了验证, 结果表明无论是仿真数据还是现实数据, 该算法都能在短时间内为最短路修复合作博弈提供稳定的成本分摊方案。本研究在求解灾后运输网络中的最短路修复合作博弈成本分摊的过程中, 结合玉树地震灾区的现实数据进行模拟的思路和结果, 可为今后类似的现实问题求解提供一定的借鉴。

参 考 文 献

[1] 谢政. 对策论导论 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[2] 于晓辉, 杜志平, 张强, 等. 基于 T-联盟 Shapley 值的分配策略 [J]. 运筹学学报, 2020, 24(4): 113-127.

[3] 于晓辉, 杜志平, 张强, 等. 一种资源投入不确定情形下的合作博弈形式及收益分配策略 [J]. 运筹学学报, 2019, 23(4): 71-85.

[4] Maschler M, Peleg B, Shapley L S. Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1979, 4(4): 303-338.



- [5] Kern W, Paulusma D. Matching games: The least core and the nucleolus [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2003, **28**(2): 294-308.
- [6] Schulz A S, Uhan N A. Sharing supermodular costs [J]. *Operations Research*, 2004, **58**(4): 1051-1056.
- [7] Schulz A S, Uhan N A. Approximating the least core value and least core of cooperative games with supermodular costs [J]. *Discrete Optimization*, 2013, **10**(2): 163-180.
- [8] Jain K, Mahdian M. Cost sharing [M]//*Algorithmic Game Theory*. New York: Cambridge University Press, 2007: 385-410.
- [9] Faigle U, Fekete S P, Hochstattler W, et al. On approximately fair cost allocation in Euclidean TSP games [J]. *Operations Research-Spektrum*, 1998, **20**(1): 29-37.
- [10] Blaser M, Ram L S. Approximately fair cost allocation in metric traveling salesman games [J]. *Theory of Computing Systems*, 2008, **43**(1): 19-37.
- [11] Caprara A, Letchford A N. New techniques for cost sharing in combinatorial optimization games [J]. *Mathematical Programming*, 2010, **124**(1): 93-118.
- [12] Liu L, Qi X. Network disruption recovery for multiple pairs of shortest paths [C]//*2014 11th International Conference on Service Systems and Service Management (ICSSSM)*. Beijing: IEEE, 2014: 1-6.
- [13] Andonov R, Poirriez V, Rajopadhye S. Unbounded knapsack problem: Dynamic programming revisited [J]. *European Journal of Operational Research*, 2000, **123**(2): 394-407.
- [14] Held M, Karp R M. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees [J]. *Operations Research*, 1970, **18**(6): 1138-1162.
- [15] Zhang C, Gao Y, Yang L, et al. Joint optimization of train scheduling and maintenance planning in a railway network: A heuristic algorithm using Lagrangian relaxation [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2020, **134**: 64-92.
- [16] Liu L, Qi X, Xu Z. Computing near-optimal stable cost allocations for cooperative games by Lagrangian relaxation [J]. *INFORMS Journal on Computing*, 2016, **28**(4): 687-702.
- [17] 张惠珍, 魏欣, 马良. 求解无容量设施选址问题的半拉格朗日松弛新方法 [J]. *运筹学学报*, 2015, **19**(4): 37-47.
- [18] 赵宇哲, 周晶淼, 匡海波, 等. 航运资产整合下海运网络的航线、路径和船舶的集成优化 [J]. *系统工程理论与实践*, 2018, **38**(8): 2110-2122.
- [19] Held M, Wolfe P, Crowder H P. Validation of subgradient optimization [J]. *Mathematical Programming*, 1974, **6**(1): 62-88.