例: $\mathcal{X}=\left[\begin{matrix}1&2&3\\3&2&1\end{matrix}\;\;\begin{matrix}3&2&2\\1&1&1\end{matrix}\right]\in\mathbb{R}^{2\times3\times2}$, $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$

$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times3}$

对于 mode n product

$2\times3\times2$

有两种计算方式

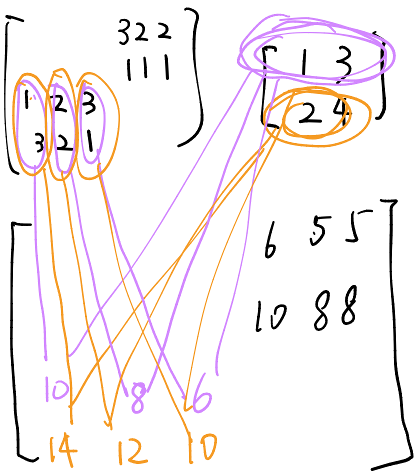
① 直接计算: 对 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}\times_n A$

就是固定除n以外的维度.

沿第n维与矩阵A的对应行作内积

例如本题. 求 $\mathcal{X}\times_1 A$

沿 mode-1 对 $\mathcal{X}[:,k,l]$ 和 $A[j,:]$ 做内积



② 还可以先把 $\mathcal{X}$ 按 mode-1 展开

$$\mathcal{X}_{(1)}=\begin{bmatrix}1&2&3&3&2&2\\3&2&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Y}_{(1)}=A\mathcal{X}_{(1)}=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&3&2&2\\3&2&1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&8&6&6&5&5\\14&12&10&10&8&8\end{bmatrix}$$

折叠回去 $\left[\begin{matrix}10&8&6\\14&12&10\end{matrix}\;\;\begin{matrix}6&5&5\\10&8&8\end{matrix}\right]$

$\mathcal{X} \times_3 A$ 　　 $2\times3\times2$ 　　 2×2 　　 $\underline{ij = k}$

① $\begin{bmatrix} \begin{matrix} & & & 3 & 2 & 2 \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & & & \\ 3 & 2 & 1 & & & \end{matrix} \end{bmatrix} \times_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \begin{matrix} & & & 14 & 12 & 14 \\ & & & 10 & 8 & 6 \\ 10 & 8 & 9 & & & \\ 6 & 5 & 4 & & & \end{matrix} \end{bmatrix}$

$3+6$

4

② $\mathcal{X}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{Y}_{(3)} = A \cdot \mathcal{X}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 8 & 9 & 6 & 5 & 4 \\ 14 & 12 & 14 & 10 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

按照 mode-3 折叠回去

$\begin{bmatrix} \begin{matrix} & & & 14 & 12 & 14 \\ & & & 10 & 8 & 6 \\ 10 & 8 & 9 & & & \\ 6 & 5 & 4 & & & \end{matrix} \end{bmatrix}$

与向量的模n积

假设有n阶张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$，向量 $v \in \mathbb{R}^{I_n}$

mode-n product 记为 $\mathcal{X} \times_n v$

若 $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_n v$，则其阶数为 $N-1$，size为 $I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \times 1 \times I_{n+1} \times \cdots I_N$

eg: $\mathcal{X} = \left[\begin{matrix} & & & 3 & 1 & 1 \\ & & & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & & & \\ 3 & 2 & 1 & & & \end{matrix}\right]$ $\vec{v} = (2, 1)$

$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 3 \times 2}$ $\vec{v} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

则有 $\mathcal{X} \times_1 \vec{v}$

$$\mathcal{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Y}_{(1)} = \vec{v} \cdot \mathcal{X}_{(1)} = (2, 1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= [5, 6, 7, 8, 3, 3]$$

堆叠回去：$\left[\begin{matrix} & & & 8 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & & & \end{matrix}\right] \in \mathbb{R}^{1 \times 3 \times 2}$

可以看到第n阶变为1，相当于少了一阶