

ВОПРОСЫ НА ПОНИМАНИЕ

Упражнение 1 (15 баллов). Ответьте на следующие вопросы:

1. Что такое несмещенная оценка? Что это свойство оценок означает?
2. Что такое состоятельная оценка? Что это свойство оценок означает?
3. Что такое функция правдоподобия? Что она означает?
4. Что позволяет оценивать метод Монте-Карло?
5. В каких случаях для оценки «среднего» случайной величины лучше использовать медиану вместо среднего арифметического?
6. Какие существуют оценки для дисперсии случайной величины? Какие из них лучше?

ЗАДАЧИ

Упражнение 2 (15 баллов). Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 3)$, $i = 1, \dots, n$. Проверьте несмещенность и состоятельность следующих оценок неизвестного параметра $\theta \in \mathbb{R}$:

- (1) $\hat{\theta}_1(x_1, \dots, x_n) = 0$;
- (2) $\hat{\theta}_2(x_1, \dots, x_n) = x_1$;
- (3) $\hat{\theta}_3(x_1, \dots, x_n) = 2x_n$;
- (4) $\hat{\theta}_4(x_1, \dots, x_n) = 2x_2 - x_3$;
- (5) $\hat{\theta}_5(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$.

Посчитайте значения этих оценок на следующих данных ($n = 10$):

-3.19 2.25 4.64 -0.39 -1.44 -1.87 -1.68 0.27 0.43 0.58.

Упражнение 3 (15 баллов). Пусть дана реализация выборки x_1, \dots, x_n из равномерного распределения на отрезке $[0; \theta]$. Найдите оценку для неизвестного параметра θ методом моментов и методом максимального правдоподобия. Исследуйте полученные оценки на несмещенность и состоятельность. Реализуйте эту задачу в Python:

- (1) сгенерируйте θ из равномерного распределения на $[25, 50]$;
- (2) сгенерируйте выборку из равномерного распределения на $[0; \theta]$ размера $n = 10, 100, 1\,000, 10\,000$;
- (3) найдите значения полученных оценок;
- (4) убедитесь, что значения полученных оценок сходятся к неизвестному параметру θ с ростом n .

Упражнение 4 (15 баллов). Пусть дана реализация выборки x_1, \dots, x_n из равномерного распределения на отрезке $[\theta; \theta + 1]$. Найдите оценку для неизвестного параметра θ методом моментов и методом максимального правдоподобия.

Упражнение 5 (20 баллов). Пусть дана реализация выборки x_1, \dots, x_n из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$. Найдите оценки для неизвестных параметров θ_1 и θ_2^2 методом моментов и методом максимального правдоподобия. Являются ли оценки θ_1 несмещенными и состоятельными? Являются ли оценки θ_2^2 несмещенными? Сделайте какое-то предположение о состоятельности оценок на θ_2 . Реализуйте эту задачу в Python:

- (1) сгенерируйте θ_1 из равномерного распределения на $[-5, 5]$, а θ_2^2 — из равномерного распределения на $[0.5, 10]$;
- (2) сгенерируйте выборку из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ размера $n = 10, 100, 1\,000, 10\,000$;
- (3) найдите значения полученных оценок;
- (4) убедитесь, что значения полученных оценок сходятся к неизвестным параметрам θ_1 и θ_2^2 с ростом n .

Упражнение 6 (10 баллов за реализацию + 10 баллов за значение n). В Python найдите с помощью метода Монте-Карло площадь заштрихованной желтым фигуры (см. рисунок ниже). Сколько случайных точек надо бросить в этот квадрат, чтобы получить значение площади с точностью 0.01 и с вероятностью примерно равной 0.997?

