# Прикладная статистика. Регрессия. Временные ряды.

Леонид Иосипой

Программа «Математика для анализа данных»
Центр непрерывного образования, ВШЭ

12 января 2021

- Повторение
- Регрессия
- Временные ряды

# Повторение

Ковариация случайных величин $X$ и $Y$ — число, которое характеризует зависимость случайных величин и определяется следующим образом:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Корреляция случайных величин $X$ и $Y$ — нормированная их ковариация, которая вычисляется следующим образом:

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\, X \cdot \mathrm{Var}\, Y}}.$$

Такой величиной удобно пользоваться на практике, так как ее значения будут уже лежать в отрезке $[-1, 1]$.

# Повторение

Теоретический коэффициент корреляции измеряет наличие прямой линейной зависимости. Причем

- $\mathrm{Corr}(X, Y) = 1$ тогда и только тогда, когда $Y = aX + b$ для некоторых $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Corr}(X, Y) = -1$ тогда и только тогда, когда $Y = aX + b$ для некоторых $a < 0$ и $b \in \mathbb{R}$.

# Повторение

Пусть теперь у нас есть реализации $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ из законов распределения $X$ и $Y$ соответсвенно.

Оценить $\mathrm{Cov}(X, Y)$ можно с помощью оценки

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) (y_i - \overline{y}),$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ — средние значения выборок.

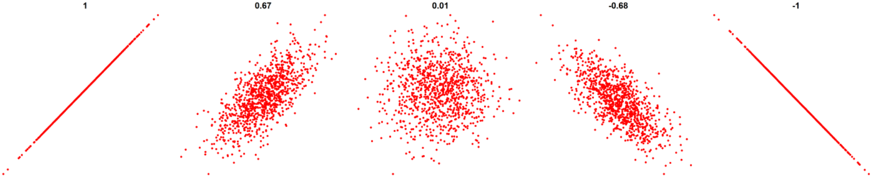
Оценить $\mathrm{Corr}(X, Y)$ можно с помощью оценки

$$\widehat{\rho}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}}.$$

Эта оценка называется коэффициентом корреляции Пирсона.

# Повторение

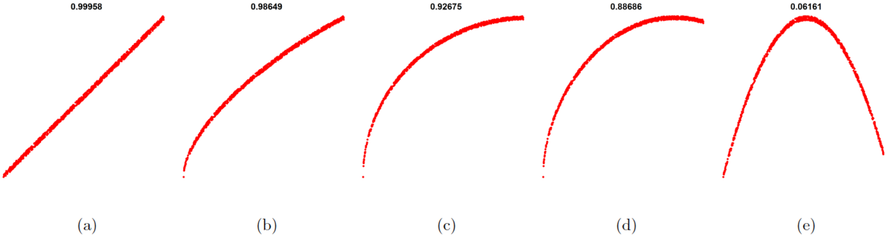
Коэффициент Пирсона тоже будет лежать в диапазоне $[-1, 1]$ и будет измерять наличие прямой линейной зависимости




(a) (b) (c) (d) (e)

# Повторение

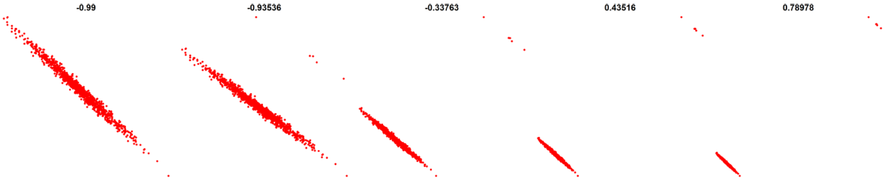
Он нечувствителен к другим видам зависимостей




(a) (b) (c) (d) (e)

# Повторение

И неустойчив к выбросам




(a) (b) (c) (d) (e)

# Повторение

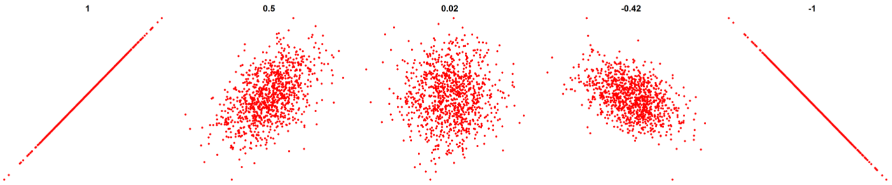
Существует еще ранговый коэффициент корреляции — коэффициент корреляции Спирмена.

Заменим $x_i$ на их ранги $R_i$ в ряду $x_1, \ldots, x_n$, а $y_i$ — на их ранги $S_i$ в ряду $y_1, \ldots, y_n$. Тогда коэффициентом корреляции Спирмена называется величина

$$\widehat{\rho}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(R_i - \overline{R}\right) \left(S_i - \overline{S}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2 \sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2}}.$$

# Повторение

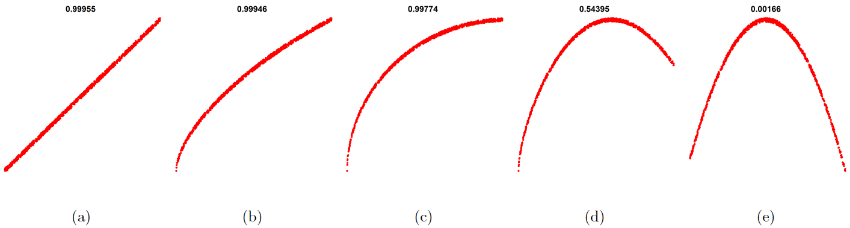
Если $\widehat{\rho}_s$ близок по абсолютному значению к 1, то это означает, что $R_i$ почти линейно зависят от $S_i$, то есть зависимость $X_i$ от $Y_i$ монотонна




(a) (b) (c) (d) (e)

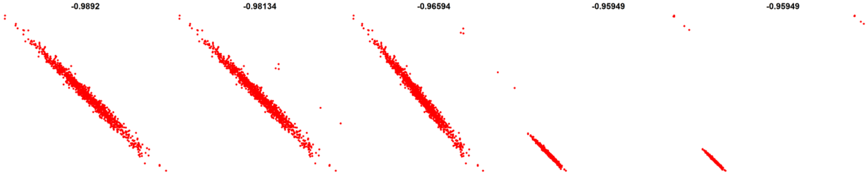
# Повторение

Коэффициент корреляции Спирмена так же нечувствителен к более сложным видам зависимостей



# Повторение

Но из-за того, что он считается по рангам, а не по наблюдениям, является более устойчивым к выбросам




(a) (b) (c) (d) (e)

# Повторение

После того, как был посчитан какой-то коэффициент корреляции, можно проверить значимость этого коэффициента с помощью критерия.

Более удобным оказывается ранговый коэффициент корреляции Спирмена:

- у него однозначно определено нулевое распределение при достаточно общих предположениях;
- при больших $n$ можно воспользоваться сходимостью к нормальному закону

$$\frac{\widehat{\rho}_s}{\sqrt{\operatorname{Var}\widehat{\rho}_s}} = \widehat{\rho}_s\sqrt{n-1} \to Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

# Повторение

## Критерий Спирмена

выборки: $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n),\ X_i \sim F_X$
$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n),\ Y_i \sim F_Y$

нулевая гипотеза: $H_0: \ \widehat{\rho}_s = 0$

альтернатива: $H_1: \ \widehat{\rho}_s \neq 0$ или $\widehat{\rho}_s > 0$ или $\widehat{\rho}_s < 0$

статистика: $\widehat{\rho}_s$

нулевое распределение: известное для малых выборок
нормальное для больших выборок

# Регрессия

Регрессионный анализ решает задачу выявления искаженной случайным «шумом» зависимости некоторого показателя $Y$ от измеряемых переменных $X_1, \dots, X_k$.

Основной целью обычно является как можно более точный прогноз $Y$ по новым измеряемым переменным $X_1, \dots, X_k$.

Кроме того, с помощью регрессии можно: измерить влияние факторов на отклик, исключить ненужные/неудобные факторы, найти выбросы.

# Регрессия

Мы будем изучать линейную регрессию.

В линейной регрессии мы делаем предположение, что

$$y_i \approx \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots \beta_k x_{ik}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

- $y_i, x_{i1}, \ldots, x_{ik}$ — отклик и значения $k$ признаков для этого отклика (нам известные);
- $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ — константы, которые не зависят от номера отклика (нам неизвестные).

Задача состоит в том, чтобы оценить $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$.

# Регрессия

Регрессионное равенство можно переписать в матричном виде как

$$y \approx X\beta,$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{10} = 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n0} = 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Здесь мы добавили в матрицу $X$ единичный столбец, чтобы больше не думать про коэффициент $\beta_0$.

# Регрессия

Мы будем изучать свойства метода наименьших квадратов без использования каких-либо регуляризаторов:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \ldots \beta_k x_{ik})^2 = \|y - X\beta\|^2 \to \min_{\beta}$$

Точное решение $\widehat{\beta}$ этой задачи известно и равно

$$\widehat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y.$$

Можно посчитать и предсказание модели $\widehat{y}$ на объектах, на которых она обучается:

$$\widehat{y} = X(X^\top X)^{-1} X^\top y.$$

# Регрессия

Итак, строить обычную линейную регрессию очень просто.

Однако если по построенной модели хочется делать какие-то выводы с использованием статистических методов, необходимо приложить дополнительные усилия.

# Регрессия

Чтобы исследовать качество решения метода наименьших квадратов, определим величину TSS (Total Sum of Squares) — разброс y относительно своего среднего:

$$\mathrm{TSS} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2.$$

# Регрессия

Оказывается, что (если в модель включен коэффициент $\beta_0$) TSS можно представить в виде суммы:

$$\text{TSS} = \text{RSS} + \text{ESS},$$

- RSS — это сумма квадратов отклонений предсказанных $y$ от их истинных значений:

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i)^2,$$

- ESS — это сумма квадратов отклонений среднего $y$ от предсказанных $y$:

$$\text{ESS} = \sum_{i=1}^{n} (\widehat{y}_i - \overline{y})^2.$$

# Регрессия

По величинам RSS и ESS можно составить меру $R^2$, которая называется коэффициентом детерминации:

$$R^2 = \frac{\mathrm{ESS}}{\mathrm{TSS}} = 1 - \frac{\mathrm{RSS}}{\mathrm{TSS}}.$$

По сути, это доля объясненной дисперсии отклика во всей дисперсии отклика.

# Регрессия

Сделаем следующие предположения:

(П1) Истинная модель действительно является «зашумленной» линейной:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

для некоторых (неизвестных) коэффициентов $\beta_0, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$ и некоторой случайной ошибки $\varepsilon_i$ с $\mathbb{E}[\varepsilon_i|X] = 0$.

(П2) Наблюдения действительно случайны, то есть $(y_i, x_{i1}, \ldots, x_{ik})$ для $i = 1, \ldots, n$ образуют независимую выборку.

# Регрессия

(П3) Матрица $X$ является матрицей полного (столбцового) ранга:

$$\operatorname{rank} X = k + 1.$$

То есть ни один из признаков не должен являться линейной комбинацией других. Поскольку среди столбцов есть константа, никакой из признаков в выборке не должен быть константой.

# Регрессия

Уже из этих трех предположений можно вывести, что оценки, получаемые методом наименьших квадратов, являются несмещенными и состоятельными:

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\beta}_j\right] = \beta_j \quad \text{и} \quad \widehat{\beta}_j \xrightarrow{\mathbb{P}} \beta_j, \quad j = 0, \ldots, k.$$

# Регрессия

Более того, предположим еще что:

(П4) Ошибки $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ имеют одинаковую дисперсию, которая не зависит от значений признаков (гомоскедастичность ошибок):

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i | X) = \sigma^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\sigma^2 > 0$ — неизвестный параметр.

Тогда можно показать, что дисперсия оценок, получаемых методом наименьших квадратов, является наименьшей в классе всех оценок, линейных по $y$ (теорема Гаусса-Маркова).

То есть оценки метода наименьших квадратов (П1)-(П4) являются в некотором смысле оптимальными.

# Регрессия

Рассмотрим еще одно предположение:

(П5) Ошибки $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ имеют нормальное распределение

$$\varepsilon_i | X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Если выполняются (П1)-(П5), то оценки метода наименьших квадратов совпадают с оценками максимального правдоподобия.

Это означает, что оценки метода наименьших квадратов обладают всеми свойствами, которыми обладают оценки максимального правдоподобия.

# Регрессия

При выполнении (П1)-(П5) можно показать, что

$$y|X \sim \mathcal{N}\left(X\beta, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right), \quad \mathbf{I}_n \text{ — единичная матрица размера } n.$$

Оценки $\widehat{\beta}$ тоже будут иметь нормальное распределение

$$\widehat{\beta}|X \sim \mathcal{N}\left(\beta, \sigma^2 (X^\top X)^{-1}\right).$$

# Регрессия

Далее, дисперсию шума $\sigma^2$ можно оценить с помощью RSS:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\mathrm{RSS}}{n-k-1}.$$

Кроме того, отношение RSS к истинной дисперсии $\sigma^2$ будет иметь распределение хи-квадрат:

$$\frac{\mathrm{RSS}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k-1}.$$

Наконец, для любого вещественного вектора $c \in \mathbb{R}^{k+1}$ справедливо следующее утверждение:

$$\frac{c^\top(\beta - \widehat{\beta})}{\widehat{\sigma}^2\sqrt{c^\top(X^\top X)^{-1}c}} \sim T_{n-k-1}.$$

# Регрессия

Эти факты позволяют нам построить следующие доверительные интервалы уровня доверия $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$:

- для неизвестной дисперсии шума $\sigma^2$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{RSS}}{c_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\mathrm{RSS}}{c_{\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha,$$

  где $c_\alpha$ — квантиль уровня $\alpha$ распределения $\chi^2_{n-k-1}$.

- для регрессионных коэффициентов $\beta_0, \ldots, \beta_k$:

$$\mathbb{P}\left(\widehat{\beta}_j - c_{1-\alpha/2}\widehat{\sigma}\sqrt{(X^\top X)^{-1}_{jj}} \leq \beta_j \leq \widehat{\beta}_j + c_{1-\alpha/2}\widehat{\sigma}\sqrt{(X^\top X)^{-1}_{jj}}\right) = 1-\alpha,$$

  где $(X^\top X)^{-1}_{jj}$ — $j, j$ элемент матрицы $(X^\top X)^{-1}$ и $c_\alpha$ — квантиль уровня $\alpha$ распределения $T_{n-k-1}$.

# Регрессия

Кроме того, с их помощью можно проверить гипотезу о том, что $\beta_j = 0$ для некоторого $j = 0, \dots, k$ (что признак незначим).

## Критерий Стьюдента

нулевая гипотеза: $H_0 : \beta_j = 0$

альтернатива: $H_1 : \beta_j \neq 0$ или $\beta_j > 0$ или $\beta_j < 0$

статистика: $T = \dfrac{\widehat{\beta}_j}{\widehat{\sigma}\sqrt{(X^\top X)^{-1}_{jj}}}$

нулевое распределение: $T \sim T_{n-k-1}$

# Регрессия

Можно также проверить гипотезу о том, что сразу несколько коэффициентов $\beta_j$ равны 0.

**Критерий Фишера**

нулевая гипотеза: $H_0:\ \beta_{j_1} = \ldots = \beta_{j_m} = 0$
для некоторых $0 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq k$

альтернатива: $H_1:\ \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_m} \neq 0$ одновременно

статистика: $F = \ldots$

нулевое распределение: $F \sim F_{m,n-k-1}$ — распределение Фишера

# Регрессия

Обратите внимание, что доверительные интервалы и критерии строятся в предположениях (П1)-(П5).

Если ошибки имеют разную дисперсию и/или распределены не нормально, то мы можем сильно ошибиться.

# Регрессия

Есть несколько типичных ошибок, которые следует иметь в виду, применяя регрессионный анализ. Сами по себе они достаточно очевидны. Тем не менее, о них часто забывают при работе с реальными данными и в результате приходят к неверным выводам.

*Существуют три вида лжи: ложь, наглая ложь и статистика.*
*(Марк Твен)*

# Регрессия

## Пример

При исследовании зависимости веса $Z$ студентов двух групп от их роста $X$ и размера обуви $Y$ в первой группе было получено регрессионное уравнение

$$Z - \overline{Z} = 0.9(X - \overline{X}) + 0.1(Y - \overline{Y}),$$

а для второй группы:

$$Z - \overline{Z} = 0.2(X - \overline{X}) + 0.8(Y - \overline{Y}).$$

Как объяснить существенное различие коэффициентов этих двух моделей?

# Регрессия

**Ответ:** дело здесь в том, что $X$ и $Y$ сильно зависимы, поэтому «весовые» коэффициенты при $(X - \overline{X})$ и $(Y - \overline{Y})$ случайным образом распределяются между слагаемыми.

# Регрессия

## Пример

Во время второй мировой войны англичане исследовали зависимость точности бомбометания $Z$ от ряда факторов, в число которых входили высота бомбардировщика $H$, скорость ветра $V$, количество истребителей противника $X$.

Как и ожидалось, $Z$ увеличивалась при уменьшении $H$ и $V$. Однако (что поначалу представлялось необъяснимым), точность бомбометания $Z$ возрастала также и при увеличении $X$.

# Регрессия

**Ответ:** дальнейший анализ позволил понять причину этого парадокса. Дело оказалось в том, что первоначально в модель не был включен такой важный фактор, как $Y$ — облачность. Он сильно влияет и на $Z$ (уменьшая точность), и на $X$ (бессмысленно высылать истребители, если ничего не видно).

# Регрессия

## Пример

Если найти зависимость между ежегодным количеством родившихся в Голландии детей $Z$ и количеством прилетевших аистов $X$, то она окажется довольно значительной. Можно ли на основе этого статистического результата заключить, что детей приносят аисты?

# Регрессия

**Ответ:** рассмотрим проблему на содержательном уровне. Аисты появляются там, где им удобно вить гнезда; излюбленным же местом их гнездовья являются высокие дымовые трубы, какие строят в голландских сельских домах.

По традиции новая семья строит себе новый дом — появляются новые трубы и, естественно, рождаются дети. Таким образом, и увеличение числа гнезд аистов, и увеличение числа детей являются следствиями одной причины $Y$ — образования новых семей.

# Регрессия

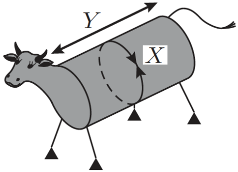
## Пример

Рассмотрим в качестве отклика $Z$ вес коровы, а в качестве предикторов — окружность ее туловища $X$ и расстояние от хвоста до холки $Y$. Сравнительному анализу были подвергнуты три регрессионные модели:

(1) линейная: $Z = \theta_1 + \theta_2 X + \theta_3 Y$;

(2) степенная: $Z = \theta_1' X^{\theta_2'} Y^{\theta_3'}$;

(3) учитывающая содержательный смысл задачи $Z = \theta_0 X^2 Y$.



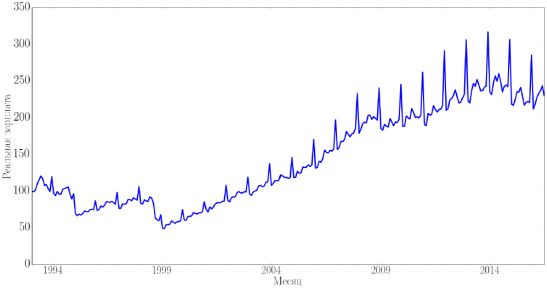
# Регрессия

| Модель | По всем наблюдениям | | По части наблюдений | |
|---|---|---|---|---|
| | $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ | $\widehat{\sigma}$ | $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{тяж}}$ | $\widehat{\sigma}_{\text{лег}}$ |
| 1 | $\widehat{\theta}_1 = -984{,}7$<br>$\widehat{\theta}_2 = 4{,}73$<br>$\widehat{\theta}_3 = 4{,}70$ | 25,9 | $\widehat{\theta}_1 = 453{,}2$<br>$\widehat{\theta}_2 = 0{,}62$<br>$\widehat{\theta}_3 = -0{,}22$ | 81 |
| 2 | $\widehat{\theta}'_1 = 0{,}0011$<br>$\widehat{\theta}'_2 = 1{,}556$<br>$\widehat{\theta}'_3 = 1{,}018$ | 24,5 | $\widehat{\theta}'_1 = 266{,}4$<br>$\widehat{\theta}'_2 = 0{,}203$<br>$\widehat{\theta}'_3 = -0{,}072$ | 79 |
| 3 | $\widehat{\theta}_0 = 1{,}13 \cdot 10^{-4}$ | 26,6 | $\widehat{\theta}_0 = 1{,}11 \cdot 10^{-4}$ | 28 |

Подробнее про пример можно посмотреть в книге Лагутина.

# Временные ряды

Временным рядом называется последовательность наблюдений $X_t$, полученных через <u>одинаковые</u> временные интервалы.




Среднемесячная реальная заработная плата в России, выраженная в процентах от её значения в январе 1993 г.

# Временные ряды

В анализе временных рядов чаще всего решаются следующие две важные задачи:

- определение природы явления, поиск тренда, сезонности и других закономерностей;
- осуществление прогноза будущих значений ряда.

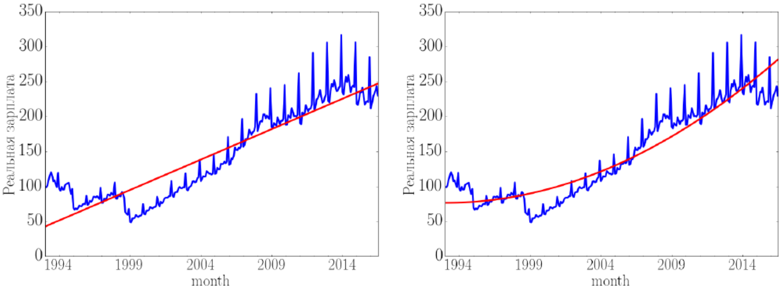
Обе задачи требуют построения модели, адекватно описывающей имеющиеся наблюдения.

# Временные ряды

В отличие от задачи регрессии, временной ряд не образует независимую выборку. Наоборот, мы предполагаем, что данные в прошлом каким-то образом связаны с данными в будущем.

Выявив структуру этой зависимости, можно учесть её в модели и построить действительно точный прогноз.

# Временные ряды

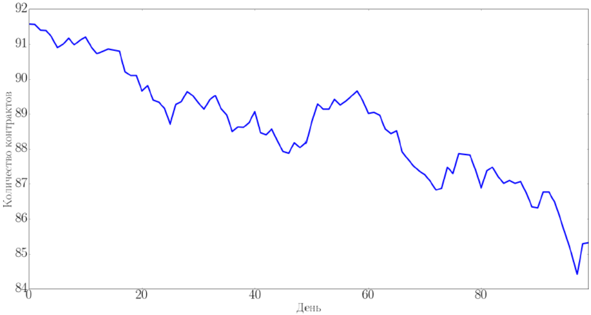



Применение модели линейной (слева) и квадратичной (справа) регрессии к задаче прогнозирования временного ряда из предыдущего примера

# Временные ряды

Полезно рассмотреть несколько понятий, которыми можно описать поведение временных рядов:

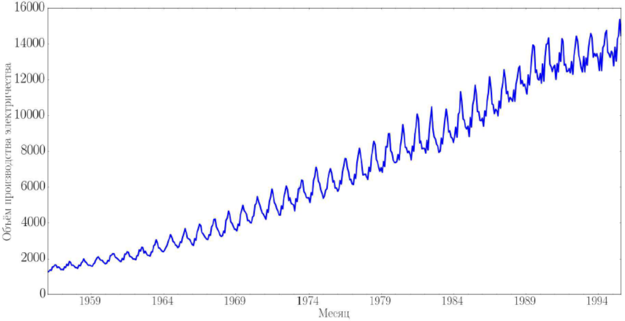
- **Тренд** — плавное долгосрочное изменение уровня ряда.




Количество контрактов за день в сокровищнице США

# Временные ряды

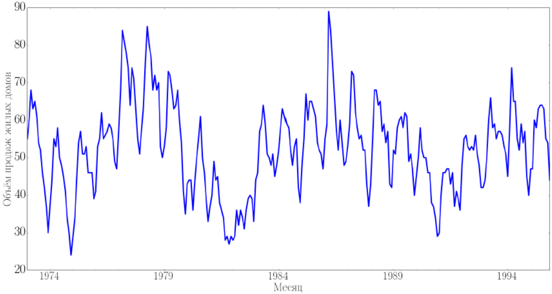
- Сезонность — циклические изменения уровня ряда с постоянным периодом.




Объём электричества, произведённого за месяц в Австралии

# Временные ряды

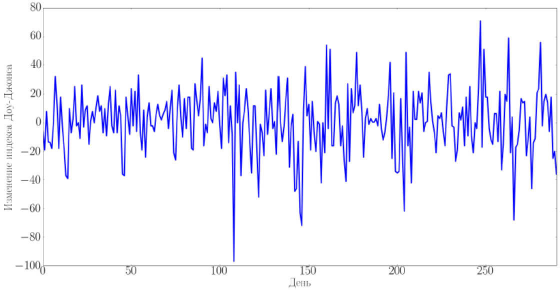
- Цикл — изменение уровня ряда с переменным периодом. Такое поведение часто встречается в рядах, связанных с продажами, и объясняется циклическими изменениями экономической активности.




Объём проданной жилой недвижимости (в млн кв. м.) в Америке за месяц

# Временные ряды

- Ошибка — непрогнозируемая случайная компонента. Сюда включены все те характеристики временного ряда, которые сложно измерить.




Ежедневное изменение индекса Доу-Джонса

# Временные ряды

Перейдем теперь к численным характеристикам, которые описывают зависимость наблюдений временного ряда.

# Временные ряды

Простейшей характеристикой зависимости близких значений ряда является автокорреляционная функция (или просто автокорреляция):

$$R(n) = \rho(X_n, X_0),$$

где $\rho(X_n, X_0)$ — коэффициент корреляции (Пирсона) между $X_n$ и $X_0$. Аргумент $n$ здесь называется лагом (lag).

# Временные ряды

Для оценивания автокорреляций $R(n)$ по наблюдениям ряда обычно используется выборочные автокорреляции

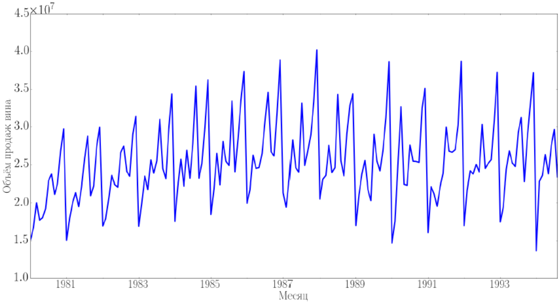
$$\widehat{R}(n) = \frac{\sum_{t=1}^{N-n}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t+n} - \overline{X}\right)}{\sum_{t=1}^{N}\left(X_t - \overline{X}\right)^2}, \quad \overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t,$$

где $N$ — длина ряда.

Отметим, что эти оценки несколько отличаются от выборочного коэффициента корреляции между самим рядом $X_t$ и сдвинутым на лаг $n$ рядом $X_{t+n}$.

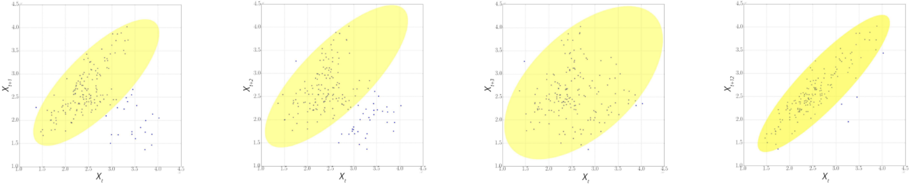
# Временные ряды

Рассмотрим в качестве примера следующий ряд:




Месячный объём продаж вина в Австралии, в бутылках

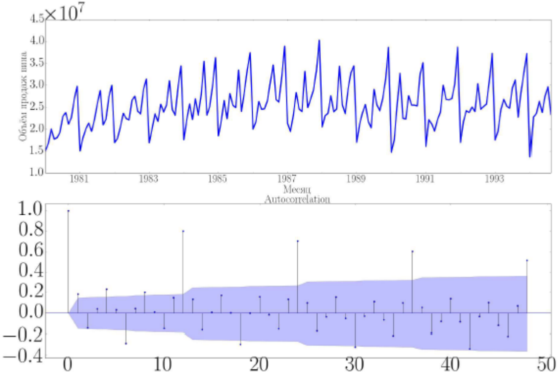
# Временные ряды




(a) (b) (c) (d)

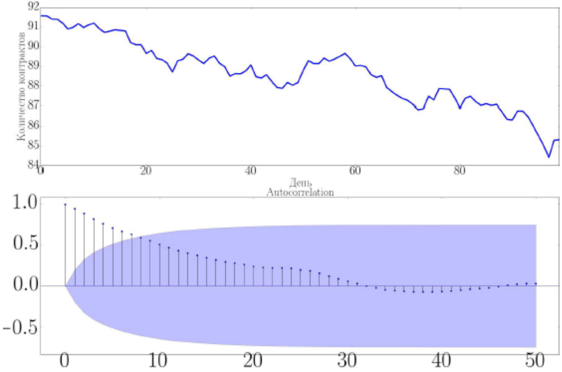
Связь между продажами в (a) соседние месяцы, (b) через один месяц, (c) через два месяца и (d) через один год.

# Временные ряды



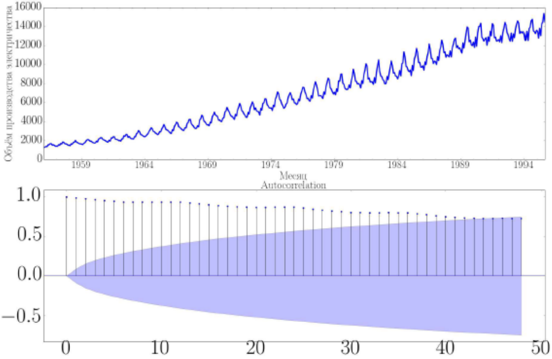

Коррелограмма для количества проданного вина в Австралии за месяц

# Временные ряды



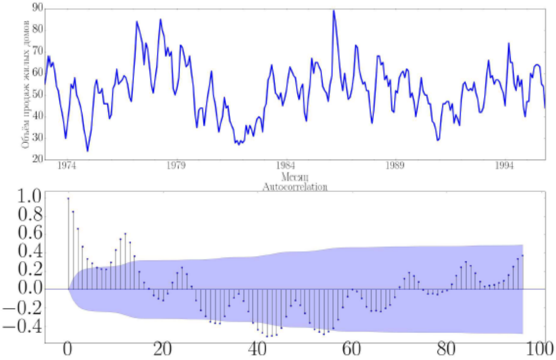

Коррелограмма для количества контрактов за день в сокровищнице США

# Временные ряды



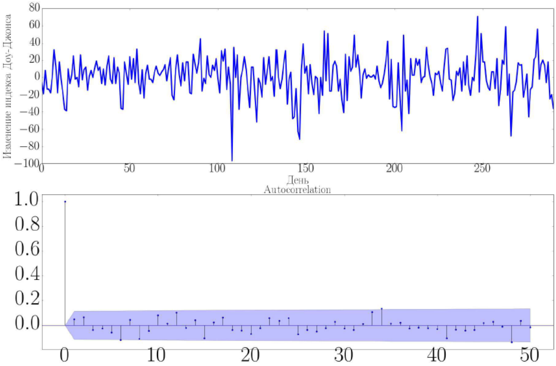

Коррелограмма для ежемесячного производства электричества в Австралии

# Временные ряды




Коррелограмма для объёма проданной в Америке недвижимости за месяц

# Временные ряды




Коррелограмма для данных о ежедневном изменении индекса Доу-Джонса.

# Временные ряды

На всех показанных коррелограммах изображён фиолетовый коридор вокруг горизонтальной оси. Это коридор значимости отличия корреляции от нуля. Все автокорреляции, которые выходят за этот коридор, значимо отличаются от нуля.

Стоит учитывать, что как и для обычной корреляции Пирсона, границы доверительного интервала вычисляются в нормальных предположениях.

# Временные ряды

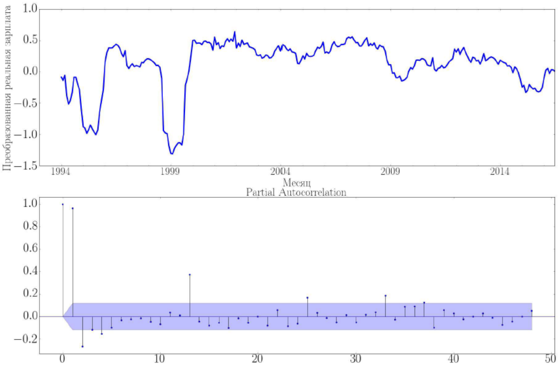
Еще одной полезной характеристикой зависимости членов временного ряда является частная автокорреляция:

$$\widetilde{R}(1) = \rho(X_1, X_0), \quad \widetilde{R}(n) = \rho(X_n, X_0 | X_1, \ldots, X_{n-1}),$$

где $\rho(X_n, X_0 | X_1, \ldots, X_{n-1})$ — коэффициент частной корреляции между $X_n$ и $X_0$ при исключении влияния случайных величин $X_1, \ldots, X_{n-1}$.

Частные автокорреляции можно оценить по наблюдениям ряда. Мы не будем выписывать явные формулы.

# Временные ряды




Пример частной коррелограммы.

# Временные ряды

В дальнейшем мы будем использовать коррелограммы и частные коррелограммы при подгонке моделей к временному ряду.

# Спасибо за внимание!