1. Постановка задачи

Дано параболическое начально-краевое уравнение относительной функции $u = u(x,t)$:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x,t)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}) + \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t),\ x \in [a,b]$$

С начальным условием:

$$u|_{t=0} = u_0(x),$$

И некоторыми краевыми условиями, при $x = a$ и при $x = b$.

Функция u аппроксимируется линейными базисными функциями на каждом конечном элементе. Решение ищется при $t \in (0,T]$.

2. Дискретизация по времени

Аппроксимируем производную искомой функции по времени следующей неявной схемой:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau_n}$$

Тогда исходное уравнение можно переписать, как эллиптическое уравнение:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x,t_{n+1})\cdot\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}) + \frac{1}{\tau_n}\sigma\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right)\cdot u^{n+1} = f(x,t_{n+1}) + \frac{1}{\tau_n}\sigma\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right)\cdot u^n$$

Введём обозначения:

$$\lambda_n(x) = \lambda(x,t_{n+1})$$

$$\gamma_n\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{\tau_n}\sigma\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right)$$

$$\widetilde{f}_n(x) = f(x,t_{n+1}) + \frac{1}{\tau_n}\sigma\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right)\cdot u^n$$

Получаем:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_n(x)\cdot\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}) + \gamma_n\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right)\cdot u^{n+1} = \widetilde{f}_n(x) \tag{0.1}$$

3. Вариационная постановка и дискретизация

Рассмотрим гильбертово пространство $H = L_2[a,b]$ со своим скалярным произведением и нормой:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx,\ \|f\| = \sqrt{(f,f)}.$$

Выполним для уравнения (0.1) вариационную постановку Галёркина: домножим скалярно правую и левую часть на функцию $v \in H_0$, где H_0-множество функций, удовлетворяющих однородным первым краевым условиям. В данном случае рассмотрим следующие краевые условия: $u(a,t) = u_g$, $\lambda(b)\dfrac{\partial u}{\partial x}(b) + \beta\cdot(u(b) - u_\beta) = 0$, тогда получим:

$$\int_a^b -\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_n(x)\cdot\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x})v(x)dx+\int_a^b \gamma_n\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right)\cdot u^{n+1}v(x)dx=\int_a^b \widetilde{f}_n(x)v(x)dx\ \forall v\in H_0$$

$$\int_a^b \lambda_n(x)\cdot\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}dx+\int_a^b \gamma_n\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right)\cdot u^{n+1}v(x)dx+\beta\cdot u(b)v(b)=\int_a^b \widetilde{f}_n(x)v(x)dx+\beta\cdot u_\beta v(b)\ \forall v\in H_0$$

При этом, функция $u^{n+1}(x)=\sum_{i=1}^{m} q_i\cdot\psi_i(x)$, базисные функции – линейные .

4. Вычисление элементов матрицы для метода простой итерации

Коротко метод простой итерации записывается следующим выражением: $A(q_s^{n+1})\cdot q_{s+1}^{n+1}=b(q_s^{n+1})$

Элементы матрицы A вычисляются по следующим формулам:

$$A_{ij}=\int_a^b \lambda_n(x)\cdot\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx+\int_a^b \gamma_n\left(\sum_k q_{s,k}\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)\cdot\psi_i\psi_j dx \tag{0.2}$$

И к последнему элементу идёт добавка от краевых условий: $A_{mm}=\int_a^b \lambda_n(x)\cdot\frac{\partial\psi_m}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi_m}{\partial x}dx+\int_a^b \gamma_n\left(\sum_k q_{s,k}\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)\cdot\psi_m\psi_m dx+\beta$

Учитывая то, что базисные функции линейные и финитные эти выражения можно преобразовать и использовать локальные матрицы для сбора. Общая структура матрицы будет трёхдиагональной:

$$\widehat{A}_{ij}^k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} \lambda_n(x)\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}dx+\int_{x_k}^{x_{k+1}} \gamma_n\left(\widehat{q}_{s,1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\widehat{q}_{s,2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\cdot\varphi_i\varphi_j dx=$$

$$=\frac{(-1)^{1-\delta_{ij}}}{h_k^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\lambda_n(x)dx+\widetilde{\gamma_n^k}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi_i\varphi_j dx=\frac{(-1)^{1-\delta_{ij}}}{h_k^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(\lambda^1{}_{n,k}\varphi_1+\lambda^2{}_{n,k}\varphi_2\right)dx+\widetilde{\gamma_n^k}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi_i\varphi_j dx$$

Тогда локальная матрица вычисляется следующим образом

$$\widehat{A}=\frac{\lambda_{n,k}^1+\lambda_{n,k}^2}{2h_k}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\frac{\widetilde{\gamma_n^k}\cdot h_k}{6}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \tag{0.3}$$

$$\widetilde{\gamma_n^k}=\frac{1}{\tau_n}\sigma_n\left(\frac{\widehat{q_{s,2}^n}-\widehat{q_{s,1}^n}}{h_k}\right)$$

$$\lambda_{n,k}^i=\lambda_n(x_i^k)$$

Вычисление локального вектора правой части:

$$\hat{b}_i=\int_{x_k}^{x_{k+1}}\widetilde{f}_n(x)\varphi_i dx=\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f(x,t_{n+1})+\frac{1}{\tau_n}\sigma\left(\frac{\partial u^{n,k}}{\partial x}\right)\cdot u^{n,k}\right](x)\varphi_i dx=$$

Раскрыв скобки и вычислив интегралы, получим:

$$\hat{b}=\frac{h_k}{6}\begin{pmatrix}2f_{n,1}^k+f_{n,2}^k\\f_{n,1}^k+2f_{n,2}^k\end{pmatrix}+\frac{\widetilde{\gamma_n^k}\cdot h_k}{6}\begin{pmatrix}2\widehat{q_1^n}+\widehat{q_2^n}\\\widehat{q_1^n}+2\widehat{q_2^n}\end{pmatrix} \tag{0.4}$$

5. Вычисление элементов матрицы для метода Ньютона

Формирование локальных линеаризованных матриц в методе Ньютона происходит по следующей формуле:

$$\hat{A}_{ij}^{L} = \hat{A}_{ij}(q_s^{n+1}) + \sum_k \frac{\partial \hat{A}_{ik}(\hat{q}_{s+1}^{n+1})}{\partial \hat{q}_{s+1,j}^{n+1}} \hat{q}_{s,k}^{n+1} - \frac{\partial \hat{b}_i(\hat{q}_{s+1}^{n+1})}{\partial q_{s+1,j}^{n+1}}$$

$$\hat{b}_i^{L} = \hat{b}_i(\hat{q}_s^{n+1}) + \sum_j \left\{ \hat{q}_{s,j}^{n+1} \left[\sum_k \frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{q}_{s+1}^{n+1})}{\partial \hat{q}_{s+1,k}^{n+1}} \cdot \hat{q}_{s,k}^{n+1} \right] \right\} - \sum_k \frac{\partial \hat{b}_i(\hat{q}_{s+1}^{n+1})}{\partial q_{s+1,k}^{n+1}} \hat{q}_{s,k}^{n+1}$$

Вычислим производные, которые входят в формулы:

$$\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{q}_{s+1}^{n+1})}{\partial \hat{q}_{s,i}} = \frac{\partial}{\partial \hat{q}_{s,i}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \gamma_n \left(\hat{q}_{s,1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \hat{q}_{s,2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \cdot \varphi_i \varphi_j dx = \frac{\partial}{\partial \hat{q}_{s,i}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \gamma_n \left(\frac{\widehat{q_{s,2}^{n+1}} - \widehat{q_{s,1}^{n+1}}}{h_k} \right) \cdot \varphi_i \varphi_j dx =$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial}{\partial \hat{q}_{s,i}} \left\{ \gamma_n \left(\frac{\widehat{q_{s,2}^{n+1}} - \widehat{q_{s,1}^{n+1}}}{h_k} \right) \right\} \cdot \varphi_i \varphi_j dx = \frac{\pm 1}{h_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial \gamma_n(p)}{\partial p} \cdot \varphi_i \varphi_j dx$$

Пусть зависимость σ от $\frac{\partial u}{\partial x}$ задана следующим образом: $\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c \right]$, введём функцию $\xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, тогда выражение для производной можно переписать, как:

$$\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{q}_{s+1}^{n+1})}{\partial \hat{q}_{s,i}} = \frac{\pm 1}{\tau_n h_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \xi_n \cdot \varphi_i \varphi_j dx$$

$$\frac{\partial \hat{b}_i(\hat{q}_{s+1}^{n+1})}{\partial q_{s+1,j}^{n+1}} = \frac{1}{\tau_n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial \sigma}{\partial q_{s+1,j}^{n+1}} u^n \varphi_i dx = \frac{\pm 1}{\tau_n h_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \xi \cdot \left(\widehat{q_1^n} \varphi_1 + \widehat{q_2^n} \varphi_2 \right) \varphi_i dx$$

В матричном виде:

$$\hat{A}^{L1} = \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} q_{s,1}^{n+1} + \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} q_{s,2}^{n+1} + \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} \begin{pmatrix} 2q_1^n + q_2^n & -\left(2q_1^n + q_2^n\right) \\ q_1^n + 2q_2^n & -\left(q_1^n + 2q_2^n\right) \end{pmatrix}$$

$$\hat{b}_i^{L1} = \frac{\partial A_{i1}}{\partial q_1} q_{s,1}^2 + \left(\frac{\partial A_{i1}}{\partial q_2} + \frac{\partial A_{i2}}{\partial q_1}\right) q_{s,1} q_{s,2} + \frac{\partial A_{i2}}{\partial q_2} q_{s,2}^2 - \frac{\partial b_i}{\partial q_1} q_{s,1} - \frac{\partial b_i}{\partial q_2} q_{s,2}$$

$$b_1^{L1} = -\frac{\tilde{\xi}_n}{3\tau_n} q_{s,1}^2 + \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} q_{s,1} q_{s,2} + \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} q_{s,2}^2 + \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} (2q_1^n + q_2^n) q_{s,1} - \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} (2q_1^n + q_2^n) q_{s,2}$$

$$b_2^{L1} = -\frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} q_{s,1}^2 - \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} q_{s,1} q_{s,2} + \frac{\tilde{\xi}_n}{3\tau_n} q_{s,2}^2 + \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} (q_1^n + 2q_2^n) q_{s,1} - \frac{\tilde{\xi}_n}{6\tau_n} (q_1^n + 2q_2^n) q_{s,2}$$