Условие задачи

Реализовать методы простой итерации и метод Ньютона для задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\sigma(u)\frac{\partial u}{\partial t}=f$$

линейные базисные функции, нелинейность в коэффициенте σ.

Метод простой итерации

Решая нестационарную задачу $-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\sigma(u)\frac{\partial u}{\partial t}=f$, будем аппроксимировать по времени решение используя схему:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u^i}{\partial x}\right)+\sigma(u^i)\frac{u^i-u^{i-1}}{\Delta t}=f^i,\ i=\overline{1,I}$$

Для каждого $i=\overline{1,n}$ получаем матричное уравнение вида:

$$BQ^i+\frac{1}{\Delta t}CQ^i-\frac{1}{\Delta t}CQ^{i-1}=F^i$$

Считая Q^{j-1} известным, получаем СЛАУ для вектора неизвестных Q^i:

$$\left(\frac{1}{\Delta t}C+B\right)Q^i=F^i+\frac{1}{\Delta t}CQ^{i-1}$$

На каждом слое решаем такую СЛАУ, Q^0 получаем из начального условия.

Так как задача нелинейная, то задаём начальное приближение и решаем задачу итерационно.

$$B=\frac{p}{h_x}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\sigma(u)\frac{h_x}{6}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Поскольку $\sigma=\sigma(u)$, то необходимо разложить ее по базисным функциям:

$$\sigma=q_1\psi_1+q_2\psi_2=\left|\xi=\frac{(x-x_k)}{h_k}\right|=\sigma(u_i)(1-\xi)+\sigma(u_i)\xi$$

Метод Ньютона

Aq=F, где $A=\left(\frac{\sigma^i}{\Delta t}C+B\right)$, $F=G^i+\frac{\sigma}{\Delta t}Cq^{i-1}$.

Рассмотрим один конечный элемент

$$A^m=\begin{pmatrix}A_{00} & A_{01}\\ A_{10} & A_{11}\end{pmatrix},\quad F^m=\begin{pmatrix}F_0\\ F_1\end{pmatrix},\quad q^m=\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\end{pmatrix}$$

q^0 – решение на предыдущей итерации

$$A_{01}q_1 \approx A_{01}(q^0)q_1^0 + \left.\frac{\partial(A_{01}q_1)}{\partial q_0}\right|_{q=q^0} \cdot \left(q_0 - q_0^0\right) + \left.\frac{\partial(A_{01}q_1)}{\partial q_1}\right|_{q=q^0} \cdot \left(q_1 - q_1^0\right)$$

$$\frac{\partial(A_{01}q_1)}{\partial q_0} = \frac{\partial A_{01}}{\partial q_0} q_1, \quad \frac{\partial(A_{01}q_1)}{\partial q_1} = A_{01}(q) + \frac{\partial A_{01}}{\partial q_1} q_1$$

$$A_{01}q_1 \approx \left(A_{01}(q^0) + \frac{\partial A_{01}}{\partial q_1} q_1^0\right) q_1 + \left(\frac{\partial A_{01}}{\partial q_0} q_1^0\right) q_0 - \left[\frac{\partial A_{01}}{\partial q_1}(q_1^0)^2 + \frac{\partial A_{01}}{\partial q_0} q_1^0 q_0^0\right]$$

Найдём производные

$$A_{01} = \int\limits_{\Omega_m} p \frac{\partial \psi_0}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} d\Omega + \int\limits_{\Omega_m} \frac{\sigma}{\Delta t}\psi_0\psi_1 d\Omega$$

$$p\left(\frac{\partial u^m}{\partial x}\right) = p\left(\frac{q_1 - q_0}{h}\right) \cdot \left(\psi_0 + \psi_1\right)$$

$$\frac{\partial A_{01}}{\partial q_0} = \int\limits_{\Omega_m} \left.\frac{dp}{du_x}\right|_{u_x = \frac{q_1 - q_0}{h}} \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\psi_0 + \psi_1\right)\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} d\Omega = \left.\frac{dp}{du_x}\right|_{u_x = \frac{q_1 - q_0}{h}} \left(-\frac{1}{h}\right)(-1)$$

$$\frac{\partial A_{01}}{\partial q_1} = \int\limits_{\Omega_m} \left.\frac{dp}{du_x}\right|_{u_x = \frac{q_1 - q_0}{h}} \left(\frac{1}{h}\right)\left(\psi_0 + \psi_1\right)\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} d\Omega = \left.\frac{dp}{du_x}\right|_{u_x = \frac{q_1 - q_0}{h}} \left(\frac{1}{h}\right)(-1)$$

Таким образом

$$A_{01}q_1 \approx \left(A_{01}(q^0) - \frac{\tilde{p}}{h} q_1^0\right) q_1 + \left(\frac{\tilde{p}}{h} q_1^0\right) q_0 - \left[-\frac{\tilde{p}}{h}(q_1^0)^2 + \frac{\tilde{p}}{h} q_1^0 q_0^0\right], \text{ где } \tilde{p} = \left.\frac{dp}{du_x}\right|_{u_x = \frac{q_1^0 - q_0^0}{h}}$$

Если аналогичным образом выразить $A_{00}q_0$, $A_{11}q_1$, $A_{10}q_0$, то получим новую локальную матрицу

$$\begin{pmatrix} A_{00}(q^0) + \frac{\tilde{p}}{h}\left(q_1^0 - q_0^0\right) & A_{01}(q^0) + \frac{\tilde{p}}{h}\left(q_0^0 - q_1^0\right) \\ A_{10}(q^0) + \frac{\tilde{p}}{h}\left(q_0^0 - q_1^0\right) & A_{11}(q^0) + \frac{\tilde{p}}{h}\left(q_1^0 - q_0^0\right) \end{pmatrix}$$

и локальный вектор правой части

$$\begin{pmatrix} F_0 - \frac{\tilde{p}}{h}\left(q_0^0 - q_1^0\right)^2 \\ F_1 + \frac{\tilde{p}}{h}\left(q_0^0 - q_1^0\right)^2 \end{pmatrix}$$