Графический метод

№1

$$f(x) = -x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15 \end{cases}$$

Выразим из 2ого уравнения x_5 и подставим в остальные ограничения и функцию:

$$x_5 = 6 - 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 0$$

$$f(x) = -x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 6 - 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \geq -3 \\ -3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$$

Выразим из 2ого уравнения x_4

$$x_4 = -3 - 2x_1 + 4x_2 + x_3$$

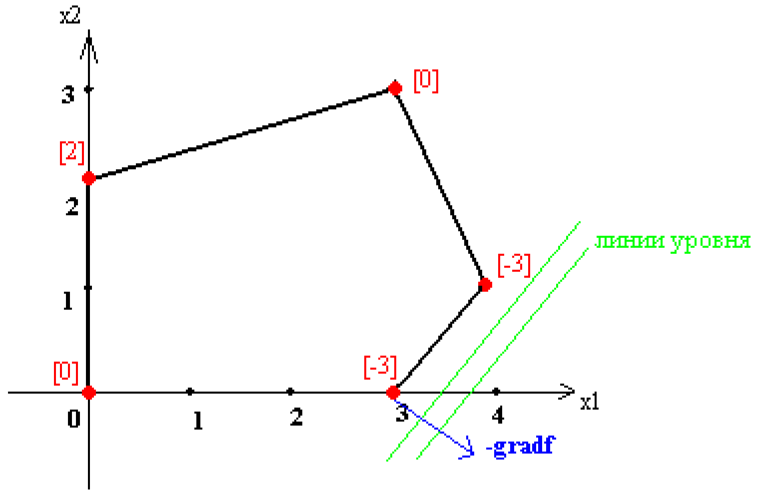
$$f(x) = -x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -3 - 2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 0 \\ 9 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ -6 - x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Выразим из 3ого уравнения x_3

$$x_3 = 6 + x_1 - 3x_2$$

$$f(x) = -x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 6 + x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ 9 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ 3 - x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 3x_2 - 6$$
$$x_2 \leq 9 - 2x_1$$
$$x_2 \geq x_1 - 3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



$-x_1 + x_2 = C \Rightarrow x_2 = C + x_1$ линии уровня параллельны одной из сторон ограничения $x_2 = x_1 - 3$

$grad f(-1,1)$; $-grad f(1,-1)$, значит минимум достигается на $x_2 = x_1 - 3$ при $x_1 \in 3,4$

Пусть $\beta \in 3,4$, тогда

$$\begin{aligned}
&x_1 = \beta \\
&x_2 = \beta - 3 \\
&x_3 = 6 + \beta - 3(\beta - 3) = 15 - 2\beta \\
&x_4 = -3 - 2\beta + 4(\beta - 3) + 15 - 2\beta = 0 \\
&x_5 = 6 - 4\beta + 3(\beta - 3) + 15 - 2\beta = 12 - 3\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x^* = \beta, \beta - 3, 15 - 2\beta, 0, 12 - 3\beta \;,\quad \beta \in 3,4 \\
&f^* = -\beta + \beta - 3 = 3 \\
&\beta = 3 \qquad x^* = 3, 0, 9, 0, 3
\end{aligned}$$

Ответ: $f_{\min} = -3$

№2

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5$

Выразим x_5 из 2ого уравнения

$$x_5 = 10 + x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} 10 + x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 \ge 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 + 5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Выразим x_4 из 2ого уравнения

$$x_4 = 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 5$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 5 \ge 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5 \ge 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

Выразим x_3 из 3его уравнения

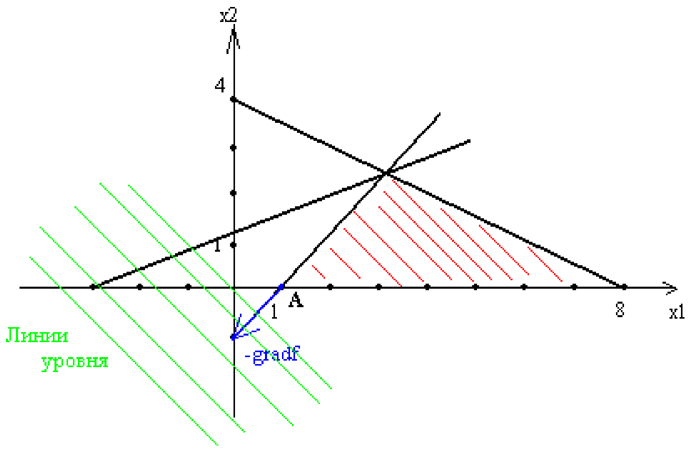
$$x_3 = 3 + x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} 3 + x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 - 1 \ge 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 8 \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 =$$
$$= x_1 + 2x_2 + 3 + x_1 - 2x_2 - 3x_1 + 5x_2 + 2(3 + x_1 - 2x_2) - 5 =$$
$$= x_1 + x_2 + 4 = C$$

Линии уровня $x_2 = C - x_1$

$grad\ f = (1,1) \qquad -grad\ f = (-1,-1)$



$A(1,0)$

$x_1 = 1; x_2 = 0; x_3 = 4; x_4 = 0; x_5 = 7$

$x^* = \ 1, 0, 4, 0, 7$

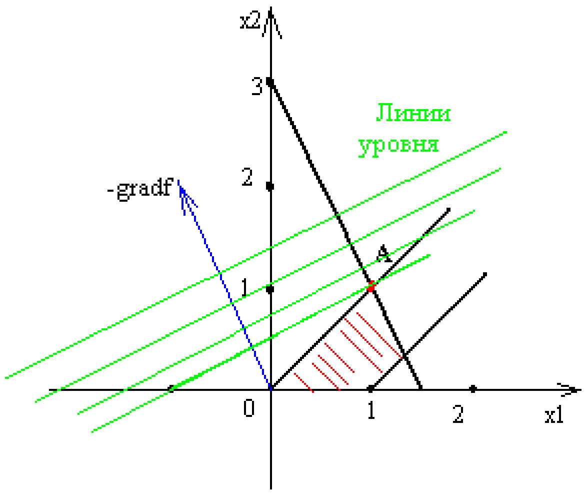
$f_{\min} = 5$

Ответ: $f_{\min} = 5$

№9

$$f(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_4 = -2x_1 - x_2 + 3 \ge 0 \\ x_5 = -x_1 + x_2 + 1 \ge 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$f(x) = x_1 - 2x_2 = C$$
$grad\ f = (1,-2) \qquad -grad\ f = (-1,2)$



$A(1,1)$

$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 1$

$x^* = (1,1,0,0,1)$

$f_{\min} = -1$

№13

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

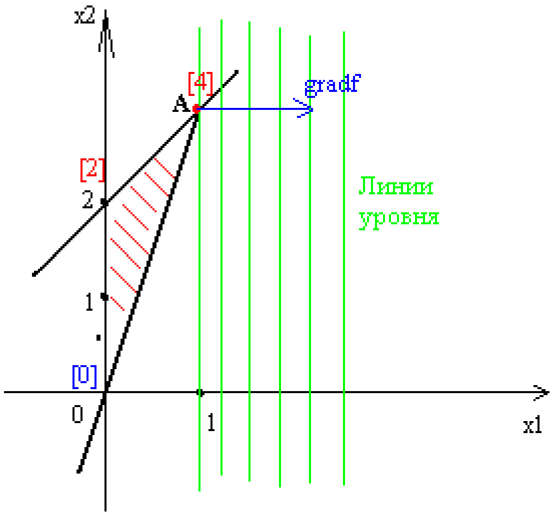
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Выразим x_3

$$\begin{matrix} x_3 = 2 + x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_3 = x_2 - 3x_2 \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 2 + x_1 \\ x_2 = 3x_1 \end{matrix}$$

$$f(x) = 2 + 2x_1 = C$$

$$x_1 = C$$



$$A(1,3)$$

$$x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = 0$$

$$x^* = (1,3,0)$$

$$f(x) = 4$$