Уравнения математической физики

3 курс ФПМИ

слайды для лекций

Персова М.Г., д.т.н., проф.,
Патрушев И.И., асс.

Лекция №2

Решение нелинейных задач.
Метод Ньютона.

Нелинейные задачи

Нелинейными называются такие дифференциально-краевые задачи, у которых параметры дифференциального уравнения или краевые условия зависят от решения.

$$-\mathrm{div}\left(\underbrace{\lambda(u)}\,\mathrm{grad}\,u\right)+\underbrace{\gamma(u)}\,u=\underbrace{f(u)} \quad \xrightarrow{\text{МКЭ}} \quad \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}=\mathbf{b}(\mathbf{q})$$

$$\lambda\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_2}=\underbrace{\theta(u)}$$

нелинейность

$$u^h=\sum_{j=1}^{N}q_j\psi_j=\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}$$

$$\lambda\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_3}+\underbrace{\beta(u)}\left(u|_{S_3}-u_\beta\right)=0$$

Как решать такую задачу?

–Метод простых итераций
– Метод Ньютона

Нелинейные задачи

Пример:

$$-\mathrm{div}\left(\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{grad}\,u\right)+\gamma u = f$$

$$\lambda=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$ - аналитическая зависимость

$$\lambda=\sum_k \lambda_k \psi_k$$

$$\lambda_k=\lambda\left(\sum_j q_j \left.\frac{\partial \psi_j}{\partial x}\right|_{x=x_k}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\int_\Omega\left(\sum_k \lambda_k\psi_k\right)\mathrm{grad}\,\psi_j\cdot\mathrm{grad}\,\psi_i \mathrm{d}\Omega+\int_\Omega \gamma\psi_j\psi_i\mathrm{d}\Omega\right)q_j=\int_\Omega f\,\psi_i\mathrm{d}\Omega$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_k \lambda_k\int_\Omega \psi_k\,\mathrm{grad}\,\psi_j\cdot\mathrm{grad}\,\psi_i \mathrm{d}\Omega+\int_\Omega \gamma\psi_j\psi_i\mathrm{d}\Omega\right)q_j=\int_\Omega f\,\psi_i\mathrm{d}\Omega$$

$$u^h=\sum_{j=1}^{N} q_j\psi_j$$

$$\frac{\partial u^h}{\partial x}=\sum_{j=1}^{N} q_j\frac{\partial \psi_j}{\partial x}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}=\mathbf{b}$$

Метод простых итераций

$\mathbf{q}^{(0)}$ - начальное приближение

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{q}^{(0)}\right)\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{q}^{(1)}\right)\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{b}$$

$$\cdots$$

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{q}^{(k-1)}\right)\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{b}$$

Останов итерационного процесса:

$$\frac{\left\|\mathbf{A}\left(\mathbf{q}^{(k)}\right)\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{b}\right\|}{\left\|\mathbf{b}\right\|} < \varepsilon$$

Метод Ньютона

Метод Ньютона основан на линеаризации нелинейных уравнений системы $\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{b}(\mathbf{q})$ с использованием разложения в ряд Тейлора.

Пусть $\mathbf{q}^0$ - решение на предыдущей итерации по нелинейности.

Разложим нелинейные компоненты матрицы в окрестности точки $\mathbf{q}^0$:

$$A_{ij}(\mathbf{q})q_j \approx A_{ij}(\mathbf{q}^0)q_j^0 + \sum_r \left.\frac{\partial\left(A_{ij}(\mathbf{q})q_j\right)}{\partial q_r}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0}\left(q_r - q_r^0\right),$$

и нелинейные компоненты вектора правой части

$$b_i(\mathbf{q}) \approx b_i(\mathbf{q}^0) + \sum_r \left.\frac{\partial b_i(\mathbf{q})}{\partial q_r}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0}\left(q_r - q_r^0\right)$$

В результате линеаризации получаем: $\mathbf{A}^L\mathbf{q} = \mathbf{b}^L$

Линеаризованная по методу Ньютона КЭ-СЛАУ

Линеаризация

Программно линеаризацию удобнее производить на уровне локальных матриц и векторов.

$$\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j \approx \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0)\hat{q}_j^0 + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial\left(\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j\right)}{\partial \hat{q}_r}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \left(\hat{q}_r - \hat{q}_r^0\right) =$$

$$= \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0)\hat{q}_j^0 + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq j}}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0 \left(\hat{q}_r - \hat{q}_r^0\right) +$$

$$+\left\{\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0) + \left.\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0\right\}\left(\hat{q}_j - \hat{q}_j^0\right) =$$

$$= \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0)\hat{q}_j + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0 \left(\hat{q}_r - \hat{q}_r^0\right),$$

$\hat{\mathbf{q}}^0$ -значение $\hat{\mathbf{q}}$ на предыдущей итерации

Домашнее задание: Разобраться

Линеаризация

$$\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j \approx \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0)\hat{q}_j + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0\left(\hat{q}_r - \hat{q}_r^0\right),$$

?

Аналогично для вектора правой части:

$$\hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}}) \approx \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}}^0) + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \left(\hat{q}_r - \hat{q}_r^0\right).$$

?

Линеаризация

$$\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j \approx \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0)\hat{q}_j + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0 \left(\hat{q}_r - \hat{q}_r^0\right),$$

Даст добавку в правую часть

Аналогично для вектора правой части:

$$\hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}}) \approx \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}}^0) + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \left(\hat{q}_r - \hat{q}_r^0\right).$$

Даст добавку в матрицу

Линеаризованная система

$$\hat{A}_{ij}^{L} = \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0) + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{A}_{ir}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r^0 - \left.\frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0},$$

$$\hat{b}_i^{L} = \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}}^0) + \sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{q}_j^0 \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r^0 - \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r^0.$$

Сам итерационный процесс аналогичен процессу из метода простой итерации, но при расчете невязки должны использоваться исходные нелинейные (а не линеаризованные) матрица и вектор правой части.

Сходимость метода

Вообще говоря, полученный на *k-й* итерации в результате решения линеаризованной системы вектор $\hat{\mathbf{q}}^{(k)}$ **не гарантирует** уменьшения невязки исходной нелинейной системы, вычисленной как

$$\left\| \mathbf{A}(\mathbf{q}^{(k)})\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{b}(\mathbf{q}^{(k)}) \right\|$$

по сравнению с

$$\left\| \mathbf{A}(\mathbf{q}^{(k-1)})\mathbf{q}^{(k-1)} - \mathbf{b}(\mathbf{q}^{(k-1)}) \right\|$$

Поэтому можно ограничить отход $\hat{\mathbf{q}}^{(k)}$ от $\hat{\mathbf{q}}^{0} = \hat{\mathbf{q}}^{(k-1)}$ процедурой релаксации.

Сходимость метода

Линеаризованная система может перестать быть положительно определенной. Избежать этого можно введение коэффициента «демпфирования»:

$$\hat{A}_{ij}^{L} = \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^{0}) + \nu\left(\sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{A}_{ir}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_{j}}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^{0}} \hat{q}_{r}^{0} - \left.\frac{\partial \hat{b}_{i}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_{j}}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^{0}}\right),$$

$$\hat{b}_{i}^{L} = \hat{b}_{i}(\hat{\mathbf{q}}^{0}) + \nu\left(\sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{q}_{j}^{0} \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{A}_{ir}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_{r}}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^{0}} \hat{q}_{r}^{0} - \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left.\frac{\partial \hat{b}_{i}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_{r}}\right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^{0}} \hat{q}_{r}^{0}\right).$$

Учебник: стр. 838-844 – разобрать пример!

Лекция №2

Понятие обратной задачи.

с примерами

Обратные задачи

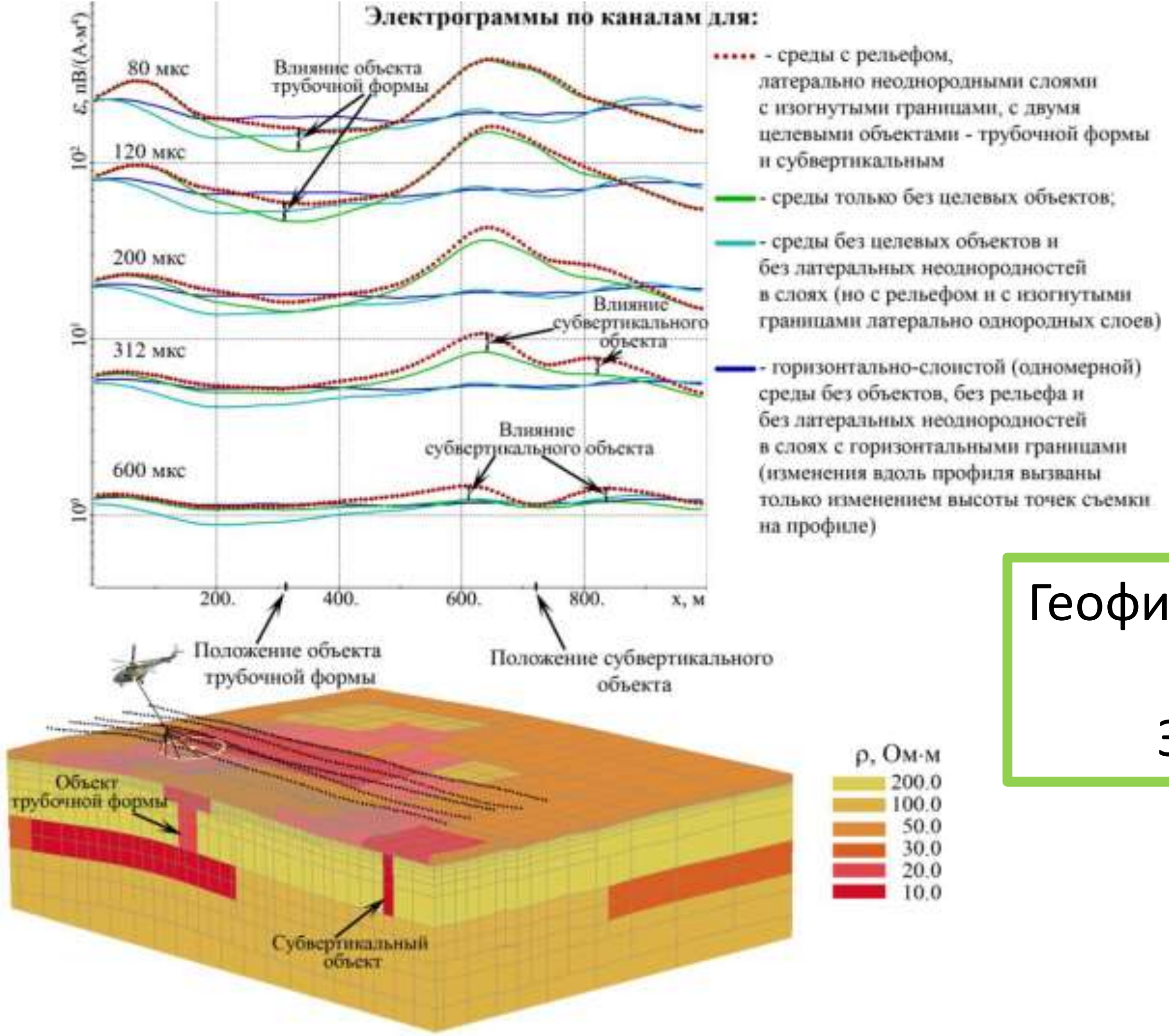
$$-\operatorname{div}\left(\underbrace{\lambda}_{\text{параметры}} \operatorname{grad} u\right) + \underbrace{\gamma}_{} u = \underbrace{f}_{}$$

Не известно

Поле

известно

Обладают большим классом эквивалентности, то есть являются некорректными задачами.



Геофизические исследования

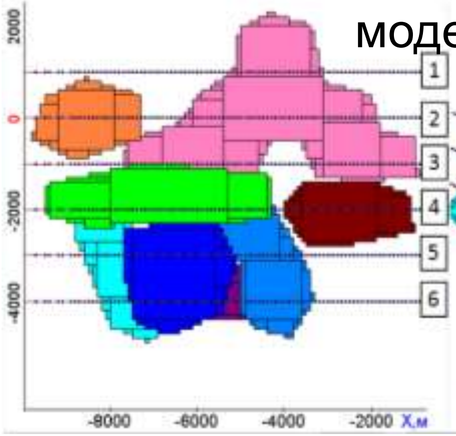
Что это?

Зачем они нужны?

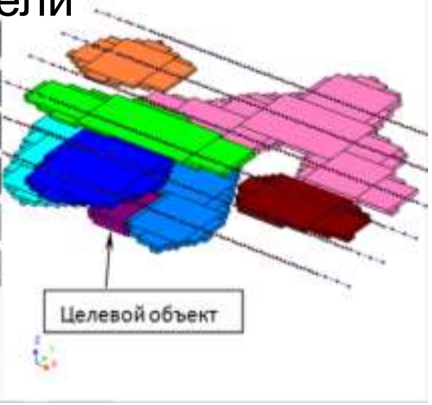
Геоэлектрическая модель, выбранная для исследования

В слоях присутствуют вариации удельного сопротивления и поляризуемости. Целевым (имитирующим ореол над залежью углеводородов) является поляризующийся объект, расположенный в пятом геоэлектрическом слое.

Трехмерные неоднородности модели

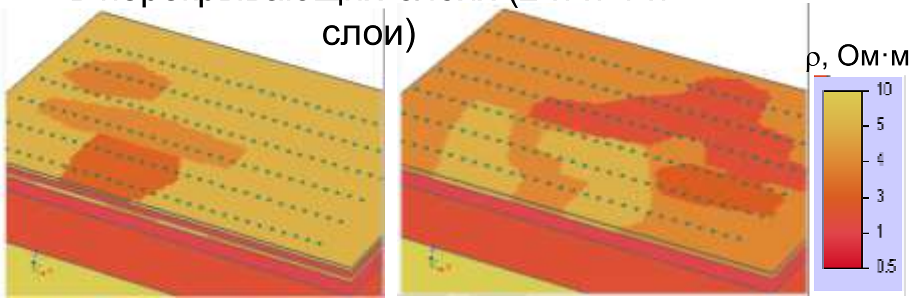


Вид сверху

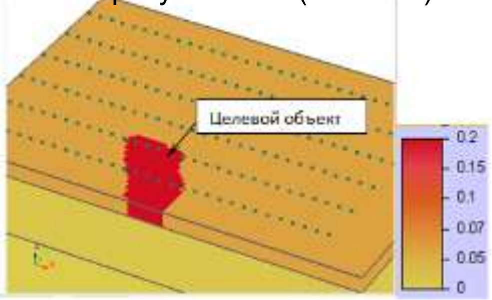


3D вид

Распределение сопротивления в перекрывающих слоях (2-й и 4-й слои)



Целевой объект с повышенной поляризуемостью (5-й слой)

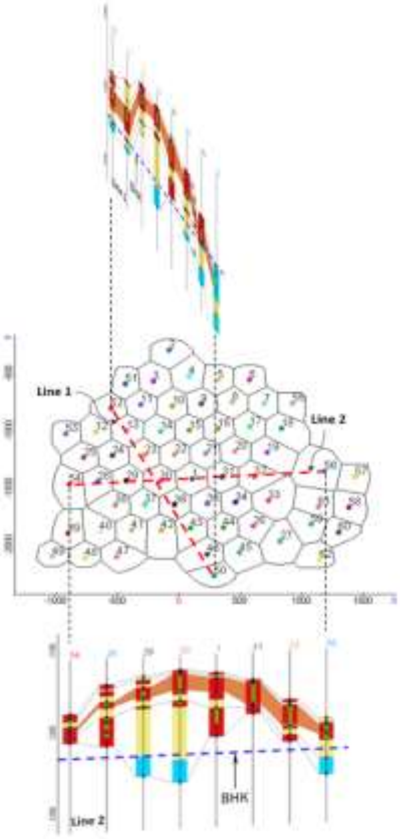


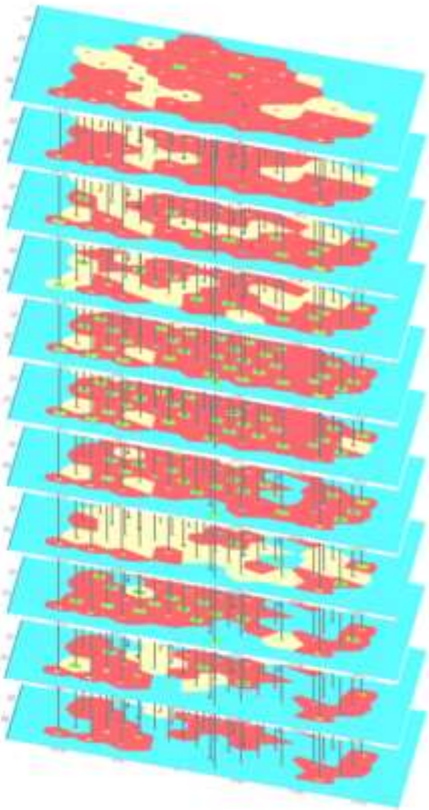
Подход к выполнению автоадаптации месторождений

Построение начальной гидродинамической модели выполняется автоматически на основе геолого-геофизических данных по скважинам.

В ходе автоадаптации в многослойных коллекторах определяются:

- распределения абсолютной проницаемости;
- распределения пористости;
- границы нефтенасыщенных зон;
- параметры фазовых проницаемостей;





Многослойная стартовая гидродинамическая модель

- нефтенасыщенные зоны
- водонасыщенные зоны
- зоны неколлектора
- зоны перфорации

Изгибы и толщины слоев формируются на следующем этапе по скважинным данным

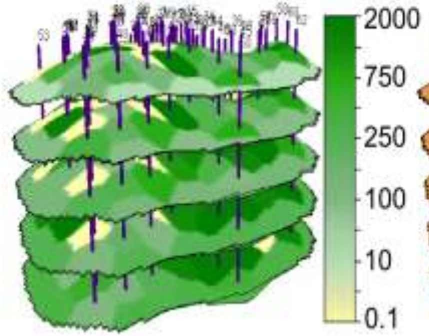
Примеры автоадаптаций, выполненных на месторождениях высоковязкой нетфи в р. Татарстан

Схема вычислительных экспериментов:

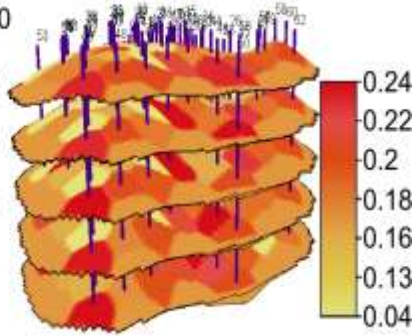
1) Проведение автоматической адаптации по 2/3 времени жизни месторождения (на первом участке этот период составил 20 лет, а на втором – 12 лет);
2) Построение прогноза на оставшуюся 1/3 времени жизни месторождения;
3) Сравнение прогнозных значений с фактически наблюденными.

Полученные в результате автоадаптации распределения свойств коллектора

проницаемость

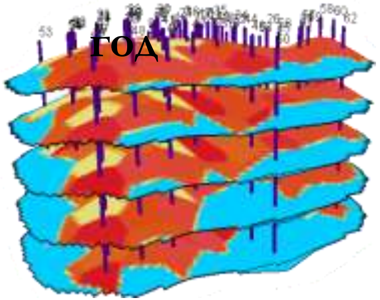


пористость

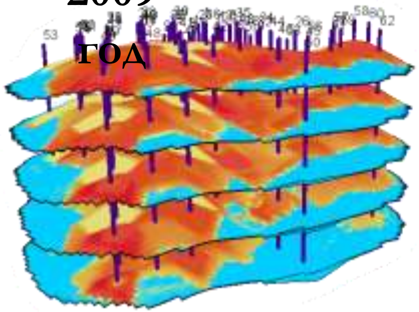


Полученная в результате автоадаптации и прогноза заполненность объема коллектора нефтью:

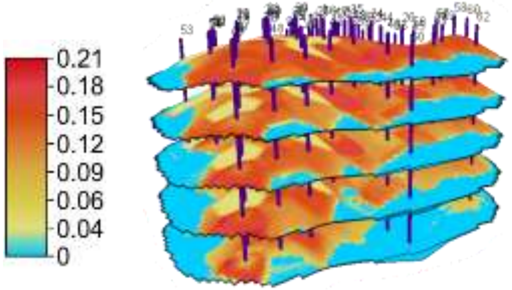
1987 год



2009 год



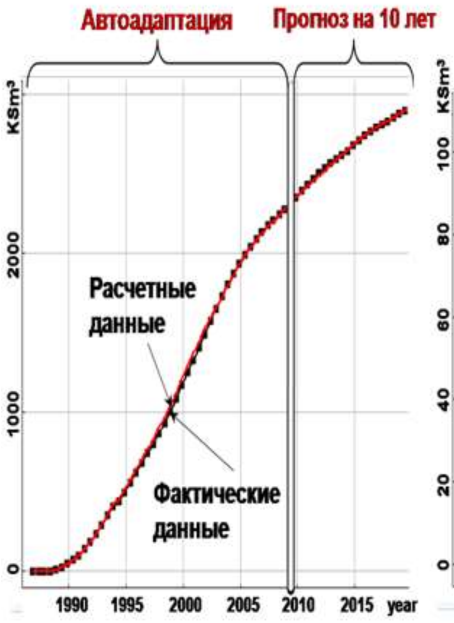
2019 год

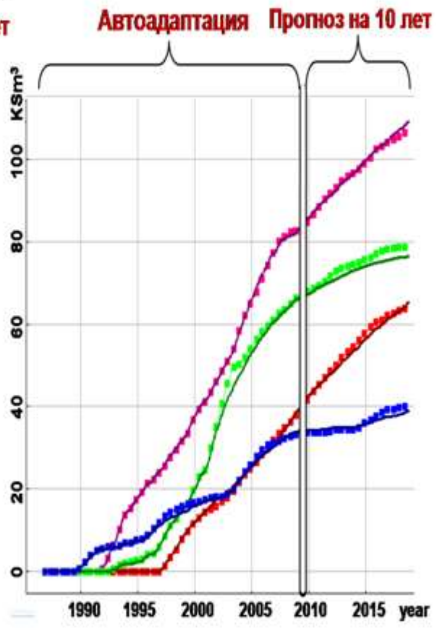


Автоадаптация + прогноз на участке I

Графики общей добычи нефти

Графики добычи нефти по отдельным (4-м) скважинам: факт. (точки) и расчет (линии)

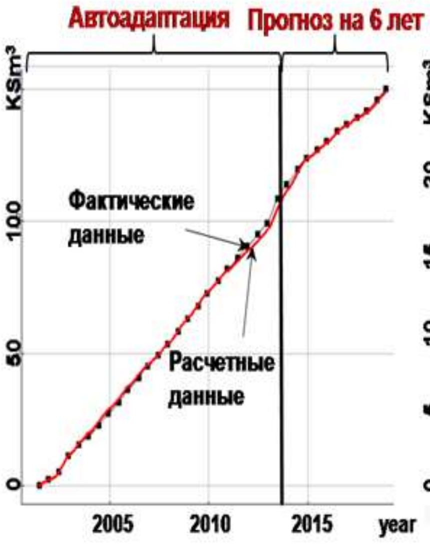


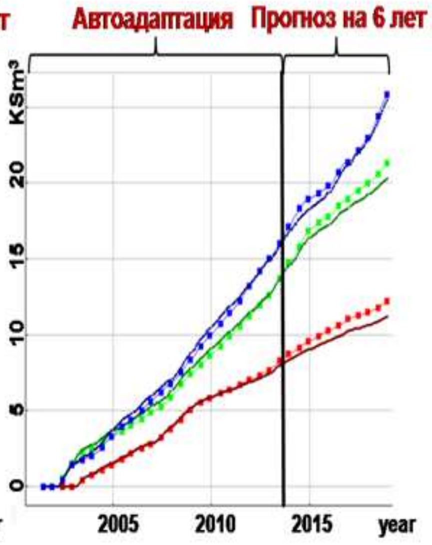


Автоадаптация + прогноз на участке II

Графики общей добычи нефти

Графики добычи нефти по отдельным (3-м) скважинам: факт. (точки) и расчет (линии)

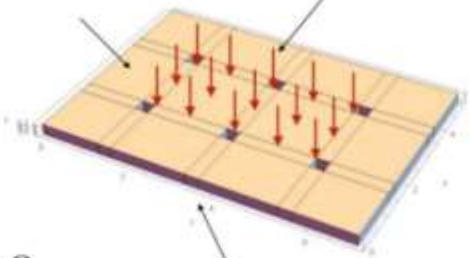




Optimizing titanium implant

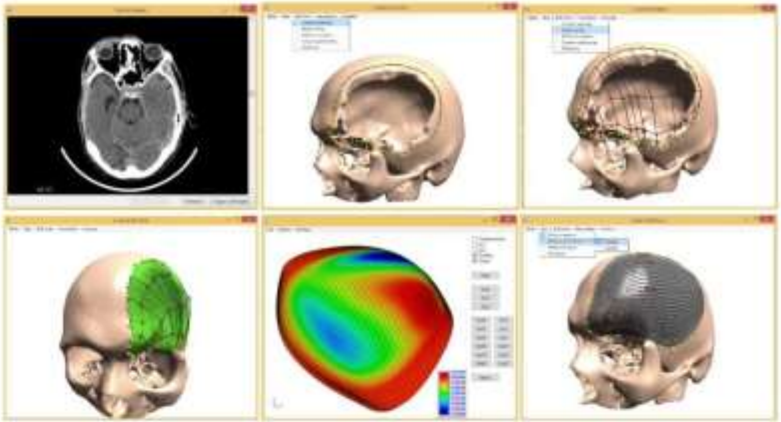
Optimization problem:

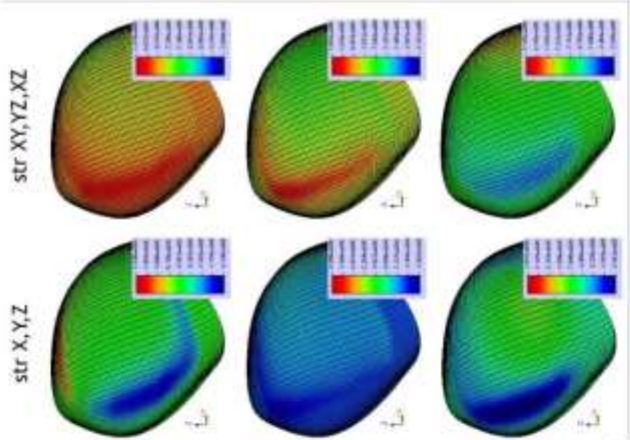
$$\begin{cases} V(h,l) \to \min, \\ h_1 \le h \le h_2, l_1 \le l \le l_2, \\ \max\limits_{(x,y,z)\in\Omega} \left|\boldsymbol{\delta u}(x,y,z;h,l)\right| \le \boldsymbol{u}^0. \end{cases}$$



Implant elasticity model:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \mu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} = 0, \ (x,y,z)\in\Omega, \\ \Sigma\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}, \ (x,y,z)\in\partial\Omega_\sigma, \\ \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}, \ (x,y,z)\in\partial\Omega_u. \end{cases}$$





Variational formulation:

$$\int\limits_\Omega (\lambda+\mu)\nabla\cdot\boldsymbol{u}\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}d\Omega + \int\limits_\Omega \mu\nabla u_\xi\cdot\nabla v_\xi\, d\Omega = \int\limits_\Omega f_\xi v_\xi\, d\Omega + \int\limits_{S_\sigma} p_\xi v_\xi\, dS \quad \forall v_\xi \in \mathrm{H}_0^1,\ \xi = x,y,z$$

Finite element discretization:

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_\Omega\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_1} + \mu\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_2} + \frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_3}\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_3}\right)\right]d\Omega\cdot q_j^{\xi_1} + \sum_{j=1}^{n}\int\limits_\Omega\left(\lambda\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_1} + \mu\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_1}\right)d\Omega\cdot q_j^{\xi_2} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_\Omega\left(\lambda\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_3}\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_1} + \mu\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi_3}\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_1}\right)d\Omega\cdot q_j^{\xi_3} = \int\limits_\Omega f_{\xi_1}\psi_i\, d\Omega + \int\limits_{S_\sigma} p_{\xi_1}\psi_i\, dS,\ i=\overline{1,n},\ \xi_* = x,y,z$$

Обратные задачи

$$F(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{N} \left(\varepsilon\left(\boldsymbol{\theta}, \tilde{x}_j\right) - \varepsilon_j^* \right)^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(\delta\varepsilon_j(\boldsymbol{\theta}) \right)^2 \to \min_{\boldsymbol{\theta}} \qquad (1)$$

1) В окрестности приближения $\boldsymbol{\theta}^k$ производится линеаризация функции $\delta\varepsilon_j(\boldsymbol{\theta})$

$$\delta\varepsilon_j(\boldsymbol{\theta}) \approx \delta\varepsilon_j\left(\boldsymbol{\theta}^k\right) + \sum_i \left. \frac{\partial\left(\delta\varepsilon_j(\boldsymbol{\theta})\right)}{\partial\theta_j^k} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^k} \Delta\theta_i \qquad (2)$$

2) Подставим (2) в (1). Приравняем производные функционала по параметрам к нулю и получим СЛАУ вида $\mathbf{A}\Delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}$, где

$$A_{qs} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\left(\delta\varepsilon_j\left(\boldsymbol{\theta}^k\right)\right)}{\partial\theta_q} \frac{\partial\left(\delta\varepsilon_j\left(\boldsymbol{\theta}^k\right)\right)}{\partial\theta_s}, \qquad b_q = \sum_{j=1}^{k} \delta\varepsilon_j\left(\boldsymbol{\theta}^k\right) \frac{\partial\left(\delta\varepsilon_j\left(\boldsymbol{\theta}^k\right)\right)}{\partial\theta_q},$$

3) Рассчитываем новое приближение $\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k + \Delta\boldsymbol{\theta}$, и если $F(\boldsymbol{\theta}) > \tau$, то возвращаемся на шаг 2.