

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Утверждено Редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК  
2016

УДК 53:519.61(075.8)  
Ч-671

Коллектив авторов:

М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин,  
П.А. Домников, Ю.И. Кошкина

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. *М.Э. Рояк*  
канд. техн. наук, программист ОАО «Е4-СибКОТЭС» *А.В. Волкова*

Ч-671     **Численные методы в уравнениях математической физики:** учеб. пособие / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин, П.А. Домников, Ю.И. Кошкина. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – 60 с.

ISBN 978-5-7782-2971-6

Учебное пособие предназначено для студентов и магистрантов по направлению «Прикладная математика и информатика» и аспирантов по направлению «Информатика и вычислительная техника», а также других направлений, где используются методы математической физики. Пособие содержит теоретические материалы по применению методов конечных разностей, конечных объемов, конечных элементов и интегральных уравнений для решения задач, описываемых уравнениями математической физики. Рассматриваются методы построения аппроксимаций для стационарных, нестационарных и гармонических по времени задач. Отдельное внимание уделено методам решения нелинейных и обратных задач.

УДК 53:519.61(075.8)

ISBN 978-5-7782-2971-6

© Коллектив авторов, 2016  
© Новосибирский государственный  
технический университет, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>1. Применение МКР и МКО для решения задач математической физики</b>               | 4  |
| 1.1. Разностные схемы для одномерных и многомерных задач                             | 4  |
| 1.2. Метод конечных объемов                                                          | 8  |
| 1.3. Понятия аппроксимации, сходимости и устойчивости в МКР и МКО                    | 11 |
| 1.4. Понятие аппроксимации в МКЭ                                                     | 11 |
| 1.5. Явные и неявные схемы аппроксимации по времени                                  | 12 |
| <b>2. Методы решения нелинейных задач</b>                                            | 18 |
| 2.1. Понятие о линейных и нелинейных задачах                                         | 18 |
| 2.2. Метод простой итерации                                                          | 21 |
| 2.2.1. Схема метода                                                                  | 21 |
| 2.2.2. Останов итерационного процесса                                                | 22 |
| 2.2.3. Использование релаксации                                                      | 23 |
| 2.3. Метод Ньютона                                                                   | 23 |
| <b>3. Гармонические по времени задачи</b>                                            | 30 |
| 3.1. Параболические и гиперболические задачи с гармоническими по времени источниками | 30 |
| 3.2. Методы решения СЛАУ, возникающих в гармонических задачах                        | 38 |
| 3.3. Связь нестационарной и гармонической задачи                                     | 39 |
| <b>4. Задачи с сосредоточенными источниками</b>                                      | 40 |
| 4.1. Понятие слабой постановки                                                       | 40 |
| 4.2. Типы сосредоточенных источников                                                 | 42 |
| <b>5. Метод интегральных уравнений для решения многомерных задач</b>                 | 45 |
| 5.1. Понятие интегрального уравнения                                                 | 45 |
| 5.2. Примеры задач                                                                   | 48 |
| <b>6. Обратные задачи</b>                                                            | 51 |
| 6.1. Понятие некорректно поставленной и обратной задачи                              | 51 |
| 6.2. Минимизация функционала невязки с использованием метода Гаусса–Ньютона          | 54 |
| Библиографический список                                                             | 59 |

# 1. ПРИМЕНЕНИЕ МКР И МКО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## 1.1. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Метод конечных разностей (МКР) основан на аппроксимации производных искомой функции  $u$  разностными соотношениями. Используя разложение  $u$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_i$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x} h_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} h_i^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} h_i^3 + o(h^4), \quad (1)$$

$$u_{i-1} = u_i - \frac{\partial u_i}{\partial x} h_{i-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} h_{i-1}^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} h_{i-1}^3 + o(h^4), \quad (2)$$

где  $u_j = u(x_j)$ ,  $h_j = x_{j+1} - x_j$ , можем получить выражения для аппроксимации первой производной с первым порядком:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} = \frac{\partial u}{\partial x} + o(h), \quad (3)$$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} = \frac{\partial u}{\partial x} + o(h). \quad (4)$$

При использовании равномерного шага ( $h_i = h_{i-1} = h$ ) вычитанием (2) из (1) получаем

$$u_{i+1} - u_{i-1} = \frac{\partial u_i}{\partial x} 2h + o(h^3). \quad (5)$$

Для получения разностного соотношения, аппроксимирующего первую производную со вторым порядком, разделим предыдущее выражение на  $2h$  :

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{\partial u_i}{\partial x} + o(h^3) . \quad (6)$$

Формула (3) – это правая разность, формула (4) – левая разность, формула (6) – двусторонняя разность.

Через конечные разности первого порядка рекуррентно могут быть определены разности второго и более высокого порядка, аппроксимирующие различные производные. На неравномерной сетке производная второго порядка может быть получена следующим образом. Умножим (1) на  $h_{i-1}$ , а (2) на  $h_i$  :

$$u_{i+1}h_{i-1} = u_i h_{i-1} + \frac{\partial u_i}{\partial x} h_i h_{i-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h_i^2 h_{i-1} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} h_i^3 h_{i-1} + o(h^4) , \quad (7)$$

$$u_{i+1}h_i = u_i h_i - \frac{\partial u_i}{\partial x} h_{i-1} h_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h_{i-1}^2 h_i - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} h_{i-1}^3 h_i + o(h^4) . \quad (8)$$

Сложим полученные выражения:

$$\begin{aligned} u_{i+1}h_{i-1} + u_{i+1}h_i &= u_i (h_{i-1} + h_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h_i h_{i-1} (h_i + h_{i-1}) + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} h_i h_{i-1} (h_i^2 - h_{i-1}^2) + o(h^4) . \end{aligned} \quad (9)$$

Разделим на  $\frac{1}{2} h_i h_{i-1} (h_{i-1} + h_i)$  и найдем окончательное выражение для аппроксимации второй производной с первым порядком

$$\frac{2u_{i+1}}{h_i (h_{i-1} + h_i)} - \frac{2u_i}{h_i h_{i-1}} + \frac{2u_{i-1}}{h_{i-1} (h_{i-1} + h_i)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h) . \quad (10)$$

На сетке с равномерным шагом

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h^2) \quad (11)$$

и погрешность аппроксимации имеет уже второй порядок, если функция обладает ограниченной производной четвертого порядка [1].

Для многомерных задач используется формула Тейлора в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x_1 + h^{x_1}, \dots, x_n + h^{x_n}) &= u(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n h^{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n h^{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 u(x_1, \dots, x_n) + \dots + \frac{1}{k!} \left( \sum_{j=1}^n h^{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k u(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \frac{1}{(k+1)!} \left( \sum_{j=1}^n h^{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{k+1} u(\xi_1, \dots, \xi_n), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $h^{x_j}$  — приращения соответствующих аргументов;  $\xi_j \in [x_j, x_j + h^{x_j}]$ ; функция  $u(x_1, \dots, x_n)$  обладает ограниченными производными до  $(k+1)$ -го порядка включительно.

Пусть область  $\Omega$  двумерная и в ней определена регулярная прямоугольная сетка, заданная координатами узлов  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$  и  $y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m$ . Построим дискретный аналог для уравнения

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma u = f. \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$k_{i+1}^x = \frac{2}{h_i^x (h_{i-1}^x + h_i^x)}, \quad k_i^x = \frac{2}{h_i^x h_{i-1}^x}, \quad k_{i-1}^x = \frac{2}{h_{i-1}^x (h_{i-1}^x + h_i^x)}, \quad (14)$$

$$k_{i+1}^y = \frac{2}{h_i^y (h_{i-1}^y + h_i^y)}, \quad k_i^y = \frac{2}{h_i^y h_{i-1}^y}, \quad k_{i-1}^y = \frac{2}{h_{i-1}^y (h_{i-1}^y + h_i^y)}, \quad (15)$$

где  $h_i^x = x_{i+1} - x_i$ ,  $h_i^y = y_{i+1} - y_i$ .

Тогда дискретный аналог уравнения (13) на неравномерной прямоугольной сетке может быть определен следующим образом:

$$\begin{aligned} & -k_{i-1}^x u_{i-1,j} + k_i^x u_{i,j} - k_{i+1}^x u_{i+1,j} - k_{j-1}^y u_{i,j-1} + \\ & + k_j^y u_{i,j} - k_{j+1}^y u_{i,j+1} + \gamma u_{i,j} = f_{i,j}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $u_{i,j}$  и  $f_{i,j}$  – значения сеточной функции и правой части в узле сетки  $(x_i, y_j)$  соответственно.

Присвоим каждому узлу сетки номер  $l = (j-1)n + i$ , тогда выражение (16) можно привести к виду

$$-k_{i-1}^x u_{l-1} + u_l (k_i^x + k_j^y + \gamma) - k_{i+1}^x u_{l+1} - k_{j-1}^y u_{l-n} - k_{j+1}^y u_{l+n} = f_l. \quad (17)$$

Всего получается  $L = (n-1)(m-1)$  разностных уравнений вида (17). Эти разностные уравнения образуют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с пятидиагональной матрицей. На равномерной сетке данная разностная схема будет иметь второй порядок погрешности.

Учет краевых условий выполняется следующим образом. Для узлов, расположенных на границе  $S_1$ , на которых заданы краевые условия первого рода, диагональным элементам матрицы присваиваются значения единица, а соответствующим элементам вектора правой части – значения функции  $u_g$  в этом узле.

Если расчетная область представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, то направление нормали к границам  $S_2$  и  $S_3$ , на которых заданы краевые условия второго и третьего рода, совпадает с одной из координатных линий и тогда методы

аппроксимации производной по нормали  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  (которая в этом случае будет равна либо  $\pm \frac{\partial u}{\partial x}$ , либо  $\pm \frac{\partial u}{\partial y}$ ) сводятся к одномерным (3) и (4).

## 1.2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ

Основная идея метода конечных объемов (МКО), называемого также балансным методом, заключается в следующем. Расчетная область разбивается на элементарные объемы, и дифференциальное уравнение в краевой задаче заменяется интегральными балансными соотношениями для каждого из этих элементарных объемов.

При этом элементарные объемы, в которых интегробалансные соотношения заменяются своими дискретными аналогами, не являются ячейками дискретизации расчетной области. Ячейки дискретизации расчетной области характеризуются тем, что узлы сетки, в которых будут вычисляться значения решения  $u$  исходной краевой задачи, являются, как правило, вершинами этих ячеек. Каждый же из элементарных объемов строится вокруг узлов сетки из отдельных частей ячеек дискретизации расчетной области, примыкающих к соответствующим узлам. После этого интегралы в интегробалансных соотношениях аппроксимируются с использованием значений искомой функции в узлах сетки или значений производных искомой функций, взятых из краевых условий. В результате получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решением которой является вектор значений искомой функции в узлах сетки.

Построим дискретный аналог эллиптической краевой задачи, определяемой уравнением

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + \gamma u = f, \quad (18)$$

заданным в области  $\Omega = (a, b)$  с краевыми условиями

$$u|_{S_1} = u_g, \quad (19)$$

$$p \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta, \quad (20)$$



$$p \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_3} + \beta \left( u|_{S_3} - u_\beta \right) = 0, \quad (21)$$

в которых границами  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  являются либо точка  $a$ , либо точка  $b$ , либо пустое множество (если соответствующее краевое условие отсутствует в краевой задаче).

Нанесем на интервал  $(a, b)$  сетку с узлами  $x_k$ , удовлетворяющими соотношениям:  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Узлы  $x_k$  разбивают расчетную область  $\Omega$  на  $(n-1)$  ячейку  $\Omega_k = (x_k, x_{k+1})$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

Обозначим через  $\Omega'_k$  левую половину  $\left( x_k, \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right)$  ячейки  $\Omega_k$ , а через  $\Omega''_k$  – правую половину  $\left( \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, x_{k+1} \right)$  ячейки  $\Omega_k$ . Вокруг каждого внутреннего узла  $x_k$  ( $k = 2, \dots, n-1$ ) построим элементарный объем  $\tilde{\Omega}_k$ , состоящий из двух половинок примыкающих к  $x_k$  ячеек дискретизации  $\tilde{\Omega}_k = \Omega''_{k-1} \cup \Omega'_k$ . Соответствующие же граничным узлам  $x_1$  и  $x_n$  элементарные объемы  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_n$  будут состоять из одной половинки ячеек  $\Omega_1$  и  $\Omega_{n-1}$ :  $\tilde{\Omega}_1 = \Omega'_1$ ,  $\tilde{\Omega}_n = \Omega''_{n-1}$ . Разбиение расчетной области  $\Omega = (a, b)$  на ячейки дискретизации  $\Omega_k$  и конечные объемы  $\tilde{\Omega}_k$  показано на рис. 1.

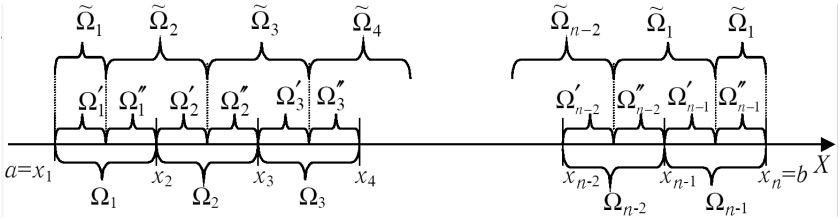


Рис. 1. Разбиение расчетной области  $\Omega = (a, b)$  на ячейки дискретизации  $\Omega_k$  и элементарные объемы  $\tilde{\Omega}_k$

Проинтегрируем уравнение (18) по каждому из элементарных объемов  $\tilde{\Omega}_k$ . В результате получим  $n$  уравнений, которые имеют следующий вид:

$$-\int_{\tilde{\Omega}_k} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) d\Omega + \int_{\tilde{\Omega}_k} \gamma u d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}_k} f d\Omega, \quad k=1, \dots, n. \quad (22)$$

Учитывая, что для внутренних узлов  $x_k$  ( $k=2, \dots, n-1$ ) содержащие их элементарные объемы имеют вид  $\tilde{\Omega}_k = \Omega_{k-1}' \cup \Omega_k' = \left( \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right)$ , для граничных узлов  $\tilde{\Omega}_1 = \left( x_1, \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$  (для  $x_1$ ) и  $\tilde{\Omega}_n = \left( \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, x_n \right)$  (для  $x_n$ ), а также то, что в одномерном случае операторы  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{grad}$  имеют вид  $\frac{d}{dx}$ , мы можем записать систему (22) в виде

$$-\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} \gamma u dx = \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} f dx, \quad (23)$$

$$-\int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \gamma u dx = \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} f dx, \quad k=2, \dots, n-1, \quad (24)$$

$$-\int_{x_{n-1/2}}^{x_n} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_n} \gamma u dx = \int_{x_{n-1/2}}^{x_n} f dx, \quad (25)$$

где под  $x_{k-1/2}$  понимается точка  $\frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ , а под  $x_{k+1/2}$  — соответственно точка  $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ . После вычисления интегралов в (23)–(25) получим СЛАУ  $\mathbf{AU} = \mathbf{G}$  для вектора  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  значений искомой функции  $u$  в узлах сетки.

Более подробно об аспектах применения МКО можно прочитать в [2].

### 1.3. ПОНЯТИЯ АППРОКСИМАЦИИ, СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ В МКР И МКО

Разностная схема имеет  $k$ -й порядок аппроксимации, если  $\|f^* - L^h u^*\| \leq C_1 h^k$ , где  $u^*$  – точное решение,  $L^h$  – разностный оператор,  $f^*$  – правая часть (сеточная функция).

Разностная схема имеет  $k$ -й порядок точности (сходимости), если  $\|u - u^*\| \leq C_2 h^k$ , где  $u$  – сеточная функция, удовлетворяющая уравнению  $L^h u = f^*$ .

Разностная схема устойчива, если малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения:

$$\|u - u^*\| \leq C \|L^h(u - u^*)\|.$$

Очевидно, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость разностной схемы:

$$\|u - u^*\| \leq C \left\| \underbrace{L^h u}_{f^*} - L^h u^* \right\| \leq \underbrace{CC_1}_{C_2} h^k.$$

При этом разностная схема сходится с  $k$ -м порядком, если она устойчива и имеет  $k$ -й порядок аппроксимации.

### 1.4. ПОНЯТИЕ АППРОКСИМАЦИИ В МКЭ

В отличие от МКР и МКО в методе конечных элементов (МКЭ) понятия порядка аппроксимации и порядка точности эквивалентны, поскольку в МКЭ речь сразу идет об аппроксимации решения (а не

дифференциального оператора):  $u^h = \sum_{i=1}^n q_i \psi_i$ . Величина порядка ап-

проксимации определяется порядком базисных функций  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  и зависит от нормы. Если в базисе  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  представимы все поли-

номы степени  $\leq m$ , то в энергетической норме  $\|v\|_{\Theta} = \sqrt{\int_{\Omega} \lambda(\text{grad } v)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \gamma v^2 d\Omega + \int_S \beta v^2 dS}$  будет справедлива оценка  $\|u - u^*\|_{\Theta} \leq Ch^m$ , а в норме пространства  $L_2$   $\|v\|_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} v^2 d\Omega}$  будет справедлива оценка  $\|u - u^*\|_{L_2} \leq Ch^{m+1}$ .

Для эллиптического уравнения при использовании МКЭ устойчивость очевидна: всегда ищется решение, ближайшее к точному в энергетической норме [3].

### 1.5. ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ ПО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим некоторые способы аппроксимации начально-краевых задач для уравнений параболического типа

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(\lambda \text{grad } u) = f \quad (26)$$

и для уравнений гиперболического типа

$$\chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(\lambda \text{grad } u) = f. \quad (27)$$

Помимо краевых условий вида (19)–(21) начально-краевая задача для уравнения параболического типа (26) должна включать в себя начальное условие

$$u|_{t=t_0}, \quad (28)$$

а для начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа необходимо задать два начальных условия: (28) и

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0}. \quad (29)$$

Для построения дискретных аналогов уравнений (26) и (27) помимо сетки по пространству необходима сетка по времени, на которой производные по времени заменяются разностными аналогами.

При тестировании программ, реализующих решение уравнений (26) и (27), необходимо проводить изучение сходимости отдельно по времени и по пространству.

Рассмотрим аппроксимацию дифференциального уравнения (26) по времени с использованием следующих схем:

$$\sigma \frac{u^j - u^{j-1}}{\Delta t} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u^j) = f^j, \quad j = 1, \dots, J, \quad (30)$$

$$\sigma \frac{u^j - u^{j-1}}{\Delta t} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u^{j-1}) = f^{j-1}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (31)$$

$$\sigma \frac{u^j - u^{j-1}}{\Delta t} - \operatorname{div} \left( \lambda \operatorname{grad} \frac{u^j + u^{j-1}}{2} \right) = \frac{f^j + f^{j-1}}{2}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (32)$$

Соотношение (30) определяет неявную схему аппроксимации параболического уравнения, соотношение (31) – явную схему, а соотношение (32) – схему Кранка–Николсона.

Обозначим через  $\mathbf{q}^j$  вектор весов разложения конечноэлементного решения по базисным функциям (т. е. для лагранжевых элементов – это значения решения в узлах конечноэлементной сетки). Тогда для каждого  $j = 1, \dots, J$  мы получим матричное уравнение следующего вида:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \mathbf{q}^j - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \mathbf{q}^{j-1} + \mathbf{G} \mathbf{q}^j + \mathbf{M}^{S_3} \mathbf{q}^j = \mathbf{b}^j, \quad (33)$$

где  $\mathbf{M}^{S_3}$  – вклады в глобальную матрицу конечноэлементной СЛАУ от краевых условий третьего рода; запись  $\mathbf{b}^j$  означает, что вектор этот сформирован по значениям функции  $f$  и краевых условий на  $j$ -м временном слое;  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{M}$  – это глобальные матрицы жесткости и массы соответственно.

Матричное уравнение (33) фактически является СЛАУ для вектора неизвестных  $\mathbf{q}^j$ :

$$\left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{G} + \mathbf{M}^{S_3} \right) \mathbf{q}^j = \mathbf{b}^j + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \mathbf{q}^{j-1}. \quad (34)$$

Аналогично строятся процедуры решения уравнений (31) и (32). Для уравнения (31) получаем матричное уравнение

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{M} + \mathbf{M}^{S_3}) \mathbf{q}^j = \mathbf{b}^{j-1} + \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} - \mathbf{G} \right) \mathbf{q}^{j-1}, \quad (35)$$

а для уравнения (32) – матричное уравнение

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \frac{1}{2} \mathbf{G} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^{S_3} \right) \mathbf{q}^j = \\ & = \frac{1}{2} (\mathbf{b}^j + \mathbf{b}^{j-1}) + \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} - \frac{1}{2} \mathbf{G} - \frac{1}{2} \mathbf{M}^{S_3} \right) \mathbf{q}^{j-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Для *устойчивости* вычислительного процесса при использовании *явной* схемы необходимо соблюдать определенное *соотношение* между *шагом по времени* и *размерами ячейки дискретизации* в пространственной сетке: с *уменьшением размеров ячейки дискретизации* *максимально допустимый для устойчивого счета шаг по времени* должен быть *уменьшен пропорционально квадрату размера ячеек дискретизации*. Такого рода ограничений нет в неявной схеме (34) и в схеме Кранка–Николсона (36) (которая по своей сути также является неявной схемой).

Рассмотрим процедуру построения неявной трехслойной схемы для решения дифференциального уравнения параболического типа. Будем считать, что функция  $u$  является функцией двух пространственных координат  $x$  и  $y$ . Представим искомое решение  $u$  на интервале  $(t_{j-2}, t_j)$  в следующем виде:

$$u(x, y, t) \approx u^{j-2}(x, y) \eta_2^j(t) + u^{j-1}(x, y) \eta_1^j(t) + u^j(x, y) \eta_0^j(t), \quad (37)$$

где функции  $\eta_2^j$ ,  $\eta_1^j$  и  $\eta_0^j$  – это базисные квадратичные полиномы Лагранжа (с двумя корнями из набора значений времен  $t_{j-2}$ ,  $t_{j-1}$  и  $t_j$ , которые могут быть записаны в виде

$$\eta_2^j(t) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t} (t - t_{j-1})(t - t_j), \quad (38)$$

$$\eta_1^j(t) = -\frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_0} (t - t_{j-2})(t - t_j), \quad (39)$$

$$\eta_0^j(t) = \frac{1}{\Delta t \Delta t_0} (t - t_{j-2})(t - t_{j-1}), \quad (40)$$

где

$$\Delta t = t_j - t_{j-2}, \quad \Delta t_1 = t_{j-1} - t_{j-2}, \quad \Delta t_0 = t_j - t_{j-1}. \quad (41)$$

Вычислим производные по  $t$  функций (38)–(40) при  $t = t_j$  (с учетом обозначений (41)):

$$\left. \frac{d\eta_2^j(t)}{dt} \right|_{t=t_j} = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t} \left[ (t - t_j) + (t - t_{j-1}) \right] \Big|_{t=t_j} = \frac{t_j - t_{j-1}}{\Delta t_1 \Delta t} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t}, \quad (42)$$

$$\left. \frac{d\eta_1^j(t)}{dt} \right|_{t=t_j} = -\frac{t_j - t_{j-2}}{\Delta t_1 \Delta t_0} = -\frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}, \quad (43)$$

$$\left. \frac{d\eta_0^j(t)}{dt} \right|_{t=t_j} = \frac{(t_j - t_{j-1}) + (t_j - t_{j-2})}{\Delta t \Delta t_0} = \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0}. \quad (44)$$

С учетом (42)–(44) получим следующее уравнение

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} u^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1} + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} u^j - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u^j) = f^j. \quad (45)$$

Выполняя конечноэлементную аппроксимацию краевой задачи для уравнения (45), получаем СЛАУ следующего вида:

$$\left( \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} \mathbf{M} + \mathbf{G} + \mathbf{M}^{S_3} \right) \mathbf{q}^j = \mathbf{b}^j - \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} \mathbf{M} \mathbf{q}^{j-2} + \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} \mathbf{M} \mathbf{q}^{j-1}. \quad (46)$$

При решении начально-краевых задач для уравнения гиперболического типа наиболее часто используют две схемы аппроксимации этого уравнения по времени: явную схему и схему, аналогичную схеме Кранка–Николсона. При условии, что шаг по времени  $\Delta t = t_j - t_{j-1}$  не изменяется на всем временном интервале, где ищется решение задачи, явная схема аппроксимации уравнения (27) по времени имеет вид

$$\chi \frac{u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^2} + \sigma \frac{u^j - u^{j-2}}{2\Delta t} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u^{j-1}) = f^{j-1}, \quad (47)$$

а схема, аналогичная схеме Кранка–Николсона, следующий вид:

$$\begin{aligned} & \chi \frac{u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^2} + \sigma \frac{u^j - u^{j-2}}{2\Delta t} - \\ & - \operatorname{div} \left( \lambda \operatorname{grad} \frac{u^j + u^{j-2}}{2} \right) = \frac{f^j + f^{j-2}}{2}, \end{aligned} \quad (48)$$

Выполняя конечноэлементную аппроксимацию соответствующих задач для уравнений (47) и (48), получаем матричные уравнения следующего вида (здесь и далее для простоты будем считать, что вкладов от краевых условий в глобальную матрицу нет):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^\chi \mathbf{q}^j - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}^\chi \mathbf{q}^{j-1} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^\chi \mathbf{q}^{j-2} + \\ & + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M}^\sigma \mathbf{q}^j - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M}^\sigma \mathbf{q}^{j-2} + \mathbf{G} \mathbf{q}^{j-1} = \mathbf{b}^{j-1}, \end{aligned} \quad (49)$$



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^\chi \mathbf{q}^j - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}^\chi \mathbf{q}^{j-1} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^\chi \mathbf{q}^{j-2} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M}^\sigma \mathbf{q}^j - \\
& - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M}^\sigma \mathbf{q}^{j-2} + \frac{1}{2} \mathbf{G} \mathbf{q}^j + \frac{1}{2} \mathbf{G} \mathbf{q}^{j-2} = \frac{1}{2} \mathbf{b}^j + \frac{1}{2} \mathbf{b}^{j-2}, \quad (50)
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{G}$ , как и ранее, – матрица жесткости, получающаяся в результате аппроксимации члена  $-\text{div}(\lambda \text{grad} u)$ , а  $\mathbf{M}^\chi$  и  $\mathbf{M}^\sigma$  – матрицы массы, получающиеся в результате аппроксимации членов  $\chi u$  и  $\sigma u$  соответственно.

Явная схема аппроксимации уравнения (27) с неравномерным шагом по времени может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
& \chi \left( \frac{2}{\Delta t \Delta t_1} u^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1} + \frac{2}{\Delta t \Delta t_0} u^j \right) + \\
& + \sigma \left( -\frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} u^{j-2} + \frac{\Delta t_0 - \Delta t_1}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1} + \frac{\Delta t_1}{\Delta t \Delta t_0} u^j \right) - \\
& - \text{div}(\lambda \text{grad} u^{j-1}) = f^{j-1}. \quad (51)
\end{aligned}$$

Конечноэлементная аппроксимация краевой задачи для уравнения (51) приведет к матричному уравнению вида

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\Delta t \Delta t_1} \mathbf{M}^\chi \mathbf{q}^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0} \mathbf{M}^\chi \mathbf{q}^{j-1} + \frac{2}{\Delta t \Delta t_0} \mathbf{M}^\chi \mathbf{q}^j - \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} \mathbf{M}^\sigma \mathbf{q}^{j-2} + \\
& + \frac{\Delta t_0 - \Delta t_1}{\Delta t_1 \Delta t_0} \mathbf{M}^\sigma \mathbf{q}^{j-1} + \frac{\Delta t}{\Delta t \Delta t_0} \mathbf{M}^\sigma \mathbf{q}^j + \mathbf{G} \mathbf{q}^{j-1} = \mathbf{b}^j. \quad (52)
\end{aligned}$$

## 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

### 2.1. ПОНЯТИЕ О ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

Нелинейными называют такие дифференциально-краевые задачи, у которых параметры дифференциального уравнения или краевых условий зависят от решения.

В общем виде нелинейное дифференциальное уравнение эллиптического типа можно записать следующим образом:

$$-\operatorname{div}(\lambda(u)\operatorname{grad}u) + \gamma(u)u = f(u). \quad (53)$$

При этом уравнение является нелинейным, если хотя бы один из параметров  $\lambda$ ,  $\gamma$  или  $f$  зависит от решения  $u$  (причем  $f$  нелинейно зависит от  $u$ ).

В качестве практических примеров нелинейных задач можно привести задачи магнитостатики и электродинамики (расчета магнитного или электромагнитного поля в различных технических устройствах – ускорителях заряженных частиц, электродвигателях и др.), в которых коэффициент магнитной проницаемости зависит от магнитной индукции, связанные задачи термоупругости, где от температуры могут зависеть как механические свойства конструкции (модуль Юнга, коэффициент расширения), так и термические (коэффициент теплопроводности, теплоемкости) и др. Соответствующие зависимости коэффициентов уравнений, как правило, получаются из экспериментов и представляются в научно-технической литературе либо в виде табличных зависимостей (например, получить зависимость коэффициента магнитной проницаемости от магнитной индукции можно с помощью так называемых кривых намагниченности), либо в виде некоторых аналитических выражений. Забегая вперед, отметим, что если соответствующие зависимости коэффициентов нелинейного дифференциального уравнения заданы таблично, то для реализации вычислительных схем, которые будут описаны в следующих разделах, следует перед решением задачи построить соответствующие интерполянты, например, в виде сплайнов [3, с. 204–217].

Как правило, отдельно рассматривается ситуация, когда один из коэффициентов (чаще всего это коэффициент диффузии  $\lambda$ ) зависит от производных решения, например,  $\lambda = \lambda(\operatorname{grad}u)$ . Хотя формально

запись  $\lambda(u)$  может означать не только непосредственную зависимость  $\lambda$  от решения  $u$  (заданную аналитически, таблично или каким-либо еще способом), но и зависимость  $\lambda$  от каких-либо производных  $u$  (например, от  $\text{grad } u$  или от  $|\text{grad } u| = \sqrt{(\text{grad } u)^2}$ ), тем не менее при реализации соответствующего метода решения нелинейной задачи очень важно то, *как именно* задана зависимость  $\lambda$  от решения – непосредственной зависимостью  $\lambda(u)$  или как-то иначе, например зависимостью  $\lambda(|\text{grad } u|)$ .

Заметим также, что нелинейность дифференциального уравнения (53), порождаемую зависимостью коэффициента  $\gamma$  от  $u$ , можно трактовать как нелинейность модифицированной правой части

$$\tilde{f}(u) = f(u) - \gamma(u)u. \quad (54)$$

Однако при переносе члена  $\gamma(u)u$  в правую часть методы решения соответствующей нелинейной задачи чаще всего уступают по эффективности подходам, в которых нелинейный член  $\gamma(u)u$  уравнения (53) обрабатывается отдельно от правой части  $f(u)$ . Поэтому лучше нелинейность  $\gamma(u)u$  обрабатывать с учетом ее вида, а не как составляющую нелинейной правой части.

В этой книге мы рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике ситуации, когда коэффициент диффузии  $\lambda$  и правая часть  $f$  являются некоторыми функциями решения, оставив читателю для самостоятельного осмысления ситуации с нелинейностью, порождаемой зависимостью  $\gamma$  от  $u$ .

Краевая задача может оказаться нелинейной не только в том случае, когда параметры дифференциального уравнения  $\lambda$ ,  $\gamma$  и  $f$  зависят от решения  $u$ , но и тогда, когда параметры краевых условий  $\theta$ ,  $\beta$  или  $u_\beta$  зависят от  $u$ . Так, краевое условие второго рода делает краевую задачу нелинейной, если параметр  $\theta$  зависит (нелинейно) от  $u$ :

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \theta(u). \quad (55)$$

Краевое условие же третьего рода будет нелинейным, если его параметры  $\beta$  или  $u_\beta$  зависят от  $u$ . В общем случае нелинейное краевое условие третьего рода может быть записано в виде

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u)(u - u_\beta(u)) = 0 \quad (56)$$

(при этом, естественно, предполагается, что  $u_\beta(u)$  – нелинейная функция  $u$ ).

В результате конечноэлементной аппроксимации нелинейной краевой задачи (53), (55), (56) получается система нелинейных уравнений

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{b}(\mathbf{q}), \quad (57)$$

у которой компоненты матрицы  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  и вектора правой части  $\mathbf{b}(\mathbf{q})$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{ij}(\mathbf{q}) &= \int_{\Omega} \lambda(u^h(\mathbf{q})) \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \gamma(u^h(\mathbf{q})) \psi_j \psi_i d\Omega + \int_{S_3} \beta(u^h(\mathbf{q})) \psi_j \psi_i dS, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} b_i(\mathbf{q}) &= \int_{\Omega} f(u^h(\mathbf{q})) \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta(u^h(\mathbf{q})) \psi_i dS + \\ &+ \int_{S_3} \beta(u^h(\mathbf{q})) u_\beta(u^h(\mathbf{q})) \psi_i dS, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$u^h(\mathbf{q}) = \sum_j q_j \psi_j. \quad (60)$$

Рассмотрим методы решения этой системы нелинейных уравнений.

## 2.2. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

### 2.2.1. СХЕМА МЕТОДА

Наиболее простым для решения системы нелинейных конечноэлементных уравнений (57) является так называемый метод простой итерации. Он заключается в следующем.

Выбирается некоторое начальное приближение – функция  $u^0$  (или вектор весов  $\mathbf{q}^{(0)}$  разложения  $u^0$  по базису  $\{\psi_i\}$ ). Это начальное приближение обычно выбирается на основе некоторых априорных данных. С помощью выбранного начального приближения  $\mathbf{q}^{(0)}$  вычисляются коэффициенты конечноэлементной матрицы  $A_{ij}(\mathbf{q}^{(0)})$  и вектора правой части  $f_i(\mathbf{q}^{(0)})$  (см. соотношения (58) – (60)). При этом параметры дифференциального уравнения и краевых условий, зависящие от решения  $u$ , могут быть представлены на каждом конечном элементе  $\Omega_I$  в виде линейной комбинации базисных функций. Например, коэффициент диффузии может быть представлен интерполянтom

$$\lambda = \sum_j \lambda_j \left( u^h(\mathbf{q}^{(0)}) \right) \psi_j ,$$

где (в случае использования элементов лагранжева типа)  $\lambda_j \left( u^h(\mathbf{q}^{(0)}) \right)$  – значение коэффициента  $\lambda \left( u^h(\mathbf{q}^{(0)}) \right)$  в  $j$ -м узле;  $\psi_j$  – базисная функция, соответствующая  $j$ -му узлу.

Довольно часто при решении нелинейных задач для вычисления компонент конечноэлементной матрицы и вектора правой части используется численное интегрирование. В этом случае значения решения в узлах интегрирования, по которым вычисляются параметры задачи  $\lambda(u)$ ,  $\gamma(u)$  и  $f(u)$ , берутся как значения в этих узлах интегрирования линейной комбинации локальных базисных функций  $\hat{\psi}_i$  с весами  $\hat{q}_i$ , полученными на предыдущей итерации по нелинейности или из начального приближения.

Итерационный процесс в методе простой итерации строится следующим образом. На первом шаге решается система линейных алгеб-

раических уравнений  $\mathbf{A}(\mathbf{q}^{(0)})\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{b}(\mathbf{q}^{(0)})$ . В результате решения этой СЛАУ находится новое приближение  $\mathbf{q}^{(1)}$  решения нелинейной системы (57), которое, в свою очередь, используется для нахождения компонент матрицы  $A_{ij}(\mathbf{q}^{(1)})$  и вектора  $b_i(\mathbf{q}^{(1)})$ , затем решается система  $\mathbf{A}(\mathbf{q}^{(1)})\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{b}(\mathbf{q}^{(1)})$  и т. д.

### 2.2.2. ОСТАНОВ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Решение  $\mathbf{q}^{(k)}$  на  $k$ -й итерации можно считать решением системы нелинейных конечноэлементных уравнений (57), если выполняется условие

$$\frac{\|\mathbf{A}(\mathbf{q}^{(k)})\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{b}(\mathbf{q}^{(k)})\|}{\|\mathbf{b}\|} < \varepsilon, \quad (61)$$

где  $\varepsilon$  – некоторое малое число, выбранное как требуемая точность решения нелинейной задачи. В данном случае норма абсолютной невязки нелинейной системы  $\mathbf{A}(\mathbf{q}^{(k)})\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{b}(\mathbf{q}^{(k)})$  делится на норму ее правой части для того, чтобы в качестве  $\varepsilon$  можно было бы использовать относительное, а не абсолютное значение порога невязки, что гораздо удобнее при решении большинства практических задач. При этом в качестве вектора  $\mathbf{b}$  можно брать как вектор  $\mathbf{b}(\mathbf{q}^{(0)})$ , вычисленный по начальному приближению, так и вектор  $\mathbf{b}(\mathbf{q}^{(k)})$ , вычисленный по значению  $\mathbf{q}^{(k)}$ , полученному на текущей итерации по нелинейностям.

В ряде случаев в качестве критерия выхода можно использовать условие  $\|\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{q}^{(k-1)}\| / \|\mathbf{q}^{(k)}\| < \delta$ , где  $\delta$  – некоторое малое число. Это условие означает, что при переходе к следующей итерации решение почти не меняется. Однако следует помнить, что такое условие выхода не гарантирует получения решения нелинейной задачи с требуемой точностью и может использоваться в «аварийных» случаях, когда итерационный процесс по нелинейностям начинает стагнировать. Можно также для остановки итерационного процесса по нелинейностям при его стагнации предусматривать выход по количеству итераций.

### 2.2.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИИ

Для ускорения сходимости процесса решения нелинейной задачи, а во многих случаях и для ее обеспечения может быть использован принцип релаксации. В этом случае каждое последующее приближение решения строится как

$$\mathbf{q}^{(k)} = \omega^k \bar{\mathbf{q}}^{(k)} + (1 - \omega^k) \mathbf{q}^{(k-1)}, \quad (62)$$

где  $\omega^k$  – коэффициент релаксации, а  $\bar{\mathbf{q}}^{(k)}$  – решение системы

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}^{(k-1)}) \bar{\mathbf{q}}^{(k)} = \mathbf{b}(\mathbf{q}^{(k-1)}).$$

Значение коэффициента релаксации  $\omega^k$  можно получать в результате минимизации по  $\omega^k$  невязки нелинейной системы (57) (при подстановке в нее вместо  $\mathbf{q}$  значения  $\mathbf{q}^{(k)}$ , определяемого соотношением (62)):

$$R(\omega^k) = \left\| \mathbf{A}(\omega^k \bar{\mathbf{q}}^{(k)} + (1 - \omega^k) \mathbf{q}^{(k-1)}) (\omega^k \bar{\mathbf{q}}^{(k)} + (1 - \omega^k) \mathbf{q}^{(k-1)}) - \right. \\ \left. - \mathbf{b}(\omega^k \bar{\mathbf{q}}^{(k)} + (1 - \omega^k) \mathbf{q}^{(k-1)}) \right\|. \quad (63)$$

Для минимизации функционала (63) по  $\omega^k$  может быть использован любой метод одномерной оптимизации.

Метод простой итерации очень прост по программной реализации, но, как правило, требует выполнения большого количества итераций, а в ряде случаев вообще не дает возможности получить решение нелинейной задачи, особенно в случаях с существенной зависимостью параметров задачи от решения (или его производных). Метод же Ньютона, хотя и является значительно более сложным для программной реализации, обладает гораздо лучшей сходимостью при решении многих нелинейных задач.

### 2.3. МЕТОД НЬЮТОНА

Метод Ньютона основан на линеаризации нелинейных уравнений системы (57) с использованием разложения в ряд Тейлора. Суть такой линеаризации заключается в следующем.

Каждый нелинейный член уравнений системы (57) представляется в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $\mathbf{q}^0$  ( $\mathbf{q}^0$  – вектор весов, полученный на предыдущей итерации по нелинейностям или являющийся начальным приближением), причем этот ряд ограничивается членами с первыми производными. Так, слагаемые левой части уравнений системы (57) представляются в виде

$$A_{ij}(\mathbf{q})q_j \approx A_{ij}(\mathbf{q}^0)q_j^0 + \sum_r \frac{\partial(A_{ij}(\mathbf{q})q_j)}{\partial q_r} \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0} (q_r - q_r^0),$$

а компоненты вектора правой части – в виде

$$b_i(\mathbf{q}) \approx b_i(\mathbf{q}^0) + \sum_r \frac{\partial b_i(\mathbf{q})}{\partial q_r} \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0} (q_r - q_r^0).$$

В результате из системы (57) получается система линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}^L \mathbf{q} = \mathbf{b}^L, \quad (64)$$

которую мы будем называть линеаризованной по методу Ньютона конечноэлементной системой.

Сразу заметим, что при программной реализации линеаризацию уравнений системы (57) после сборки глобальной матрицы выполнять чрезвычайно сложно, поскольку процедуру сборки глобальной матрицы конечноэлементной системы уравнений легко запрограммировать тогда, когда компоненты локальных матриц и векторов являются числами, а не некоторыми функциями вектора решения  $\mathbf{q}$ . Поэтому линеаризацию отдельных слагаемых уравнений системы (57) нужно проводить на уровне локальных матриц и векторов и только после этого собирать из них глобальную матрицу  $\mathbf{A}^L$  и вектор правой части  $\mathbf{b}^L$  линеаризованной конечноэлементной системы.

Рассмотрим конечный элемент  $\Omega_m$ . Как обычно, обозначим через  $\hat{\mathbf{A}}$  локальную матрицу элемента  $\Omega_m$ , через  $\hat{\mathbf{b}}$  – его локальный вектор правой части, а через  $\hat{\mathbf{q}}$  – подвектор глобального вектора  $\mathbf{q}$ , состоящий из весов (в локальной нумерации) базисных функций конечного элемента  $\Omega_m$ .



Представим слагаемое  $\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j$  в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности значения  $\hat{\mathbf{q}}^0$  и ограничимся членами с первой производной:

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j &\approx \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0)\hat{q}_j^0 + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \frac{\partial(\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j)}{\partial \hat{q}_r} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} (\hat{q}_r - \hat{q}_r^0) = \\
 &= \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0)\hat{q}_j^0 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{\hat{n}} \frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0 (\hat{q}_r - \hat{q}_r^0) + \\
 &+ \left\{ \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0) + \frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0 \right\} (\hat{q}_j - \hat{q}_j^0) = \\
 &= \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0)\hat{q}_j + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0 (\hat{q}_r - \hat{q}_r^0), \tag{65}
 \end{aligned}$$

где  $\hat{n}$  – размер локальной матрицы (и, естественно, вектора) элемента  $\Omega_m$ , а  $\hat{\mathbf{q}}^0$  – значение  $\hat{\mathbf{q}}$  на предыдущей итерации<sup>1</sup> метода Ньютона.

---

<sup>1</sup> На первой итерации в качестве  $\hat{q}_j^0$  обычно берут коэффициенты разложения начального приближения  $u^{h,0}$  по локальным базисным функциям  $\hat{\psi}_j$  конечного элемента  $\Omega_m$ , т. е.  $u^{h,0} \approx \sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{q}_j^0 \hat{\psi}_j$  и, например, для лагранжевых элементов в качестве  $\hat{q}_j^0$  можно взять значения  $u^{h,0}$  в соответствующих узлах конечного элемента  $\Omega_m$ .

Аналогично линейризуются и компоненты локального вектора правой части:

$$\hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}}) \approx \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}}^0) + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} (\hat{q}_r - \hat{q}_r^0). \quad (66)$$

Из соотношения (65) видно, что в результате линейризации слагаемого  $\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j$  появляются слагаемые, содержащие кроме  $\hat{q}_j$  еще и другие компоненты вектора решения. Это значит, что в результате линейризации слагаемого  $\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j$  мы получим вклады не только в компоненту  $\hat{A}_{ij}^L$  локальной матрицы  $\hat{\mathbf{A}}^L$  линейризованной СЛАУ, но и в другие компоненты  $i$ -й строки  $\hat{\mathbf{A}}^L$ . Так, например, даже если  $i \neq 1$  и

$j \neq 1$  слагаемое  $\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_1} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0 (\hat{q}_1 - \hat{q}_1^0)$  даст вклад в компоненту  $\hat{A}_{i1}^L$ ,

равный  $\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_1} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0$  (это множитель перед  $\hat{q}_1$ ). Кроме того, правая

часть (65) имеет слагаемые, не содержащие компоненты вектора решения, а значит, являющиеся добавками в правую часть линейризованного уравнения. Так, все слагаемые  $\frac{\partial \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_j^0 \hat{q}_r^0$ , возникающие в

результате линейризации слагаемого  $\hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}})\hat{q}_j$ , являются вкладами в компоненту локального вектора правой части  $\hat{b}_i^L$  линейризованной конечноэлементной системы.

В свою очередь из соотношения (66) видно, что в результате линейризации компоненты  $\hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})$  вектора правой части появляются слагаемые, содержащие компоненты вектора решения. Это означает, что в результате линейризации компонент вектора правой части системы (57) появляются добавки в компоненты матрицы линейризованной

конечноэлементной системы. Так, слагаемые  $\left. \frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \right|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r$  из правой части разложения (66) дают вклады вида  $-\left. \frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \right|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0}$  в компоненты  $\hat{A}_{ir}^L$  локальных матриц линеаризованной системы.

Таким образом, линеаризованная система (64) собирается из локальных матриц  $\hat{\mathbf{A}}^L$  и локальных векторов  $\hat{\mathbf{b}}^L$  следующего вида:

$$\hat{A}_{ij}^L = \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0) + \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left. \frac{\partial \hat{A}_{ir}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j} \right|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r^0 - \left. \frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j} \right|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0}, \quad (67)$$

$$\hat{b}_i^L = \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}}^0) + \sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{q}_j^0 \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left. \frac{\partial \hat{A}_{ir}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \right|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r^0 - \sum_{r=1}^{\hat{n}} \left. \frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \right|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r^0. \quad (68)$$

Итерационный процесс в методе Ньютона строится аналогично тому, как был построен итерационный процесс в методе простой итерации. Очередной его шаг заключается в генерации по  $\mathbf{q}^0$  (на первой итерации  $\mathbf{q}^0$  формируется из начального приближения, на последующих в качестве  $\mathbf{q}^0$  берется  $\mathbf{q}^{(k-1)}$ ) линеаризованной системы (64) и ее решении, в результате чего (возможно, с использованием релаксации (62)) находится новое приближение  $\mathbf{q}^{(k)}$ . После этого проверяется критерий останова (61), и в случае его невыполнения осуществляется переход к следующей итерации метода Ньютона.

Обратим внимание на то, что при оценке невязки используются матрица и вектор нелинеаризованной системы. Это значит, что при вычислении невязки должны быть использованы не матрица  $\mathbf{A}^L$  и вектор  $\mathbf{b}^L$ , собираемые из локальных матриц и векторов вида (67) и (68), а матрица  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  и вектор  $\mathbf{b}(\mathbf{q})$ , компоненты которых вычисляются,

как и в методе простой итерации, по формулам (58) – (60), и в этих формулах в качестве вектора  $\mathbf{q}$  берется вектор  $\mathbf{q}^{(k)}$ , полученный в результате решения линеаризованной системы (64).

Вообще говоря, полученный на  $k$ -й итерации в результате решения линеаризованной системы (64) вектор  $\mathbf{q}^{(k)}$  не гарантирует уменьшения невязки исходной нелинейной системы (57), вычисленной как  $\|\mathbf{A}(\mathbf{q}^{(k)})\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{b}(\mathbf{q}^{(k)})\|$ , по сравнению с невязкой  $\|\mathbf{A}(\mathbf{q}^{(k-1)})\mathbf{q}^{(k-1)} - \mathbf{b}(\mathbf{q}^{(k-1)})\|$  на предыдущей итерации. Увеличение невязки может произойти в том случае, когда нелинейность в коэффициентах задачи значительная, и вектор  $\mathbf{q}^{(k-1)}$ , по которому<sup>2</sup> вычисляются компоненты матрицы и вектора линеаризованной системы, довольно далек от решения нелинейной системы. В результате решение  $\mathbf{q}^{(k)}$  линеаризованной системы (64) может значительно отличаться от вектора  $\mathbf{q}^{(k-1)}$  (по которому выполнялась линеаризация) и попасть в область таких значений, где невязка линеаризованной системы уже очень сильно отличается от невязки исходной нелинейной системы. В этом случае вектор, доставляющий нулевую невязку линеаризованной системе, может дать очень большую невязку в исходной нелинейной системе.

Чтобы не допустить этого, можно ограничивать отход вектора  $\mathbf{q}^{(k)}$  от вектора  $\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}^{(k-1)}$ , по которому выполняется линеаризация, т. е. оставлять вектор  $\mathbf{q}$  в зоне, где невязка линеаризованной системы еще достаточно близка к невязке исходной нелинейной системы.

Нетрудно убедиться, что для достижения этой цели можно брать вектор  $\mathbf{q}^{(k)}$  по формуле (62), т. е. использовать нижнюю релаксацию. Очевидно, что при значении коэффициента релаксации  $\omega^k$ , близком к нулю, значение  $\mathbf{q}^{(k)}$  будет близко к  $\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}^{(k-1)}$ , линеаризованная система будет также близка к исходной нелинейной системе и пониже-

---

<sup>2</sup> При генерации вкладов в линеаризованную систему этот вектор был обозначен нами как  $\mathbf{q}^0$ .

ние невязки линеаризованной системы должно приводить к понижению невязки нелинейной системы. Лучше всего коэффициент релаксации  $\omega^k$  выбирать из условия минимума невязки  $R(\omega^k)$ , определяемой соотношением (63).

Заметим также, что при использовании метода Ньютона из-за особенностей вычисления производных по  $u$  зависимостей  $\lambda(u)$ ,  $f(u)$  и

других коэффициентов нелинейной краевой задачи  $\left( \begin{array}{l} \text{производные} \end{array} \right.$

$\frac{\partial \lambda(u)}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial f(u)}{\partial u}$  и другие входят, как мы покажем чуть позже, в выраже-

ния, определяющие в соотношениях (67) и (68) производные  $\frac{\partial \hat{A}_{ir}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j}$

и  $\frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j}$ ) результирующая линеаризованная матрица  $\mathbf{A}^L$  (в отличие

от  $\mathbf{A}(\mathbf{q}^{(k-1)})$ ) может перестать быть положительно определенной. Из-

бежать этого можно введением так называемого коэффициента «демпфирования»  $\nu \in (0, 1]$ , который ставится перед добавками с производными (сравните с (67) и (68)):

$$\hat{A}_{ij}^L = \hat{A}_{ij}(\hat{\mathbf{q}}^0) + \nu \left( \sum_{r=1}^{\hat{n}} \frac{\partial \hat{A}_{ir}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r^0 - \frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_j} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0} \right), \quad (69)$$

$$\hat{b}_i^L = \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}}^0) + \nu \left( \sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{q}_j^0 \sum_{r=1}^{\hat{n}} \frac{\partial \hat{A}_{ir}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r^0 - \sum_{r=1}^{\hat{n}} \frac{\partial \hat{b}_i(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_r} \bigg|_{\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^0} \hat{q}_r^0 \right). \quad (70)$$

На каждой итерации коэффициент  $\nu$  выбирается сначала равным единице. Если на очередном шаге итерационного процесса матрица перестает быть положительно определенной (что сопровождается, как правило, резким ухудшением сходимости итерационного процесса

решения линеаризованной системы), коэффициент  $\nu$  уменьшают и перевычисляют матрицу  $\mathbf{A}^L$  и вектор  $\mathbf{b}^L$  линеаризованной системы. При этом на следующем шаге итерационного процесса коэффициент  $\nu$  снова может быть взят равным единице.

### 3. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ

#### 3.1. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ГАРМОНИЧЕСКИМИ ПО ВРЕМЕНИ ИСТОЧНИКАМИ

Гармонические по времени задачи будем рассматривать на примере задач, описывающих нестационарное электромагнитное поле в проводящей среде.

Эти процессы описываются системой уравнений Максвелла, которая может преобразовываться к различным уравнениям или системам уравнений в частных производных в зависимости от структуры искомого поля и от величин, выбранных для описания рассматриваемого физического процесса (это могут быть потенциалы, индукция магнитного поля, напряженность магнитного или электрического поля).

Система уравнений Максвелла в общем виде имеет следующий вид:

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}} + \sigma \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial(\epsilon \vec{\mathbf{E}})}{\partial t}, \quad (71)$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad (72)$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0, \quad (73)$$

$$\operatorname{div} \epsilon \vec{\mathbf{E}} = \rho, \quad (74)$$

где  $\vec{\mathbf{H}}$  – напряженность магнитного поля;  $\vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}}$  – вектор плотностей сторонних токов (возбуждающих электромагнитное поле);  $\vec{\mathbf{E}}$  – напряженность электрического поля;  $\sigma$  – проводимость среды;  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды;  $\vec{\mathbf{B}}$  – индукция магнитного поля (свя-

занная с напряженностью  $\vec{H}$  соотношением  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ;  $\mu$  – коэффициент магнитной проницаемости). В правой части (71) слагаемое  $\sigma \vec{E}$  соответствует токам проводимости, а слагаемое  $\frac{\partial(\epsilon \vec{E})}{\partial t}$  – токам смещения.

Как уже говорилось, одним из способов преобразования системы уравнений Максвелла для построения ее дискретных аналогов при численном моделировании является введение новой искомой функции, называемой вектор-потенциалом  $\vec{A}$ . Вектор-потенциал  $\vec{A}$  вводится таким образом, что его ротор равен индукции магнитного поля, а производная по времени – напряженности электрического поля с обратным знаком, т. е.

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{B}, \quad -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \quad (75)$$

С учетом (71) – (75) вектор-потенциал  $\vec{A}$  будет удовлетворять уравнению

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{J}^{\text{ст}}. \quad (76)$$

На практике довольно часто встречаются случаи, когда решение зависит только от двух пространственных координат – это двумерные задачи.

Например, предполагается, что в декартовых координатах вектор плотности токов имеет только одну ненулевую компоненту, например,  $J_z$ , зависящую от двух пространственных координат  $x$  и  $y$ , и при этом коэффициенты уравнения  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $\epsilon$  зависят также только от координат  $x$  и  $y$ . В этом случае электромагнитное поле может быть полностью определено только через одну компоненту  $A_z = A_z(x, y, t)$  вектор-потенциала  $\vec{A}$ , удовлетворяющую двумерному уравнению:

$$-\text{div} \left( \frac{1}{\mu} \text{grad } A_z \right) + \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = J_z. \quad (77)$$

Второй случай соответствует осесимметричной задаче, в которой вектор плотности тока  $\vec{\mathbf{J}}$  в цилиндрической системе координат  $\{r, \varphi, z\}$  имеет только одну ненулевую компоненту  $J_\varphi$ , причем и  $J_\varphi$ , и коэффициенты уравнения  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $\varepsilon$  не зависят от координаты  $\varphi$ . В этом случае электромагнитное поле также может быть полностью определено только через одну компоненту  $A_\varphi = A_\varphi(r, z, t)$  вектор-потенциала  $\vec{\mathbf{A}}$ , удовлетворяющую двумерному уравнению:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} A_\varphi\right) + \frac{A_\varphi}{\mu r^2} - \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \sigma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial t^2} = J_\varphi. \quad (78)$$

Заметим, что уравнения (76) – (78) – уравнения гиперболического типа. Их, как правило, используют в ситуации, когда необходимо учесть конечную скорость распространения электромагнитной волны – в ситуации, когда токи смещения являются существенными. В случае же, когда изучаемый физический процесс медленно меняется по времени (величина токов смещения становится несущественной по сравнению с величиной токов проводимости), вместо гиперболических уравнений (76) – (78) могут быть использованы соответствующие параболические уравнения вида

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}}, \quad (79)$$

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} A_z\right) + \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} = J_z, \quad (80)$$

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} A_\varphi\right) + \frac{A_\varphi}{\mu r^2} - \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \sigma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = J_\varphi. \quad (81)$$

Для решения этих задач в разделе 1.5 нами были рассмотрены явные и неявные схемы аппроксимации по времени, с помощью которых можно строить дискретные аналоги для решения начально-краевых задач с произвольным изменением по времени функции-источника (правой части).



В случае если источник (функция правой части) является гармонической по времени функцией, остальные параметры уравнения (коэффициенты  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $\varepsilon$ ) не зависят от времени, а параметры краевых условий будут гармонически изменяющимися по времени функциями с одной и той же частотой  $\omega$  (совпадающей с частотой изменения функции правой части), используется следующий подход, который мы рассмотрим на примере решения уравнения

$$\chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) = f. \quad (82)$$

Пусть функция  $f$  является гармонической по времени, т. е. она представима в виде

$$f(x, y, z, t) = f^s(x, y, z) \sin \omega t + f^c(x, y, z) \cos \omega t. \quad (83)$$

Если остальные параметры рассматриваемого уравнения (82) не зависят от времени, то тогда и его решение  $u$  может быть представлено в виде

$$u(x, y, z, t) = u^s(x, y, z) \sin \omega t + u^c(x, y, z) \cos \omega t, \quad (84)$$

где  $u^s$  и  $u^c$  – две зависящие только от пространственных координат функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u^s) - \omega \sigma u^c - \omega^2 \chi u^s = f^s, \\ -\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u^c) + \omega \sigma u^s - \omega^2 \chi u^c = f^c. \end{cases} \quad (85)$$

То же самое можно сказать и о решении краевой задачи, если не только  $f$ , но и параметры краевых условий являются гармонически изменяющимися по времени функциями с одной и той же частотой  $\omega$ :

$$u_g(x, y, z, t) = u_g^s(x, y, z) \sin \omega t + u_g^c(x, y, z) \cos \omega t, \quad (86)$$

$$\theta(x, y, z, t) = \theta^s(x, y, z) \sin \omega t + \theta^c(x, y, z) \cos \omega t, \quad (87)$$

$$u_\beta(x, y, z, t) = u_\beta^s(x, y, z) \sin \omega t + u_\beta^c(x, y, z) \cos \omega t. \quad (88)$$

В этом случае функции  $u^s$  и  $u^c$  должны удовлетворять краевым условиям

$$u^s|_{S_1} = u_g^s, \quad u^c|_{S_1} = u_g^c, \quad (89)$$

$$\lambda \frac{\partial u^s}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta^s, \quad \lambda \frac{\partial u^c}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta^c, \quad (90)$$

$$\lambda \frac{\partial u^s}{\partial n} \Big|_{S_3} + \beta \left( u^s|_{S_3} - u_\beta^s \right) = 0, \quad \lambda \frac{\partial u^c}{\partial n} \Big|_{S_3} + \beta \left( u^c|_{S_3} - u_\beta^c \right) = 0. \quad (91)$$

Выполним конечноэлементную аппроксимацию краевой задачи (85), (89) – (91).

Сначала получим эквивалентную вариационную формулировку. Для этого умножим каждое из уравнений системы (85) на пробную функцию  $v$  и применим формулу Грина (интегрирования по частям). В результате получим систему двух вариационных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{grad} u^s \operatorname{grad} v - \omega \sigma u^c v - \omega^2 \chi u^s v) d\Omega + \int_{S_3} \beta u^s v dS = \\ & \quad = \int_{\Omega} f^s v d\Omega + \int_{S_2} \theta^s v dS + \int_{S_3} \beta u_\beta^s v dS, \\ & \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{grad} u^c \operatorname{grad} v + \omega \sigma u^s v - \omega^2 \chi u^c v) d\Omega + \int_{S_3} \beta u^c v dS = \\ & \quad = \int_{\Omega} f^c v d\Omega + \int_{S_2} \theta^c v dS + \int_{S_3} \beta u_\beta^c v dS. \end{aligned} \right. \quad (92)$$

Уравнения (92) должны выполняться для любой  $v \in H^1$ , удовлетворяющей однородному первому краевому условию на границе  $S_1$ .

Построим конечноэлементную аппроксимацию на основе вариационной формулировки (92). Пусть  $\{\psi_i\}$  – набор базисных функций

( $i=1, \dots, n$ ). Чтобы получить конечноэлементную СЛАУ, заменим в

(92) каждую из искоемых функций  $u^s$  и  $u^c$  на функции  $u^{s,h} = \sum_{j=1}^n q_j^s \psi_j$

и  $u^{c,h} = \sum_{j=1}^n q_j^c \psi_j$ , а вместо пробной функции подставим поочередно

базисные функции  $\psi_i$  (дальнейшие рассуждения о формировании конечноэлементной СЛАУ будем проводить для ситуации, когда в задаче нет первых краевых условий<sup>3</sup>):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \left( \lambda \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j - \omega^2 \chi \psi_i \psi_j \right) d\Omega + \int_{S_3} \beta \psi_i \psi_j dS \right) q_j^s - \\ - \omega \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \sigma \psi_i \psi_j d\Omega \right) q_j^c = \\ = \int_{\Omega} f^s \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta^s \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_{\beta}^s \psi_i dS, \quad i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \left( \lambda \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j - \omega^2 \chi \psi_i \psi_j \right) d\Omega + \int_{S_3} \beta \psi_i \psi_j dS \right) q_j^c + \\ + \omega \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \sigma \psi_i \psi_j d\Omega \right) q_j^s = \\ = \int_{\Omega} f^c \psi_i d\Omega + \int_{S_2} \theta^c \psi_i dS + \int_{S_3} \beta u_{\beta}^c \psi_i dS, \quad i=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (94)$$

---

<sup>3</sup> При наличии в задаче первых краевых условий, как обычно, из вариационных уравнений (92) заменой пробной функции  $v$  на базисные функции  $\psi_i$  не должны формироваться уравнения конечноэлементной СЛАУ, соответствующие фиксируемому (обеспечивающим выполнение главных краевых условий) весам  $q_j^s$  и  $q_j^c$ .

В результате мы получили систему из  $2n$  уравнений с  $2n$  неизвестными  $q_j^s$  и  $q_j^c$ . Чтобы определить матрицу и вектор правой части полученной конечноэлементной СЛАУ, пронумеруем ее уравнения и неизвестные следующим образом. Уравнения из (93) и (94) будем нумеровать поочередно таким образом, что  $i$ -е уравнение из (93) будет иметь номер  $2i-1$ , а  $i$ -е уравнение из (94) – номер  $2i$ . Соответственно пронумеруем и неизвестные этой системы, которые обозначим  $q_j$ ,  $j=1, \dots, 2n$  (т. е. неизвестные  $q_j^s$  и  $q_j^c$  системы уравнений (93) и (94) мы объединяем в один вектор  $\mathbf{q}$ ):

$$q_{2j-1} = q_j^s, \quad q_{2j} = q_j^c, \quad j=1, \dots, n.$$

Обозначим

$$p_{ij} = \int_{\Omega} \left( \lambda \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j - \omega^2 \chi \psi_i \psi_j \right) d\Omega + \int_{S_3} \beta \psi_i \psi_j dS, \quad (95)$$

$$c_{ij} = \omega \int_{\Omega} \sigma \psi_i \psi_j d\Omega. \quad (96)$$

Тогда матрица конечноэлементной СЛАУ будет иметь следующую структуру:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_{11} & -c_{11} & p_{12} & -c_{12} & & p_{1n} & -c_{1n} \\ c_{11} & p_{11} & c_{12} & p_{12} & & c_{1n} & p_{1n} \\ p_{21} & -c_{21} & p_{22} & -c_{22} & & p_{2n} & -c_{2n} \\ c_{21} & p_{21} & c_{22} & p_{22} & & c_{2n} & p_{2n} \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & \dots & \\ p_{n1} & -c_{n1} & p_{n2} & -c_{n2} & & p_{nn} & -c_{nn} \\ c_{n1} & p_{n1} & c_{n2} & p_{n2} & & c_{nn} & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в этой матрице явно выделяются блоки размера  $2 \times 2$  вида

$$\mathbf{A}^{ij} = \begin{pmatrix} p_{ij} & -c_{ij} \\ c_{ij} & p_{ij} \end{pmatrix}, \quad (97)$$

для хранения которых достаточно только двух ячеек памяти. Таким образом, для хранения всей матрицы в блочном формате с учетом структуры блока  $\mathbf{A}^{ij}$  требуется практически в два раза меньше памяти, чем при хранении ее покомпонентно. Поэтому при программной реализации в таких случаях, как правило, используются блочные форматы хранения данных, в том числе и с учетом разреженной структуры матрицы. Более подробно о технологиях работы с матрицами, хранящимися в разреженном блочном формате, рассказано в [3, с. 502–508].

Заметим, что при решении задач, у которых в большей части расчетной области коэффициент  $\sigma$  равен нулю, имеет смысл ввести два типа блоков. Если блок  $\mathbf{A}^{ij}$  соответствует узлам  $i$  и  $j$ , хотя бы один из которых не лежит внутри или на границе области с  $\sigma \neq 0$ , то он будет иметь структуру

$$\mathbf{A}^{ij} = \begin{pmatrix} p_{ij} & 0 \\ 0 & p_{ij} \end{pmatrix}$$

и для его хранения достаточно только одной ячейки памяти.

В принципе, решение гармонических задач можно искать с использованием комплексных чисел. Действительно, если считать  $u^s$  действительной, а  $u^c$  мнимой частью комплекснозначной функции  $u$  (а можно и наоборот, с соответствующим знаком у мнимой части), то и веса  $(q_{2j-1}, q_{2j})$  можно интерпретировать как комплексные числа с действительной частью  $q_j^s$  и мнимой  $q_j^c$ . Аналогично и блоки  $\mathbf{A}^{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}$  конечноэлементной СЛАУ можно интерпретировать как комплексные числа с действительной частью  $p_{ij}$  и мнимой частью  $c_{ij}$ . Заметим, однако, что для задач, у которых в большей части расчетной области коэффициент  $\sigma$  равен нулю, при представлении компонент конечноэлементной матрицы в комплексном виде невозможно допол-

нительно сэкономить память за счет заведомо нулевой мнимой части у большинства этих компонент.

Чаще всего уравнения для задач с гармоническим по времени источником записывают в комплексном виде:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) + i\omega\sigma U - \omega^2\chi U = F, \quad (98)$$

где  $U$  и  $F$  являются комплексными функциями  $U = U^{\operatorname{Re}} + iU^{\operatorname{Im}}$  и  $F = F^{\operatorname{Re}} + iF^{\operatorname{Im}}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Использование комплекснозначной формы записи дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типа (98), описывающих гармонические по времени процессы, приводит к СЛАУ с комплексными коэффициентами с комплексно-симметричными, но не эрмитовыми матрицами (в этом случае для всех элементов матрицы СЛАУ выполняется соотношение  $A_{jk} = A_{kj}$ , где  $A_{jk} = \operatorname{Re} A_{jk} + i \operatorname{Im} A_{jk}$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ ,  $i$  – мнимая единица, однако, в общем случае  $A_{jk} \neq \bar{A}_{kj}$ ).

При этом эквивалентная вещественная матрица имеет блочный вид (эквивалентный (97))

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_{ij} & -\operatorname{Im} A_{ij} \\ \operatorname{Im} A_{ij} & \operatorname{Re} A_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{ij} - \omega^2 M_{ij}^2 & -\omega M_{ij}^1 \\ \omega M_{ij}^1 & G_{ij} - \omega^2 M_{ij}^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } G_{ij} = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j d\Omega + \int_{S_3} \beta \psi_i \psi_j dS, \quad M_{ij}^1 = \int_{\Omega} \sigma \psi_i \psi_j d\Omega,$$

$$M_{ij}^2 = \int_{\Omega} \chi \psi_i \psi_j d\Omega.$$

### 3.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГАРМОНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

К итерационным методам решения СЛАУ с комплексно-симметричными матрицами относятся, например, методы СОСГ и СОСР. О них, а также и о других методах решения СЛАУ с комплексными коэффициентами можно прочитать в [4].

Для решения СЛАУ с комплексно-симметричными матрицами можно применять комплекснозначные аналоги  $LL^T$  – и  $LDL^T$  – разложения, формулы которых полностью аналогичны формулам (17.9) и (17.10) из [3], но подразумевающим использование комплексных чисел. Стоит только отметить, что при извлечении квадратного корня из комплексного числа берется значение с неотрицательной вещественной частью.

Вместо СЛАУ с комплексными коэффициентами можно использовать их вещественные аналоги (см. предыдущий раздел).

Использование такого подхода приводит к СЛАУ с несимметричной вещественной матрицей. Для решения таких СЛАУ можно применять  $LU$ -разложение [3, пункт 17.1.1], локально-оптимальную схему [3, пункт 17.3.2], метод GMRES [3, пункт 17.3.3], метод бисопряженных градиентов [3, пункт 17.3.4].

### **3.3. СВЯЗЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ И ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ**

Выше говорилось, что решение задачи (82) с гармонической по времени функцией-источником (при условии, что коэффициенты дифференциального уравнения не зависят от времени) может быть получено как с помощью подхода, описанного в разделе 3.1, так и путем использования конечно-разностных аппроксимаций производной по времени, как это было описано в разделе 1.5.

Очевидно, что эти подходы должны давать численные решения, сходящиеся к одному и тому же точному решению.

Однако при использовании подхода, рассмотренного в разделе 1.5, чтобы получить эквивалентное по точности решение (которое может быть получено с использованием подхода, рассмотренного в разделе 3.1), необходимо, во-первых, вести вычислительный процесс для достаточного количества периодов по времени, чтобы решение «уставилось» (т. е. стало незначимым влияние начальных условий), а во-вторых, выполнять дробление сетки по времени, чтобы ошибка аппроксимации по времени была незначимой по сравнению с ошибкой аппроксимации по пространству.

## 4. ЗАДАЧИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

### 4.1. ПОНЯТИЕ СЛАБОЙ ПОСТАНОВКИ

Для большинства практических задач функция правой части  $f$  является разрывной и принадлежит, например, пространству  $L_2$ . Примером таких задач могут служить рассмотренные в предыдущем разделе задачи электромагнетизма. В них в подобластях расчетной области, где течет сторонний ток,  $f$  равна плотности этого тока, а во всем остальном пространстве  $f$  равна нулю.

Очевидно, что для рассмотренных выше случаев вторая производная решения не определена в точках разрыва  $f$  и соответствующее дифференциальное уравнение в этих точках не имеет смысла. Поэтому для решения таких задач более логичной является постановка вида  $\int R v d\Omega = 0$  ( $R$  – невязка дифференциального уравнения), где  $v$  – не-

$\Omega$  которая бесконечно дифференцируемая функция. На основе этого подхода формулируются так называемые слабые постановки, в которых значения  $f \in L_2$  на множестве меры нуль никак не влияют на искомое решение.

Более того, существует достаточно большой класс задач, в которых функция  $f$  (источник поля) задается даже не как элемент пространства  $L_2$ , а как  $\delta$ -функция (сосредоточенный источник). К таким задачам относятся задачи, в которых размеры источника много меньше расчетной области и в источнике, а также в непосредственной близости от него значения искомого решения не нужны. Это, например, задачи электроразведки, в которых поле изучается в объеме нескольких десятков, сотен и тысяч метров, а возбуждается током в тонком проводе. Здесь также теоретически более обоснованными являются слабые постановки, в которых сосредоточенные источники представляются в виде соответствующих функционалов.

Заметим также, что довольно часто замена распределенных источников сосредоточенными позволяет повысить точность получаемого численного решения. Рассмотрим следующий простой пример.



Пусть необходимо решить одномерное эллиптическое уравнение в интервале  $(1-a, 1+a)$ . При этом график функции  $f$  показан на рис. 2

$\left( \int_{\Omega} f d\Omega = 1 \text{ и } d \ll a \right)$ . Решением этой задачи будет функция, которая линейно возрастает на интервале  $\left(1-a, 1-\frac{d}{2}\right)$ , на интервале  $\left(1-\frac{d}{2}, 1+\frac{d}{2}\right)$  является квадратичной, а на интервале  $\left(1+\frac{d}{2}, 1+a\right)$  — линейно убывает.

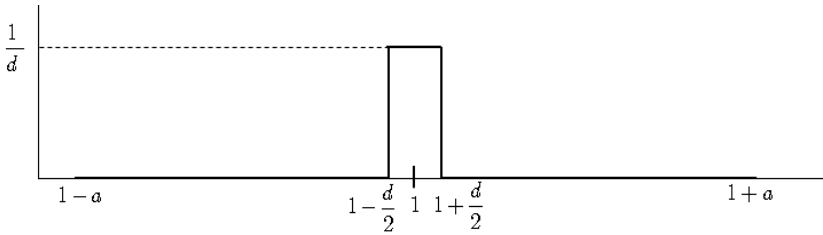


Рис. 2. График функции  $f$

Если источник будет сосредоточен в точке  $x=1$ , то при использовании линейных базисных функций будет получено точное решение. Если же источник задан распределенным, т. е. ненулевым на интервале  $\left(1-\frac{d}{2}, 1+\frac{d}{2}\right)$ , то точное решение в подобласти  $\left(1-\frac{d}{2}, 1+\frac{d}{2}\right)$  с использованием линейных базисных функций получить не удастся и погрешность может распространиться на всю расчетную область.

Еще большего эффекта от замены распределенного источника сосредоточенным можно добиться при решении многомерных задач с использованием слабых постановок и конечноэлементных аппроксимаций. Использование сосредоточенных (поверхностных) источников при условии совпадения границ конечных элементов с расположением поверхностных источников дает возможность заметно улучшить аппроксимацию искомого решения и ускорить сходимость приближенных решений к точному при измельчении сетки (особенно в окрестности источника).

## 4.2. ТИПЫ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Обычно сосредоточенные источники связывают с понятием  $\delta$ -функции. Мы рассмотрим  $\delta$ -функции трех типов (в соответствии с тремя типами рассмотренных нами выше сосредоточенных источников).

Под поверхностной  $\delta$ -функцией, сосредоточенной на поверхности  $S$ , мы будем понимать функцию  $\delta^S = \delta^S(x, y, z)$  такую, что объемный интеграл от нее по произвольной подобласти  $\Omega_\varepsilon$  равен площади поверхности  $S_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap S$ , т. е. площади той части поверхности  $S$ , которая лежит внутри  $\Omega_\varepsilon$ :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \delta^S d\Omega = \int_{S_\varepsilon} dS, \quad S_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap S. \quad (99)$$

Соответственно мы будем говорить, что поверхностный источник  $f^S = f^S(x, y, z) = \rho^S \cdot \delta^S(x, y, z)$  имеет поверхностную плотность  $\rho^S$ , значения которой определены лишь в точках поверхности  $S$ , и такой поверхностный источник в произвольной трехмерной подобласти  $\Omega_\varepsilon$  выделяет мощность

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f^S d\Omega = \int_{S_\varepsilon} \rho^S dS, \quad S_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap S. \quad (100)$$

Под сосредоточенной на линии  $L$   $\delta$ -функцией мы будем понимать функцию  $\delta^L = \delta^L(x, y, z)$  такую, что объемный интеграл от нее по произвольной подобласти  $\Omega_\varepsilon$  равен длине линии  $L_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap L$ , т. е. длине той части линии  $L$ , которая лежит внутри  $\Omega_\varepsilon$ :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \delta^L d\Omega = \int_{L_\varepsilon} dL, \quad L_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap L \quad (101)$$

$\left( \begin{array}{c} \text{здесь криволинейный интеграл} \\ \int_{L_\varepsilon} dL \text{ означает длину линии } L_\varepsilon \end{array} \right).$

Соответственно будем говорить, что сосредоточенный на линии источник  $f^L = f^L(x, y, z) = \rho^L \delta^L(x, y, z)$  имеет плотность  $\rho^L$  (значения  $\rho^L$  определены лишь в точках линии  $L$ ), и такой источник в произвольной подобласти  $\Omega_\varepsilon$  выделяет мощность

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f^L d\Omega = \int_{L_\varepsilon} \rho^L dL, \quad L_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap L. \quad (102)$$

И, наконец, под сосредоточенной в точке  $\mathbf{p}$   $\delta$ -функцией (или точечной  $\delta$ -функцией) мы будем понимать функцию  $\delta^P = \delta^P(x, y, z)$  такую, что интеграл от нее по произвольной трехмерной подобласти  $\Omega_\varepsilon$  равен единице только в том случае, если точка  $\mathbf{p}$  лежит внутри  $\Omega_\varepsilon$ , а в противном случае интеграл от  $\delta^P$  равен нулю:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \delta^P d\Omega = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{p} \in \Omega_\varepsilon, \\ 0, & \text{если } \mathbf{p} \notin \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (103)$$

Соответственно под сосредоточенным в точке  $\mathbf{p}$  (или точечным) источником с мощностью  $\rho^P$  мы будем понимать источник  $f^P = \rho^P \delta^P(x, y, z)$ , который в произвольной трехмерной подобласти  $\Omega_\varepsilon$  выделяет мощность, равную  $\rho^P$ , лишь в том случае, если точка  $\mathbf{p}$  лежит внутри  $\Omega_\varepsilon$  (в противном же случае такой источник в  $\Omega_\varepsilon$  выделяет нулевую мощность):

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f^P d\Omega = \begin{cases} \rho^P, & \text{если } \mathbf{p} \in \Omega_\varepsilon, \\ 0, & \text{если } \mathbf{p} \notin \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (104)$$

Заметим что точное решение задачи с поверхностным источником является элементом гильбертова пространства  $H^1$  и для него справедливы все теоретические оценки порядка аппроксимации в энергетической норме (см. раздел 1.4). Несколько иная ситуация возникает при наличии в задаче сосредоточенного на линии или точечного

источника. И в том и в другом случае точное решение  $u$  эллиптического уравнения уже не является элементом пространства  $H^1$ , поскольку в окрестности сосредоточенного на линии  $L$  источника функция  $(\text{grad} u)^2$  ведет себя как  $\frac{1}{r^2}$  (где  $r$  – расстояние до линии  $L$ ), а в окрестности точечного источника  $(\text{grad} u)^2 \sim \frac{1}{r^4}$  (где  $r$  – расстояние до точечного источника). Действительно, для сосредоточенного на линии  $L$  источника интеграл от  $(\text{grad} u)^2$  по некоторому цилиндру  $\Omega_{\text{ц}}$  радиусом  $r_0$  с осью, являющейся частью линии  $L$ , может быть оценен как

$$\int_{\Omega_{\text{ц}}} (\text{grad} u)^2 d\Omega \sim \int_0^{r_0} \frac{1}{r^2} r dr = \infty, \quad (105)$$

а для точечного источника интеграл от  $(\text{grad} u)^2$  по шару  $\Omega_{\text{ш}}$  радиусом  $r_0$  и с центром в точке задания точечного источника может быть оценен как

$$\int_{\Omega_{\text{ш}}} (\text{grad} u)^2 d\Omega \sim \int_0^{r_0} \frac{1}{r^4} r^2 dr = \infty, \quad (106)$$

т. е. точное решение для этих источников не имеет суммируемых с квадратом производных, и вследствие этого перестают быть обоснованными рассмотренные в разделе 1.4 теоретические оценки сходимости конечноэлементных решений к точному.

Однако на практике ситуация с точностью конечноэлементных решений при наличии в задаче сосредоточенных на линии и точечных источников вовсе не так плоха. Дело в том, что, как уже говорилось выше, для многих практических задач решение требуется вычислять на некотором (как правило, довольно значительном) расстоянии от сосредоточенного на линии или точечного источника. Конечноэлементное же решение имеет очень большую (лучше даже сказать, совершенно неприемлемую) погрешность лишь вблизи сосредоточенных на линии

или точечных источников (в районе нескольких ближайших к источникам ячеек сетки), а на некотором расстоянии от этих источников погрешность конечноэлементного решения становится вполне приемлемой и даже может вести себя в соответствии с рассмотренными в разделе 1.4 теоретическими оценками (если погрешность конечноэлементного решения оценивать в подобластях, удаленных от сосредоточенных на линиях или точечных источников).

Заметим также, что точечные источники в одномерной задаче и сосредоточенные на линии источники в двумерной задаче являются в этом смысле поверхностными источниками.

## **5. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ**

### **5.1. ПОНЯТИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

При использовании МИУ вводится понятие функции Грина  $G(x, y, z, x', y', z')$ , которая определяется как значение поля в точке с координатами  $(x, y, z)$  от точечного источника, расположенного в точке с координатами  $(x', y', z')$ . При этом для скалярных полей функция Грина является скаляром, а для векторных полей – тензором, компоненты которого определяются как реакция соответствующей компоненты векторного поля в точке с координатами  $(x, y, z)$  на соответствующим образом сориентированный точечный источник, расположенный в точке с координатами  $(x', y', z')$ .

Рассмотрим уравнение Пуассона в виде

$$-\Delta u = f, \quad (107)$$

где  $f(x, y, z)$  – некоторая трехмерная функция, а  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Для оператора Лапласа функция Грина имеет достаточно простой вид

$$G(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \quad (108)$$

тогда решение уравнения (107) будет иметь вид

$$u(x, y, z) = \int_{\Omega} G(x, y, z, x', y', z') f(x', y', z') dx' dy' dz'. \quad (109)$$

Заметим, что соотношение (109) не является уравнением и решение уравнения (107) может быть получено простым интегрированием по той части области  $\Omega$ , где  $f \neq 0$ .

Рассмотрим теперь уравнение

$$-\Delta u + \gamma u = f. \quad (110)$$

Решение уравнения (110) в интегральном виде будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = \\ = \int_{\Omega} G(x, y, z, x', y', z') (f(x', y', z') - \gamma u(x', y', z')) dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (111)$$

или

$$\begin{aligned} u(x, y, z) + \int_{\Omega} G(x, y, z, x', y', z') \gamma u(x', y', z') dx' dy' dz' = \\ = \int_{\Omega} G(x, y, z, x', y', z') f(x', y', z') dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (112)$$

и в этом случае полученное соотношение (111) является уже интегральным уравнением. Для его решения весь объем с ненулевым значением  $\gamma$  можно разбить на ячейки, для каждой из них выполнить расчет интегралов и записать соответствующее уравнение. Заметим, что полученная СЛАУ будет плотной, поскольку значение в каждой из ячеек связано со значениями в других ячейках. Таким образом, если подобласть с ненулевым значением  $\gamma$  невелика и получаемая СЛАУ имеет небольшой размер, такой метод будет достаточно эффективным.

С ростом же области с ненулевым значением  $\gamma$  вычислительные затраты будут довольно резко возрастать.

Заметим также, что вместо  $\gamma u$  в уравнении может стоять дифференциальный оператор, действующий на  $u$ .

МИУ довольно широко применяется при решении многомерных задач электромагнетизма. Основным его достоинством является естественное разделение искомого поля на нормальную и аномальную составляющие, что позволяет находить поле влияния небольших трехмерных объектов (аномальную составляющую) с очень высокой точностью, особенно в случаях, когда это аномальное поле мало по сравнению с полем вмещающей среды. В то же время МИУ, очень эффективный для моделирования поля влияния локальных трехмерных аномалий, с ростом аномальной области (а это характерно для большинства практических задач) резко теряет свои преимущества. Это связано с тем, что (как уже говорилось выше) аппроксимация задачи по методу интегральных уравнений приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плотной матрицей и с ростом аномальной области размерность этой СЛАУ с плотной матрицей быстро увеличивается. Поэтому основной проблемой становится поиск эффективного метода решения такого рода СЛАУ.

Еще одним существенным ограничением МИУ является то, что реализующие его вычислительные схемы эффективны в основном в частотной области. Расчет же нестационарных процессов, являющихся основой большинства современных технологий геоэлектроразведки, при получении решения задачи переводом из частотной области во временную будет очень вычислительно затратным, поскольку в этом случае потребуется решение довольно большого числа трехмерных задач на различных частотах.

Таким образом, с переходом во временную область и, как уже говорилось, с ростом в геоэлектрической модели числа трехмерных неоднородностей (что необходимо для описания реальных сред) МИУ начинает существенно уступать по вычислительной эффективности МКЭ, который основан на аппроксимациях дифференциальных уравнений в частных производных. Основным преимуществом МКЭ перед МИУ является разреженность матриц систем уравнений, получаемых в результате аппроксимаций соответствующих трехмерных задач. Но вместе с тем МКЭ требует включения в расчетную область помимо самих трехмерных объектов довольно большого пространства вокруг

них, и при этом для достижения хорошей точности необходимы достаточно подробные сетки, причем мелкие ячейки нужны не только в 3D-объектах, но и в окружающем их пространстве, особенно вблизи источников поля. В результате при решении задач с контролируруемыми источниками, если 3D-объекты в них дают относительно слабые отклики, МКЭ в классических постановках требует довольно высоких (по сравнению с МИУ) вычислительных затрат на получение решения с приемлемой точностью.

## 5.2. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

В качестве первого примера приведем задачу о нахождении стационарного электрического поля, которое создается в проводящем полупространстве точечным источником, моделирующим ток, втекающий в это полупространство из расположенной на его поверхности точки.

Напряженность такого поля полностью описывается градиентом скалярного потенциала  $V$ , который, в свою очередь, может быть найден из решения уравнения

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) = \delta. \quad (113)$$

При этом, как уже говорилось, функция Грина достаточно легко может быть построена для однородного проводящего полупространства с удельной проводимостью  $\sigma^0$  (функция  $\sigma^0$  является постоянной во всей расчетной области  $\Omega$ ). Таким образом, чтобы получить соответствующий вид интегрального уравнения, необходимо переписать уравнение (113) так, чтобы в левой части полученного уравнения стоял оператор Лапласа. Нетрудно убедиться, что соответствующее уравнение будет иметь вид

$$-\Delta V^+ = -\frac{1}{\sigma^0} \operatorname{div}((\sigma^0 - \sigma) \operatorname{grad} V), \quad (114)$$

где  $V^+ = V - V^0$ , а  $V^0$  описывает поле точечного источника в проводящем полупространстве с удельной проводимостью  $\sigma^0$ .



Таким образом, соответствующее интегральное уравнение примет вид

$$V^+ = -\frac{1}{\sigma^0} \int_{\Omega} G \operatorname{div}((\sigma^0 - \sigma) \operatorname{grad} V) d\Omega. \quad (115)$$

Будем считать, что подобласти  $\Omega^+$ , где удельная электрическая проводимость трехмерной задачи  $\sigma$  отлична от  $\sigma^0$ , лежат строго внутри расчетной области  $\Omega$ . С учетом этого факта и в результате применения формулы Грина уравнение (115) примет вид

$$V^+ = \frac{1}{\sigma^0} \int_{\Omega^+} (\sigma^0 - \sigma) \operatorname{grad}(V^0 + V^+) \operatorname{grad} G d\Omega, \quad (116)$$

или

$$\begin{aligned} V^+ + \frac{1}{\sigma^0} \int_{\Omega} G \operatorname{div}((\sigma^0 - \sigma) \operatorname{grad} V^+) d\Omega = \\ = -\frac{1}{\sigma^0} \int_{\Omega} G \operatorname{div}((\sigma^0 - \sigma) \operatorname{grad} V^0) d\Omega. \end{aligned} \quad (117)$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть необходимо найти распределение электромагнитного поля, возбуждаемого гармоническим источником в трехмерной проводящей среде. В этом случае для описания электромагнитного поля может быть использовано уравнение

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}}) + i\omega \sigma \vec{\mathbf{E}} = -i\omega \vec{\mathbf{J}}. \quad (118)$$

В этом случае функция Грина будет тензором и будет строиться для оператора  $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bullet) + i\omega \sigma^0 \bullet$ , где  $\sigma^0$  – проводимость одномерной среды.

В этом случае решение трехмерной задачи (118) будет иметь вид

$$\vec{\mathbf{E}}^+ = \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot i\omega(\sigma^0 - \sigma) \vec{\mathbf{E}} d\Omega, \quad (119)$$

или

$$\vec{\mathbf{E}}^+ - \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot i\omega(\sigma^0 - \sigma) \vec{\mathbf{E}}^+ d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot i\omega(\sigma^0 - \sigma) \vec{\mathbf{E}}^0 d\Omega, \quad (120)$$

где  $\vec{\mathbf{E}}^0$  – напряженность электрического поля в одномерной среде.

В частном случае, когда в качестве  $\sigma^0$  может быть взята проводимость однородной среды, компоненты тензора Грина могут быть найдены по формулам [5]:

$$\begin{aligned} G_{xx} &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi\sigma^0 r^3} \left( \frac{2\tilde{x}^2}{r^2} (ikr + 1) \right), \\ G_{xy} &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi\sigma^0 r^3} \left( \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{r^2} (-k^2 r^2 + 3ikr + 3) \right), \\ G_{xz} &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi\sigma^0 r^3} \left( \frac{\tilde{x}\tilde{z}}{r^2} (-k^2 r^2 + 3ikr + 3) \right), \\ G_{yy} &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi\sigma^0 r^3} \left( \frac{2\tilde{y}^2}{r^2} (ikr + 1) \right), \\ G_{yz} &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi\sigma^0 r^3} \left( \frac{\tilde{y}\tilde{z}}{r^2} (-k^2 r^2 + 3ikr + 3) \right), \\ G_{zz} &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi\sigma^0 r^3} \left( \frac{2\tilde{z}^2}{r^2} (ikr + 1) \right), \end{aligned} \quad (121)$$

где  $\tilde{x} = x - x'$ ,  $\tilde{y} = y - y'$ ,  $\tilde{z} = z - z'$ ,  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ ,

$k^2 = -i\mu\sigma\omega$ , а в качестве  $k$  берется  $k_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\mu\sigma^0\omega)^{\frac{1}{2}}$ .

## 6. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

### 6.1. ПОНЯТИЕ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Под *прямыми задачами* понимают задачи моделирования каких-либо физических полей, процессов или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых, гравитационных и т. п.). В прямых задачах требуется найти функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле нестационарное). Для решения прямой задачи задаются:

- 1) область, в которой процесс изучается;
- 2) уравнение, описывающее данный процесс;
- 3) условия на границе исследуемой области;
- 4) начальные условия (если процесс нестационарный).

Примером прямой задачи может служить задача нахождения распределения напряженности стационарного электрического поля, возбуждаемого точечным источником в горизонтально-слоистой среде, в которой слои имеют проводимость  $\sigma_i$  и толщину  $h_i$  ( $i$  – номер слоя).

Распределение электрического поля в области  $\Omega$  с границей  $S_1 \cup S_2$  (рис. 3) описывается эллиптическим уравнением

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) = 0 \quad (122)$$

в цилиндрической системе координат  $(r, z)$  с краевыми условиями первого и второго рода

$$V|_{S_1} = 0, \quad (123)$$

$$\sigma \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta. \quad (124)$$

Для прямой задачи входными данными являются значения удельной электрической проводимости слоев среды  $\sigma_i$  и их толщины  $h_i$ , а также плотность стекающего в среду тока  $\theta$ , заданная с помощью  $\delta$ -функции. Незвестной величиной является  $V$ -скалярный потенциал электрического поля такой, что напряженность электрического поля  $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$ . Таким образом, в прямой задаче при известном положе-

нии и плотности источника  $\theta$  и известной толщине  $h_i$  и проводимости  $\sigma_i$  слоев необходимо найти распределение потенциала  $V(r, z)$ , описываемое уравнением (122) с краевыми условиями (123) – (124).

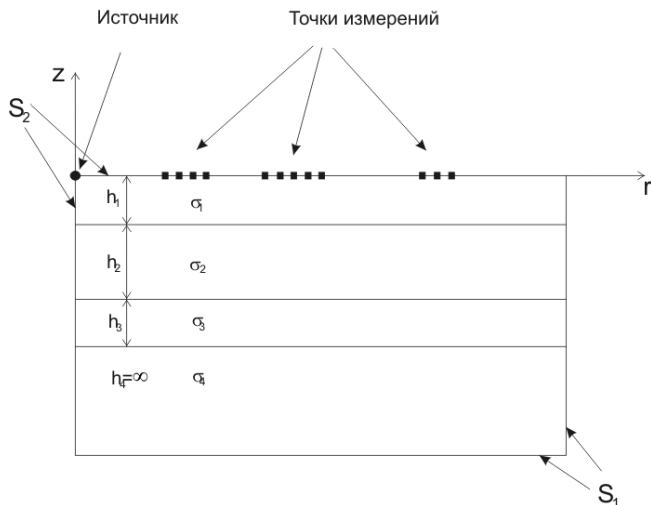


Рис. 3. Вид расчетной области для задачи распределения электрического поля от точечного источника в горизонтально-слоистой среде

В обратной задаче неизвестны некоторые параметры, являющиеся исходными для прямой задачи. Для их определения к заданным уравнениям (122) – (124) и известным параметрам (входным данным прямой задачи) добавляется информация в виде измеренных значений поля в некоторых точках. Измеренные значения могут быть некоторой функцией  $\varepsilon = \varphi(V)$  поля  $V$ , в нашем случае  $\vec{E} = -\text{grad} V$ .

Например, обратная задача может быть сформулирована так: при заданных значениях  $\vec{E}$  (или его компонент,  $E_x$  и/или  $E_y$ ) в точках измерения и известной толщине  $h_i$  и мощности источника найти проводимости слоев  $\sigma_i$ .

К обратным задачам также относятся и другие задачи определения характеристик материалов или физических процессов, например, задача определения теплофизических характеристик материала по результатам

измерения температуры в некоторых точках, задача гравиметрии, заключающаяся в определении формы аномалии плотности на основании данных измерения силы тяжести на поверхности Земли и т. д.

Вообще говоря, решение обратной задачи может быть не единственным или не существовать вовсе. Обратная задача для уравнения в частных производных *поставлена корректно*, если решение этой задачи существует, единственно и устойчиво по входным данным. Соответственно задача называется *некорректно поставленной* или *некорректной*, если она либо не имеет решения, либо, напротив, имеет много решений, либо процедура нахождения решения неустойчива (т. е. при очень малых ошибках измерений полученное решение может как угодно сильно отличаться от точного). На практике используются специальные методы регуляризации, которые связаны с переходом к некоторой «близкой», но уже корректно поставленной задаче.

В работе [6] приведены формальные определения корректности и условной корректности задачи.

Задача

$$Au = f, \quad f \in F, \quad (125)$$

где  $A: D_A \subseteq U \rightarrow F$  – оператор с непустой областью определения  $D_A$ , действующий из метрического пространства  $U$  в аналогичное пространство  $F$ , называется *корректным* (по Ж. Адамару), если выполнены условия:

1) область значений  $Q_A$  оператора  $A$  совпадает с  $F$  (условие разрешимости);

2) равенство  $Au_1 = Au_2$  для некоторых  $u_1, u_2 \in D_A$  влечет за собой равенство  $u_1 = u_2$  (условие единственности);

3) обратный оператор  $A^{-1}$  непрерывен на  $F$  (условие устойчивости).

А.Н. Тихонову принадлежит следующее обобщение классического (по Адамару) понятия корректности, в основе которого лежит фундаментальная идея сужения области определения исходного оператора. Задача (125) называется *корректной по Тихонову (условно корректной)*, если:

1) априори известно, что решение задачи (125) существует для некоторого класса данных из  $F$  и принадлежит априорно заданному множеству  $M \subset D_A$ ;

2) решение единственно в классе  $M$ ;

3) бесконечно малым вариациям правой части (126), не выводящим решение из класса  $M$ , соответствуют бесконечно малые вариации решения.

Множество  $M$  называют *множеством корректности*.

В следующем разделе мы рассмотрим понятия линейной и нелинейной обратных задач.

## 6.2. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ГАУССА–НЬЮТОНА

Процесс решения обратной задачи часто называют *инверсией практических (измеренных) данных* (или просто *инверсией*).

Рассмотрим методы решения обратных задач с использованием метода наименьших квадратов.

Пусть  $\mathbf{\varepsilon}^* = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_N^*)^T$  – экспериментальные (практические) данные в  $N$  точках измерения, соответствующие (возможно, с некоторой погрешностью) «точным» значениям параметров  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_M^*)^T$  среды, а  $\mathbf{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_1(\mathbf{u}), \dots, \varepsilon_N(\mathbf{u}))^T$  – данные в тех же  $N$  точках измерения, полученные при решении прямой задачи с некоторыми «неточными» параметрами среды  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_M)^T$ . В дальнейшем данные  $\mathbf{\varepsilon}$  мы будем называть *теоретическими* и целью решения обратной задачи будет поиск таких значений  $\mathbf{u}$ , чтобы соответствующие им теоретические данные  $\mathbf{\varepsilon}(\mathbf{u})$  были максимально близки к экспериментальным данным  $\mathbf{\varepsilon}^*$ .

Количество наблюдений  $N$  обычно не меньше числа восстанавливаемых параметров  $M$ :  $N \geq M$ . Если  $M=1$ , то обратную задачу иногда называют *одномерной*. Если  $M>1$ , то – *многомерной*.

Например, если в задаче электроразведки, расчетная область для которой изображена на рис. 3, неизвестными являются проводимости слоев и мощность  $P$  источника (где число  $P$  устанавливает связь между плотностью источника  $\theta$  и  $\delta$ -функцией в виде  $\theta = P\delta(r, z)$ ), то вектор параметров среды будет выглядеть следующим образом:  $\mathbf{u} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, P)^T$ . Если же, например, неизвестными являются проводимость и толщина второго слоя, то  $\mathbf{u} = (\sigma_2, h_2)^T$ .

Поиск параметров среды будем осуществлять путем решения задачи минимизации функционала

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N (\delta \varepsilon_i(\mathbf{u}))^2, \quad (126)$$

где

$$\delta \varepsilon_i(\mathbf{u}) = \varepsilon_i^* - \varepsilon_i(\mathbf{u}) \quad (127)$$

— это отклонения теоретических данных от практических.

В прикладных исследованиях типична ситуация с заданием входных данных с погрешностью, поэтому при вычислении суммы квадратов отклонений  $\varepsilon(\mathbf{u})$  от  $\varepsilon^*$  имеет смысл использовать некоторые весовые коэффициенты  $\omega_i$ . Кроме того, значения параметров  $u$  целесообразно искать в окрестности некоторых априорно заданных значений, что позволяет сделать процедуру поиска параметров более устойчивой. В результате вместо (126) рассмотрим функционал

$$J_\alpha(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N (\omega_i \delta \varepsilon_i(\mathbf{u}))^2 + \alpha \sum_{j=1}^M (u_j - \bar{u}_j)^2, \quad (128)$$

где  $\omega_i$  — некоторые веса, отражающие уровень погрешности при приеме сигнала в  $i$ -м приемнике;  $\alpha$  — параметр регуляризации;  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_M)^T$  — вектор некоторых фиксированных параметров среды, определяющих регуляризующую добавку в функционале (т. е. большие отклонения искоемых параметров  $u_j$  от их зафиксированных значений  $\bar{u}_j$  «штрафуются» с весом  $\alpha$ ).

Заметим также, что в случае изучения нестационарных или гармонических по времени процессов веса  $\omega_i$  отражают масштаб изменения принимаемого сигнала по времени или по частотам, а количество наблюдений  $N$  складывается из количества точек измерений и из количества измерения по времени (при изучении нестационарного

процесса) или из количества частот (при изучении гармонических процессов). В этом случае функционал (128) удобно записывать в виде

$$J_{\alpha}(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K (\omega_{lk} \delta \varepsilon_{lk}(\mathbf{u}))^2 + \alpha \sum_{j=1}^M (u_j - \bar{u}_j)^2, \quad (129)$$

где  $L$  – количество приемников;  $K$  – количество моментов времени (или частот) (т. е.  $\delta \varepsilon_{lk}(\mathbf{u})$  – отклонение теоретических данных от практических в  $l$ -м приемнике в момент времени  $t_k$ , если изучается нестационарный процесс, или на частоте  $\nu_k$  – если изучается гармонический процесс).

Например, при построении алгоритма *одномерной*<sup>4</sup> инверсии для данных магнитотеллурических зондирований (МТЗ) (где гармоническое электромагнитное поле возбуждается плоской волной) количество приемников будет равно единице (поскольку для такого источника поле горизонтально-слоистой среды во всех точках поверхности будет одинаковым), а количество частот на практике обычно находится в диапазоне от 20 до 40 (когда измерения ведутся в диапазоне  $10^{-4} \dots 10^2$  Гц, где сами значения частот располагаются логарифмически). Очевидно, что при построении процедур двумерной и трехмерной инверсий количество приемников берется равным количеству всех приемников, расположенных в пределах площади, где восстанавливается модель среды.

Рассмотрим итерационную процедуру минимизации функционала (128). Для этого представим  $\delta \varepsilon(\mathbf{u})$  в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $\mathbf{u}^0$ , причем этот ряд ограничим членами с первыми производными:

---

<sup>4</sup> Необходимо отметить, что следует различать понятие одномерной обратной задачи (когда «мерность» определяется количеством искомых параметров, как это было показано выше) и одномерной инверсии, когда «мерность» определяется размерностью прямой задачи. Очевидно, что в данном случае понятие «одномерная» относится к размерности прямой задачи. Обратная задача при этом может быть как одномерной, если восстанавливается только один параметр – например, проводимость или толщина какого-либо слоя (при условии, что толщины и проводимости других слоев фиксированы), так и многомерной, если восстанавливаются проводимости и/или толщины нескольких слоев.



$$\delta \varepsilon_i(\mathbf{u}) \approx \delta \varepsilon_i(\mathbf{u}^0) + \sum_{j=1}^M \frac{\partial(\delta \varepsilon_i(\mathbf{u}))}{\partial u_j} \Delta u_j, \quad (130)$$

где  $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, \dots, u_M^0)^T$  – полученные на предыдущей итерации параметры среды (на первой итерации  $\mathbf{u}^0 = \bar{\mathbf{u}}$ ),  $\Delta u_j = u_j - u_j^0$ ,  $\frac{\partial(\delta \varepsilon_i(\mathbf{u}))}{\partial u_j}$  – производные, отражающие влияние изменения  $j$ -го параметра в  $i$ -м приемнике. После подстановки (130) в (128) задача принимает вид

$$J_\alpha(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \left( \omega_i \delta \varepsilon_i(\mathbf{u}^0) + \omega_i \sum_{j=1}^M \frac{\partial(\delta \varepsilon_i(\mathbf{u}))}{\partial u_j} \Delta u_j \right)^2 + \alpha \sum_{j=1}^M \left( u_j^0 - \bar{u}_j + \Delta u_j \right)^2. \quad (131)$$

Продифференцируем функционал (131) по  $\Delta u_j$  и приравняем к нулю. В результате получим СЛАУ вида

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} - \alpha(\mathbf{u}^0 - \bar{\mathbf{u}}), \quad (132)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, а элементы матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора правой части  $\mathbf{f}$  определяются соотношениями

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 \frac{\partial(\delta \varepsilon_k(\mathbf{u}))}{\partial u_i} \frac{\partial(\delta \varepsilon_k(\mathbf{u}))}{\partial u_j}, \quad (133)$$

$$f_i = - \sum_{k=1}^N \omega_k^2 \delta \varepsilon_k(\mathbf{u}^0) \frac{\partial(\delta \varepsilon_k(\mathbf{u}))}{\partial u_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M. \quad (134)$$

Если производные  $\frac{\partial(\delta \varepsilon_i(\mathbf{u}))}{\partial u_j}$  не зависят от  $\mathbf{u}$  и равны константе, то обратная задача является *линейной*, в противном случае – *нелинейной*.

Найденное решение  $\Delta \mathbf{u}$  системы (132) является направлением поиска для вектора параметров среды  $\mathbf{u} := \mathbf{u}^0 + \beta \Delta \mathbf{u}$ , где  $\beta$  – параметр релаксации. Далее берем  $\mathbf{u}^0 := \mathbf{u}$ , вычисляем новое значение  $\varepsilon(\mathbf{u}^0)$  путем решения прямой задачи, вычисляем значение функционала

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N (\omega_i \delta \varepsilon_i(\mathbf{u}))^2, \quad (135)$$

и если это значение стало меньше, чем на предыдущей итерации, то осуществляется переход к следующему шагу, в противном случае уменьшается значение параметра релаксации  $\beta$ .

Отметим, что основные вычислительные затраты при решении обратной задачи составляют решение серии прямых задач.

Кроме предложенного метода линеаризации для минимизации функционала (128) можно использовать любой другой метод минимизации, однако, как правило, по эффективности они уступают описанному выше методу линеаризации.

В заключение нужно отметить следующее. Если в случае восстановления параметров так называемой одномерной среды количество параметров невелико, так как для каждого из слоев восстанавливаются их проводимость и толщина, то в двумерном и особенно в трехмерном случаях количество параметров существенно возрастает.

Поэтому в многомерном случае могут использоваться различные подходы к выбору искомым параметров. Достаточно очевидным и самым распространенным подходом является разбиение изучаемого объема на ячейки, в каждой из которых восстанавливается значение проводимости. При этом довольно часто полагается, что увеличение количества ячеек позволяет точнее описывать искомую геометрию среды. Однако такое представление зачастую оказывается неверным, поскольку увеличение количества ячеек помимо резкого роста вычислительных затрат приводит к потере устойчивости решения обратной задачи [7].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. – 345.
2. *Рояк М.Э., Соловейчик Ю.Г., Шурина Э.П.* Сеточные методы решения краевых задач математической физики: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 120 с.
3. *Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г.* Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с. – (Сер. «Учебники НГТУ»).
4. *Домников П.А., Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г.* Методы решения больших систем уравнений: учеб.-метод. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. – 24 с.
5. *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics: Vol. 1, Theory (Investigations in Geophysics No.3).* Edited by Misac N. Nabighian.: SEG, 2008, 513 p. ISBN 978-1560800699.
6. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
7. *Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Домников П.А.* Современные компьютерные технологии: конспект лекций. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – 80 с.

**Персова Марина Геннадьевна  
Соловейчик Юрий Григорьевич  
Вагин Денис Владимирович  
Домников Петр Александрович  
Кошкина Юлия Игоревна**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В УРАВНЕНИЯХ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Учебное пособие**

Редактор *И.Л. Кескевич*  
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
Корректор *И.Е. Семенова*  
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*  
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

---

Подписано в печать 05.07.2016. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.  
Уч.-изд. л. 3,48. Печ. л. 3,75. Изд. № 19. Заказ № . Цена договорная

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20