Уравнения математической физики

3 курс ФПМИ

слайды для лекций

Персова М.Г., д.т.н., проф.,
Патрушев И.И., асс.

Лекция №1

Краевые задачи для уравнений в частных производных

Повторение пройденного материала

Типы уравнений математической физики

Краевая задача:

1) Расчётная область Ω

2) Уравнение

3) Краевые условия

I : $u|_{S_1} = u_g$ (условие Дирихле)

II: $\lambda \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_2} = \theta$ (условие Неймана)

III: $\lambda \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_3} + \beta\left(u|_{S_3} - u_\beta\right) = 0$

Стационарные процессы

Эллиптическое ур-ние:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + \gamma u = f$$

Не меняются во времени.
Установившиеся процессы.

$$u = u(x, y, z)$$

Помнишь курсовой по ЧМ?
там вот это уравнение
было.
Просто поверь.


Второе краевое –
производная
Второе краевое –
поток

Типы уравнений математической физики

Начально-краевая задача:

1) Расчётная область Ω

2) Уравнение

3) Краевые условия

4) Начальные условия

$$u\big|_{t=t_0} = u_0$$

значение поля u в Ω в начальный момент времени

Нестационарные процессы

Параболическое ур-ние:

$$-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} u\right) + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = f$$

Описывает процессы с бесконечной скоростью распространения возмущений.

Тепловые и многие электромагнитные процессы.

$$u = u\left(x, y, z, t\right)$$

Типы уравнений математической физики

Начально-краевая задача:

1) Расчётная область Ω
2) Уравнение
3) Краевые условия
4) Начальные условия

$u\big|_{t=t_0} = u_0$ — значение поля u в Ω в начальный момент времени

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = u_0'$ — производная u' в Ω в начальный момент времени

Нестационарные процессы

Гиперболическое ур-ние:

$$-\mathrm{div}\left(\lambda\,\mathrm{grad}\,u\right) + \sigma\frac{\partial u}{\partial t} + \chi\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f$$

Процессы с конечной скоростью распространения возмущений.

Колебания струны.

$$u = u\left(x, y, z, t\right)$$

Типы уравнений математической физики

Эллиптический:

$$-\mathrm{div}\left(\lambda \,\mathrm{grad}\, u\right) + \gamma u = f$$

Параболический:

$$-\mathrm{div}\left(\lambda \,\mathrm{grad}\, u\right) + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = f$$

Гиперболический:

$$-\mathrm{div}\left(\lambda \,\mathrm{grad}\, u\right) + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f$$

Математическая модель всегда основывается на фундаментальных законах природы – *законах сохранения*.

закон сохранения энергии (тепловой, механической)
закон сохранения массы
и др.

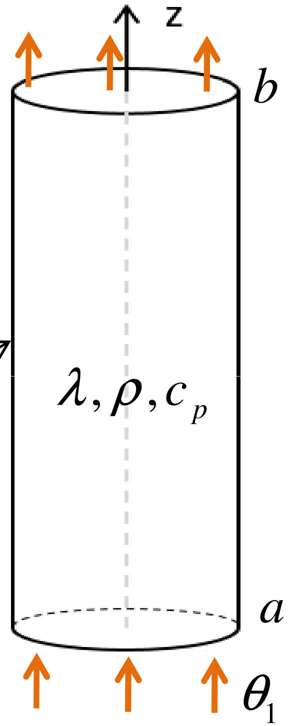
Пример параболической задачи

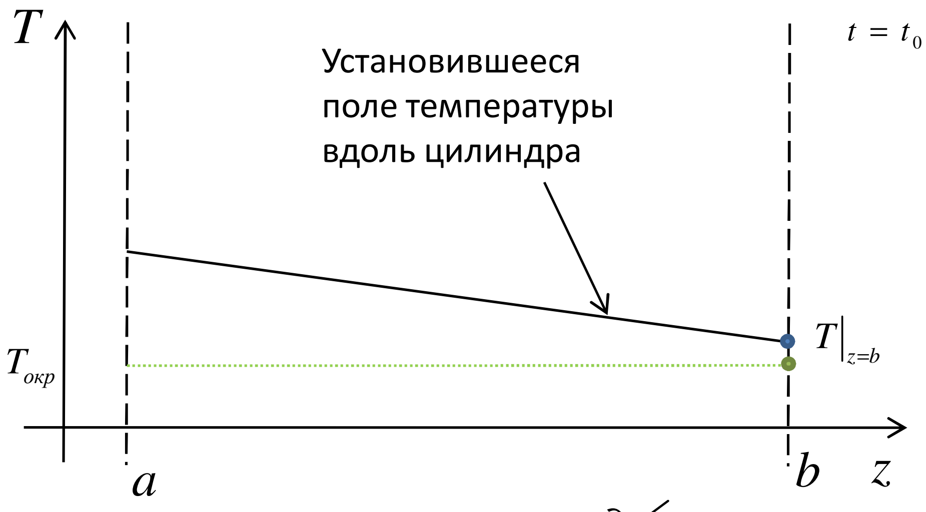
$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{z=b} = -\beta\left(T\big|_{z=b} - T_{окр}\right)$$

$$\theta_1 = -\beta\left(T\big|_{z=b} - T_{окр}\right)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{z=a} = \theta_1$$

Боковая поверхность теплоизолирована





$$-div\left(\lambda\, \mathrm{gradT}\right) + \cancel{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}} = 0$$

Стационарный процесс, на нижнюю грань цилиндра поступает постоянный тепловой поток, сверху третьи краевые условия.

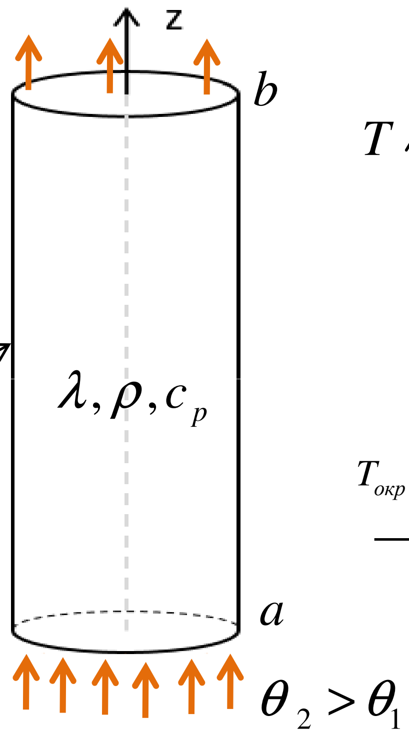
Пример параболической задачи

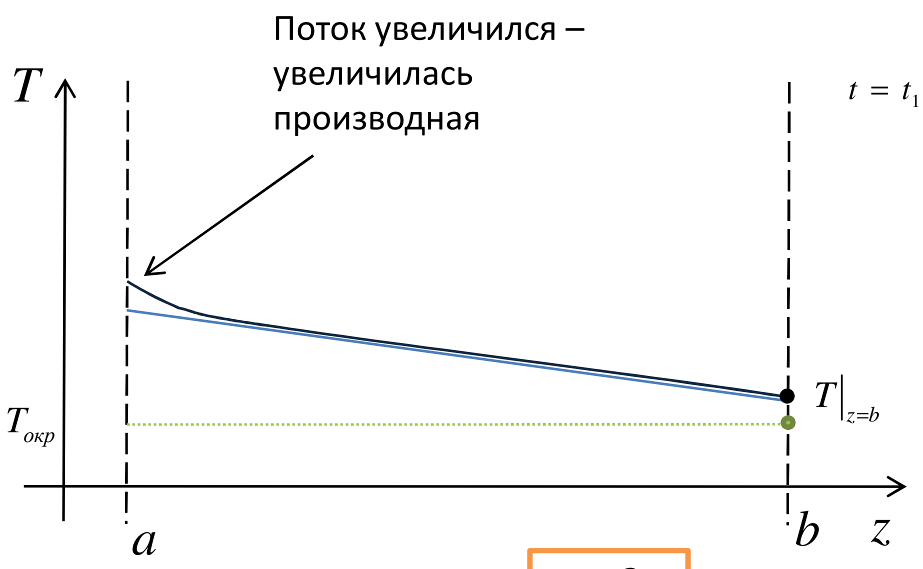
$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{z=b} = -\beta\left(T\big|_{\substack{z=b\\t=t_1}} - T_{окр}\right)$$

$$\theta_2 > -\beta\left(T\big|_{\substack{z=b\\t=t_1}} - T_{окр}\right)$$

Боковая поверхность теплоизолирована

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{z=a} = \theta_2$$





$$-div\left(\lambda\,\mathrm{gradT}\right) + \boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}} = 0$$

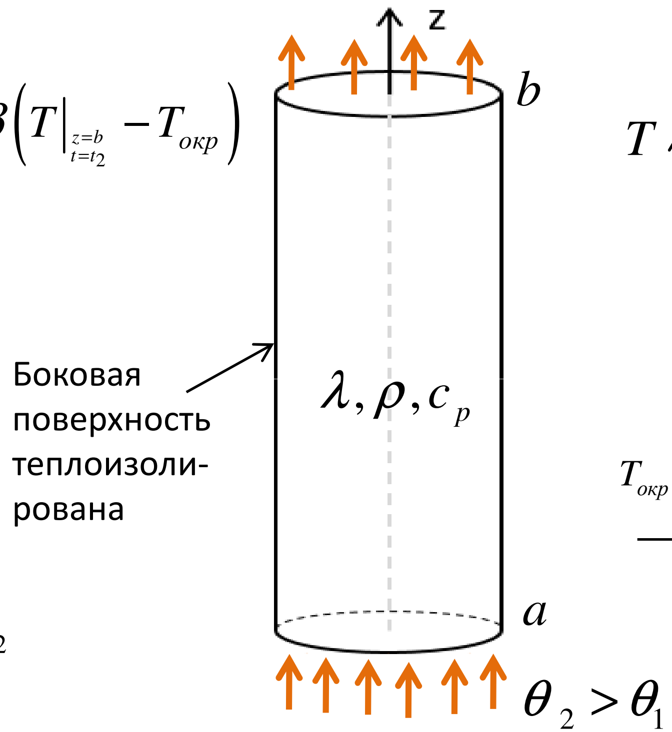
Увеличим тепловой поток, и тогда возникает нестационарный процесс: нагрев цилиндра.

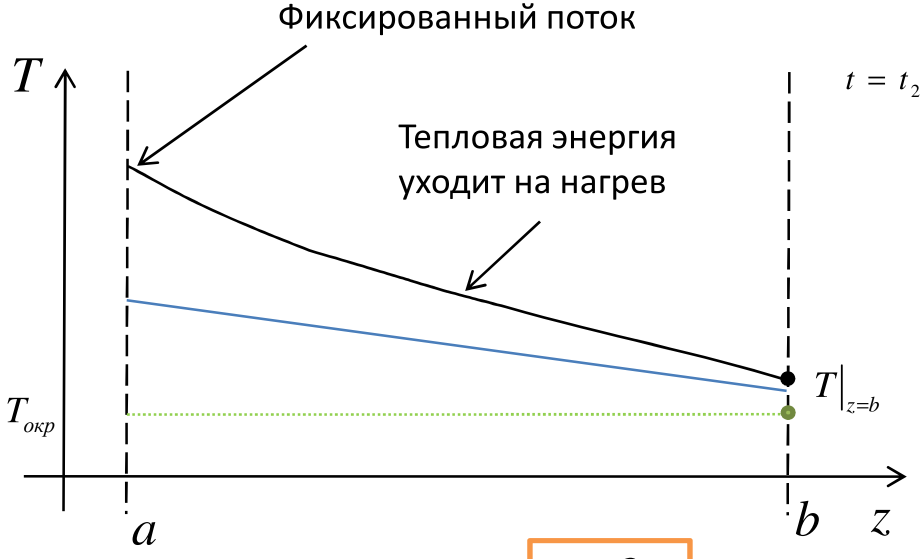
Пример параболической задачи

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{z=b} = -\beta\left(T\big|_{\substack{z=b\\ t=t_2}} - T_{окр}\right)$$

$$\theta_2 > -\beta\left(T\big|_{\substack{z=b\\ t=t_2}} - T_{окр}\right)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{z=a} = \theta_2$$





$$-div\left(\lambda\,\mathrm{gradT}\right) + \boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}} = 0$$

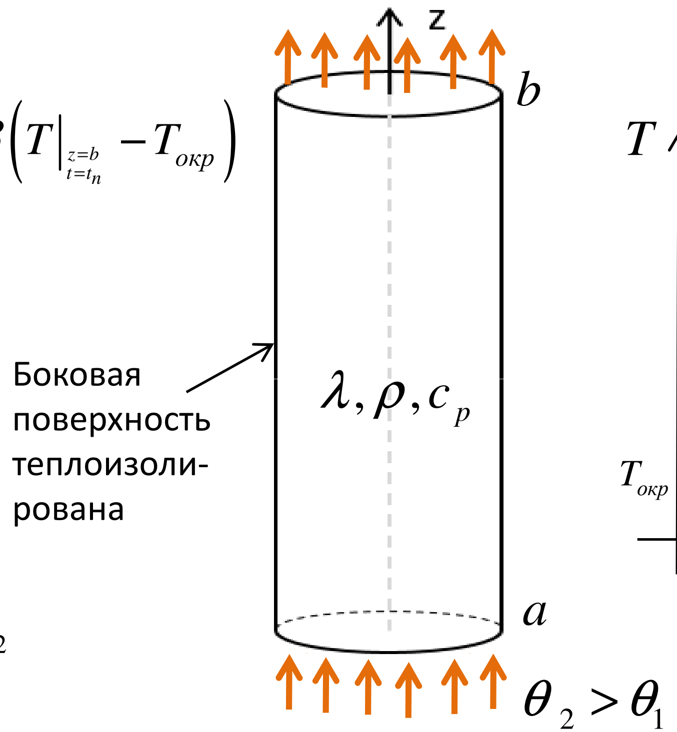
Нестационарный тепловой процесс описывается уравнением параболического типа.

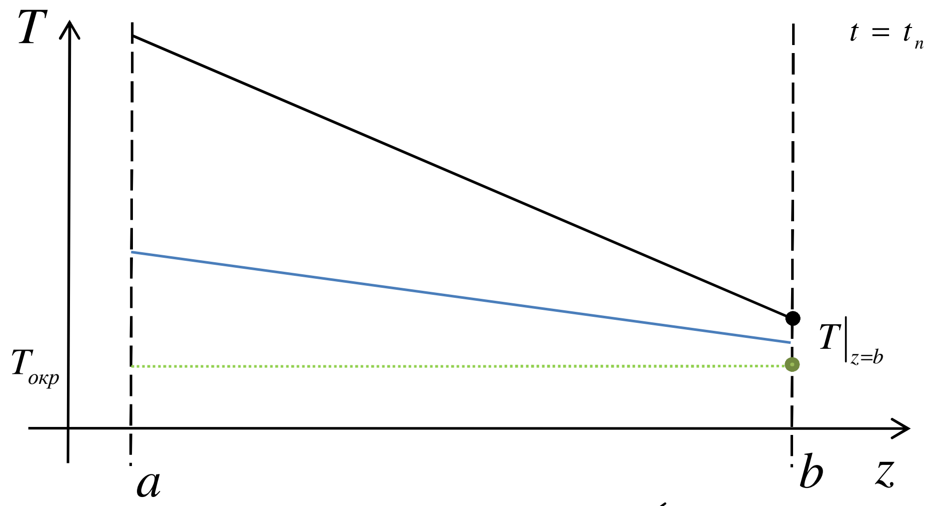
Пример параболической задачи

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{z=b} = -\beta\left(T\big|_{\substack{z=b\\ t=t_n}} - T_{окр}\right)$$

$$\theta_2 = -\beta\left(T\big|_{\substack{z=b\\ t=t_n}} - T_{окр}\right)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{z=a} = \theta_2$$





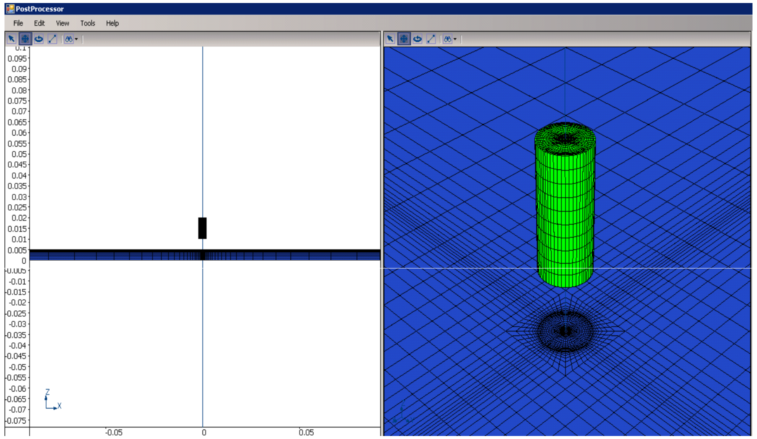
$$-div\left(\lambda\, \mathrm{gradT}\right) + \cancel{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}} = 0$$

До того как тело нагреется, температура снова перестанет изменяться, и поле температуры снова будет описываться эллиптическим уравнением.

Пример гиперболической задачи

Моделирование упругого удара цилиндрического тела о пластину.

$$
\begin{cases}
-\mathrm{div}(\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}) + \rho \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \\
-\mathrm{div}(\sigma_{xy}, \sigma_y, \sigma_{yz}) + \rho \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0, \\
-\mathrm{div}(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z) + \rho \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0,
\end{cases}
$$



Параметры задачи	
Высота тела	9 мм
Радиус тела	2 мм
Скорость *	100 м/с
Размер пластины	1000 x1000 x 5 мм^3
Модуль Юнга	200 ГПа
Коэффициент Пуассона	0.28
Модуль сдвига	78.125 ГПа

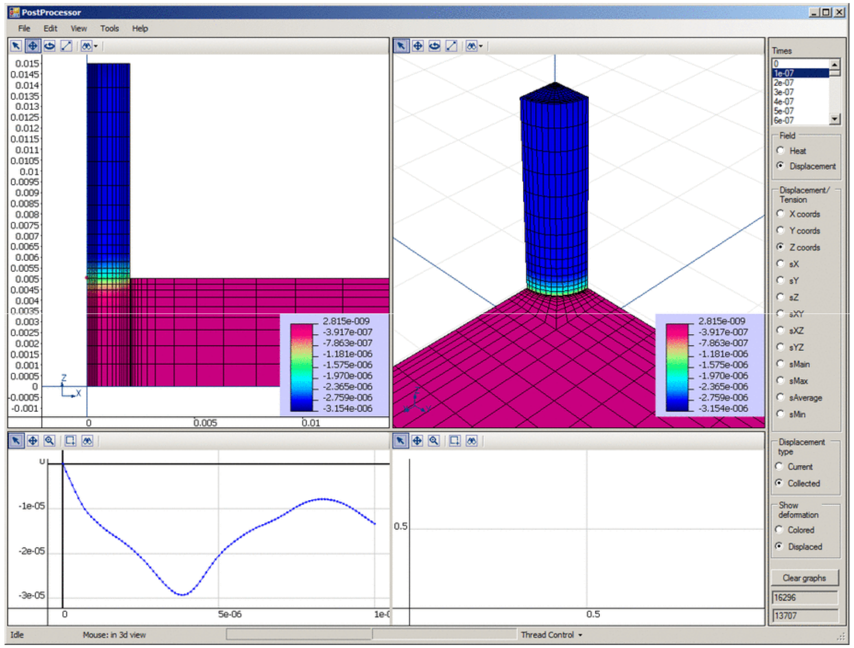
где $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}$ - вектор напряжений,

$u = \{u_x, u_y, u_z\}$ - вектор перемещений,

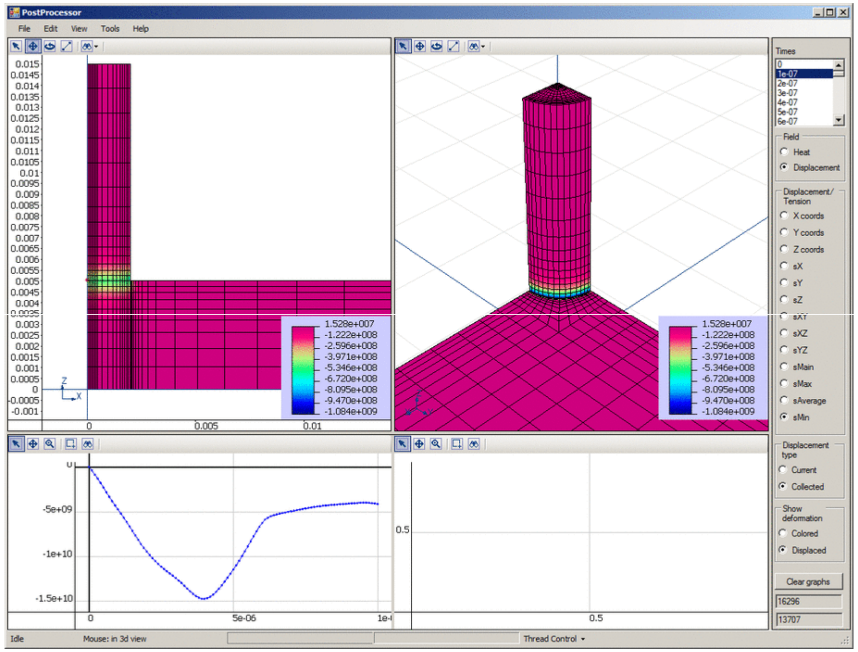
ρ - плотность материала.

Пример гиперболической задачи

Моделирование упругого удара цилиндрического тела о пластину.



Распределение перемещения u_z



Распределение поля напряжений $\sigma_{\min}$

Построение МКЭ-аппроксимации

Основные шаги метода конечных элементов:

Дано: краевая задача для уравнения $Lu = f \quad \left(-\mathrm{div}\left(\lambda\,\mathrm{grad}\,u\right) + \gamma u = f\right)$

Применяем метод Галёркина: $\left(Lu, v\right) = \left(f, v\right) \quad \forall v \in \Phi$

После всех преобразований (в т.ч. с учётом кр. условий) получаем вариационную постановку:

$$\int_{\Omega} \lambda\,\mathrm{grad}\,u \cdot \mathrm{grad}\,v_0 \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \gamma u v_0 \mathrm{d}\Omega + \int_{S_3} \beta u v_0 \mathrm{d}S = \int_{\Omega} f\, v_0 \mathrm{d}\Omega + \int_{S_2} \theta v_0 \mathrm{d}S + \int_{S_3} \beta u_\beta v_0 \mathrm{d}S \quad \forall v_0 \in H_0^1$$

Выбираем конечномерное пространство функций $V_0^h = span\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, в котором
тип КЭ, сетка

будем искать функцию вида: $u^h\left(x, y, z\right) = \sum_{j=1}^{N} q_j \psi_j\left(x, y, z\right)$. Получаем КЭ СЛАУ:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega} \lambda\,\mathrm{grad}\,\psi_j \cdot \mathrm{grad}\,\psi_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \gamma \psi_j \psi_i \mathrm{d}\Omega + \int_{S_3} \beta \psi_j \psi_i \mathrm{d}S\right) q_j = \int_{\Omega} f\, \psi_i \mathrm{d}\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_i \mathrm{d}S + \int_{S_3} \beta u_\beta \psi_i \mathrm{d}S \quad i \in N_0$$

Построение МКЭ-аппроксимации

Основные шаги метода конечных элементов:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\underbrace{\int_{\Omega}\lambda\,\mathrm{grad}\,\psi_j\cdot\mathrm{grad}\,\psi_i\,\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{G}\ \text{жесткости}}+\underbrace{\int_{\Omega}\gamma\psi_j\psi_i\,\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{M}\ \text{массы}}+\int_{S_3}\beta\psi_j\psi_i\,\mathrm{d}S\right)q_j=\int_{\Omega}f\,\psi_i\,\mathrm{d}\Omega+\underbrace{\int_{S_2}\theta\psi_i\,\mathrm{d}S}_{\text{2 кр. усл.}}+\int_{S_3}\beta u_{\beta}\psi_i\,\mathrm{d}S\qquad\underbrace{i\in N_0}_{\text{1 кр. усл.}}$$

3 кр. усл.

$$\mathbf{Aq}=\mathbf{b}$$

Без вторых и третьих краевых условий СЛАУ можно записать в виде:

$$(\mathbf{G}+\mathbf{M})\mathbf{q}=\mathbf{b}$$

$$u^h(x,y,z)=\sum_{j=1}^{N}q_j\psi_j(x,y,z)$$

Лекция №1

Применение МКЭ для решения нестационарных задач

Новый материал

Нестационарная задача

Рассмотрим временную аппроксимацию на задаче с параболическим уравнением:

$$u = u(x, y, z, t)$$
$$f = f(x, y, z, t)$$

$$-\mathrm{div}(\lambda \,\mathrm{grad}\, u) + \underbrace{\sigma \frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{конечно-разностная схема}} = f$$

Двухслойная неявная схема:

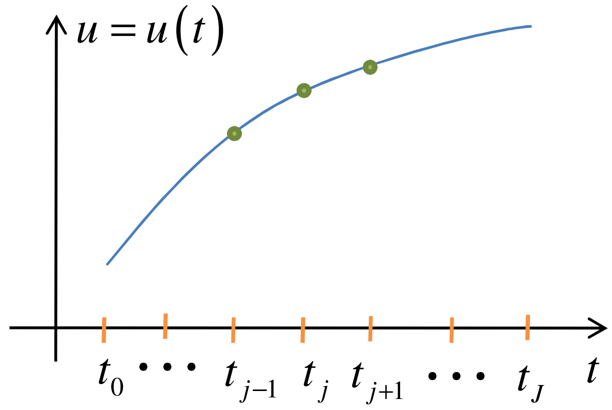
$$-\mathrm{div}(\lambda \,\mathrm{grad}\, u^j) + \sigma \frac{u^j - u^{j-1}}{\Delta t} = f^j$$

Устойчива

МКЭ

$$\mathbf{G}\mathbf{q}^j + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\mathbf{q}^j - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\mathbf{q}^{j-1} = \mathbf{b}^j$$

$$\boxed{\left(\mathbf{G} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\right)\mathbf{q}^j = \mathbf{b}^j + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\mathbf{q}^{j-1}}$$



сетка по времени $\{t_j\}_{j=1}^{J}$

Начальное условие:

$\mathbf{q}^0 \leftarrow u(x, y, z, t)\big|_{t=t_0}$ точный

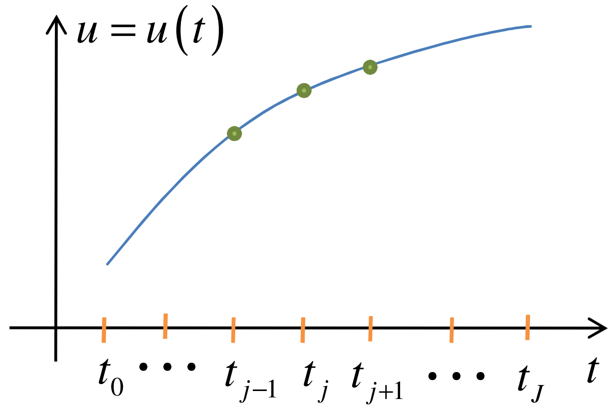
Нестационарная задача

Рассмотрим временную аппроксимацию на задаче с параболическим уравнением:

$$-\mathrm{div}\left(\lambda\,\mathrm{grad}\,u\right)+\sigma\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}=f$$

$$u=u\left(x,y,z,t\right)$$
$$f=f\left(x,y,z,t\right)$$

конечно-разностная схема



сетка по времени $\{t_j\}_{j=1}^{J}$

Двухслойная явная схема:

$$-\mathrm{div}\left(\lambda\,\mathrm{grad}\,u^{j-1}\right)+\sigma\frac{u^{j}-u^{j-1}}{\Delta t}=f^{j-1}$$

МКЭ

$$\mathbf{G}\mathbf{q}^{j-1}+\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\mathbf{q}^{j}-\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\mathbf{q}^{j-1}=\mathbf{b}^{j-1}$$

$$\boxed{\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\mathbf{q}^{j}=\mathbf{b}^{j}+\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\mathbf{q}^{j-1}-\mathbf{G}\mathbf{q}^{j-1}}$$

Для устойчивости требует соотношения шага пространственной сетки и шага Δt

Начальное условие:

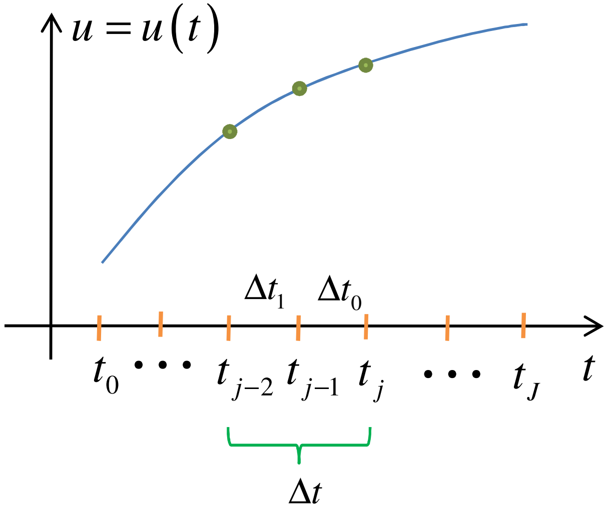
$$\mathbf{q}^{0}\leftarrow u\left(x,y,z,t\right)\big|_{t=t_0}$$ точный

Нестационарная задача

Рассмотрим временную аппроксимацию на задаче с параболическим уравнением:

$$u = u(x, y, z, t)$$
$$f = f(x, y, z, t)$$

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + \sigma \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{конечно-разностная схема}} = f$$



Полиномы Лагранжа

$$u(x, y, z, t) = u^{j-2}(x, y, z)\eta_2^j(t) + u^{j-1}(x, y, z)\eta_1^j(t) + u^j(x, y, z)\eta_0^j(t)$$

$$\eta_2^j(t) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t}(t - t_{j-1})(t - t_j) \qquad \left.\frac{d\eta_2^j(t)}{dt}\right|_{t=t_j} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t}$$

$$\eta_1^j(t) = -\frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_0}(t - t_{j-2})(t - t_j) \qquad \left.\frac{d\eta_1^j(t)}{dt}\right|_{t=t_j} = -\frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}$$

$$\eta_0^j(t) = \frac{1}{\Delta t \Delta t_0}(t - t_{j-2})(t - t_{j-1}) \qquad \left.\frac{d\eta_0^j(t)}{dt}\right|_{t=t_j} = \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0}$$

см. стр. 15 уч. пособ.

Нестационарная задача

Рассмотрим временную аппроксимацию на задаче с параболическим уравнением:

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$f = f(x, y, z, t)$$

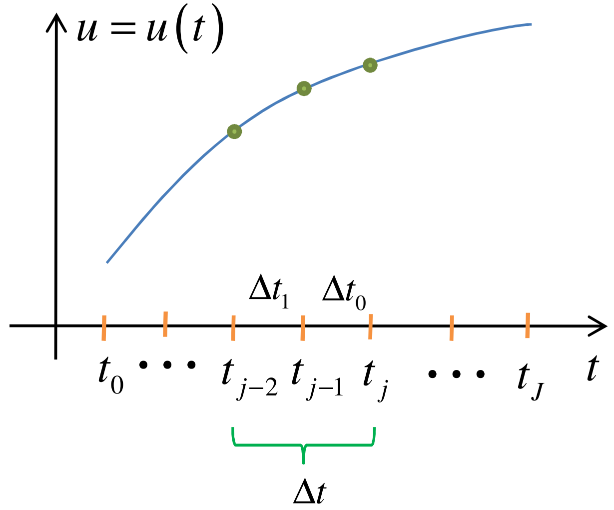
$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + \sigma \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{конечно-разностная схема}} = f$$

$$\Downarrow$$

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u^j) + \sum_{k=0}^{2} u^{j-k}(x, y, z)\eta_k^{j-k}(t) = f^j$$

$$\Downarrow \text{ МКЭ}$$

$$\boxed{\left(\mathbf{G} + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0}\mathbf{M}\right)\mathbf{q}^j = \mathbf{b}^j + \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}\mathbf{M}\mathbf{q}^{j-1} - \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t}\mathbf{M}\mathbf{q}^{j-2}}$$



Начальные условия:

$$\mathbf{q}^0 \leftarrow u(x, y, z, t)\big|_{t=t_0}$$

$$\mathbf{q}^1 \leftarrow u(x, y, z, t)\big|_{t=t_1}$$

точные

Аппроксимация, сходимость, устойчивость (**МКР**)

Разностная схема имеет k-й порядок аппроксимации, если

$$\underbrace{\left\| f^* - L^h u^* \right\|}_{\text{невязка}} \le C_1 h^k .$$

Разностная схема имеет k-й порядок сходимости, если

$$\underbrace{\left\| u - u^* \right\|}_{\text{погрешность}} \le C_2 h^k .$$

u^* - точное решение

u - сеточная функция

$L^h u = f^*$

f^* - правая часть (сеточная)

L^h - разностный оператор

Разностная схема устойчива, если малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения:

$$\left\| u - u^* \right\| \le C \left\| L^h \left(u - u^* \right) \right\| .$$

МКР и МКЭ

Метод конечных разностей

Аппроксимируется:
дифференциальный оператор

Результат:
Значения искомой функции
в узлах сетки

$$Lu = f^* \to L^h u = f^*$$

Метод конечных элементов

Аппроксимируется:
искомая функция

Результат:
Функция из выбранного конечномерного
подпространства. кусочно-полиномиального

$$u \to u^h = \sum_i q_i \psi_i$$

Нелинейные задачи

Нелинейными называются такие дифференциально-краевые задачи, у которых параметры дифференциального уравнения или краевые условия зависят от решения.

$$-\operatorname{div}\left(\lambda(u)\operatorname{grad}u\right)+\gamma(u)u=f(u) \quad \xrightarrow{\text{МКЭ}} \quad \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}=\mathbf{b}(\mathbf{q})$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_2}=\theta(u)$$

нелинейность

$$u^h=\sum_{j=1}^{N}q_j\psi_j=\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_3}+\beta(u)\left(u|_{S_3}-u_\beta\right)=0$$

Как решать такую задачу?

Нелинейные задачи

Нелинейными называются такие дифференциально-краевые задачи, у которых параметры дифференциального уравнения или краевые условия зависят от решения.

$$-\mathrm{div}\left(\underbrace{\lambda(u)}\,\mathrm{grad}\,u\right)+\underbrace{\gamma(u)}u=\underbrace{f(u)}$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_2}=\underbrace{\theta(u)}$$

нелинейность

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_3}+\underbrace{\beta(u)}\left(u\big|_{S_3}-u_\beta\right)=0$$

Как решать такую задачу?

Нелинейные задачи

Пример:

$$-\mathrm{div}\left(\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{grad}\,u\right)+\gamma u=f$$

$\lambda=\lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ - аналитическая зависимость

$$\lambda=\sum_k \lambda_k \psi_k$$

$$\lambda_k=\lambda\left(\sum_j q_j \left.\frac{\partial \psi_j}{\partial x}\right|_{x=x_k}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\int_\Omega\left(\sum_k \lambda_k\psi_k\right)\mathrm{grad}\,\psi_j\cdot\mathrm{grad}\,\psi_i\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega \gamma\psi_j\psi_i\mathrm{d}\Omega\right)q_j=\int_\Omega f\,\psi_i\mathrm{d}\Omega$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_k \lambda_k\int_\Omega \psi_k\,\mathrm{grad}\,\psi_j\cdot\mathrm{grad}\,\psi_i\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega \gamma\psi_j\psi_i\mathrm{d}\Omega\right)q_j=\int_\Omega f\,\psi_i\mathrm{d}\Omega$$

$$u^h=\sum_{j=1}^{N} q_j\psi_j$$

$$\frac{\partial u^h}{\partial x}=\sum_{j=1}^{N} q_j\frac{\partial \psi_j}{\partial x}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}=\mathbf{b}$$

Метод простых итераций

$\mathbf{q}^{(0)}$ - начальное приближение

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{q}^{(0)}\right)\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{q}^{(1)}\right)\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{b}$$

$$\cdots$$

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{q}^{(k-1)}\right)\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{b}$$

Останов итерационного процесса:

$$\frac{\left\|\mathbf{A}\left(\mathbf{q}^{(k)}\right)\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{b}\right\|}{\left\|\mathbf{b}\right\|} < \varepsilon$$