Централизатор

$Z(\rho) = \{e : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{M} \mid \rho \circ e = e \circ \rho\}$ - централизатор ρ

Определение множества sub(w)

Для $w \in \Sigma^*$ определим $\mathrm{sub}(w) = \{v \in \Sigma^* \mid w \ \rho \ v\} \setminus \{w\}$

Определение (Содержание слова)

Содержание слова $w \in \Sigma^*$ - это $S(w) = \{a \in \Sigma \mid |w|_a > 0\}$

Предложение (Главная часть билета)

Предположение(о Sub): $|\mathrm{w}| \geq 3$
$\mathrm{Sub(w)} = \mathrm{Sub(v)} \Rightarrow w = v$

Рис. 1: Иллюстрация к предложению

Почему важно, что $|w| \geq 3$:

- $\mathrm{sub}(ab) = \{a, b\} = \mathrm{sub}(ba)$, но $ab \neq ba$

Доказательство

Сначала разберём случай, когда $|w| = 3$

В таком случае можно разделить все слова на 3 группы по размеру содержания:

1. $|S(w)| = 1$

Тогда $S(w) = \{a\}$, $w = a^3$, $\mathrm{sub}(a^3) = \{a^2\}$

- Если $\mathrm{sub}(v) = \{a^2\}$, то $S(v) = \{a\}$ и $|v| = 3 \Rightarrow v = a^3 = w$

2. $|S(w)| = 2$**, т.е** $S(w) = \{a, b\}$

Пусть $|w|_a = 2$, $|w|_b = 1$, тогда:

$$w = \begin{cases} a^2b \\ aba \\ ba^2 \end{cases} \Rightarrow \ \mathrm{sub}(w) = \begin{cases} \{a^2, ab\} \\ \{a^2, ab, ba\} \\ \{a^2, ba\} \end{cases}$$

Если $\mathrm{sub}(v) \in \{\{a^2, ab\}, \{a^2, ab, ba\}, \{a^2, ba\}\}$, то:

$$S(v) = \{a, b\}, \ |v|_a = 2, \ |v|_b = 1 \text{ т.е } v \in \{a^2b, aba, ba^2\}$$

- У всех слов разные подмножества $\mathrm{sub}(v)$, значит $\mathrm{sub}(v)$ однозначно определяет v

3. $|S(w)| = 3$**, т.е** $S(w) = \{a, b, c\}$

То есть w - анаграмма abc

$\mathrm{sub}(abc) = \{ab, ac, bc\}$

Без ограничения общности, пусть $\mathrm{sub}(v) = \{xy, xz, yz\}$, тогда $S(v) = \{x, y, z\}$ и $|v| = 3$, т.е v - тоже анаграмма xyz

sub(v) **задаёт порядок следования:**

- x стоит раньше y и z
- y стоит раньше z

$\Rightarrow \mathrm{sub}(v)$ однозначно задаёт слово v

Случай $|w| \geq 4$, $|S(w)| > 1$

Слово w может начинаться с 2 одинаковых букв или нет.

1. Без ограничения общности $w = a^2w'$

$$\mathrm{sub}(w) = \{aw'\} \cup \{a^2x \mid w' \ \rho \ x\}$$

Если $\mathrm{sub}(v) = \{aw'\} \cup \{a^2x \mid w' \ \rho \ x\}$, то $v = a^2w'$:

- aw' - слово с наименьшим числом букв a в начале
- У слов вида $\{a^2x \mid w' \ \rho \ x\}$ букв a в начале больше на 1
- По словам вида $\{a^2x \mid w' \ \rho \ x\}$ можно однозначно найти aw', по которому восстанавливается v (добавляем a в начало)

2. Без ограничения общности $w = abw'$**,** $|\mathbf{sub}(w)| \geq 2$

- Если $|\mathrm{sub}(w)| > 2$, то в $\mathrm{sub}(w)$ существует единственное слово, начинающееся на b - bw'. Остальные слова начинаются на a
- По количеству слов, начинающихся на a, определяем первую букву. По слову bw' определяем остальные буквы
- Если $|\mathrm{sub}(w)| = 2 \Rightarrow \mathrm{sub}(w) = \{bw', aw'\}$, значит $w' = b^{|w|-2}$
  - Если бы была третья буква, её можно было бы вычеркнуть
  - Если бы в w' была a, то можно было бы получить новое слово
  - Если $w' = uav$ $(u, v \in \Sigma^k)$, то $abuv \in \mathrm{sub}(w)$ и $abuv \neq auav$, иначе $bu = ua$, что невозможно при $u, v \in \{a, b\}^*$

Таким образом, $\mathrm{sub}(w)$ однозначно задаёт слово v:

$$\mathrm{sub}(w) = \{b^{|w|-1}, ab^{|w|-2}\}$$

■