$\mathcal{X}$ - Случайная величина распределена на $\{1, 2, \ldots, |\Sigma|\}$

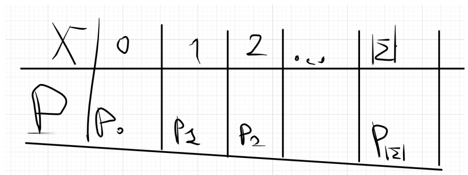


Рис. 1: Пример изображения

Определение (Позначная модель открытого текста)

Пусть открытый текст $M = x_1 x_2 \cdots x_n$ где $\forall i, j : x_i, x_j$ - независимые и каждая x_i это случайная величина X. Такая модель называется **позначной моделью открытого текста**.

$x_1, \cdots x_n = x^n$ - цепочка символов, которая распределена на Σ^n
$w_1, \cdots w_n = w$ - слово. $w \in \Sigma^n$
Тогда

$$\mathsf{P}(x^n = w) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(x_i = w_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X = w_i)$$

$$J(x^n = w) = \sum_{i=1}^{n} J(x_i = w_i)$$

Можно разделить множество Σ^n на 2 класса:

1. **Типичные** слова
2. **Редкие** слова

Теорема Шеннона о типичных и редких последовательностях (Главная часть билета)

$\forall \epsilon > 0, \forall \sigma > 0\ \exists N\ \forall n > N : \exists \{U_n, V_n\}$-разбиение Σ^n:

- U_n - множество типичных слов
- V_n - множество редких слов

1. $\forall u \in U_n : \left| \frac{1}{n} J(x^n = u) - H(x) \right| < \sigma$
    - средняя информация на один символ это примерно энтропия одного символа

2. $\sum_{v \in V_n} \mathsf{P}(x^n = v) < \epsilon$

    - слова реально редкие

Доказательство

$$\mathsf{P}(x^n = w) = \prod_{j=1}^{n} p_j^{|w|_j} \quad (|w|_j \text{ - кол-во букв } j \text{ в слове } w)$$

Выберем $\delta > 0$

- $U_{n\delta} = \{u \in \Sigma^n | \forall j \in \{1, 2 \ldots |\Sigma|\} : ||u|_j - np_j| \leq n\delta\}$
    - np_j - это мат ожидание в схеме Бернулли
- $V_{n\delta} = \Sigma^n \setminus U_{n\delta} = \bigcup_{j=1}^{|\Sigma|} \{u \in \Sigma^n | \, ||u|_j - np_j| \geq n\delta\} = \bigcup_{j=1}^{|\Sigma|} V_{n\delta_j}$
    - $V_{n\delta_j} = \{u \in \Sigma^n | \, ||u|_j - np_j| > n\delta_j\}$

Доказательство первого пункта

Берем $u \in U_{n\delta}$.

$$\mathsf{P}(x^n = u) = \prod_{j=1}^{|\Sigma|} p_j^{|u|_j} = \prod_{j=1}^{|\Sigma|} p_j^{np_j + n\delta\theta_j}, \text{ где } |\theta_j| < 1$$

$$J(x^n = u) = -\log(\mathsf{P}(x^n = u)) = -\sum_{j=1}^{|\Sigma|} (np_j + n\delta\theta_j) \cdot \log(p_j)$$

$$H(x) = -\sum_{j=1}^{|\Sigma|} p_j \cdot \log(p_j)$$

$$\left| \frac{1}{n} \cdot J(x^n = u) - H(x) \right| = \left| -\delta \cdot \sum_{j=1}^{|\Sigma|} \theta_j \cdot \log(p_j) \right| < -\delta \sum_{j=1}^{|\Sigma|} \log(p_j) = \sigma$$

- если в качестве δ взять $\delta = \frac{\sigma}{-\sum_{j=1}^{|\Sigma|} \log(p_j)}$

- $\blacksquare$

Доказательство второго пункта

$$\mathsf{P}(x^n \in V_n) = \mathsf{P}\left(v \in \bigcup_{j=1}^{|\Sigma|} V_{n\delta_j} \right) \leq \sum_{j=1}^{|\Sigma|} \mathsf{P}(v \in V_{n\delta_j}) = \sum_{j=1}^{|\Sigma|} \mathsf{P}(||v|_j - np_j| \geq n\delta)$$

- Т.к. живем в схеме независимых испытаний Бернулли, то $\mathbb{E}[|v|_j] = np_j$, $\mathbb{D}[|v|_j] = np_j(1 - p_j)$

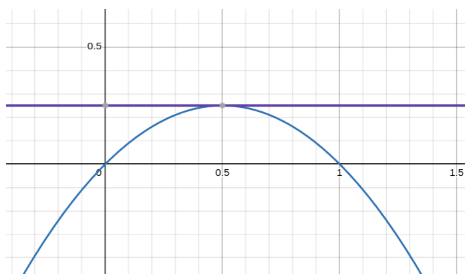
- Мат. ожидание центрированной случайной величины равно 0

$$\mathbb{E}[|v|_j - np_j] = 0$$

- **По неравенству Чебышева** $\mathsf{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{D}[X]}{\epsilon^2}$

$$\sum_{j=1}^{|\Sigma|} \frac{np_j(1-p_j)}{n^2\delta^2} \leq \frac{1}{\delta^2 n} \cdot \sum_{j=1}^{|\Sigma|} \frac{1}{4} = \frac{|\Sigma|}{4n\delta^2} < \epsilon$$

- $p_j(1-p_j) \leq \frac{1}{4}$, т.к. $p_j(1-p_j)$ - парабола с ветками вниз, у которой вершина находится в точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$



- $n > N$, где $N = \frac{|\Sigma|}{4\delta^2\epsilon}$

■

Следствие из теоремы

$\forall n > N, \forall u \in U_n : \mathsf{P}(x^n = u) \in (2^{-2n(H(x)+\sigma)}, 2^{-2n(H(x)-\sigma)})$

Доказательство. Заметим, что $-\sigma < \frac{1}{n}J(X^n = u) - H(x) < \sigma$

$$n(H(x) - \sigma) < J(X^n = u) < n(H(x) + \sigma)$$

$$n(H(x) - \sigma) < -\log P(X^n = u) < n(H(x) + \sigma)$$

$$-n(H(x) - \sigma) > \log P(X^n = u) > -n(H(x) + \sigma)$$

$$2^{-n(H(x)-\sigma)} > P(X^n = u) > 2^{-n(H(x)+\sigma)}$$

Это означает, что все типичные последовательности равновероятны.

■