Теорема Шеннона о доле типичных последовательностей

Формулировка

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \log(|U_n|) = H(x)$$

То есть с ростом n количество типичных последовательностей ведёт себя как $2^{nH(x)}$, то есть $|U_n| \approx 2^{nH(x)}$.

Доказательство (из следствия)

Сложим по U левое неравенство из следствия из первой теоремы Шеннона:

$$\sum_{u\in U_n} 2^{-n(H(x)+\sigma)} < \sum_{u\in U_n} P(x^n = u) = P(u \in U_n) \leq 1 \Rightarrow$$

$$|U_n| \cdot 2^{-n(H(x)+\sigma)} < 1$$

Сложим по U правое неравенство из следствия из первой теоремы Шеннона:

$$\sum_{u\in U_n} P(x^n = u) < |U_n| \cdot 2^{-n(H(x)-\sigma)} \Rightarrow$$

Вероятность противоположного события $P(u \in V_n) < \varepsilon$, то есть когда слово редкое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad 1 - \varepsilon < P(u \in U_n)$$

Так как $\forall \varepsilon$, то можно взять $\varepsilon = 0 \Rightarrow$

$$1 < |U_n| \cdot 2^{-n(H(x)+\sigma)}$$

Объединим неравенства:

$$|U_n| \cdot 2^{-n(H(x)+\sigma)} < |U_n| < |U_n| \cdot 2^{-n(H(x)-\sigma)} \Rightarrow$$

$$H(x) - \sigma < \frac{1}{n} \log(|U_n|) < H(x) + \sigma \Rightarrow$$

$$\left| \frac{1}{n} \log(|U_n|) - H(x) \right| < \sigma$$

$$\blacksquare$$

Таким образом,

$$\forall\delta > 0\ \exists N\ \forall n > N : H(X) - 2\delta < \frac{1}{n}\log(|U_n|) < H(X) + 2\delta$$

это и есть определение предела.
Таким образом, $|U_n| \approx 2^{n \cdot H(X)}$.
Фактически, типичные последовательности соответствуют осмысленным текстам. Из первой теоремы Шеннона следует, что они равновероятны, а во второй мы писчитали, сколько их может быть.