Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по дисциплине «Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки

Группа ИУ7-63Б

Студент Сукочева А.

Преподаватель Саркисян П.С.

Москва — 2021 г.

1 | Задание

1.1 Цель работы

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1.2 Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 | Теоретическая часть

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть: 1) X - случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Закон распределения с.в. X известен с точностью до θ означает, что известен общий вид закона распределения с.в. X, но этот закон зависит от неизвестного параметра θ. Если задать некоторое значение θ, то закон распределения с.в. X будет известен полностью

Интервальной оценкой с уровнем доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Доверительным интервалом с уровнем доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Статистику $\hat{\theta}(\vec{X})$ называют точечной оценкой параметра θ, если ее выборочное значение принимается в качестве параметра θ. Т.е. $\theta = \hat{\theta}(\vec{x})$

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2.1}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2.2}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания; $S(\vec{X}) = \sqrt{S^2(\vec{X})}$ – квадратный корень из точечной оценки дисперсии; n – объем выборки; γ – уровень доверия; $t^{St(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}} \tag{2.3}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}} \tag{2.4}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии; n – объем выборки; γ – уровень доверия; $t^{\chi^2(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$ с $n-1$ степенями свободы.

3 | Практическая часть

```
% Вариант 17.

x = [14.90, 14.40, 13.56, 15.55, 13.97, 16.33, 14.37, 13.46, 15.51, 14.69,...
     13.41, 14.24, 15.65, 14.54, 13.55, 13.15, 14.32, 15.04, 13.27, 14.60,...
     13.83, 13.93, 14.11, 14.15, 15.48, 15.96, 14.46, 13.87, 13.67, 15.30, ...
     13.95, 16.08, 18.25, 14.93, 15.37, 14.38, 15.56, 13.92, 14.23, 12.80, ...
     13.16, 13.89, 14.24, 13.90, 12.82, 13.20, 13.89, 13.50, 13.44, 16.13, ...
     14.68, 15.27, 13.35, 13.62, 16.16, 16.46, 13.83, 14.13, 15.68, 15.22, ...
     12.59, 12.94, 13.09, 16.54, 14.61, 14.63, 14.17, 13.34, 16.74, 16.30, ...
     13.74, 15.02, 14.96, 15.87, 16.03, 12.87, 14.32, 14.48, 14.57, 14.43, ...
     12.61, 14.52, 15.29, 12.07, 14.58, 11.74, 14.97, 14.31, 12.94, 12.82, ...
     14.13, 14.48, 12.25, 14.39, 15.08, 12.87, 14.25, 15.12, 15.35, 12.27, ...
     14.43, 13.85, 13.16, 16.77, 14.47, 14.89, 14.95, 14.55, 12.80, 15.26, ...
     13.32, 14.92, 13.44, 13.48, 12.81, 15.01, 13.19, 14.68, 14.44, 14.89];

gamma = 0.9;
n = length(x);

% 1.a Точечная оценка мат. ожидания.
mu = expectation(x);
fprintf('mu = %.2f\n', mu);
% 1.a Точечная оценка дисперсии.
sSqr = variance(x);
fprintf('S^2 = %.2f\n\n', sSqr);

% 1.b
% tinv(a, n) - квантиль уровня a распределения Стьюдента с n степенями свободы.
mu_low = mu + (sqrt(sSqr) * tinv((1 - gamma) / 2, n - 1)) / sqrt(n);
mu_high = mu + (sqrt(sSqr) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1)) / sqrt(n);

fprintf('mu_low = %.2f\n', mu_low);
fprintf('mu_high = %.2f\n', mu_high);

% 1.c
% chi2inv(a, n) - квантиль уровня a распределения хи квадрат с n степенями свободы.
sigma_low  = ((n - 1) * sSqr) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
sigma_high = ((n - 1) * sSqr) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);

fprintf('sigma_low = %.2f\n', sigma_low);
fprintf('sigma_high = %.2f\n', sigma_high);

% 3.a
figure;
% y = mu(x_n) (n = 120)
xs = 1:1:length(x);
ys = mu * ones(n);
plot(xs,ys, 'r'); % blue
```

```
hold on
% y = mu(x_n) (n = 1..120)
ys2 = [];
for i = 1:n
    ys2(end + 1) = expectation(x(1:i));
end
plot(xs,ys2, 'y'); % yellow

% y = mu_low(x_n) (n = 1..120)
ys3 = [];
for i = 1:n
    curr_mu = expectation(x(1:i));
    curr_sSqr = variance(x(1:i));
    curr_n = i;
    ys3(end + 1) = curr_mu + (sqrt(curr_sSqr) * tinv((1 - gamma) / 2, curr_n - 1)) / sqrt(curr_n);
end
plot(xs,ys3, 'g');

% y_high = mu(x_n) (n = 1..120)
ys4 = [];
for i = 1:n
    curr_mu = expectation(x(1:i));
    curr_sSqr = variance(x(1:i));
    curr_n = i;
    ys4(end + 1) = curr_mu + (sqrt(curr_sSqr) * tinv((1 + gamma) / 2, curr_n - 1)) / sqrt(curr_n);
end
plot(xs,ys4, 'b');

```

```
% 3.b
figure;
% y = sugma(x_n) (n=120)
xs = 1:1:length(x);
ys = sSqr * ones(n);
plot(xs,ys, 'r'); % blue

hold on
% y = sugma(x_n) (n=1..120)
ys2 = [];
for i = 1:n
    ys2(end + 1) = variance(x(1:i));
end
plot(xs,ys2, 'y'); % yellow


% y = sugma_low(x_n) (n=1..120)
ys3 = [];
for i = 1:n
    curr_sSqr = variance(x(1:i));
    curr_n = i;
    ys3(end + 1) = ((curr_n - 1) * curr_sSqr) / chi2inv((1 + gamma) / 2, curr_n - 1);
end
plot(xs,ys3, 'g');

% y = sugma_high(x_n) (n=1..120)
ys4 = [];
for i = 1:n
    curr_sSqr = variance(x(1:i));
    curr_n = i;
    ys4(end + 1) = ((curr_n - 1) * curr_sSqr) / chi2inv((1 - gamma) / 2, curr_n - 1);
end
plot(xs,ys4, 'b');

```

```
% Точечная оценка дисперсии.
function sSqr = variance(x)
    sSqr = 0;
    n = length(x);
    mu = expectation(x);
     for i = 1:n
         sSqr = sSqr + (x(i) - mu)^2;
     end
     sSqr = sSqr / (n - 1);
end

% Точечная оценка мат. ожидания.
function mu = expectation(x)
     mu = sum(x) / length(x);
end
```

4 | Экспериментальная часть

4.1 Результаты расчетов

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = 14,35$$
$$S^2(\vec{x}_n) = 1,28$$
$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = -14,18$$
$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = 14,52$$
$$\underline{S^2}(\vec{x}_n) = 1.05$$
$$\overline{S^2}(\vec{x}_n) = 1.6$$

```
mu = 14.35
S^2 = 1.28

mu_low = 14.18
mu_high = 14.52
sigma_low = 1.05
sigma_high = 1.60

>> |
```

Рис. 4.1: Результаты расчетов

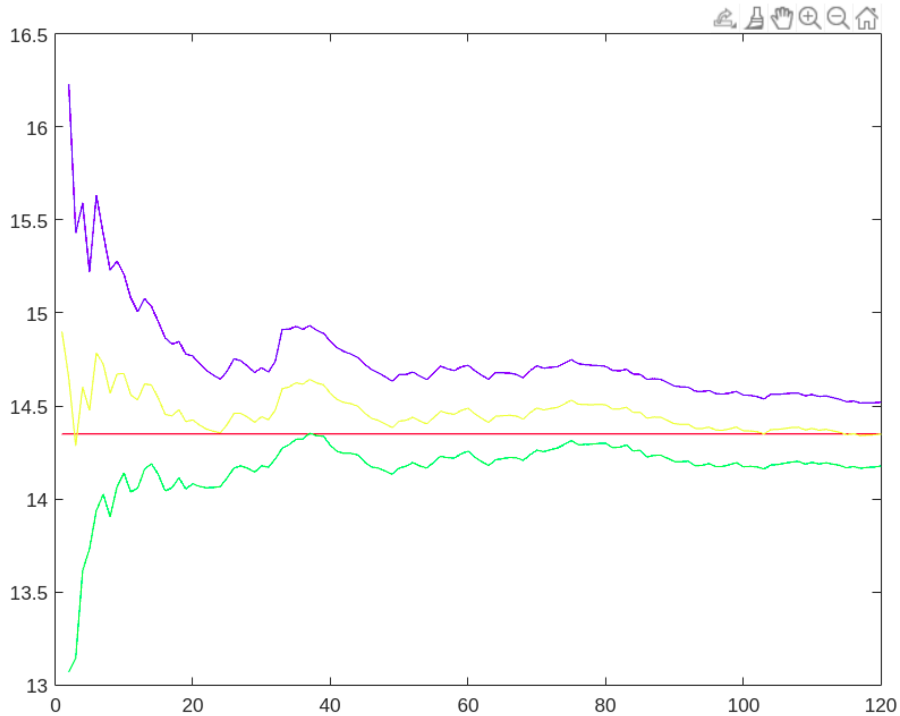

Рис. 4.2: Прямая $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

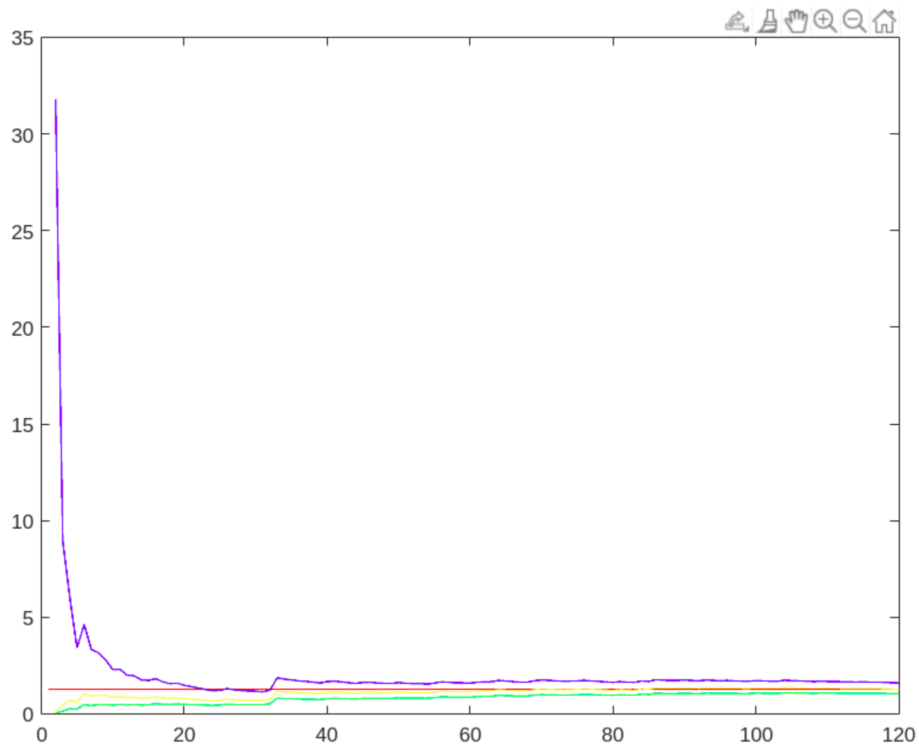

Рис. 4.3: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N