



Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 3

Тема Исследование псевдослучайных чисел

Студент Сукочева А.

Группа ИУ7-736

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Рудаков И.В.

Москва.
2021 г

Задание на лабораторную работу

Изучить методы генерирования псевдослучайных чисел, а также критерии оценки случайности последовательности. Реализовать критерий оценки случайной последовательности. Сравнить результаты работы данного критерия на одноразрядных, двухразрядных и трехразрядных последовательностях целых чисел. Последовательности получать алгоритмическим и табличным способами.

Теоретическая часть

Для выполнения работы был выбран критерий «хи-квадрат». Это один из самых известных статистических критериев, также это основной метод, используемый в сочетании с другими критериями.

С помощью этого критерия можно узнать, удовлетворяет ли генератор случайных чисел требованию равномерного распределения или нет.

Для оценки по этому критерию необходимо вычислить статистику V по формуле:

$$V = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^k \left(\frac{Y_s^2}{p_s} \right) - n, \quad (1)$$

где n – количество независимых испытаний, k – количество категорий, Y_s — число наблюдений, которые действительно относятся к категории S , p_s — вероятность того, что каждое наблюдение относится к категории s .

Значение V является значением критерия «хи-квадрат» для экспериментальных данных. Приемлемое значение этого критерия можно определить по таблице 1. Для этого используем строку с $v = k-1$, где $k = 10, 90, 900$ для задания лабораторной. P в этой таблице — это вероятность того, что экспериментальное значение $V_{\text{эксп.}}$ будет меньше табулированного (теоретического) $V_{\text{теор.}}$ или равно ему. Ее также можно рассматривать как доверительную вероятность.

Если вычисленное V окажется меньше 1%-й точки или больше 99%-й точки, можно сделать вывод, что эти числа недостаточно случайные. Если V лежит между 1% и 5% точками или между 95% и 99% точками, то эти числа «подозрительны». Если V лежит между 5% и 10% точками или 90%-95% точками, то числа можно считать «почти подозрительными». Обычно необходимо произвести проверку три раза и более с разными данными. Если по крайней мере два из трех результатов оказываются подозрительными, то числа рассматриваются как недостаточно случайные.

| | $p = 1\%$ | $p = 5\%$ | $p = 25\%$ | $p = 50\%$ | $p = 75\%$ | $p = 95\%$ | $p = 99\%$ |
|------------|---|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\nu = 1$ | 0.00016 | 0.00393 | 0.1015 | 0.4549 | 1.323 | 3.841 | 6.635 |
| $\nu = 2$ | 0.02010 | 0.1026 | 0.5754 | 1.386 | 2.773 | 5.991 | 9.210 |
| $\nu = 3$ | 0.1148 | 0.3518 | 1.213 | 2.366 | 4.108 | 7.815 | 11.34 |
| $\nu = 4$ | 0.2971 | 0.7107 | 1.923 | 3.357 | 5.385 | 9.488 | 13.28 |
| $\nu = 5$ | 0.5543 | 1.1455 | 2.675 | 4.351 | 6.626 | 11.07 | 15.09 |
| $\nu = 6$ | 0.8721 | 1.635 | 3.455 | 5.348 | 7.841 | 12.59 | 16.81 |
| $\nu = 7$ | 1.239 | 2.167 | 4.255 | 6.346 | 9.037 | 14.07 | 18.48 |
| $\nu = 8$ | 1.646 | 2.733 | 5.071 | 7.344 | 10.22 | 15.51 | 20.09 |
| $\nu = 9$ | 2.088 | 3.325 | 5.899 | 8.343 | 11.39 | 16.92 | 21.67 |
| $\nu = 10$ | 2.558 | 3.940 | 6.737 | 9.342 | 12.55 | 18.31 | 23.21 |
| $\nu = 11$ | 3.053 | 4.575 | 7.584 | 10.34 | 13.70 | 19.68 | 24.72 |
| $\nu = 12$ | 3.571 | 5.226 | 8.438 | 11.34 | 14.85 | 21.03 | 26.22 |
| $\nu = 15$ | 5.229 | 7.261 | 11.04 | 14.34 | 18.25 | 25.00 | 30.58 |
| $\nu = 20$ | 8.260 | 10.85 | 15.45 | 19.34 | 23.83 | 31.41 | 37.57 |
| $\nu = 30$ | 14.95 | 18.49 | 24.48 | 29.34 | 34.80 | 43.77 | 50.89 |
| $\nu = 50$ | 29.71 | 34.76 | 42.94 | 49.33 | 56.33 | 67.50 | 76.15 |
| $\nu > 30$ | $\nu + \sqrt{2\nu}x_p + \frac{2}{3}x_p^2 - \frac{2}{3} + O(1/\sqrt{\nu})$ | | | | | | |
| $x_p =$ | -2.33 | -1.64 | -.674 | 0.00 | 0.674 | 1.64 | 2.33 |

Таблица 1.

Некоторые процентные точки χ^2 -распределения.
(Источник: Кнут Д. Э. «Искусство программирования»)

Таким образом, процедура проверки следующая:

1. Выделяем k категорий. В нашем случае это количество возможных полученных значений: 10, 90 и 900 для одноразрядных, двухразрядных и трехразрядных.
2. Запускаем генератор случайных чисел N раз.
3. Определяем количество случайных чисел, попавших в каждую категорию.
4. Вычисляем значение V по формуле (1).
5. Сравниваем полученное значение с теоретическими значениями в таблице, определяем к какому интервалу оно относится.
6. Делаем выводы о случайности величины, возможны три случая:
 1. Если $V_{\text{эксп}}$ лежит между 1% и 99% точками, то генератор удовлетворителен. (Однако необходимо учитывать «подозрительные результаты», о которых написано выше)
 2. Если $V_{\text{эксп}}$ меньше 1% точки, то генератор не удовлетворителен, так как разброс чисел слишком мал, чтобы быть случайным.

3. Если $V_{\text{эксп}}$ больше 99% точки, то генератор не удовлетворителен, так как разброс чисел слишком велик, чтобы быть случайным.

| n-1 | P = 1% | P=5% | P=25% | P=50% | P=75% | P=95% | P=99% |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| v= 9 | 2.088 | 3.325 | 5.899 | 8.343 | 11.39 | 16.92 | 21.67 |
| v= 89 | 60.93 | 68.25 | 79.68 | 88.33 | 97.60 | 112.02 | 122.94 |
| v=899 | 803.31 | 830.41 | 870.05 | 898.33 | 927.23 | 969.86 | 1000.57 |

Таблица 2. Значения $V_{\text{теор}}$ для количества степеней свободы по заданию.

По таблице 2 можно будет сделать выводы о полученных в программе значениях.

Результаты работы программы

В качестве алгоритмического метода был взят **линейный конгруэнтный метод** генерации псевдослучайных чисел.

Программа, реализованная в лабораторной работе, выводит на экран таблицу из 7 столбцов и 12 строк. 10 строк представлены для того, чтобы можно было пронаблюдать, какие числа возвращает генератор случайных чисел. Для каждого из реализованных методов в таблице есть по три столбца для чисел с разным количеством разрядов.

В последнем столбце выводится значение V , подсчитанное для каждого столбца. ($N = 10000$)

```
lab_03 [main] python3 lab1.py
```

| --Табличный метод-- | | | | --Алгоритмический метод-- | | |
|---------------------|-------------------|-------------------|----------|---------------------------|-------------------|-------------------|
| № | 1 разряд | 2 разряд | 3 разряд | 1 разряд | 2 разряд | 3 разряд |
| 0 | 9 | 99 | 956 | 3 | 51 | 977 |
| 1 | 4 | 53 | 487 | 6 | 92 | 500 |
| 2 | 3 | 89 | 760 | 7 | 31 | 223 |
| 3 | 2 | 30 | 758 | 8 | 84 | 122 |
| 4 | 9 | 74 | 107 | 5 | 19 | 673 |
| 5 | 1 | 79 | 802 | 4 | 20 | 180 |
| 6 | 3 | 67 | 923 | 7 | 19 | 695 |
| 7 | 2 | 11 | 992 | 6 | 74 | 986 |
| 8 | 3 | 44 | 621 | 5 | 99 | 125 |
| 9 | 6 | 90 | 599 | 8 | 34 | 212 |
| коэф | 10.02599999999984 | 71.46800000000076 | 863.0 | 7.727999999999156 | 74.36599999999999 | 899.1800000000003 |

Рис 1. Первый запуск программы

```
lab_03 [main] python3 lab1.py
```

| --Табличный метод-- | | | | --Алгоритмический метод-- | | |
|---------------------|-------------------|--------------------|-------------------|---------------------------|-------------------|-------------------|
| № | 1 разряд | 2 разряд | 3 разряд | 1 разряд | 2 разряд | 3 разряд |
| 0 | 8 | 47 | 792 | 3 | 75 | 189 |
| 1 | 6 | 27 | 736 | 6 | 38 | 416 |
| 2 | 6 | 17 | 771 | 7 | 97 | 211 |
| 3 | 0 | 82 | 597 | 8 | 60 | 742 |
| 4 | 0 | 58 | 477 | 9 | 71 | 297 |
| 5 | 6 | 34 | 300 | 8 | 18 | 712 |
| 6 | 8 | 73 | 244 | 1 | 69 | 211 |
| 7 | 2 | 76 | 420 | 0 | 14 | 318 |
| 8 | 3 | 68 | 487 | 5 | 49 | 933 |
| 9 | 6 | 76 | 720 | 2 | 72 | 820 |
| коэф | 8.479999999999563 | 61.495999999999185 | 835.1000000000004 | 9.067999999999302 | 84.01399999999921 | 923.1200000000008 |

Рис 2. Второй запуск программы

```
lab_03 [main] ⚡ python3 lab1.py
```

| --Табличный метод-- | | | | --Алгоритмический метод-- | | |
|---------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------------|-------------------|-------------------|
| № | 1 разряд | 2 разряд | 3 разряд | 1 разряд | 2 разряд | 3 разряд |
| 0 | 7 | 84 | 671 | 5 | 61 | 249 |
| 1 | 6 | 74 | 107 | 8 | 74 | 332 |
| 2 | 9 | 13 | 885 | 9 | 73 | 199 |
| 3 | 2 | 25 | 118 | 8 | 36 | 462 |
| 4 | 5 | 67 | 906 | 3 | 33 | 821 |
| 5 | 8 | 84 | 342 | 4 | 68 | 344 |
| 6 | 0 | 23 | 164 | 5 | 29 | 679 |
| 7 | 8 | 18 | 246 | 2 | 44 | 498 |
| 8 | 8 | 56 | 379 | 5 | 89 | 841 |
| 9 | 6 | 55 | 506 | 4 | 72 | 580 |
| коэф | 13.22400000000016 | 86.22799999999916 | 863.3600000000006 | 6.9979999999995925 | 82.15999999999985 | 854.5400000000009 |

Рис 3. Третий запуск программы

Для правильной оценки случайности методов было проведено 3 испытания.

Сравним полученные данные с таблицей 2. Получим следующий результат:

| | Табличный метод | | | Алгоритмический метод | | |
|----------------|-----------------|----------|----------|-----------------------|----------|----------|
| № эксперимента | 1 разряд | 2 разряд | 3 разряд | 1 разряд | 2 разряд | 3 разряд |
| 1 | 50%-75% | 5%-25% | 5%-25% | 25%-50% | 5%-25% | 50%-75% |
| 2 | 50%-75% | 1%-5% | 5%-25% | 50%-75% | 25%-50% | 50%-75% |
| 3 | 75%-95% | 25%-50% | 5%-25% | 25%-50% | 25%-50% | 5%-25% |

Таблица 3. Оценка полученных результатов.

Из таблицы 3 видно, что в некоторых случаях при применении табличного метода значения оказываются «подозрительными», однако это не критично и результаты работы генераторов можно признать удовлетворительными. Для алгоритмического метода полученные значения v находятся в рамках 5%-75%, поэтому можно признать и этот метод удовлетворительным.