# 清 华 大 学

# 综 合 论 文 训 练

题目：Cluster algebra唯一分解性研究

系　　别：软件学院

专　　业：数学与应用数学（第二学位）

姓　　名：王程鹏

指导教师：朱彬　教 授

2016 年 6 月 7 日

# 关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

**(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)**

签名：王程鹏 导师签名：朱挺 日期：2016年6月1日

# 中文摘要


从代数是近年来数学研究热点。Ghristof Geiss、Bernard Lecterc 和 Jan Schroer 在他们 2011 年发表的论文中证明了丛代数不含非平凡单位，并且证明了所有的丛变量均为不可约元素。他们还给出了判断一般的丛代数唯一分解和不唯一分解的充分条件。Philipp Lampe 提出了无环丛代数唯一分解的充分条件。

本文综述了有关丛代数的唯一分解性的主要工作，介绍了论文中证明的重要结论。同时本文将对论文中没有证明的重要命题做出补充证明。在最后一个部分中，将解决欧几里得型的丛代数的唯一分解性问题。



**关键词：** 丛代数；不可约元；无环丛代数；唯一分解性

# ABSTRACT

Cluster algebra is a popular research field in recent years. Ghristof Geiss， Bernard Lecterc and Jan Schroer proved that cluster algebras do not contain non-trival units and all cluster variables are irreducible elements in their paper. They also gave a criterion for cluster algebra to be a factorial algebra and a sufficient condition to be a non-factorial algebra. Philipp Lampe presented another sufficient condition for a cluster algebra to be a unique factorization domain.

In this paper， we will summarize the main work on the factoriality of cluster algebras and introduce important conclusions proved in their papers. We will also give a 证明 of some basic and important propositions on cluster algebra which are not proven in their papers. In the last part of this paper， we will deal with the cluster algebra of Euclidean type and discuss the factoriality of Euclidean type.

**Key words:** cluster algebra; irreducible elements; acyclic cluster algebra, factorizatio

# 目 录

# 第 1 章　引言

## 1.1　研究背景

丛代数是近年来数学的研究热点。丛代数的概念是由 S.Fomin 和 A.Zelevinsky 在 2000 年提出，经过十余年的研究发展，丛代数中衍生出很多值得研究的问题。其中丛代数作为域的子代数，其唯一分解性是最近几年的研究课题。Ghristof Geiss、Bernard Lecterc 和 Jan Schroer 在他们 2011 年发表的论文中证明了丛代数不含非平凡单位，并且证明了所有的丛变量均为不可约元素。他们还给出了判断一般的丛代数唯一分解和不唯一分解的充分条件。2012 年，Philipp Lampe 提出了无环丛代数唯一分解的充分条件，并对无环丛代数的不可约元给予了一个完整的刻画。

根据丛代数中的丛变量（cluster variable）的个数是否有限，将丛代数划分为有限型和无限型两种类型。其中，S.Fomin 和 A.Zelevinsky 已证明所有的有限型丛代数中存在一个 seed 的箭图与 Dynkin 型的箭图相同，由此可以得出所有的有限型丛代数可以用 Dynkin 型进行完整地分类。与之相反，若丛代数中的丛变量（cluster variable）个数是无限的，则丛代数为无限型丛代数。有一类无限型丛代数为 Euclidean 型丛代数。本文将对 Philipp Lampe 对 Dynkin 型丛代数的唯一分解性的讨论进行综述，并完全解决 Euclidean 型丛代数的唯一分解性。

## 1.2 本文主要工作

本文综述了有关丛代数的唯一分解性的主要工作，介绍了论文中证明的重要结论。同时本文将对论文中没有证明的重要命题做出补充证明。在最后一个部分中，将解决 Euclidean 型丛代数的唯一分解性问题。

## 1.3　本文组织结构

本文正文部分分为三个章节，第一章为引言，第三章为结论，第二章为对丛代数唯一分解性的具体讨论。其中第二章中各个小节的内容如下。

2.1 节介绍了丛代数的定义及基本性质，引入了无环丛代数的概念，并且重点介绍了 Laurent 现象。2.2 节介绍了簇代数中不可约元的结构。2.3 节介绍了丛变

量的不可约性。2.4 节给出了丛代数不唯一分解的两个充分条件。2.5 节在 2.2 节和 2.3 节的基础上，给出了一般丛代数唯一分解的充分条件。2.6 节提出了关于丛代数的一些假设，引入了一类理想并讨论其代数性质，针对特定猜想重新刻画了丛代数的结构，并以猜想为前提给出了无环丛代数唯一分解的充分条件。2.7 节给出了 2.6 节中猜想成立的两个充分条件，从而若满足这两个充分条件之一，丛代数唯一分解。2.8 节引入了有限型丛代数和无限型丛代数的概念。2.9 节讨论了 Dynkin 型的丛代数的唯一分解性。2.10 节解决了 Euclidean 型的丛代数的唯一分解性。

## 1.4 声明

本文主体部分为第二章，其中第二章前九节主要是对前人工作的综述，定理及其证明方法不属于本人，少数定理在原论文中未证明，在本文中做了补充证明。第二章第十节中的命题及其证明均由本人独立完成。

# 第 2 章　丛代数的唯一分解性

## 2.1　丛代数的定义与基本性质

**定义 1.1** 矩阵 $A=(a_{ij})\in M_{n,n}(\mathbb{Z})$ 称为可斜对称的，如果存在对角矩阵 $D=Diag(d_1,\ldots,d_n)\in M_{n,n}(\mathbb{Z})$，其中对角元素 $d_1,\ldots,d_n$ 大于零，使得 DA 是斜对称矩阵，即 $d_ia_{ij}=-d_ja_{ji}$ 对任意的 i 和 j 都成立。

假设 m、n 和 p 均为整数，且

$$m\geq p\geq n\geq 1，m>1.$$

假设 $B=(b_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ 为 $(m\times n)-$ 矩阵，其中矩阵中的元素为整数。我们用 $B^{\circ}\in M_{n,n}(\mathbb{Z})$ 表示矩阵 B 的主要部分，它是由矩阵 B 删除后 m-n 行得到的。

$\Delta(B)$ 为节点是 1 到 m 组成的图，节点 i 与 j 中存在边当且仅当 $b_{ij}$ 、$b_{ji}$ 不为 0。我们称矩阵 B 为连通矩阵，如果 $\Delta(B)$ 为连通的。

假设 $K$ 为特征 0 的域或者 $K=\mathbb{Z}$。$\mathcal{F}=K(X_1,\ldots,X_m)$ 为 K 上的 m 个变量的有理函数域。

$\mathcal{F}$ 中的 seed 是一个二元组 $(\mathbf{x},B)$ 满足以下条件：

（1）　$B\in M_{m,n}(\mathbb{Z})$,

（2）　B 是连通的

（3）　$B^{\circ}$ 是可斜对称的

（4）　$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ 是 $\mathcal{F}$ 上的 m 个元素组成的元组，其中 $x_1,\ldots x_m$ 在 K 上代数无关。

对于 seed $(\mathbf{x},B)$，B 为 $(\mathbf{x},B)$ 的交换矩阵。我们称矩阵 B 满秩如果 rank（B）=n。

给定一个 seed $(\mathbf{x},B)$ 和某个 k（$1\leq k\leq n$），我们定义 $(\mathbf{x},B)$ 在 k 处的变换（mutation）：$\mu_k(\mathbf{x},B)=(\mathbf{x}',B')$，其中 $B'=(b_{ij}')$ 定义如下：[1]

$$b_{ij}'=\begin{cases}-b_{ij} & 若\ i=k\ 或\ j=k\\ b_{ij}+\dfrac{|b_{ik}|b_{kj}+b_{ik}|b_{kj}|}{2} & 其他情况\end{cases}$$

其中 $\mathbf{x}'$ =（$x_1',\ldots,x_m'$）定义如下：

$$x_s' = \begin{cases} x_k^{-1}\prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + x_k^{-1}\prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}} & if\ s=k, \\ x_s & otherwise. \end{cases}$$

等式

$$x_k x_k' = \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}$$

称为变换关系（exchange relation）。我们记

$$\mu_{(\mathbf{x},B)}(x_k) = x_k'$$

和

$$\mu_k(B) = B'.$$

**命题 1.2** $\mu_k(\mathbf{x},B) = (\mathbf{x}',B')$，其中$(\mathbf{x},B)$为 seed，则$(\mathbf{x}',B')$也为 seed。[1]

证明:（1） 根据变换的定义可知，$B' \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$

（2） 假设$b_{ij} \neq 0$. 如果 i=k 或者 j=k，则$b_{ij}' \neq 0$ 且节点 i 和节点 j 在$\Delta(B')$中相连。否则若$b_{ik}b_{kj} \leq 0$,则$b_{ij}' = b_{ij} \neq 0$,节点 i 和节点 j 在$\Delta(B')$中相连。若$b_{ik}b_{kj} > 0$，不失一般性，假设$b_{ik}, b_{kj} > 0$，则$b_{ij}' = b_{ij} + b_{ik}b_{kj}$。

显然$b_{ik}' = -b_{ik} \neq 0$，且 $b_{kj}' = -b_{kj} \neq 0$，因此 i 和 k，k 和 j 在$\Delta(B')$中相连，于是可以得到 i 和 j 在$\Delta(B')$中是连通的。 因此$B'$是连通的。

（3） $B^{\circ}$是斜对称的， $\exists d_1,\cdots,d_n$， s.t. $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$，根据$B'$的定义，

$$b_{ji}' = b_{ji} + \frac{|b_{jk}|b_{ki} + |b_{ki}|b_{jk}}{2},$$

$$b_{ij}' = b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + |b_{kj}|b_{ik}}{2}.$$

由$d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$我们可以得到：

$$d_k d_i(|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|) = -d_k d_j(|b_{ki}|b_{jk} + b_{ki}|b_{jk}|),$$

$$d_k d_i b_{ij} = -d_k d_j b_{ji}.$$

因此$d_k d_i b_{ij}' = -d_k d_j b_{ji}'$，从而$B'^{\circ}$是斜对称的。

（4）如果$x_1',\cdots,x_n'$ 是代数相关的，则根据变换（mutation）的定义，$x_1',\cdots,x_n'$可以由$x_1,\cdots,x_n$进行表示，从而$x_1,\cdots,x_n$代数相关。然而$(\mathbf{x},B)$为 seed，这与 seed 的定义矛盾。故$(\mathbf{x}',B')$为 seed，证毕。

**命题 1.3** $\mu_k\mu_k(\mathbf{x},B) = (\mathbf{x},B)$ [1]

证明：记$\mu_k(\mathbf{x},B) = (\mathbf{x}',B')$，和$\mu_k(\mathbf{x}',B')$ =$(\mathbf{x}'',B'')$.

（1） 如果 i=k 或者 j=k，则$b_{ij}' = -b_{ij}$且$b_{ij}'' = -b_{ij}'$。因此$b_{ij}'' = b_{ij}$.

否则，

$$b_{ij}'=b_{ij}+\frac{|b_{ik}|b_{kj}+b_{ik}|b_{kj}|}{2}+\frac{|b_{ik}'|b_{kj}'+b_{ik}'|b_{kj}'|}{2}.$$

根据$b_{ik}'=-b_{ik},b_{kj}'=-b_{kj}$可知，上式右端后两项为 0，故$b_{ij}''=b_{ij}$。故$B''=B$。

（2） 如果$s\neq k$，则$x_s''=x_s'=x_s$. 否则

$$x_s''=x_k'^{-1}\prod_{b_{ik}'>0}x_i'^{b_{ik}'}+x_k'^{-1}\prod_{b_{ik}'<0}x_{i'}^{-b_{ik}'}=x_k'^{-1}\prod_{b_{ik}>0}x_i^{b_{ik}}+x_k'^{-1}\prod_{b_{ik}<0}x_{i'}^{-b_{ik}}$$

$$=x_k(\prod_{b_{ik}>0}x_i^{b_{ik}}+\prod_{b_{ik}<0}x_i^{-b_{ik}})^{-1}\prod_{b_{ik}>0}x_i^{b_{ik}}+x_k(\prod_{b_{ik}>0}x_i^{b_{ik}}+\prod_{b_{ik}<0}x_i^{-b_{ik}})^{-1}\prod_{b_{ik}<0}x_i^{-b_{ik}}=x_k=x_s$$

故$x_s''=x_s$。

综合（1）（2），可以得到

$$\mu_k\mu_k(\mathbf{x},B)=(\mathbf{x},B)$$

证毕。

两个 seed$(\mathbf{x},B)$和$(\mathbf{y},C)$是变换等价（mutation equivalent），如果存在一个序列 $(i_1,...,i_t)$，其中$1\le i_j\le n$对任意的 j 都成立，并且

$$\mu_{i_t}\cdots\mu_{i_2}\mu_{i_1}(\mathbf{x},B)=(\mathbf{y},C).$$

在这种情况下，我们记$(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)$。这就诱导出 seed 集合上的等价关系。

对于$(\mathbf{x},B)$，记：

$$\mathcal{X}_{(\mathbf{x},B)}=\bigcup_{(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)}\{y_1,...,y_n\},$$

其中$(\mathbf{y},C)$满足$(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)$。与$(\mathbf{x})B$ 关联的**丛代数**（**cluster algebra**）$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$ 是由$\mathcal{X}_{(\mathbf{x},B)}$生成的$\mathcal{F}$的子代数。其中

$$L=K[x_{n+1}^{\pm1},...,x_p^{\pm1},x_{p+1},...x_m]$$

是多项式环$K[x_{n+1},...,x_m]$在$x_{n+1},...,x_p$的 location。（对于 p=n，令$x_{n+1}\cdots x_p=1$）因此，$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$是$\mathcal{F}$的 K-子代数，由以下元素生成

$$\{x_{n+1}^{\pm1},...,x_p^{\pm1},x_{p+1},...x_m\}\cup\mathcal{X}_{(\mathbf{x},B)}$$

其中$\mathcal{X}_{(\mathbf{x},B)}$ 为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的丛变量。

我们称$(\mathbf{y},C)$ 为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$的 seed，如果$(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)$。在这种情况下，对于任意的 $1\le k\le n$，我们称$(y_k,\mu_{(\mathbf{y},C)}(y_k)$ 为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$的**交换对**（**exchange pair**）。特别的，一个 m-元组 $\mathbf{y}$是丛代数$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的**丛**（**cluster**），所有具有形式$y_1^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_m^{a_m}$（$a_i\ge0$）的单项式为丛代数$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$的**丛单项式**（**cluster monomials**）。

注意到对于$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$ 中所有的丛$\mathbf{y}$，总是有$y_i\equiv x_i$对任意的$n+1\le i\le m$都成立。这些 m-n 个元素为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的**丛常数**（**cluster coefficients**）。若 p=n，则丛代数中不存在可以丛常数。

**命题 1.4** 若$(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)$，则$\mathcal{A}(\mathbf{y},C)=\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$。

证明：$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$是$\mathcal{F}$的 K-子代数，由以下元素生成

$$\{x_{n+1}^{\pm1},...,x_p^{\pm1},x_{p+1},...x_m\}\cup\mathcal{X}_{(\mathbf{x},B)}$$

我们只需证明$\mathcal{X}(\mathbf{x},B)=\mathcal{X}(\mathbf{y},C)$。

根据定义可知，

$$\mathcal{X}(\mathbf{x},B)=\cup_{(\mathbf{z},D)\sim(\mathbf{x},B)}\{z_1,\cdots,z_n\}$$
$$\mathcal{X}(\mathbf{y},C)=\cup_{(\mathbf{z},D)\sim(\mathbf{y},C)}\{z_1,\cdots,z_n\}$$

由于 ~为等价关系，因此下标的集合完全相同，故$\mathcal{X}(\mathbf{x},B)=\mathcal{X}(\mathbf{y},C)$。证毕。

**定义 1.5 无环丛代数.** 设$(\mathbf{x},B)$为$\mathcal{F}$中的 seed，其中$B=(b_{ij})$。$\sum(B)$ 为节点 1 到 m 的箭图，其中$i\to j$（$1\le i,j\le n$）当且仅当$b_{ij}>0$。因此$\sum(B)$ 编码了矩阵 B 的主要部分$B^{\circ}$中元素的符号信息。

Seed$(\mathbf{x},B)$和 B 被称为无环的，如果 $\sum(B)$不含非平凡的定向环。丛代数$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$是无环的如果存在一个 seed$(\mathbf{y},C)$是无环的，其中$(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)$。

**定义 1.6 斜对称矩阵与箭图.** $B=(b_{ij})$为$M_{m,n}$（$\mathcal{Z}$）的矩阵，其中$B^{\circ}$是斜对称的。$\Gamma(B)$为节点 1 到 m 的箭图，其中$b_{ij}$决定了箭向$i\to j$当且仅当$b_{ij}>0$，$-b_{ij}$决定了箭向$j\to i$当且仅当$b_{ij}<0$。根据$\Gamma(B)$，我们可以还原矩阵 B 的主要信息。

**定理 1.7 Laurent 现象.**[4]对于$(\mathbf{x},B)$ ，令：

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}=K[x_1^{\pm1},...,x_n^{\pm1},x_{n+1}^{\pm1},...,x_p^{\pm1},x_{p+1},...x_m]$$

为$K[x_1,...,x_m]$在$x_1x_2\cdots x_p$上的 location，令：

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x},\mathcal{Z}}=K[x_1^{\pm1},...,x_n^{\pm1},x_{n+1},...,x_m]$$

$\mathcal{Z}[x_1,...,x_m]$在$x_1x_2\cdots x_n$上的 location。可$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$将$\mathcal{L}_{\mathbf{x},\mathcal{Z}}$ 视为$\mathcal{F}$的子环。

假设 y 为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的丛变量。我们有：

$$y\in\bigcap_{(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)}\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathcal{Z}}$$
$$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)\subseteq\bigcap_{(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)}\mathcal{L}_{\mathbf{y}}$$

**注记 1.8** [3]首先介绍三个 K-代数。

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},B)=K[x_1,x_{1'},...,x_n,x_{n'},x_{n+1}^{\pm1},...,x_p^{\pm1},x_{p+1},...x_m],$$
$$\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{x},B)=\bigcap_{(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)}\mathcal{L}_{\mathbf{y}},\ \mathcal{U}(\mathbf{x},B)=\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\cap\bigcap_{k=1}^{n}\mathcal{L}_{\mu_k(\mathbf{x})}.$$

我们使用记号$x_k'=\mu_k(\mathbf{x})_k$ $(1\le k\le n)$. 这三个 K-代数分别为成为：the lower bound，the upper cluster algebra，the upper bound。

我们可以很容易得到以下关系：

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},B)\subseteq\mathcal{A}(\mathbf{x},B)\subseteq\bar{A}(\mathbf{x},B)\subseteq\mathcal{U}(\mathbf{x},B).$$

其中第一、三个不等关系很容易由它们的定义得出，第二个不等关系是 Laurent 现象的推论。

**定理 1.9** [3] K=$\mathbb{Z}$，则下列命题成立：

（1）如果 seed$(\mathbf{x},B)$ 是无环的，则 $\mathcal{L}(\mathbf{x},B)=\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$.

（2）如果 B 满秩且 p=m，则A(x, B)的 seed 两两互素并且 $\bar{A}(\mathbf{x},B)=\mathcal{U}(\mathbf{x},B)$ 。

（3）$(\mathbf{x},B)$ 互素且无环，则 $\mathcal{L}(\mathbf{x},B)=\mathcal{A}(\mathbf{x},B)=\bar{A}(\mathbf{x},B)=\mathcal{U}(\mathbf{x},B)$ 。

**注记 1.10** 定义多项式 $f_j=\prod_{b_{ik}>0}x_i^{b_{ik}}+\prod_{b_{ik}<0}x_i^{-b_{ik}}$，我们称 $f_j$ 为初始交换多项式（initial exchange polynomials）. 我们称 seed $(\mathbf{y},C)$ 是互素的当且仅当对所有的 $f_k$（$1\le k\le n$）为多项式环 $K[x_i:1\le i\le m]$ 中两两互素的元素。

## 2.2 丛代数中的可逆元

**引理 2.1** [1]对于 seed$(\mathbf{x},B)$ 我们有：

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{\times}=\{\lambda x_1^{a_1}\cdots x_p^{a_p}\mid\lambda\in K^{\times},a_i\in\mathbb{Z}\}.$$

证明：$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}=K[x_1^{\pm1},...,x_n^{\pm1},x_{n+1}^{\pm1},...,x_p^{\pm1},x_{p+1},...x_m]$，K 为域且 char（K）=0 或者 $K=\mathbb{Z}$，很显然 $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ 中的可逆元均具有形式 $\lambda x_1^{a_1}\cdots x_p^{a_p},\lambda\in K^{\times},a_i\in\mathbb{Z}$ 。

**定理 2.2** [1]对于 seed$(\mathbf{x},B)$ 我们有：

$$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}=\{\lambda x_{n+1}^{a_{n+1}}\cdots x_p^{a_p}\mid\lambda\in K^{\times},a_i\in\mathbb{Z}\}.$$

证明: 根据 Laurent 现象，

$$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)\subseteq\cap_{(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)}\mathcal{L}_{\mathbf{y}},$$

从而得到 $\forall u\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$， $u\in\mathcal{L}_{\mathbf{y}}$ 对 $\forall\mathbf{y}$ 成立。根据引理 2.1， $u=\lambda y_1^{a_1}\cdots y_s^{a_s}\cdots y_p^{a_p}$，$a_i\in\mathbb{Z}$， $\lambda\in K^{\times}$.

若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，我们可以得到矛盾。

若 $\exists1\le s\le n$，s.t. $a_s\neq0$，$y_s^*=\mu_{(\mathbf{y},C)}(y_k)$. 根据 Laurent 现象，存在 $b_1,\cdots,b_p\in\mathbb{Z}$ 和 $\nu\in K^{\times}$ s.t.

$$u=\nu y_1^{b_1}\cdots y_{s-1}^{b_{s-1}}(y_s^*)^{b_s}y_{s+1}^{b_{s+1}}\cdots y_p^{b_p}$$

不失一般性，假设 $b_s\ge0$.

若 $b_s=0$，$\lambda y_1^{a_1}\cdots y_s^{a_s}\cdots y_p^{a_p}-\nu y_1^{b_1}\cdots y_{s-1}^{b_{s-1}}(y_s^*)^{b_s}y_{s+1}^{b_{s+1}}\cdots y_p^{b_p}=0$，等式左边依赖于 $x_s$ 因为 $b_s=0$ 且 $a_s\neq0$ 。这与 $y_1,\cdots,y_m$ 的代数无关性矛盾。

若 $b_s>0$，显然 $b_s\ge1$，故

$$\lambda y_1^{a_1}\cdots y_s^{a_s}\cdots y_p^{a_p}-\nu y_1^{b_1}\cdots(M_1+M_2)^{b_s}\cdots y_p^{b_p}=0$$

在等式左边合并同类项后至少存在 $b_s$ 个丛单项式。这与 $y_1,\cdots,y_m$ 的代数无关性矛

盾。

**推论 2.3** [1]对任意 seed$(\mathbf{x},B)$，下列命题成立：

（1）设 y 和 z 为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的非零元素。则 y 和 z 相伴当且仅当存在$a_{n+1},\cdots,a_p\in\mathbb{Z}$和$\lambda\in K^{\times}$，使得$y=\lambda x_{n+1}^{a_{n+1}}\cdots x_p^{a_p}z$。

（2）设 y 和 z 为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的丛变量，则 y 和 z 相伴当且仅当 y=z。

证明：第一个结论的证明是显然的，直接利用定理 2.2 并结合环论中的相伴定义可以得到。

下面证明第二个结论。假设$\mathbf{y}$和$\mathbf{z}$为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$的两个丛，且$y_i$和$z_j$是相伴的，$1\le i,j\le n$。根据推论的第一部分可知，存在$a_{n+1},\cdots,a_p\in\mathbb{Z}$和$\lambda\in K^{\times}$ s.t. $y_i=\lambda x_{n+1}^{a_{n+1}}\cdots x_p^{a_p}z_j$。根据 Laurent 现象，存在$b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{Z}$和$f\in\mathbb{Z}[z_1,\cdots,z_m]$ s.t. $y_i=\dfrac{f}{z_1^{b_1}\cdots z_n^{b_n}}$且 f 不被$z_1,\cdots,z_n$整除。显然$\lambda\in\mathbb{Z}$，$a_{n+1},\cdots,a_p\ge 0$.

另一方面，我们可以得到$z_j=\lambda^{-1}x_{n+1}^{-a_{n+1}}\cdots x_p^{-a_p}y_i$。通过同样的论述，我们可以得到$-a_{n+1},\cdots,-a_p\ge 0$和$\lambda^{-1}\in\mathbb{Z}$。从而$y_i=z_j$或者$y_i=-z_j$。存在$f,g\in\mathbb{N}[y_1,\cdots,y_m]$ s.t. $z_j=\dfrac{f}{g}$。假设$y_i=-z_j$，则$f+y_ig=0$，这与$y_1,\cdots,y_m$的代数无关性矛盾。证毕。

从代数$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中两个丛$\mathbf{y}$和$\mathbf{z}$是不相伴的如果不存在$1\le i,j\le n$使得$y_i$和$z_j$是相伴的。

**推论 2.4** [1]对于丛代数$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中两个丛$\mathbf{y}$和$\mathbf{z}$，下列命题等价：

（1）丛$\mathbf{y}$和$\mathbf{z}$是不交的。

（2）丛$\mathbf{y}$和$\mathbf{z}$是不相伴的。

证明：两个命题的等价性可以由推论 2.3 得出。

## 2.3 丛变量的不可约性

**定理 3.1** [1]设$(\mathbf{x},B)$为$\mathcal{F}$的 seed，则$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的丛变量都是不可约的。

证明：假设$(\mathbf{y},C)$为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的 seed，根据定理 2.2，所有的丛变量都为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的不可逆元。

假设$y_k$为可约元，其中$1\le k\le n$，则存在$y_k'$和$y_k''$为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的不可逆元，使得$y_k=y_k'y_k''$。因为$y_k$为$\mathcal{L}_{\mathbf{y}}$中的可逆元，所以$y_k'$和$y_k''$均为$\mathcal{L}_{\mathbf{y}}$中的可逆元。根据引理 2.1，存在$a_i,b_i\in\mathbb{Z}$和$\lambda',\lambda''\in K^{\times}$使得：

$$y_k'=\lambda' y_1^{a_1}\cdots y_s^{a_s}\cdots y_p^{a_p}$$
$$y_k''=\lambda'' y_1^{b_1}\cdots y_s^{b_s}\cdots y_p^{b_p}.$$

因为$y_k=y_{k'}y_{k''}$，显然$a_s+b_s=0$对所有的$s\ne k$且$a_k+b_k=1$。

假定$a_s=0$对于所有的$1\le s\le n$且$s\ne k$都成立，则$y_k'=\lambda' y_k^{a_k}\cdots y_{n+1}^{a_{n+1}}\cdots y_p^{a_p}$和

$y_k{}'' = \lambda'' y_k^{b_k} \cdots y_{n+1}^{b_{n+1}} \cdots y_p^{b_p}$ .

若 $a_k \le 0$，则 $y_k{}'$ 是 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 中的可逆元；如果 $a_k \ge 0$，则 $y_k{}''$ 是 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 中的可逆元。于是我们就得到了矛盾。

假定 $a_s \ne 0$ 对于 $1 \le s \le n$ 且 $s \ne k$ 成立。记 $y_s{}^* = \mu_{(\mathbf{y},C)}(y_s)$，于是我们可以得到：

$$(y_s{}^*) = M_1 + M_2$$

其中

$$M_1 = y_s^{-1} \prod_{c_{is}>0} y_i^{c_{is}}$$

和

$$M_2 = y_s^{-1} \prod_{c_{is}<0} y_i^{-c_{is}}$$

因为 $s \ne k$，我们可以得到 $y_k$、$y_k{}'$ 和 $y_k{}''$ 均为 $\mathcal{L}_{(\mu_s(\mathbf{y},C))}$ 中的可逆元，因此根据引理 2.1，存在 $c_i, d_i \in \mathbb{Z}$ 和 $\nu', \nu'' \in K^\times$ 使得：

$$y_k{}' = \nu' y_1^{c_1} \cdots y_{s-1}^{c_{s-1}} (y_s{}^*)^{c_s} y_{s+1}^{c_{s+1}} \cdots y_p^{c_p}\text{，}\ y_k{}'' = \nu'' y_1^{d_1} \cdots y_{s-1}^{d_{s-1}} (y_s{}^*)^{d_s} y_{s+1}^{d_{s+1}} \cdots y_p^{d_p}.$$

显然 $c_s + d_s = 0$，不失一般性，可假设 $c_s \ge 0$。若 $c_s = 0$，我们可以得到：

$$y_k{}' = \lambda' y_1^{a_1} \cdots y_s^{a_s} \cdots y_p^{a_p} = \lambda' y_1^{c_1} \cdots y_s^{0} \cdots y_p^{c_p}.$$

我们可以得到矛盾，因为 $a_s \ne 0$，这与 $y_1, \dots, y_m$ 代数无关矛盾。

若 $c_s > 0$，则

$$\begin{aligned} y_k{}' &= \lambda' y_1^{a_1} \cdots y_{s-1}^{a_{s-1}} y_s^{a_s} y_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots y_p^{a_p} = \nu' y_1^{c_1} \cdots y_{s-1}^{c_{s-1}} (y_s{}^*)^{c_s} y_{s+1}^{c_{s+1}} \cdots y_p^{c_p} \\ &= \nu' y_1^{c_1} \cdots y_{s-1}^{c_{s-1}} (M_1 + M_2)^{c_s} y_{s+1}^{c_{s+1}} \cdots y_p^{c_p}. \end{aligned}$$

易知 $M_1 \ne M_2$。因为 Laurent 单项式 $y_k{}'$ 为 $c_s + 1 \ge 2$ 项与 $y_1, \dots, y_m$ 有关的单项式，这与 $y_1, \dots, y_m$ 的代数无关性矛盾。

## 2.4　一般丛代数不唯一分解的充分条件

对于矩阵 $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ 和 $1 \le i \le n$，记 $c_i(A)$ 为 A 的第 i 列。

**命题 4.1** [1]设 $(\mathbf{x}, B)$ 为 $\mathcal{F}$ 中的 seed。若 $c_k(B) = c_s(B)$ 或者 $c_k(B) = -c_s(B)$ 对于 $k \ne s$ 且 $b_{ks} = 0$ 成立，则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 不唯一分解。

证明：记 $(\mathbf{y}, C) = \mu_k(\mathbf{x}, B)$ 和 $(\mathbf{z}, D) = \mu_s(\mathbf{y}, C)$，我们可以得到：

$$y_k = z_k = x_k^{-1}(M_1 + M_2),$$

其中

$$M_1 = \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} \quad M_2 = \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}.$$

根据变换法则，$c_k(C) = -c_k(B)$。为 $b_{ks} = 0$，我们可以得到 $c_s(C) = c_s(B)$。于是可以得到：$c_s(B) = c_k(B)$ 或者 $c_s(B) = -c_k(B)$，因此

$$z_s = x_s^{-1}(M_1 + M_2).$$

从变量 $x_k, x_s, z_k, z_s$ 两两不同，于是它们两两不相伴，且 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 中不可约元。显然，我们有：

$$x_k z_k = x_s z_s.$$

因此 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 为不唯一分解环。

**命题 4.2** [2]如果存在两个不同的下标 $i, j \in \{1, \cdots, n\}$，使得 $f_i = f_j$，则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 不是唯一分解环。

证明：根据命题 4.1，我们只需要证明 $c_i(B) = c_j(B)$ 或者 $c_i(B) = -c_j(B)$，和 $b_{ij} = 0$.

$$f_i = \prod_{b_{ki}>0} x_k^{b_{ki}} + \prod_{b_{ki}<0} x_k^{-b_{ki}} \text{，和 } f_j = \prod_{b_{kj}>0} x_k^{b_{kj}} + \prod_{b_{kj}<0} x_k^{-b_{kj}}.$$

$f_i = f_j \Rightarrow (1) b_{ki} = b_{kj}$ 对任意的 k 都成立；或者（2）$b_{ki} = -b_{kj}$ 对任意的 k 都成立。

若 $b_{ij} \neq 0$，则 $f_j$ 包含 $x_i$，然而 $f_i$ 不包含，故 $b_{ij} = b_{ji} = 0$。证毕。

**命题 4.3** [1]设 $(\mathbf{x}, B)$ 为 $\mathcal{F}$ 中的一个 seed。假设存在某个 $1 \le k \le n$ 使得 $X^d + Y^d$ 在 K[X，Y]中可约，其中 $d = gcd(b_{1k}, ..., b_{mk})$ 为 $b_{1k}, ..., b_{mk}$ 的最大公约数，则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 不唯一分解。

证明：假设 $X^d + Y^d = f_1 \cdots f_t$，其中 $f_j$ 为 K[X，Y]中的不可约多项式。 $X^d + Y^d$ 在 K[X,Y]中可约，故我们有 $t \ge 2$。记 $y_k = \mu_{(\mathbf{x},B)k}(x)$。对应的变换关系（mutation relation）为：

$$x_k y_k = \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}} = M^d + N^d = \prod_{j=1}^{t} f_j(M, N),$$

其中

$$M = \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}/d}$$

$$N = \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}/d}.$$

对于每个 $f_j(M, N)$，它都被包含在 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 中。假设 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 为唯一分解的，我们可以由此得到矛盾。根据定理 2.2，所有的 $f_j(M, N)$ is 都是 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 中不可逆的元素。因为 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 为唯一分解的，因此 $f_j(M, N)$ 等于 $f_{1j} \cdots f_{a_j j}$，其中 $f_{ij}$ 为 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 中不可约元，且 $a_j \ge 1$。根据定理 3.1，从变量 $x_k$ 和 $y_k$ 是 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 中不可约元。因此有 $a_1 + \cdots + a_t = 2$。因为 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 是唯一分解的，故 t=2 且 $a_1 = a_2 = 1$，从而 $f_1(M, N)$ 和 $f_2(M, N)$ 均为 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 中的不可约元，且 $x_k y_k = f_1(M, N) f_2(M, N)$。对于 j=1、2，$x_k$ 和 $f_j(M, N)$ 不可能相伴，因为 $f_j(M, N)$ 是由 $\{x_1, ..., x_m\} \backslash \{x_k\}$ 的 K-线性组合的单项式。由此我们可以得到 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 不唯一分解性。

**命题 4.4** [2] 如果存在某个下标 $i \in \{1, \cdots, n\}$，使得 $f_i$ 在 $K[x_i : 1 \le i \le m]$ 中可约，则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 不为唯一分解的。

证明：$f_i$ 是可约的，考虑变换关系（mutation relation）：

$$x_i x_i' = f_i = g_1(x_1, \cdots, x_n) g_2(x_1, \cdots, x_n)$$

其中$g_1(x_1,\cdots,x_n)$和$g_2(x_1,\cdots,x_n)$均与$x_i$有关，且均属于$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$。

如果$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$为唯一分解的，则$g_1(x_1,\cdots,x_n)$和$g_2(x_1,\cdots,x_n)$均为不可约元，且$g_1(x_1,\cdots,x_n)$和$g_2(x_1,\cdots,x_n)$分别与$x_i$、$x_i'$中的一者相伴。不失一般性，我们假设$g_1(x_1,\cdots,x_n)$与$x_i$相伴。于是我们可以得到$x_i=\lambda g_1(x_1,\cdots,x_n)$，其中$\lambda\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}$。从而我们可以得到等式$\lambda g_1(x_1,\cdots,x_n)-x_i=0$，这与$x_1,\cdots,x_n$的代数无关性矛盾。因此丛代数不唯一分解。证毕。

## 2.5　一般丛代数唯一分解的充分条件

**定理 5.1** [1]假设$\mathbf{y}$和$\mathbf{z}$为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的不相交的两个丛。U 为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$的唯一分解的子代数，满足：

$$\{y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_n,x_{n+1}^{\pm1},...,x_p^{\pm1},x_{p+1},...,x_m\}\subset U.$$

于是有$U=\mathcal{A}(\mathbf{x},B)=U(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

证明：假设$u\in U(\mathbf{y},\mathbf{z})=\mathcal{L}_{\mathbf{y}}\cap\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$，于是可以得到

$$u=\frac{f}{y_1^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_p^{a_p}}=\frac{g}{z_1^{b_1}z_2^{b_2}\cdots z_p^{b_p}},$$

其中 f 是关于$y_1,...,y_m$的多项式，g 是关于$z_1,...,z_m$的多项式，且$a_i,b_i\geq 0$对任意的$1\leq i\leq p$都成立。根据 Laurent 现象，可以得到$u\in U$。

由于$y_i,z_i\in U$对任意的$1\leq i\leq m$均成立，我们可以得到 U 中的等式

$$fz_1^{b_1}z_2^{b_2}\cdots z_n^{b_n}z_{n+1}^{b_{n+1}}\cdots z_p^{b_p}=gy_1^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_n^{a_n}y_{n+1}^{a_{n+1}}\cdots y_p^{a_p}$$

根据定理 3.1，丛变量$y_i$和$z_i$（$1\leq i\leq n$）均为$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的不可约元，从而它们也是$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$的子代数 U 中的不可约元。元素 $y_{n+1}^{a_{n+1}}\cdots y_p^{a_p}$和$z_{n+1}^{b_{n+1}}\cdots z_p^{b_p}$均为 U 中的单位。

从$\mathbf{y}$和$\mathbf{z}$为不相交的，根据推论 2.4，可以得到$y_i$和$z_j$为不相伴元，这对任意的$1\leq i,j\leq n$均成立。因此，根据 U 的唯一分解性，$y_1^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_n^{a_n}$在 U 中整除 f，i.e.，存在某个$h\in U$，使得

$$f=hy_1^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_n^{a_n}.$$

从而

$$u=\frac{f}{y_1^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_p^{a_p}}=\frac{hy_1^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_n^{a_n}}{y_1^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_p^{a_p}}=\frac{h}{y_{n+1}^{a_{n+1}}\cdots y_p^{a_p}}=hy_{n+1}^{-a_{n+1}}\cdots y_p^{-a_p}.$$

$h\in U$和$y_{n+1}^{\pm1},...,y_p^{\pm1}\in U$，从而可以得到$u\in U$，故$U(\mathbf{y},\mathbf{z})\subset U$.

显然$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)\subset U(\mathbf{y},\mathbf{z})$，且$U\subset\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$。证毕。

## 2.6 无环丛代数唯一分解的充分条件

### 2.6.1 关于丛代数的一些假设

假定$m \geq n \geq 1$为整数，其中$m \geq 2$且 m=p。$\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$是由初始 seed $(\mathbf{x}, B)$ 生成的丛代数。这里 B 是 m × n 维整数矩阵，其中$B^{\circ}$为斜对称矩阵。在本文的余下部分中，我们假设一下条件成立：

（1）初始 seed $(\mathbf{x}, B)$ 是无环 seed。

（2）交换多项式 $f_i$（$1 \leq i \leq n$）两两互素。

（3）每一个交换多项式 $f_i$（$1 \leq i \leq n$）均为不可约多项式。

由定理 1.9，丛代数$\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$等于它的 the upper bound 和 the lower bound。

### 2.6.2 一类理想的定义及其代数性质

**定义 6.1** 对所有的$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$定义理想

$$I_i = (x_i, f_i) \subseteq K[x_1, x_2, \ldots, x_m].$$

引入简略记号$R = K[x_i : 1 \leq i \leq m]$表示多项式环。对于每个$1 \leq i \leq n$，我们记$K[x_1, \ldots, \overline{x_l}, \ldots, x_m]$为$R_i$。

注意到 $f_i \in R_i$，因为对角元素$b_{ii}$为 0 对任意$1 \leq i \leq n$都成立。

**命题 6.2** [2] 假设$1 \leq i \leq n$和$a_i \in \mathbb{N}$. 设$P \in R$为多项式，可以表示为 $P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x_i^k$，其中$P_k \in R_i$，则$P \in I_i^{a_i}$成立当且仅当 $f_i^{a_i - k} \in R_i$整除$P_k \in R_i$对任意的$0 \leq k \leq a_i$均成立。

证明：这个命题的证明不再细数，下面只证明这个命题的对偶命题。

更进一步地，我们有$x_i \in I_j$对任意的$i \neq j$均成立。对于命题 6.2 中的多项式$P \in R$，通常将$P_k$记为$[x_i^k]P$。

显然对于任意非零多项式$P \in R$和任意$1 \leq i \leq n$，存在最大的$a_i \in \mathbb{N}$ s.t. $P \in I_i^{a_i}$。定义$m_i(P)$为唯一的自然数使得$P \in I_i^{m_i(P)} \setminus I_i^{m_i(P)+1}$。更进一步地，我们定义

$$M(P) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i(P)} \in R.$$

**命题 6.3** [2] 如果 $f_i$ 具有形式 $f_i = x_l + M_i$ 对某个变换下标 $l \neq i$ 成立，$R \in K[x_1, \cdots, \overline{x_l}, \cdots, x_m, f_i]$且我们可以将每个$P \in R$表示成$P = \sum_{r=0}^{\infty} A_r f_i^r$，其中$\mathrm{A_r} \in K[x_1, \ldots, \overline{x_l}, \ldots, x_m]$。

在这种表示下，$P \in I_i^{a_i}$对某个$a_i \geq 0$成立当且仅当$x_i^{a_i - r} \mid A_r$对所有的$0 \leq r \leq a_i$均成立。

证明：

$$f_i = x_l + M_i,$$

则

$$x_l = f_i - M_i .$$

$$R = K[x_1, \cdots, \overline{x_l}, \cdots, x_m, x_l] = K[x_1, \cdots, \overline{x_l}, \cdots, x_m, f_i - M_i] = K[x_1, \cdots, \overline{x_l}, \cdots, x_m, f_i] .$$

$P \in R$，所以 P 具有形式

$$P = \sum_{r=0}^{\infty} A_r f_i^r$$

其中 $A_r \in K[x_1, \cdots, \overline{x_l}, \cdots, x_m]$． $P \in I_i^{a_i}$ 当且仅当 $P = \sum_{s=0}^{a_i} B_s f_i^s x_i^{a_i - s}$，其中 $B_s \in R$，对所有的 s，$B_s$ 具有形式

$$B_s = \sum_{t=0}^{\infty} B_{st} f_i^t ,$$

其中 $B_{st} \in R_l$，故

$$P = \sum_{s=0}^{a_i} \sum_{t=0}^{\infty} B_{st} f_i^{s+t} x_i^{a_i - s} .$$

比较 P 的两种表示，我们可以得到

$$A_r = \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{r-s} B_{st} x_i^{a_i - s}$$

对任意的 $0 \le r \le a_i$ 都成立，从而等价于 $x_i^{a_i - r} \mid A_r$ 对任意的 $0 \le r \le a_i$ 均成立。

**命题 6.4** [2] 对所有的变换下标（mutation indices）$i \neq j$， 初始交换多项式 $f_i$ 不是理想 $I_j$ 中的元素。

**引理 6.5** [2] 假设 $1 \le i \le n$ 且 $a_i \ge 1$ 为自然数。 $P, Q \in R$ 为多项式满足 $PQ \in I_i^{a_i}$，则存在 $0 \le b_i \le a_i$，使得 $P \in I_i^{b_i}$， $Q \in I_i^{a_i - b_i}$ 。

理想 $I \subseteq R$ 的根理想 $\sqrt{I} = \{r \in R : r^k \in R \quad k \in \mathbb{N}\}$ 。

理想 $I \subseteq R$ 成为初级理想如果对 $P, Q \in R$ 有以下条件成立：$PQ \in I$，则 $P \in I$ 或 $Q \in \sqrt{I}$ 。在这种情况下，根理想 $\sqrt{I}$ 为素理想，且 I 被称为 $\sqrt{I}$ -初级理想。

**引理 6.6** [2] 理想 $I_i$ 为素理想对任意的 $1 \le i \le n$ 均成立。

**引理 6.7** [2] 理想 $I_i^{a_i}$ 为初级理想对任意的 $1 \le i \le n$ 和自然数 $a_i \ge 1$ 均成立。 $I_i^{a_i}$ 的根理想等于 $I_i$ 。

**引理 6.8** [2] 假定 $i \in \{1, 2, ..., n\}$ 是源或汇，且 $j \in \{1, 2, ..., n\}$ 和 i 相邻，则理想 $I_i$ 和 $I_j$ 互素。

### 2.6.3 丛代数的另一种表述

Laurent 现象和丛代数与其 the lower bound 相等保证了丛代数 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 可以表示成下列集合的并：

**注记 6.9** [2] 我们有

$$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)=\bigcup_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n}\{\frac{\lambda P}{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}:P\in I_1^{a_1}I_2^{a_2}\cdots I_n^{a_n}.\lambda\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}\}.$$

我们引入多重指标。

$$\mathbf{I}^{\mathbf{a}}=I_1^{a_1}I_2^{a_2}\cdots I_n^{a_n}$$
$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}}=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$$
$$\mathbf{f}^{\mathbf{a}}=f_1^{a_1}f_2^{a_2}\cdots f_n^{a_n}$$

其中

$$\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{N}^n$$

定义$\geq$为$\mathbb{N}$上的关系，i.e.，我们记$\mathbf{a}\geq\mathbf{b}$当且仅当$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n$满足$a_i\geq b_i$对任意的$1\leq i\leq n$均成立。

### 2.6.4 基于理想的分解

假设$I,J\subset R$为两个理想，$IJ$为它们的交$I\cap J$的子集，i.e.，$IJ\subseteq I\cap J$，这两个集合通常情况下不相等，我们假设下列猜想成立：

**猜想 6.10** [2] 对所有的$\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n$，我们有$\mathbf{I}^{\mathbf{a}}=I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap...\cap I_n^{a_n}$。

**注记 6.11** [2] 如果猜想成立，注记 3.9 可表述为

$$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)=\bigcup_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n}\{\frac{\lambda P}{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}:P\in I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap...\cap I_n^{a_n}.\lambda\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}\}.$$

**注记 6.12** [2] 对于所有的$\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n$，定义集合

$$S(\mathbf{a})=\{P\in I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap...\cap I_n^{a_n}:x_i\nmid P\ if\ 1\leq i\leq n,a_i\neq 0\}$$

如果猜想对所有的$\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n$均成立，我们可以得到分解

$$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)=\bigcup_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n}\frac{\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}S(\mathbf{a})}{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}.$$

### 2.6.5 判别法则

**定理 6.13** [2] 若$\mathbf{I}^{\mathbf{a}}=I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap...\cap I_n^{a_n}$对所有的$\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n$成立，则$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$为唯一分解的，且$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的所有不可约元为：

$$(\{\lambda x_i:1\leq i\leq n,\lambda\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}\}\cup\{\frac{\lambda P}{M(P)}:P\in R\text{不可约},\lambda\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}\}\setminus\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}.$$

证明：假设$\frac{\lambda P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}$ （$\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n$和$\lambda\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}$）为丛代数$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$中的元素。不失一般性，假设$x_i\nmid P$对任意的$i\in\{n+1,n+2,...,m\}$均成立。假设 P=FG 为可约多项式，其中$F,G\in R\setminus\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}$。我们讨论以下两种情况。

若$P=x_iQ$（$1\leq i\leq n$），根据$S(\mathbf{a})$的定义和$P\in S(\mathbf{a})$，$a_i=0$，$Q\in I^{\mathbf{a}}$，且

$$\frac{\lambda P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}=\frac{\lambda Q}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}x_i.$$

为两个丛元素的乘积（根据注记 6.9）元素不可能为不可约元素，除非 $\frac{\lambda Q}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}$。

另一种情况下，多项式 P 不被任意 $x_i$ 整除，则根据引理 6.5，存在序列 $\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^n$，$\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$ s.t. $F\in I^{\mathbf{b}}$ 和 $G\in I^{\mathbf{c}}$。从而

$$\frac{\lambda P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}=\frac{\lambda F}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}}}\frac{G}{\mathbf{x}^{\mathbf{c}}}$$

为 $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$ 中两个不可逆元素的乘积。

在两种情况下，$\frac{\lambda P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}$ 不可能为 $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$ 中的不可约元素。假设 $P\in R$ 为不可约多项式。若 $P\in S(\mathbf{a}')$ 对于某个 $\mathbf{a}'\geq\mathbf{a}$ 成立，则 $\frac{\lambda P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}=\frac{\lambda P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}'}}\mathbf{x}^{\mathbf{a}'-\mathbf{a}}$ 为 $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$ 中两个不可逆元的乘积。这就得到了所有的不可约丛代数元素，若不与初始丛变量相伴，则具有形式 $\frac{\lambda P}{M(P)}$，其中 $P\in R$ 为不可约多项式且不被任意 $x_i(1\leq i\leq m)$ 整除，$\lambda\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}$.

上述证明保证了所有不可约的丛代数元素都被指定的集合包含。另一方面，我们需要证明集合中的所有元素都是不可约元素。初始丛代数变量为不可约元。假定 $P\in S(\mathbf{a})$ 为不可约多项式且不被任意 $x_i$ 整除。更近一步，假定 $P\notin S(\mathbf{a}')$ 对所有的序列 $\mathbf{a}'\geq\mathbf{a}$ 均成立。考虑下列因式分解

$$\frac{\lambda P}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}=\frac{\mu F}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}}}\frac{\nu G}{\mathbf{x}^{\mathbf{c}}}$$

其中 $F\in S(\mathbf{b})$，$Q\in S(\mathbf{c})$ 对于某些序列 $\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{N}^n$ 成立，$\mu\nu\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}$。

首先注意到多项式 F 和 G 都不被任意 $x_i$（$1\leq i\leq n$）整除。特别地，不失一般性，我们可以假设它们不被任意 $x_i$（$n+1\leq i\leq m$）整除。 $P=\alpha FG$，$\alpha\in K^{\times}$。根据 P 的不可约性，我们知道 F 或者 G，不妨设 F 是常数。但是所有的理想 $I_i$（$1\leq i\leq n$）不包含 1，从而 $\mathbf{b}=\mathbf{0}$，$\frac{\mu F}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}}}\in\mathcal{A}(\mathbf{x},B)^{\times}$。定理的第二部分证毕。

为了证明唯一分解性，我们假设有两个分解

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\frac{P_1}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}}\frac{P_2}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}_2}}\cdots\frac{P_r}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}_r}}=\mathbf{x}^{\mathbf{b}}\frac{Q_1}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}}\frac{Q_2}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}_2}}\cdots\frac{Q_s}{\mathbf{x}^{\mathbf{b}_s}}$$

其中 $r,s\geq 0$，$P_i\in S(\mathbf{a}_i)$ 和 $Q_j\in S(\mathbf{b}_j)$ 对任意的 $1\leq i\leq r$ 和 $1\leq j\leq s$ 均为不可约多项式。特别的，没有 $P_i$ 和 $Q_j$ 被任意 $x_k$（$1\leq k\leq m$）整除，$M(P_i)=\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i}$，$M(Q_j)=\mathbf{x}^{\mathbf{b}_j}$。

那么 r=s 且 $P_i$ 为 $Q_j$ 的某个排列（只差常数系数）。不失一般性，我们假设 $P_i=Q_i$ 对任意 $1\leq i\leq r$ 均成立，则 $\mathbf{a}_i=\mathbf{b}_i$ 对任意的 i 均成立，从而 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$，故这两种分解是等价的，$\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$ 为唯一分解环。

## 2.7 猜想成立的两个充分条件

**引理 7.1** [2] 假设$\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n$和$\mathbf{I}^{\mathbf{b}}=I_1^{b_1}\cap I_2^{b_2}\cap\cdots\cap I_n^{b_n}$对任意的$\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n$，$\sum_{i=1}^{n}b_i<\sum_{i=1}^{n}a_i$成立。假设存在下标 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 为源或者汇，s.t. $a_i\neq 0$。假设存在下标$1\leq j\leq n$使得$a_j\neq 0$，且 i 和 j 相邻，则$\mathbf{I}^{\mathbf{a}}=I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap\cdots\cap I_n^{a_n}$。

证明：取任意的$P\in I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap\cdots\cap I_n^{a_n}$.

我们只需要证明$P\in\mathbf{I}^{\mathbf{a}}$。根据命题 6.8，理想$I_i$和$I_j$是互素的，从而$I_i^{a_i}$和$I_j^{a_j}$也是互素的，因此存在多项式$F\in I_i^{a_i}$和$G\in I_j^{a_j}$ s.t. F + G = 1.

根据假设，我们可以得到

$$P\in I_1^{a_1}\cap\cdots\overline{I_i^{a_i}}\cap\cdots\cap I_n^{a_n}=I_1^{a_1}\cdots\overline{I_i^{a_i}}\cdots I_n^{a_n},$$
$$P\in I_1^{a_1}\cap\cdots\overline{I_j^{a_i}}\cap\cdots\cap I_n^{a_n}=I_1^{a_1}\cdots\overline{I_j^{a_i}}\cdots I_n^{a_n},$$
$$P(F+G)=P\in\mathbf{I}^{\mathbf{a}}$$

引理证毕。

在介绍第二个引理之前，引入记号：

$$N(i)=\{j:1\leq j\leq n,b_{ij}\neq 0\}$$

对所有的$i\in\{1,2,\cdots,m\}$。

**引理 7.2** [2] 对于给定的$\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n$。假设存在变换下标（mutation index），s.t. $a_i\neq 0$，$\mathbf{I}^{\mathbf{b}}=I_1^{b_1}\cap I_2^{b_2}\cap\cdots\cap I_n^{b_n}$对所有的$\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n$，$\sum_{i=1}^{n}b_i<\sum_{i=1}^{n}a_i$成立。假设下列两个条件之一成立：

（1）对所有的$j\in N(i)$，有$a_j=0$.

（2）初始交换多项式$f_i$具有形式$f_i=x_k+M_i$。假设对所有的$j\in N(k)\setminus\{i\}$，我们有$a_j=0$。

则：

$$\mathbf{I}^{\mathbf{a}}=I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap\cdots\cap I_n^{a_n}$$

证明：任取$P\in I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap\cdots\cap I_n^{a_n}$。我们需要证明$P\in\mathbf{I}^{\mathbf{a}}$。考虑序列$\mathbf{a}'\in\mathbb{N}^n$，$a_j'=a_j$对任意$j\neq i$成立且$a_i'=0$。根据假设，$a_i\neq 0$蕴含

$$P\in I_1^{a_1}\cap\cdots\overline{I_i^{a_i}}\cap\cdots\cap I_n^{a_n}=\mathbf{I}^{\mathbf{a}'}.$$

假设（1）成立，根据$\mathbf{I}^{\mathbf{a}'}$的定义，将多项式 P 表示为

$$P=\sum_{0\leq\mathbf{b}\leq\mathbf{a}'}P_{\mathbf{b}}x^{\mathbf{b}}f^{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}$$

其中$P_{\mathbf{b}}\in R$。条件（1）可以得到多项式$x^{\mathbf{b}}f^{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}$不依赖于$x_i$。 $P_{\mathbf{b}}=\sum_{r=0}^{\infty}P_{\mathbf{b},r}x_i^r$。根据命题 6.2，$f_i^{a_i-r}\mid\sum_{0\leq\mathbf{b}\leq\mathbf{a}'}P_{\mathbf{b}}x^{\mathbf{b}}f^{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}$对任意的$0\leq r\leq a_i$成立。记$Q_r$ 为两个多项式的商，

则 $f_i^{a_i-r}Q_r \in I_j^{a_j}$ 对任意的变换下标（mutation indices）$j \neq i$ 成立。 命题 6.4 保证了 $f_i \in I_j$ 对任意 $i \neq j$ 成立，从而 $Q_r \in I_j^{a_j}$ 对任意的 $j \neq i$ 成立。我们可以得到 $Q_r \in I_1^{a_1} \cap \cdots \overline{I_i^{a_i}} \cap \cdots \cap I_n^{a_n} = \mathbf{I}^{\mathbf{a}'}$，$x_i^r f_i^{a_i-r} \in I_i^{a_i}$，从而 $x_i^r f_i^{a_i-r} Q_r \in \mathbf{I}^{\mathbf{a}}$，则 $P \in \mathbf{I}^{\mathbf{a}}$。

假设条件（2）成立，证明过程与（1）类似。

$$P = \sum_{0 \le \mathbf{b} \le \mathbf{a}' r \ge 0} P_{\mathbf{b},r} f_i^r x^{\mathbf{b}} f^{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}$$

假设（2）蕴含和中的多项式 $x^{\mathbf{b}} f^{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}$ 不依赖于 $x_k$。根据注记 6.3，可以得到 $x_i^{a_i-r} \mid \sum_{0 \le \mathbf{b} \le \mathbf{a}'} P_{\mathbf{b},r} x^{\mathbf{b}} f^{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}$ 对任意的 $0 \le r \le a_i$ 成立。类似（1）中的论述，可以证明 $P \in \mathbf{I}^{\mathbf{a}}$。
引理证毕。

## 2.8 有限型丛代数与无限型丛代数

根据丛代数中的丛变量（cluster variable）的个数是否有限，将丛代数分为有限型丛代数与无限型丛代数两类。

有定理证明，任意有限型丛代数中存在一个 seed 的箭图为下图之一：

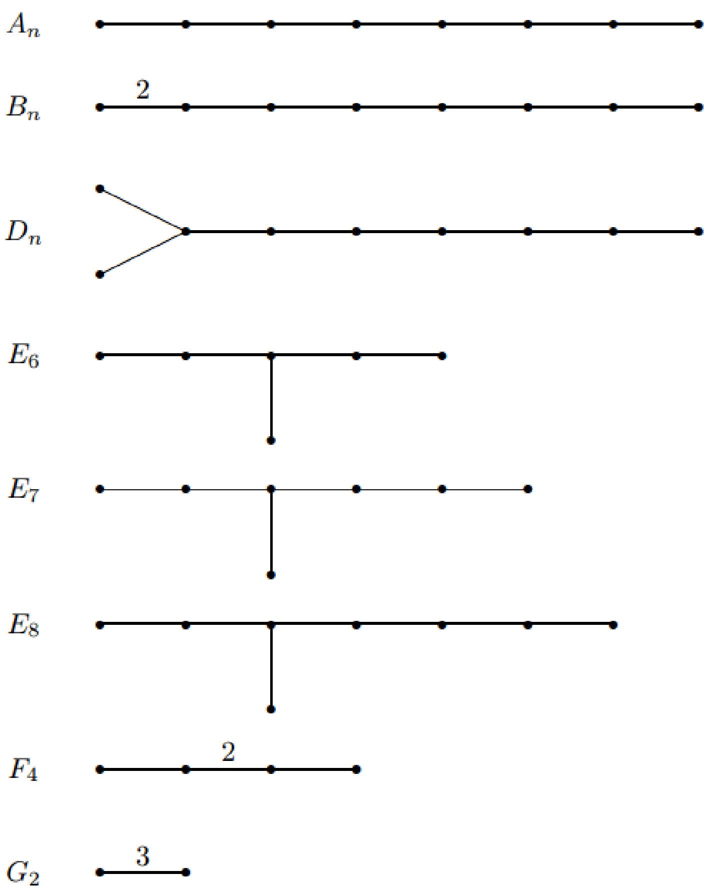


图 8.1 Dynkin 图

若丛代数中存在 seed，使得箭图为上图之一，则该丛代数称为 Dynkin 型丛代数。

因此定理保证了所有有限型丛代数均可由Dynkin型进行分类。本文不考虑Dynkin图中有重边的情况。

在无限性丛代数中，有一类为Euclidean型丛代数，它为无环丛代数。若丛代数中存在一个seed，使得忽略指向的箭图的结构为下面之一，则为Euclidean型丛代数。

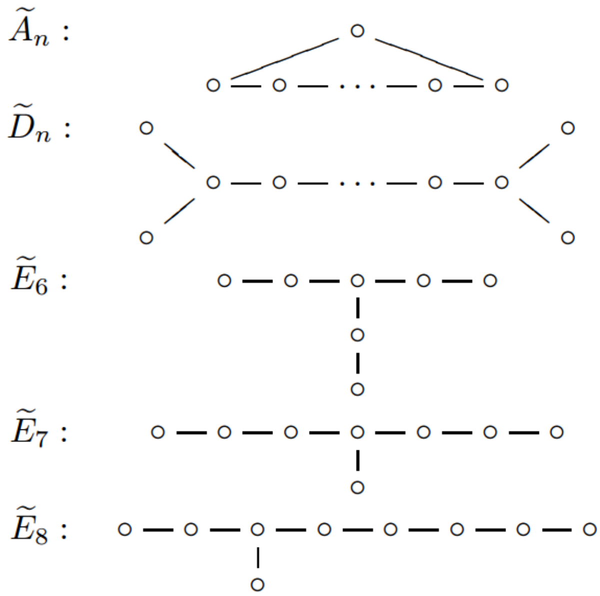


图 8.2 Euclidean 图

下面两节将讨论 Dynkin 和 Euclidean 型丛代数的唯一分解性。

## 2.9 Dynkin 型的唯一分解性

**定理 9.1** 对于 n $\neq 3$， $A_n$ 型的丛代数是唯一分解型，然而对于 n = 3， $A_n$ 型的丛代数不是唯一分解型。对于 $n \geq 4$， $D_n$ 型的丛代数不是唯一分解型。对于 $E_6, E_7, E_8$ 型的丛代数，它们都是唯一分解型。

定理的证明依赖于以下几个命题。

**命题 9.2** [2] $A_3$ 型的丛代数不是唯一分解型， $A_n$ 型的 Dynkin 图如下所示：

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \qquad n-1 \longrightarrow n$$

图 9.1 $A_n$ 的 Dynkin 图

证明：$B = B^{\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$， 则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 是 $A_3$ 的丛代数。根据交换多项式的定义，$f_1 = f_3 = 1 + x_2 \in K[x_1, x_2, x_3]$。由命题 4.1， $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 不为唯一分解的，证毕。

**命题 9.3** [2] 对于 $n \geq 4$， $D_n$ 型的丛代数不为唯一分解的， $D_n$ 型的 Dynkin 图如下

所示：

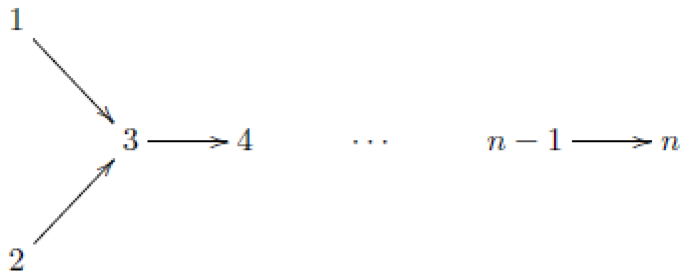


图 9.2 $D_n$ 的 Dynkin 图

证明：假设$1,2 \in Q$是节点 3 的邻接节点，其中节点 3 的度数为 3。则根据交换多项式的定义，$f_1 = f_2 = 1 + x_3$。根据命题 4.2，$\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ 不为唯一分解的，证毕。

**命题 9.4** [2] 假设$n \neq 3$，设 Q 为$A_n$的 Dynkin 图的线性定向，使得，$Q_0 = \{1, 2, \cdots, n\}$，$Q_1 = \{i \to i+1 : 1 \le i \le n-1\}$，则猜想成立，$A_n$型的丛代数为唯一分解的。

证明：对于 n = 1，显然$\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$为 Laurent 多项式环$K[x_1, \dfrac{2}{x_1}]$的子环。根据注记 1.9，

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, B) = K[x_1, \frac{2}{x_1}] \subseteq \mathcal{A}(\mathbf{x}, B).$$

于是可以得到$\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$恰好等于 Laurent 多项式环$K[x_1, \dfrac{2}{x_1}]$，从而唯一分解。

对于 n = 2，$f_1 = 1 + x_2$和$f_2 = 1 + x_1$，它们均为$K[x_1, x_2]$中的不可约多项式。根据数学归纳法，我们很容易证明$I_1^{a_1} I_2^{a_2} = I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2}$对任意的$a_1, a_2 \in \mathbb{N}$均成立，从而可以得到$A_2$的唯一分解性。

假设$n \ge 4$。任取$P \in I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2} \cap \cdots \cap I_n^{a_n}$，我们只需要对$\sum_{i=1}^{n} a_i$归纳，从而证明证明$P \in \mathbf{I}^{\mathbf{a}}$。基础情况是平凡成立的。假设对所有较小和的序列都成立。若$a_1, a_2 > 0$，因为 i=1 为源且与 j=2 相邻，应用引理 7.1 我们可以得到结论。如果$a_1 > 0$和$a_2 = 0$，通过应用引理 7.2（1）我们可以得到结论，因为$N(1) = 2$。若$a_1 = 0$，可以从引理 7.2（2）中得到结论，其中 i 为最使得$a_i \neq 0$的最小的数，k = i-1。命题证毕。

**命题 9.5** [2] 对于$n \in \{6, 7\}$，Q 为$E_n$的定向，其中具有箭向$1 \to 2 \to 3, n \to \cdots \to 6 \to 5 \to 3$和$3 \to 4$，则猜想成立，$E_6, E_7, E_8$型的丛代数均唯一分解。

证明：首先注意到一个结论，$E_6, E_7, E_8$型的丛代数不依赖于定向。所以只需要证明下图特定的箭向下的丛代数的唯一分解性。

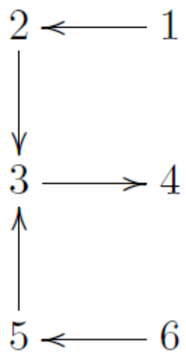

图 9.3 $E_6$ 的 Dynkin 图

和之前的命题的证明过程相同，我们对 $\sum_{i=0}^{n} a_i$ 进行归纳。初始情况是平凡成立的。假设对所有较小和的序列均成立，则：

（1）若 $a_3,a_4>0$，可以由引理 7.1 中得到结论，因为 i=4 为汇且与 j=3 相邻。

（2）若 $a_4>0,a_3=0$，可以由引理 7.2（1） 得出结论，其 i = 4，$N(4)=\{3\}$。

（3）若 $a_3>0,a_4=0$，可以由引理 7.2（1）得出结论，其中 i = 3，k = 4，$N(4)=\{3\}$。

（4）若 $a_3=0,a_4=0$，则 $I_1=(x_1,x_2)$，$I_2=(x_1,x_2,x_3)$，$I_i=(x_{i-1},x_i,x_{i+1})$（$5\le i\le n-1$），$I_n=(x_{n-1},x_n)$。理想的情形与 $A_{n-1}$ 相同，由于猜想在 $A_{n-1}$ 下成立，从而在 $E_6,E_7,E_8$ 下也成立。

## 2.10 Euclidean 型的唯一分解性

**定理 10.1** $\tilde{A}_n$ 型的丛代数是唯一分解的。

证明：显然当顺时针和逆时针的边数目确定时，$\tilde{A}_n$ 的丛代数和定向无关。于是考虑下列定向 $\tilde{A}_n$ :假设有 k（$1\le k\le n/2$）个顺时针边和 n+1-k 个逆时针边，在这种情况下定向图中有最多的源和汇。换句话说 k 个顺时针的边和逆时针的边交替出现，剩余的 n+1-2k 个逆时针的边连续出现。假设顶点 1 和 n+1 的标号是按照逆时针的标号的，假定节点 1 到 k+1 为源或汇，节点 k+2 到 n+1 既不为源又不为汇。假设 P 为 $I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap\cdots I_n^{a_n}$ 中的多项式。 我们来证明 $P\in\mathbf{I}^{\mathbf{a}}$，采用数学归纳法对 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 做归纳。基础情况是平凡成立的，下面假设对于所有和较小的序列均成立。

若 $k>1$，则节点 1，2，3 为源或汇。

（1）若 $a_1>0$，$a_2>0$ 或者 $a_{n+1}>0$，则结论可以由引理 7.1 得出，因为节点 1 为源或汇，且节点 2 和 n+1 与节点 1 相邻。

（2）若 $a_1>0$，$a_2=0$，$a_{n+1}=0$，则结论可以由引理 7.2（1）得出，因为 $a_1>0$ 且对于所有的 $j\in N(1)$，$a_j=0$。

（3）若 $a_1=0$ 和 $a_2=0$，则理想的序列 $I_k$ 和 $A_{n+1}$ 相同，从而得出结论。

（4）若 $a_1=0$，$a_2>0, a_3=0$，结论可以从引理 7.2（1）中得到，因为 $a_2>0$，且对于任意 $j\in N(2), a_j=0$。

（5）若 $a_1=0$，$a_2>0$ 和 $a_3>0$，结论可以从引理 7.1 中得到，因为节点 2 为源或汇且与节点 3 相邻，$a_2>0, a_3>0$。

若 $k=1$，情形（1）-（4）中的论述完全相同。在情形（5），显然节点 3 既不为源又不为汇，且 $f_3=x_2+x_4$，结论可以从引理 7.2（2）中得到，因为 k=2，i=3，N（k）$=\{1,3\}$ 和 $a_1=0$。

根据上述讨论，在所有情况下我们均能得到 $P\in\mathbf{I}^{\mathbf{a}}$，从而猜想成立。根据定理 6.13，$\tilde{A}_n$ 型的丛代数是唯一分解的。

**定理 10.2** $\tilde{D}_n$ 型的丛代数不唯一分解。

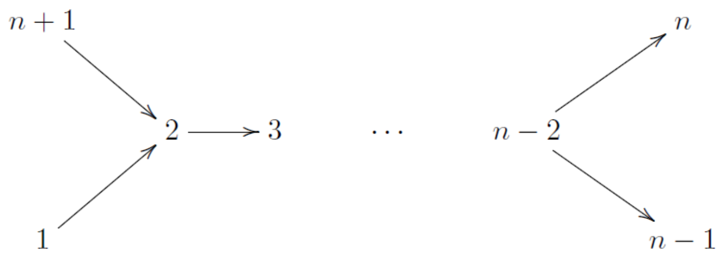


图 10.1 $\tilde{D}_n$ 的 Euclidean 图

证明：无论如何定向，节点 n+1 和 1 的交换多项式均为 $1+x_2$，根据命题 4.2，$\tilde{D}_n$ 型的丛代数不为唯一分解的。

**定理 10.3** $\tilde{E}_6$ 型的丛代数唯一分解。

证明：$\tilde{E}_6$ 的 Euclidean 图如下所示。

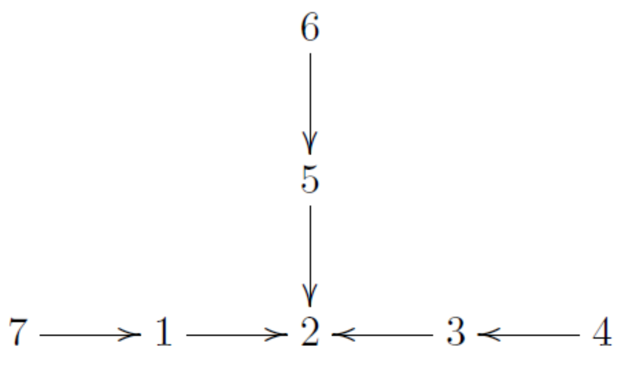


图 10.2 $\tilde{E}_6$ 的 Euclidean 图

假设 P 为 $I_1^{a_1}\cap I_2^{a_2}\cap\cdots I_n^{a_n}$ 中的多项式。 我们来证明 $P\in\mathbf{I}^{\mathbf{a}}$，采用数学归纳法

对 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 做归纳。基础情况是平凡成立的，下面假设对于所有和较小的序列均成立。

（1）若 $a_2, a_1 > 0$，则结论可以由引理 7.1 得到。

（2）若 $a_2 = 0, a_1 > 0, a_7 = 0$，则结论可以由引理 7.2（1）得到，因为 i=1，N（i）$=\{0,2\}$。

（3）若 $a_2 = 0, a_1 > 0, a_7 > 0$，则结论可以由引理 7.1 得到，因为节点 7 为源且 $a_7, a_1 > 0$。

（4）若 $a_2 = 0, a_1 = 0, a_7 = 0$，理想序列的情形为 $A_5$ 相同，从而结论成立。

（5）若 $a_2 = 0, a_1 = 0, a_7 > 0$，则结论可以由引理 7.2（1）得到，因为 i=0，N（i）$=\{1\}$。

（6）若 $a_2 > 0, a_1 = 0, a_7 = 0$，理想序列的情形与 $E_6$ 相同，从而结论成立。

（7）若 $a_2 > 0, a_1 = 0, a_7 > 0$，则结论可以由引理 7.2 （1）得到，因为 i=0，N（i）$=\{1\}$。

根据上述讨论，在所有情况下我们均能得到 $P \in \mathbf{I}^{\mathbf{a}}$，从而猜想成立。根据定理 6.13，$\tilde{E}_6$ 型的丛代数是唯一分解的。

**定理 10.4** $\tilde{E}_7$ 型和 $\tilde{E}_8$ 型的丛代数是唯一分解的。

证明：$\tilde{E}_7$ 和 $\tilde{E}_8$ 的 Euclidean 图如下所示：

$$\begin{tikzcd} & & & 8 \arrow[d] & & & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 & 5 \arrow[l] & 6 \arrow[l] & 7 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

图 10.3 $\tilde{E}_7$ 的 Euclidean 图

$$\begin{tikzcd} & & & & 9 \arrow[d] & & & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 & 6 \arrow[l] & 7 \arrow[l] & 8 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

图 10.4 $\tilde{E}_8$ 的 Euclidean 图

在 $\tilde{E}_7$ 中针对节点 4 和 8 进行讨论，在 $\tilde{E}_8$ 中针对节点 5 和节点 9 进行讨论。证明过程与 $E_6, E_7, E_8$ 型的丛代数的唯一分解性的证明过程完全相同。

# 第 3 章　结论

本文主要综述了 Philipp Lampe 和其他四个研究者的工作，论述了丛代数中的可逆元的结构、丛变量的不可约性，并针对一般的丛代数和无环丛代数的唯一分解性给出了充分条件，并对一般的丛代数的不唯一分解性给出了充分条件。

本文模仿了 Philipp Lampe 在解决 Dynkin 型的丛代数的唯一分解性时采用的方法，完整地解决了 Euclidean 型的丛代数的唯一分解性，得出如下结论：

（1）$\tilde{A}_n$ 型的丛代数是唯一分解的。

（2）$\tilde{D}_n$ 型的丛代数不唯一分解。

（3）$\tilde{E}_6$ 型的丛代数唯一分解。

（4）$\tilde{E}_7$ 型和 $\tilde{E}_8$ 型的丛代数是唯一分解的。

本文在 Euclidean 型的丛代数的唯一分解性问题上做出的结论具有一定的意义，对更加深入地了解类似于 Euclidean 型具体的无环丛代数有一定的作用。

# 插图索引

# 参考文献


[1]. G.Christof, L.Benernard, S.Jan, Factorial cluster algebras, Preprint arXiv:1110.1199(2011)

[2]. L.Philipp, Acyclic cluster algebras from a ring theoretic point of view, Preprint arXiv:1210.1502v1

[3]. A.Berenstein, S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebra 3: Upperbounds and double Bruhat cells, Duke Math.J.126(2005), no 1-52

[4]. S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras .I.Foundations, J.Amer.Math.Soc.15(2002), no.2,497-529

[5]. Ph. Caldero, B. Keller, From triangulated categories to cluster algebras, Inventiones Mathematicae 172 (2008), no. 1, 169–211. arXiv:math/0506018.

[6]. S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston, Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes: Acta Mathematica 201, no.1 (2008), 83–146. Preprint arXiv:math/0608367.

[7]. S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebras. II. Finite type classification, Inventiones Mathematicae 154 (2003), no. 1, 63–121. arXiv:math/0208229

[8]. H. Derksen, J. Weyman, A. Zelevinsky, Quivers with potentials and their representations II: applications to cluster algebras, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 3, 749–790.

[9]. D. Hernandez, B. Leclerc, Cluster algebras and quantum affine algebras, Duke Math. J. 154(2010), no. 2, 265–341.

# 致　谢

感谢数学科学系朱彬教授一年来对我的指导，朱老师严谨求学的态度深深地打动了我，他对我的悉心指导使得我的毕业设计能够顺利进行，在此向他表示感谢。

# 声　　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：王程鹏　　日　期：2016年6月1日

# 附录 A　外文资料的调研阅读报告

## A.1 Abstract

The article summarizes the work of Ghristof Geiss, Bernard Lecterc, Jan Schroer and Philipp Lampe in their two important papers on factorial cluster algebras and acyclic cluster algebras. In the first paper, they show that cluster alegebras do not contain non-trivial units and that all cluster variables are ireducible elements. As an application, they give a criterion for cluster algebra to be a factorial algebra. In the second paper, Philipp Lampe presents another sufficient condition for a cluster algebra to be a unique factorization domain in terms of primary decompositions of certain ideals generated by initial cluster variables and initial exchange polynomials under a condition. In the end of this article, the time management of the graduation project is presented.

## A.2 Cluster algebras and basic properties

**Definition 2.1 Definition of a cluster algebra.** A matrix $A=(a_{ij})\in M_{n,n}(\mathbb{Z})$ is **shew-symmetrizable** if there exists a diagonal matrix $D=Diag(d_1,\ldots,d_n)\in M_{n,n}(\mathbb{Z})$ with positive diagonal entries $d_1,\ldots,d_n$ such that DA is **skew-symmetric**, ie. $d_i a_{ij}=-d_j a_{ji}$ for all i, j.

Let m,n and p be integers with

$$m\geq p\geq n\geq 1 \ and \ m>1.$$

Let $\Delta(B)$ be the graph with vertices 1,...,m and an edge between i and j provided $b_{ij}$ *or* $b_{ji}$ is non-zero. We call B **connected** if the graph $\Delta(B)$ is **connected**.

Throughout, we assume that K is a field of characteristic 0 or $K=\mathbb{Z}$. Let $\mathcal{F}=K(X_1,...,X_m)$ be the field of rational functions in m variables.

A seed of $\mathcal{F}$ is a pair (**x**,B) such that the following hold:

(1) $B\in M_{m,n}(\mathbb{Z})$,

(2) B is connected,

(3) $B^{\circ}$ is skew-symmetrizable,

(4) $\mathbf{x}=(x_1,...,x_m)$ is an m-tuple of elements of $\mathcal{F}$ such that $x_1,...x_m$ are algebraically

independent over K.

For a seed (**x**,B), B is the **exchange matrix** of (**x**,B). We say that B has maximal rank if rank(B)=n.

Given a seed (**x**,B) and some $1 \le k \le n$ we define the **mutation** of (**x**,B) at k as $\mu_k(\mathbf{x}, B) = (\mathbf{x}', B')$, where $B' = (b_{ij}^{'})$ is defined as

$$b_{ij}^{'} = \begin{cases} -b_{ij} & if\ i = k\ or\ j = k, \\ b_{ij} + \dfrac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} & otherwise, \end{cases}$$

and $x' = (x_1', ..., x_m')$ is defined as

$$x_s' = \begin{cases} x_k^{-1}\prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + x_k^{-1}\prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}} & if\ s = k, \\ x_s & otherwise. \end{cases}$$

The equality

$$x_k x_k' = \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}$$

is called an **exchange relation**. We write

$$\mu_{(\mathbf{x},B)}(x_k) = x_k^{'} \quad \text{and} \quad \mu_k(B) = B'.$$

It is easy to check that $(\mathbf{x}, B')$ is again a seed. Furthermore, we have $\mu_k\mu_k(\mathbf{x}, B) = (\mathbf{x}, B)$.

Two seeds $(\mathbf{x}, B)$ and $(\mathbf{y}, C)$ are **mutation equivalent** if there exists a sequence $(i_1, ..., i_t)$ with $1 \le i_j \le n$ for all j such that

$$\mu_{i_t} \cdots \mu_{i_2}\mu_{i_1}(\mathbf{x}, B) = (\mathbf{y}, C).$$

In this case, we write $(\mathbf{y}, C) \sim (\mathbf{x}, B)$. This yields an equivalence relation on all seeds of $\mathcal{F}$.

For a seed $(\mathbf{x}, B)$ of $\mathcal{F}$, let

$$\mathcal{X}_{(\mathbf{x},B)} = \bigcup_{(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)} \{y_1, ..., y_n\},$$

where the union is over all seeds $(\mathbf{y}, C)$ with $(\mathbf{y}, C) \sim (\mathbf{x}, B)$. By definition, the **cluster algebra** $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ associated to $(\mathbf{x}, B)$ is the L-subalgebra of $\mathcal{F}$ generated by $\mathcal{X}_{(\mathbf{x},B)}$, where $L = K[x_{n+1}^{\pm 1}, ..., x_p^{\pm 1}, x_{p+1}, ...x_m]$ is the location of the polynomial ring $K[x_{n+1}, ..., x_m]$ at $x_{n+1}, ..., x_p$. (For p=n, we set $x_{n+1} \cdots x_p = 1$.)

Thus $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is the K-subalgebra of $\mathcal{F}$ generated by $\{x_{n+1}^{\pm 1}, ..., x_p^{\pm 1}, x_{p+1}, ...x_m\} \cup \mathcal{X}_{(\mathbf{x},B)}$

The elements of $\mathcal{X}_{(\mathbf{x},B)}$ are the **cluster variables** of $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$.

We call $(\mathbf{y},C)$ a **seed** of $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$ if $(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)$. In this case, for any $1\le k\le n$, we call $(y_k,\mu_{(\mathbf{y},C)}(y_k)$ an **exchange pair** of $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$. Furthermore, the m-tuple $\mathbf{y}$ is a **cluster** of $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$, and monmials of the form $y_1^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_m^{a_m}$ with $a_i\ge 0$ for all i are called **cluster monomials** of $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$.

Note that for any cluster $\mathbf{y}$ of $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$ we have $y_i\equiv x_i$ for all $n+1\le i\le m$. These m-n elements are the **coefficients** of $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$. There are no invertible coefficients if p=n.

**Definition 2.2 Acyclic cluster algebras.** Let $(\mathbf{x},B)$ be a seed of $\mathcal{F}$ with $B=(b_{ij})$. Let $\sum(B)$ be the quiver with vertices 1,...,n, and arrows $i\to j$ for all $1\le i,j\le n$ with $b_{ij}>0$. So $\sum(B)$ encodes the sign-pattern of the principal part $B^{\circ}$ of B.

The seed $(\mathbf{x},B)$ and B are called **acyclic** if $\sum(B)$ does not contain any oriented cycle. The cluster algebra $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$ is **acyclic** if there exists an acylic seed z $(\mathbf{y},C)$ with $(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)$.

**Definition 2.3 Skew-symmetric exchange matrices and quivers.** Let $B=(b_{ij})$ be a matrix in $M_{m,n}(Z)$ so that $B^{\circ}$ is skew-symmetric. Let $\Gamma(B)$ be the quiver with vertices 1,...,m and $b_{ij}$ arrows $i\to j$ if $b_{ij}>0$, and $-b_{ij}$ arrows $j\to i$ if $b_{ij}<0$. Thus given $\Gamma(B)$, we can recover B. In the skew-symmetric case one often works with quivers and their mutations instead of exchange matrices.

**Theorem 2.4 [FZ1, Theorem 3.1][4] Laurent phenomenon.** For a seed $(\mathbf{x},B)$ of $\mathcal{F}$ let

$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}=K[x_1^{\pm1},...,x_n^{\pm1},x_{n+1}^{\pm1},...,x_p^{\pm1},x_{p+1},...x_m]$

be the location of $K[x_1,...,x_m]\ at\ x_1x_2\cdots x_p$, and let

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x},\mathcal{Z}}=K[x_1^{\pm1},...,x_n^{\pm1},x_{n+1},...,x_m]$$

be the localization of $\mathcal{Z}[x_1,...,x_m]\ at\ x_1x_2\cdots x_n$. Let's consider $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\ and\ \mathcal{L}_{\mathbf{x},\mathcal{Z}}$ as subrings the field of $\mathcal{F}$.

Let $\mathbf{y}$ be a cluster variable of $\mathcal{A}(\mathbf{x},B)$. We have

$$y\in\bigcap_{(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)}\mathcal{L}_{\mathbf{y},\mathcal{Z}}\ and\ \mathcal{A}(\mathbf{x},B)\subseteq\bigcap_{(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)}\mathcal{L}_{\mathbf{y}}.$$

**Remark 2.5 [BFZ 2 Section 1.3][3]** First introduce three K-algebras. Put

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},B)=K[x_1,x_1',...,x_n,x_n',x_{n+1}^{\pm1},...,x_p^{\pm1},x_{p+1},...x_m],$$

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{x},B)=\bigcap_{(\mathbf{y},C)\sim(\mathbf{x},B)}\mathcal{L}_{\mathbf{y}},\ \mathcal{U}(\mathbf{x},B)=\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\cap\bigcap_{k=1}^{n}\mathcal{L}_{\mu_k(\mathbf{x})}.$$

Here, we use the notation $x_k{}' = \mu_k(\mathbf{x})_k$ *for* $1 \le k \le n$. These three K-algebras are named the **lower bound**, the **upper cluster algebra**, and the **upper bound**. We can easily get the conclusion following,

$\mathcal{L}(\mathbf{x}, B) \subseteq \mathcal{A}(\mathbf{x}, B) \subseteq \bar{A}(\mathbf{x}, B) \subseteq \mathcal{U}(\mathbf{x}, B).$ The first and the third inclusion are easily to prove and the second inclusion is a result of the Laurent phenomenon.

**Theorem 2.6 [BFZ Corollary 1.9][3]** Let K= $\mathbb{Z}$. The following propositions are true:

(1)If the seed $(\mathbf{x}, B)$ is acyclic, then the lower bound is equal to the cluster algebra, i.e., we have $\mathcal{L}(\mathbf{x}, B) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, B).$

(2)If B has the maximal rank and p=m, then all seeds of $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ are coprime and the upper cluster algebra is equal to the upper bound, i.e., $\bar{A}(\mathbf{x}, B) = \mathcal{U}(\mathbf{x}, B)$.

(3)If the seed $(\mathbf{x}, B)$ is coprime and acyclic, then all inclusion become equality, i.e., we have $\mathcal{L}(\mathbf{x}, B) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, B) = \bar{A}(\mathbf{x}, B) = \mathcal{U}(\mathbf{x}, B).$

Remark 2.7 Define a polynomial $f_j = \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}$, and call $f_j$ **initial exchange polynomials**. We say that a seed $(\mathbf{y}, C)$ is coprime if the initial exchange polynomials $f_k$ with $1 \le k \le n$ are pairwise coprime elements in the ring $K[x_i : 1 \le i \le m]$.

## A.3 Invertible elements in cluster algebras

**Lemma 3.1 [GLS Lemma 2.1][1]** For a seed $(\mathbf{x}, B)$ of $\mathcal{F}$ we have

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{\times} = \{\lambda x_1^{a_1} \cdots x_p^{a_p} \mid \lambda \in K^{\times}, a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

**Lemma 3.2 [GLS Theorem 2.2][1]** For any seed $(\mathbf{x}, B)$ of $\mathcal{F}$ we have

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)^{\times} = \{\lambda x_{n+1}^{a_{n+1}} \cdots x_p^{a_p} \mid \lambda \in K^{\times}, a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

**Corollary 3.3 [GLS Corollary 2.3][1]** For any seed $(\mathbf{x}, B)$ of $\mathcal{F}$ the following propositions hold:

(1) Let y and z be non-zero elements in $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B).$ Then y and z are associated if and only if there exist $a_{n+1}, \cdots, a_p \in \mathbb{Z}$ *and* $\lambda \in K^{\times}$ with

$$y = \lambda x_{n+1}^{a_{n+1}} \cdots x_p^{a_p} z.$$

(2) Let y and z be cluster variables of $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B).$ Then y and z are associated if and only if y=z.

Two cluster $\mathbf{y}$ and $\mathbf{z}$ of a cluster algebra $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ are **non-associate** if there are no $1 \le i, j \le n$ such that $y_i$ and $z_j$ are associate.

**Corollary 3.4 [GLS Corollary 2.4][1]** For clusters $\mathbf{y}$ and $\mathbf{z}$ of $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ the following are equivalent:

(1)The clusters $\mathbf{y}$ and $\mathbf{z}$ are disjoint.

(2)The clusters $\mathbf{y}$ and $\mathbf{z}$ are non-associate.

## A.4 Irreducibility of cluster algebras

**Theorem 4.1 [GLS Theorem 3.1][1]** Let $(\mathbf{x}, B)$ be a seed of $\mathcal{F}$. Then any cluster variable in $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is irreducible.

## A.5 Factorial cluster algebras

**Proposition 5.1 [GLS Proposition 4.3][1]** Assume that the cluster monomials of $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ are linearly independent. Let $(\mathbf{y}, C)$ be a seed of $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$, and let

$$(\mathbf{z}, D) = \mu_n \cdots \mu_2 \mu_1 (\mathbf{y}, C).$$

Then the clusters $\mathbf{y}$ and $\mathbf{z}$ are disjoint.

**Theorem 5.2 [GLS Theorem 4.1][1]** Let $\mathbf{y}$ and $\mathbf{z}$ be disjoint clusters of $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ and let U be a factorial subalgebra of $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ such that

$$\{y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_n, x_{n+1}^{\pm 1}, ..., x_p^{\pm 1}, x_{p+1}, ..., x_m\} \subset U.$$

Then we have $U = \mathcal{A}(\mathbf{x}, B) = U(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

**Corollary 5.3 [GLS Corollary 4.2][1]** Assume that $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is factorial.

(1)If $\mathbf{y}$ and $\mathbf{z}$ are disjoint clusters of $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$, then $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B) = U(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, where $U(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathcal{L}_{\mathbf{y}} \cap \mathcal{L}_{\mathbf{z}}$.

(2)For any $(\mathbf{y}, C) \sim (\mathbf{x}, B)$, we have $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B) = U(\mathbf{y}, C)$.

## A.6 A criterion for acyclic cluster algebras to admit unique factorization

### A.6.1 Assumptions on the cluster algebra

Let $m \ge n \ge 1$ be integers with $m \ge 2$ and m=p. Let $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ be the cluster algebra associated with an intial seed $(\mathbf{x}, B)$. Here B is as usual an m $\times$ n integer matrix with a skew-symmetrizable principal part $B^{\circ}$ and $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ is an initial cluster consisting of m variables that are algebraically independent over K. Furthermore, in the rest of this section we assume that the following conditions hold:

(1)The matrix B is a connected matrix.

(2)The initial seed $(\mathbf{x}, B)$ is an acyclic seed.

(3)The polynomials $f_i$ with $1 \le i \le n$ are pairwise coprime.

(4)Every polynomials $f_i$ with $1 \le i \le n$ is an irreducible polynomial.

Hence, the seed $(\mathrm{x}, B)$ is coprime and by Theorem 2.6 the cluster algebra $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is equal to its lower and its upper bound.

### A.6.2 The definition of the ideals and their algebraic properties

**Definition 6.1** For every $i \in \{1, 2, ..., n\}$ define an ideal

$$I_i = (x_i, f_i) \subseteq K[x_1, x_2, ..., x_m].$$

Let us introduce the abbreviation $R = K[x_i : 1 \le i \le m]$ for the polynomial ring. Moreover, for $1 \le i \le n$ we abbreviate $K[x_1, ..., \overline{x_i} ..., x_m]\, by\, R_i$. Note that $f_i \in R_i$, since the diagonal entry $b_{ii}$ is zero for all $1 \le i \le n$.

**Proposition 6.2 [L Proposition 3.2][2]** Let $1 \le i \le n$ and let $a_i \in \mathbb{N}$. Let $P \in R$ be a polynomial which we write as $P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x_i^k$ for some polynomials $P_k \in R_i$. Then $P \in I_i^{a_i}$ holds if and only if the polynomial $f_i^{a_i - k}\, in\, R_i$ divides the polynomial $P_k \in R_i$ for all $0 \le k \le a_i$.

In particular, we have $x_i \in I_j$ for $i \ne j$. For a polynomial such as $P \in R$ in Proposition 6.2 it is usual to denote part $P_k$ of degree k with respect to $x_i\, by\, [x_i^k]P$.

It follows that for every none-zero polynomial $P \in R$ and every $1 \le i \le n$ there is a largest natural number $a_i \in \mathbb{N}$ such that $P \in I_i^{a_i}$. We define $m_i(P)$ to be the unique natural number such that $P \in I_i^{m_i(P)} \setminus I_i^{m_i(P)+1}$. Moreover, we define a monomial

$$M(P) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i(P)} \in R.$$

**Remark 6.3 [L Remark 3.3][2]** If $f_i$ happens to have the form $f_i = x_l + m_i$ for some mutable or frozen vertex $l \ne i$, then $R = K[x_1, ..., \overline{x_l}, ..., x_m, f_i]$ and we may write every polynomial $P \in R$ in the form $P = \sum_{r=0}^{\infty} A_r f_i^r$ with $A_r \in K[x_1, ..., \overline{x_l}, ..., x_m]$. In this case, we have $P \in I_i^{a_i}$ for some $a_i \geq 0$ if and only if $x_i^{a_i - r} \mid A_r$ for all $0 \leq r \leq a_i$.

**Proposition 6.4 [L Proposition 3.4][2]** For all mutable indices $i \neq j$ the initial exchange polynomial $f_i$ is not an element in the ideal $I_j$.

**Proposition 6.5 [L Lemma 3.5][2]** Let $1 \leq i \leq n$ and let $a_i \geq 1$ be a natural number. If $P, Q \in R$ are polynomials satisfying $PQ \in I_i^{a_i}$, then there exists some $0 \leq b_i \leq a_i$, such that $P \in I_i^{b_i}$, and $Q \in I_i^{a_i - b_i}$.

An ideal $I \subseteq R = Kx_1, x_2, ..., x_m$ is called **prime ideal** if $I \neq R$ and for all elements $P, Q \in R$ the following implication holds: If $PQ \in I$, then $P \in I$ or $Q \in I$. The **radical ideal** of an ideal $I \subseteq R$ is $\sqrt{I} = \{r \in R : r^k \in R \text{ for some } k \in \mathbb{N}\}$. An ideal $I \subseteq R$ is call a **primary ideal** if for all $P, Q \in R$ the following implication holds: If $PQ \in I$, then $P \in I$ or $Q \in \sqrt{I}$. In this case, the radical ideal $\sqrt{I}$ is a prime ideal and I is also call $\sqrt{I}$ -primary.

**Lemma 6.6 [L Lemma 3.6][2]** The ideal $I_i$ is a prime ideal for all $1 \leq i \leq n$.

**Lemma 6.7 [L Lemma 3.7][2]** The ideal $I_i^{a_i}$ is a primary ideal for all $1 \leq i \leq n$ and all natural numbers $a_i \geq 1$. The radical ideal of $I_i^{a_i}$ is equal to $I_i$.

**Proposition 6.8 [L Proposition 3.8][2]** Suppose that $i \in \{1, 2, ..., n\}$ is either a sink or a source that the index $j \in \{1, 2, ..., n\}$ is adjacent with i. Then the ideals $I_i$ and $I_j$ are coprime.

### A.6.3 A description of the cluster algebra

The Laurent phenomenon and the equality of the cluster algebra with its lower bound imply that $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ may be described as a union:

**Remark 6.9 [L Remark 3.9][2]** We have

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, B) = \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \{\frac{\lambda P}{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}} : P \in I_1^{a_1} I_2^{a_2} \cdots I_n^{a_n} . \lambda \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, B)^{\times}\}.$$

In the end of this subsection, let us introduce the shorthand multi-index notation $\mathbf{I}^{\mathbf{a}} = I_1^{a_1} I_2^{a_2} \cdots I_n^{a_n}$ for a sequence $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n$. Write $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$, and $\mathbf{f}^{\mathbf{a}} = f_1^{a_1} f_2^{a_2} \cdots f_n^{a_n}$ for a sequence $\mathbf{a}$ as above. Denote by $\geq$ the **product order** on $\mathbb{N}$, i.e., we write $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ whenever two sequence $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ satisfy $a_i \geq b_i$ for all $1 \leq i \leq n$.

### A.6.4 A conjectured primary decomposition

If $I, J \subset R$ are two ideals, then their product IJ is a subset of their intersection $I \cap J$, i.e., $IJ \subseteq I \cap J$, but the sets are not equal in general. We conjecture the following:

**Conjecture 6.10 [L Conjecture 3.10][2]**
For all $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ we have $\mathbf{I}^{\mathbf{a}} = I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2} \cap ... \cap I_n^{a_n}$.

**Remark 6.11 [L Remark 3.11][2]** If the conjecture above is true, then the union in Remark 6.9 becomes

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, B) = \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \{\frac{\lambda P}{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}} : P \in I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2} \cap ... \cap I_n^{a_n} . \lambda \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, B)^{\times}\}.$$

**Remark 6.12 [Remark 3.13][2]** For all $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ define a set

$$S(\mathbf{a}) = \{P \in I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2} \cap ... \cap I_n^{a_n} : x_i \nmid P \ if \ 1 \le i \le n, a_i \ne 0\}$$

If the conjecture above holds for all $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, then yields a decomposition

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, B) = \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)^{\times} S(\mathbf{a})}{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}}.$$

### A.6.5 The criterion

**Theorem 6.13 [L Theorem 3.15][2]** If $\mathbf{I}^{\mathbf{a}} = I_1^{a_1} \cap I_2^{a_2} \cap ... \cap I_n^{a_n}$ holds for all $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, then $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is a unique factorization domain. Moreover, the set irreducible elements in $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is

$$(\{\lambda x_i : 1 \le i \le n, \lambda \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, B)^{\times}\} \cup \{\frac{\lambda P}{M(P)} : P \in R \ irreducible, \lambda \in \mathcal{A}(\mathbf{x}, B)^{\times}\} \setminus \mathcal{A}(\mathbf{x}, B)^{\times}.$$

## A.7 Examples of non-factorial and factorial cluster algebras

### A.7.1 Examples of non-factorial cluster algebras

For a matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ and $1 \le i \le n$ let $c_i(A)$ be the ith column of A.

**Proposition 7.1 [GLS Proposition 6.1][1]** Let $(\mathbf{x}, B)$ be a seed of $\mathcal{F}$. Assume that $c_k(B) = c_s(B)$ or $c_k(B) = -c_s(B)$ for some $k \ne s$ with $b_{ks} = 0$. Then $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is not factorial.

**Proposition 7.2 [GLS Proposition 6.3][1]** Let $(\mathbf{x}, B)$ be a seed of $\mathcal{F}$. Assume that there exists some $1 \le k \le n$ such that the polynomial $X^d + Y^d$ is not irreducible in K[X,Y], where $d = gcd(b_{1k}, ..., b_{mk})$ is the greatest common divisor of $b_{1k}, ..., b_{mk}$. Then $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is not factorial.

**Example 7.3 [GLS Corollary 6.4][1]** Let K = $\mathbb{C}$, m = n = 2 and

$$\begin{pmatrix} 0 & -c \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

with $c \geq 1$ and $d \geq 2$. Then $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is not factorial.

**Example 7.4 [GLS Corollary 6.5][1]** Let m = n = 2 and

$$\begin{pmatrix} 0 & -c \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

with $c \geq 1$ and $d \geq 3$ an odd number. Then $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is not factorial.

### A.7.2 Examples of factorial cluster algebras

Assume m = n + 1 = p + 1, and let $B \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ be the matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & & & \\ & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & 1 & \ddots & -1 & \\ & & & \ddots & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Obviously, $B^{\circ}$ is skew-symmetric, $\Gamma(B)$ is the quiver

$$m \to \cdots \to 2 \to 1,$$

and $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is a cluster algebra of Dynkin type $\mathbb{A}_n$. Note that $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ has exactly one coefficient, and that this coefficient is non-invertible.

Let $(\mathbf{x}[0], B[0]) = (\mathbf{x}, B)$. For each $1 \leq i \leq m-1$ we define inductively a seed by

$$(\mathbf{x}[i], B[i]) = \mu_{m-i} \cdots \mu_2 \mu_1 (\mathbf{x}[i-1], B[i-1]).$$

For $0 \leq i \leq m-1$ set $(x_1[i], ..., x_m[i]) = \mathbf{x}[i]$.

For simplicity we define $x_0[i] = 1$ and $x_{-1}[i] = \mathbf{x}[i]$ for all i.

**Lemma 7.5 [GLS Lemma 7.1][1]** For $0 \leq i \leq m-2, 1 \leq k \leq m-1-i$ and $0 \leq j \leq i$ we have

$$\mu_{(\mathbf{x}[i], B[i])}(x_k[i]) = \frac{x_{k-1}[i] + x_{k+1}[i]}{x_k[i]} = \frac{x_{k-1+j}[i-j] + x_{k+1+j}[i-j]}{x_{k+j}[i-j]}.$$

**Corollary 7.6 [GLS Corollary 7.2][1]** For \$0 \leq i \leq m-2\$ we have

$$x_{i+2} = x_1[i+1] x_{i+1} - x_i,$$

$$x_{i+1}[1] = x_1[i+1] x_i[1] - x_{i-1}[1].$$

**Proposition 7.7 [GLS Proposition 7.3][1]** The elements $x_1[0], x_1[1], ... x_1[m-1]$ are algebraically independent and

$$K[x_1[0], x_1[1], ..., x_1[m-1]] = \mathcal{A}(\mathbf{x}, B).$$

In particular, the cluster algebra $\mathcal{A}(\mathbf{x}, B)$ is a polynomial ring in m variables.

## A.8 Time arrangement of the graduation project

Winter Vacation to week 3: Read papers and comprehend others' work. Writing the summary and choose the specific topic.

Week 4 to week 8: Manage to solve the main part of the problem.

Week 9 to Week 12: Finish the remaining part of the problem.

Week 13 to Week 16: Write the paper, get prepared to the reply.

## A.9. Reference


[1]. G.Christof, L.Benernard, S.Jan, Factorial cluster algebras, Preprint arXiv:1110.1199(2011)

[2]. L.Philipp, Acyclic cluster algebras from a ring theoretic point of view, Preprint arXiv:1210.1502v1

[3]. A.Berenstein, S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebra 3: Upperbounds and double Bruhat cells, Duke Math.J.126(2005), no 1-52

[4]. S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras .I.Foundations, J.Amer.Math.Soc.15(2002), no.2,497-529

# 综合论文训练记录表

| 学生姓名 | 王程鹏 | 学号 | 2012013309 | 班级 | 软件 22 班 |
|---|---|---|---|---|---|
| 论文题目 | cluster algebra 唯一分解性研究 | | | | |
| 主要内容以及进度安排 | 主要内容：<br>论文综述了四个研究者在他们的两篇论文中的工作，给出了 cluster 代数的可逆元和不可约元的结构以及唯一分解和不唯一分解的充分条件。根据阅读的论文中的充分条件，独立解决了欧几里得型的 cluster 代数的唯一分解性。<br>进度安排：<br>寒假期间-第 4 周：阅读两篇 cluster algebra 的基础论文，并参考其他论文，补充证明其中未证明的命题。<br>第 5-6 周：总结论文中对 Dynkin 型的唯一分解性的讨论。<br>第 7-9 周：独立解决欧几里得型的唯一分解性。<br>第 10-12 周：考虑命题在一般整环上是否成立。<br>第 13-16 周：总结与论文撰写。<br>指导教师签字：<br>考核组组长签字：<br>2016 年 4 月 7 日 | | | | |
| 中期考核意见 | 中期进展顺利，同意继续本课题研究<br>考核组组长签字：<br>2016 年 4 月 29 日 | | | | |

| | |
|---|---|
| 指导教师评语 | Cluster 代数由 Fomin-Zelevinsky 于 2000 年引入，它与数学很多分支如：Riemann 几何，代数几何，数学物理，离散动力系统，quiver 表示等具有很强的内在联系。Cluster 代数作为域的子代数是一个整环；Geiss-Leclerc-Shroeer 讨论了它是否是唯一分解整环的问题，随后 Lample 给出了 cluster 代数是 UFD 的一些充分条件。王程鹏综述了这方面的结果，用自己的语言证明了他们的主要结果；解决了欧几里得型 cluster 代数是否是 UFD 的问题。论文结果正确，写作规范；达到了本科综合论文训练的目的；这是一篇好的本科论文。<br>指导教师签字：朱彬<br>2016 年 6 月 2 日 |
| 评阅教师评语 | Cluster代数是现代代数学中的重要研究对象，该论文综述了该方向的一些结果，并用自己的方法证明了它们。这是一篇很好的论文。<br>评阅教师签字：周坚<br>2016 年 6 月 2 日 |
| 答辩小组评语 | 答辩通过。<br>答辩小组组长签字：周坚<br>2016 年 6 月 7 日 |

总成绩：88

教学负责人签字：

年　　月　　日