

动态规划

北京大学 洪华敦

大纲

- 数位DP
- 区间DP
- 背包
- 树形DP
- 插头DP
- DP of DP
- 其他的DP

数位DP

- 基本原理：数的大小从高往低比较
- 两种形式：
- 从高往低：记录是否等于
- 从低往高：记录是否小于等于
- 本质：将 $\leq R$ 转化为序列问题

模板题

- 求 $1 \dots R$ 中有几个数的数位和为 K ，且模 $X=D$
($D, K \leq 100$)
- 求 $1 \dots R$ 中相邻两个数字之差至少为 2 的数的个数
- 求 $1 \dots R$ 中至少有三位连续的数字相同的数的个数
- 给定 $R1, R2$ ，求 $\text{sum}(\text{Bitcnt}(i+j)) \ i \leq R1, j \leq R2$

不那么模板的题

- 设 $f(x)$ 为：每次等概率 $x += \text{lowbit}(x)$ 或者 $x -= \text{lowbit}(x)$ ，直到 $x=0$ 的期望步数
- 求 $\text{sum}(f(x))$. ($x \leq R$)

猛男题

- 求 $\text{sum}(\text{bitcnt}(x + \text{rev}(x)))$. $x \leq R$

区间DP

- 状态为区间的DP
- 通过一些方法，将一个区间分成左右两个区间去做

模板题

- 有 n 堆石头，每次你可以合并相邻两堆，得到的贡献是两堆的和， $n \leq 300$
- 环形版本
- 给定一个由于 $[]$, $()$ 构成的序列，求一个最长的子序列是合法的括号序列， $n \leq 300$
- 给定序列 $a[1 \dots n]$ ，每天能从最左边或者最右边取走一个数，第 i 天取走 x 的贡献为 ix ，求最大的贡献

不那么模板的题

- 给定 n 个数，每次可以删掉一段相同的连续子序列，求最少删几次删完
- 给定 n 个数，你要每次选一个数删掉直到删完，要求删的过程中没有相邻的相同元素，求方案数. $n \leq 500$

背包

- 01 背包, 完全背包
- 有限背包
- N 个物品, $w_i \leq 80$, 个数限制和价值 $\leq 10^9$, 求容量 S 最多装多少价值的物品, $N \leq 80$
- 有 N 个物品, 第 i 个物品重量为 i , 个数限制为 i , 求拼成 N 的方案数, $N \leq 10^5$

树形DP

- 求树上有几个大小为 K 的独立集
- 求树上每个点的最远点
- 求点权和最大的连通块
- 每个点有重量和价值，求重量和 $\leq S$ 的价值和最大的连通块 ($n, S \leq 2000$)

插头DP&状压DP

- 又称轮廓线DP
- 求一个方格图里的哈密尔顿路径条数
- 求一个方格图用多米诺骨牌覆盖的方案数
- 一个 $n*m$ 的 01 矩阵，要求不能有相邻的 1，求方案数， $n, m \leq 12$
- 求有几个排列满足 $|p[i] - p[i \% N + 1]| \leq 3$ ， $N \leq 10^9$

DP of DP

- 求所有长度为 n 的值域在 $1 \dots n$ 的序列的 LIS 长度之和, $n \leq 15$
- 给定字符串 A , 求长度为 n 的和 A 的 LCS 等于 k 的字符串个数, $|A| \leq 15$, $n \leq 1000$
- 一副麻将有 n 个点数, 每种点数有 m 张, 求有几种牌的集合使得它能和, $n, m \leq 50$

杂题1

- 给定一个长度为 n 的排列 A ，每次在所有 $A[i+1] > A[i]$ 的 i 中等概率随机一个 i ，然后交换 $A[i]$ 和 $A[i+1]$ ，这一步的代价是 i ，求排完序后的期望代价和
- $1 \leq n \leq 18$

杂题2

- 给定一张 n 个点的有向图， $f(E)$ 表示边集 E 的拓扑序个数，令 E 取遍该图的边集的所有子集，求 $f(E)$ 的和
- $n \leq 20$

杂题3

一个游戏有 n 个人，游戏的规则是这样的

(1). 随机选择一个还未出局的人 x

(2). x 对剩下的未出局的人都做一次攻击，一个人受到攻击后，有 $(1 - p)$ 的概率非正常出局

(3). 让 x 正常出局 重复以上步骤直到所有人出局 求一个人正常出局，且一共受到 k 次攻击的概率 $1 \leq n \leq 2000$

杂题4

- 给定一张有向图 G ，求可能的 dfs 序个数， $n \leq 13$

杂题5

给定三个正整数 n, m, k ，考虑所有大小为 k 的正整数可重集合 $\{a_1, a_2 \dots a_k\}$ ，要求 $\sum_{i=1}^k a_i = n$ ，定义这样的一个可重集合的权值为：

$$\sum_{i=1}^k a_i^m$$

求所有满足条件的可重集合的权值之和，由于答案可能过大，你只需要输出答案对 $10^9 + 7$ 取模后的值。

- $n, m, k \leq 5000$

杂题6

- 给定 $a[1\dots n], b[1\dots m]$ ，求有几个 (S, T) ，满足 S 是 a 的子序列， T 是 b 的子序列，且 S 的字典序比 T 大