集合论实验报告：最短路径

一·实验背景

1.实验目的

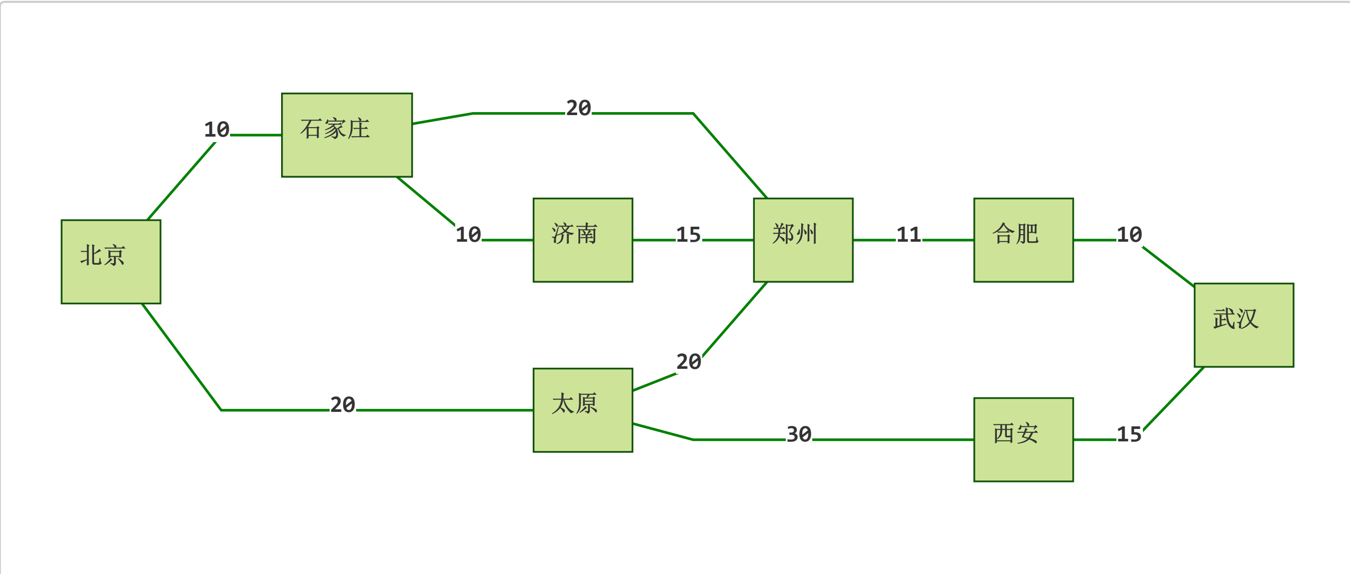
在实际生活中，我们常常会遇到需要这样的问题，比如：

- 一批货从北京到武汉的的最快，或最省钱的走法。
- 在城市群中建一个仓储基地，建在什么位置可以让各个城市的送货速度都比较快。

实验目标就是解决诸如上述的各类问题。

2.实验描述

诸如以上问题，我们都可以将其转化为图论中的最短路径问题。
将以上问题可以抽象为如下情形:



将各个位置考虑为图的顶点，而距离或者所用时间则考虑为图的边权。
则可以利用最短路径算法求解。
此处采用迪杰斯特拉算法。

二·实验原理

1.迪杰斯特拉算法思想

- 设G=(V,E)是一个带权有向图，把图中顶点集合V分成两组:

By 1160300202冯云龙

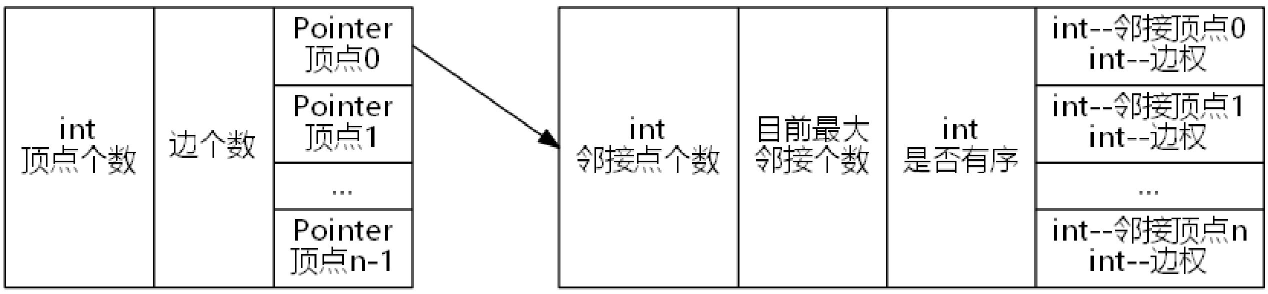
   1. 第一组为已求出最短路径的顶点集合（用S表示)
   2. 第二组为其余未确定最短路径的顶点集合（用U表示）
- 初始时S中只有一个源点，以后每求得一条最短路径，就将加入到集合S中，直到全部顶点都加入到S中，算法就结束了。
- 按最短路径长度的递增次序依次把第二组的顶点加入S中。在加入的过程中，总保持从源点v到S中各顶点的最短路径长度不大于从源点v到U中任何顶点的最短路径长度。
- 此外，每个顶点对应一个距离，S中的顶点的距离就是从v到此顶点的最短路径长度，U中的顶点的距离，是从v到此顶点只包括S中的顶点为中间顶点的当前最短路径长度。

2.迪杰斯特拉算法步骤

1. 初始时，S只包含源点，即S＝{v}，v的距离为0。U包含除v外的其他顶点，即:U={其余顶点}，若v与U中顶点u有边，则正常有权值，若u不是v的出边邻接点，则权值为∞。
2. 从U中选取一个距离v最小的顶点k，把k，加入S中（该选定的距离就是v到k的最短路径长度）。
3. 以k为新考虑的中间点，修改U中各顶点的距离；若从源点v到顶点u的距离（经过顶点k）比原来距离（不经过顶点k）短，则修改顶点u的距离值，修改后的距离值的顶点k的距离加上边上的权。
4. 重复步骤2和3直到所有顶点都包含在S中。

三·代码实现

1. 设计数据结构



参照了耶鲁大学的一位前辈的代码，使用可变数组（利用malloc和relloc），既有了数组的快速，又有了可改变数组大小的能力，在空间效率和时间效率上都有极好的效果。为了代码的简洁，在这里去掉了错误检测。

```
//无向带权图数据结构
typedef struct _list {
 int vec;                      //临接顶点
 int weight;                   //权
} link_list;
typedef struct w_graph {
 int n;                        //顶点个数
 int m;                        //边个数
 struct successors {
     int d;                    //临接点个数
     int len;                  //最大临接点个数
     char is_sorted;           //
     link_list list[1];        //临接列表
```

```
 } *v_list[1];
} *WGraph;
```

2. 设计数据操作
   代码实现如下:
   创建一个顶点从0 ~ n-1的带权图

```
WGraph w_graph_create(int n) {
 WGraph g;
 int i;
 g = malloc(sizeof(struct w_graph) + sizeof(struct successors *) * (n - 1));
 g->n = n;
 g->m = 0;
 for (i = 0; i != n; i++) {
     g->v_list[i] = malloc(sizeof(struct successors));
     g->v_list[i]->d = 0;
     g->v_list[i]->len = 1;
     g->v_list[i]->is_sorted = 1;
 }
 return g;
}
```

释放内存

```
void w_graph_destroy(WGraph g) {
 int i;
 for (i = 0; i != g->n; i++) {
     free(g->v_list[i]);
 };
 free(g);
}
```

添加边和权

```
void w_graph_add_edge(WGraph g, int u, int v, int weight) {
 //是否需要增长list
 while (g->v_list[u]->d >= g->v_list[u]->len) {
     g->v_list[u]->len *= 2;
     g->v_list[u] =
             realloc(g->v_list[u], sizeof(struct successors) +
             sizeof(link_list) * (g->v_list[u]->len - 1));
 }
 //添加新临接点
 g->v_list[u]->list[g->v_list[u]->d].vec = v;
 g->v_list[u]->list[g->v_list[u]->d].weight = weight;
 g->v_list[u]->d++;
 g->v_list[u]->is_sorted = 0;
 //边数+1
 g->m++;
```

```
}
~~~c
返回顶点个数
int w_graph_vector_count(WGraph g) {
 return g->n;
}
```

返回边个数

```
int w_graph_edge_count(WGraph g) {
 return g->m;
}
```

返回顶点的度

```
int w_graph_out_degree(WGraph g, int source) {
 return g->v_list[source]->d;
}
```

判断是否邻接

```
int w_graph_has_edge(WGraph g, int source, int sink) {
 int i;
 if (w_graph_out_degree(g, source) >= BSEARCH_THRESHOLD) {
     //确保已经被排序
     if (!g->v_list[source]->is_sorted) {
         qsort(g->v_list[source]->list,
               g->v_list[source]->d,
               sizeof(link_list),
               list_cmp);
     }
     //使用二分查找
     link_list to_find;
     to_find.vec = sink;
     to_find.weight = 0;

     return bsearch(&to_find,
                    g->v_list[source]->list,
                    g->v_list[source]->d,
                    sizeof(link_list),
                    list_cmp) != 0;
 } else {
     //数据量很少，直接遍历
     int vec_degree = g->v_list[source]->d;
     for (i = 0; i != vec_degree; i++) {
         if (g->v_list[source]->list[i].vec == sink) {
             return 1;
         }
     }
```

```
    }
    return 0;
}
```

获取边的权,和判断是否有边的接口思想一致，不在赘述

```
int w_graph_weight_edge(WGraph g, int source, int sink);
```

提供读取顶点数据的接口

```
void w_graph_foreach(WGraph g,int source,
     void (*f)(WGraph, int, int, int, void *),void *data){
 int i;
 for (i = 0; i != g->v_list[source]->d; ++i) {
     f(g, source, g->v_list[source]->list[i].vec,
                g->v_list[source]->list[i].weight, data);
 }
}
```

3. 实现算法

- 定义所需数据结构

```
struct min_len {
  int n;                    //顶点个数
  int vec;                  //起始点
  struct list {
      int dist;             //与起始顶点的距离
      int prev;             //前驱动点
  } a_list[1];              //
};
```

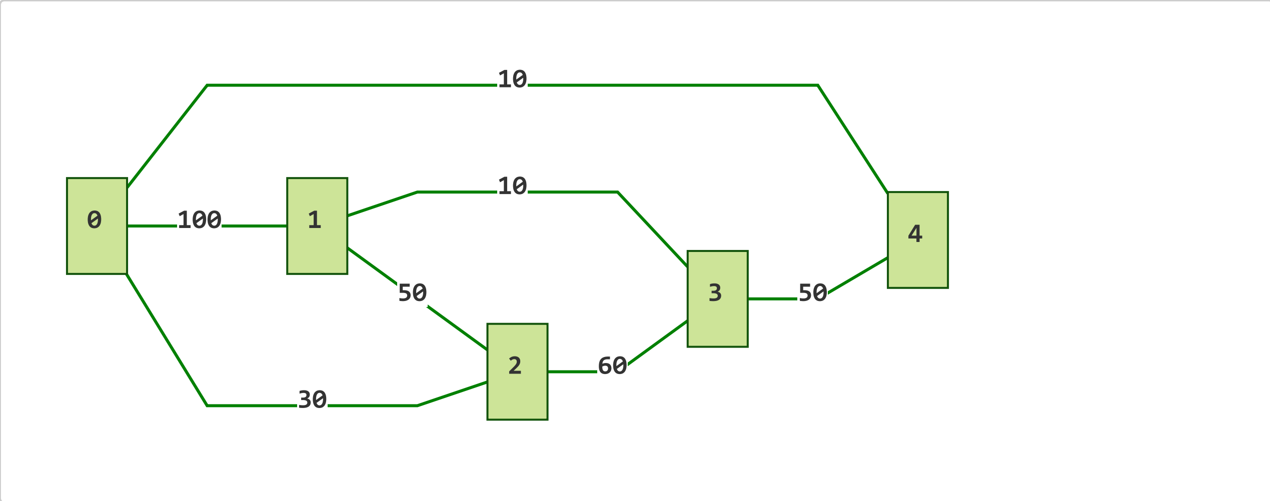
- 实现算法

```
Min_len Dijkstra(WGraph g, int source) {
  int i, j, *S;
  Min_len res;
  int vec_num = w_graph_vector_count(g);
  res = malloc(sizeof(struct min_len) + sizeof(struct list) * (vec_num - 1));
  S = calloc((size_t) vec_num, sizeof(int));
  res->n = vec_num;
  res->vec = source;
  //初始化各点距离及标记
  for (i = 0; i != vec_num; ++i) {
      S[i] = 0;
      if (w_graph_has_edge(g, source, i)) {
          res->a_list[i].dist = w_graph_weight_edge(g, source, i);
          res->a_list[i].prev = source;
      } else {
```

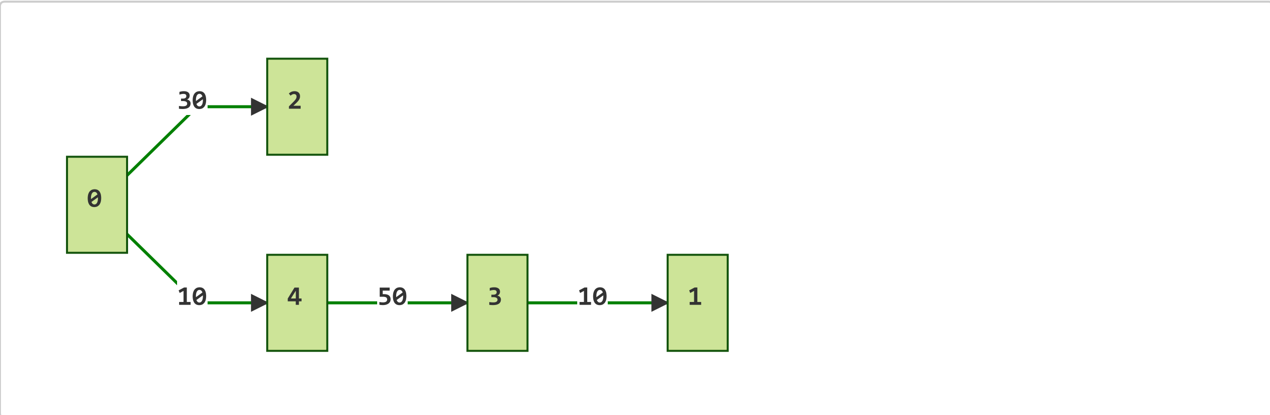
```
            res->a_list[i].prev = -1;
            res->a_list[i].dist = INFINITY;
        }
    }
    //初始点已知
    res->a_list[source].dist = 0;
    res->a_list[source].prev = source;
    S[source] = 1;

    for (i = 1; i != vec_num; ++i) {
        int min_dst = INFINITY;
        int u = source;
        //找出未使用过的点中dist最小的
        for (j = 0; j != vec_num; ++j) {
            if ((!S[j]) && res->a_list[j].dist < min_dst) {
                u = j;                                  //u是距离source最近的点
                min_dst = res->a_list[j].dist;
            }
        }

        S[u] = 1;                                          //将u标记为已使用

        for (j = 0; j != vec_num; ++j)
             //j点未被使用且u,j之间有边
            if ((!S[j]) && w_graph_has_edge(g, u, j)) {
                if (res->a_list[u].dist + w_graph_weight_edge(g, u, j)
                                            < res->a_list[j].dist) {
                    res->a_list[j].dist = res->a_list[u].dist
                        + w_graph_weight_edge(g, u, j);   //更新距离
                    res->a_list[j].prev = u;              //更新路径
                }
            }
    }
    free(S);
    return res;
}
```

四·实验结果

输入下图：



可得到下列结果：



五·算法分析

1. 迪杰斯特拉算法的时间复杂度是$O(n^2)$,空间复杂度则取决于数据结构，使用矩阵则为$O(n^2)$。
2. 相对于弗洛伊德算法迪杰斯特拉算法来说，迪杰斯特拉算法不能能处理边权为负值的情况。
3. 迪杰斯特拉算法通过斐波那契堆优化后的复杂度为$O(E+Vlg(V))$，显著提高效率，限于时间原因，此处并未优化。