Harbin Institute of Technology

集合论实验报告：最短路径

作者: 冯云龙
学号:1160300202

2017 年 5 月 20 日

摘要

生活中的许许多多看似不同的问题在本质上却是相同的，我们对于问题的关注的也往往都是最省时，最省钱... 这个时候，通过对图论问题的研究，我们就可以对这些问题做出解答，此报告主要回答关于图论中最短路径的问题。

关键字： *Dijkstra* 最短路径

目录

第一部分　正文

第 1 章　实验背景

1.1　实验目的

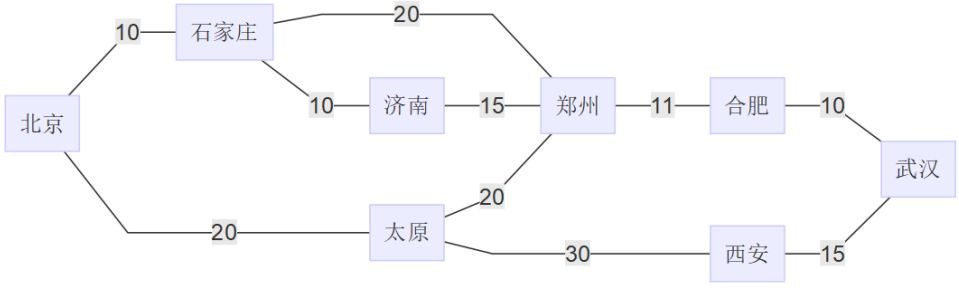
在实际生活中，我们常常会遇到关注点在于最短、最近、最省钱这些方面的问题，就比如下列问题：

- 一批货从北京到武汉的的最快，或最省钱的走法。
- 在城市群中建一个仓储基地，建在什么位置可以让各个城市的送货速度都比较快。

而像这样的问题，我们都可以通过将其转化为图的问题来解决。

1.2　实验方法

诸如以上问题，我们都可以通过将其转化成图，而后使用求解图的方法解决它。例如，上述一个和距离有关的问题，我们就可以将其按如下方式转化：取图 $G(V,E,W)$，城市所对应的顶点集 $(V_0,V_1...V_{n-1}) \in V$，若两个城市 V_i,V_j 邻接，距离为 w，则有 $(V_i,V_j) \in E$，$W(V_i,V_j)=w$。



第 2 章　实验原理

2.1　迪杰斯特拉算法思想

- 设 $G=(V,E,W)$ 是一个带权有向图，把图中顶点集合 V 分成两组:
  1. 第一组为已求出最短路径的顶点集合（用 S 表示)
  2. 第二组为其余未确定最短路径的顶点集合（用 U 表示）
- 初始时 S 中只有一个源点，以后每求得一条最短路径, 就将加入到集合 S 中，直到全部顶点都加入到 S 中，算法就结束了。
- 按最短路径长度的递增次序依次把第二组的顶点加入 S 中。在加入的过程中，总保持从源点 v 到 S 中各顶点的最短路径长度不大于从源点 v 到 U 中任何顶点的最短路径长度。
- 此外，每个顶点对应一个距离，S 中的顶点的距离就是从 v 到此顶点的最短路径长度，U 中的顶点的距离，是从 v 到此顶点只包括 S 中的顶点为中间顶点的当前最短路径长度。

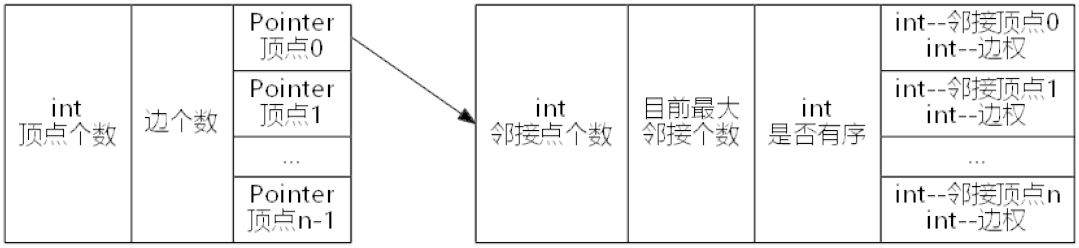
2.2　迪杰斯特拉算法步骤

1. 初始时，S 只包含源点，即 S v，$v-v$ 的距离为 0。U 包含除 v 外的其他顶点，即:$U=V\setminus S$，若 v 与 U 中顶点 u 有边，则 $<u,v>$ 正常有权值，若 u 不是 v 的出边邻接点，则 $<u,v>$ 权值为 ∞。
2. 从 U 中选取一个距离 v 最小的顶点 k，把 k，加入 S 中（该选定的距离就是 v 到 k 的最短路径长度）。
3. 以 k 为新考虑的中间点，修改 U 中各顶点的距离；若从源点 v 到顶点 u 的距离（经过顶点 k）比原来距离（不经过顶点 k）短，则修改顶点 u 的距离值，修改后的距离值的顶点 k 的距离加上边上的权。
4. 重复步骤 2 和 3 直到所有顶点都包含在 S 中。

第 3 章　代码实现

3.1　设计数据结构

参照了耶鲁大学的一位前辈的代码，动态分配数组，长度可以扩展，既不浪费空间，有不会带来性能损失。数据结构如下A：



3.2　设计数据操作

1. 创建一个顶点从 $0\rightarrow n-1$ 的带权图
2. 从内存中删去一个图
3. 添加边和权
4. 返回顶点个数
5. 返回边个数
6. 返回顶点的度
7. 判断是否邻接
8. 获取边的权
9. 提供读取顶点数据的接口

3.3　实现迪杰斯特拉算法

- 定义数据结构
- 迪杰斯特拉算法实现B

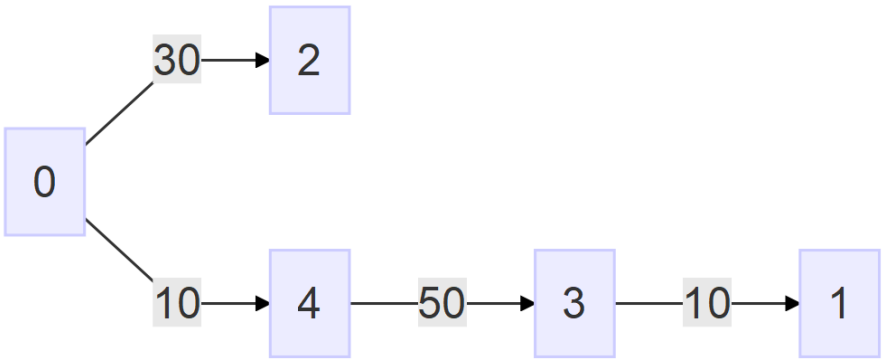
DIJKSTRA'S ALGORITHM(G, v_0)

```
1  for v ∈ G.V
2      Dis(v) = G.W(v, v_0)
3  Set v_0 ∈ S
4  while S ≠ G.V
5      k = Dis(V).V_m
6      Set k ∈ S
7      for v ∉ S
8          if Dis(k) + G.W(k, v) < Dis(v)
9              Dis(v) = Dis(k) + G.W(k, v)
10             Prev(v) = k
```

第 4 章　实验结果

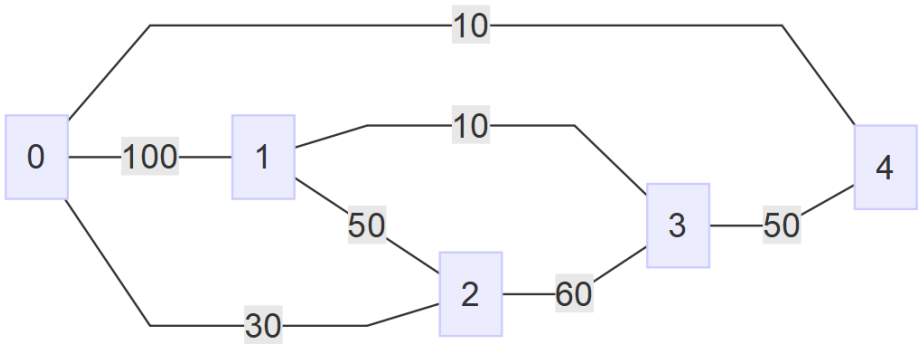
4.1　数据输入

输入如下无向带权图



4.2　结果输出

通过迪杰斯特拉算法可得到如下结果，既得出距离，又可以显示路径



第 5 章　实验分析

5.1　效率分析

迪杰斯特拉算法的时间复杂度是 $O(n^2)$, 空间复杂度则取决于数据结构，使用矩阵则为 $O(n^2)$。

5.2　同类算法比较

相对于弗洛伊德算法迪杰斯特拉算法来说，迪杰斯特拉算法不能能处理边权为负值的情况。

5.3　优化策略

权值排序优化策略　将要扫描的结点按其对应弧的权值进行顺序排列，每循环一次即可得到符合条件的结点，大大提高了算法的执行效率。

A* 算法优化策略　采用改进的 $Dijkstra$ 算法——A* 算法。A* 算法是人工智能运用在游戏中的一个重要实践, 它主要是解决路径搜索问题。A* 算法实际是一种启发式搜索。所谓启发式搜索，就是利用一个估价函数 $judge$　评估每次决策的价值，决定先尝试哪一种方案。这样可以极大地优化普通的广度优先搜索。从 $Dijkstra$ 算法到 A* 算法是判断准则的引入，如果这个判断条件不成立，同样地，只能采用 $Dijkstra$ 算法。所以 A* 算法中的估价函数是至关重要。

扇形优化策略　从尽量减少最短路径分析过程中搜索的临时结点数量，限制范围搜索和限定方向搜索考虑进行优化。那么这种有损算法是否可行呢？我们知道，现实生活中行进，不会向着目的地的相反方向行进，否则就是南辕北辙。所以，当所研究的网络可以抽象化为平面网络的条件下，也不必搜索全部结点，可以在以源点到终点所在直线为轴线的扇形区域内搜索最短路径。这样，搜索方向明显地趋向终点，提高了搜索速度，虽然抛弃了部分结点，但基本上不影响搜索的成功率。

第二部分　附录

A　带权图实现

```
1  //
2  // Created by Along on 2017/5/13.
3  //
4
5  #include <stdlib.h>
6  #include <assert.h>
7
8  #include "WeightGraph.h"
9
10 //基础带权图定义
11 //使用可变数组表示的临接矩阵
12
13
14 typedef struct _list {
15     int vec;              //临接顶点
16     int weight;           //权
17 } link_list;
18
19 struct w_graph {
20     int n;                        //顶点个数
21     int m;                        //边个数
22     struct successors {
23         int d;                    //临接点个数
24         int len;                  //最大临接点个数
25         char is_sorted;           //
26         link_list list[1];                //临接列表
27     } *v_list[1];
28 };
29
30
31 //创建一个顶点从0 ~ n-1的带权图
32 WGraph w_graph_create(int n) {
33     WGraph g;
34     int i;
35
36     g = malloc(sizeof(struct w_graph) +
37     sizeof(struct successors *) * (n - 1));
38     assert(g);
39
40     g->n = n;
```

```
41      g->m = 0;
42
43      for (i = 0; i != n; i++) {
44          g->v_list[i] = malloc(sizeof(struct successors));
45          assert(g->v_list[i]);
46          g->v_list[i]->d = 0;
47          g->v_list[i]->len = 1;
48          g->v_list[i]->is_sorted = 1;
49      }
50
51      return g;
52  }
53
54  //释放内存
55  void w_graph_destroy(WGraph g) {
56      int i;
57
58      for (i = 0; i != g->n; i++) {
59          free(g->v_list[i]);
60      };
61      free(g);
62  }
63
64  //添加边和权
65  void w_graph_add_edge(WGraph g, int u, int v, int weight) {
66      assert(u >= 0);
67      assert(u < g->n);
68      assert(v >= 0);
69      assert(v < g->n);
70
71      //是否需要增长 list
72      while (g->v_list[u]->d >= g->v_list[u]->len) {
73          g->v_list[u]->len *= 2;
74          g->v_list[u] =
75                  realloc(g->v_list[u], sizeof(struct successors) +
76                   sizeof(link_list) * (g->v_list[u]->len - 1));
77      }
78
79      //添加新临接点
80      g->v_list[u]->list[g->v_list[u]->d].vec = v;
81      g->v_list[u]->list[g->v_list[u]->d].weight = weight;
82
83      g->v_list[u]->d++;
84
85      g->v_list[u]->is_sorted = 0;
```

```
86
87      //边数+1
88      g->m++;
89  }
90
91  //返回顶点个数
92  int w_graph_vector_count(WGraph g) {
93      return g->n;
94  }
95
96  //返回边个数
97  int w_graph_edge_count(WGraph g) {
98      return g->m;
99  }
100
101 //返回顶点的度
102 int w_graph_out_degree(WGraph g, int source) {
103     assert(source >= 0);
104     assert(source < g->n);
105
106     return g->v_list[source]->d;
107 }
108
109 //是否需要进行二分搜索和排序
110 #define BSEARCH_THRESHOLD (10)
111
112 static int list_cmp(const void *a, const void *b) {
113     return ((const link_list *) a)->
114     vec - ((const link_list *) b)->vec;
115 }
116
117
118 #include <stdio.h>
119
120 //二者之间有边则返回1
121 int w_graph_has_edge(WGraph g, int source, int sink) {
122     int i;
123
124     assert(source >= 0);
125     assert(source < g->n);
126     assert(sink >= 0);
127     assert(sink < g->n);
128
129     if (w_graph_out_degree(g, source) >= BSEARCH_THRESHOLD) {
130         //确保已经被排序
```

```
131         if (!g->v_list[source]->is_sorted) {
132             qsort(g->v_list[source]->list,
133                   g->v_list[source]->d,
134                   sizeof(link_list),
135                   list_cmp);
136         }
137         //使用二分查找
138         link_list to_find;
139         to_find.vec = sink;
140         to_find.weight = 0;
141 
142         return bsearch(&to_find,
143                        g->v_list[source]->list,
144                        g->v_list[source]->d,
145                        sizeof(link_list),
146                        list_cmp) != 0;
147     } else {
148         //数据量很少，直接遍历
149         int vec_degree = g->v_list[source]->d;
150         for (i = 0; i != vec_degree; i++) {
151             if (g->v_list[source]->list[i].vec == sink) {
152                 return 1;
153             }
154         }
155     }
156     return 0;
157 }
158 
159 //返回权
160 int w_graph_weight_edge(WGraph g, int source, int sink) {
161     int i;
162 
163     assert(source >= 0);
164     assert(source < g->n);
165     assert(sink >= 0);
166     assert(sink < g->n);
167 
168     if (w_graph_out_degree(g, source) >= BSEARCH_THRESHOLD) {
169         //确保已经被排序
170         if (!g->v_list[source]->is_sorted) {
171             qsort(g->v_list[source]->list,
172                   g->v_list[source]->d,
173                   sizeof(link_list),
174                   list_cmp);
175         }
```

```
176         //使用二分查找
177         link_list to_find;
178         to_find.vec = sink;
179         to_find.weight = 0;
180         link_list *res = bsearch(&to_find,
181                                  g->v_list[source]->list,
182                                  g->v_list[source]->d,
183                                  sizeof(link_list),
184                                  list_cmp);
185         return res->weight;
186     } else {
187         //数据量很少，直接遍历
188         for (i = 0; i != g->v_list[source]->d; i++) {
189             if (g->v_list[source]->list[i].vec == sink) {
190                 int res = g->v_list[source]->list[i].weight;
191                 return res;
192             }
193         }
194         return INFINITY;
195     }
196 }
197
198 //提供数据 遍历接口
199 void w_graph_foreach(WGraph g, int source,
200 void (*f)(WGraph, int, int, int, void *), void *data) {
201     int i;
202
203     assert(source >= 0);
204     assert(source < g->n);
205
206     for (i = 0; i != g->v_list[source]->d; ++i) {
207         f(g, source, g->v_list[source]->list[i].vec,
208          g->v_list[source]->list[i].weight, data);
209     }
210 }
```

B 最短路径实现

```
1 //
2 // Created by Along on 2017/5/13.
3 //
4
5 #include <stddef.h>
6 #include <assert.h>
```

```c
#include <malloc.h>
#include <stdio.h>
#include "WeightGraph.h"
#include "Graph_tools.h"

struct min_len {
    int n;
    int vec;
    struct list {
        int dist;           //与所要求顶点的距离
        int prev;           //前驱动点
    } a_list[1];
};

//迪杰斯特拉算法
Min_len Dijkstra(WGraph g, int source) {
    int i, j, *S;
    Min_len res;

    int vec_num = w_graph_vector_count(g);

    assert(source >= 0);
    assert(source < vec_num);

    res = malloc(sizeof(struct min_len) +
    sizeof(struct list) * (vec_num - 1));
    S = calloc((size_t) vec_num, sizeof(int));
    assert(res);
    assert(S);

    res->n = vec_num;
    res->vec = source;

    //初始化各点
    for (i = 0; i != vec_num; ++i) {
        S[i] = 0;
        if (w_graph_has_edge(g, source, i)) {
            res->a_list[i].dist = w_graph_weight_edge(g, source, i);
            res->a_list[i].prev = source;
        } else {
            res->a_list[i].prev = -1;
            res->a_list[i].dist = INFINITY;
        }
    }

```

```
52      res->a_list[source].dist = 0;
53      res->a_list[source].prev = source;
54      S[source] = 1;
55
56      for (i = 1; i != vec_num; ++i) {
57          int min_dst = INFINITY;
58          int u = source;
59          //找出未使用过的点中 dist 最小的
60          for (j = 0; j != vec_num; ++j) {
61              if ((!S[j]) && res->a_list[j].dist < min_dst) {
62                  u = j;      //u是距离 source 最近的点
63                  min_dst = res->a_list[j].dist;
64              }
65          }
66
67          S[u] = 1;     //将u标记为已使用
68
69          for (j = 0; j != vec_num; ++j)
70          //j点未被使用且u,j之间有边
71              if ((!S[j]) && w_graph_has_edge(g, u, j)) {
72                  if (res->a_list[u].dist + w_graph_weight_edge(g, u, j)
73                   < res->a_list[j].dist) {
74                      res->a_list[j].dist = res->a_list[u].dist +
75                      w_graph_weight_edge(g, u, j);    //更新距离
76                      res->a_list[j].prev = u;         //更新路径
77                  }
78              }
79      }
80      free(S);
81      return res;
82  }
83
84  //数据遍历接口
85  void min_len_foreach(Min_len m,
86  void (*f)(Min_len, int, int, void *), void *data) {
87      int i;
88      for (i = 0; i != m->n; i++) {
89          f(m, m->a_list[i].dist, m->a_list[i].prev, data);
90      }
91  }
92
93  //顶点个数
94  int min_len_vector_count(Min_len m) {
95      return m->n;
96  }
```

```
97
98  //释放内存
99  void min_len_destroy(Min_len m) {
100     free(m);
101 }
102
103 //封装一次添加二条边
104 void w_graph_add_edge2(WGraph g, int source, int sink, int weight) {
105     w_graph_add_edge(g, source, sink, weight);
106     w_graph_add_edge(g, sink, source, weight);
107 }
108
109 //打印数据
110 static void w_graph_show_vec(WGraph g, int src, int sink,
111 int weight, void *data) {
112     printf(" %d:%d ", sink, weight);
113 }
114
115 //调用接口
116 void min_len_show(Min_len ml) {
117     int i, j;
118     for (i = 0; i != ml->n; ++i) {
119         printf("Dist:%d ", ml->a_list[i].dist);
120         for (j = i; j != ml->vec; j = ml->a_list[j].prev) {
121             printf("%d <- ", j);
122         }
123         printf("%d\n", ml->vec);
124     }
125 }
```