Harbin Institute of Technology

集合论实验报告：最短路径

作者: 冯云龙
学号:1160300202

2017 年 5 月 20 日

摘要

生活中的许许多多看似不同的问题在本质上却是相同的，我们对于问题的关注的也往往都是最省时，最省钱... 这个时候，通过对图论问题的研究，我们就可以对这些问题做出解答，此报告主要回答关于图论中最短路径的问题。

关键字： $Dijkstra$ 最短路径

目录

第一部分　正文

第 1 章　实验背景

1.1　实验目的

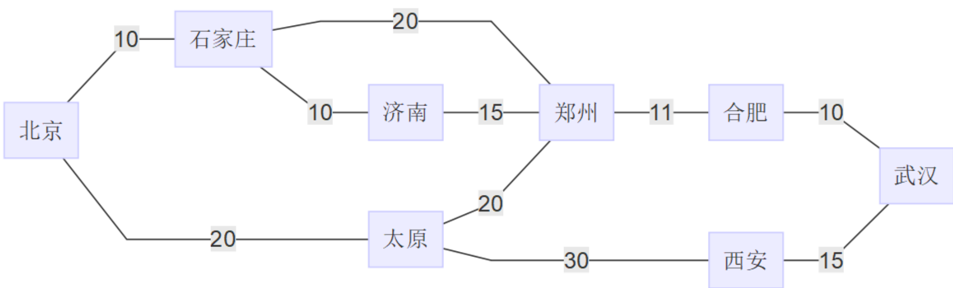
在实际生活中，我们常常会遇到关注点在于最短、最近、最省钱这些方面的问题，就比如下列问题:

- 一批货从北京到武汉的的最快，或最省钱的走法。
- 在城市群中建一个仓储基地，建在什么位置可以让各个城市的送货速度都比较快。

而像这样的问题，我们都可以通过将其转化为图的问题来解决。

1.2　实验方法

诸如以上问题，我们都可以通过将其转化成图，而后使用求解图的方法解决它。例如，上述一个和距离有关的问题，我们就可以将其按如下方式转化：取图 $G(V,E,W)$，城市所对应的顶点集 $(V_0,V_1...V_{n-1})\in V$，若两个城市 V_i,V_j 邻接，距离为 w，则有 $(V_i,V_j)\in E$，$W(V_i,V_j)=w$。



第 2 章　实验原理

2.1　迪杰斯特拉算法思想

- 设 $G=(V,E,W)$ 是一个带权有向图，把图中顶点集合 V 分成两组:
  1. 第一组为已求出最短路径的顶点集合（用 S 表示)
  2. 第二组为其余未确定最短路径的顶点集合（用 U 表示）
- 初始时 S 中只有一个源点，以后每求得一条最短路径, 就将加入到集合 S 中，直到全部顶点都加入到 S 中，算法就结束了。
- 按最短路径长度的递增次序依次把第二组的顶点加入 S 中。在加入的过程中，总保持从源点 v 到 S 中各顶点的最短路径长度不大于从源点 v 到 U 中任何顶点的最短路径长度。
- 此外，每个顶点对应一个距离，S 中的顶点的距离就是从 v 到此顶点的最短路径长度，U 中的顶点的距离，是从 v 到此顶点只包括 S 中的顶点为中间顶点的当前最短路径长度。

2.2　迪杰斯特拉算法步骤

1. 初始时，S 只包含源点，即 S v，$v-v$ 的距离为 0。U 包含除 v 外的其他顶点，即:$U = V \setminus S$，若 v 与 U 中顶点 u 有边，则 $<u,v>$ 正常有权值，若 u 不是 v 的出边邻接点，则 $<u,v>$ 权值为 ∞。

2. 从 U 中选取一个距离 v 最小的顶点 k，把 k，加入 S 中（该选定的距离就是 v 到 k 的最短路径长度）。

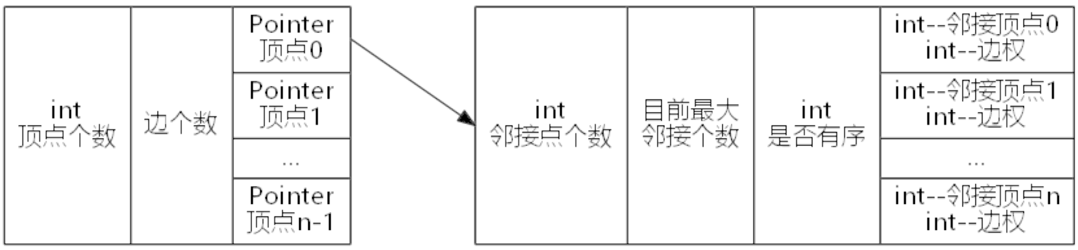
3. 以 k 为新考虑的中间点，修改 U 中各顶点的距离；若从源点 v 到顶点 u 的距离（经过顶点 k）比原来距离（不经过顶点 k）短，则修改顶点 u 的距离值，修改后的距离值的顶点 k 的距离加上边上的权。

4. 重复步骤 2 和 3 直到所有顶点都包含在 S 中。

第 3 章　代码实现

3.1　设计数据结构

参照了耶鲁大学的一位前辈的代码，动态分配数组，长度可以扩展，既不浪费空间，有不会带来性能损失。数据结构如下A：



3.2　设计数据操作

1. 创建一个顶点从 $0 \to n-1$ 的带权图

2. 从内存中删去一个图

3. 添加边和权

4. 返回顶点个数

5. 返回边个数

6. 返回顶点的度

7. 判断是否邻接

8. 获取边的权

9. 提供读取顶点数据的接口

3.3　实现迪杰斯特拉算法

- 定义数据结构

- 迪杰斯特拉算法实现B

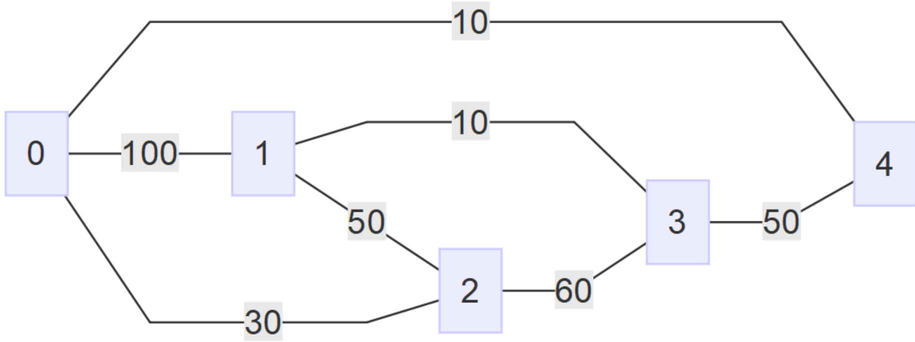
DIJKSTRA'S ALGORITHM(G, v_0)

for $v \in G.V$
　　$Dis(v) = G.W(v, v_0)$
$Set\ v_0 \in S$
while $S \neq G.V$
　　$k = Dis(V).V_m$
　　$Set\ k \in S$
　　for $v \notin S$
　　　　if $Dis(k) + G.W(k, v) < Dis(v)$
　　　　　　$Dis(v) = Dis(k) + G.W(k, v)$
　　　　　　$Prev(v) = k$

第 4 章　实验结果

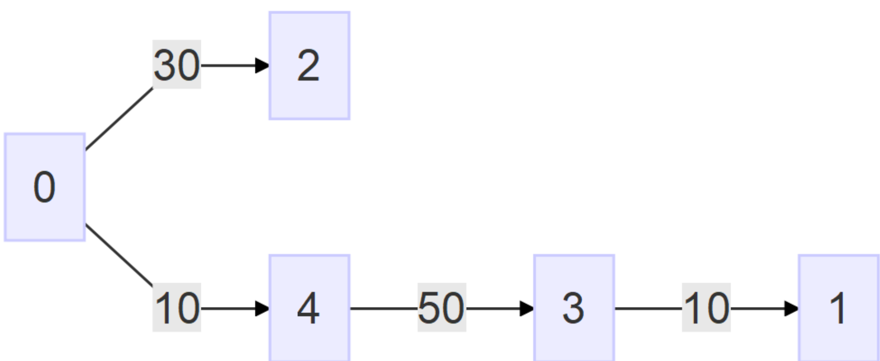
4.1　数据输入

输入如下无向带权图



4.2　结果输出

通过迪杰斯特拉算法可得到如下结果，既得出距离，又可以显示路径



第 5 章　实验分析

5.1　效率分析

迪杰斯特拉算法的时间复杂度是 $O(n^2)$, 空间复杂度则取决于数据结构，使用矩阵则为 $O(n^2)$。

5.2　同类算法比较

相对于弗洛伊德算法迪杰斯特拉算法来说，迪杰斯特拉算法不能能处理边权为负值的情况。

5.3　优化策略

权值排序优化策略　将要扫描的结点按其对应弧的权值进行顺序排列，每循环一次即可得到符合条件的结点，大大提高了算法的执行效率。

A* 算法优化策略　采用改进的 *Dijkstra* 算法——A* 算法。A* 算法是人工智能运用在游戏中的一个重要实践, 它主要是解决路径搜索问题。A* 算法实际是一种启发式搜索。所谓启发式搜索，就是利用一个估价函数 *judge*　评估每次决策的价值，决定先尝试哪一种方案。这样可以极大地优化普通的广度优先搜索。从 *Dijkstra* 算法到 A* 算法是判断准则的引入，如果这个判断条件不成立，同样地，只能采用 *Dijkstra* 算法。所以 A* 算法中的估价函数是至关重要。

扇形优化策略　从尽量减少最短路径分析过程中搜索的临时结点数量，限制范围搜索和限定方向搜索考虑进行优化。那么这种有损算法是否可行呢？我们知道，现实生活中行进，不会向着目的地的相反方向行进，否则就是南辕北辙。所以，当所研究的网络可以抽象化为平面网络的条件下，也不必搜索全部结点，可以在以源点到终点所在直线为轴线的扇形区域内搜索最短路径。这样，搜索方向明显地趋向终点，提高了搜索速度，虽然抛弃了部分结点，但基本上不影响搜索的成功率。

第二部分　附录

A　带权图实现

```c
//
// Created by Along on 2017/5/13.
// https://github.com/AlongWY/Graph
//

#include <stdlib.h>
#include <assert.h>

#include "WeightGraph.h"

//基础带权图定义
//使用可变数组表示的临接矩阵


typedef struct _list {
    int vec;            //临接顶点
    int weight;         //权
} link_list;

struct w_graph {
    int n;                      //顶点个数
    int m;                      //边个数
    struct successors {
        int d;                  //临接点个数
        int len;                //最大临接点个数
        char is_sorted;         //
        link_list list[1];              //临接列表
    } *v_list[1];
};


//创建一个顶点从0 ~ n-1的带权图
WGraph w_graph_create(int n) {
    WGraph g;
    int i;

    g = malloc(sizeof(struct w_graph) +
    sizeof(struct successors *) * (n - 1));
    assert(g);

```

```
    g->n = n;
    g->m = 0;

    for (i = 0; i != n; i++) {
        g->v_list[i] = malloc(sizeof(struct successors));
        assert(g->v_list[i]);
        g->v_list[i]->d = 0;
        g->v_list[i]->len = 1;
        g->v_list[i]->is_sorted = 1;
    }

    return g;
}

//释放内存
void w_graph_destroy(WGraph g) {
    int i;

    for (i = 0; i != g->n; i++) {
        free(g->v_list[i]);
    };
    free(g);
}

//添加边和权
void w_graph_add_edge(WGraph g, int u, int v, int weight) {
    assert(u >= 0);
    assert(u < g->n);
    assert(v >= 0);
    assert(v < g->n);

    //是否需要增长list
    while (g->v_list[u]->d >= g->v_list[u]->len) {
        g->v_list[u]->len *= 2;
        g->v_list[u] =
                realloc(g->v_list[u], sizeof(struct successors) +
                 sizeof(link_list) * (g->v_list[u]->len - 1));
    }

    //添加新临接点
    g->v_list[u]->list[g->v_list[u]->d].vec = v;
    g->v_list[u]->list[g->v_list[u]->d].weight = weight;

    g->v_list[u]->d++;

```

```c
    g->v_list[u]->is_sorted = 0;

    //边数+1
    g->m++;
}

//返回顶点个数
int w_graph_vector_count(WGraph g) {
    return g->n;
}

//返回边个数
int w_graph_edge_count(WGraph g) {
    return g->m;
}

//返回顶点的度
int w_graph_out_degree(WGraph g, int source) {
    assert(source >= 0);
    assert(source < g->n);

    return g->v_list[source]->d;
}

//是否需要进行二分搜索和排序
#define BSEARCH_THRESHOLD (10)

static int list_cmp(const void *a, const void *b) {
    return ((const link_list *) a)->
    vec - ((const link_list *) b)->vec;
}


#include <stdio.h>

//二者之间有边则返回1
int w_graph_has_edge(WGraph g, int source, int sink) {
    int i;

    assert(source >= 0);
    assert(source < g->n);
    assert(sink >= 0);
    assert(sink < g->n);

    if (w_graph_out_degree(g, source) >= BSEARCH_THRESHOLD) {
```

```
        //确保已经被排序
        if (!g->v_list[source]->is_sorted) {
            qsort(g->v_list[source]->list,
                  g->v_list[source]->d,
                  sizeof(link_list),
                  list_cmp);
        }
        //使用二分查找
        link_list to_find;
        to_find.vec = sink;
        to_find.weight = 0;

        return bsearch(&to_find,
                       g->v_list[source]->list,
                       g->v_list[source]->d,
                       sizeof(link_list),
                       list_cmp) != 0;
    } else {
        //数据量很少，直接遍历
        int vec_degree = g->v_list[source]->d;
        for (i = 0; i != vec_degree; i++) {
            if (g->v_list[source]->list[i].vec == sink) {
                return 1;
            }
        }
    }
    return 0;
}

//返回权
int w_graph_weight_edge(WGraph g, int source, int sink) {
    int i;

    assert(source >= 0);
    assert(source < g->n);
    assert(sink >= 0);
    assert(sink < g->n);

    if (w_graph_out_degree(g, source) >= BSEARCH_THRESHOLD) {
        //确保已经被排序
        if (!g->v_list[source]->is_sorted) {
            qsort(g->v_list[source]->list,
                  g->v_list[source]->d,
                  sizeof(link_list),
                  list_cmp);
```

```c
        }
        //使用二分查找
        link_list to_find;
        to_find.vec = sink;
        to_find.weight = 0;
        link_list *res = bsearch(&to_find,
                                 g->v_list[source]->list,
                                 g->v_list[source]->d,
                                 sizeof(link_list),
                                 list_cmp);
        return res->weight;
    } else {
        //数据量很少，直接遍历
        for (i = 0; i != g->v_list[source]->d; i++) {
            if (g->v_list[source]->list[i].vec == sink) {
                int res = g->v_list[source]->list[i].weight;
                return res;
            }
        }
        return INFINITY;
    }
}

//提供数据 遍历接口
void w_graph_foreach(WGraph g, int source,
void (*f)(WGraph, int, int, int, void *), void *data) {
    int i;

    assert(source >= 0);
    assert(source < g->n);

    for (i = 0; i != g->v_list[source]->d; ++i) {
        f(g, source, g->v_list[source]->list[i].vec,
          g->v_list[source]->list[i].weight, data);
    }
}
```

B 最短路径实现

```c
//
// Created by Along on 2017/5/13.
// https://github.com/AlongWY/Graph
//

```

```c
#include <stddef.h>
#include <assert.h>
#include <malloc.h>
#include <stdio.h>
#include "WeightGraph.h"
#include "Graph_tools.h"

struct min_len {
    int n;
    int vec;
    struct list {
        int dist;           //与所要求顶点的距离
        int prev;           //前驱动点
    } a_list[1];
};

//迪杰斯特拉算法
Min_len Dijkstra(WGraph g, int source) {
    int i, j, *S;
    Min_len res;

    int vec_num = w_graph_vector_count(g);

    assert(source >= 0);
    assert(source < vec_num);

    res = malloc(sizeof(struct min_len) +
    sizeof(struct list) * (vec_num - 1));
    S = calloc((size_t) vec_num, sizeof(int));
    assert(res);
    assert(S);

    res->n = vec_num;
    res->vec = source;

    //初始化各点
    for (i = 0; i != vec_num; ++i) {
        S[i] = 0;
        if (w_graph_has_edge(g, source, i)) {
            res->a_list[i].dist = w_graph_weight_edge(g, source, i);
            res->a_list[i].prev = source;
        } else {
            res->a_list[i].prev = -1;
            res->a_list[i].dist = INFINITY;
        }
```

```
    }

    res->a_list[source].dist = 0;
    res->a_list[source].prev = source;
    S[source] = 1;

    for (i = 1; i != vec_num; ++i) {
        int min_dst = INFINITY;
        int u = source;
        //找出未使用过的点中dist最小的
        for (j = 0; j != vec_num; ++j) {
            if ((!S[j]) && res->a_list[j].dist < min_dst) {
                u = j;      //u是距离source最近的点
                min_dst = res->a_list[j].dist;
            }
        }

        S[u] = 1;     //将u标记为已使用

        for (j = 0; j != vec_num; ++j)
        //j点未被使用且u,j之间有边
            if ((!S[j]) && w_graph_has_edge(g, u, j)) {
                if (res->a_list[u].dist + w_graph_weight_edge(g, u, j)
                 < res->a_list[j].dist) {
                    res->a_list[j].dist = res->a_list[u].dist +
                    w_graph_weight_edge(g, u, j);    //更新距离
                    res->a_list[j].prev = u;         //更新路径
                }
            }
    }
    free(S);
    return res;
}

//数据遍历接口
void min_len_foreach(Min_len m,
void (*f)(Min_len, int, int, void *), void *data) {
    int i;
    for (i = 0; i != m->n; i++) {
        f(m, m->a_list[i].dist, m->a_list[i].prev, data);
    }
}

//顶点个数
int min_len_vector_count(Min_len m) {
```

```c
    return m->n;
}

//释放内存
void min_len_destroy(Min_len m) {
    free(m);
}

//封装一次添加二条边
void w_graph_add_edge2(WGraph g, int source, int sink, int weight) {
    w_graph_add_edge(g, source, sink, weight);
    w_graph_add_edge(g, sink, source, weight);
}

//打印数据
static void w_graph_show_vec(WGraph g, int src, int sink,
int weight, void *data) {
    printf(" %d:%d ", sink, weight);
}

//调用接口
void min_len_show(Min_len ml) {
    int i, j;
    for (i = 0; i != ml->n; ++i) {
        printf("Dist:%d ", ml->a_list[i].dist);
        for (j = i; j != ml->vec; j = ml->a_list[j].prev) {
            printf("%d <- ", j);
        }
        printf("%d\n", ml->vec);
    }
}
```