基础题：

证明式（15）中，取$\mathbf{y}=\mathbf{u_4}$是该问题的最优解。

证：

在求解超定方程 Dy=0 的过程中，由于 D 可能满秩，无零空间，因此寻找最小二乘解：$min\|Dy\|_2^2$，因此设：

$$f_1=(Dy)^T(Dy)=y^TD^TDy \tag{1}$$

因此将求解方向变为最小化f_1，并且式（1）存在约束：$\|y\|=1$，即$y^Ty=1$。添加一个拉格朗日约束λ，使得$\lambda(1-y^Ty)=0$，并将此约束带入式（1）以消除约束，得：

$$f_2=y^TD^TDy+\lambda(1-y^Ty) \tag{2}$$

将f_2对 y 进行求导，得：

$$f_2{}'=2D^TDy-2\lambda y \tag{3}$$

令倒数等于 0，得：

$$D^TDy=\lambda y \tag{4}$$

由式（4）知λ为D^TD的特征值，且$y^TD^TDy=\lambda y^Ty=\lambda$

因此，式（1）可以表示为：$f_1=\lambda$，因此最小化f_1就等于最小化λ。又因为λ为D^TD的特征值，因此只需找出D^TD的最小的特征值λ_4，其对应的向量u_4即为所求，即$y=u_4$，得证。

提升题：

代码附在该 pdf 之后，代码的结果如下图：

对代码的几点思考：

1、对D矩阵进行缩放后，发现对最终的结果并没有产生影响(无论上对D中每个元素进行处理还是只乘以对角阵S)，所以我认为应该是会让D^TD的 SVD 的分解更稳定。

2、对求出来的点进行验证的时候，考虑该点的 z 坐标，看是否出现在相机的前面。

```
构建D矩阵耗时 0.100045s
U is:
 0.0530721   0.846878    0.41558  -0.327528
 -0.103079   0.431629  -0.895388 -0.0367562
 -0.102585   0.309021   0.122288   0.937565
  0.987945  0.0316285  -0.103049   0.111113
V is:
0.0530721  0.846878   0.41558  0.327528
-0.103079  0.431629 -0.895388 0.0367562
-0.102585  0.309021  0.122288 -0.937565
 0.987945 0.0316285 -0.103049 -0.111113
eigenvalue is:
     7.1513
   0.118267
  0.0110422
2.01793e-17
======================
the result is reliable!
======================
The point is in front of camera!
======================
完成三角化耗时0.456986s
ground truth:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
your result:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
```