# 第14章：数项级数

## 数列极限（回忆）

**数列$S_n$的极限定义（$\varepsilon - N$）**：

$\exists S > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当$n > N$时，有$|S_n - S| < \varepsilon$,则称$S_n$收敛至$S$，记为$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

**单调收敛定理**: 单调有界数列收敛。

**柯西收敛定理**: $S_n$收敛当且仅当:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当$n > N$ 时，有$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon.$

**数列的上下极限**: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n = a$，当且仅当:

1. 存在$m_k$，使得$\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k} = a$
2. 对任意收敛子列$S_{n_k}$，$\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k} \leq a$

数列下极限有类似的等价条件，在此不再赘述。

## 14.1 级数收敛性的概念和基本性质

**定义**：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是一个级数，称$u_n$为级数的**通项**。令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

称$S_n$为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的第n个**部分和**，并称数列$S_n$为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的**部分和数列。**

**定义(级数收敛与发散)：** 如果$\{S_n\}$收敛（到$S$），则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛（到$S$），记为：

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

如果$\{S_n\}$发散，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，

若$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty(-\infty)$,则记$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty(-\infty)$。

**定义(正向级数)：** 若对任意的$n \geq 1, u_n \geq 0$，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是**正向级数。**

**例1**：考虑$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$的敛散性：

**思路**：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

**值得注意的是**，该数项级数的值为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

我们将在后续课程着重强调。

**例2**：考虑$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$的敛散性：

**思路**：证明$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$无界。值得一提的是，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx \ln n + r$

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \geq \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \geq \frac{1}{2}$$

而又因为：

$$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{n} \geq \frac{m}{2} \to +\infty, \quad m \to +\infty$$

故该级数发散。

**重点：部分和数列无界即发散，对于正向级数，有界即收敛。**

**定理（柯西收敛原理）**：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛当且仅当：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当$n \geq N$时，有$|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k| < \varepsilon, \quad \forall\, m \geq 1$。

在上述式子，令$m = 1$，可知$u_n \to 0$，由此得到下述定理：

**级数收敛的必要条件：**

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

**控制收敛定理**：

设对$n \geq 1$，$u_n \geq 0$，$v_n \geq 0$，$|u_n| \leq v_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛。若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

**证明：** 由$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，应用柯西收敛原理，有：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当$n \geq N$时，有$v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots + v_{n+m} < \varepsilon, \quad \forall\, m \geq 1$。于是：

$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}| < \varepsilon$. 由柯西收敛原理可知，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

**例3：** 考虑$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}$的收敛性：

思路：$\frac{|\sin\sqrt{n}|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$，收敛。

**例4：**： 考虑$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$的收敛性：

- $q \geq 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \to +\infty$，发散。
- $0 < q < 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \to \frac{q}{1-q}$，收敛。

**级数的四则运算：** 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则：

- $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} v_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sum_{n=1}^{\infty} u_n$?后续课程将对此进行说明。

和数列极限类似，我们**更关注**$\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$的收敛性，即只关注后续无穷项是否能控制，而对前几项不关心。

## 14.2正项级数

**例1**：考虑$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$的敛散性。

- $p \geq 2$时，$\dfrac{1}{n^p} \leq \dfrac{1}{n^2}$，此时级数收敛。
- $p \leq 1$时，$\dfrac{1}{n^p} \geq \dfrac{1}{n}$，此时级数发散。

当$1 < p < 2$时，令$f(x) = \frac{1}{x^p}$，考虑:$\displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$，此时级数收敛。

**记住本题的结论：**

- $p \leq 1$，级数发散。
- $p > 1$，级数收敛。

**定理**：设$f(x)$在$[1, +\infty)$上非负递减，令

$$A_n = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$与$\{A_n\}$同时收敛，同时发散。

**例2：** 考虑$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$的敛散性：

**思路：** 通项较为复杂时采用积分判别法：

$$A_n = \int_3^n \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x = \int_3^n \frac{\mathrm{d}\ln \mathrm{x}}{(\ln x)^p} = \frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_3^n$$

上述级数显然是收敛的.

---

**回忆：**

对$n \geq 1, u_n \geq 0, v_n > 0,$ 考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，且$u_n \leq v_n$，则二者**同时收敛，同时发散。**

**定理1:** 设对$n \geq 1, u_n \geq 0, v_n > 0,$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l \in [0, +\infty)$$

（1）若$l \in (0,+\infty)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛与发散。

（2）若$l=0,\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

（3）若$l \to +\infty, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

**证明：**

（1）由$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,对$\varepsilon_0 = \dfrac{l}{2}$,$\exists N>0$,使得当$n \ge N$ 时，有$|\dfrac{u_n}{v_n} - l| \le \varepsilon_0 = \dfrac{l}{2}$。

即：$\dfrac{1}{2} v_n \le u_n \le \dfrac{3}{2} v_n$由此可得，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛与发散。

（2）由$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$,对$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使得当$n \ge N$ 时，有$|\dfrac{u_n}{v_n}| < \varepsilon$，可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

（3）由$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$，则$|\dfrac{u_n}{v_n}| > N$，可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

**补充：在利用本定理做题时，可以尝试无穷小量替换。**

**例1：** 判断 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{n}-1)}$ 的敛散性。

**思路：**

$$n^{\frac{1}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$$
$$\frac{1}{n(\sqrt[n]{n}-1)} \sim \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

所以发散。

**例2**：判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{x}{n^p}, \quad p>0$ 的敛散性。

**思路：** 考虑到

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{x}{n^p}}{\frac{x}{n^p}} = 1$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n^p}$收敛性已知：

- $p \le 1$，级数发散。
- $p > 1$，级数收敛。

**例3：** 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ [\mathrm{e} - (1+\dfrac{1}{n})^n]$ 的敛散性。

思路:

$$\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e} - \exp(n \ln(1+\frac{1}{n}))$$

利用等价无穷小:

$$\mathrm{e}-\exp(1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n^2}))=\frac{\mathrm{e}}{2n}+o(\frac{1}{n^2})$$

所以：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{\mathrm{e}}{2n}}=1$$

**定理（柯西判别法）：**

设$n\geq 1, u_n\geq 0$，$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}$。

- 若$r<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。
- 若$r>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。
- 若$r=1$，无法判断敛散性。例如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，两者均满足$r=1$，但是前者发散，后者收敛。

**证明：**

（1）由$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}<1$,对$r<q<1$,存在$N$，使得当$n\geq N$时，有$\sqrt[n]{u_n}\leq q^n$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

（2）由$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}>1$，存在子列$\{m_k\}$使得$\sqrt[n_k]{u_{n_k}}>1$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

回忆：在数学分析上册，曾学过下述不等式：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

由此，引入下述定理：

**定理（达朗贝尔判别法）：**

设$n\geq 1, u_n>0$：

- 若$\overline{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。
- 若$\underline{r}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

证明：

（1）由$\overline{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，知对$r<1$，存在$N$，使得当$n\geq N$时，有$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q$

于是：

$$u_n\leq qu_{n-1}\leq q^2u_{n-2}\leq\cdots\leq q^{n-N}u_N$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

（2）由$\underline{r}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则存在子列$\{n_k\}$使得

$$u_{n_{kn}}\geq qu_{n_{k(n-1)}}\geq\cdots\geq q^{k_n-k_N}u_{k_N}。$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

**例4：** 判断$\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{x}{n})^n,\quad x>0$的敛散性

**思路：**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(\frac{x}{n+1})^{n+1}}{n!(\frac{x}{n})^n}=\frac{x}{e}$$

1. 若$x<\mathrm{e}$，则$\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{x}{n})^n$收敛。
2. 若$x>\mathrm{e}$，则$\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{x}{n})^n$发散。
3. 若$x=\mathrm{e}$，则判断的级数为$\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{\mathrm{e}}{n})^n$ . 利用柯西判别法：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{n!}\frac{e}{n}$$

**例5：** 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x)^2\cdots(1+x)^n},\quad x>0$的敛散性

**思路：** 使用达朗贝尔判别法，

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{1+x^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}=\begin{cases}x, & x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

**例6：** 判断$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性，其中：

$$u_n=\begin{cases}2^{-n} & x\text{为奇数}\\ 3^{-n} & x\text{为偶数}\end{cases}$$

本题在尝试使用达朗贝尔判别法时，无法得到答案，所以采取柯西判别法求解。

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}<1$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

## 14.4一般项级数

**定理1**：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

**定义1**：

- 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛。
- 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛。

**例1**:判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$的敛散性：

利用柯西收敛原理，研究后续几项的情况。

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}=(-1)^{n+2}(\frac{1}{n+1}-(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}))$$

由柯西收敛原理，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛。

由于正负项抵消，事实上收敛的速度可以比正向级数满很多。一般地，对于：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$，对于$\forall s$，该级数都收敛。

下面举几个正负振荡，有界的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1\text{ or }0$$

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(kx)=2\sum_{n=1}^{\infty}\{\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x\}=\cos\frac{x}{2}-\cos[(n+\frac{1}{2})x]$$

也即

$$|\sum_{n=1}^{\infty}\sin(kx)|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

**定理（Dirichlet判别法）**：设$u_n\geq 0,\{u_n\}$递减趋向于0，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$收敛。

**（章后记：如果写成了$u_nv_n$的形式，且$u_n\to(-1)^n$,$v_n$单调递减趋于0，也可以用该判别法。事实上，我们用下面的迪利克雷判别法的情况更为常见）**

现在，我们考虑第一节遗留的问题，数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_nu_n$，在什么样的限制条件下收敛？由上述引例，可知，应该其中一个是正负项相抵消的数列，另一个是比较好的，可以收敛的数列。

**阿贝尔求和法**：

令$B_m=\sum_{k=1}^{n}b_k$,$B_0=0$

则$b_k=B_k-B_{k-1}$，用此替换，则:

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}b_k=a_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k$$

学习此种求和方法之后，我们继续学习级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$，在什么样的限制条件下收敛。

由柯西收敛原理，考虑后续几项的部分和:

将$b_k$记为$(B_k-B_n)-(B_{k-1}-B_n)$，即此时:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k=a_{n+p}(B_{n+p}-B_n)+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})(B_k-B_n)$$

**定理（迪利克雷判别法）：**

设:

- $\{a_n\}$单调且趋于0。
- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和数列有界

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

**证明：** 由（2）可知，存在$M>0$使得

$$|B_n|\le M,\quad \forall n\ge 1$$

由（1）可知，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n\ge N$时，有

$$|a_n|<\frac{\varepsilon}{4M}$$

对$n\ge N,p\ge 1$

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k|\le|a_{n+p}||(B_{n+p}-B_n)|+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|a_k-a_{k+1}||B_k-B_n|\le 2M|a_{n+p}|+2M|a_{n+1}-a_{n+p}|<\varepsilon$$

**定理（阿贝尔判别法）：**

设:

- $\{a_n\}$单调有界。
- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和数列收敛。

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

由（1）知，存在$a_n\to a_0$

由**迪利克雷判别法**可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_0)b_n$收敛。

从而:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_0)b_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_0b_n$$

可以化简为两个收敛数列的和。得证。

**例1：** 考虑$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p},\quad p>0$的敛散性。

思路:

- 若$p>1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^p}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$。从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p},\quad p>0$绝对收敛。
- 若$0<p<1$。由$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$递减趋向于0，且$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(nx)\right\}_{n\geq 1}$有界。由迪利克雷判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$收敛。

$$\begin{aligned}\frac{|\sin(nx)|}{n^p}&\geq\frac{\sin^2(nx)}{n^p}\\&=\frac{1-\cos(2nx)}{2n^p}\\&=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos(2nx)}{2n^p}\end{aligned}$$

又由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{2n^p}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^p}$发散。

**例2：** 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}u_n$收敛。

证：由$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n\geq 1}$单调有界,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，应用阿贝尔判别法，得证。

**例2*：** 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

**即：如果在收敛级数前面乘一个单调有界的数列，不改变收敛性。**

---

## 14.6无穷乘积

本节我们研究无穷乘积：

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

记$P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$。

**定义1：**

- 如果$\{P_n\} \to P$，且$P$，则称无穷乘积$P_n = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，记为$P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$。
- 如果$\{P_n\}$发散，或者$\{P_n\} \to 0$，则称$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

若无穷乘积$P_n = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则

$$u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to 1$$

**命题：**若无穷乘积$P_n = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

**命题：**设$u_n > 0$。则无穷乘积$P_n = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，当且仅当$\sum_{k=1}^{n} \ln u_n$收敛。

此时，$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln u_n$。

设$u_n = 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n \geq 0$。则$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\alpha_n)$与$\sum_{k=1}^{n} \alpha_n$同时收敛，同时发散。**同阶，同时收敛同时发散。**

**Weierstrass乘积定理：**设$\alpha_n \geq 0$，则$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$收敛当且仅当$\sum_{k=1}^{n} \alpha_n$收敛。

**推广：**设$0 \leq \alpha_n < 1$，则$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n)$收敛当且仅当$\sum_{k=1}^{n} \alpha_n$收敛。

**例1：** 存在多项式$P(y)$，使$\sin(nx) = P(\sin x)$。对于正弦常见的等式：

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2})$$

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2})$$

$$\sin(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + 0(x^3)$$

又因为展开的三阶项对应相同，所以：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**例2：**存在多项式$P(y)$，使$\cos(nx) = P(\cos x)$。对于余弦常见的等式：

$$\cos(\pi x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{4(n-1)^2})$$

对于对素数做乘积的形式，常见的等式（黎曼$\zeta$函数）：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}}$$

其中$s>1$， $p_k$是某个素数。

可以通过该公式证明素数是无限的。

---

## 14.7级数的乘积

引入：考虑$\sum_{i=1}^{n}a_i$和$\sum_{j=1}^{n}b_j$两个有限和的乘积。显然满足：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_j$$

为考虑两个级数的乘积，我们引入双指标的数列$\{a_{ij}\}_{i\geq 1,\ j\geq 1}$，并引入一个新的定义：重排。

**定义（重排）**：称$\{c_n\}_{n\geq 1}$是$\{a_ib_j\}_{i\geq 1,\ j\geq 1}$的一个**重排**，如果：

- $a_i$，$b_j$在$\{c_n\}_{n\geq 1}$ 中只出现一次。
- $\{c_n\}_{n\geq 1}$没有$\{a_ib_j\}_{i\geq 1,\ j\geq 1}$之外的项。

这样，有一个很自然的问题：设$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$和$\sum_{j=1}^{\infty}b_j$收敛，$\{c_n\}_{n\geq 1}$是$\{a_ib_j\}_{i\geq 1,\ j\geq 1}$的一个重排。问是否满足：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j?$$

**我们先考虑正向级数的情况，即设**$a_i\geq 0,\ b_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}a_i=A,\ \sum_{i=1}^{\infty}b_i=B$。

**我们先证明**$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$**收敛：**

令$C_N=\sum_{i=1}^{N}c_n$，取$N_1$和$N_2$足够大，使得$\{c_n\}_{n=1,2,\cdots,N}$包含在$\{a_ib_j\}$中。于是：

$$\sum_{i=1}^{N}c_n\leq\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}a_ib_j=\sum_{i=1}^{N_1}a_i\sum_{j=1}^{N_2}b_j\leq\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j\to AB$$

又因为$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$也是正向级数，部分和序列有界，所以$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛。

**再证明**$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j$:

对于任意的$\varepsilon>0$，$\exists N_1,N_2$，满足

$$\sum_{i=N_1}^{\infty}a_i<\frac{\varepsilon}{2B},\quad \sum_{j=N_2}^{\infty}b_i<\frac{\varepsilon}{2A}$$

此时，我们取$N$足够大，使得$\{a_ib_j\}$包含在$\{c_n,\ n=1,2,\cdots,N\}$中。

则此时:

$$\sum_{i=1}^{N_1}a_i\sum_{j=1}^{N_2}b_j\leq\sum_{n=1}^{N}c_n\leq AB$$

$$\begin{aligned}AB-\sum_{i=1}^{N_1}a_i\sum_{j=1}^{N_2}b_j&=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j-A\sum_{j=1}^{N_2}b_j+A\sum_{j=1}^{N_2}b_j-\sum_{i=1}^{N_1}a_i\sum_{j=1}^{N_2}b_j\\&\leq A\sum_{j=N_2+1}^{\infty}b_j+B\sum_{i=N_1+1}^{\infty}a_i<\varepsilon\end{aligned}$$

由两边夹，可知:

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j=AB$$

这就完成了证明。

我们再考虑一般的情况：$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$和$\sum_{j=1}^{\infty}b_j$绝对收敛时，有没有好的性质?

设 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 和 $\sum_{j=1}^{\infty}b_j$ 绝对收敛， 对 $x\in\mathbb{R},x^+=\begin{cases}x, & x\geq 0\\0, & x<0\end{cases}, x^-=\begin{cases}0, & x\geq 0\\-x, & x<0\end{cases}$， 则 $x=x^+-x^-,\quad |x|=x^++x^-$

所以$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^++\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-$以及$\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^+-\sum_{i=1}^{\infty}a_i^-$均收敛，同理可以得到$b_j$的等式收敛，在此不赘述。

所以:

$$c_n=a_ib_j=(a_i^+-a_i^-)(b_j^+-b_j^-)=a_i^+b_j^+-a_i^-b_j^-a_i^+b_j^-+a_i^-b_j^-=c_n^{++}+c_n^{--}-c_n^{+-}-c_n^{-+}$$

此次拆分将$c_n$拆分成了4个正向级数之和（差），从而$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛，且:

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j=AB$$

考虑这样一组数：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对于$\{a_{ij}\}$ ,我们按照依次取对角线元素的方式，重排列，则最终得到：

$$a_{11}+(a_{12}+a_{21})+(a_{13}+a_{22}+a_{31})+\cdots+(a_{1n}+\cdots+a_{n1})=\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1})$$

对于这种特殊的重排得到的级数的乘积，我们称为**柯西形式的乘积。**将上述所有分析综合起来，得到下述命题：

**命题：**设正向$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$和$\sum_{j=1}^{\infty}b_j$收敛，$\{c_n\}_{n\geq 1}$是$\{a_ib_j\}_{i\geq 1,\, j\geq 1}$的一个重排，则$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛，且满足：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j$$

若$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$和$\sum_{j=1}^{\infty}b_j$绝对收敛，则上述命题同样成立。

特别地，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k})=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j$$

**推论**：设$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$绝对收敛，设$\{c_n\}$是一个重排， 则$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛且：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

**证明思路：**取$b_1=1,\ b_j=0,\ j\geq 2$。

**Riemann重排定理**：设$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$条件收敛，则对任意$x\in\mathbb{R}$或$x=+\infty$或$x=-\infty$，则存在重排，使得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=x$$

**(Fubini定理)**：设$\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|$收敛，则：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-k}a_{k,n-k}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\right)$$

**定理理解：** $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij})=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$

可以看成一个关于$i$的序列：$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\right\}_{i\geq 1}$的级数和。

同样的: $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\right)$可以看成$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\right\}_{j\geq 1}$的级数和，而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-k}a_{k,n-k}\right)$可以看成一个$\{u_n\}$是$\{a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31}\ldots\}$这样的由$\{a_{ij}\}$柯西排列排成的一个数列的级数和。