幂级数

定义：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$为一个**幂级数**。

为了研究方便，我们不妨假设$x_0=0$。现在考虑$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的敛散性。

由Cauchy判别法：

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

令$R=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

则：

- $|x|<R$，绝对收敛。
- $|x|>R$，发散。
- $|x|=R$，需要单独判断。

例1：考虑$a_n=\dfrac{1}{n!}$。则由Stirling公式：$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$：

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty$$

所以收敛域是$x\in\mathbb{R}$。

定义R为幂级数的收敛半径，收敛域是一个以原点为中心的区间（可能只有原点，此时$R=0$，也可能是$\mathbb{R}$）

例2：求$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$的收敛域。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$$

$$\because R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$当x=\frac{1}{4}时，有\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}，发散$$

$$当x=-\frac{1}{4}时，\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{n+1}<1，即单调递减。$$

$$又因为a_n\sim\frac{e}{n}\to 0$$

$$由\text{Dirichlet}判别法，收敛。$$

定理： $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在收敛区间内闭一致收敛。

证明： 设$b\in I$，I为收敛区间，不妨设$b>0$，在$[0,b]$上，有:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb^n(\frac{x}{b})^n$$

$$其中，\sum_{n=0}^{\infty}a_nb^n一致收敛(这是因为和\ x无关)，(\frac{x}{b})^n单调递减且有界，由\text{Abel}判别法：$$

$$所以内闭一致收敛。$$