月考题

英语词汇

- terms：项数。coefficient：系数。
- in how many ways ……有多少种情况？（不是算概率）
- mutually exclusive：互斥。independent：相互独立。
- countexample：反例。
- probability mass function概率分布列
- cumulative distribution function累积分布函数

月考题

1.条件概率下的全概率公式，贝叶斯公式

$$\text{记}A:\text{第一次是头向上。}B:5\text{次有}3\text{次头向上。}E_i(i=1,2)\text{为第}i\text{枚硬币}$$
$$P(B|A)=P(B|E_1A)P(E_1|A)+P(B|E_2A)P(E_2|A)$$
$$\text{首先，}P(B|E_1A)=\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4(\text{是第一枚硬币且第一次头向上})$$
$$P(B|E_2A)=\binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2$$
$$P(E_1|A)=\frac{P(A|E_1)P(E_1)}{P(A|E_1)P(E_1)+P(A|E_2)P(E_2)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{3}{5},P(E_2|A)=\frac{2}{5}$$
$$P(B|A)=\frac{3}{5}\times\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4+\frac{2}{5}\times\binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2$$

2.(a)多项式的项数，系数

$$(2x+y+3z)^5=6+5+4+3+2+1=20$$
$$120$$

2.(b)容斥恒等式

$$记E_i(i=1,2,3)为第i对夫妻坐在一起。$$
$$P=1-P(E_1\cup E_2\cup E_3)$$
$$P(E_1\cup E_2\cup E_3)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)-P(E_1E_2)-P(E_1E_3)-P(E_2E_3)+P(E_1E_2E_3)$$
$$=\frac{2\times 3\times A_5^5}{A_6^6}-\frac{4\times 3\times A_4^4}{A_6^6}+\frac{8\times A_3^3}{A_6^6}=\frac{6\times 5\times 4-4\times 4\times 3+8}{6\times 5\times 4}=\frac{2}{3}$$
$$P=\frac{1}{3}$$
$$A=\frac{1}{3}A_6^6=240$$

2.(c)条件概率公式

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(EF)=0.7$$
$$P(E|E\cup F)=\frac{P(E(E\cup F))}{P(E\cup F)}=\frac{0.3}{0.7}=\frac{3}{7}$$

2.(d)容斥恒等式（只展开2项）

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)\cap C)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P((A\cup B)\cap C)\geq P(A)+P(B)+P(C)-2$$

2.(e)两事件独立，不一定条件独立

$$考虑G=E\cup F$$

3.考虑递推关系

$$P_1=1,P_2=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$
$$考虑第n-1次的情况。$$
$$P_n=(1-P_{n-1})\times\frac{1}{6}+P_{n-1}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}P_{n-1}$$
$$P_n-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}(P_{n-1}-\frac{1}{2})$$
$$P_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^n$$
$$\therefore P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{n-1}$$

4.(a)几何分布

$$P(X=i)=(\frac{7}{8})^{i-1}\times\frac{1}{8}$$
$$E(X)=\frac{1}{\frac{1}{8}}=8$$

补充：

- 步骤：X is a geometric random variable with parameter p
- $P(X=n)=(1-p)^{n-1}p$
- 均值为:$E(X)=\frac{1}{p}$，方差为：$\mathrm{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$
- $F(k)=1-(1-p)^k$

4.(b)离散均匀分布

$$P(X=1)=\frac{1}{8}$$
$$P(X=2)=\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{8}$$
$$\vdots$$
$$P(X=8)=\frac{1}{8}$$
$$\therefore E(X)=\frac{1+\cdots+8}{8}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$$

5.负二项分布

共有4047个球。A_1：左手的盒子最先被抽完。

这就是说，在前$4047-k$次抽球中，抽到了2023次左手盒子，$2024-k$次抽到了右手的盒子，且最后一次是左手

$$P(A_1)=\binom{4047-k}{2023}(\frac{1}{3})^{2024}(\frac{2}{3})^{2024-k}$$

A_2：右手的盒子最先被抽完。

这就是说，在前$4047-k$次抽球中，抽到了2024次右手盒子，$2023-k$次抽到了左手的盒子，且最后一次是右手

$$P(A_2)=\binom{4047-k}{2024}(\frac{1}{3})^{2023-k}(\frac{2}{3})^{2025}$$

$$P(A)=\binom{4047-k}{2023}(\frac{1}{3})^{2024}(\frac{2}{3})^{2024-k}+\binom{4047-k}{2024}(\frac{1}{3})^{2023-k}(\frac{2}{3})^{2025}$$

考点分布

- **全概率公式与贝叶斯公式（40分）**
- **特殊分布（离散均匀分布8分，几何分布7分，负二项分布15分，共30分）**
- **容斥恒等式(10分)**
- **二项式定理（5分）**