广义积分

广义积分的定义

例如：设$f(x)$为$(a,+\infty]$上定义的函数，且$x=b$为函数的瑕点，则广义积分的定义形式为：

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^c f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{v\to b^-}\int_c^v f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{t\to b^+}\int_t^d f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{w\to+\infty}\int_d^w f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中$c\in(a,b)$，$d\in(b,+\infty)$。这也指出了分析广义积分的一般策略：找出所有的瑕点（包括趋向无穷的点），并依次分析瑕点附近的极限情况。

敛散性的判别方法

- **($\varepsilon\sim\delta$)**

定义法：

无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛的充要条件：对于任意的$\varepsilon>0$，存在$A\geq a$，使得对于任意的$u>A$时，有：

$$\left|\int_u^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$（瑕点为$a$）收敛的充要条件：对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于任意的$u\in(a,a+\delta)$时，有：

$$\left|\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

柯西收敛准则：

无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛的充要条件：对于任意的$\varepsilon>0$，存在$A\geq a$，使得对于任意的$u_1,u_2>A$时，有：

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$（瑕点为$a$）收敛的充要条件：对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于任意的$u_1,u_2\in(a,a+\delta)$时，有：

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

由于u_1, u_2是有限的，我们可以采取一些**定积分**的策略，例如第二积分中值定理（证明Abel-Dirichlet判别法）。

- ## 比较原则（在对应区间不变号）

等价无穷小：$f(x) \sim g(x)$，则$f(x)$与$g(x)$同时收敛，同时发散。**（最常用的操作，经常需要先进行一步替换再后续的计算）**

推论：

若无穷积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 满足：

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda$$

- 若$p > 1$，且$\lambda \in [0, +\infty)$，则$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。
- 若$0 < p \le 1$，且$\lambda \in (0, +\infty]$，则$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散。

关注$\lambda = 0 \text{ or } \lambda = +\infty$的情况。

若瑕积分$\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$（瑕点为$a$）满足：

$$\lim_{x\to+\infty} (x-a)^p f(x) = \lambda$$

- 若$0 < p < 1$，且$\lambda \in [0, +\infty)$，则$\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。
- 若$p \ge 1$，且$\lambda \in (0, +\infty]$，则$\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$发散。

关注$\lambda = 0 \text{ or } \lambda = +\infty$的情况。

本推论的应用，请参考习题的例1 **（超链接可以跳转，看完例题后点击例题前方的超链接可以回到此位置）**

定理：对于任意的$\alpha > 0$，都有

- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0$

这三个式子再结合上我们上面的推论，可以发挥巨大作用。

推论结合定理的应用，请参考习题的例2，例3，例4

敛散性：

收敛 + 收敛 = 收敛；收敛 + 发散 = 发散；发散 + 发散 = 不确定；绝对收敛 + 绝对收敛 = 绝对收敛；**绝对收敛 + 条件收敛 = 条件收敛；** 条件收敛 + 条件收敛 = 不确定。

这给了无穷积分和瑕积分混合的问题提供了解决策略。

A-D判别法

对于无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，有：

- 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，且$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。
- 若$F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$在$[a,+\infty)$上有界，且$g(x)$在$x\to+\infty$时单调收敛到零，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

对于瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，其中$f(x)$, $g(x)$均以a为瑕点，有：

- 若$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，且$g(x)$在$(a,b]$上单调有界，则$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。
- 若$F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$在$(a,b]$上有界，且$g(x)$在$x\to a^+$时单调收敛到零，则$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

关于A-D判别法的应用，请参考习题的例5

习题册：

类型1（比较原则）：

例1：

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\,\mathrm{d}x$$

讨论 p,q 的所有情况：

当 $p=q$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2x^p}\,\mathrm{d}x$, 发散。(无法兼顾0附近和趋向无穷的情况)

当$p>q$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=\frac{1}{1+x^{q-p}}=1$

所以$p>1$时无穷积分收敛，$p\le 1$时无穷发散。

$$\lim_{x\to0}x^qf(x)=1$$

所以$q<1$时瑕积分收敛，$q\ge 1$时瑕积分发散。

$\therefore q<1<p$时积分收敛，其余情况发散。

当 $p<q$ 时，类似的分析，可以得到：

$p<1<q$时积分收敛，其余情况发散。

例2：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

分析：0和无穷大都是需要讨论的点。

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}\,\mathrm{d}x$$

$\therefore p<2$ 时，收敛; $p\ge 2$ 时，发散。

当 $p>1$，任取$r\in(1,p)$，则有：

$$\lim_{x\to+\infty}x^r\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\frac{\ln(1+x)}{x^{p-r}}=0$$

由定理的推论，收敛。

当 $0<p\le 1$，任取$r\in(p,1)$，则：

$$\lim_{x\to+\infty}x^r\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\frac{\ln(1+x)}{x^{p-r}}=+\infty$$

由定理的推论，发散。

当$p\le 0$时，易知发散。

例3：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x$$

分析：0和无穷大都是需要讨论的点。

$$\forall\, 0<\alpha<1,\quad \lim_{x\to0^+}x^\alpha\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}=0$$

由定理的推论，收敛。

$$\forall\,\beta>1,\quad \lim_{x\to+\infty}x^\beta\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}=\frac{\ln x}{x^\gamma}\frac{x^{\beta-\gamma}}{\mathrm{e}^x}=0$$

由定理的推论，收敛。

例4：

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

$$p>1\text{时，任取}r\in(1,p)\text{，有：}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^r\frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\frac{1}{x^{p-r}(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=0$$

由推论，收敛。

$$p<1\text{时，任取}\beta\in(p,1)\text{，有：}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^\beta\frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\frac{1}{x^{p-\beta}(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=+\infty$$

由推论，发散。

$$p=1\text{时，}\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^q(\ln t)^r}$$

继续讨论即可，不再赘述。

- **类型2（Abel-Dirichlet判别法）：**

例5：

$$\text{考虑}\int_e^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\,\mathrm{d}x\text{的条件收敛与绝对收敛性。}$$

$$|\int_e^u\sin x\,\mathrm{d}x|\le 2,\ \forall u\in[e,+\infty)$$

$$g'(x)<0(x>M)$$

$$g(x)\text{在}[M,+\infty)\text{单调递减，且}\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

$$\text{由}A-D\text{判别法，条件收敛。}$$

$$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|\ge\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin^2x=\frac{\ln\ln x}{2\ln x}(1-\cos 2x)$$

$$\text{易知}\int_e^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{2\ln x}\cos 2x\,\mathrm{d}x\text{收敛。}$$

$$\text{但是}\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\frac{\ln\ln x}{2\ln x}=+\infty$$

不绝对收敛。

本题利用$|\sin x|\ge\sin^2x$还可以得到一个结论：若$f(x)$单调趋于0，则：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x,\quad\int_a^{+\infty}f(x)\cos^2x\,\mathrm{d}x,\quad\int_a^{+\infty}f(x)\sin^2x\,\mathrm{d}x$$

这三者的收敛性完全相同。

关于$|\sin x|$的处理策略，在后续有非常多的应用，应该引起足够重视。

专题强化

- **专题一：带有$\sin x$的广义积分问题**

- **基础方法：**

例1：

$$\text{判断}\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\text{与}\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x\text{的条件收敛与绝对收敛性。}$$

$$p>1\text{，}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\leq\frac{1}{x^p}\text{，绝对收敛。}$$

$$0<p<1\text{，}A-D\text{判别法，条件收敛。}$$

$$p\leq 0:\text{取}\varepsilon_0=2,\ \forall M\geq 1\text{，存在正整数}k\text{，满足}2k\pi+\pi>2k\pi>M$$

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\geq\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=2=\varepsilon_0$$

例2：

$$\text{判断}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\text{与}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x\text{的条件收敛与绝对收敛性。}$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\sim\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}\,\mathrm{d}x\text{（同号）}$$

$$\therefore p<2\text{时，（绝对）收敛。}p\geq 2\text{时，发散。}$$

$$\text{当}0<p<1\text{时，条件收敛}+\text{绝对收敛}=\text{条件收敛。其他情况类似分析。}$$

$$\int_0^1\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x\sim\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore p<1\text{，（绝对）收敛。}p>1\text{，发散。}$$

综合例1与例2，我们可以得到以下结论：

$$\text{当}0<p\leq 1\text{时，}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\text{条件收敛;}$$

$$\text{当}1<p<2\text{时，}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\text{绝对收敛;}$$

$$\text{其他情况发散。}$$

$$\text{当}0<p<1\text{时，}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x\text{条件收敛;}$$

$$\text{其余情况发散。}$$

换元法：

习题1：

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x\quad\int_0^{+\infty}x\sin x^4\,\mathrm{d}x\quad\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\text{的敛散性。}$$

遇到sin函数内部有x^2，通常采取换元的策略。

令$u=x^2$，则

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

条件收敛。

第二题请读者自行尝试。

令$v=\dfrac{1}{x}$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v^{2-p}}\,\mathrm{d}x$$

习题2（倒数替换+凑积分）：

$$\text{讨论}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x\text{条件，绝对收敛性}$$

先考虑$x\in[1,+\infty)$的情况

$$\text{当}p>1\text{时，}\left|\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}\Rightarrow\text{绝对收敛。}$$

$$\text{当}0<p\le1\text{时，}\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{(1-\frac{1}{x^2})\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p(1-\frac{1}{x^2})}\,\mathrm{d}x$$

分析：想要让分子能够积分积出来，得到有界，所以配一部分。而且，分母的形式我们不担心

由$A-D$判别法，条件收敛。绝对值的操作是完全类似的。

当$p\le0$时

$$\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\ge\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sin x\cos\frac{1}{x}+\cos x\sin\frac{1}{x}$$

取$x\in\left[2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$，则

$$\sin x\cos\frac{1}{x}+\cos x\sin\frac{1}{x}\ge\sin x\cos\frac{1}{x}\ge\frac{\sin x}{2}$$

由柯西收敛原理，一定发散。

再考虑$x\in(0,1)$的情况。

令$t=\dfrac{1}{x}$，则：

$$\int_0^1\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t+\frac{1}{t})}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$$

再用完全相同的策略分析。

我们把上面的习题2用的方法抽象出来，就可以得到下面的变式题，请读者自行尝试：

设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续可微，且$x\to+\infty$时，$f'(x)$单调递增趋近于$+\infty$。证明无穷积分：

$$\int_a^{+\infty}\sin(f(x))\,\mathrm{d}x\text{和}\int_a^{+\infty}\cos(f(x))\,\mathrm{d}x\text{均收敛。}$$

比较原理与泰勒定理：

习题3：

$$\text{设}p>0,\text{讨论}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x\text{的条件收敛和绝对收敛性。}$$

$$\text{由于0不是瑕点，不妨考虑}\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x$$

$$\text{当}p>1\text{时，由于}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\le\frac{1}{x^p-1}\sim\frac{1}{x^p}\text{，绝对收敛。}$$

$$\text{当}0<p\le 1\text{时，分母并不单调，我们考虑：}$$

$$\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$$

$$\text{现在，我们研究}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\text{的敛散性。而这部分是恒正的，所以由比较原理：}$$

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\le\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\le\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p-1)}$$

(注：放缩操作在不变号时才好用，变号的绝对值放缩一般没有效果)

$$\text{而由于}\frac{1}{x^p(x^p\pm 1)}\text{单调递减且趋于0，且}\frac{1}{x^p(x^p\pm 1)}\text{与}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p\pm 1)}\text{敛散性相同。(见例5)}$$

$$\sim\frac{1}{x^{2p}},\quad p>\frac{1}{2}\text{时，收敛。}\quad p\le\frac{1}{2}\text{时，发散。}$$

$$\text{利用比较原理，可以知道}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\text{在}p>\frac{1}{2}\text{时，收敛，在}p\le\frac{1}{2}\text{时，发散。}$$

$$\text{又因为}\frac{\sin x}{x^p}\text{在}p>1\text{时绝对收敛，}0<p\le 1\text{时条件收敛，}p\le 0\text{时发散，所以：}$$

$$p>1\text{时，绝对收敛;}\ \frac{1}{2}<p\le 1\text{时，条件收敛;}\ 0<p\le\frac{1}{2}\text{时，发散;}$$

习题4（泰勒定理）： 讨论$I=\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)\mathrm{d}x\ (p>0)$的收敛性。

分析：不能使用等价无穷小替换的原因：$\frac{\sin x}{x^p}$变号，不能用比较原理。而且泰勒定理有0的问题，我们通过泰勒展开，构造不等式，从而求解。

$$\because \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore \frac{1}{3}x^2\le x-\ln(1+x)\le x^2$$

$$\therefore \frac{\sin^2 x}{3x^{2p}}\le\frac{\sin x}{x^p}-\ln(1+\frac{\sin x}{x^p})\le\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}$$

由于我们很明确$\frac{\sin x}{x^p},\frac{\sin^2 x}{3x^{2p}},\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}$的敛散性，接下来用两边控制的思想。

由于$\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}$与$\frac{1}{x^{2p}}$的敛散性相同（单调趋于0），所以$p>\frac{1}{2}$时，收敛；$p\le\frac{1}{2}$时，发散。

而$\frac{\sin x}{x^p}$，当$p>1$时，绝对收敛；$0<p\le 1$时，条件收敛。

综上所述，当$p>1$时，绝对收敛；$\frac{1}{2}<p\le 1$时，条件收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$时，发散。

- 分段积分结合数项级数：

习题5： 证明无穷积分：$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$收敛。

思路：

考虑变限积分：$F(u)=\int_1^u \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$单调递增（$f(x)$恒正），下证$F(n\pi)$有界（单调找一组有界就够了）

$$F(n\pi)=\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}u_k \quad u_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$$

下证u_k收敛，即可说明求和有界，即可说明$F(n\pi)$有界。

证u_k收敛，即

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx\le\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{k\pi}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{k\pi}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}dx$$
$$\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2k\pi}{1+(k-1)^6\pi^6(\frac{\pi}{2}x)^2}dx=\frac{k}{2(k-1)^3}$$

收敛。

专题一总结：

<u>**涉及$\sin x$的广义积分，我们通常都可以考虑：**</u>

- $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$的收敛性。
- 如果$f(x)$单调趋向于0，则有$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{f(x)}\,\mathrm{d}x$与$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$的敛散性相同。
- $|\sin x|\ge\sin^2 x=1-\cos 2x$，这是证明不绝对收敛最常使用的不等式。
- 如果要研究的函数符号已定，可以通过放缩，进行两边控制（比较原理）。
- $\int_{2n\pi}^{\pi+2n\pi}f(x)\,\mathrm{d}x\ge k$，利用柯西收敛原理证明发散也非常常见。
- 证明积分收敛，发散的题：如果$f(x)$恒正，可以考虑变上限积分，转化为无穷级数收敛的问题。

专题二：被积函数在无穷远的性质

若极限存在，则极限值为0

习题1：

$$\text{设}f(x)\text{在}[a,u]\text{上可积，且}\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\text{收敛，若存在极限}\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\text{，则}A=0\text{。}$$

$$\text{反证法，假设}A\neq 0,\text{则}\exists M>a,\text{当}x>M\text{时，有}f(x)\ge\frac{A}{2}\text{。}$$

$$\text{所以，}\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_a^{+\infty}\frac{A}{2}\,\mathrm{d}x\text{，发散，矛盾!}$$

- 若不存在极限，则很有可能有收敛到0的子列

习题2：

设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则存在含于$[a,+\infty)$且趋近于$+\infty$的递增数列$\{x_n\}$，使得：

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$$

$$\text{证：由柯西收敛原理，}\forall\varepsilon>0\text{，}\exists A>a,\forall A''>A'\geq A,\text{有}\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

$$\text{取}\varepsilon_1=1\Rightarrow\exists A_1'>a,A_1''=A_1'+1\text{，满足}\left|\int_{A_1'}^{A_1''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<1$$

$$\text{取}\varepsilon_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\exists A_2'>A_1'',A_2''=A_2'+1\text{，满足}\left|\int_{A_2'}^{A_2''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\text{取}\varepsilon_n=\frac{1}{n}\Rightarrow\exists A_n'>A_{n-1}'',A_n''=A_n'+1\text{，满足}\left|\int_{A_n'}^{A_n''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{n}$$

$$\text{由积分第一中值定理，存在}x_n\in(A_n',A_n'')\text{，使得}\left|\int_{A_n'}^{A_n''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|=|f(x_n)|<\frac{1}{n}\text{，且}x_n\text{单调递增。}$$

$$\text{因此}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0\text{，得证。}$$

习题3：

$$\text{设}f(x)\text{在}[0,+\infty)\text{上连续，且}\int_0^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x\text{收敛。证明：存在数列}\{x_n\}\subset[0,+\infty)\text{，使得：}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty\text{，且}\lim_{n\to\infty} x_nf(x_n)=0$$

分析：由柯西收敛原理，可以得到$\int_{a_n}^{2a_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x=|a_nf(x_n)|<\frac{1}{n}$。（请思考为什么取这样的区间长度？）

证明：

$$\forall\varepsilon=\frac{1}{n},\exists M>n,\text{使得当}a_n>M\text{时，有}\int_{a_n}^{2a_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{1}{n}$$

$$\text{由积分第一中值定理，存在}x_n\in(a_n,2a_n)\text{，使得}\int_{a_n}^{2a_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x=a_n|f(x_n)|<\frac{1}{n}$$

$$\text{又}\because a_n<x_n<2a_n$$

$$\therefore a_n>\frac{x_n}{2}\Rightarrow|x_nf(x_n)|<\frac{2}{n}$$

$$\text{这也就是说，}\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty\text{，且}\lim_{n\to\infty} x_nf(x_n)=0$$

- 几个积分收敛但不存在极限的反例

若$f(x)$在积分收敛的条件下，又满足非负（恒正）或者连续（可导），并不能得到$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$，甚至无法得到有界。下列出几个反例。

非负：

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{为整数}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

恒正： $g(x)=f(x)+\mathrm{e}^{-x}$

连续：$\varphi(x)=\sin x^2$

终极反例：恒正的连续可微函数，甚至会无界。例如：

$$t(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$$

取$x=n\pi$的子列，则$t(x)=x\to+\infty$，无界，无极限。

存在极限需要的条件

1.一致连续

习题4： 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，且$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

反证法：

$$\text{若}\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq0\Rightarrow\exists\varepsilon_0>0,\text{存在子列}\{x_n\}\text{趋向于}+\infty,\text{使得}\,|f(x_n)|\geq\varepsilon_0$$
$$\text{由一致连续，对上述}\varepsilon_0\text{，存在}\delta>0\text{，只要}|x'-x''|<\delta\text{，就有}|f(x')-f(x'')|\leq\frac{\varepsilon_0}{2}$$
$$\forall M>a,\text{由于}x_n\to+\infty\text{，则一定存在}x_m>M\text{。现在考虑}x\in(x_m,x_m+\delta)$$
$$|f(x)|\geq|f(x_m)|-\frac{\varepsilon_0}{2}\geq\frac{\varepsilon_0}{2}\text{，并且}f(x)\text{在区间}(x_m,x_m+\delta)\text{内不变号。}$$
$$\therefore\left|\int_{x_m}^{x_m+\delta}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\int_{x_m}^{x_m+\delta}|f(x)|\,\mathrm{d}x\geq\frac{\varepsilon_0\delta}{2}\Rightarrow\text{发散，矛盾!}$$

思考：为什么条件弱化为$f(x)$连续就不行了？可以利用极限的保号性得到$|f(x)|\geq|f(x_m)|-\dfrac{\varepsilon_0}{2}\geq\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，从而跳过一直连续，问题出在哪里?

2.单调

习题5： 设$f(x)$是$[a,+\infty)$上的单调函数，且$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0.$

$$\text{设}f(x)\text{单调递减，下证}\,f(x)\geq0\text{ 恒成立。}$$
$$\text{若存在}x_0,f(x_0)<0\text{，则对于}x>x_0,\text{都有}f(x)<f(x_0)$$
$$\int_{x_0}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x<\int_{x_0}^{+\infty}f(x_0)\,\mathrm{d}x\to-\infty$$
$$\text{发散，矛盾!}$$
$$\text{所以 }f(x)\geq0\text{ 恒成立。}$$
$$\text{又因为单调有界，所以有极限，所以}\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$
$$0\leftarrow\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}f(\xi)\geq\frac{x}{2}f(x)\geq0$$
$$\therefore\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$$

习题6： 设$f(x)$在$[a,u]$上可积，且$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。证明：若$xf(x)$在$[a,+\infty)$上单调递减，则$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)\ln x=0$

$$0\leftarrow\int_{\sqrt{x}}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\sqrt{x}}^{x}tf(t)\ln t\,\mathrm{d}t\geq xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\ln t\,\mathrm{d}t=\frac{x\ln x}{2}f(x)\geq0$$

专题二总结：

涉及被积函数在无穷远的性质，我们通常都可以考虑：

- 柯西收敛原理结合积分第一中值定理