9.4 第一次习题课

(A)

- **14.**

$\{a_n\}$单调递减且$a_n \to 0$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1)}$收敛。

思路：**由柯西收敛原理：**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \text{when } n \geq N,$$
$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

且需要满足

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

这是因为a_n单调递减，则$a_n \geq 0$。

取$p = n$，由柯西收敛，即：

$$na_{2n} \leq |a_{n+1} + \cdots + a_{2n}| < \varepsilon$$

则此时：

$$\lim_{n \to \infty} na_{2n} = 0$$

取$p = n + 1$,同理可得：

$$\lim_{n \to \infty} na_{2n+1} = 0$$

由由于极限值为0，扩大或缩小倍数没有影响，即：

$$\lim_{n \to \infty} 2na_{2n} = 0,\ \lim_{n \to \infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$$

即：

$$\lim_{n \to \infty} na_n = 0$$

而对于所证，记$b_n = n(a_n - a_{n+1})$。为证明部分和收敛：

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| = na_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} - (n+p)a_{n+p+1} \to 0$$

所以级数收敛，得证。

- **2.(1)**

思路：寻找等价无穷小：

$$\frac{1}{n^p-n^q}=\frac{1}{n^p(1-n^{q-p)}}\to\frac{1}{n^p}$$

由课本原题：

- $p>1$时，收敛。
- $p\leq 1$时，发散。

- **2.(2)**

思路： 考虑通项式能否与另一式子进行逼近：

$$\frac{1}{p^n-q^n}=\frac{1}{p^n(1-(\frac{q}{p})^n)}\to\frac{1}{p^n}$$

由课本原题：

- $p>1$时，收敛。
- $p\leq 1$时，发散。

具体方法为：$p\leq 1$时，$\frac{1}{p^n}\to+\infty$，不收敛。$p>1$时，用积分判别法：$\int_2^n\frac{1}{p^x}\,\mathrm{d}x=x(\frac{1}{p})^{x-1}\to 0$，所以收敛。

- **2.(3)**

思路：

$$(\frac{x^n}{n^s})^{\frac{1}{n}}=\frac{x}{n^{\frac{s}{n}}}\to x$$

因此，由柯西判别法：

- $0<x<1$时，收敛。
- $x>1$时，收敛。
- $x=1$时，该式子化为$\frac{1}{n^s}$
  - $s>1$时，收敛。
  - $0<s\leq 1$时，发散。

补充：对于出现x^n的情况，可以考虑使用柯西判别法。

2.(4)

通项较为复杂，不易寻找可以逼近的通项时，我们采取**积分判别法**。

而对于此式子，由于含有p,q，不易分析，所以先考虑将q放缩掉。

$p>1$时，我们注意到:

$$\int_3^A \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x=(\ln x)^{1-p}|_3^A\to 0,\quad A\to+\infty$$

且在此时，有：$(\ln\ln n)^q>1$。

即

$$\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}<\frac{1}{n(\ln n)^p}$$

所以有:

$$\int_3^A \frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^p}\,\mathrm{d}x\le\int_3^A \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x=(\ln x)^{1-p}|_3^A\to 0,\quad A\to+\infty$$

即此时级数收敛。

$p<1$时，有:

$$\int_3^A \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x=(\ln x)^{1-p}|_3^A\to \infty,\quad A\to+\infty$$

$$(\ln\ln n)<(\ln n)^{\frac{1-p}{q}}$$

$$\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}>\frac{1}{n\ln n}\to\infty$$

因此，该级数发散。

$p=1$时，级数为：$\dfrac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^q}$。使用积分判别法，凑微分后形式统一。

- $q>1$，级数收敛。
- $q=1$，级数发散。
- $q>1$，级数发散。

3.

正向级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,且$\{a_n\}$单调递减，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$同时收敛或发散。

思路：类型：将部分和序列改写成另一种形式，尝试说明另一种部分和可以被另一种两边限制。

证： 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛或发散：

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 + \cdots + a_{2^n} \\ &= （a_1 + a_2) + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \end{aligned}$$

对于其中的第n组，有：

$$2^{n-1}a_{2^{n-1}} = (2^n - 2^{n-1})a_{2^{n-1}} \geq (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \geq (2^n - 2^{n-1})a_{2^n} = \frac{1}{2}2^n a_{2^n}$$

即：$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$收敛或发散。

若$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$收敛：

对于其中的第k组，有：

$$2(a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k}) \geq 2^k a_{2^k} \geq a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}$$

所以S_n有界

即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时收敛或发散。

题后记：若部分和有界，由于正向级数单增，则正向级数一定收敛。

- **4.**

$\{a_n\}$单增，正数数列。

思路： 当$\{a_n\}$有界时：

$\exists M > 0$，使得$|a_n| \leq M$恒成立。所以

$$S_n = \frac{a_2 - a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1} - a_2}{a_2} \leq \frac{m}{a_2} - 1$$

即正向级数的部分和S_n有界，所以正向级数收敛。

当$\{a_n\}$无界时，可以得到当$n \to \infty$时，$\exists M < 1$，使得：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < M$$

否则有界。

由柯西收敛原理：

存在$\varepsilon_0 = 1$，使得对$\forall N > 0$，当$n \geq N$时，

$$\begin{gathered}
\forall n \in N, \\
\frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p} - a_{n+p-1}}{a_{n+p}} > p(1 - M) > 0 \\
\forall M > 0, \exists p > 0, \quad \text{s.t.} \qquad a_{n+p} \geq m a_n \\
\geq \frac{a_{n+p} - a_n}{a_n} > 1
\end{gathered}$$

- **5.求证：** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛而 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ 发散

思路：两边同取$\ln$，将原式子放缩。

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

首先，对分母取对数，并化简，可以得到：

$$\ln n(\ln \ln n) = t \ln t \geq 2t = \ln n^2, \ n \to \infty$$

所以有

$$(\ln n)^{\ln n} \geq n^2$$

在n充分大时成立。则

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \leq \frac{1}{n^2}$$

收敛。

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$
$$(\ln n)^{\ln \ln n} < n$$

(这里自己展开试试)

最后一个式子$> 2 \ln n$，所以收敛。

题后注：$\ln n$相当于一个任意小的次幂。

6.重要性质：次幂的收敛性

若正向级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^r$ 收敛，$r > 1$。反过来不一定成立。

思路：由于$a_n \to 0$，在n充分大时，有：

$a_n^r < a_n$

所以收敛。

7.

思路：

部分和序列S_n无界，且一定发散至$+\infty$。

所以有：

$$\frac{u_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$$

发散。

$$\frac{u_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

累加后，

$$\sum_{n=2}^{P} \frac{u_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_p} \to \frac{1}{S_1}$$

收敛。

<u>**更一般地，有：**</u>

$$\frac{u_n}{S_n^{1+\delta}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{1+\delta}} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^{1+\delta}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\delta}} - \frac{1}{S_n^{\delta}}\right)$$

累加后：

$$\sum_{n=2}^{P} \frac{u_n}{S_n^{1+\delta}} \leq \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\delta}} - \frac{1}{S_n^{\delta}}\right)$$

收敛。

这也就是说，S_n的次数只要高于1，该级数就一定收敛。

- **12.**

$$\text{设}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})\text{绝对收敛，}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{收敛，证：}\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\text{收敛。}$$

思路：**考虑使用柯西收敛原理，研究部分和：**

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kB_k-\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kB_{k-1}$$
$$=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kB_k-\sum_{k=n}^{n+p-1}a_{k+1}B_k=a_{n+p}B_{n+p}-\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k-a_{n+1}B_n$$

（这里多分析一点。利用柯西收敛的时候，通常要对求和的上下标进行操作，比如此处）

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)(B_k-B)+B\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)=$$
$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)(B_k-B)+B(a_{n+p}-a_{n+1})$$

又因为$B_n\to B$,$a_n\to a$（通过收敛推出）

$$=a_{n+p}(B_{n+p}-B)-\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)(B_k-B)-a_{n+1}(B_n-B)$$

不难发现，第一项和第三项均收敛到0。而对于中间这一部分，使用绝对值放缩：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)(B_k-B)\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|(a_{k+1}-a_k)|\,|(B_k-B)|$$

而又由于B_k-B有界，所以收敛。

证明题，柯西收敛原理结合交叉放缩，出现频率极高。

- **13.**

设$a_n > 0$，$n = 1,2,\cdots$,且$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) > 0$,，求证收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

思路：对于交错数列，考虑莱布尼茨判别法（非交错部分单调收敛到0）。叠项：考虑取对数累加或类乘

证： 设极限值为δ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当} n > N \text{时，有：}$$
$$\left| n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - \delta \right| < \varepsilon$$
$$\text{取} \varepsilon = \frac{\delta}{2}\text{，则：}$$
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{\delta}{2n}$$
$$\ln a_n - \ln a_{n+1} \geq \ln(1 + \frac{\delta}{2n})$$
$$\vdots$$
$$\ln a_n - \ln a_{n+p} \geq \sum_{k=n}^{n+p+1} \ln(1 + \frac{\delta}{2k})$$

而又因为对于级数的部分和$\sum_{k=n}^{n+p+1} \ln(1 + \frac{\delta}{2k})$发散（判断这个级数是否收敛），所以左式$\rightarrow \infty$

则$a_{n+p} \rightarrow 0$，这也就是说a_n单调递减且收敛到0.

由莱布尼茨判别法，收敛。

- **14.**

$\{a_n\}$单调递减趋于0，且级数收敛，求证收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$$

思路： $a_n \geq 0$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} k \cdot a_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} k \cdot a_{k+1}$$
$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} (k+1) \cdot a_{k+1} - \sum_{k=n+1}^{n+p} k \cdot a_{k+1} = (n+1)a_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1} - (n+p)a_{n+p+1}$$
$$pa_{n+p} \leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$
$$\text{取} p = n,\ n+1\text{，可以得到：}$$
$$na_n \rightarrow 0$$

(注意这种分奇偶令值，并最终得到重要结果的方式)

- **15.**

$$\text{设} \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1}) \text{ 收敛。且} \{na_n\} \text{收敛，求证：级数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛。}$$

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} n(a_n - a_{n-1}) = \sum_{i=n+1}^{n+p} na_n - \sum_{i=n+1}^{n+p} na_{n+1}$$
$$= \sum_{i=n+1}^{n+p} na_n - \sum_{i=n}^{n+p-1} na_n + \sum_{i=n}^{n+p-1} a_n$$

所以级数收敛。

- **16.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，问$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$是否一定收敛?

- **17.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，问，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$是否一定收敛?

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$是正向级数，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{2r}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$不一定收敛。

例：$a_{2n}=\frac{1}{n}$，$a_{2n-1}=0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$也发散。

- **18.**

收敛级数重排后，还收敛吗?

- **20.(2)**

$$a_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}},\ a_{2n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\text{。求证：}\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\text{收敛，而}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散}$$
$$(1+a_{2n-1})(1+a_{2n})=1+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
$$T_{2n}=\prod_{k=1}^{2n}=\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}})\to T\neq 0$$
$$T_{2n+1}=T_{2n}(1+a_{2n+1})\to T$$
$$\therefore T_n\to T$$

习题16

- **1.(1)**

$$\forall x>0，x\arctan nx 的逐点收敛到 \frac{\pi x}{2}$$

$$\sup_{x>0}\left|x\arctan nx-\frac{\pi x}{2}\right|=\frac{\pi x}{2}-x\arctan nx\sim\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{nx}\sim\frac{1}{nx}$$

$$即\ \lim_{n\to\infty}\sup_{x>0}\left|x\arctan nx-\frac{\pi x}{2}\right|=0，所以一致收敛。$$

- **1.(2)**

$$\forall x\in(a,b)$$

$$f(x)=(1+\frac{x}{n})^n=\mathrm{e}^x$$

$$||f_n-f||_\infty=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right|=\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{x}{n})}-\mathrm{e}^x=\left|\mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{x}{n})-x}-1\right]\right|$$

$$(n\ln(1+\frac{x}{n})-x)'=-\frac{x}{n+x}$$

$$所以0是驻点，而x=0时，\ =0，所以边界在x=a或者x=b$$

$$\therefore\sup_{a\le x\le b}|f_n-f|\le\mathrm{e}^b\max\{\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{a}{n})-a}-1,\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{b}{n})-b}-1\}$$

由泰勒展开，一致收敛。

- **2.**

2. 设$f_0(x)$在$[a,b]$上连续, 求证: 函数列

$$f_n(x)=\int_a^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots$$

在$[a,b]$上一致收敛于0.

$$|f_0(x)|\le M$$

$$f_n'(x)=f_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow f_n(x)在[a,b]上n阶连续可导$$

$$观察可以得到，f_n(a)=0,\ \forall n>0$$

$$在x=a处，泰勒展开$$

$$|f_n(x)-f_n(a)|=\sum_{k=1}^{n-1}f_n^{(k)}(a)\frac{1}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{n!}f_n^{(n)}(\xi_x)(x-a)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}f_n^{(k)}(a)\frac{1}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{n!}f_0(\xi_x)(x-a)^n$$

$$=\left|\frac{1}{n!}f_0(\xi)(x-a)^n\right|\le\frac{M}{n!}(x-a)^n\le\frac{M}{n!}(b-a)^n\to0$$

$$f_n(x)一致收敛到0$$

- **3.**

3. 设$f(x)$在区间(a,b)中有连续导函数$f'(x)$, 求证: 函数列

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],\qquad n=1,2,\cdots$$

在(a,b)上内闭一致收敛于$f'(x)$.

取(a,b)上一内闭区间I

$f_n(x)$逐点收敛到$f'(x)$，这是因为导数存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}=f'(x)$

且由中值定理，$f_n(x)=f'(\xi_x),\ \xi\in\left(x,x+\dfrac{1}{n}\right)$

$$||f_n-f'||_\infty=\sup_{x\in I}|f'(\xi)-f'(x)|$$

当$n>N_1$时，$\exists$闭区间$I'\subseteq(a,b),\ \forall x\in I,x+\dfrac{1}{n}\in I'$

又$f'(x)$在I'一致连续，$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_2>0,$ 当$|x_1-x_2|<\dfrac{1}{N_2}$时，

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon,\ x_1,x_2\in I'$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时，$\sup\limits_I|f'(\xi_x)-f'(x)|<\varepsilon$

所以一致收敛。

- **4.**

4. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续, 求证: 函数列

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right),\qquad n=1,2,\cdots$$

在$(-\infty,+\infty)$上内闭一致收敛.

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})=\int_x^{x+1}f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)$$

即$f_n(x)$逐点收敛到$F(x)$

由中值定理,

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(\xi_k),\ \xi_k\in\left[x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right]$$

任取闭区间$[a,b]$，可以知道$f(x)$在$[a,b+1]$一致连续。

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当$x_1,x_2\in[a,b+1],|x_1-x_2|<\dfrac{1}{N}$时，

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

当$n>N$时，$|\xi_k-(x+\dfrac{k}{n})|<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}$

$\Rightarrow\left|f(\xi_k)-f(x+\dfrac{k}{n})\right|<\varepsilon$，所以在$[a,b]$一致收敛。

题后注：内闭一致收敛，一定要考虑一致连续！

- **5.**

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无限次可导，函数列

$$F_n(x)=f^{(n)}(x),\quad n=1,2,\ldots$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 $\varphi(x)$，求证：$\varphi(x)=Ce^x$，其中 C 为常数。

证明：

$$F_n'(x)=f^{(n+1)}(x)=F_{n+1}(x)$$
$$\{F_n(x)\},\{F_n'(x)=F_{n+1}(x)\}$$
$$\text{一致收敛}\Rightarrow\text{极限换序}$$
$$\varphi'(x)=\frac{\partial\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)}{\partial x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial F_n(x)}{\partial x}=\lim_{n\to\infty}F_{n+1}(x)=\varphi(x)$$
$$\Rightarrow\varphi(x)=c\cdot\mathrm{e}^x$$

已知内闭一致收敛：可以用极限换序。

- **6.**

6. 设多项式序列$\{P_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$f(x)$，求证：$f(x)$也是一个多项式.

$$\text{由柯西收敛原理，取}\varepsilon=1,\ \exists N_1>0,\text{当}n>N_1\text{时，对任意}x\text{，有}|P_n(x)-P_{N+1}(x)|<1$$
$$P_n(x)-P_{N+1}(x)\text{是一个多项式，且绝对值小于1，所以是常函数。}$$
$$P_n(x)=P_{N+1}(x)+\gamma_n\text{，}\gamma_n\text{与}x\text{无关。}$$
$$\text{所以}f(x)=P_{N+1}(x)+\gamma\text{多项式。}$$