第14章：数项级数

数列极限（回忆）

数列S_n的极限定义（$\varepsilon - N$）：

$\exists S > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当$n > N$时，有$|S_n - S| < \varepsilon$,则称$S_n$收敛至$S$，记为$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

单调收敛定理: 单调有界数列收敛。

柯西收敛定理: S_n收敛当且仅当:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当$n > N$时，有$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$.

数列的上下极限：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n = a$，当且仅当:

1. 存在m_k，使得$\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k} = a$
2. 对任意收敛子列S_{n_k}，$\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k} \le a$

数列下极限有类似的等价条件，在此不再赘述。

14.1 级数收敛性的概念和基本性质

定义：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是一个级数，称$u_n$为级数的**通项**。令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

称S_n为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的第n个**部分和**，并称数列S_n为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的**部分和数列。**

定义(级数收敛与发散)： 如果$\{S_n\}$收敛（到S），则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛（到S），记为：

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

如果$\{S_n\}$发散，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，

若$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty(-\infty)$,则记$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty(-\infty)$。

定义(正向级数)： 若对任意的$n \geq 1, u_n \geq 0$，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是**正向级数。**

例1：考虑$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$的敛散性：

思路：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

值得注意的是，该数项级数的值为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

我们将在后续课程着重强调。

例2：考虑$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$的敛散性：

思路：证明$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$无界。值得一提的是，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx \ln n + r$

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \geq \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \geq \frac{1}{2}$$

而又因为：

$$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{n} \geq \frac{m}{2} \to +\infty, \quad m \to +\infty$$

故该级数发散。
重点：部分和数列无界即发散，对于正向级数，有界即收敛。

定理（柯西收敛原理）：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛当且仅当：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当$n \geq N$时，有$|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k| < \varepsilon, \quad \forall\, m \geq 1$。

在上述式子，令$m = 1$，可知$u_n \to 0$，由此得到下述定理：

级数收敛的必要条件：

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

控制收敛定理：

设对$n \geq 1$，$u_n \geq 0$，$v_n \geq 0$，$|u_n| \leq v_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛。若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

证明： 由$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，应用柯西收敛原理，有：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当$n \geq N$时，有$v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots + v_{n+m} < \varepsilon, \quad \forall\, m \geq 1$。于是：

$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}| < \varepsilon$. 由柯西收敛原理可知，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

例3： 考虑$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}$的收敛性：

思路：$\frac{|\sin\sqrt{n}|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$，收敛。

例4：：考虑$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$的收敛性：

- $q \geq 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \to +\infty$，发散。
- $0 < q < 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \to \frac{q}{1-q}$，收敛。

级数的四则运算： 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则：

- $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} C u_n = C \sum_{n=1}^{\infty} u_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} v_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sum_{n=1}^{\infty} u_n$?后续课程将对此进行说明。

和数列极限类似，我们**更关注**$\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$的收敛性，即只关注后续无穷项是否能控制，而对前几项不关心。

14.2正项级数

例1：考虑$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性。

- $p\geq 2$时，$\frac{1}{n^p}\leq\frac{1}{n^2}$，此时级数收敛。
- $p\leq 1$时，$\frac{1}{n^p}\geq\frac{1}{n}$，此时级数发散。

当$1<p<2$时，令$f(x)=\frac{1}{x^p}$，考虑:$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{n^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}$，此时级数收敛。

记住本题的结论：

- $p\leq 1$，级数发散。
- $p>1$，级数收敛。

定理：设$f(x)$在$[1,+\infty)$上非负递减，令

$$A_n=\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$与$\{A_n\}$同时收敛，同时发散。

例2：考虑$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$的敛散性:

思路：通项较为复杂时采用积分判别法:

$$A_n=\int_3^n\frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x=\int_3^n\frac{\mathrm{d}\ln \mathrm{x}}{(\ln x)^p}=\frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_3^n$$

上述级数显然是收敛的.

回忆：

对$n\geq 1,u_n\geq 0,v_n>0,$考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$u_n\leq v_n$，则二者**同时收敛，同时发散。**

定理1: 设对$n\geq 1,u_n\geq 0,v_n>0,$且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\in[0,+\infty)$$

（1）若$l \in (0,+\infty)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛与发散。

（2）若$l=0, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

（3）若$l \to +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

证明：

（1）由$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$,对$\varepsilon_0 = \frac{l}{2}$,$\exists N>0$,使得当$n \geq N$ 时，有$|\frac{u_n}{v_n} - l| \leq \varepsilon_0 = \frac{l}{2}$。

即：$\frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$由此可得，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛与发散。

（2）由$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$,对$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得当$n \geq N$ 时，有$|\frac{u_n}{v_n}| < \varepsilon$，可知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

（3）由$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$，则$|\frac{u_n}{v_n}| > N$，可知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

补充：在利用本定理做题时，可以尝试无穷小量替换。

例1： 判断 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt[n]{n}-1)}$ 的敛散性。

思路：

$$n^{\frac{1}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$$
$$\frac{1}{n(\sqrt[n]{n}-1)} \sim \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

所以发散。

例2：判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n^p}, \quad p>0$ 的敛散性。

思路： 考虑到

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{x}{n^p}}{\frac{x}{n^p}} = 1$$

且$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p}$收敛性已知：

- $p \leq 1$，级数发散。
- $p > 1$，级数收敛。

例3： 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} [\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n]$ 的敛散性。

思路:

$$\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e} - \exp(n\ln(1+\frac{1}{n}))$$

利用等价无穷小:

$$\mathrm{e}-\exp(1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n^2}))=\frac{\mathrm{e}}{2n}+o(\frac{1}{n^2})$$

所以：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{\mathrm{e}}{2n}}=1$$

定理（柯西判别法）：

设$n\geq 1,u_n\geq 0$，$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}$。

- 若$r<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。
- 若$r>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。
- 若$r=1$，无法判断敛散性。例如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，两者均满足$r=1$，但是前者发散，后者收敛。

证明：

（1）由$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}<1$,对$r<q<1$,存在$N$，使得当$n\geq N$时，有$\sqrt[n]{u_n}\leq q^n$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

（2）由$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}>1$，存在子列$\{m_k\}$使得$\sqrt[n_k]{u_{n_k}}>1$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

回忆：在数学分析上册，曾学过下述不等式：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

由此，引入下述定理：

定理（达朗贝尔判别法）：
设$n\geq 1,u_n>0$：

- 若$\overline{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。
- 若$\underline{r}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

证明：

（1）由$\overline{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，知对$r<1$，存在$N$，使得当$n\geq N$时，有$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q$
于是：

$$u_n\leq qu_{n-1}\leq q^2u_{n-2}\leq\cdots\leq q^{n-N}u_N$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

（2）由$\underline{r}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则存在子列$\{n_k\}$使得

$$u_{n_{kn}}\geq qu_{n_{k(n-1)}}\geq\cdots\geq q^{k_n-k_N}u_{k_N}。$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

例4： 判断$\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{x}{n})^n, \quad x>0$的敛散性

思路：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(\frac{x}{n+1})^{n+1}}{n!(\frac{x}{n})^n}=\frac{x}{e}$$

1. 若$x<\mathrm{e}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{x}{n})^n$收敛。
2. 若$x>\mathrm{e}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{x}{n})^n$发散。
3. 若$x=\mathrm{e}$，则判断的级数为$\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{\mathrm{e}}{n})^n$. 利用柯西判别法：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{n!}\frac{e}{n}$$

例5： 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x)^2\cdots(1+x)^n}, \quad x>0$的敛散性

思路： 使用达朗贝尔判别法，

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{1+x^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}=\begin{cases}x, & x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

例6： 判断$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性，其中：

$$u_n=\begin{cases}2^{-n} & x\text{为奇数}\\ 3^{-n} & x\text{为偶数}\end{cases}$$

本题在尝试使用达朗贝尔判别法时，无法得到答案，所以采取柯西判别法求解。

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}<1$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

14.4一般项级数

定理1： 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

定义1：

- 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛。
- 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛。

例1:判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$的敛散性:

利用柯西收敛原理，研究后续几项的情况。

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}=(-1)^{n+2}(\frac{1}{n+1}-(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}))$$

由柯西收敛原理，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛。

由于正负项抵消，事实上收敛的速度可以比正向级数满很多。一般地，对于：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$，对于$\forall s$，该级数都收敛。

下面举几个正负震荡，有界的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1\text{ or }0$$

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(kx)=2\sum_{n=1}^{\infty}\{\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x\}=\cos\frac{x}{2}-\cos[(n+\frac{1}{2})x]$$

也即

$$|\sum_{n=1}^{\infty}\sin(kx)|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

定理（Dirichlet判别法）： 设$u_n\geq 0,\{u_n\}$递减趋向于0，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$收敛。

现在，我们考虑第一节遗留的问题，数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_nu_n$，在什么样的限制条件下收敛？由上述引例，可知，应该其中一个是正负项相抵消的数列，另一个是比较好的，可以收敛的数列。

阿贝尔求和法:

令$B_m=\sum_{k=1}^{n}b_k,B_0=0$

则$b_k=B_k-B_{k-1}$，用此替换，则:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} b_k = a_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

学习此种求和方法之后，我们继续学习级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$，在什么样的限制条件下收敛。

由柯西收敛原理，考虑后续几项的部分和:

将b_k记为$(B_k - B_n) - (B_{k-1} - B_n)$，即此时:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+p}(B_{n+p} - B_n) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})(B_k - B_n)$$

定理（迪利克雷判别法）：

设:

- $\{a_n\}$单调且趋于0。
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和数列有界

则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

证明： 由（2）可知，存在$M > 0$使得

$$|B_n| \leq M, \quad \forall n \geq 1$$

由（1）可知，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，当$n \geq N$时，有

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

对$n \geq N, p \geq 1$

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k| \leq |a_{n+p}||(B_{n+p} - B_n)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}||B_k - B_n| \leq 2M|a_{n+p}| + 2M|a_{n+1} - a_{n+p}| < \varepsilon$$

定理（阿贝尔判别法）：

设:

- $\{a_n\}$单调有界。
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和数列收敛。

则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

由（1）知，存在$a_n \to a_0$

由**迪利克雷判别法**可知，$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_0) b_n$收敛。

从而:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_0)b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_0 b_n$$

可以化简为两个收敛数列的和。得证。

例1： 考虑$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$， $p>0$的敛散性。

思路：

- 若$p>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^p}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$。从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$， $p>0$绝对收敛。
- 若$0<p<1$。由$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$递减趋向于0，且$\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin(nx)\right\}_{n\geq1}$有界。由迪利克雷判别法可知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$收敛。

$$\begin{aligned}\frac{|\sin(nx)|}{n^p} &\geq \frac{\sin^2(nx)}{n^p}\\ &= \frac{1-\cos(2nx)}{2n^p}\\ &= \frac{1}{2n^p}-\frac{\cos(2nx)}{2n^p}\end{aligned}$$

又由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{2n^p}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$发散，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^p}$发散。

例2： 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}u_n$收敛。

证：由$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n\geq1}$单调有界,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，应用阿贝尔判别法，得证。

例2*： 设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

即：如果在收敛数列前面乘一个单调有界的数列，不改变收敛性。

14.6无穷乘积

本节我们考虑无穷乘积：

$$\prod_{n=1}^{\infty}u_n$$

记$P_n=\prod_{k=1}^{n}u_k$。

定义1：

- 如果$\{P_n\}\to P$，且P，则称无穷乘积$P_n=\prod_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，记为$P=\prod_{n=1}^{\infty}u_n$。
- 如果$\{P_n\}$发散，或者$\{P_n\}\to 0$，则称$\prod_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

若无穷乘积$P_n=\prod_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则

$$u_n=\frac{P_n}{P_{n-1}}\to 1$$

命题： 若无穷乘积$P_n=\prod_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=1$

命题： 设$u_n>0$。则无穷乘积$P_n=\prod_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，当且仅当$\sum_{k=1}^{n}\ln u_n$收敛。

此时，$\ln P_n=\sum_{k=1}^{n}\ln u_n$。

设$u_n=1+\alpha_n,\quad \alpha_n\geq 0$。则$\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\alpha_n)$与$\sum_{k=1}^{n}\alpha_n$同时收敛，同时发散。**同阶，同时收敛同时发散。**

命题： 设$\alpha_n\geq 0$，则$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$收敛当且仅当$\sum_{k=1}^{n}\alpha_n$收敛。

推广： 设$0\leq\alpha_n<1$，则$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n)$收敛当且仅当$\sum_{k=1}^{n}\alpha_n$收敛。

例1： 存在多项式$P(y)$，使$\sin(nx)=P(\sin x)$。对于正弦常见的等式：

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})$$
$$\sin(\pi x)=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})$$
$$\sin(\pi x)=\pi x-\frac{\pi^3x^3}{6}+0(x^3)$$

又因为展开的三阶项对应相同，所以：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

例2： 存在多项式$P(y)$，使$\cos(nx)=P(\cos x)$。对于余弦常见的等式：

$$\cos(\pi x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{4(n-1)^2})$$

对于对素数做乘积的形式，常见的等式（黎曼ζ函数）：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}}$$

其中$s>1,\quad p_k$是某个素数。

可以通过该公式证明素数是无限的。

14.7级数的乘积

引入：考虑$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$和$\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$两个有限和的乘积。显然满足：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_j$$

为考虑两个级数的乘积，我们引入双指标的数列$\{a_{ij}\}_{i\geq 1,\, j\geq 1}$，并引入一个新的定义：重排。

定义（重排）：称$\{c_n\}_{n\geq 1}$是$\{a_ib_j\}_{i\geq 1,\, j\geq 1}$的一个**重排**，如果：

- $a_i,\ b_j$在$\{c_n\}_{n\geq 1}$ 中只出现一次。
- $\{c_n\}_{n\geq 1}$没有$\{a_ib_j\}_{i\geq 1,\, j\geq 1}$之外的项。

这样，有一个很自然的问题：设$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$和$\sum\limits_{j=1}^{\infty}b_j$收敛，$\{c_n\}_{n\geq 1}$是$\{a_ib_j\}_{i\geq 1,\, j\geq 1}$的一个重排。问是否满足：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j?$$

我们先考虑正向级数的情况，即设$a_i\geq 0,\ b_i\geq 0,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=A,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i=B$**。**

我们先证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$**收敛：**

令$C_N=\sum\limits_{i=1}^{N}c_n$，取$N_1$和$N_2$足够大，使得$\{c_n\}_{\ n=1,2,\cdots,N}$包含在$\{a_ib_j\}$中。于是：

$$\sum_{i=1}^{N}c_n\leq\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}a_ib_j=\sum_{i=1}^{N_1}a_i\sum_{j=1}^{N_2}b_j\leq\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j\to AB$$

又因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$也是正向级数，部分和序列有界，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛。

再证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$:

对于任意的$\varepsilon > 0$，$\exists N_1, N_2$，满足

$$\sum_{i=N_1}^{\infty} a_i < \frac{\varepsilon}{2B}, \quad \sum_{j=N_2}^{\infty} b_i < \frac{\varepsilon}{2A}$$

此时，我们取N足够大，使得$\{a_i b_j\}$包含在$\{c_n,\ n=1,2,\cdots,N\}$中。

则此时:

$$\sum_{i=1}^{N_1} a_i \sum_{j=1}^{N_2} b_j \le \sum_{n=1}^{N} c_n \le AB$$

$$\begin{aligned} AB - \sum_{i=1}^{N_1} a_i \sum_{j=1}^{N_2} b_j &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - A \sum_{j=1}^{N_2} b_j + A \sum_{j=1}^{N_2} b_j - \sum_{i=1}^{N_1} a_i \sum_{j=1}^{N_2} b_j \\ &\le A \sum_{j=N_2+1}^{\infty} b_j + B \sum_{i=N_1+1}^{\infty} a_i < \varepsilon \end{aligned}$$

由两边夹，可知:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j = AB$$

这就完成了证明。

我们再考虑一般的情况：$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$和$\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$绝对收敛时，有没有好的性质?

设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ 和 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ 绝 对 收 敛 ， 对 $x \in \mathbb{R}, x^+ = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, x^- = \begin{cases} 0, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ， 则 $x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-$

所以$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^+ + \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^-$以及$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^+ - \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^-$均收敛，同理可以得到$b_j$的等式收敛，在此不赘述。

所以:

$$c_n = a_i b_j = (a_i^+ - a_i^-)(b_j^+ - b_j^-) = a_i^+ b_j^+ - a_i^- b_j^- a_i^+ b_j^- + a_i^- b_j^- = c_n^{++} + c_n^{--} - c_n^{+-} - c_n^{-+}$$

此次拆分将c_n拆分成了4个正向级数之和（差），从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，且:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j = AB$$

考虑这样一组数：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对于$\{a_{ij}\}$,我们按照依次取对角线元素的方式，重排列，则最终得到：

$$a_{11}+(a_{12}+a_{21})+(a_{13}+a_{22}+a_{31})+\cdots+(a_{1n}+\cdots+a_{n1})=\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n-k+1})$$

对于这种特殊的重排得到的级数的乘积，我们称为**柯西形式的乘积**。将上述所有分析综合起来，得到下述命题：

命题：设正向$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$和$\sum_{j=1}^{\infty}b_j$收敛，$\{c_n\}_{n\geq 1}$是$\{a_i b_j\}_{i\geq 1,\ j\geq 1}$的一个重排，则$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛，且满足：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j$$

若$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$和$\sum_{j=1}^{\infty}b_j$绝对收敛，则上述命题同样成立。

特别地，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n-k})=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty}b_j$$

推论：设$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$绝对收敛，设$\{c_n\}$是一个重排， 则$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛且：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

证明思路：取$b_1=1,\ b_j=0,\ j\geq 2$。

Riemann重排定理：设$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$条件收敛，则对任意$x\in\mathbb{R}$或$x=+\infty$或$x=-\infty$，则存在重排，使得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=x$$

(Fubini定理)：设$\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|$收敛，则：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-k}a_{k,n-k}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\right)$$

定理理解： $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij})=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$

可以看成一个关于i的序列：$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\right\}_{i\geq1}$的级数和。

同样的: $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\right)$可以看成$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\right\}_{j\geq1}$的级数和，而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-k}a_{k,n-k}\right)$可以看成一个$\{u_n\}$是$\{a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31}\ldots\}$这样的由$\{a_{ij}\}$柯西排列排成的一个数列的级数和。