第15章：广义积分

回忆：Riemann积分

Riemann积分：**有界闭区间**$[a,b]$上的**有界函数**$f(x)$，分割+黎曼和，看是否收敛。

但在实际问题中，我们经常需要在无界区间积分，或者对无界函数积分。因此，我们要将积分推广到无界上。

广义积分

基本的思路：

- 设$f(x)$定义在$[a,b]$上，其中$b=+\infty$或有限（通常在b有限时，$f(x)$在b某个领域内无界）
- 设对任意的$\theta\in(a,b)$，有$f(x)$在$[a,\theta]$内**Riemann可积。**

定义：如果极限$\lim\limits_{\substack{\theta\to b\\ \theta<b}}\displaystyle\int_a^\theta f(x)\,\mathrm{d}x$存在，则称$f(x)$在$[a,b]$上的广义积分收敛，记为：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\theta\to b\\ \theta<b}}\int_a^\theta f(x)\,\mathrm{d}x$$

注：若对于区间$(a,b]$，我们有类似的定义方式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\theta\to a\\ \theta>a}}\int_\theta^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果区间的两个端点都有问题，即对于区间(a,b)，对于任意的$a<\alpha<\beta<b$，$f(x)$在$[\alpha,\beta]$可积，则对于任意$c\in(a,b)$，$f(x)$在$(a,c]$和$[c,b)$上的广义积分收敛，则称$f(x)$在(a,b)广义积分收敛，记为：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

根据这种思路，即使函数在很多点都有问题，可以将这些问题点全部扣去，再最后加起来。

广义积分的本质：探讨一个特殊的极限是否存在。所以，很多处理极限的思路都可以用。例如：证明不可积，如果能找到两个不同的趋近方式，使极限值不同，则不可积。

广义积分的思想核心：是把那些“麻烦”的点用极限的方式处理，转而求解在这些点附近趋近的过程中积分的收敛性。比如，在无穷区间上，直接去求积分可能不可能，但如果我们能够找到一种方法，在一个逐渐增大的有限区间上计算并且得到一个极限值，我们就可以处理这种情况。这类似于处理函数不连续性或无穷大的情形，通过适当地“割除”有问题的区间或点，然后将它们放回到整体积分中。

这种方法允许我们处理更多的函数，甚至一些在传统积分理论下无法处理的函数。通过考察积分的极限，我们可以判断广义积分是否收敛，从而将原本可能发散的积分问题转化为一个关于极限的讨论。

例1： $\int_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$

- 对$b_n = 2n\pi$，有$\int_0^{2n\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 0$
- 对$c_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，有$\int_0^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$

于是发散。同理，$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$也发散。

但是，如果采用下述考虑方式:

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} \sin x \, \mathrm{d}x = 0$$

与我们的推理矛盾！

这就是说，一般情况下：

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \neq \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x) \, \mathrm{d}x$$

直观解释：广义积分的定义关注的是**单边极限的收敛**，即从一个端点逐渐扩展到另一个端点（或无穷远）的积分行为。而对称的积分方式并不属于广义积分定义中的一种情形，它仅是一种特例，不能用来替代广义积分收敛性的判断。

例2： $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, \mathrm{d}x$

对$A > 1$时，有：

$$\int_1^A \frac{1}{x^p} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \ln A, & p = 1 \\ \frac{1}{1-p}[A^{1-p} - 1], & p \neq 1 \end{cases}$$

即：

- $p > 1$，收敛。
- $0 < p \leq 1$,发散。

这和级数的结果类似。

例3： $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} \, \mathrm{d}x$

- $p > 1$，收敛。
- $0 < p \leq 1$,发散。

这和级数的结果类似。

命题： 设$f(x)$在$[a, +\infty)$上**非负**且对于任意的$A > a$，$f(x)$在$[a, A]$上黎曼可积，取$A_n \to +\infty$则$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x) \, \mathrm{d}x$收敛。

注：只要$f(x)$在$[A_{n-1}, A_n]$不变号，上述结论依然成立。

A_n 是选取的一列趋向无穷的数，它不必是等间隔的，可以根据实际情况选取。

若进一步的，$f(x)$在$[a,+\infty)$单调递减，则有：

$$f(A_n)(A_n-A_{n-1})\le\int_{A_{n-1}}^{A_n}f(x)\,\mathrm{d}x\le f(A_{n-1})(A_n-A_{n-1})$$

这样，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(A_{n-1})(A_n-A_{n-1})$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

推论：若$f(x)$在$[1,+\infty)$递减趋向于0，则$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛当且仅当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛。

证明思路：选取A_n间距分别为$1,2,\cdots,n$。

例4： $\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

- 当$p=1$时，有

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln x\Big|_0^{\varepsilon}\to\infty$$

所以发散。

- 当$p>1$时，有

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{x^p}=\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\to\infty$$

所以发散。

- 当$p<1$时，收敛。

现在，我们考虑一个级数的问题：

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\text{收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

在此时，若$f(x)$非负，而且$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，那么，有没有：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

事实上我们是推不出这个结论的，正确的结论应该是：极限不存在，或者极限存在且为0。

和可积类似，我们有以下**命题**：

- 令$F(t)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，等价于$\lim\limits_{t\to b^-}F(t)$存在。

此时，有：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(t)\Big|_a^b$$

- 设$F(x)$和$g(x)$在$[a,b)$连续可导，$F'(x)=f(x)$，则有：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

- 设$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta)$单调且连续可导，$\varphi(\alpha)=a$，$\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

例5： $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = -1$

例6： $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad \lambda>0$

$$\begin{gathered}= -\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} + (\lambda-1)\int_0^{+\infty} x^{\lambda-2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \Gamma(\lambda)=(\lambda-1)\Gamma(\lambda-1) \\ \because \Gamma(1)=1 \\ \therefore \Gamma(n)=(n-1)!\end{gathered}$$

令:

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad \lambda>0$$

关于Γ函数的具体情况，我们后续课程会进行详细分析。

和级数收敛相类似，我们有以下定理：

定理： 设对任意$c\in(a,b)$，$f(x)$和$F(x)$在$[a,c)$可积，且$|f(x)|\le F(x),\quad x\in[a,b)$,若$\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

定理: 设$f(x)$和$g(x)$非负，且

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = l\in[0,+\infty)$$

（1）若$l\in(0,+\infty)$，则$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 与$\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$同时收敛与发散。

（2）若$l=0,\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

（3）若$l\to+\infty,\ \displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$发散，则$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散。

例7： 考虑

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad \lambda>0$$

的敛散性：

以$\lambda>0$做为分界点，由例6，当$\lambda>0$时$\Gamma(\lambda)=(\lambda-1)!$，因此收敛。

当$\lambda\le 0$时，有：$x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\sim x^{\lambda-1}$，$x\to 0$。我们在0附近，取：

$$\int_0^{\varepsilon} x^{\lambda-1}\,\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon^{\lambda}}{\lambda}\to\infty$$

所以发散。

例8：考虑Beta函数：

$$\mathrm{B}(\alpha,\,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x$$

的敛散性：

我们需要重点考虑：0和1附近的值。

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sim\int_0^{\varepsilon} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon^{\alpha}}{\alpha},\quad x\to 0$$

所以当$\alpha>0$，收敛。$\alpha\le 0$，发散。

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sim\int_{1-\epsilon}^1 (1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\epsilon} t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t,\quad t\to 0$$

所以当$\beta>0$，收敛。$\beta\le 0$，发散。

定义（绝对收敛，绝对可积）： $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$收敛，则称为绝对收敛（绝对可积）

例： $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x,\quad p\in\mathbb{R}$

- $p\le 0$，$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\ge\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=1$，由柯西收敛原理，一定发散。（也可以用$[A_n,A_{n-1}]$对应的级数收敛，而这个级数的必要条件都没有满足（$\to 0$），所以发散。
- $p>1$

$$\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x\le\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

又因为单调递减收敛到0，则广义积分是否收敛等价于级数是否收敛。而当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，所以绝对收敛。

- $0<p\le 1$，思路和级数相同，相对收敛。