广义积分

广义积分的定义

例如：设$f(x)$为$(a,+\infty]$上定义的函数，且$x=b$为函数的瑕点，则广义积分的定义形式为：

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^c f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{v\to b^-}\int_c^v f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{t\to b^+}\int_t^d f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{w\to+\infty}\int_d^w f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中$c\in(a,b)$，$d\in(b,+\infty)$。这也指出了分析广义积分的一般策略：找出所有的瑕点（包括趋向无穷的点），并依次分析瑕点附近的极限情况。

敛散性的判别方法

- **$(\varepsilon\sim\delta)$**

定义法：

无穷积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛的充要条件：对于任意的$\varepsilon>0$，存在$A\geq a$，使得对于任意的$u>A$时，有：

$$\left|\int_u^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

瑕积分$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$（瑕点为$a$）收敛的充要条件：对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于任意的$u\in(a,a+\delta)$时，有：

$$\left|\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

柯西收敛准则：

无穷积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛的充要条件：对于任意的$\varepsilon>0$，存在$A\geq a$，使得对于任意的$u_1,u_2>A$时，有：

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

瑕积分$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$（瑕点为$a$）收敛的充要条件：对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于任意的$u_1,u_2\in(a,a+\delta)$时，有：

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

由于u_1, u_2是有限的，我们可以采取一些**定积分**的策略，例如第二积分中值定理（证明Abel-Dirichlet判别法）。

- ## 比较原则（在对应区间不变号）

等价无穷小：$f(x) \sim g(x)$，则$f(x)$与$g(x)$同时收敛，同时发散。**（最常用的操作，经常需要先进行一步替换再后续的计算）**

推论：

若无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 满足：

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda$$

- 若$p > 1$，且$\lambda \in [0, +\infty)$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。
- 若$0 < p \le 1$，且$\lambda \in (0, +\infty]$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散。

关注$\lambda = 0 \text{ or } \lambda = +\infty$的情况。

若瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$（瑕点为$a$）满足：

$$\lim_{x\to+\infty} (x-a)^p f(x) = \lambda$$

- 若$0 < p < 1$，且$\lambda \in [0, +\infty)$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。
- 若$p \ge 1$，且$\lambda \in (0, +\infty]$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散。

关注$\lambda = 0 \text{ or } \lambda = +\infty$的情况。

本推论的应用，请参考习题的例1 **（超链接可以跳转，看完例题后点击例题前方的超链接可以回到此位置）**

定理： 对于任意的$\alpha > 0$，都有

- $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0$

这三个式子再结合上我们上面的推论，可以发挥巨大作用。

推论结合定理的应用，请参考习题的例2，例3，例4

敛散性：

收敛 + 收敛 = 收敛；收敛 + 发散 = 发散；发散 + 发散 = 不确定；绝对收敛 + 绝对收敛 = 绝对收敛；**绝对收敛 + 条件收敛 = 条件收敛；** 条件收敛 + 条件收敛 = 不确定。

这给了无穷积分和瑕积分混合的问题提供了解决策略。

- ### A-D判别法

对于无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，有：

- 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，且$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。
- 若$F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$在$[a,+\infty)$上有界，且$g(x)$在$x\to+\infty$时单调收敛到零，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

对于瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，其中$f(x),\ g(x)$均以$a$为瑕点，有：

- 若$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，且$g(x)$在$(a,b]$上单调有界，则$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。
- 若$F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$在$(a,b]$上有界，且$g(x)$在$x\to a^+$时单调收敛到零，则$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

关于A-D判别法的应用，请参考习题的例5

习题册：

- ### 类型1（比较原则）：

例1：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q}\,\mathrm{d}x$$

讨论 p, q 的所有情况：

当 $p = q$ 时，$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x^p}\,\mathrm{d}x$, 发散。(无法兼顾 0 附近和趋向无穷的情况)

当$p > q$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \frac{1}{1+x^{q-p}} = 1$

所以$p > 1$时无穷积分收敛，$p \le 1$时无穷发散。

$$\lim_{x\to 0} x^q f(x) = 1$$

所以$q < 1$时瑕积分收敛，$q \ge 1$时瑕积分发散。

$\therefore q < 1 < p$时积分收敛，其余情况发散。

当 $p < q$ 时，类似的分析，可以得到：

$p < 1 < q$时积分收敛，其余情况发散。

例2:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

分析：0 和无穷大都是需要讨论的点。

$$\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}\,\mathrm{d}x$$

$\therefore p < 2$ 时，收敛; $p \ge 2$ 时，发散。

当 $p > 1$，任取 $r \in (1, p)$，则有：

$$\lim_{x\to+\infty} x^r \frac{\ln(1+x)}{x^p} = \frac{\ln(1+x)}{x^{p-r}} = 0$$

由定理的推论，收敛。

当 $0 < p \le 1$，任取 $r \in (p, 1)$，则：

$$\lim_{x\to+\infty} x^r \frac{\ln(1+x)}{x^p} = \frac{\ln(1+x)}{x^{p-r}} = +\infty$$

由定理的推论，发散。

当$p \le 0$时，易知发散。

例3:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x$$

分析：0和无穷大都是需要讨论的点。

$$\forall\, 0 < \alpha < 1,\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = 0$$

由定理的推论，收敛。

$$\forall\, \beta > 1,\ \lim_{x\to+\infty} x^\beta \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = \frac{\ln x}{x^\gamma} \frac{x^{\beta-\gamma}}{\mathrm{e}^x} = 0$$

由定理的推论，收敛。

例4:

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

$$p>1\text{时，任取}\, r\in(1,p)\text{，有：}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^r\frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\frac{1}{x^{p-r}(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=0$$

$$\text{由推论，收敛。}$$

$$p<1\text{时，任取}\, \beta\in(p,1)\text{，有：}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta\frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\frac{1}{x^{p-\beta}(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=+\infty$$

$$\text{由推论，发散。}$$

$$p=1\text{时，}\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^q(\ln t)^r}$$

$$\text{继续讨论即可，不再赘述。}$$

- **类型2（Abel-Dirichlet判别法）：**

例5：

$$\text{考虑}\int_e^{+\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\,\mathrm{d}x\text{的条件收敛与绝对收敛性。}$$

$$|\int_e^{u}\sin x\,\mathrm{d}x|\le 2,\ \forall u\in[e,+\infty)$$

$$g'(x)<0(x>M)$$

$$g(x)\text{在}\,[M,+\infty)\text{单调递减，且}\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

$$\text{由}A-D\text{判别法，条件收敛。}$$

$$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|\ge\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin^2 x=\frac{\ln\ln x}{2\ln x}(1-\cos 2x)$$

$$\text{易知}\int_e^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{2\ln x}\cos 2x\,\mathrm{d}x\text{收敛。}$$

$$\text{但是}\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\frac{\ln\ln x}{2\ln x}=+\infty$$

$$\text{不绝对收敛。}$$

本题利用$|\sin x|\ge\sin^2 x$还可以得到一个结论：若$f(x)$单调趋于0，则：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty} f(x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

这三者的收敛性完全相同。

关于$|\sin x|$的处理策略，在后续有非常多的应用，应该引起足够重视。

专题强化

- **专题一：带有$\sin x$的广义积分问题**

- **基础方法：**

例1：

$$判断\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x与\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x的条件收敛与绝对收敛性。$$

$$p>1，\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}，绝对收敛。$$

$$0<p<1，A-D判别法，条件收敛。$$

$$p\le 0:取\varepsilon_0=2,\,\forall M\ge 1，存在正整数k，满足2k\pi+\pi>2k\pi>M$$

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\ge\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=2=\varepsilon_0$$

例2：

$$判断\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x与\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x的条件收敛与绝对收敛性。$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\sim\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}\,\mathrm{d}x（同号）$$

$$\therefore p<2时，（绝对）收敛。p\ge 2时，发散。$$

$$当0<p<1时，条件收敛+绝对收敛=条件收敛。其他情况类似分析。$$

$$\int_0^1\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x\sim\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore p<1，（绝对）收敛。p>1，发散。$$

综合例1与例2，我们可以得到以下结论：

$$当0<p\le 1\,时，\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x条件收敛;$$

$$当1<p<2\,时，\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x绝对收敛;$$

$$其他情况发散。$$

$$当0<p<1时，\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x条件收敛;$$

$$其余情况发散。$$

- 换元法：

习题1：

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x\quad\int_0^{+\infty}x\sin x^4\,\mathrm{d}x\quad\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x的敛散性。$$

遇到sin函数内部有x^2，通常采取换元的策略。

令$u=x^2$，则
$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
条件收敛。

第二题请读者自行尝试。

令$v=\dfrac{1}{x}$，则
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v^{2-p}}\,\mathrm{d}x$$

习题2（倒数替换+凑积分）：

讨论$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x$条件，绝对收敛性

先考虑$x\in[1,+\infty)$的情况

当$p>1$时，$\left|\dfrac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\right|\le\dfrac{1}{x^p}\Rightarrow$绝对收敛。

当$0<p\le1$时，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{(1-\frac{1}{x^2})\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p(1-\frac{1}{x^2})}\,\mathrm{d}x$

分析：想要让分子能够积分积出来，得到有界，所以配一部分。而且，分母的形式我们不担心

由$A-D$判别法，条件收敛。绝对值的操作是完全类似的。

当$p\le0$时
$$\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\ge\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sin x\cos\frac{1}{x}+\cos x\sin\frac{1}{x}$$
取$x\in\left[2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$，则
$$\sin x\cos\frac{1}{x}+\cos x\sin\frac{1}{x}\ge\sin x\cos\frac{1}{x}\ge\frac{\sin x}{2}$$
由柯西收敛原理，一定发散。

再考虑$x\in(0,1)$的情况。

令$t=\dfrac{1}{x}$，则：
$$\int_0^1\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t+\frac{1}{t})}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$$
再用完全相同的策略分析。

我们把上面的习题2用的方法抽象出来，就可以得到下面的变式题，请读者自行尝试:

设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续可微，且$x\to+\infty$时，$f'(x)$单调递增趋近于$+\infty$。证明无穷积分：
$$\int_a^{+\infty}\sin(f(x))\,\mathrm{d}x\text{和}\int_a^{+\infty}\cos(f(x))\,\mathrm{d}x\text{均收敛。}$$

- 比较原理与泰勒定理:

习题3:

$$设 p>0, 讨论 \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x 的条件收敛和绝对收敛性。$$

$$由于0不是瑕点，不妨考虑 \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$当p>1时，由于 \left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\le\frac{1}{x^p-1}\sim\frac{1}{x^p}，绝对收敛。$$

$$当0<p\le 1时，分母并不单调，我们考虑：$$

$$\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$$

$$现在，我们研究\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}的敛散性。而这部分是恒正的，所以由比较原理：$$

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\le\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\le\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p-1)}$$

$$(注：放缩操作在不变号时才好用，变号的绝对值放缩一般没有效果)$$

$$而由于\frac{1}{x^p(x^p\pm1)}单调递减且趋于0，且\frac{1}{x^p(x^p\pm1)}与\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p\pm1)}敛散性相同。(见例5)$$

$$\sim\frac{1}{x^{2p}},\quad p>\frac{1}{2}时，收敛。\quad p\le\frac{1}{2}时，发散。$$

$$利用比较原理，可以知道\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}在p>\frac{1}{2}时，收敛，在p\le\frac{1}{2}时，发散。$$

$$又因为\frac{\sin x}{x^p}在p>1时绝对收敛，0<p\le1时条件收敛，p\le0时发散，所以：$$

$$p>1时，绝对收敛;\frac{1}{2}<p\le1时，条件收敛;0<p\le\frac{1}{2}时，发散;$$

习题4（泰勒定理）： 讨论$I=\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)\mathrm{d}x\ (p>0)$的收敛性。

分析：不能使用等价无穷小替换的原因：$\frac{\sin x}{x^p}$变号，不能用比较原理。而且泰勒定理有0的问题，我们通过泰勒展开，构造不等式，从而求解。

$$\because \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore \frac{1}{3}x^2\le x-\ln(1+x)\le x^2$$

$$\therefore \frac{\sin^2 x}{3x^{2p}}\le\frac{\sin x}{x^p}-\ln(1+\frac{\sin x}{x^p})\le\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}$$

由于我们很明确$\frac{\sin x}{x^p},\frac{\sin^2 x}{3x^{2p}},\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}$的敛散性，接下来用两边控制的思想。

由于$\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}$与$\frac{1}{x^{2p}}$的敛散性相同（单调趋于0），所以$p>\frac{1}{2}$时，收敛；$p\le\frac{1}{2}$时，发散。

而$\frac{\sin x}{x^p}$，当$p>1$时，绝对收敛；$0<p\le1$时，条件收敛。

综上所述，当$p>1$时，绝对收敛；$\frac{1}{2}<p\le1$时，条件收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$时，发散。

- 分段积分结合数项级数:

习题5：证明无穷积分：$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$收敛。

思路：

考虑变限积分：$F(u)=\int_1^u \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$单调递增（$f(x)$恒正），下证$F(n\pi)$有界（单调找一组有界就够了）

$$F(n\pi)=\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}u_k \quad u_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$$

下证u_k收敛，即可说明求和有界，即可说明$F(n\pi)$有界。

证u_k收敛，即

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx\le\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{k\pi}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{k\pi}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}dx$$
$$\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2k\pi}{1+(k-1)^6\pi^6(\frac{\pi}{2}x)^2}dx=\frac{k}{2(k-1)^3}$$

收敛。

- **专题一总结：**

<u>涉及$\sin x$的广义积分，我们通常都可以考虑：</u>

- $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$的收敛性。
- 如果$f(x)$单调趋向于0，则有$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\,\mathrm{d}x$与$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$的敛散性相同。
- $|\sin x|\ge\sin^2 x=1-\cos 2x$，这是证明不绝对收敛最常使用的不等式。
- 如果要研究的函数符号已定，可以通过放缩，进行两边控制（比较原理）。
- $\int_{2n\pi}^{\pi+2n\pi}f(x)\,\mathrm{d}x\ge k$，利用柯西收敛原理证明发散也非常常见。
- 证明积分收敛，发散的题：如果$f(x)$恒正，可以考虑变上限积分，转化为无穷级数收敛的问题。

- **专题二：被积函数在无穷远的性质**

- 若极限存在，则极限值为0

习题1：

设$f(x)$在$[a,u]$上可积，且$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，若存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则$A=0$。

反证法，假设$A\neq 0$, 则$\exists M>a$, 当$x>M$时，有$f(x)\ge\frac{A}{2}$。

所以，$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_a^{+\infty}\frac{A}{2}\,\mathrm{d}x$，发散，矛盾!

- 若不存在极限，则很有可能有收敛到0的子列

习题2：

$$\text{设}f(x)\text{在}[a,+\infty)\text{上连续，且}\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\text{收敛，则存在含于}[a,+\infty)\text{且趋近于}+\infty\text{的递增数列}\{x_n\}\text{，使得：}$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$$
$$\text{证：由柯西收敛原理，}\forall\varepsilon>0\text{，}\exists A>a,\forall A''>A'\geq A,\text{有}\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$
$$\text{取}\varepsilon_1=1\Rightarrow\exists A_1'>a,A_1''=A_1'+1\text{，满足}\left|\int_{A_1'}^{A_1''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<1$$
$$\text{取}\varepsilon_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\exists A_2'>A_1'',A_2''=A_2'+1\text{，满足}\left|\int_{A_2'}^{A_2''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$\text{取}\varepsilon_n=\frac{1}{n}\Rightarrow\exists A_n'>A_{n-1}'',A_n''=A_n'+1\text{，满足}\left|\int_{A_n'}^{A_n''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{n}$$
$$\text{由积分第一中值定理，存在}x_n\in(A_n',A_n'')\text{，使得}\left|\int_{A_n'}^{A_n''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|=|f(x_n)|<\frac{1}{n}\text{，且}x_n\text{单调递增。}$$
$$\text{因此}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0\text{，得证。}$$

习题3:

$$\text{设}f(x)\text{在}[0,+\infty)\text{上连续，且}\int_0^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x\text{收敛。证明：存在数列}\{x_n\}\subset[0,+\infty)\text{，使得：}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty\text{，且}\lim_{n\to\infty} x_nf(x_n)=0$$

分析：由柯西收敛原理，可以得到$\int_{a_n}^{2a_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x=|a_nf(x_n)|<\frac{1}{n}$。（请思考为什么取这样的区间长度？）

证明：

$$\forall\varepsilon=\frac{1}{n},\exists M>n,\text{使得当}a_n>M\text{时，有}\int_{a_n}^{2a_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{1}{n}$$
$$\text{由积分第一中值定理，存在}x_n\in(a_n,2a_n)\text{，使得}\int_{a_n}^{2a_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x=a_n|f(x_n)|<\frac{1}{n}$$
$$\text{又}\because a_n<x_n<2a_n$$
$$\therefore a_n>\frac{x_n}{2}\Rightarrow|x_nf(x_n)|<\frac{2}{n}$$
$$\text{这也就是说，}\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty\text{，且}\lim_{n\to\infty} x_nf(x_n)=0$$

几个积分收敛但不存在极限的反例

若$f(x)$在积分收敛的条件下，又满足非负（恒正）或者连续（可导），并不能得到$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$，甚至无法得到有界。下列出几个反例。

非负:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{为整数}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

恒正: $g(x)=f(x)+\mathrm{e}^{-x}$

连续: $\varphi(x)=\sin x^2$

终极反例: 恒正的连续可微函数，甚至会无界。例如:

$$t(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$$

取$x=n\pi$的子列，则$t(x)=x\to+\infty$，无界，无极限。

存在极限需要的条件

1.一致连续

习题4： 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，且$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

反证法：

$$\text{若}\lim_{x\to+\infty} f(x)\neq 0\Rightarrow \exists\varepsilon_0>0,\text{存在子列}\{x_n\}\text{趋向于}+\infty,\text{使得}\,|f(x_n)|\geq\varepsilon_0$$
$$\text{由一致连续，对上述}\varepsilon_0\text{，存在}\delta>0\text{，只要}|x'-x''|<\delta\text{，就有}|f(x')-f(x'')|\leq\frac{\varepsilon_0}{2}$$
$$\forall M>a,\text{由于}x_n\to+\infty\text{，则一定存在}x_m>M\text{。现在考虑}x\in(x_m,x_m+\delta)$$
$$|f(x)|\geq|f(x_m)|-\frac{\varepsilon_0}{2}\geq\frac{\varepsilon_0}{2}\text{，并且}f(x)\text{在区间}(x_m,x_m+\delta)\text{内不变号。}$$
$$\therefore\left|\int_{x_m}^{x_m+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\int_{x_m}^{x_m+\delta}|f(x)|\,\mathrm{d}x\geq\frac{\varepsilon_0\delta}{2}\Rightarrow\text{发散，矛盾!}$$

思考：为什么条件弱化为$f(x)$连续就不行了？可以利用极限的保号性得到$|f(x)|\geq|f(x_m)|-\frac{\varepsilon_0}{2}\geq\frac{\varepsilon_0}{2}$，从而跳过一直连续，问题出在哪里？

2.单调

习题 5： 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上 的 单 调 函 数 ， 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收 敛 ， 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ， 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0.$

$$\text{设}f(x)\text{单调递减，下证 }f(x)\geq 0\text{ 恒成立。}$$
$$\text{若存在}x_0,f(x_0)<0\text{，则对于}x>x_0,\text{都有}f(x)<f(x_0)$$
$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<\int_{x_0}^{+\infty} f(x_0)\,\mathrm{d}x\to-\infty$$
$$\text{发散，矛盾!}$$
$$\text{所以 }f(x)\geq 0\text{ 恒成立。}$$
$$\text{又因为单调有界，所以有极限，所以 }\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$
$$0\leftarrow\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}f(\xi)\geq\frac{x}{2}f(x)\geq 0$$
$$\therefore\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$$

习题6： 设$f(x)$在$[a,u]$上可积，且$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。证明：若$xf(x)$在$[a,+\infty)$上单调递减，则$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0$

$$0\leftarrow\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\sqrt{x}}^{x} tf(t)\ln t\,\mathrm{d}t\geq xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\ln t\,\mathrm{d}t=\frac{x\ln x}{2}f(x)\geq 0$$

专题二总结：

涉及被积函数在无穷远的性质，我们通常都可以考虑：

- 柯西收敛原理结合积分第一中值定理

一句话总结

广义积分 = 比较原理 + A—D判别法

数项级数

数项级数定义：

定义： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是一个级数，称u_n为级数的**通项**。令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

称S_n为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的第n个**部分和**，并称数列S_n为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的**部分和数列。**

定义(级数收敛与发散)： 如果$\{S_n\}$收敛（到S），则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛（到S），记为：

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

如果$\{S_n\}$发散，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

记$P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$。

定义：

- 如果$\{P_n\} \to P$，且P，则称无穷乘积$P_n = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，记为$P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$。
- 如果$\{P_n\}$发散，或者$\{P_n\} \to 0$，则称$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

正向级数敛散性的判别方式：

- $(\varepsilon \sim \delta)$

定理（柯西收敛原理）：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛当且仅当：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使得当 $n \geq N$ 时，有 $|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k| < \varepsilon, \quad \forall\, m \geq 1$。

注：明确各个量出现的先后顺序，先取ε，然后存在$N = N(\varepsilon)$，其次对于任意的$n = n(\varepsilon, N)$，对任意的$m = m(\varepsilon, N, n)$。其中，m是最后出现的，这就是说，m除了可以取固定的值，也可以取和ε, N, n相关的量。

推论(子列)：对数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，且$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$有一个子列$S_{pm}$（p为固定的正整数）收敛（到$S$），则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛（到$S$）。

证明：由柯西收敛原理：

$$\lim_{n\to\infty} S_{pn} = \lim_{n\to\infty} S_{pn+1} = \cdots = \lim_{n\to\infty} S_{pn+p-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

- **正向级数判别方式**

- 比较原则（等价无穷小，泰勒定理）：最常用的方法

设对$n \geq 1, u_n \geq 0, v_n > 0,$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in [0, +\infty)$$

（1）若$l \in (0, +\infty)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛与发散。

（2）若$l = 0, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

（3）若$l \to +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

比较原则通常和$p-$级数进行比较。

例1：

设$a_n = \left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)^n$，讨论级数收敛性。

$$a_n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{p\ln n}{n})} = \mathrm{e}^{n(-\frac{p\ln n}{n} - \frac{p^2\ln^2 n}{n^2} + o(\frac{p^2\ln^2 n}{n^2}))} \sim \frac{1}{n^p}$$

$$\therefore p > 1\text{时，收敛。}$$
$$p < 1\text{时，发散。}$$

重要变形（真的很重要）：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$是两个正项级数，且存在$N > 0$，使得$n \geq N$时，有：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

那么由$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛可得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；由$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散可得$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

证明：

$$\frac{u_n}{u_N} = \frac{u_{N+1}}{u_N} \cdot \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_{N+1}}{v_N} \cdot \frac{v_{N+2}}{v_{N+1}} \cdots \frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{v_n}{v_N}$$
$$\therefore u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$$
$$\text{再由比较原理，得证。}$$

比式判别法和根式判别法

两种判别方式，本质上都是在和等比级数进行比较。

定理（柯西判别法）：

设$n \geq 1, u_n \geq 0$，$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n}$。

- 若$r < 1$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。
- 若$r > 1$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。
- 若$r = 1$，无法判断敛散性

定理（达朗贝尔判别法）：
设$n \geq 1, u_n > 0$:

- 若$\overline{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。
- 若$\underline{r} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

注：根式判别法不等式更紧，能用比式判别法的理论上都能用根式判别法。对于涉及阶乘的问题，应当记忆一个等价无穷小： $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{\mathrm{e}}$

例2： 设$x > 0$，讨论级数$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{2^4} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} + \cdots$的收敛性。

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}}} = \frac{x}{3}, \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{x^{2n}}{2^{2n}}} = \frac{x}{2}$$
$$\therefore \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{u_n} = \frac{x}{2}$$
$$\therefore x < 2\text{时，收敛}$$
$$x > 2\text{时，发散}$$
$$x = 2\text{时，} \lim_{n\to\infty} u_{2n} = \frac{2^{2n}}{2^{2n}} = 1\text{，不收敛到0，所以发散。}$$

注：根式判别法对于常数次幂不敏感，即开n次根号和$n-1$次根号，不影响最终的结果。

积分判别法和拉阿伯判别法

积分判别法： 设$f(x)$是$[1,+\infty)$的非负单调递减函数，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$与$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛性相同。

例3： 判断级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln\ln n)^t}$的敛散性。

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^t}\,\mathrm{d}x，在广义积分板块对该题进行过详尽分析，不再赘述。$$

例4： 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$的敛散性。

判断积分：

$$\because \ln n! < \ln n^n$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \Rightarrow 发散。$$

拉阿伯判别法：

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是一个正项级数，且存在$N>0$，$r>1$，若满足：

- 当$n>N$时，有$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>r=1$，则正向级数收敛。
- 当$n>N$时，有$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\le 1$，则正向级数发散。

注：这里写的公式和课本上有一定区别，但是含义相同。用这种记法的好处是，可以和之前的比式判别法形式统一。

极限形式：

若$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=q$，则：

- 当$q>1$时，级数收敛。
- 当$q<1$时，级数发散。

例5： 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\mathrm{e}^n n!}$发散。

$$\because \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2n}$$
$$\therefore \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left[1-\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{2}$$

注：需要记住$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2n}$。

- **放缩法证收敛，柯西准则证发散**

例6：设$\{a_n\}$为单调递减的正数列，证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$的充要条件时正向级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$的充要条件时正向级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$发散。

收敛用放缩法证明：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}\right)\le\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\frac{a_1}{a}-1$$

发散用柯西准则：

$$取\varepsilon_0=\frac{1}{2}，则对于任意的N>0，取n=N+1，由于\lim_{n\to\infty}a_n=0，所以存在p,使得\frac{a_{n+p+2}}{a_{n+1}}\le\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+1+p}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\ge\frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1}-a_{n+p+2})\ge\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

由柯西收敛原理，级数发散。

对于单调问题，利用放缩进行裂项累加是很常见的操作。

一般项级数敛散性的判别方式

- **阿贝尔变换公式的应用**

定理（阿贝尔变换）：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k(b_k-b_{k+1})+A_{n+p}b_{n+p}\right|$$

证明A-D判别法：

- 若$\{a_n\}$单调且趋于0，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和数列有界，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。
- 若$\{a_n\}$单调有界，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和数列收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

证：以迪利克雷判别法为例：

$$由于\sum_{n=1}^{\infty}b_n的部分和数列有界,即\forall k>0,\exists M>0，使得|B_k|\le M$$

$$由于a_n收敛到0，即\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,当n>N时，对任意p>0，有:|a_n|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(a_k-a_{k+1})B_k+a_{n+p}B_{n+p}\right|\le M\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(a_k-a_{k+1})\right|+Ma_{n+p}<\varepsilon$$

由柯西收敛原理，收敛，得证。

A-D判别法

在利用A-D判别法时，经常需要对三角函数进行求和说明有界，我们通过和差化积公式有以下性质：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| < \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

同理，$\sin x$的积分也有界。

$$\sin(x \pm n\pi) = (-1)^n \sin x \quad \cos(x \pm n\pi) = (-1)^n \cos x$$

可以把$(-1)^n$拿入正余弦。