第15章：广义积分

回忆：Riemann积分

Riemann积分：**有界闭区间**$[a,b]$上的**有界函数**$f(x)$，分割+黎曼和，看是否收敛。

但在实际问题中，我们经常需要在无界区间积分，或者对无界函数积分。因此，我们要将积分推广到无界上。

广义积分

基本的思路：

- 设$f(x)$定义在$[a,b]$上，其中$b=+\infty$或有限（通常在b有限时，$f(x)$在b某个领域内无界）
- 设对任意的$\theta\in(a,b)$，有$f(x)$在$[a,\theta]$内**Riemann可积。**

定义：如果极限$\lim\limits_{\substack{\theta\to b\\ \theta<b}}\int_a^\theta f(x)\,\mathrm{d}x$存在，则称$f(x)$在$[a,b]$上的广义积分收敛，记为：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\theta\to b\\ \theta<b}}\int_a^\theta f(x)\,\mathrm{d}x$$

注：若对于区间$(a,b]$，我们有类似的定义方式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\theta\to a\\ \theta>a}}\int_\theta^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果区间的两个端点都有问题，即对于区间(a,b)，对于任意的$a<\alpha<\beta<b$，$f(x)$在$[\alpha,\beta]$可积，则对于任意$c\in(a,b)$，$f(x)$在$(a,c]$和$[c,b)$上的广义积分收敛，则称$f(x)$在(a,b)广义积分收敛，记为：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

根据这种思路，即使函数在很多点都有问题，可以将这些问题点全部扣去，再最后加起来。

广义积分的本质：探讨一个特殊的极限是否存在。所以，很多处理极限的思路都可以用。例如：证明不可积，如果能找到两个不同的趋近方式，使极限值不同，则不可积。

广义积分的思想核心：是把那些“麻烦”的点用极限的方式处理，转而求解在这些点附近趋近的过程中积分的收敛性。比如，在无穷区间上，直接去求积分可能不可能，但如果我们能够找到一种方法，在一个逐渐增大的有限区间上计算并且得到一个极限值，我们就可以处理这种情况。这类似于处理函数不连续性或无穷大的情形，通过适当地“割除”有问题的区间或点，然后将它们放回到整体积分中。

这种方法允许我们处理更多的函数，甚至一些在传统积分理论下无法处理的函数。通过考察积分的极限，我们可以判断广义积分是否收敛，从而将原本可能发散的积分问题转化为一个关于极限的讨论。

例1： $\int_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$

- 对$b_n = 2n\pi$，有$\int_0^{2n\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 0$
- 对$c_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，有$\int_0^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$

于是发散。同理，$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$也发散。

但是，如果采用下述考虑方式:

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{+A} \sin x \, \mathrm{d}x = 0$$

与我们的推理矛盾！

这就是说，一般情况下：

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \neq \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x) \, \mathrm{d}x$$

直观解释：广义积分的定义关注的是**单边极限的收敛**，即从一个端点逐渐扩展到另一个端点（或无穷远）的积分行为。而对称的积分方式并不属于广义积分定义中的一种情形，它仅是一种特例，不能用来替代广义积分收敛性的判断。

例2： $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, \mathrm{d}x$

对$A > 1$时，有：

$$\int_1^A \frac{1}{x^p} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \ln A, & p = 1 \\ \frac{1}{1-p}[A^{1-p} - 1], & p \neq 1 \end{cases}$$

即：

- $p > 1$，收敛。
- $0 < p \leq 1$,发散。

这和级数的结果类似。

例3： $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} \, \mathrm{d}x$

- $p > 1$，收敛。
- $0 < p \leq 1$,发散。

这和级数的结果类似。

命题： 设$f(x)$在$[a, +\infty)$上**非负**且对于任意的$A > a$，$f(x)$在$[a, A]$上黎曼可积，取$A_n \to +\infty$则$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x) \, \mathrm{d}x$收敛。

注：只要$f(x)$在$[A_{n-1}, A_n]$不变号，上述结论依然成立。

A_n 是选取的一列趋向无穷的数，它不必是等间隔的，可以根据实际情况选取。

若进一步的，$f(x)$在$[a,+\infty)$单调递减，则有：

$$f(A_n)(A_n-A_{n-1}) \le \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x \le f(A_{n-1})(A_n-A_{n-1})$$

这样，若$\sum_{n=1}^{\infty} f(A_{n-1})(A_n-A_{n-1})$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

推论： 若$f(x)$在$[1,+\infty)$递减趋向于0，则$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛。

证明思路：选取A_n间距分别为$1,2,\cdots,n$。

例4： $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

- 当$p=1$时，有

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\Big|_0^{\varepsilon} \to \infty$$

所以发散。

- 当$p>1$时，有

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \to \infty$$

所以发散。

- 当$p<1$时，收敛。

现在，我们考虑一个级数的问题：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \text{收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

在此时，若$f(x)$非负，而且$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，那么，有没有：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

事实上我们是推不出这个结论的，正确的结论应该是：极限不存在，或者极限存在且为0。

和可积类似，我们有以下**命题**：

- 令$F(t)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，等价于$\lim_{t\to b^-} F(t)$存在。

此时，有：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(t)\Big|_a^b$$

- 设$F(x)$和$g(x)$在$[a,b)$连续可导，$F'(x)=f(x)$，则有：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

- 设$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta)$单调且连续可导，$\varphi(\alpha)=a$，$\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

例5： $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = -1$

例6： $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad \lambda>0$

$$= -\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} + (\lambda-1)\int_0^{+\infty} x^{\lambda-2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\Gamma(\lambda) = (\lambda-1)\Gamma(\lambda-1)$$
$$\because \Gamma(1)=1$$
$$\therefore \Gamma(n)=(n-1)!$$

令:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad \lambda>0$$

关于Γ函数的具体情况，我们后续课程会进行详细分析。

和级数收敛相类似，我们有以下定理：

定理： 设对任意$c\in(a,b)$，$f(x)$和$F(x)$在$[a,c)$可积，且$|f(x)|\le F(x),\quad x\in[a,b)$,若$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

定理: 设$f(x)$和$g(x)$非负，且

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0,+\infty)$$

（1）若$l\in(0,+\infty)$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 与$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$同时收敛与发散。

（2）若$l=0$,$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

（3）若$l\to+\infty$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散。

例7： 考虑

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad \lambda>0$$

的敛散性：

以$\lambda>0$做为分界点，由例6，当$\lambda>0$时 $\Gamma(\lambda)=(\lambda-1)!$，因此收敛。

当$\lambda\le 0$时，有：$x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\sim x^{\lambda-1}$，$x\to 0$。我们在0附近，取：

$$\int_0^{\varepsilon} x^{\lambda-1}\,\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon^{\lambda}}{\lambda}\to\infty$$

所以发散。

例8： 考虑B函数：

$$\mathrm{B}(\alpha,\,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x$$

的敛散性：

我们需要重点考虑：0和1附近的值。

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sim\int_0^{\varepsilon} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon^{\alpha}}{\alpha},\quad x\to 0$$

所以当$\alpha>0$，收敛。$\alpha\le 0$，发散。

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sim\int_{1-\epsilon}^{1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\epsilon} t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t,\quad t\to 0$$

所以当$\beta>0$，收敛。$\beta\le 0$，发散。

定义（绝对收敛，绝对可积）： $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$收敛，则称为绝对收敛（绝对可积）

例： $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x,\quad p\in\mathbb{R}$

- $p\le 0$，$\displaystyle\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x\ge\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=1$，由柯西收敛原理，一定发散。（也可以用$[A_n,A_{n-1}]$对应的级数收敛，而这个级数的必要条件都没有满足（$\to 0$），所以发散。
- $p>1$

$$\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\,\mathrm{d}x\le\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

又因为单调递减收敛到0，则广义积分是否收敛等价于级数是否收敛。而当$p>1$时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，所以绝对收敛。

- $0<p\le 1$，思路和级数相同，相对收敛。

引理： 设$g(x)$在$[a,b]$非负单调递减，设$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$有界，即存在$M$，使得$|F(x)|\le M$，则：

$$|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x|\le Mg(a)$$

证明略。

定理（A-D判别法）： 设$f(x),g(x)$定义在$[a,b)$上，设对任意$c\in(a,b)$，$f(x)$在$[a,c]$Riemann可积，设$g(x)$在$[a,b)$单调，假设：

- 存在M，使得：

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le M,\ \forall x\in(a,b)$$
$$\lim_{x\to b^-} g(x)=0$$

- 或者：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛}$$
$$g(x) \text{ 有界}$$

则$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

证明：

对$a<A<B<b$，$\left|\int_A^B f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\le Mg(A)$

即：

$$\lim_{\substack{A\to b^-\\B\to b^-}}\int_A^B f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$$

从而：

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛。

例1：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x,\ q>0.p\in\mathbb{R}$$

分析：在0附近和无穷大，都需要进行讨论。（这是因为$p \in \mathbb{R}$，可能是负的）

$$\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}\frac{\sin x}{x}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x \sim \frac{x^{p+1}}{x^q+1} \sim x^{p+1}$$

在$p > -2$时收敛，$p \le -2$时发散。

再分析趋向于无穷大的情况。

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x \sim \int_1^{+\infty} x^{p-q}\sin x\,\mathrm{d}x$$

- $p \ge q$时，由柯西收敛原理，取$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{6}}^{2n\pi+\frac{5\pi}{6}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$，可以得到发散。
- $q-p>1$时，$\frac{|\sin x|}{x^{q-p}} \le \frac{1}{x^{q-p}}$，绝对收敛。
- $0 < q-p \le 1$时，由迪利克雷判别法可知，条件收敛。

广义重积分

对于正常的重积分，我们考虑$n \ge 2, \Omega \subset \mathbb{R}^n$。

现在我们想考虑以下情况：

- 假如Ω无界。
- Ω有界，$f(x)$在Ω无界。

先考虑第一种情况，让Ω包含在一个球内。

定义：记$Y \in \mathbb{R}^n$，$r>0$记$B_r(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |X-Y|<r\}$，

$B_r = B_r(0)$。

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$无界，设对任意$r>0$，$\Omega \cap \bar{B}_r$可测，$f(x)$在$\Omega \cap \bar{B}_r$可积，如果存在$I$使对任意的$\varepsilon > 0$，都存在$r>0$，使对任意有界区域$\widetilde{\Omega} < \Omega$且$\Omega \cap \bar{B}_r \subset \widetilde{\Omega}$，有：

$$\left| \int_{\widetilde{\Omega}} f(X)\,\mathrm{d}X - I \right| < \varepsilon$$

则称$f(X)$在Ω上**广义重积分收敛**（也称f在Ω**可积**）。

注：这样定义是为了防止区间$\Omega \cap \bar{B}_r$取的太好（是和球有关系的），导致正负项被完全一一抵消。加上中间项$\widetilde{\Omega}$是为了让任意区间都成立。

定义*：设Ω有界可测，$P_0 \in \overline{\Omega}$，设对任意开区域$P_0 \in \Delta$，$f(x)$在$\Omega/\Delta$上可积。

如果存在I，使对任意$\varepsilon > 0$，都存在$\delta > 0$，使对任意开区域$P_0 \in \Delta \subset B_\delta(P_0)$，都有：

$$\left|\int\limits_{\Omega/\Delta} f(X)\,\mathrm{d}X - I\right| < \varepsilon$$

则称$f(X)$在Ω上**广义重积分收敛**（也称f在Ω**可积**）。

注：除去部分有问题的，无界的点。

定理：

设Ω有界可测，$P_0 \in \overline{\Omega}$是$f(X)$唯一奇点，则$f(X)$在$\Omega$上**广义重积分收敛** 当且仅当$|f(X)|$在$\Omega$上**广义重积分收敛**

注：设$f(X)$非负，则$f(X)$在Ω上广义重积分收敛当且仅当存在一列开区域Δ_m满足$P_0 \in \Delta_m$，$\operatorname{diam}(\Delta_m) \to 0$，且：

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega/\Delta} f(X)\,\mathrm{d}X$$

收敛。

定理（weierstrass定理）：

设$|f(X)| \leq F(X),\ \forall x \in \Omega$，$P_0$是$f(x)$和$F(x)$的唯一奇点，如果$F(X)$在$\Omega$上**广义重积分收敛**，则$f(X)$在$\Omega$上**广义重积分也收敛。**

例1：$\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p},\ p>0$

$$\int\limits_{\delta^2\leq x^2+y^2\leq 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p} = 2\pi\int_\delta^1 \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}$$

所以收敛，当且仅当$p<1$。

例2：$\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2\geq R^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p},\ p>0$

自行尝试，应该$p>1$收敛。

例3： $\displaystyle\iint\limits_{R^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{R\to\infty} 2\pi \int\limits_0^R r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \pi$$

我们利用先x后y的策略，采取分部的策略，可以得到：

$$\iint\limits_{R^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

这就是说，**泊松积分**满足：

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 1$$

这在概率论中有很重要的用途。

现在，我们令$y=x^2$，则有：

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}$$