第十六章：一致收敛

> 考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，把级数定义为一个与$x$有关的函数

例：$u_n(x) = x^{n-1} - x^n$

则$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$

问题：设对$n \geq 1$，$f_n(x)$在x_0连续，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$，问$f(x)$在$x_0$是否连续?

$$
\begin{gathered}
f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) + f_n(x_0) - f(x_0) - f_n(x_0) \\
\therefore |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
\text{对任意}x\text{，对任意}\varepsilon > 0\text{，存在}N = N(\varepsilon, x)\text{，使得当}n \geq N\text{时，}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\
\text{对}\varepsilon > 0\text{，存在}N(\varepsilon, x_0)\text{，使得当}n > N(\varepsilon, x_0)\text{时，有}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\
\text{不妨取}n = N\text{，即：}|f_{N(\varepsilon,x_0)}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \\
\text{又因为}f_{N(\varepsilon,x_0)}(x_0)\text{在}x_0\text{连续，故存在}\delta > 0\text{，使得当}|x - x_0| < \delta\text{时，有：} \\
|f_{N(\varepsilon,x_0)}(x) - f_{N(\varepsilon,x_0)}(x_0)| < \varepsilon \\
\text{但是，}|f(x) - f_n(x)|\text{这一部分无法控制。需要}N(\varepsilon)\text{，即不依赖}x_0\text{。}
\end{gathered}
$$

点态收敛的局限性：即使每个 $f_n(x)$ 在 x_0 连续，极限函数 $f(x)$ 也不一定在 x_0 连续。这是因为点态收敛只要求对每个固定的 x，$f_n(x)$ 收敛到 $f(x)$，但**不同的** x 可能需要**不同的** n 来满足收敛条件，导致在 $x \to x_0$ 时，收敛性无法统一控制。

定义：设$f_n(x), f(x)$，$n \geq 1$，都是定义在X上的函数，如果对任意的$\varepsilon > 0$，都存在$N = N(\varepsilon)$，使得当$n \geq N$时，有:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in X$$

则称$\{f_n(x)\}$在X上一致收敛到$f(x)$。

对X上的有界函数$g(x)$，定义$||g||_\infty = \sup_{x\in X} |g(x)|$

所以可以转写为:

$$||f_n - f||_\infty \leq \varepsilon$$

这就是说，$\{f_n(x)\}$**在X上一致收敛到$f(x)$等价于:**

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

例：$f_n(x) = 1 - x^n$，$\{f_n(x\}$在$[0, 1)$逐点收敛到$f(x) \equiv 1$，但是

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 1\text{，不一致收敛。}$$

但是，对于任意$\delta > 0$，如果我们此时考虑区间$[0, 1-\delta]$，则此时

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in[0,1-\delta]} x^n = (1-\delta)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0\text{，一致收敛。}$$

这就是说，一致收敛性非常依赖区间X的选取。

定理（Cauchy准则）： $\{f_n(x)\}$在X上一致收敛的充分必要条件为：

$$\text{对任意}\varepsilon > 0\text{，都存在}N\text{，使得当}m\text{，}n \geq N\text{时，有：}$$
$$||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon$$

定理（交换极限顺序）： 设$\{f_n(x)\}$在(a,b)一致收敛到$f(x)$，设对每一个$n \geq 1$，

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f_n(x)$$

都存在，则：

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a^+} f_n(x)$$

即：**在一致收敛情况下，极限可以换顺序。**

证明：

$$\text{由一致收敛，则对任意}\varepsilon > 0\text{，都存在}N(\varepsilon)\text{，使得当}n, m \geq N\text{时，有：}$$
$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)$$
$$\text{令}x \to a^+\text{，有：}$$
$$|f_m(a^+) - f_n(a^+)| \leq \varepsilon,\ \forall m, n \geq N$$
$$\text{于是}\{f_n(a^+)\}\text{是柯西列}$$
$$\text{故收敛，记}A = \lim_{n\to\infty} f_n(a^+)$$
$$\text{由于}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$
$$|f_n(a^+) - A| \leq \varepsilon$$
$$\text{于是}|f_N(a^+) - A| < \varepsilon$$
$$|f_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)$$
$$\text{这样}|f(x) - A| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a^+)| + |f_N(a^+) - A| \leq 2\varepsilon + |f_N(x) - f_N(a^+)|$$
$$\text{故存在}\delta > 0\text{，使得当}a < x < a + \delta\text{时，有：}$$
$$|f_N(x) - f_N(a^+)| < \varepsilon$$
$$\text{于是当}a < x < a + \delta\text{时，}$$
$$|f(x) - A| \leq 3\varepsilon$$
$$\text{这也就是}\lim_{x\to a^+} f(x) = A$$

还有一种不是用严谨语言叙述的证明方式，可以**方便理解**：

$$是否满足\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_(x_0)=f(x_0)?$$
$$|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$$
$$令x\to x_0,则f_n(x)-f_n(x_0)\to 0$$
$$令||g||_\infty=\sup_{x\in X}|g(x)|$$
$$|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|\le 2||g||_\infty$$
$$于是\limsup_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|\le 2||g||_\infty+\limsup_{x\to x_0}|f_n(x_0)-f(x_0)|=2||g||_\infty$$
$$\therefore 如果\lim_{n\to\infty}||g||_\infty=0，则\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

推论：设$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛到$f(x)$，且对每个$n\ge 1$，$f_n(x)$**在I上连续**，则$f(x)$**在I上连续。**

设$C(X)$为X上连续函数组成的线性空间，设$f_n\in C(X)$，且$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||_\infty=0$，则$f\in C(X)$。

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0^+}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$$

由于积分，求导都是一种极限，在得到上述换序的结论后，我们可不可以分析：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0}\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]=?\lim_{n\to\infty}f_n'(x_0)$$
$$\int_a^b\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]\mathrm{d}x=?\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

我们后续课程会进行详细分析

性质：设$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，$\{f_n(x)\}$和$\{g_n(x)\}$在X上分别一致收敛到$f(x)$和$g(x)$，则:

- $\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)$在$X$上一致收敛到$\lambda f(x)+\mu g(x)$。
- 设$f(x),g(x)$有界，则$f_n(x)g_n(x)$在X上一致收敛到$f(x)g(x)$。
- 设$f(x),g(x)$有界，且存在δ使得$|g(x)|\ge\delta$，则$\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)}$在X上一致收敛到$\dfrac{f(x)}{g(x)}$。

对于第二个性质，若不加限制条件，考虑反例： 令 $f_n(x)=f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n},\ 0<x\le\frac{1}{n}\\ x,\ \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$，$g(x)=x$

则$||g_n-g||_\infty=\sup\limits_{0<x\le\frac{1}{n}}\left|\dfrac{1}{n}-x\right|\to 0$

$$f_n(x)g_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{xn},\ 0<x\le\frac{1}{n}\\ 1,\ \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$$
$$||f_ng_n-fg||_\infty=\sup_{0<x<\frac{1}{n}}\left|\frac{1}{nx}-1\right|\to+\infty$$

接下来，我们考虑**函数的复合**，看是否满足收敛性:

命题：设$\{f_n(x)\}$在X上一致收敛到$f(x)$，$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，则$\varphi(f_n(x))\to\varphi(f(x))$?，如果$\varphi$在$\mathbb{R}$上一致连续，则:

$$\varphi(f_n(x))\to\varphi(f(x)),即\ \{\varphi\circ f_n(x)\}在X上一致收敛到\ \varphi\circ f(x)$$

证明略。

命题：设对每个$n \geq 1$，$f_n(x)$都是X上的有界函数，即:

$$\exists L_n\text{，使得}|f_n(x)| \leq L_n,\ \forall x \in X$$

(这只是普通的有界， 而**一致有界**需要找一个公共的上界)

如果$\{f_n(x)\}$在X上一致收敛到$f(x)$，则存在L，使得:

$$|f_n(x)| \leq L.\ \forall x \in X\text{，}n \geq 1(\text{一致有界})$$

特别地，$|f(x)| \leq L :, \forall x \in X$。

证明：

$$\begin{gathered}
\text{存在}N,\text{使得当}n \geq N\text{时，有}||f_n - f_N||_\infty \leq 1 \\
\therefore ||f_n||_\infty \leq ||f_N||_\infty + 1 \\
\text{令}L = \max\{L_1, \cdots, L_N + 1\},\ \forall n \geq 1 \\
\therefore \text{一致有界。}
\end{gathered}$$

一致收敛的判定定理:

定理（Dini定理）： 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的连续函数列，对每个$x \in [a,b]$，$\{f_n(x)\}$单调收敛到$f(x)$。**如果$f(x)$在$[a,b]$连续，** （这个条件非常关键！），则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$。

证明：

$$\begin{gathered}
\text{令}g_n(x) = |f(x) - f_n(x)| \\
\text{则}g_n(x)\text{单调递减收敛到}0\ (\text{这是由于}f_n(x)\text{单调收敛到}f(x)) \\
\text{对}\varepsilon > 0,\text{令}E_n = \{x : g_n(x) < \varepsilon\} \\
\text{则}E_n \subseteq E_{n+1} \\
\text{即}[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \\
\text{由有限覆盖定理，存在}N,\text{使得}[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} E_n = E_N \\
|f(x) - f_n(x)| \leq g_N(x) < \varepsilon, \forall x \in [a,b], n \geq N \\
\text{这就是说，}\forall \varepsilon > 0\text{，}\exists N > 0,\text{当}n > N\text{时，有}|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon
\end{gathered}$$

$f(x)$在$[a,b]$连续，我们想探讨连续函数和多项式函数之间的差距有多少。

定理（weierstrass逼近定理）：设$f(x)$在$[a,b]$连续，则对任意的$\varepsilon > 0$，存在多项式$P(x)$，使得:

$$||f - P||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

这也就是说，**存在多项式列$\{P_n(x)\}$一致收敛到$f(x)$。**

证明：

我们先只研究$x \in [0,1]$的情况。

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}(\text{伯恩斯坦(Bernstein)多项式})$$

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}||B_n-f||_\infty=0$

由二项式定理，$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1$

$$\therefore ||B_n-f||_\infty=\sup_{x\in[0,1]}\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，所以一致连续，即

对于任意的$\varepsilon>0$.对于任意的$x\in[0,1]$存在$\delta>0$，当$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$时，有：

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon$$

对于k，分为2类，一类是$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$，记为$I_1$; 另一类是$\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta$，记为$I_2$。

$$\sum_{k\in I_1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^k\leq\varepsilon$$

由于$\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta$，这就是说$\left|\frac{k-nx}{n\delta}\right|^2\geq 1$。

又因为$f(x)$在$[0,1]$连续，有界，即$\exists M$, $|f(x)|\leq M$。所以

$$\sum_{k\in I_2}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^k\leq\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k\in I_2}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^k$$

由方差公式，$\sum\limits_{k\in I_2}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x)\Rightarrow\frac{2M}{n\delta^2}x(1-x)\leq\frac{M}{2n\delta^2}$

$\therefore\exists N=\left[\frac{M}{2\delta^2\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$时，有：

$$\sum_{k\in I_2}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}<\varepsilon$$

汇总一下，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N=\left[\frac{M}{2\delta^2\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$时，有：

$$|B_n(x)-f(x)|=\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}<2\varepsilon$$

这就是 $\lim\limits_{n\to\infty}||B_n-f||_\infty=0$

若$[a,b]\neq[0,1]$，令$x=a+(b-a)t$, $t\in[0,1]$则此时的伯恩斯坦多项式

$$B_n(x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n}f(a+\frac{k}{n}(b-a))C_n^k(x-a)^k(b-x)^{n-k}$$

也在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$。