9.4 第一次习题课

(A)

- **14.**

$\{a_n\}$单调递减且$a_n \to 0$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1)}$收敛。

思路：**由柯西收敛原理：**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \text{when } n \geq N, \\ |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

且需要满足

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

这是因为a_n单调递减，则$a_n \geq 0$。

取$p = n$，由柯西收敛，即：

$$na_{2n} \leq |a_{n+1} + \cdots + a_{2n}| < \varepsilon$$

则此时：

$$\lim_{n \to \infty} na_{2n} = 0$$

取$p = n + 1$,同理可得：

$$\lim_{n \to \infty} na_{2n+1} = 0$$

由由于极限值为0，扩大或缩小倍数没有影响，即：

$$\lim_{n \to \infty} 2na_{2n} = 0,\ \lim_{n \to \infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$$

即：

$$\lim_{n \to \infty} na_n = 0$$

而对于所证，记$b_n = n(a_n - a_{n+1})$。为证明部分和收敛：

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| = na_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} - (n+p)a_{n+p+1} \to 0$$

所以级数收敛，得证。

- **2.(1)**

思路：寻找等价无穷小：

$$\frac{1}{n^p-n^q}=\frac{1}{n^p(1-n^{q-p})}\to\frac{1}{n^p}$$

由课本原题：

- $p>1$时，收敛。
- $p\leq 1$时，发散。

- **2.(2)**

思路： 考虑通项式能否与另一式子进行逼近：

$$\frac{1}{p^n-q^n}=\frac{1}{p^n(1-(\frac{q}{p})^n)}\to\frac{1}{p^n}$$

由课本原题：

- $p>1$时，收敛。
- $p\leq 1$时，发散。

具体方法为：$p\leq 1$时，$\frac{1}{p^n}\to+\infty$，不收敛。 $p>1$时，用积分判别法：$\int_2^n\frac{1}{p^x}\,\mathrm{d}x=x(\frac{1}{p})^{x-1}\to 0$，所以收敛。

- **2.(3)**

思路：

$$(\frac{x^n}{n^s})^{\frac{1}{n}}=\frac{x}{n^{\frac{s}{n}}}\to x$$

因此，由柯西判别法：

- $0<x<1$时，收敛。
- $x>1$时，收敛。
- $x=1$时，该式子化为$\frac{1}{n^s}$
  - $s>1$时，收敛。
  - $0<s\leq 1$时，发散。

补充：对于出现x^n的情况，可以考虑使用柯西判别法。

- 2.(4)

通项较为复杂，不易寻找可以逼近的通项时，我们采取**积分判别法**。

而对于此式子，由于含有p, q，不易分析，所以先考虑将q放缩掉。

$p > 1$时，我们注意到:

$$\int_3^A \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x = (\ln x)^{1-p}|_3^A \to 0, \quad A \to +\infty$$

且在此时，有：$(\ln\ln n)^q > 1$。

即

$$\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q} < \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

所以有：

$$\int_3^A \frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^p}\,\mathrm{d}x \le \int_3^A \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x = (\ln x)^{1-p}|_3^A \to 0, \quad A \to +\infty$$

即此时级数收敛。

$p < 1$时，有：

$$\int_3^A \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x = (\ln x)^{1-p}|_3^A \to \infty, \quad A \to +\infty$$

$$(\ln\ln n) < (\ln n)^{\frac{1-p}{q}}$$

$$\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q} > \frac{1}{n\ln n} \to \infty$$

因此，该级数发散。

$p = 1$时，级数为：$\dfrac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^q}$。使用积分判别法，凑微分后形式统一。

- $q > 1$，级数收敛。
- $q = 1$，级数发散。
- $q > 1$，级数发散。

- 3.

正向级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,且$\{a_n\}$单调递减，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$同时收敛或发散。

思路： 类型：将部分和序列改写成另一种形式，尝试说明另一种部分和可以被另一种两边限制。

证： 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛或发散：

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 + \cdots + a_{2^n} \\ &= (a_1 + a_2) + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \end{aligned}$$

对于其中的第n组，有：

$$2^{n-1}a_{2^{n-1}} = (2^n - 2^{n-1})a_{2^{n-1}} \geq (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \geq (2^n - 2^{n-1})a_{2^n} = \frac{1}{2}2^n a_{2^n}$$

即：$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$收敛或发散。

若$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$收敛：

对于其中的第k组，有：

$$2(a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k}) \geq 2^k a_{2^k} \geq a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}$$

所以S_n有界

即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时收敛或发散。

题后记：若部分和有界，由于正向级数单增，则正向级数一定收敛。

- **4.**

$\{a_n\}$单增，正数数列。

思路： 当$\{a_n\}$有界时：

$\exists M > 0$，使得$|a_n| \leq M$恒成立。所以

$$S_n = \frac{a_2 - a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1} - a_2}{a_2} \leq \frac{m}{a_2} - 1$$

即正向级数的部分和S_n有界，所以正向级数收敛。

当$\{a_n\}$无界时，可以得到当$n \to \infty$时，$\exists M < 1$，使得：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < M$$

否则有界。

由柯西收敛原理：

存在$\varepsilon_0 = 1$，使得对 $\forall N > 0$，当$n \geq N$时，

$$
\begin{gathered}
\forall n \in N, \\
\frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p} - a_{n+p-1}}{a_{n+p}} > p(1-M) > 0 \\
\forall M > 0, \exists p > 0, \quad \text{s.t.} \qquad a_{n+p} \geq m a_n \\
\geq \frac{a_{n+p} - a_n}{a_n} > 1
\end{gathered}
$$

- **5.求证：** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛而 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ 发散

思路：两边同取$\ln$，将原式子放缩。

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

首先，对分母取对数，并化简，可以得到：

$$\ln n(\ln \ln n) = t \ln t \geq 2t = \ln n^2,\ n \to \infty$$

所以有

$$(\ln n)^{\ln n} \geq n^2$$

在n充分大时成立。则

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \leq \frac{1}{n^2}$$

收敛。

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \\
(\ln n)^{\ln \ln n} < n
\end{gathered}
$$

(这里自己展开试试)

最后一个式子$> 2\ln n$，所以收敛。

题后注：$\ln n$相当于一个任意小的次幂。

6.重要性质：次幂的收敛性

若正向级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^r$收敛，$r > 1$。反过来不一定成立。

思路：由于$a_n \to 0$，在n充分大时，有：

$a_n^r < a_n$

所以收敛。

7.

思路：

部分和序列S_n无界，且一定发散至$+\infty$。

所以有：

$$\frac{u_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$$

发散。

$$\frac{u_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \le \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

累加后，

$$\sum_{n=2}^{P} \frac{u_n}{S_n^2} \le \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_p} \to \frac{1}{S_1}$$

收敛。

更一般地，有：

$$\frac{u_n}{S_n^{1+\delta}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{1+\delta}} \le \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^{1+\delta}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\delta}} - \frac{1}{S_n^{\delta}}\right)$$

累加后：

$$\sum_{n=2}^{P} \frac{u_n}{S_n^{1+\delta}} \le \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\delta}} - \frac{1}{S_n^{\delta}}\right)$$

收敛。

这也就是说，S_n的次数只要高于1，该级数就一定收敛。

12.

$$\text{设}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})\text{绝对收敛，}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{收敛，证：}\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\text{收敛。}$$

思路：**考虑使用柯西收敛原理，研究部分和：**

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kB_k-\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kB_{k-1}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kB_k-\sum_{k=n}^{n+p-1}a_{k+1}B_k=a_{n+p}B_{n+p}-\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k-a_{n+1}B_n$$

（这里多分析一点。利用柯西收敛的时候，通常要对求和的上下标进行操作，比如此处）

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)(B_k-B)+B\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)=$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)(B_k-B)+B(a_{n+p}-a_{n+1})$$

又因为$B_n\to B$,$a_n\to a$（通过收敛推出）

$$=a_{n+p}(B_{n+p}-B)-\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)(B_k-B)-a_{n+1}(B_n-B)$$

不难发现，第一项和第三项均收敛到0。而对于中间这一部分，使用绝对值放缩：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}-a_k)(B_k-B)\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|(a_{k+1}-a_k)|\,|(B_k-B)|$$

而又由于B_k-B有界，所以收敛。

证明题，柯西收敛原理结合交叉放缩，出现频率极高。

13.

设$a_n > 0$, $n = 1,2,\cdots$,且$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) > 0$,，求证收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

思路：对于交错数列，考虑莱布尼茨判别法（非交错部分单调收敛到0）。叠项：考虑取对数累加或类乘

证： 设极限值为δ

$$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{当}n>N\text{时，有：}$$
$$\left|n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-\delta\right|<\varepsilon$$
$$\text{取}\varepsilon=\frac{\delta}{2}\text{，则：}$$
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq 1+\frac{\delta}{2n}$$
$$\ln a_n-\ln a_{n+1}\geq\ln(1+\frac{\delta}{2n})$$
$$\vdots$$
$$\ln a_n-\ln a_{n+p}\geq\sum_{k=n}^{n+p+1}\ln(1+\frac{\delta}{2k})$$

而又因为对于级数的部分和$\sum\limits_{k=n}^{n+p+1}\ln(1+\dfrac{\delta}{2k})$发散（判断这个级数是否收敛），所以左式$\to\infty$

则$a_{n+p}\to 0$，这也就是说a_n单调递减且收敛到0.

由莱布尼茨判别法，收敛。

14.

$\{a_n\}$单调递减趋于0，且级数收敛，求证收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$$

思路： $a_n\geq 0$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}k(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=n+1}^{n+p}k\cdot a_k-\sum_{k=n+1}^{n+p}k\cdot a_{k+1}$$
$$=\sum_{k=n}^{n+p-1}(k+1)\cdot a_{k+1}-\sum_{k=n+1}^{n+p}k\cdot a_{k+1}=(n+1)a_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}a_{k+1}-(n+p)a_{n+p+1}$$
$$pa_{n+p}\leq a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon$$
$$\text{取}p=n,\ n+1\text{，可以得到：}$$
$$na_n\to 0$$

(注意这种分奇偶令值，并最终得到重要结果的方式)

15.

$$\text{设}\sum_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})\text{收敛。且}\{na_n\}\text{收敛，求证：级数}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛。}$$

$$\sum_{i=n+1}^{n+p}n(a_n-a_{n-1})=\sum_{i=n+1}^{n+p}na_n-\sum_{i=n+1}^{n+p}na_{n+1}$$
$$=\sum_{i=n+1}^{n+p}na_n-\sum_{i=n}^{n+p-1}na_n+\sum_{i=n}^{n+p-1}a_n$$

所以级数收敛。

- **16.**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，问$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$是否一定收敛?

- **17.**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，问，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$是否一定收敛?

因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$是正向级数，所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2r}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$不一定收敛。

例：$a_{2n} = \frac{1}{n}$，$a_{2n-1} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$也发散。

- **18.**

收敛级数重排后，还收敛吗?

- **20.(2)**

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}},\ a_{2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}。求证：\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)收敛，而\sum_{n=1}^{\infty} a_n发散$$

$$(1+a_{2n-1})(1+a_{2n}) = 1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$T_{2n} = \prod_{k=1}^{2n} = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}) \to T \neq 0$$

$$T_{2n+1} = T_{2n}(1+a_{2n+1}) \to T$$

$$\therefore T_n \to T$$