第十六章：一致收敛

> “
> 考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，把级数定义为一个与$x$有关的函数

例：$u_n(x) = x^{n-1} - x^n$

则$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$

问题：设对$n \geq 1$，$f_n(x)$在x_0连续，$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$，问$f(x)$在$x_0$是否连续?

$$
\begin{gathered}
f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) + f_n(x_0) - f(x_0) - f_n(x_0) \\
\therefore |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
\text{对任意}x\text{，对任意}\varepsilon > 0\text{，存在}N = N(\varepsilon, x)\text{，使得当}n \geq N\text{时，}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\
\text{对}\varepsilon > 0\text{，存在}N(\varepsilon, x_0)\text{，使得当}n > N(\varepsilon, x_0)\text{时，有}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\
\text{不妨取}n = N\text{，即：}|f_{N(\varepsilon,x_0)}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \\
\text{又因为}f_{N(\varepsilon,x_0)}(x_0)\text{在}x_0\text{连续，故存在}\delta > 0\text{，使得当}|x - x_0| < \delta\text{时，有：} \\
|f_{N(\varepsilon,x_0)}(x) - f_{N(\varepsilon,x_0)}(x_0)| < \varepsilon \\
\text{但是，}|f(x) - f_n(x)|\text{这一部分无法控制。需要}N(\varepsilon)\text{，即不依赖}x_0\text{。}
\end{gathered}
$$

点态收敛的局限性：即使每个 $f_n(x)$ 在 x_0 连续，极限函数 $f(x)$ 也不一定在 x_0 连续。这是因为点态收敛只要求对每个固定的 x，$f_n(x)$ 收敛到 $f(x)$，但**不同的** x 可能需要**不同的** n 来满足收敛条件，导致在 $x \to x_0$ 时，收敛性无法统一控制。

定义：设$f_n(x), f(x)$，$n \geq 1$，都是定义在X上的函数，如果对任意的$\varepsilon > 0$，都存在$N = N(\varepsilon)$，使得当$n \geq N$时，有：

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in X$$

则称$\{f_n(x)\}$在X上一致收敛到$f(x)$。

对X上的有界函数$g(x)$，定义$||g||_\infty = \sup_{x \in X} |g(x)|$

所以可以转写为：

$$||f_n - f||_\infty \leq \varepsilon$$

这就是说，**$\{f_n(x)\}$在X上一致收敛到$f(x)$等价于：**

$$\lim_{n \to \infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

例：$f_n(x) = 1 - x^n$，$\{f_n(x\}$在$[0,1)$逐点收敛到$f(x) \equiv 1$，但是

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 1，不一致收敛。$$

但是，对于任意$\delta > 0$，如果我们此时考虑区间$[0, 1-\delta]$，则此时

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in[0,1-\delta]} x^n = (1-\delta)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0，一致收敛。$$

这就是说，一致收敛性非常依赖区间X的选取。

定理（Cauchy准则）： $\{f_n(x)\}$在X上一致收敛的充分必要条件为：

$$对任意\varepsilon > 0，都存在N，使得当m，n \ge N时，有：$$
$$||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon$$

定理（交换极限顺序）： 设$\{f_n(x)\}$在(a,b)一致收敛到$f(x)$，设对每一个$n \ge 1$，

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f_n(x)$$

都存在，则：

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a^+} f_n(x)$$

即：**在一致收敛情况下，极限可以换顺序。**

证明：

$$由一致收敛，则对任意\varepsilon > 0，都存在N(\varepsilon)，使得当n, m \ge N时，有：$$
$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)$$
$$令x \to a^+，有：$$
$$|f_m(a^+) - f_n(a^+)| \le \varepsilon,\ \forall m, n \ge N$$
$$于是\{f_n(a^+)\}是柯西列$$
$$故收敛，记A = \lim_{n\to\infty} f_n(a^+)$$
$$由于|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$
$$|f_n(a^+) - A| \le \varepsilon$$
$$于是|f_N(a^+) - A| < \varepsilon$$
$$|f_N(x) - f(x)| \le \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)$$
$$这样|f(x) - A| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a^+)| + |f_N(a^+) - A| \le 2\varepsilon + |f_N(x) - f_N(a^+)|$$
$$故存在\delta > 0，使得当a < x < a+\delta时，有：$$
$$|f_N(x) - f_N(a^+)| < \varepsilon$$
$$于是当a < x < a+\delta时，$$
$$|f(x) - A| \le 3\varepsilon$$
$$这也就是\lim_{x\to a^+} f(x) = A$$

推论： 设$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛到$f(x)$，且对每个$n \ge 1$，$f_n(x)$**在I上连续**，则$f(x)$**在I上连续。**

设$C(X)$为X上连续函数组成的线性空间，设$f_n \in C(X)$，且$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$，则$f \in C(X)$。

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0^+} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

由于积分，求导都是一种极限，在得到上述换序的结论后，我们可不可以分析：

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] =? \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$$

$$\int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \mathrm{d}x =? \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x$$

我们后续课程会进行详细分析

性质： 设$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，$\{f_n(x)\}$和$\{g_n(x)\}$在$X$上分别一致收敛到$f(x)$和$g(x)$，则:

- $\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)$在$X$上一致收敛到$\lambda f(x) + \mu g(x)$。
- 设$f(x), g(x)$有界，则$f_n(x) g_n(x)$在X上一致收敛到$f(x) g(x)$。
- 设$f(x), g(x)$有界，且存在δ使得$|g(x)| \geq \delta$，则$\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)}$在X上一致收敛到$\dfrac{f(x)}{g(x)}$。