考研数学高数阶段测试（含数一、二、三）

(满分：150 分　时间：180 分)

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的.

(1) 设当 $x\to 0^+$ 时，$(1-\cos\sqrt{x})\ln(1+x^3)$ 是 $x\arcsin x^n$ 的高阶无穷小，而 $x\arcsin x^n$ 是（$e^{x^2}-1$）的高阶无穷小，则正整数 n 为

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

(2) 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}+\ln(1+e^x)$，渐近线的条数为

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

(3) 设 $f(x)=\min\{x,x^2\}$,则 $f(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 上

(A) 只有1个不可导的点.　(B) 共有 2 个不可导的点.

(C) 共有 3 个不可导的点.　(D) 没有不可导的点.

(4) 设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^{x^2} x^2 f(t^2)dt$ 则 $F'(x)$ 等于

(A) $x^2 f(x^4)$.　(B) $2x^3 f(x^4)$.

(C) $4x^2 f(x^4)$.　(D) $2x^3 f(x^4)+2x\int_0^{x^2} f(t^2)dt$.

(5) 设 m,n 为正整数,则反常积分 $\int_0^1 \dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 取值有关.　(B) 仅与 n 取值有关.

(C) 与 m,n 取值都有关.　(D) 与 m,n 取值都无关.

(6) 设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x dx\ (k=1,2,3)$,则有

(A) $I_1<I_2<I_3$.　(B) $I_3<I_2<I_1$.　(C) $I_2<I_3<I_1$.　(D) $I_2<I_1<I_3$.

(7) 设 $z=\dfrac{\sin xy\cos\sqrt{y+2}-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=$

(A) -1.　(B) $\cos\sqrt{3}$.　(C) 1.　(D) 0.

(8) 设$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x+2y\}$，则$\iint\limits_D (x+y^2)d\sigma=$

(A) $3\pi.$ (B) $(2+\frac{2\sqrt{2}}{3})\pi.$ (C) $(4+\frac{2\sqrt{2}}{3})\pi.$ (D) $5\pi.$

(9) 微分方程$y''-2y'=x\mathrm{e}^{2x}$的特解y^*形式为

(A) $y^*=(ax+b)\mathrm{e}^{2x}.$ (B) $y^*=ax\mathrm{e}^{2x}.$

(C) $y^*=ax^2\mathrm{e}^{2x}.$ (D) $y^*=(ax^2+bx)\mathrm{e}^{2x}.$

(10) (数一、三) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛, 则 $x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的

(A) 收敛点，收敛点. (B) 收敛点，发散点.

(C) 发散点，收敛点. (D) 发散点，发散点.

(数二) 设$f(x)$在$x=0$的邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，又$g(x)=x^3+\int_0^x tf(x-t)dt$，则

(A) $x=0$是$g(x)$的极大值点.

(B) $x=0$是$g(x)$的极小值点.

(C) $(0,0)$是曲线$y=g(x)$的拐点.

(D) $x=0$不是$g(x)$的极值点，$(0,0)$也不是曲线$y=g(x)$的拐点.

二、填空题:11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

(11) 求定积分$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=$________.

(12) 设$0<x<y<\pi$，则$I_1=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$与$I_2=\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}dy$的大小关系是________.

(13) 设$2\int_0^1 f(x)dx+f(x)-x=0$，则$\int_0^1 f(x)dx=$__________.

（14）设$V(a)$是由曲线$y=xe^{-x}$，$x\ge 0$，$y=0$，$x=a$所围图形绕Ox轴旋转一周的立体的体积，则$\lim\limits_{a\to+\infty}V(a)=$______.

（15）（数一、三）幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$在区间$(-1,1)$内的和函数$S(x)=$______.

（数二）当$x\to 0$时，$\alpha(x)=kx^2$与$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$是等价无穷小，则$k=$______.

（16）已知$y_1=\cos 2x-\dfrac{1}{4}x\cos 2x$，$y_2=\sin 2x-\dfrac{1}{4}x\cos 2x$是某二阶常系数非齐次微分方程的两个解，$y_3=\cos 2x$是它所对应的齐次方程的一个解，则该微分方程是______.

三、解答题:16～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

已知连续函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^1 f(tx^3)dt}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$.

（18）（本题满分 12 分）

求不定积分$\displaystyle\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$.

（19）（本题满分 12 分）

计算$I=\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中$f(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}}e^{-t^2}dt$.

（20）（本题满分 12 分）

由抛物线$y=-x^2+4x-3$与它在点$A\left(0,-3\right)$与点$B\left(3,0\right)$的切线所围成的区域的面积.

（21）（本题满分 12 分）

设$f(x)$在$(-\infty,0]$上连续且满足

$$\int_0^x tf(t^2-x^2)dt=\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

求$f(x)$及其极小值.

（22）（本题满分 12 分）

（数一）已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分

$$J=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$

（数二）计算二重积分

$$\iint_D\left[3x^2\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)+6x+9+y^2\right]d\sigma,$$

其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq 2x\right\}$.

（数三）设某厂家打算生产一批商品投放市场.已知该商品的需求函数为 $P=P(x)=10e^{-\frac{x}{2}}$，且最大需求量为 6,其中 x 表示需求量, P 表示价格.

（I）求该商品的收益函数和边际收益函数；

（II）求使收益最大时的产量、最大收益和相应的价格.