1). Derive the Forward Equation of symmetric random walk

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y}$$

จากโจทย์เราพิจารณาถึงความน่าจะเป็นอยู่ 2 เหตุการณ์หลังจาก การเริ่มต้นที่มูลค่า x ณ เวลา s และณ เวลา t จะมีมูลค่า y โดยจะมาจาก 2 เงื่อนไขได้แก่ ณ เวลา t - δt จากมูลค่า y - δy หรือ ณ เวลา t - δt จากมูลค่า y + δy

เราจึงได้สมการว่า

$$p(x,s;y,t) = \alpha p(x,s;y+\delta y,t-\delta t) + (1-\alpha)p(x,s;y-\delta y,t-\delta t)$$

ใช้ taylor series โดยกำหนดให้ p(x,s;y,t)

$$p = \alpha\left(p - \delta t\frac{\partial p}{\partial t} + \delta y\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2}\delta y^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!}\delta y^3\frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \cdots\right)$$
$$+(1-\alpha)\left(p - \delta t\frac{\partial p}{\partial t} - \delta y\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2}\delta y^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{3!}\delta y^3\frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \cdots\right)$$

จัดรูปสมการได้ว่า

$$p = 2\alpha\left(\delta y\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2}\delta y^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!}\delta y^3\frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \cdots\right)$$
$$+(p - \delta t\frac{\partial p}{\partial t} - \delta y\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2}\delta y^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{3!}\delta y^3\frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \cdots)$$

$$\delta t\frac{\partial p}{\partial t} + \delta y\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2}\delta y^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!}\delta y^3\frac{\partial^3 p}{\partial y^3} - \cdots$$
$$= 2\alpha\left(\delta y\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2}\delta y^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!}\delta y^3\frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \cdots\right)$$

โดยเนื่องจากเป็น symmetric จึงได้ว่า α = 0.5 แทนค่าลงในสมการได้ว่า

$$\delta t \frac{\partial p}{\partial t} + \delta y \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2}\delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!}\delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} - \cdots$$
$$= \delta y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2}\delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!}\delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \cdots$$

$$\delta t \frac{\partial p}{\partial t} = 2(\frac{1}{2!}\delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{4!}\delta y^4 \frac{\partial^4 p}{\partial y^4} + \cdots)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 2\frac{\delta y^2}{\delta t}(\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{4!}\delta y^2 \frac{\partial^4 p}{\partial y^4} + \frac{1}{6!}\delta y^4 \frac{\partial^6 p}{\partial y^6} + \cdots)$$

จากสมการล่าสุดจะพบว่าค่า δy จะทำให้พจน์หลังๆเล็กหลงเรื่อยๆ จนประมาณการเป็น 0 และจาก

$$2\frac{\partial y^2}{\partial t} = c^2$$

เนื่องจาก c เป็นเลขคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ดังนั้น ให้ $c = 1$ จะได้

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y}$$