

1). Derive the Forward Equation of symmetric random walk

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

จากโจทย์เราพิจารณาถึงความน่าจะเป็นอยู่ 2 เหตุการณ์หลังจาก การเริ่มต้นที่มูลค่า x ณ เวลา s และ ณ เวลา t จะมีมูลค่า y โดยจะมาจาก 2 เงื่อนไขได้แก่ ณ เวลา $t - \delta t$ จากมูลค่า $y - \delta y$ หรือ ณ เวลา $t - \delta t$ จากมูลค่า $y + \delta y$

เราจึงได้สมการว่า

$$p(x, s; y, t) = \alpha p(x, s; y + \delta y, t - \delta t) + (1 - \alpha) p(x, s; y - \delta y, t - \delta t)$$

ใช้ Taylor series โดยกำหนดให้ $p(x, s; y, t)$

$$\begin{aligned} p = & \alpha \left(p - \delta t \frac{\partial p}{\partial t} + \delta y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2} \delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!} \delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \dots \right) \\ & + (1 - \alpha) \left(p - \delta t \frac{\partial p}{\partial t} - \delta y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2} \delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{3!} \delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

จัดรูปสมการได้ว่า

$$\begin{aligned} p = & 2\alpha \left(\delta y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2} \delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!} \delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \dots \right) \\ & + (p - \delta t \frac{\partial p}{\partial t} - \delta y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2} \delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{3!} \delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \dots) \\ & \delta t \frac{\partial p}{\partial t} + \delta y \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2} \delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!} \delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} - \dots \\ & = 2\alpha \left(\delta y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2} \delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!} \delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

โดยเนื่องจากเป็น symmetric จึงได้ว่า $\alpha = 0.5$ แทนค่าลงในสมการได้ว่า

$$\begin{aligned} \delta t \frac{\partial p}{\partial t} + \delta y \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2} \delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!} \delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} - \dots \\ = \delta y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2} \delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{3!} \delta y^3 \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} + \dots \end{aligned}$$

$$\delta t \frac{\partial p}{\partial t} = 2 \left(\frac{1}{2!} \delta y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{4!} \delta y^4 \frac{\partial^4 p}{\partial y^4} + \dots \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 2 \frac{\delta y^2}{\delta t} \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{4!} \delta y^2 \frac{\partial^4 p}{\partial y^4} + \frac{1}{6!} \delta y^4 \frac{\partial^6 p}{\partial y^6} + \dots \right)$$

จากสมการล่าสุดจะพบว่าค่า δy จะทำให้พจน์หลังๆ เล็กลงเรื่อยๆ จนประมาณการเป็น 0 และจาก

$$2 \frac{\partial y^2}{\partial t} = c^2$$

เนื่องจาก c เป็นเลขคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ ดังนั้น ให้ $c = 1$ จะได้

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y}$$

2). Problem What are the annualized and 10-day standard deviations When position of 5 million in a single asset X with daily volatility of 1%. Using Normal factor calculate 99%/10day VaR in money terms

Solve เนื่องจากโจทย์ให้ 99%/10day VaR หมายความว่า หุ้นตัวนี้ ณ ราคาตัวกล่าวมี position ต่อราคา ณ ขนาดนี้

จากโจทย์ daily หุ้นมี volatility แสดงว่ามีค่า standard deviation คือ 0.01 และจำนวนข้อมูล คือ 10 วันมี confidential level คือ 99%

แสดงว่าปัจจุบันเรามีข้อมูล $N = 10$ day confidence level 99% standard deviation 0.01 ซึ่งจากข้อมูลดังกล่าวทำให้เราทราบว่าที่ 10 วันจะมี VaR of 2.33 standard deviation