广义积分

须知：本文档中无穷小量（无穷大量）——如$f(x)$的阶以幂函数为标准，用相应幂函数的指数的绝对值$J(f)$表示，该值越大阶越大，如$\mathrm{f(x)} = x^{-1}, g(x) = x^{-\frac{1}{2}}, h(x) = x^{-2}, \mathrm{J(g)} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{J(f)} = 1$，$\mathrm{J(h)} = 2$，则$\mathrm{J(g) < J(f) < J(h)}$。因此h 依次是 f，g的高阶无穷小（无穷大）[$\mathrm{x} \to +\infty$（$\mathrm{x} \to 0$）]， f 是 g的高阶无穷小（无穷大）[$\mathrm{x} \to +\infty (\mathrm{x} \to 0)$]。

《数学分析》华东师范大学第 276 页习题：

习　题

1. 讨论下列无穷积分是否收敛？若收敛，则求其值：

(1) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$；　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$；　　(4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$；　　(6) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \sin x dx$；　　(8) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛?若收敛，则求其值：

(1) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$；　　(2) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$；

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$；　　(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$；

(5) $\int_0^1 \ln x dx$；　　(6) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$；

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$；　　(8) $\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

---

3. 举例说明：瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f^2(x)dx$ 不一定收敛.

4. 举例说明：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且f在$[a,+\infty)$上连续时，不一定有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. 证明：若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则$A = 0$.

6. 证明：若f在$[a,+\infty)$上可导，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$都收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

下面是重点习题的解答（若有错误还望联系指正，联系方式见页眉）：

276 页：

一、解

（不定积分）

注：下面的周期导函数指的是导函数的倒数经过若干次求导仍然具有最初的形式的函数，如 $\sin x$， $\sin x+cos2x$，e^{2x}，e^{x}，$sinx+e^{x}$ 等等。

1) $\int$ 多项式函数 $\times e^{f(x)}dx$

3) 指数函数中的 $\sqrt{\ }$ $\rightarrow$ 迷惑 $\rightarrow \frac{1}{2}$ 次方　　即 $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$

5) $\int_{-\infty}^{+\infty}$ 首先看被积函数是否是奇、偶函数再看具体情况

$\int$ 有理分式 dx　类型的积分，把有理分式裂项成简单分式之和（通常分解成负一次负二次形式的分式之和）

7) $\int$ 周期导函数 $\times$ 周期导函数 dx　和　$\int$ 三角函数 $\times$ 指数函数 dx　两种类型可以考虑分部积分

二

判断积分的收敛性 $\Leftrightarrow$ 判断被积函数对应的阶——寻找等价无穷大或等价无穷小（事实上就是找 $f(x)$ 应当乘上什么）——本质上是一种近似替代（通过等价无穷大或无穷小对被积函数做一个近似替代，当然，这些等价无穷大无穷小对应的积分的收敛性必须容易判断才有意义）

1） $p\geq 1$ 时发散　$p<1$ 时收敛（注： $p<0$ ）

3） 首先找瑕点—— $x=1$

再把积分按瑕点拆分成几个部分分别讨论—— $\int_0^2=\int_0^1+\int_1^2$ （这里省略了几积分号后的式子，下面类似）

这里，对于 $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{2}<1$, 所以这部分收敛

对于 $\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$，类似地

6) 首先找到瑕点 $x=1$, $\sqrt{\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{2}<1$, 因此对应的积分收敛

附注：

遇到 $\sqrt{x}, \sqrt{1-x}, \sqrt{1+x}, \sqrt{\frac{x}{1-x}}, \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \sqrt{1-x^2}, \sqrt{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1-x^2}, \frac{2x}{1-x^2}$ 等形式或他们的组合时可考虑三角代换、双曲函数代换。

这里可令 $x=\sin^2 t$ 或 $x=sh^2 t$

这里还可利用 $\int f(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$, 类型的积分对应的方法，$t \triangleq \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 代入 $\sqrt{\ }$ 当中

7）两个瑕点，拆分原积分：$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$

$x \to 0$ 时 $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{2}<1 \to \ldots$ 收敛

$x \to 1$, 时 $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{2}<1 \to \ldots$ 收敛

从而整个积分收敛！
求解方法与六类似

其他方法：$\sqrt{-ax^2+bx+c}$ 的积分类型 $\begin{cases} \text{法一：配方+三角代换，整理成形如} \sqrt{k^2-u^2} \\ \text{法二：化为诸如} (1+x)\sqrt{\frac{2-x}{1+x}} \text{的式子再令} t \triangleq \sqrt{\frac{2-x}{1+x}} \end{cases}$

法二例：$\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x(1-x)} = x\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{t}{1+t^2}$，这里 $t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

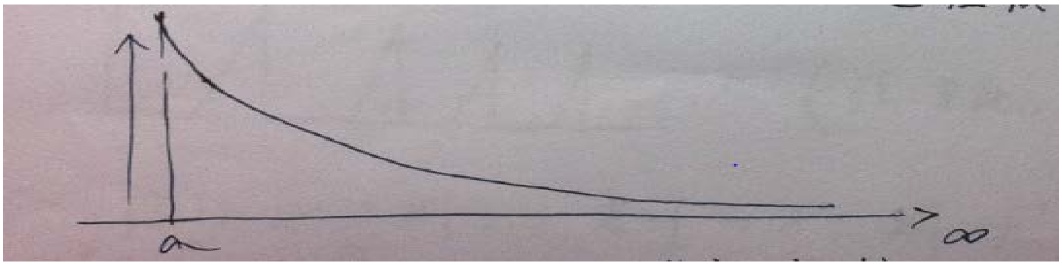
三、解

注：1. 先找一个典型不收敛的函数再开根号

2. 关键在 $f(x)$ 的阶，让不收敛的函数开根号之后的阶对应收敛，如 $x^{-1} \to \sqrt{x}^{-1}$，$x^{-\frac{4}{3}} \to x^{-\frac{2}{3}}$，也就是从指数入手进行处理：$x^{-p} \to x^{-\frac{p}{2}} (1 \le p \le 2)$，当然，这里针对的是简单的幂函数，其他函数事实上类似处理，只要阶对应即可（判断阶的时候往往利用等价无穷大等价无穷小）

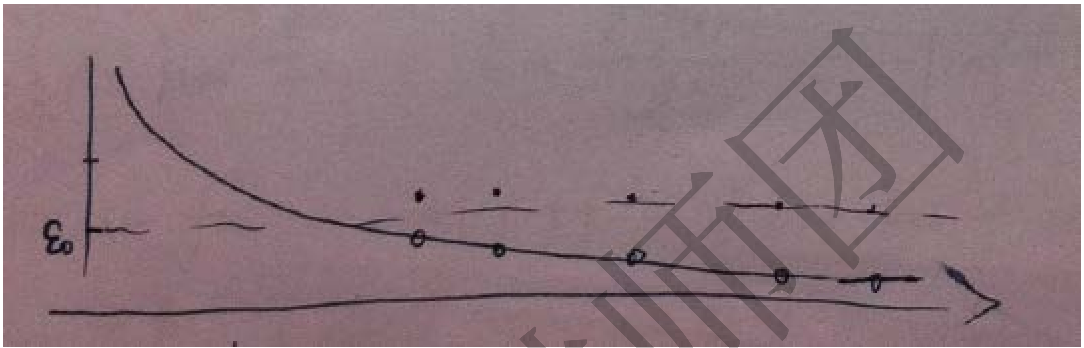
四、解

说到收敛，对收敛函数图象的第一感觉应该是：

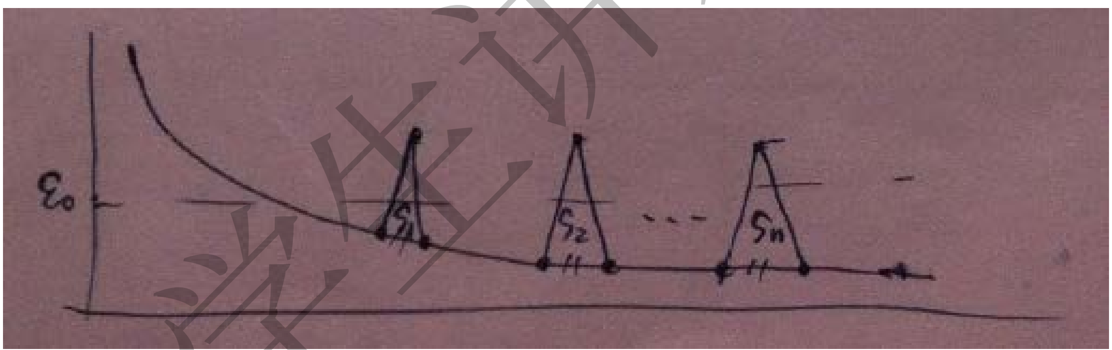


那么我们就尝试在这样的图上做一些改造知道我们满意，再找到改造完的图对应的函数

首先，如何让他的极限不等于 0？利用极限不为零的条件，必在某些点处函数值≥ ε_0，且有无数个这样的点，大概长这样（不妨设 a=0）：



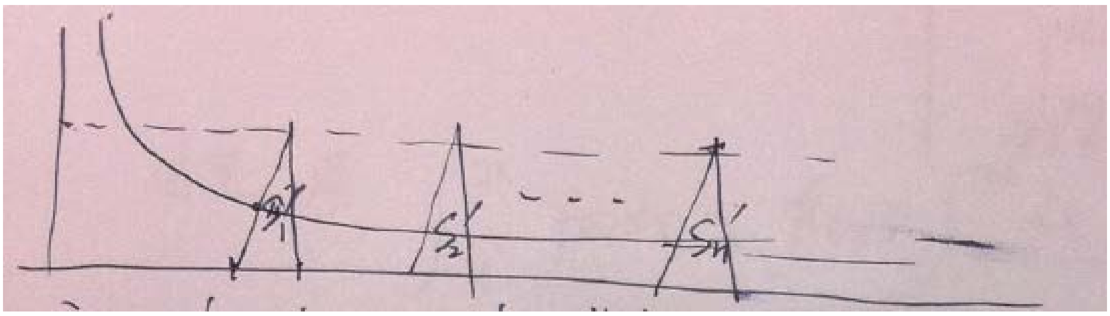
但是又要连续怎么办？？那就把这些孤立的点连起来呗^_^



（注：打两条线的意思是把对应三角形下面的那部分图线去掉　图中三个点表示省略号）

可是我们还要收敛，怎么办？？？

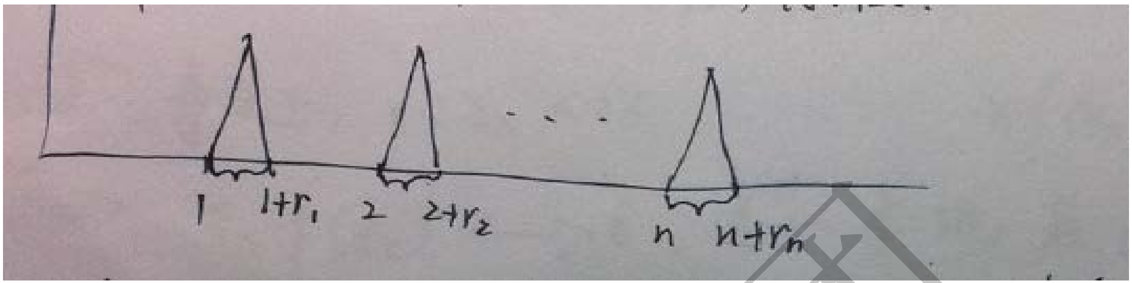
自然地，要让函数图像下方的面积有限，也就是收敛于某个常数值，也就是图中S_1+$S_2+S_3+\cdots+S_n \to$ *常数*（$n\to\infty$）。进一步地，



让上面图中的 $S_1^{'}+S_2^{'}+\cdots+S_n^{'}\to$ 常数$(\because S_1^{'}>S_1,\ S_2^{'}>S_2,\cdots S_n^{'}>S_n,\ )$

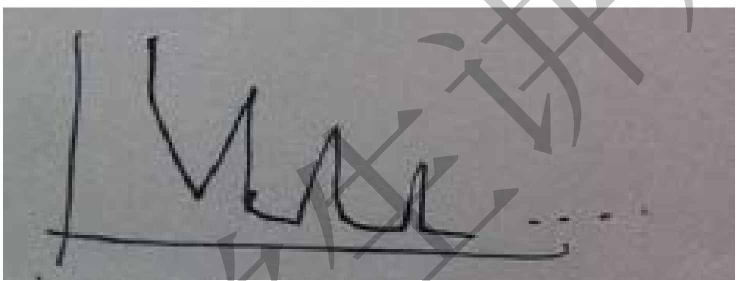
那么要让$\sum S'$收敛怎么办？我们知道，这个和是三角形面积（简单起见，这里不妨取为等腰三角形）的和，写成$\frac{1}{2}\sum$ *底*$\times$ *高*$\to$ *常数*

简单点，让都高$=\varepsilon_0$，面积就变成 $\frac{\varepsilon_0}{2}\sum$ *底*，所以只要让 $\sum$ *底*$\to$ *常数* 就可以了。所以下面的任务就是构造底，如下图：



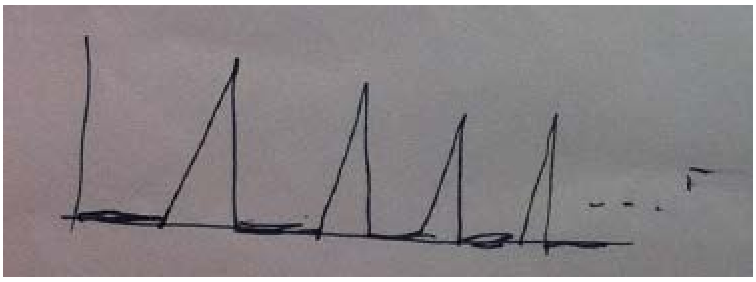
（注：这个图为清晰起见省去了其它部分的图。）

我们只要让这个数列的和收敛！我们最熟悉的无非是$\frac{1}{2^n}$，将图中三角形的底 r_n 取为这个数列即可。可是问题又来了，即使下面这个函数中曲线部分取为 $\frac{1}{x}$ ，整个图像的解析式怎么写？



（注：图中有省略号。）

所以大家往往思维定势，事实上最简单的无穷积分收敛的函数可不是 $\frac{1}{x}$ ，他只是最常用，我们最熟悉，最简单的应该是$f(x)=0$



（注：图中有省略号。）

至此我们已经成功构造出满足要求且解析式容易写出的函数了。那么进一步地，我们能否构造出其他类型的函数，甚至能否将图中的等腰三角形的高改造成递增甚至无穷大呢？答案自然是肯定的，在这里介绍的类型当中，核心是构造的三角形满足$\frac{1}{2}\sum$ *底*$\times$ *高*$\to$ *常数*，上面的

构造使得 底$\times$ 高=$\frac{\varepsilon_0}{2^{n+1}}$ ，只要乘积的和收敛即可，比如我们这样构造：

高=3^n， 高递增，而且增加得很快，我们让底减小得更快，令 底=$\frac{\varepsilon_0}{2^{n+1}}\times\frac{1}{3^n}$

或者 底=$\frac{\varepsilon_0}{2^{n+1}}\times\frac{1}{3^n}\times\frac{1}{n}$ 之类

五、证明

法一

条件是关于$\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即函数的积分的极限，结论是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,即函数的极限，那么怎样把二者联系在一起时问题的关键。而事实上，我们之前在教材就遇见了这样的问题，只是这里形式变化了而已。教材例题说函数极限存在，证明该函数的导函数极限为零，而本题中的 f(x) 不正是$\int_a^{x} f(x)dx$的导函数吗？而$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 则是$\int_a^{x} f(x)dx$的极限！证明如下：

$$A=\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim\frac{e^x g(x)}{e^x}\xrightarrow{\text{罗必达法则}}=\lim(g(x)+g'(x))=\lim g(x)+\lim g'(x)=A+\lim g'(x)$$

所以$\lim g'(x)=0$. 这里$g(x)=\int_a^{x} f(x)dx$.

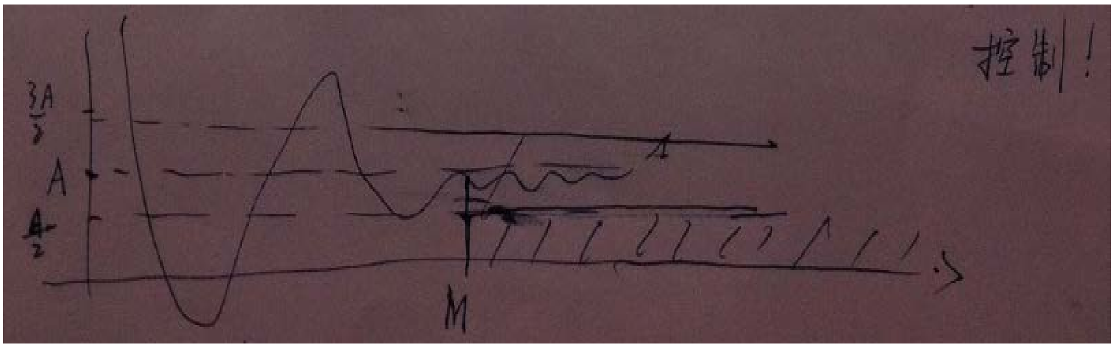
法一注解：

不要单纯地把无穷积分和其他广义积分看作一个数或者其他什么，我们应当看到他事实上是一个极限，而他的收敛则意味着极限的存在。此外就是，可以注意的是函数的积分的导函数正是这个函数。尽管都很明显但却容易被忽略

法二

用最近学的知识。要我们证明极限为零，自然地想到反证法，我们讨论 A≠0 的情形，从而排除这种可能性。这里不妨设 A>0 吧。

对于很多关于函数及喜爱你的问题，我们可以考虑从图上去找 Answer：



由于函数极限是 A，画图的时候很自然要把它画在 A 附近，而且越来越靠近，那么用什么来体现越来越靠近呢？图中用那两条线体现出来了，甚至后面可以把这两条线画的越来越窄，她体现了极限与控制相同，对于充分大的 x，函数值总能被控制在一个（充分小）的区域内。当然这里的两条线主要体现的是保号性

从图上我们就可以看出矛盾了，函数图像在 M 之后总是在 A/2 的上方，积分必然无穷大，不可能收敛，用符号语言表述大致就是：

存在充分大的正数 M 使得当 x 大于 M 时函数值大于 A/2

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} = \int_a^M + \int_M^{+\infty} > \int_a^M + \frac{A}{2}(+\infty - M) = +\infty \text{ 矛盾！}$$

所以$A = 0$

法二注解：

1. 上面用了反证法，读者不妨思考上面是否能够用正面的方法叙述。事实上很多可以用反证法的题目都可以不用反证法，而且整个过程几乎和反证法相同，反证法在这样的题中反而略显多余。反证法改写成正面方法是一种不错的锻炼：

   正面证明不妨设$A \ge 0$

   $\because \lim f = A,\ \therefore \exists M > 0, st.$对于$\forall x > M,\quad f \ge \dfrac{A}{2} \ge 0$

   这导致$\int_a^x f\,dx = \int_a^M fdx + \int_M^x f\,dx \ge \int_a^M fdx + \dfrac{A}{2}(x - M)$

   即$0 \le A \le \dfrac{2\left(\int_a^x f\,dx - \int_a^M fdx\right)}{x - M}$,再另$x \to +\infty$,.

   由分子收敛于常数可知$\lim \dfrac{2\left(\int_a^x f\,dx - \int_a^M fdx\right)}{x - M} = 0$

   由夹逼准则可知A=0

2. 事实上，上面当观察出 $\exists M > 0, st.$对于$\forall x > M,\quad f \ge \dfrac{A}{2} \ge 0$ 时，由于 $g(x) \triangleq \dfrac{A}{2}$ 发散，因此可直接由比较原则得出原函数发散的结论。

法三

积分收敛还有什么等价的条件可以用？法二用了极限的一般定义，事实上还有柯西准则可以用，简单点表述柯西准则就是 $\int_{u_1}^{u_2} f dx \to 0$ （$u_2 > u_1$，$u_1 \to +\infty$） 那么，如何用？

还是一个问题，如何把积分和原函数联系起来？积分第一中值定理！

柯西准则常用的上下限是 x, 2x 我们试试这样：

$$\int_x^{2x} f dx = f(\xi_x)\int_x^{2x} dx = x f\left(\xi_x\right) \to 0\ (x \to +\infty)$$

$$\Rightarrow f\left(\xi_x\right) \to 0 \quad (\xi_x \geq x, x \to +\infty)$$

$$\text{而}\lim f(x)\ \text{存在且} = A$$

因此$A = 0$（可由归结原则得出）

法三注解：

1. 上面试用常用的上下限 x 和 2x, 而从上面的证明过程中我们可以看出，上限用 2x 并不是必须的，比如用 x+1 等等。

2. 事实上，上面的证明中，$x \leq \xi_x \leq 2x$，$\therefore x f\left(\xi_x\right) = \frac{x}{\xi_x}\xi_x f\left(\xi_x\right) \geq \frac{\xi_x f\left(\xi_x\right)}{2} \geq 0 \Rightarrow \xi_x f\left(\xi_x\right) \to 0$，因此若有条件x f(x) 极限存在，那么必为零

题注：1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx\,收敛$ 怎么用？
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(x)dx\,极限存在 \\ Abel判别法 \\ Dirichlet判别法 \\ \int_{u_1}^{u_2} f dx \to 0\ \left(u_2 > u_1，u_1 \to +\infty\right),(Cauchy) \\ 反证法中作为简单条件得出矛盾(解题中推出不收敛) \\ 作为反设条件，假设不收敛 \end{cases}$$

2. 怎样把$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $f(x)$ 联系起来？

六

分析条件。看到$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$应该想到什么？

如果是$\int_a^b f'(x)dx$显然是会想到f(b)−f(a), 我们令$b \to +\infty$,可以看到结果是我们得到$\lim f(x)$存在，记为A，与第五题就相同了。

注记：对比第四五六三题！

《数学分析》华东师范大学第 282 页习题：

习　　题

1. 证明定理 11.2 及其推论 1.

2. 设 f 与 g 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，对任何 $u>a$，它们在 $[a,u]$ 上都可积. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x$ 也都收敛.

3. 设 f、g、h 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的三个连续函数，且成立不等式 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. 证明：

(1) 若 $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

(2) 又若 $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x=A$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=A$.

4. 讨论下列无穷积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$；　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；　(4) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$；　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x\ (n、m\geqslant 0)$.

5. 讨论下列无穷积分为绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

6. 举例说明：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛；$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛时，$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 也不一定收敛.

7. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.

8. 证明：若 f 是 $[a,+\infty)$ 上的单调函数，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，且 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$，$x\to+\infty$.

9. 证明：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

10. 利用狄利克雷判别法证明阿贝尔判别法.

282 页

三、证明

1）

可能会先想到$\int_{收敛} hdx < \int fdx < \int_{收敛} gdx$，但这能说明$\int fdx$收敛？不能，因为$f$不一定大于零。大于零的函数才可以用比较原则。

不妨联想上面第五题证明A=0（法一）

上面先证明lim(f+f’)存在且=A，从而由f’=(f+f’)-f 得到limf’，而本例中，若能证明$\int f-gdx$，或$\int f-hdx$收敛，再利用f=(f-g)+g或(f-h)+h不就可以得出结论了！那么利用前者还是后者？显然前者能够为利用比较原则创造条件，因此我们考虑证明$\int f-hdx$收敛. 由条件h<f<g。要构造f-h:0=h-h<f-h<g-h，不等式各边同时积分，再利用比较原则即证得$\int f-hdx$收敛，从而$\int fdx = \int f-h+hdx = \int f-hdx + \int hdx$收敛

四、解

判断收敛性首先应先找出所有瑕点，再判断被积函数在每个瑕点处对应的阶从而判断敛散性

3）瑕点+∞　　阶同 $x^{-\frac{1}{2}}$ → 发散

4）瑕点+∞　　阶同x^{-2} → 收敛

5）这里首先提两个重要的结论：

$$\begin{cases} I）\forall\alpha>0, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \ （这里\ln x也可写为\ln(x+p), 如\ln(x+1)） \\ II） \qquad \forall\alpha>0, \quad \lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\ln x=0 \end{cases}$$

关于这两个结论，我们现在做一个简单的分析（如果理解了挺有用的）：

1. 两个结果可以相互转化，任意一个结果的 x 用 $\frac{1}{x}$ 代换即得另一结果。
2. 第一个结果说明任何幂函数都是lnx的高阶无穷大。
3. 第二个结果表明任何幂函数都是$\frac{1}{\ln x}$的高阶无穷小。
4. 由于lnx的阶(表示为J(lnx))不为零，但是又比任何幂函数的阶小，即$0 < J(\ln x) <$任意正常数，因此，以幂函数为标准衡量一个函数的阶是不完备的，这种方式不适用于某些函数（另外需要注意的是，$\ln(x+1)\sim x(x\to 0)$，所以这里说的是某些而非某类）如Dirichlet函数在无理数点附近。

5. 2、3、4 三个分析下，“J（lnx）几乎为零”的表述是适合的，也就是说，lnx对于任何无穷大量阶的增大的贡献有，但几乎为零，对任何无穷小量阶的减小的贡献存在，但几乎为零，例如x^{-n}lnx的阶比x^{-n}高，但对任意的 α 一定比$x^{-n+α}$的阶更低，所以只要 n 比一小，x^{-n}lnx的阶仍然比一小，在零为左端点的任何有限区间的积分必收敛。
6. lnx(x → +∞或 x → 0)乘上一个函数（可以用幂函数判断其阶）的积分并不影响敛散性。下面给出证明，这个证明具有一般性（普通题目类似证明，这里以变量接近瑕点时取正值的函数为例）：

i)考虑仅有一个瑕点+∞的收敛积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$，其中$f(x)\sim x^{-\alpha}\ (x\to+\infty)$，$\alpha>1$。由于$\lim\frac{f(x)\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\frac{f(x)}{x^{-\alpha}1}\times\frac{x^{-\alpha}\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}}=0\ (x\to+\infty)$

因此$\int_0^{+\infty} f(x)\ln x dx$收敛

ii)对于仅有一个瑕点 0 的收敛积分$\int_0^1 f(x)dx$，其中$f(x)\sim x^{-\alpha}\ (x\to 0)$

$0<\alpha<1$。由于$\lim\frac{f(x)\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\frac{f(x)}{x^{-\alpha}1}\times\frac{x^{-\alpha}\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim x^{1-\alpha}\ln x=0\ (x\to 0)$

因此$\int_0^1 f(x)\ln x dx$收敛

iii)考虑仅有一个瑕点+∞的发散积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$其中$f(x)\sim x^{-\alpha}\ (x\to+\infty)$，$\alpha>1$。由于$f(x)\ln x>f(x)$　（x充分大）　并且$f(x)$发散

因此$\int_0^{+\infty} f(x)\ln x dx$发散

iiii)考虑仅有一个瑕点0的发散积分$\int_0^1 f(x)dx$其中$f(x)\sim x^{-\alpha}\ (x\to 0)$，

$\alpha>1$。由于$|f(x)\ln x|>f(x)$　（x充分大）　并且$f(x)$发散

因此$\int_0^1 f(x)\ln x dx$发散

另注：

上面的两个结果事实上与下面这个结果等价：

$\frac{\ln x}{x}\to 0\quad(x\to+\infty)$，这个结果看似较弱，但这里的x用$x^{\alpha}$或$x^{-\alpha}$代换就得到上面两个结果了，反之，$\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha\ln x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\frac{\ln x^{\alpha}}{x^{\alpha}}\to 0\quad(x\to+\infty)$，这个结果看似较弱，但这里的x用$x^{\alpha}$或$x^{-\alpha}$代换就得到上面两个结果了，

或者更漂亮地，$\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha\ln x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\frac{\ln x^{\alpha}}{x^{\alpha}}\to 0 \quad (x^{\alpha}\to+\infty)$。

下面回到本例：

本例虽然带有对数函数，但事实上并不是上面所介绍的类型，因为所给的函数可以用幂函数判断相应的阶：$\frac{\ln(x+1)}{x^{n}}\sim\frac{x}{x^{n}}=\frac{1}{x^{n-1}}$

因此按$n-1\geq 1$ 和 $n-1<1$ 讨论即可

6）仅有一个瑕点正无穷，判断阶！$J\left(\frac{x^m}{1+x^n}\right)=|m-n|$，$\frac{x^m}{1+x^n}\sim x^{m-n}$。显然$m-n$大于零的时候发散，直接谈论$m-n$ 和 1 的大小关系即可

五、解

1）

本题介绍三类代换：

$i)$ 当遇到的函数所作用的表达式较复杂且不易化解时，考虑对该表达式做代换，

如 $f(x)\triangleq xe^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$，令$t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$，$g(t)\triangleq f(x)=\frac{e^t}{1+t^2}$

又如 $x^{\alpha}\sin x^{\beta}$，一般地，令$t=x^{\beta}$即将原函数简化

$ii)$ 与第一类相反，又是我们将看似复杂的函数变得看似更复杂反而可能有惊喜！

简单的如 $x^3\ln x=x^3\times\frac{1}{3}\ln x^3,\sqrt{x}\ln x=\sqrt{x}\times\frac{1}{2}\ln\sqrt{x}$

$iii)$ 遇到 $\ln^{\alpha}x$的形式时可以考虑做代换 $t\triangleq\ln x$, 即 $x=e^t$往往可以简化问题

本题令$t=\sqrt{x}$ 即将积分转化为$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$的类型

2）带符号函数的题利用绝对值往往显得自然优雅：

$\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\leq\frac{1}{1+x^2}$ 右边的积分收敛，故左边也收敛且绝对收敛（比较原则）

3）

仅有一个瑕点正无穷，与$\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$同阶，引用课本281页的结论可知，条件收敛，证明类似。下面给出：

首先$|\int_1^u \cos x dx| \le |\sin 1-\sin u| \le 2$，有界，又因为$\dfrac{1}{\frac{100}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$在x充分大时单调趋于零，由$Abel$判别法知原积分收敛。

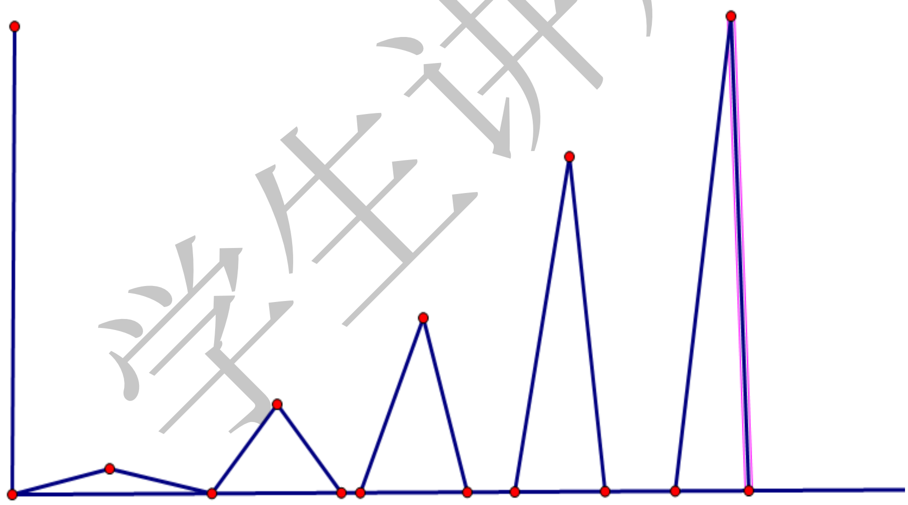
然而$\left|\dfrac{\cos x}{\frac{100}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\right| \ge \left|\dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}}\right|$(x充分大)$\ge\left|\dfrac{\sin x\cos x}{2x}\right|$(x充分大)$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\sin 2x}{2x}\right|$

由于右边的积分发散，因此左边的积分也发散，从而原积分条件收敛。

六

联系本文档关于276页第四题最后的陈述

如下图，构造这样的函数，我们可以让三角形的底减小，高增大，而底减小的速度比高增大的速度快，两者乘积求和是一个收敛的级数。但是我们让高（函数值）平方之后的增长速度比底的减小速度更快，或者一样，这样就达到底乘高的平方求和结果发散。



例：底$=\dfrac{1}{4^n}$，高$=2^n$　又例：底$=\dfrac{1}{3^n\times3^n}=\dfrac{1}{9^n}$，高$=4^n$，其中每个三角形的左端点对应自然数。

七、证明

法一

$$\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx=\int_0^{+\infty}|f(x)||f(x)|\,dx=\int_0^{M} f(x)^2\,dx+\int_M^{+\infty}|f(x)||f(x)|\,dx$$

$$\le\int_0^{M} f(x)^2\,dx+\int_M^{+\infty}|f(x)|\varepsilon_0\,dx \quad (\text{这里的M和}\varepsilon_0\text{是由函数极限的定义得到的})$$

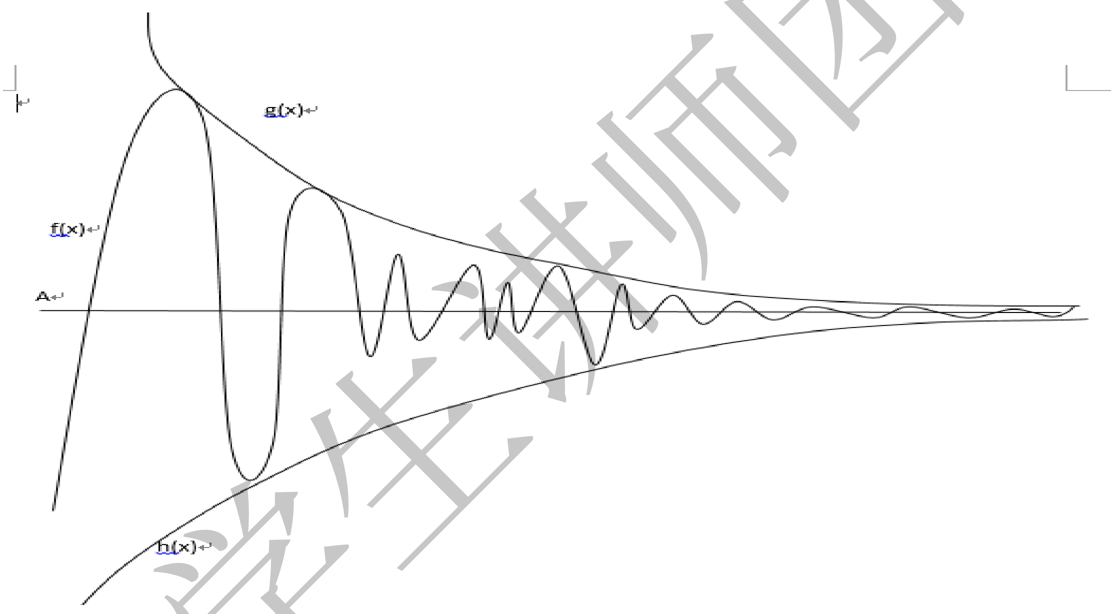
注：感觉，$f(x)\to 0$，那么x充分大时函数值充分小，$|f(x)|^2\le|f(x)|$，也就是说平方把$|f(x)|$变小

法二

f^2是两个函数相乘的形式，并且$f\to 0$，那么是否可以考虑Abel或Dirichlet判别法？但f不单调。构造！下面给出一个复杂但优美的证明：

首先给出一个漂亮的结果

引理：$\forall f\to \mathrm{A}$，存在单调的g,h使得$\mathrm{g}<f<h$，并且$\mathrm{g},\mathrm{h}\to \mathrm{A}$



上面这个图是我们的直觉，然而这样的函数不易构造（事实上对于连续函数而言可以做到，并且思路不难，读者不妨试试，对于非连续函数，读者可自行思考，提示在这个这个方法的注里）我们这里构造的函数不长这样：

取ε_0=1，根据函数极限的定义，

对于$\varepsilon_0>0,\exists \mathrm{M}_1>0$使得对$\forall x>M_1$， $\mathrm{A}-\varepsilon_0<f<A+\varepsilon_0$

对于$\dfrac{\varepsilon_0}{2}>0,\exists \mathrm{M}_1>0$使得对$\forall x>M_2$， $\mathrm{A}-\dfrac{\varepsilon_0}{2}<f<A+\dfrac{\varepsilon_0}{2}$

...

对于$\dfrac{\varepsilon_0}{2^k}>0,\exists \mathrm{M}_1>0$使得对$\forall x>M_k$， $\mathrm{A}-\dfrac{\varepsilon_0}{2^k}<f<A+\dfrac{\varepsilon_0}{2^k}$

...

（上面事实上是利用极限的定义，通过ε_0对函数值进行控制）

$h(x) \triangleq A+\frac{\varepsilon_0}{2^{k-1}}, x\in[\mathrm{M}_k,\mathrm{M}_{k+1}],\ \mathrm{k}=1,2,3,\cdots$

$\mathrm{g}(x) \triangleq A-\frac{\varepsilon_0}{2^{k-1}}, x\in[\mathrm{M}_k,\mathrm{M}_{k+1}],\ \mathrm{k}=1,2,3,\cdots$

下面回到本例：

由引理及$|f|\to 0$知，存在单调递减的$h\to 0$且$h>f$，

从而$\int_0^{+\infty} f^2dx=\int_0^{\mathrm{M}} f^2dx+\int_{\mathrm{M}}^{+\infty}|f||f|dx\le\int_0^{\mathrm{M}} f^2dx+\int_{\mathrm{M}}^{+\infty}|f|\times \mathrm{h}\,dx$

由$h\to 0$且单调递减，$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛有界知上式右边收敛，从而左边也收敛。

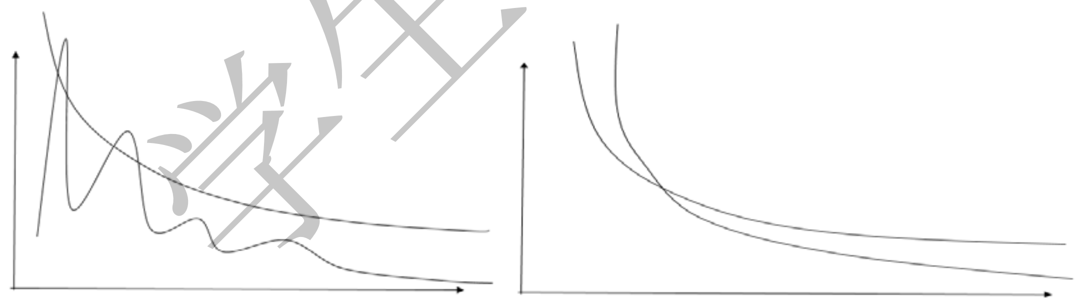
注：这里构造的函数事实上是分段函数，其图像特征可根据上面给出的构造方式看出，由一段段逐渐靠近y=A的平行线段组成，将这些平行线段的右端点连结为光滑的曲　　线就得到上面图中所构造的曲线。

八、证明

本题说明了一个事实，即$\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x}}\to 0$,（$\mathrm{x}\to+\infty$）

亦即，f若单调且$\int_0^{+\infty} fdx$收敛，则f必为$\frac{1}{x}$的高阶无穷小

换言之，f的图像在x充分大时必在$\frac{1}{x}$下方，且减小的速度比其快，对比第六题的构造！



I）首先证$f(x)\to 0$　（$\mathrm{x}\to+\infty$）：

不妨设$f\downarrow$，$f\to\mathrm{A}$（$\mathrm{x}\to+\infty$），若A>0，∃Δ，当$x>\Delta$时，$f>\frac{A}{2}>0$

$\Rightarrow\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{\Delta} f(x)dx+\int_{\Delta}^{+\infty} f(x)dx>\int_0^{\Delta} f(x)dx+\int_{\Delta}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}}{2}dx\to\infty$，矛盾！

对于A<0，同理可得矛盾，因此$f(x)\to 0$　（$\mathrm{x}\to+\infty$）

II）这里再次涉及到了$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛这样一个条件，正如本文档第五题所提及，我们要如何使用这一条件？回看前面的文档。

法一：

首先我们试着用用柯西准则。我们常用的上下限是x, 2x和$\frac{x}{2}, x$，这里我们选择后者，即考虑$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)dx$，注意考虑为什么选择后者。

$f\downarrow$，因此对$\forall x>0$有$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(\mathrm{t})dx \ge \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)dx = \frac{x}{2} f(x) > 0$。由柯西准则我们知道，不等式左边的极限是0，而右边也是0，由夹逼准则知$\frac{x}{2} f(x) \to 0$（$\mathrm{x} \to +\infty$）

即$xf(x) \to 0$（$\mathrm{x} \to +\infty$）

法一附注：我们利用积分第一中值定理对法一做一个简单的改造：

$f\downarrow$，由积分第一中值定理可知

对$\forall x>0$有$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(\mathrm{t})dx = f(\xi_x)\int_{\frac{x}{2}}^{x} dx = \frac{x}{2} f(\xi_x) \ge \frac{x}{2} f(x) > 0$，下同法一。

尽管看上去形式上差不多，但却是本质不同的两种方法，至少在单调性的使用上，前者在积分的时候使用，后者在积分之后使用。

法二：

$\mathrm{x}f(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x}}$，等式右边能让人联想到什么？——中值定理！——$\dfrac{f(\xi_x)}{\frac{1}{\xi_x}}$

那么它要怎么来？找分子分母的原函数！——$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{\ln b - \ln a}$

但是我们需要让$\xi_x \to +\infty$，那么a, b又要如何选取？

再看$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛，可以得到什么？——用柯西！ $\int_x^{2x} f(x)dx \to 0(\mathrm{x} \to +\infty)$

$\mathrm{F(x)} \triangleq \int_x^{2x} f(x)dx$

因此我们考虑$\dfrac{\int_x^{2x} f(x)dx}{\ln 2\mathrm{x} - \ln \mathrm{x}} = \dfrac{F(2\mathrm{x}) - \mathrm{F(x)}}{\ln 2\mathrm{x} - \ln \mathrm{x}} = \dfrac{f(\xi_x)}{\frac{1}{\xi_x}} = \xi_x f(\xi_x)$

$\ge \mathrm{x}\, f(2x) = \frac{1}{2} \times 2xf(2x) > 0$与法一同理可知,$2xf(2x) \to 0$（$\mathrm{x} \to +\infty$）

即$xf(x) \to 0$（$\mathrm{x} \to +\infty$）

法二附注：通过上面的过程思考，使用上下限x, 2x和$\frac{x}{2}, x$之间是否有区别

法三：

这个方法基于本题一开始的分析，由上面的分析可知，，当x很大时，

f必小于$\frac{1}{x}$，同样地，$f < \frac{1}{2x}$（x充分大），$f < \frac{1}{3x}$（x充分大），$\cdots$否则$\int_0^{+\infty} f(x)dx$发散。

在上面的基础上，我们利用这样一个结论：

$$\forall n>0,\quad \exists M>0\quad st.\forall \mathrm{x}>\mathrm{M},\quad f(x)<\frac{1}{nx} \qquad \text{——}\ (*)$$

因此$xf(x)<\frac{1}{n}$并且$xf(x)\geq 0$

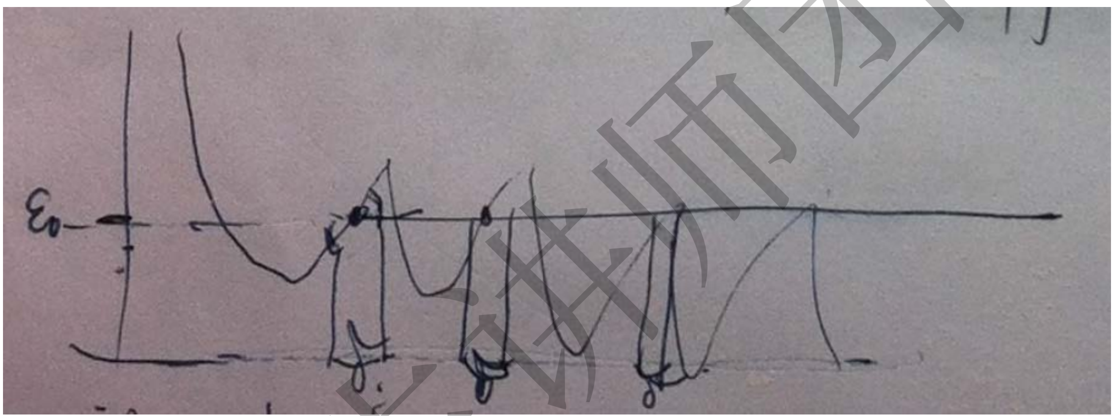
令$n\to+\infty$得$0\leq \lim xf(x)\leq 0$，因此$\lim xf(x)=0$

法三附注：法三依赖于结论（*），而事实上上面并未给出这个结果的证明，

其逆命题是存在$x_m\to+\infty$，使得$f(x_k)>\frac{1}{nx_k}$至少对某个n_0成立，我曾给出一个看似漂亮却错误的证明，正确的证明待续！

九、证明

法一：



法一：

要我们证明极限为零，自然地，反证法！设$f(x)$极限不为零或不存在，那么存在$\varepsilon_0>0$，使得对任意$M_k>0$，存在$x_k>M_k$使得$|f(x_k)|\geq\varepsilon_0$

由f一致连续知，$\exists\delta>0$，只要$|\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2|<\delta$，$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$

从而 $\forall x\in U(\mathrm{x}_k;\delta)\quad f(x)\geq\frac{\varepsilon_0}{2}$

$$\therefore\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}f(x)dx\geq\frac{\varepsilon_0}{2}\times 2\delta=\varepsilon_0\delta$$

$$\therefore\int_a^{+\infty}f(x)dx\geq\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}f(x)dx\geq\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_0\delta\to+\infty\text{，矛盾！}$$

因此$f(x)$的极限为零。

法二：

如何利用$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛这样的条件？前面已经多次对此进行了讨论，法一就是上文所总结方法的最后一种，下面用柯西：

由f的一致连续性：

$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0\quad st.\forall|x_1-x_2|<\delta\quad |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$\therefore\forall t\in U(x;\delta),\quad f(x)-\varepsilon\le f(t)\le f(x)+\varepsilon\quad (\forall x\in(a,\infty))$

$\therefore\int_{x-\delta}^{x+\delta}(f(x)-\varepsilon)dt\le\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)dt\le\int_{x-\delta}^{x+\delta}(f(x)+\varepsilon)dt\quad (\forall x\in(a,\infty))$

$\Leftrightarrow 2\delta(f(x)-\varepsilon)\le\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)dt\le 2\delta(f(x)+\varepsilon)\quad (\forall x\in(a,\infty))$

令$x\to+\infty$，则有柯西准则可知$\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)dt\to 0$

即有$\lim\limits_{x\to\infty}2\delta(f(x)-\varepsilon)\le 0\le\lim\limits_{x\to\infty}2\delta(f(x)+\varepsilon)$

即$\lim f(x)-\varepsilon\le 0\le\lim f(x)+\varepsilon$

$\Leftrightarrow -\varepsilon\le\lim f(x)\le\varepsilon$

$\therefore\lim f(x)=0$

法二附注：或由（#）式得$\left|\dfrac{\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)dt}{2\delta}-f(x)\right|<\varepsilon$对定义域内的任意$x$均成立

再令$x\to+\infty$，由柯西准则得$|\lim f(x)|<\varepsilon$

$\therefore\lim f(x)=0$

《数学分析》华东师范大学 286 页：

习 题

1. 写出性质 3 的证明.
2. 写出定理 11.6 及其推论 1 的证明.
3. 讨论下列瑕积分的收敛性：

(1) $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$；　(2) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\ln x}$；　(4) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}\mathrm{d}x$；　(6) $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；　(8) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$.

---

4. 计算下列瑕积分的值(其中 n 为正整数)：

(1) $\int_0^1 (\ln x)^n \mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

5. 证明瑕积分 $J=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.（提示：利用 $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$，并将它们相加.）

6. 利用上题结果，证明：

(1) $\int_0^\pi \theta\ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$；

(2) $\int_0^\pi \frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi\ln 2$.

《数学分析》华东师范大学 287 页：

总 练 习 题

1. 证明下列等式：

(1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1}dx, p>0$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1}dx, 0<p<1$.

2. 证明下列不等式：

(1) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$;

(2) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx < 1+\frac{1}{2e}$.

3. 计算下列反常积分的值：

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx (a>0)$; (2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx (a>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$; (4) $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan\theta)d\theta$.

4. 讨论反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\lambda}dx (b\neq 0)$，$\lambda$ 取何值时绝对收敛或条件收敛.

5. 证明：设 f 在$[0,+\infty)$上连续，$0<a<b$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = (f(0)-k)\ln\frac{b}{a};$$

(2) 若$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

6. 证明下述命题：

(1) 设 f 为$[a,+\infty)$上的非负连续函数. 若$\int_a^{+\infty} xf(x)dx$ 收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

(2) 设 f 为$[a,+\infty)$上的连续可微函数，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 递减地趋于 0，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件为$\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛.

三、解

2）瑕点仅有0，与$\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$同阶，故收敛

3）带lnx对于瑕点1，用x-1：$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}=1$,故发散。

注：带$\ln x$，对于瑕点0，上文已经介绍处理方法,下面这题就是这种类型

4）两个瑕点，x=1处，$\lim\frac{\ln x}{1-x}=1$，因此这附近的瑕积分收敛。

x=0处，$\lim\frac{x^{\frac{1}{2}}\ln x}{1-x}=0$，因此这附近的瑕积分收敛，从而整个积分收敛

5）瑕点仅有0，提出使得分母为零的因子（就如用洛比达法则前做的）：

$\frac{\arctan x}{(1-x)(1+x+x^2)}$，从而判断出与$\frac{1}{1-x}$同阶，故发散

7）比较自然地，$|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\alpha}}|\le\frac{1}{x^{\alpha}}$，因此在$0<\alpha<1$时积分绝对收敛

对于$\alpha\ge 1$,$\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\alpha}}dx\xrightarrow{t\triangleq\frac{1}{x}}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}dt$ (化归为我们熟悉的$\frac{\sin x}{x^p}$的形式)

当$2-\alpha>1$　即0<α<1时，绝对收敛

当0<$2-\alpha\le 1$　即1<α<2时，条件收敛

当$\alpha\ge 2$时,发散

8）两个瑕点0和+∞

对于瑕点0，$x^{\alpha}e^{-x}\ln x\to 0$　故收敛

对于瑕点+∞,$x^p e^{-x}\ln x\to 0,\forall p>1$　故收敛

4）（2）递推法，把x^n凑进去

五、证明

法一：

$$J\triangleq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx——（*_1）$$

考虑其对称式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx——（*_2）$

下面首先证明上面两个式子相等：

$$(*_1)\overset{t=\frac{\pi}{2}-x}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\cos t)\,d(\frac{\pi}{2}-t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx=(*_2)$$

$$\therefore 2J=(*_1)+(*_2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)-\ln 2\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,dx\overset{t=2x}{=}-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin t)\,dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}J+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin t)\,dt$$

$$\overset{x=t-\frac{\pi}{2}}{=}-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}J+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}J+\frac{1}{2}J=-\frac{\pi}{2}\ln 2+J$$

$$\therefore J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

法二：

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})dx=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin\frac{x}{2})dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos\frac{x}{2})dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)dx\overset{t=\frac{\pi}{2}-x}{=}\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\ln 2+2J$$

$$\therefore J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

287页

一、证明

2）证明两个积分相等应注意代换和拆分这两种方法，往往根据需要先将积分拆分为几个部分，对于这几个部分用不同方式处理，常见处理就是代换。比如第一小题等式两边积分限分别是0到1和1到+∞，这显然就是说很可能是需要做代换$t=\frac{1}{x}$从而达到转化积分限的目的。本题形式上与第一小题相同，只是换了积分限，但是，注意到，积分限0到+∞做代换$t=\frac{1}{x}$之后积分限是+∞到0，形式上不变，因此仍然考虑此代换。尝试了就知道，这么做是对的！

二、证明

2）比较自然地可能会联想到xe^{-x^2}这个函数，但是处理起来相对困难：

为了便于放缩，我们将积分拆分为两个部分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx$

一方面，上式$\geq\int_0^1 e^{-x^2}dx\geq\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$

另一方面，上式$\geq\int_0^1 1dx+\int_1^{+\infty}xe^{-x^2}dx=1+\frac{1}{2e}$

三、解

2）法一：

形式上属于$\int$ 周期导函数×周期导函数dx？—用分部积分

法二：

把$e^{-ax}\sin bx$凑成$e^{-ax}(-a(c_1\sin bx+c_2\cos bx)+(c_1\sin bx+c_2\cos bx)')$

即$e^{f(x)}(f'(x)g(x)+g'(x))$的形式，原函数为$e^{f(x)}g(x)$

3）法一：

出现$\ln x$的积分应注意$t=\frac{1}{x}$这个代换，这里$I\triangleq\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}d(\frac{1}{t})$

$$=\int_{+\infty}^{0}\frac{-t^2\ln t}{1+t^2}\times(-\frac{1}{t^2})\,dt=\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln t}{1+t^2}dt=-I$$

$\therefore I=0$

法二：

将积分拆解，$I=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$

再将拆解开的两个式子中任意一个做和法一相同的代换，整理之后发现会和另一部分相消得零

注：这里提供方法类似的几道题以供练习

$i)$证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x dx$

$ii)$证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$

$iii)0<a<b,\ f\in C[a,b]$且$f\left(\frac{ab}{x}\right)=f\left(x\right)\quad(\forall x\in[a,b])$.

证明$\int_a^b f\left(x\right)\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln(ab)\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x}dx$

$iiii)$求$\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln\sin x dx$

提示：$f\left(a-x\right)=f\left(x\right)$

这些题的巧妙之处在于拆解积分，通过代换统一积分限从而达到相消的目的

四

首先找到两个瑕点0和$+\infty$

i)对于瑕点0:$\frac{\sin bx}{x^{\lambda}}$与$\frac{bx}{x^{\lambda}}=\frac{b}{x^{\lambda-1}}$同阶，因此在0附近，当$0<\lambda-1<1$即$1<\lambda<2$时积分收敛；当$\lambda-1\ge1$即$\lambda\ge2$时积分发散

ii)对于瑕点$+\infty$:$\frac{\sin bx}{x^{\lambda}}=\frac{\sin bx}{(bx)^{\lambda}}\times b^{\lambda}$,属于$\frac{\sin x}{x^p}$的类型，因此当$0<\lambda\le1$时，积分条件收敛；当$\lambda>1$时绝对收敛；

综上，当$\lambda\le0$或$\lambda\ge2$时原积分条件收敛；当$0<\lambda\le1$时条件收敛；当$1<\lambda<2$时绝对收敛

五、证明

1）引理：$\int_m^n f(x)dx-\int_p^q f(x)dx=\int_m^p f(x)dx-\int_n^q f(x)dx$ （证明略）

首先判断出积分中有瑕点0,+∞，取极限时达到。因此我们先考虑

$\int_u^v \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$，当$u\to 0, v\to +\infty$时就是我们需要的。

$$\int_u^v \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_u^v \frac{f(ax)}{x}dx-\int_u^v \frac{f(bx)}{x}dx \overset{\text{代换}}{=} \int_{au}^{av}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{bu}^{bv}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$\overset{\text{利用引理}}{=} \int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{av}^{bv}\frac{f(t)}{t}dt \overset{\text{代换}}{=} \int_a^b \frac{f(ut)}{t}dt-\int_a^b \frac{f(vt)}{t}dt=\int_a^b \frac{f(ut)-f(vt)}{t}dt$$

$$\overset{\text{积分第一中值定理}}{=} (f(u\xi)-f(v\xi))\int_a^b \frac{1}{t}dt=(f(u\xi)-f(v\xi))\ln\frac{b}{a}$$

令$u\to 0, v\to +\infty$即得欲证结果

巧妙之处在于引理的运用和代换使得变化的积分限uv进入了函数作用的括号里，积分限由变化的量转化为常数。

2）$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$收敛，即$\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u \frac{f(x)}{x}dx$存在

因此$\int_u^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_u^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_u^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx$

而上式的右边$\overset{\text{代换}}{=} \int_{au}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{bu}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}dt \overset{\text{代换}}{=} \int_a^b \frac{f(ut)}{t}dt$

$$\overset{\text{积分第一中值定理}}{=} f(u\xi)\int_a^b \frac{1}{t}dt=f(u\xi)\ln\frac{b}{a}$$

令$u\to 0$即得欲证结果

六、证明

1）$M\triangleq\max\{a,1\}$，则$0\le\int_M^{+\infty}f(x)dx\le\int_M^{+\infty}xf(x)dx$， $f(x)\ge 0$

$\therefore\int_M^{+\infty}f(x)dx$收敛，从而$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛

2）必要性：

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，而$f\downarrow$且$f\to 0$ $(x\to+\infty)$

$\therefore xf(x)\to 0$（$x\to+\infty$）（这是上文已证的结果）

又$\int_a^u xf'(x)dx=uf(u)-af(a)-\int_a^u f(x)dx$，再令$u\to+\infty$

得$\int_a^{+\infty}xf'(x)dx=0-af(a)-\int_a^{+\infty}f(x)dx$，收敛。

充分性：

关键在$\int_a^{+\infty}xf'(x)dx$收敛怎么用？

用柯西！

$\int_x^{2x} tf'(t)dt = \xi_x \int_x^{2x} f'(x)dx = \xi_x\left(f(2x)-f(x)\right)$——（$*_3$）

又由f单调递减趋于零知（$*_3$）左边$\xi_x\left(f(2x)-f(x)\right) < x\left(f(2x)-f(x)\right) < 0$，而由柯西准则知（$*_3$）左边的极限为零

$\therefore x\left(f(x+x)-f(x)\right) \to 0 \quad (x \to +\infty)$做不下去了　原因是什么？

柯西的上下限是可以任取的，上限和下限是可以无关的，然而这里取x和2x，事实上削弱了柯西的作用，对付有些题可以，但这题吃力了

我们可以考虑这样去上下限：

$\int_x^{x+m} tf'(t)dt \overset{\text{和上面的分析同理}}{\Rightarrow} x\left(f(x+m)-f(x)\right) \to 0 \quad (x \to +\infty, m > 0)$

亦即$x\left(f(x)-f(x+m)\right) \to 0 \quad (x \to +\infty)$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \quad \exists M > 0 \quad st.\forall x > M, 0 < \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(f(x+m)-f(x)\right) < \varepsilon$

再令$m \to +\infty$，由$f \to 0$得$0 < \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) < \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$

又由$\int_a^{+\infty} xf'(x)dx \overset{\text{分部积分}}{=} xf(x)|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = xf(x)|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} xf'(x)dx$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) - af(a) - \int_a^{+\infty} xf'(x)dx$

$\therefore \int_a^{+\infty} xf'(x)dx$收敛