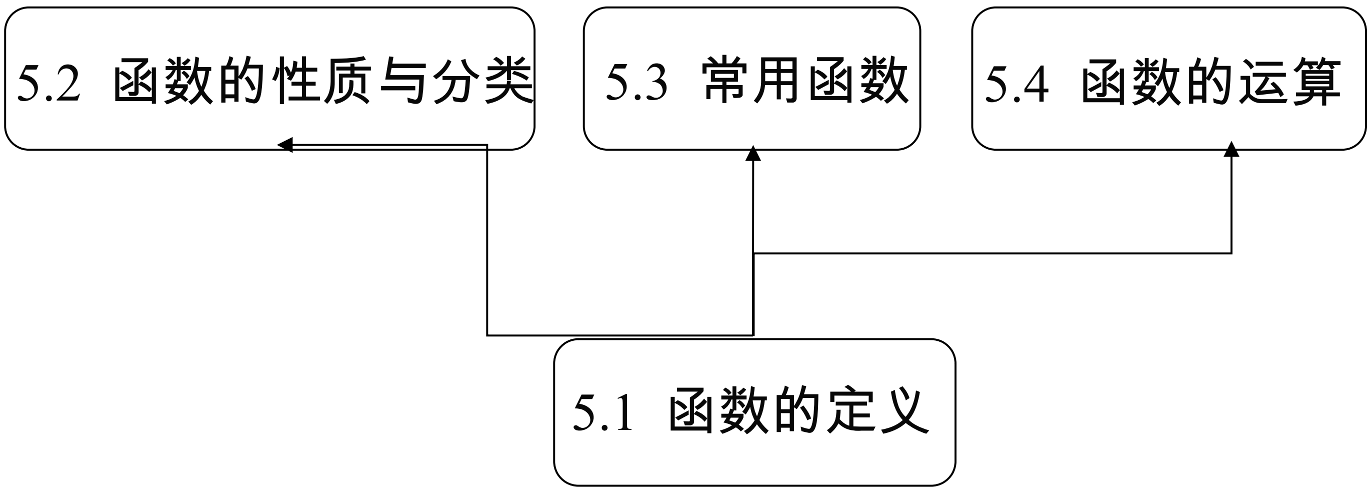
第五章 函数

函数部分知识逻辑概图



5.1 函数的定义

函数是一种具有特殊性质的二元关系。

5.1 函数的定义

定义 5.1　设 f 为二元关系，若对任意的 x∈domf 都存在唯一的 y∈ranf 使得 xfy 成立，则称 f 为函数。对于函数 f，如果 <x, y>∈f，常记作 y = f(x)， x 称为自变量， y 称为 x 在 f 作用下的像（或函数值）。

函数是一种特殊的二元关系，特点如下：

（1）函数的定义中强调像 y 是唯一的，称作像的唯一性。像的唯一性可以描述为：设 $f(x_1) = y_1$ 且 $f(x_2) = y_2$，如果 $x_1 = x_2$，那么 $y_1 = y_2$；或者如果 $y_1 \neq y_2$，那么，$x_1 \neq x_2$。

（2）该定义并不排斥多个元素拥有相同的像的情况。即若 $x_1 \neq x_2$，可以有 $f(x_1) = f(x_2)$。

例 5.1　判断如下关系是否为函数？

$f_1 = \{<x_1, y_1>, <x_2, y_1>, <x_3, y_2>\}$ ，$f_2 = \{<x_1, y_1>, <x_1, y_2>, <x_2, y_1>, <x_3, y_2>\}$

解：f_1 是函数，满足函数的定义。f_2 不是函数，因为对应于 x_1，存在 y_1 和 y_2，使得 $x_1 f y_1$、 $x_1 f y_2$ 同时成立，与函数定义矛盾。

5.1 函数的定义

定义 5.2 设 f、 g 为函数，则

$$f = g \Leftrightarrow f \subseteq g \land g \subseteq f$$

由该定义可知，若两函数 f 和 g 相等，一定满足如下两条件：

（ 1 ） $\mathrm{dom} f = \mathrm{dom} g$

（ 2 ） $\forall x \in \mathrm{dom} f = \mathrm{dom} g$ ，都有 $f(x) = g(x)$ 。

例如函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ 和 $g(x) = x - 1$ 是不相等的，因为 $\mathrm{dom} f = \{x \mid x \in R \land x \neq -1\}$

而 $\mathrm{dom} g = R$ ， $\mathrm{dom} f \neq \mathrm{dom} g$ 。所以 $f \neq g$ 。

定义 5.3 设 A ， B 是集合，如果函数 f 满足以下条件：

（ 1 ） $dom f = A$

（ 2 ） $ran f \subseteq B$

则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 f: A→B 。

5.1 函数的定义

定义 5.4 设 A， B 为集合，所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作“ B 上 A”，集合表示为

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$$

例 5.5 设 $A = \{a, b, c\}$ ，$B=\{\alpha, \beta\}$ ，求 B^A ?

解： $A\times B=\{<a, \alpha>, <a, \beta>, <b, \alpha>, <b, \beta>, <c, \alpha>, <c, \beta>\}$ ，$A\times B$ 有 2^6 个可能的子集，但其中只有 2^3 个子集能成为从 A 到 B 的函数，分别为

$f_0=\{<a, \alpha>, <b, \alpha>, <c, \alpha>\}$ ，$f_1=\{<a, \alpha>, <b, \alpha>, <c, \beta>\}$ ，

$f_2=\{<a, \alpha>, <b, \beta>, <c, \alpha>\}$ ，$f_3=\{<a, \alpha>, <b, \beta>, <c, \beta>\}$ ，

$f_4=\{<a, \beta>, <b, \alpha>, <c, \alpha>\}$ ，$f_5=\{<a, \beta>, <b, \alpha>, <c, \beta>\}$ ，

$f_6=\{<a, \beta>, <b, \beta>, <c, \alpha>\}$ ，$f_7=\{<a, \beta>, <b, \beta>, <c, \beta>\}$

所以 $B^A = \{f_0, f_1, ..., f_7\}$。 ，

5.1 函数的定义

定理 5.1 设 A 和 B 都为有限集，$|A| = m$，$|B| = n$，且 $m, n > 0$，则从 A 到 B 共有 n^m 个不同的函数，即 $|B^A|=n^m$。

当 A 或 B 中至少有一个集合是空集时，可以分成下面三种情况：

（1） $A = \varnothing$ 且 $B = \varnothing$，则 $B^A = \varnothing^\varnothing = \{\varnothing\}$。

（2） $A = \varnothing$ 且 $B \neq \varnothing$，则 $B^A = B^\varnothing = \{\varnothing\}$。

（3） $A \neq \varnothing$ 且 $B = \varnothing$，，则 $B^A = \varnothing^A = \varnothing$。

定义 5.5 设函数 $f: A \to B$，$A_1 \subseteq A$，$B_1 \subseteq B$，

（1）令 $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$，称 $f(A_1)$ 为 A_1 在 f 下的像。特别当 $A_1=A$ 时，称 $f(A)$ 为函数的像。

（2）令 $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$，称 $f^{-1}(B_1)$ 为 B_1 在 f 下的完全原像。

5.1 函数的定义

定理 5.2 设 f 是从 X 到 Y 的函数，A、B 都是 X 的子集，则

（1）$f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$

（2）$f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$

例 5.7 设 $X=\{a, b, c\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$，$f: X\rightarrow Y$ 为：

$$f(a) = 1 \text{，} f(b) = f(c) = 2$$

令 $A=\{a, b\}$，$B=\{c\}$，于是

$$A\cap B=\varnothing \text{，} f(A\cap B)=\varnothing$$

但是

$$f(A)\cap f(B)=\{1, 2\}\cap\{2\}\neq\varnothing$$

这表明 $f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$。

小结

（1）函数是一种具有特殊性质的二元关系，即函数值的唯一性。

（2）函数相等就是集合相等。

（3）从 A 到 B 的函数 $f: A\to B$ 。

（4）函数的图形表示。

（5）设 A 和 B 都为有限集，$|B^A|=|B|^{|A|}$ 。

（6）像和完全原像。

5.2 函数的性质与分类

具有不同性质的三种特殊的函数：满射、单射和双射。

5.2 函数的性质与分类

定义 5.6 设函数 f: A→B ，

（1）若 ranf = B ，则称 f: A→B 是**满射**的。

（2）若∀ y ∈ ranf ，都存在唯一的 x∈A ，使得 f(x) = y ，则称 f: A→B 是**单射**的。

（3）若 f: A→B 既是满射的，又是单射的，则称 f: A→B 是**双射的**（或一一映射）。

由定义易得出：

（1）若 f: A→B 是满射的，则对于∀ y∈B ，都存在 x∈A ，使得 $f(x) = y$ 。

（2）若 f: A→B 是单射的，则对于∀ x_1, x_2∈A ，

① 若 $x_1 \neq x_2$ ，一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。或者

② 若 $f(x_1) = f(x_2)$ ，一定有 $x_1 = x_2$ 。

5.2 函数的性质与分类

定理 5.3 设 A 和 B 为有限集，若 A 和 B 的元素个数相等，即 $|A|=|B|$，从 A 到 B 的函数 f 是单射当且仅当它是一个满射。

例 5.9 判断下面函数是否为满射，单射，双射，为什么？

（1）$f: \{1,2\}\to\{0\}$，$f(1)=f(2)=0$。

（2）$f: N\to N$，$f(x)=2x$。

（3）$f: Z\to Z$，$f(x)=x+1$。

解：（1）$\mathrm{ran}f=\{0\}$，所以 f 是满射。$1\neq 2$，但 $f(1)=f(2)$，所以 f 不是单射。不是双射。

（2）$\mathrm{ran}f=\{2x \mid x\in N\}\subset N$，所以 f 不是满射。对于任意的 $x_1, x_2\in N$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，即 $2x_1=2x_2$，则有 $x_1=x_2$。所以 f 是单射。所以 f 不是双射。

（3）$\mathrm{ran}f=Z$，所以 f 是满射。对于任意的 $x_1, x_2\in Z$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，即 $x_1+1=x_2+1$，则可得出 $x_1=x_2$。所以 f 是单射。所以 f 是双射。

小结

满射、单射和双射三种性质的定义、判断与证明。

$$\text{函数的性质}\left\{\begin{array}{l}\text{满射}\\ \text{单射}\\ \text{双射}\end{array}\right\}\longrightarrow \text{判断与证明}$$

5.3 常用函数

- 本节介绍几个常用函数。

5.3 常用函数

定义 5.7

（1）设 $f: A\to B$，若$\exists c\in B$，使得$\forall x\in A$，都有 $f(x)=c$，则称 $f: A\to B$ 是**常函数**。

（2）A 上的恒等关系 I_A 是从 A 到 A 的函数，称为 A 上的**恒等函数**，对于所有的 $x\in A$ 都有 $I_A(x)=x$。

（3）设 $<A,\le>$，$<B,\le>$ 为偏序集，$f: A\to B$，若$\forall x1, x2\in A$，如果 $x1<x2$ 就有 $f(x1)\le f(x2)$，则称 f 为**单调递增**的；若$\forall x1, x2\in A$，如果 $x1<x2$ 就有 $f(x1)<f(x2)$，则称 f 为**严格单调递增**的。类似地也可以定义**单调递减**和**严格单调递减**的函数，它们统称为**单调函数**。

5.3 常用函数

（4）设 A 为集合，对于任意的 $A' \subseteq A$，A' 的特征函数定义为

$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A' \\ 0 & x \in A - A' \end{cases}$$

（5）设 R 是 A 上的等价关系，令

$f: A \to A/R$ 且

$f(x) = [x]$，$\forall x \in A$

称 f 是从 A 到商集 A/R 的自然映射。

小结

本节介绍了常函数、恒等函数、集合的特征函数和自然映射等常用函数的定义与性质。

常用函数
- 常函数
- 恒等函数
- 集合的特征函数
- 自然映射
- 单调递增(减)函数和严格单调递增(减)函数

5.4　函数的运算

- 本节介绍函数的复合运算和逆运算及其基本性质和运算规律。

5.4.1 复合运算

函数的复合就是关系的复合。

定理 5.4 设 f、g 为函数，则 $f \circ g$ 也是函数，且具有以下性质：

（1）$\mathrm{dom}(f \circ g) = \{x \mid x \in \mathrm{dom}f \wedge f(x) \in \mathrm{dom}g\}$

（2）$\forall x \in \mathrm{dom}(f \circ g)$，有 $f \circ g(x) = g(f(x))$

例 5.12 令

$$f: R^{+} \to R, \quad f(x) = \ln x$$

$$g: R \to R, \quad g(x) = x+1$$

则有，

$$\mathrm{dom}(f \circ g) = R^{+}$$

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f \circ g), \quad f \circ g(x) = g(f(x)) = \ln x + 1$$

$$\mathrm{dom}(g \circ f) = (-1, +\infty)$$

$$\forall x \in \mathrm{dom}(g \circ f), \quad g \circ f(x) = f(g(x)) = \ln(x+1)$$

5.4.1 复合运算

推论 1 设 f ， g ， h 为函数，则 (f∘g)∘h 和 f∘(g∘h) 都是函数，且

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$$

推论 2 设 f: A→B ， g: B→C ，则 f∘g: A→C ，且对任意的 x∈A 有

$$f\circ g(x)=g(f(x))\text{。}$$

定理 5.5 设 f: A→B ， g: B→C ，

（ 1 ）如果 f: A→B ， g: B→C 都是满射的，则 f∘g: A→C 也是满射。

（ 2 ）如果 f: A→B ， g: B→C 都是单射的，则 f∘g: A→C 也是单射。

（ 3 ）如果 f: A→B ， g: B→C 都是双射的，则 f∘g: A→C 也是双射。

定理 5.5 说明函数的复合运算能够保持函数的满射、单射和双射等性质。但该定理的逆命题不为真 .

5.4.1 复合运算

定理 5.6 设 f: A→B ， g: B→C ，

（ 1 ）如果 f∘g: A→C 是满射，则 g: B→C 一定是满射。

（ 2 ）如果 f∘g: A→C 是单射，则 f: A→B 一定是单射。

（ 3 ）如果 f∘g: A→C 是双射，则 g: B→C 一定是满射， f: A→B 一定是单射。

例 5.14 已知 $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ ， $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ ， $C = \{z_1, z_2\}$ 。令

$$f = \{<x_1, y_1>, <x_2, y_2>, <x_3, y_2>\}$$

$$g = \{<y_1, z_1>, <y_2, z_2>, <y_3, z_2>\}$$

则有

$$f \circ g = \{<x_1, z_1>, <x_2, z_2>, <x_3, z_2>\}$$

可以看出 $g: B \to C$ 和 $f \circ g: A \to C$ 都是满射的，但 $f: A \to B$ 不是满射。满足定理 5.6（ 1 ）。

5.4.1 复合运算

定理 5.7 设 $f: A \to B$，则有

$$f = f \circ I_B = I_A \circ f$$

定理 5.7 说明了恒等函数在函数的复合运算中的特殊性质。特别有

$$\forall f \in A^A，f \circ I_A = I_A \circ f = f$$

5.4.2 逆运算

任何关系都存在逆关系，作为满足一定条件的二元关系，函数的逆关系不一定都是函数。例如令

$$f = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$$

可求得

$$f^{-1} = \{\langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, c\rangle\}\text{，}$$

显然 f 是函数，但 f 的逆关系 f^{-1} 不是函数。

5.4.2 逆运算

定理 5.8 设 $f: A \to B$ 是双射的，则 f^{-1} 是函数，并且是从 B 到 A 的双射函数。称双射函数 $f: A \to B$ 是可逆的，并称 f^{-1} 为 f 的反函数。

证：（ 1 ）先证 f^{-1} 是从 B 到 A 的函数 $f^{-1}: B \to A$ ，且 f^{-1} 是满射的。

由关系的逆运算的性质（定理 4.4 ）得

$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B$

$\mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A$

f^{-1} 是从 B 到 A 的关系。

对任意的 $x \in \mathrm{dom}\, f^{-1}$ ，若同时存在 y_1, y_2

$\langle x, y_1 \rangle \in f^{-1} \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y_1, x \rangle \in f \wedge \langle y_2, x \rangle \in f$ **（关系逆运算的定义）**

$\Rightarrow y_1 = y_2$ **（ f 是单射的）**

所以 $f^{-1}: B \to A$ 是函数。

又由于 $\mathrm{ran}\, f^{-1} = A$ ，所以 $f^{-1}: B \to A$ 是满射的。

5.4.2 逆运算

（ 2 ）再证 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是单射的。

对任意的 $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f^{-1}$ ，若有

$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$

$\Leftrightarrow \langle x_1, y\rangle \in f^{-1} \wedge \langle x_2, y\rangle \in f^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y, x_1\rangle \in f \wedge \langle y, x_2\rangle \in f$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ （ f 是函数 ）

所以 f^{-1} 是单射的。

由（ 1 ）、（ 2 ）得 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是双射的。

证毕。

5.4.2 逆运算

定理 5.9　对任何双射函数 f: A→B 及其反函数 f^{-1}: B→A，它们的复合函数都是恒等函数，且满足

$$f \circ f^{-1} = I_A \quad , \quad f^{-1} \circ f = I_B$$

证：由定理 5.4 的推论 2 得

$f^{-1} \circ f: B \to B$ ，$f \circ f^{-1} : A \to A$

对任意的 $<x, y>$ ，

$<x, y> \in f \circ f^{-1}$

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \wedge <u, y> \in f^{-1})$

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \wedge <y, u> \in f)$

$\Rightarrow x = y \wedge x, y \in A$ （f *是单射*）

$\Rightarrow <x, y> \in I_A$

所以 $f \circ f^{-1} \subseteq I_A$。

5.4.2 逆运算

对任意的 $<x, y>$ ，

$<x, y> \in I_A$

$\Rightarrow x = y \wedge x, y \in A$

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \wedge <y, u> \in f)$ （ $f: A \to B$ ）

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \wedge <u, y> \in f^{-1})$

$\Rightarrow <x, y> \in f \circ f^{-1}$

所以 $I_A \subseteq f \circ f^{-1}$ 。所以有 $f \circ f^{-1} = I_A$ 。

同理可证 $f^{-1} \circ f = I_B$

证毕。

5.4.2 逆运算

定理 5.10 设 f: A→B ，g: B→A ，则 $f^{-1}=g$ 当且仅当 $f\circ g=I_A$ 且 $g\circ f=I_B$ 。

证：必要条件：

已知 $g=f^{-1}$ ，这就是说 f 是可逆的，则有

$f\circ g=f\circ f^{-1}=I_A$

$g\circ f=f^{-1}\circ f=I_B$

充分条件：

已知 $f\circ g=I_A$ 且 $g\circ f=I_B$ ，由于 I_A 和 I_B 均为双射，由定理 5.6 知，f 和 g 都是双射的。因此，f 和 g 都是可逆的，均有反函数存在，于是

$g=I_B\circ g=(f^{-1}\circ f)\circ g=f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ I_A=f^{-1}$

证毕。

小结

本节介绍函数在复合运算和逆运算中所特有的性质：

（1）函数的复合仍然是函数，但函数的逆不一定是函数，只有双射函数的逆才是函数，并且是双射的。

（2）函数的复合运算能够保持函数的满射、单射和双射等性质。

（3）反函数的定义与性质。

函数的运算
- 复合
  - 函数的复合仍然是函数
  - $\forall x \in \mathrm{dom}(f \circ g), f \circ g(x) = g(f(x))$
  - 函数的复合运算能够保持函数的满射、单射和双射等性质
- 逆
  - 函数的逆关系不一定都是函数
  - 只有双射函数 f 是可逆的，称 f^{-1} 为反函数，也是双射的
  - 对双射函数 $f: A \to B$ 有 $f \circ f^{-1} = I_A$ ，$f^{-1} \circ f = I_B$ 。

作业

补充习题 5

1．设 $f:N\to N$，且

$$f(x)=\begin{cases}1 & 若x为奇数\\ \frac{x}{2} & 若x为偶数\end{cases}$$

求 $f(0)$，$f(\{0\})$，$f(1)$，$f(\{1\})$，$f(\{0,2,4,6,\cdots\})$，$f(\{4,6,8\})$，$f(\{1,3,5,7\})$.

2．判断下列函数中哪些是满射的？哪些是单射的？哪些是双射的？

(1) $f:N\to N, f(x)=x^2+2$

(2) $f:N\to N, f(x)=(x)\bmod 3$, x除以3的余数

(3) $f:N\to N, f(x)=\begin{cases}1,若x为奇数\\0,若x为偶数\end{cases}$

(4) $f:R\to R, f(x)=x^2-2x-15$

3．对于给定的 A，B 和 f，判断 f 是否为从 A 到 B 的函数 $f:A\to B$.如果是，说明 f 是否为单射、满射、双射的

(1) $A=\{1,2,3\}, B=\{p,q,r\}, f=\{\langle 1,q\rangle,\langle 2,q\rangle,\langle 3,q\rangle\}$

(2) $A=B=R, f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

(3) $A=N\times N\times N, B=N, f(\langle x,y,z\rangle)=x+y-z$

作业

补充习题 5

4.设 $f:R\to R, f(x)=x^2-2$。 $g:R\to R, g(x)=x+4$

$h:R\to R, h(x)=x^3-1$

(1) 求 $g\circ f, f\circ g$.

(2) 问 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 是否为单射、满射、双射的？

(3) f,g,h 中那些函数有反函数？如果有，求出这些反函数

5.设 f,g 是从 N 到 N 的函数，且

$$f(x)=\begin{cases} x+1, x=0,1,2,3 \\ 0, x=4 \\ x, x\geq 5 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, x\text{为偶数} \\ 3, x\text{为奇数} \end{cases}$$

(1) 求 $f\circ g$;

(2) 说明 $f\circ g$ 是否为单射、满射、双射的.

6.设 $f:Z\to Z, f(x)=(x)\bmod n$. 在 Z 上定义等价关系 R，$\forall x,y\in Z$

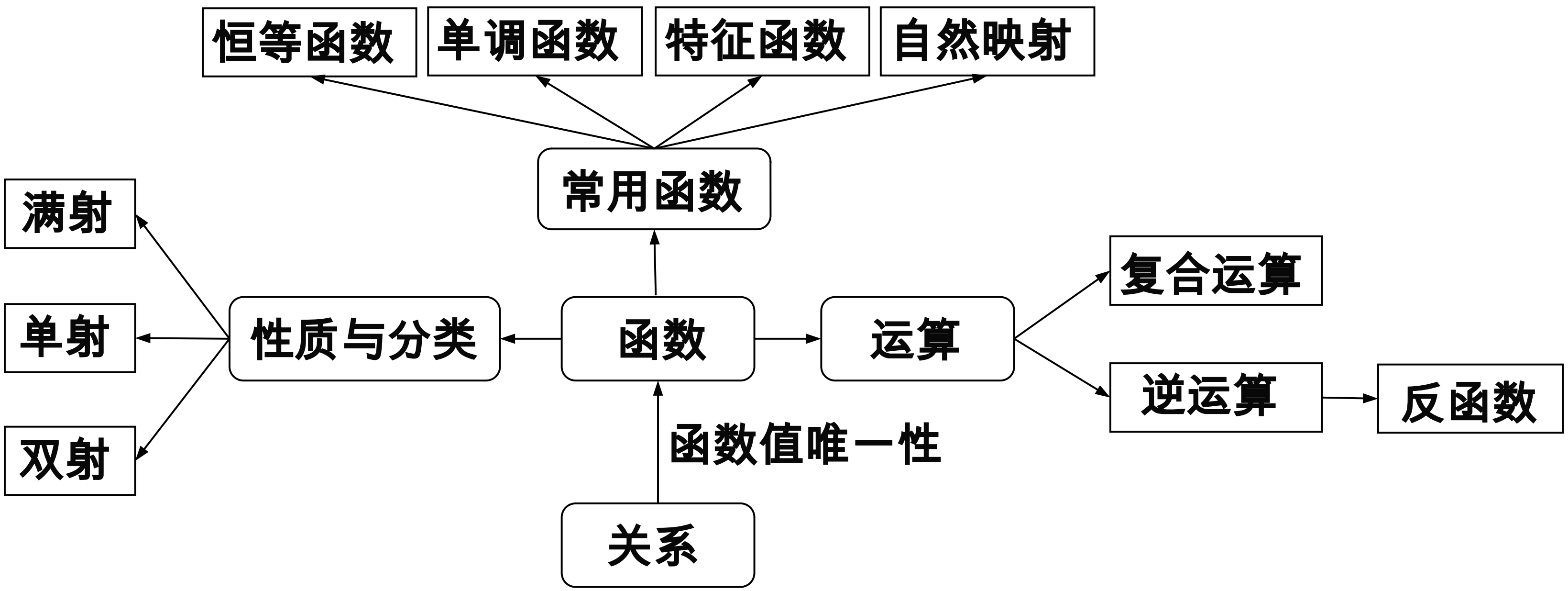
$$\langle x,y\rangle\in R \Leftrightarrow f(x)=f(y)$$

(1)计算 $f(Z)$.

(2)确定商集 $Z/_R$.

本章小结

在函数的定义中给出了一个关系 R 成为函数所必须满足的条件，介绍了一些如恒等函数、常函数、特征函数等常用函数。本章重点介绍了函数的运算、性质与分类。



常见题型

1）根据集合表示或图形表示等判断某个关系是否是函数。

2）证明函数间的关系如相等、包含等。

3）求函数的像和完全原像。

4）证明或判断函数的性质，即是否是满射的、单射的或双射的。

5）函数的复合运算和逆运算。

证明方法

1. 证明 $f:A\to B$ 是满射的方法： 任取 $y\in B$, 找到 x (即给出 x 的表示) 或者证明存在 $x\in A$ ，使得 $f(x)=y$.

2. 证明 $f:A\to B$ 是单射的方法

方法一 $\forall x_1,x_2\in A$,

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$ … $\Rightarrow x_1=x_2$

推理前提 推理过程 推理结论

方法二 $\forall x_1,x_2\in A$,

$x_1\neq x_2 \Rightarrow$ … $\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

推理前提 推理过程 推理结论

证明方法

3. 证明 $f:A\to B$ 不是满射的方法： 找到 $y\in B$, $y\notin \operatorname{ran} f$

4. 证明 $f:A\to B$ 不是单射的方法：找到 $x_1,x_2\in A$, $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$