


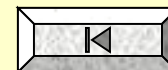


第七讲 泰勒 (*Taylor*) 级数

罗朗 (*Laurent*) 级数

§4.3 泰勒 (*Taylor*) 级数

-  1. 泰勒展开定理
-  2. 展开式的唯一性
-  3. 简单初等函数的泰勒展开式



1. 泰勒 (*Taylor*) 展开定理

由 §4.2 幂级数的性质知：一个幂级数的和函数在它的收敛圆内部是一个解析函数。

现在研究与此相反的问题：

一个解析函数能否用幂级数表达？

(或者说，一个解析函数能否展开成幂级数？解析函数在解析点能否用幂级数表示？)

以下定理给出了肯定回答：

任何解析函数都一定能用幂级数表示。

定理 (泰勒展开定理)

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $z_0 \in D$, R 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离 \Rightarrow 当 $|z - z_0| < R$ 时,

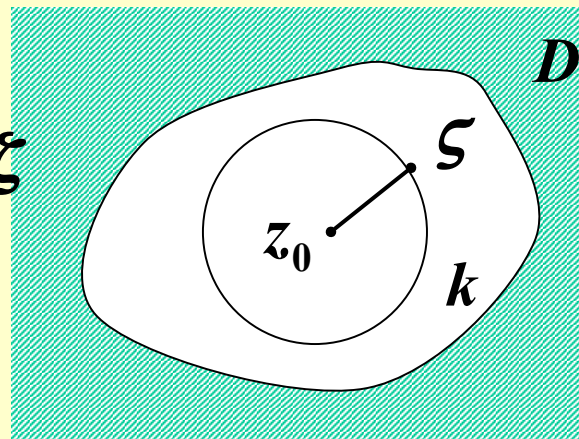
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (1) \quad \begin{array}{l} f(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 处} \\ \text{的 } \underline{\text{Taylor 级数}} \end{array}$$

其中: $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad n = 0, 1, 2, \dots$

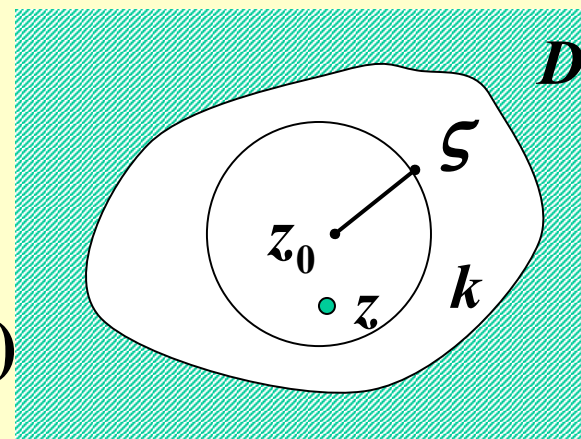
分析
:

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

$k: |\xi - z_0| = r$ 代入 (1) 得



$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right) d\xi \quad 1)
\end{aligned}$$



$$\text{又 } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad 2)$$

比较1),2)有 $\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n (*)$

$$\because \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = q < 1,$$

注意到 $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}},$

$$\therefore \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n + \cdots \right] \quad (2)$$

故 $\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \quad \text{---} (*) \text{ 得证!}$$

证明 设 $k : |\xi - z_0| = r, \{\xi \mid |\xi - z_0| \leq r\} \subset D$,
(不讲) z 为 k 内任一点, 由 *Cauchy* 积分公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \because \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = q < 1,$$

$$\therefore \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^2 + \cdots \right. \\ \left. + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n + \cdots \right] \quad (3)$$

(不讲) 两端乘以 $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$, 沿着 k 逐项积分得,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi \\ &+ \frac{z - z_0}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi + \cdots \\ &+ \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi + \cdots \\ &= f(z_0) + f'(z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \cdots (4) \end{aligned}$$

--函数 $f(z)$ 在 z_0 处的 *Talor* 级数

级数(4)的收敛范围是以 z_0 为中心, r 为半径的圆域 $|\xi - z_0| < r$, 圆 k 的半径 r 可以任意增大, 只要圆 k 及其内部包含在 D 内即可, $\therefore f(z)$ 在解析点 z_0 处的 *Taylor* 级数收敛半径至少等于从 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离. 证毕!

证明
(不讲)

□ (1) 若 $f(z)$ 有奇点, 那么 $f(z)$ 在解析点 z_0 的 *Talor* 展开式的收敛半径 R 等于从 z_0 到 $f(z)$ 的最近的一个奇点 α 之间的距离, 即,

$$R = |z_0 - \alpha|$$

(2) α 在收敛圆上, 这是因为 $f(z)$ 在收敛圆内解析, 所以奇点 α 不可能在收敛圆内. 又 \because 奇点 α 不可能在收敛圆外, 不然的话, 收敛半径还可以扩大, 因此, 奇点 α 只能在收敛圆周上.

2. 展开式的唯一性

利用泰勒级数可把解析函数展开成幂级数，这样的展开式是否唯一？

结论 解析函数展开成幂级数是唯一的，就是它的 *Taylor* 级数。

事实上，设 $f(z)$ 用另外的方法展开为幂级数：

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

则 $f(z_0) = a_0$ ，再由幂级数的逐项求导性质得，

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + \cdots + na_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots \Rightarrow f'(z_0) = a_1$$

$$\cdots, \text{依此类推得}, a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

由此可见，任何解析函数展开成幂级数就是 *Taylor* 级数，因而是唯一的。

当 $z_0 = 0$ 时, *Taylor* 级数为

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \cdots$$

函数展开成 Taylor 级数的方法：

- 代公式 --- 直接法
- 由展开式的唯一性，运用级数的代数运算、分析运算和 已知函数的展开式来展开 --- 间接法

3. 简单初等函数的泰勒展开式

例 1 求 $f(z) = e^z, \sin z, \cos z$ 在 $z = 0$ 的 *Talor* 展开式.

解 $\because (e^z)^{(n)} \Big|_{z=0} = e^z \Big|_{z=0} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

$$\therefore e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$\because e^z$ 在复平面上解析

\therefore 该级数的收敛半径 $R = +\infty$.

$$\therefore \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(zi)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-zi)^n}{n!} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2i^{2k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)!!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)!!}$$

$$\therefore \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)!!}$$

$$\text{又 } \cos z = (\sin z)'$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$\therefore \sin z, \cos z$ 在全平面上解析, \therefore 它们的半径 $R = \infty$

□ 上述求 $\sin z, \cos z$ 展开式的方法即为间接法.

例 2 把下列函数展开成 z 的幂级数:

$$(1) f(z) = \frac{1}{1+z} \quad (2) f(z) = \frac{1}{(1+z)^2} \quad (3) f(z) = \ln(1+z)$$

解 (1) $\because \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad |z| < 1$

$$\therefore \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = 1 - z + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots \quad |z| < 1$$

(2) 由幂级数逐项求导性质得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^2} &= \frac{d}{dz} \left[-\frac{1}{1+z} \right] = \frac{d}{dz} \left[-1 + z - z^2 + \cdots + (-1)^{n-1} z^n + \cdots \right] \\ &= 1 - 2z + 3z^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n z^{n-1} + \cdots \quad |z| < 1\end{aligned}$$

(3) 在收敛圆 $|z| = 1$ 内任意取一条从 $0 \rightarrow z (|z| < 1)$ 的路径 c , 将(1)的展开式两边沿 c 逐项积分得：

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z} = \int_0^z dz - \int_0^z z dz + \cdots + \int_0^z (-1)^n z^n dz + \cdots$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{3} z^3 - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad |z| < 1$$

□ (1) 另一方面，因 $\ln(1+z)$ 在从 $z=-1$ 向左沿负实轴剪开的平面内解析， $\ln(1+z)$ 离原点最近的一个奇点是 $-1, \therefore$ 它的展开式的收敛范围为 $|z|<1$.

(2) 在实数域中

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

为什么它的收敛半径 $R=1$, 在实数域中的不容易

看清楚, 在复数域中容易看出 $\therefore \frac{1}{1+z^2}$ 有两个奇点

$$z = \pm i, \therefore R = 1$$

定理





(1) 函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 z_0 的某一邻域内可展成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

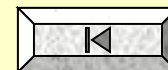
(2) 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 D 内可展成 幂级数.

小结： $f(z)$ 在点 z_0 解析

- (1) $f(z)$ 在点 z_0 的某一邻域内可导。
- (2) $f(z)$ 的实部和虚部在点 z_0 的某一邻域内有连续偏导数且满足 $C - R$ 方程。
- (3) $f(z)$ 在点 z_0 的某一邻域内连续且沿邻域内的任一条正向封闭路线的积分为 0。
- (4) $f(z)$ 在点 z_0 的某一邻域内可展成幂级数。

§4.4 罗朗 (*Laurent*) 级数

-  1. 预备知识
-  2. 双边幂级数
-  3. 函数展开成双边幂级数
-  4. 展开式的唯一性



由 §4.3 知, $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 $f(z)$ 总可以在 z_0 的某一个圆域 $|z - z_0| < R$ 内展开成 $z - z_0$ 的幂级数。

若 $f(z)$ 在 z_0 点不解析, 在 z_0 的邻域中就不可能展开成 $z - z_0$ 的幂级数, 但如果在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析, 那么, $f(z)$ 能否用级数表示呢?

例如, $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0, z=1$ 都不解析, 但在

圆环域: $0 < |z| < 1$ 及 $0 < |z-1| < 1$ 内处处解析。

当 $0 < |z| < 1$ 时,

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \stackrel{\because |z| < 1}{=} \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

当 $0 < |z - 1| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{1-z} \left[\frac{1}{1-(1-z)} \right] \\ &\stackrel{\because |z-1|<1}{=} \frac{1}{1-z} \left[1 + (1-z) + (1-z)^2 + \cdots + (1-z)^n + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{1-z} + 1 + (1-z) + \cdots + (1-z)^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

由此推想，若 $f(z)$ 在 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析， $f(z)$ 可以展开成级数，只是这个级数含有负幂次项，即

$$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 \\ &\quad + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

本节将讨论在以 z_0 为中心的圆环域内解析的函数的级数表示法。它是后面将要研究的解析函数在**孤立奇点**邻域内的性质以及定义**留数**和计算留数的基础。

1. 预备知识

Cauchy 积分公式的推广到复连通域

--- 见第三章第 18 题

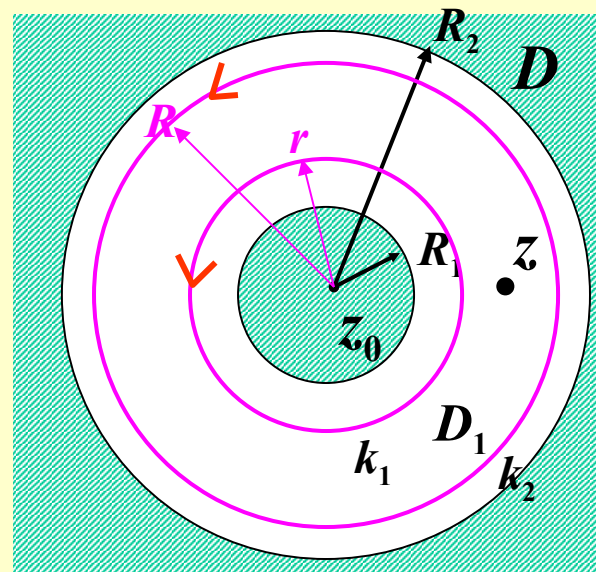
设 $f(z)$ 在 $D: R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$ 内

解析. 作圆周: $k_1: |z - z_0| = r$,

$k_2: |z - z_0| = R$, 且 $r < R$,

$k_1, k_2 \subset D, D_1: r < |z - z_0| < R$,

对 $\forall z \in D_1$ 有,



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{k_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{k_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

2. 双边幂级数 --- 含有正负幂项的级数

定义 形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \cdots + c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1} (z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1 (z - z_0) + \cdots + c_n (z - z_0)^n + \cdots (1)$$

其中 z_0 及 $c_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 都是常数 --- **双边幂级数**

正幂项 (包括常数项) 部分 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \cdots + c_n (z - z_0)^n + \cdots (2)$$

负幂项部分 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = c_{-1} (z - z_0)^{-1} + \cdots + c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \cdots (3)$$

级数 (2) 是一幂级数，设收敛半径为 R_2 ，则级数在 $|z - z_0| = R_2$ 内收敛，且和为 $s(z)_+$ ；在 $|z - z_0| = R_2$ 外发散。

对于级数 (3)，若令 $\xi = \frac{1}{z - z_0}$ ，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n = c_{-1} \xi + c_{-2} \xi^2 + \cdots + c_{-n} \xi^n + \cdots (4)$$

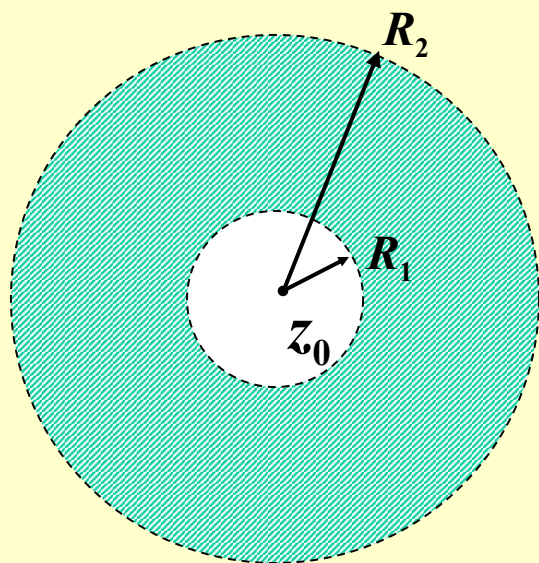
对变数 ξ 级数 (4) 为幂级数，设其收敛半径为 R ，则当 $|\xi| < R$ 级数收敛， $|\xi| > R$ 级数发散。

将 $\xi = \frac{1}{z - z_0}$ 代回得， $\left| \frac{1}{z - z_0} \right| < R \stackrel{\text{令}}{=} \frac{1}{R_1}$ ，则级数 (4)

当 $|z - z_0| > R_1$ 收敛，且和为 $s(z)_-$ ；当 $|z - z_0| < R_1$ 发散。

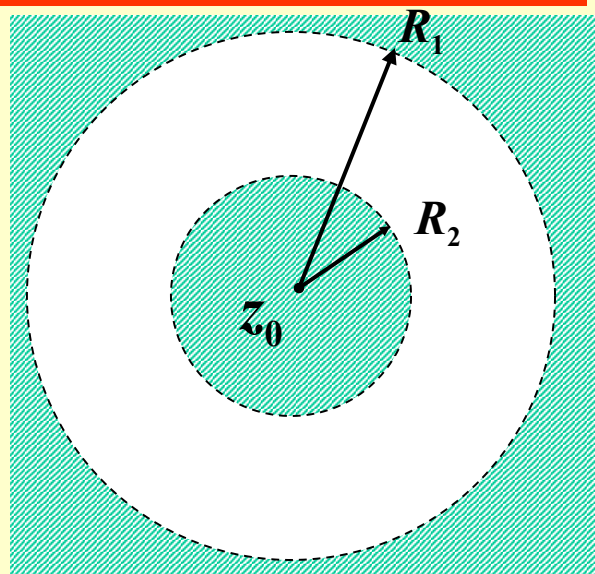
当且仅当 $R_1 < R_2$ 时，级数(2)及(3)有公共收敛
区域即圆环域： $R_1 < |z - z_0| < R_2$ ，此时，

称 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ 收敛，且和 $s(z) = s(z)_+ + s(z)_-$ 。



$$R_1 < R_2$$

有公共收敛域



$$R_1 > R_2$$

无公共收敛域

□ (1) 当 $R_1 > R_2$ 时，称 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ 处处发散。

(2) 在圆环域的边界 $|z - z_0| = R_1, |z - z_0| = R_2$ 上，

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ 可能有些点收敛，有些点发散。

(3) R_1 可以 $= 0$ R_2 可以 $= \infty$ ，此时，

收敛域为 $0 < |z - z_0| < \infty$

(4) 级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 在 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的

和函数是解析的而且可以逐项求积和逐项求导。

3. 函数展开成双边幂级数

定理 设 $f(z)$ 在 $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析, 则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (5)$$

称为 $f(z)$ 在 $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的 $Laurent$ 级数

称为 $f(z)$ 在 $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的 $Laurent$ 展开式

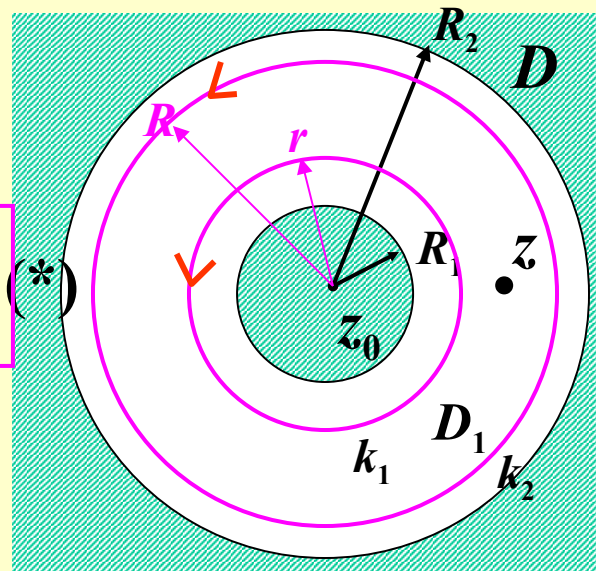
其中: $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \quad (5')$

c 是 D 内绕 z_0 的任何一条简单闭曲线 .

证明 由复连通域上的 *Cauchy* 积分公式：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{k_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{k_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (*)$$

记为 I_1 记为 I_2



$$\therefore \text{当 } \xi \in k_2 \text{ 时 } \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1,$$

重复§ 3的推导得：

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{k_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (*1)$$

$$\therefore \text{当 } \xi \in k_1 \text{ 时 } \left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| \overset{\text{记为}}{=} q < 1,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-\zeta} &= \frac{1}{z-z_0-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0} + \frac{\zeta-z_0}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} + \cdots\end{aligned}$$

两边乘以 $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$, 并沿 k_1 逐项积分得:

$$\begin{aligned}-I_2 &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{k_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{(z-z_0)^{-1}}{2\pi i} \oint_{k_1} f(\zeta) d\zeta \\ &+ \frac{(z-z_0)^{-2}}{2\pi i} \oint_{k_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-1}} d\zeta + \cdots + \frac{(z-z_0)^{-n}}{2\pi i} \oint_{k_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} d\zeta \\ &+ \cdots = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_{-2}(z-z_0)^{-2} + \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots \quad (*2)\end{aligned}$$

式 (*1),(*2) 中系数 c_n 的积分分别是在 k_2 , k_1 上进行的, 在 D 内取绕 z_0 的简单闭曲线 c , 由复合闭路定理可将 c_n 写成统一式子 :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{证毕 !}$$

级数中正整次幂部分和负整次幂部分分别称为洛朗级数的解析部分和主要部分。

级数中正整次幂部分和负整次幂部分分别称为洛朗级数的解析部分和主要部分。

□ (1) 当 $n \geq 0$ 时, 系数 c_n 形式上与高阶导数公式相同, 但 $c_n \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $\because f(z)$ 在 c 内不是处处解析的.

(2) 在许多实际应用中, 经常遇到 $f(z)$ 在奇点 z_0 的邻域内解析, 需要把 $f(z)$ 展成级数, 那

么

就利用洛朗 (*Laurent*) 级数来展开。

4. 展开式的唯一性

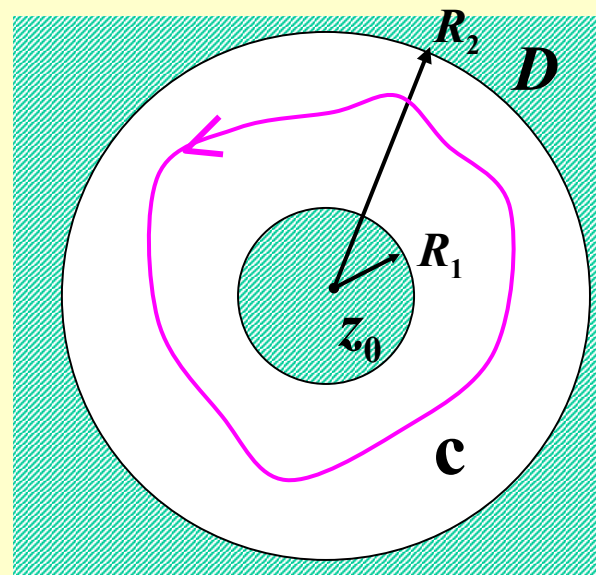
结论 一个在某一圆环域内解析的函数展开为含有正、负幂项的级数是唯一的，这个级数就是 $f(z)$ 的洛朗级数。

事实上 设 $f(z)$ 在 $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析，

$$f(z) \stackrel{\text{可表示为}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (6)$$

设 c 为 D 内任何一条绕 z_0 的简单闭曲线， $\forall \zeta \in c$

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\zeta - z_0)^n$$



$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\xi - z_0)^n$$

将上式两边乘以 $\frac{1}{(\xi - z_0)^{P+1}}$

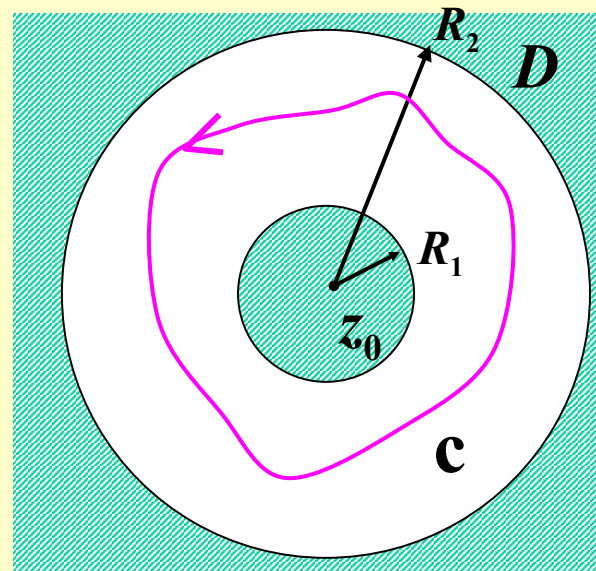
(P 为任一整数),

并沿 c 的正向积分得 :

$$\oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{P+1}} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_c \frac{1}{(\xi - z_0)^{P+1-n}} d\xi = 2\pi i a_p$$

$$\text{解得 : } a_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{P+1}} d\xi$$

由此可知,在圆环域内解析的函数展开成级数就是 *Laurent* 级数.



□ 由唯一性，将函数展开成 *Laurent* 级数，可用间接法。在大都数情况，均采用这一简便的方法求函数在指定圆环域内的 *Laurent* 展开式，只有在个别情况下，才直接采用公式 (5') 求 *Laurent* 系数的方法。

例 1 求 $\frac{\sin z}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 展开成洛朗级数。

解

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad 0 < |z| < +\infty$$
$$= \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

例 2 将 $\frac{e^z}{z^3}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展开成 *Laurent* 级数.

解

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^3} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\end{aligned}$$

例 3 将 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展成 *Laurent* 级数.

解 \because 在复平面上, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots$

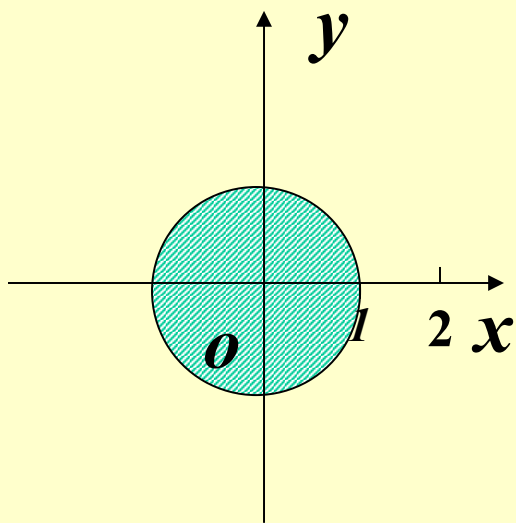
$$\text{令 } t = \frac{1}{z}, e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

$(0 < |z| < +\infty)$

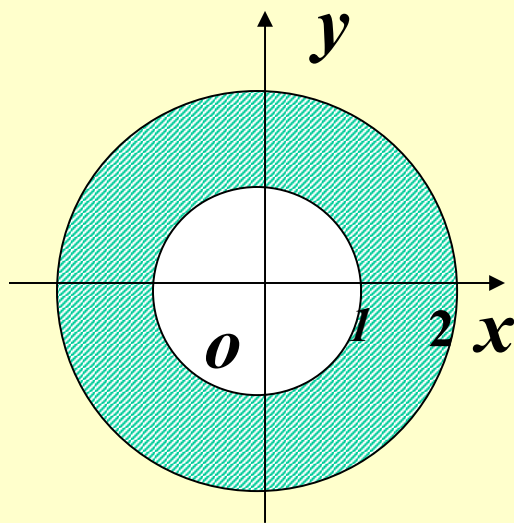
例 4 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在以下圆环域

(i) $0 < |z| < 1$; (ii) $1 < |z| < 2$; (iii) $2 < |z| < +\infty$

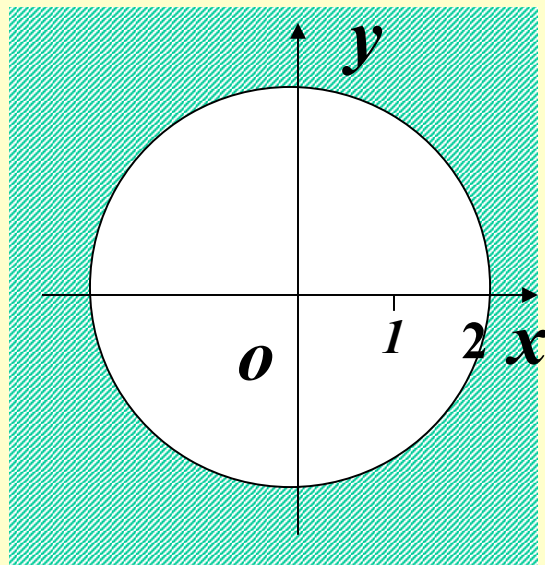
内展开成 $z_0 = 0$ 的 *Laurent* 级数。



(i) $0 < |z| < 1$



(ii) $1 < |z| < 2$



(iii) $2 < |z| < +\infty$

解： $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$

(i) $0 < |z| < 1 \quad \because |z| < 1 \quad \therefore \left| \frac{z}{2} \right| < 1$

故 $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$$= (1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots) - \frac{1}{2} (1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}})z^n$$

没有奇点

$$(ii) 1 < |z| < 2 \quad \because |z| > 1 \quad \therefore \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \quad \text{又} \because |z| < 2 \quad \therefore \left| \frac{z}{2} \right| < 1$$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
 &= -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots \right) \\
 &= \cdots - \frac{1}{z^n} - \frac{1}{z^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \cdots \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}
 \end{aligned}$$

$$(iii) 2 < |z| < +\infty \Rightarrow \because |z| > 2 \quad \therefore \left| \frac{2}{z} \right| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$= -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots$$

注意首项

$$= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n}$$

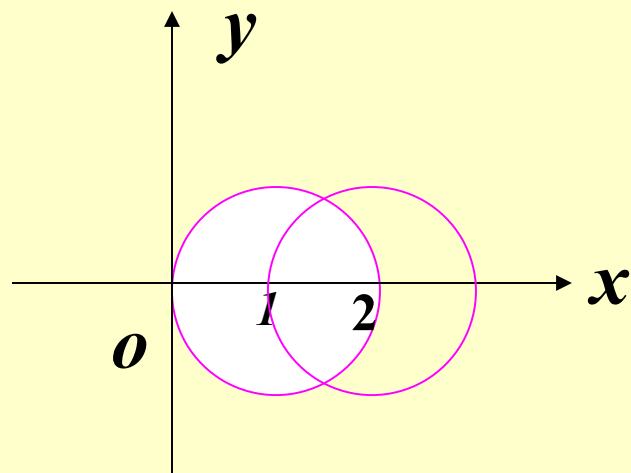
小结：把 $f(z)$ 展成洛朗 (*Laurent*) 级数的方法

(1) 对于无理函数及其他初等函数的洛朗展开式，可以利用已知基本初等函数的泰勒展开式，经过代换、逐次求导、逐次积分等计算来获得。

(2) 对于有理函数的洛朗展开式，首先把有理函数分解成多项式与若干个最简分式之和，然后利用已知的几何级数，经计算展成需要的形式。

例 5 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$

在以点 $z=1, z=2$ 的去心邻域内展开成 *Laurent* 级数。



解 (1) 在 (最大的) 去心邻域 $0 < |z-1| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} \\ &= -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \\ &= -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-2)^2 - \dots \end{aligned}$$

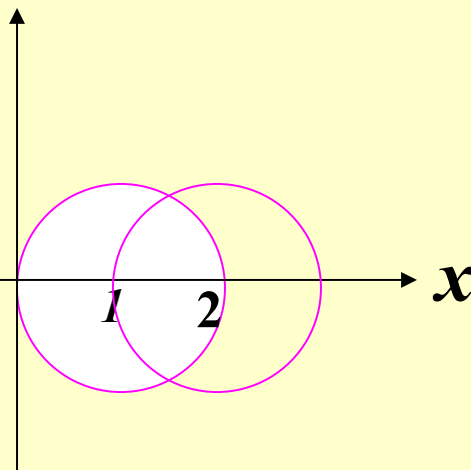
(2) 在 (最大的) 去心邻域

$$0 < |z - 2| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)}$$

$$= \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n$$

$$= \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + \cdots$$



练习 将 $f(z) = \frac{1}{1-z} e^z$ 在区域 (1) $|z| < 1$,

(2) $0 < |z-1| < +\infty$ 内展开成幂级数。

□ (1)由此可以看出同一个函数由许多种不同的级数展式，这是因为在不同的区域上的展式，这与唯一性并不矛盾。

(2) 根据区域判别级数方式：

在圆域内需要把 $f(z)$ 展成泰勒 (Taylor) 级数，

在环域内需要把 $f(z)$ 展成洛朗 (*Laurent*) 级数。



(3) *Laurent* 级数与 Taylor 级数的不同点：

- Taylor 级数先展开求 R ，找出收敛域。
- *Laurent* 级数先求 $f(z)$ 的奇点，然后以 z_0

0

为中心，奇点为分隔点，找出 z_0 到无穷远

点的所有使 $f(z)$ 解析的环，在环域上展

成

级数

作业

- P143 12(1)(3), 16(2)(3)