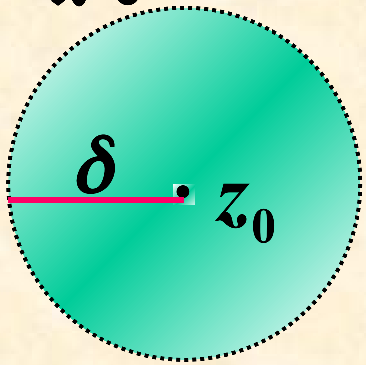
§4. 区 域

- 1. 区域的概念
- 2. 简单曲线(或 Jordan 曲线)
- 3. 单连通域与多连通域

1. 区域的概念

•邻域

复平面上以 z_0 为中心，任意 $\delta>0$ 为半径的圆 $|z-z_0|<\delta$（或 $0<|z-z_0|<\delta$）内部的点的集合称为点 z_0 的 δ（去心）邻域。



记为 $U(z_0,\delta)$ $(\mathring{U}(z_0,\delta))$ 即，

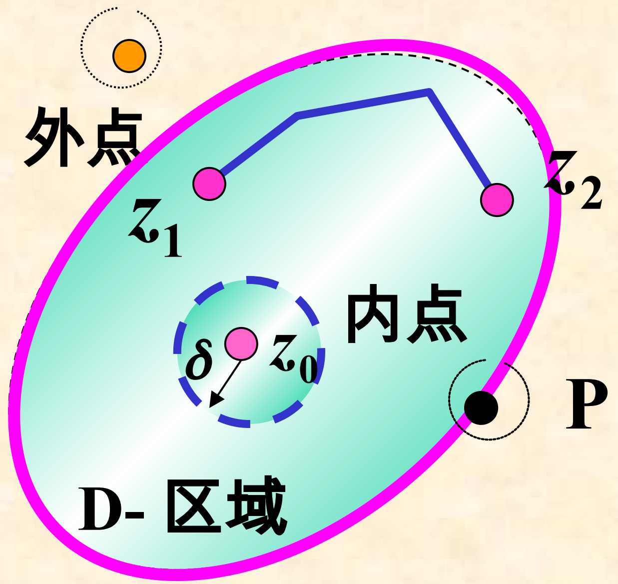
$$U(z_0,\delta)=\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$$

$$(\mathring{U}(z_0,\delta)=\{z \mid 0<|z-z_0|<\delta\})$$

设 G 是一平面上点集

内点 对任意 z_0 属于 G，若存在 $U(z_0,\delta)$，使该邻域内的所有点都属于 G，则称 z_0 是 G 的内

开集 若 G 内的每一点都是内点，则称 G 是开集。



•**区域** 设 D 是一个开集，且 D 是连通的，称 D 是一个区域。

连通是指 D 中任意两点均可用完全属于 D 的折线连接.

边界与边界点 已知点 P 不属于 D ，若点 P 的任何邻域中都包含 D 中的点及不属于 D 的点，则称 P 是 D 的边界点；D 的所有边界点组成 D 的边界。

•**闭区域**　区域 D 与它的边界一起构成闭区域，记为 $\overline{D}$.

有界区域与无界区域

若存在 $R>0$, 对任意 $z\in$D, 均有

$z\in G=\{z \mid |z|<R\}$，则 D 是有界区域；否则无界。

$$\left|z-z_0\right|<r$$

表示以 z_0 为圆点,以 r 为半径的圆内所有的点.

$\operatorname{Re} z = \alpha, \operatorname{Im} z = \beta$表示分别平行于y轴和x轴的直线.

$\operatorname{Re} z > 0$表示右半复平面,

$\operatorname{Im} z < 0$表示下半复平面.

$r_1 < |z - z_0| < r_2$ 表示一个圆环,而且是有界的.

它的边界由两个圆周$|z - z_0| = r_2, |z - z_0| = r_1$组成,

如果在其中去掉一个或几个点,它仍然是区域,

只是边界增加了一个或几个点.

2. 简单曲线（或 Jardan 曲线）

平面上一条连续曲线可表示为：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \le t \le b), \text{实变函数} x(t)、y(t) \in C[a,b]$$

令 $z(t)=x(t)+iy(t) \quad a\le t\le b$；

则曲线方程可记为：$z=z(t)$ ， $a\le t\le b$

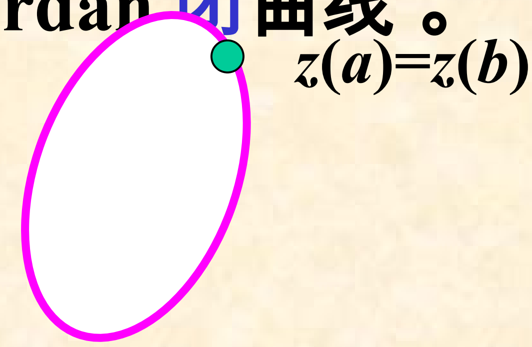
若 $x'(t)、y'(t) \in C[a,b]$ 且 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$

则称该曲线为光滑的.

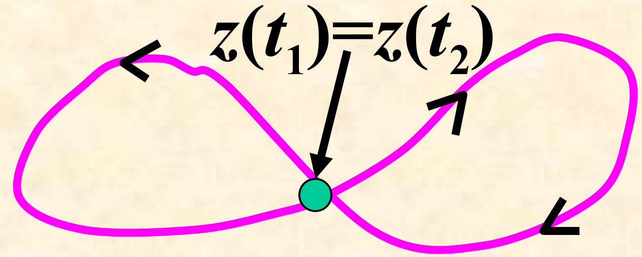
有限条光滑曲线相连接构成一条分段光滑曲线。

重点　设连续曲线C：$z=z(t)$，$a\le t\le b$，对于 $t_1\in(a,b)$, $t_2\in[a,b]$, 当 $t_1\neq t_2$ 时，若 $z(t_1)=z(t_2)$，称 $z(t_1)$ 为曲线C的重点。

定义　称没有重点的连续曲线C为简单曲线或 Jardan 曲线；若简单曲线C满足 $z(a)=z(b)$ 时，则称此曲线C是简单闭曲线或 Jordan 闭曲线。



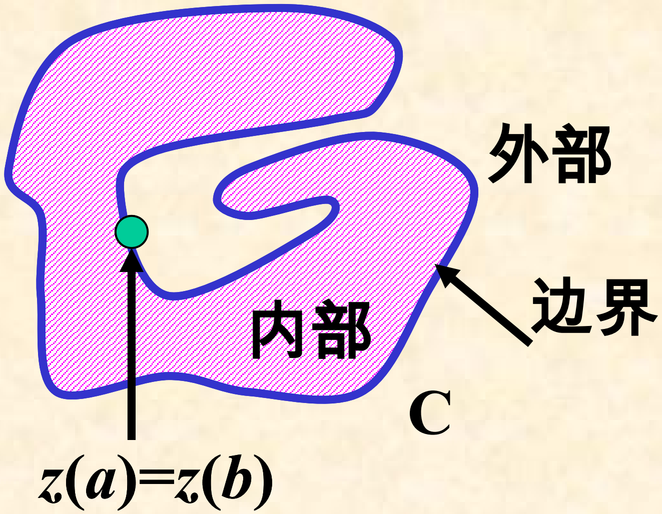
简单闭曲线



不是简单闭曲线

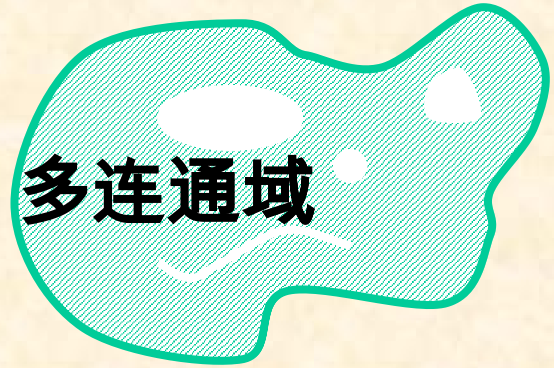
简单闭曲线的性质

任一条简单闭曲线 C：$z=z(t)$，$t\in[a，b]$，把复平面唯一地分成三个互不相交的部分：一个是有界区域，称为 C 的内部；一个是无界区域，称为 C 的外部；还有一个是它们的公共边界。



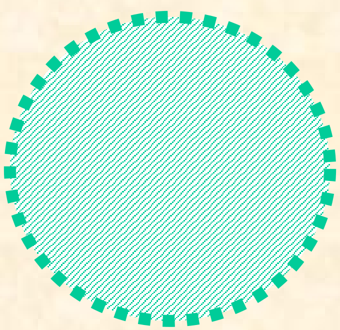
3. 单连通域与多连通域

定义 复平面上的一个区域 B，如果 B 内的任何简单闭曲线的内部总在 B 内，就称 B 为单连通域；非单连通域称为多连通域。



例如 $|z|<R$（$R>0$）是单连通的；

$0\le r<|z|\le R$ 是多连通的。



单连通域

多连通域

作业　习题一

P21　　2

3（1、2、3、4）

4（1、3、5、7）

9（1、3、4）

10（1、3、5）

§5. 复变函数

- 1. 复变函数的定义
- 2. 映射的概念
- 3. 反函数或逆映射

1. 复变函数的定义 — 与实变函数定义相类似

定义 设G是一个复数$z = x + iy$的非空集合,存在法则f,使得 $\forall z \in G$,就有一个或几个$w = u + iv$与之对应,则称复变数w是复变数z的函数（简称复变函数）记作 $w = f(z)$.

 若$z \to$ 一个w值，称$f(z)$是单值函数;

$z \to$ 多个w值，称$f(z)$是多值函数.

今后无特别声明，所讨 论的函数均为单值函数。

G — $f(z)$的定义集合，常常是平面区域（定义域）

$G^* = \{w \mid w = f(z), z \in G\}$ —函数值集合

$$\because \; z = x + iy \leftrightarrow (x, y);\; w = u + iv \leftrightarrow (u, v)$$

$$\therefore w = f(z) = f(x + iy)$$

$$= u(x, y) + iv(x, y)$$

故 $u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$

$$\boxed{w = f(z) = u + iv \leftrightarrow u = u(x, y) \quad v = v(x, y)}$$

例 1 $w=z^2$　令$z=x+iy$　$w=u+iv$

则 $w=(u+iv)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

$\therefore w=z^2 \leftrightarrow u=x^2-y^2 \quad v=2xy$

例 2若已知 $f(z)=x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)+iy\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

将 $f(z)$表示成 z 的函数.

设$z=x+iy$,则$x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z}),\ y=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

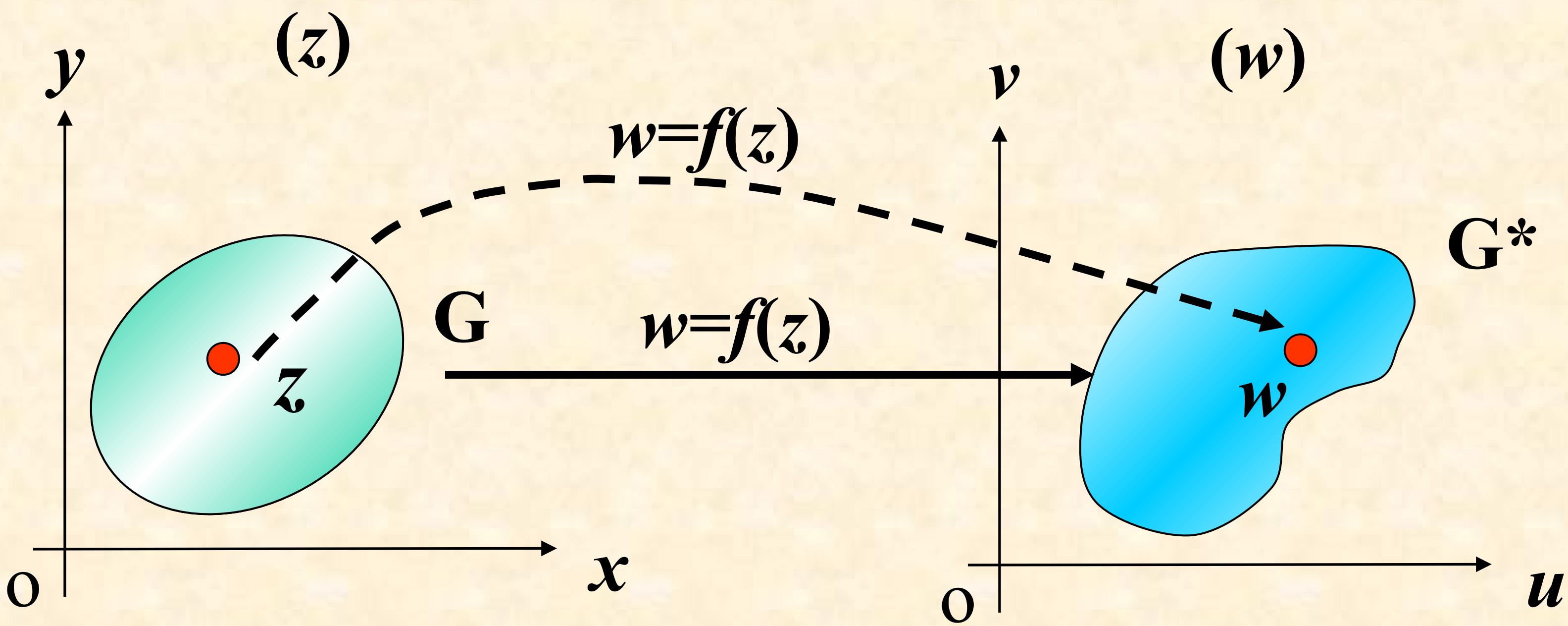
2. 映射的概念——复变函数的几何意义

在几何上， $w=f(z)$ 可以看作：

$z\in G$ (z平面) $\xrightarrow{w=f(z)}$ $w\in G^*$ (w平面 ）的映射(变换).

定义域　　　　函数值集合

称w为z的象点(映象)，而z称为w的原象。



- 复变函数的几何意义是一个映射（变换）

- 在复变函数中用两个复平面上点集之间的对应关系来表达两对变量 u，v 与 x，y 之间的对应关系，以便在研究和理解复变函数问题时，可借助于几何直观.

- 以下不再区分函数与映射（变换）。

例 3 研究$w=\bar{z}$所构成的映射.

解 设$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$

$\therefore \bar{z}=re^{-i\theta}$ —— 关于实轴对称的一个映射

➢见图 1-1~1-2

例 4 研究$w=e^{i\alpha}z$ (α实常数) 所构成的映射.

解 设$z=re^{i\theta}$ $\quad\therefore w=e^{i\alpha}z=e^{i\alpha}re^{i\theta}=re^{i(\alpha+\theta)}$

$$w=u+iv=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x+iy)$$

$$=(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+i(x\sin\alpha+y\sin\alpha)$$ 即,

$$\begin{cases} u=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ v=x\sin\alpha+y\sin\alpha \end{cases}$$ —— 旋转变换 (映射)➢见图 2

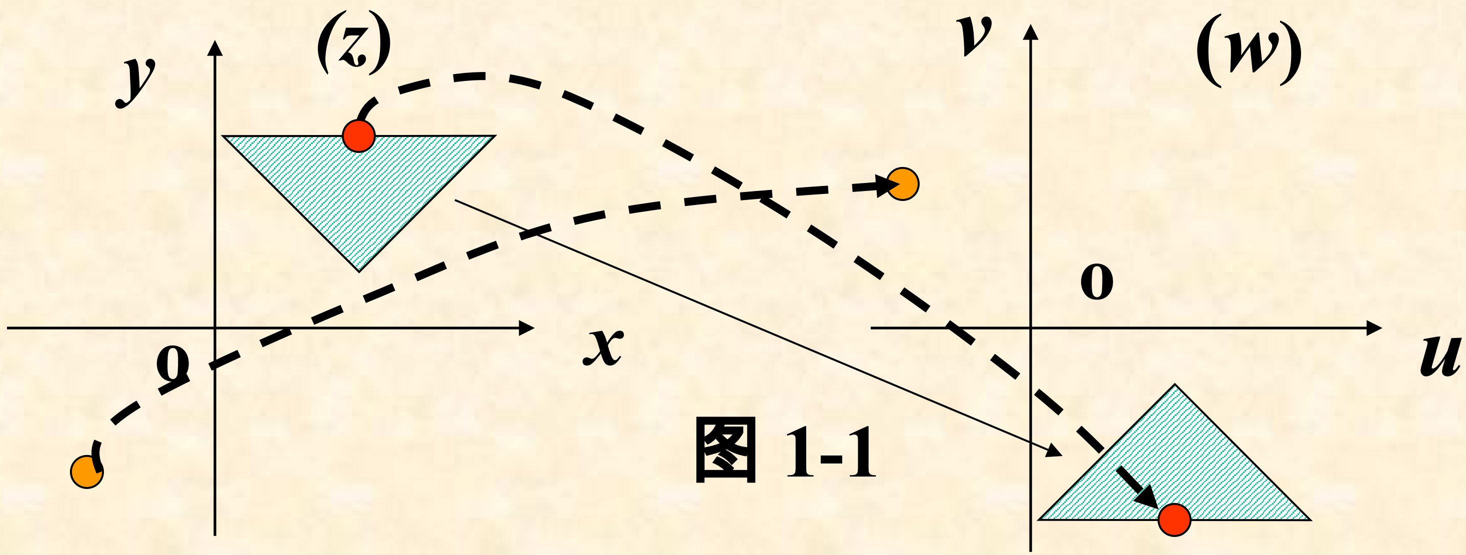


图 1-1

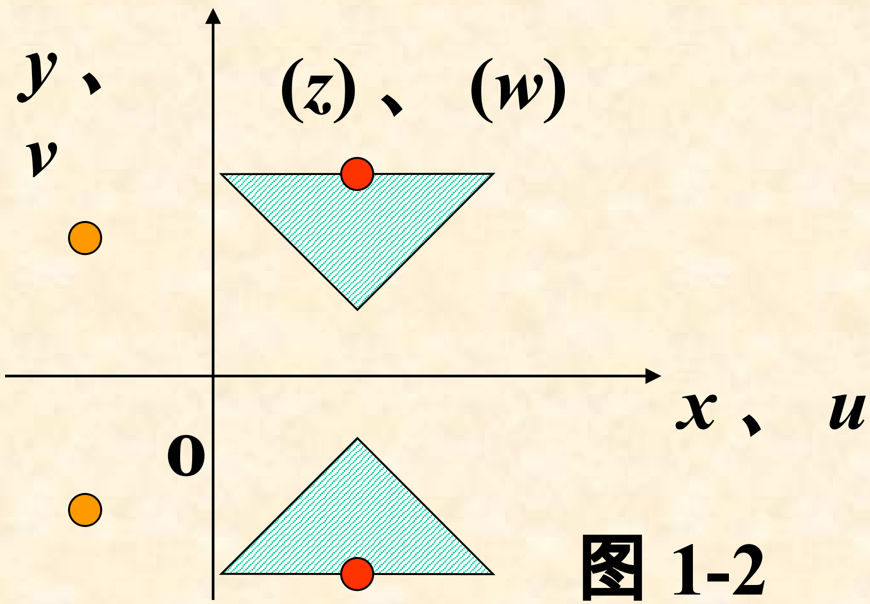


图 1-2

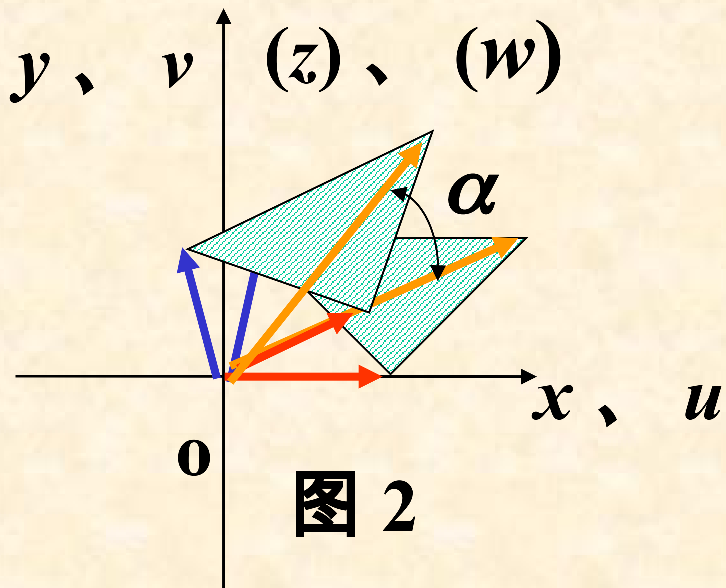
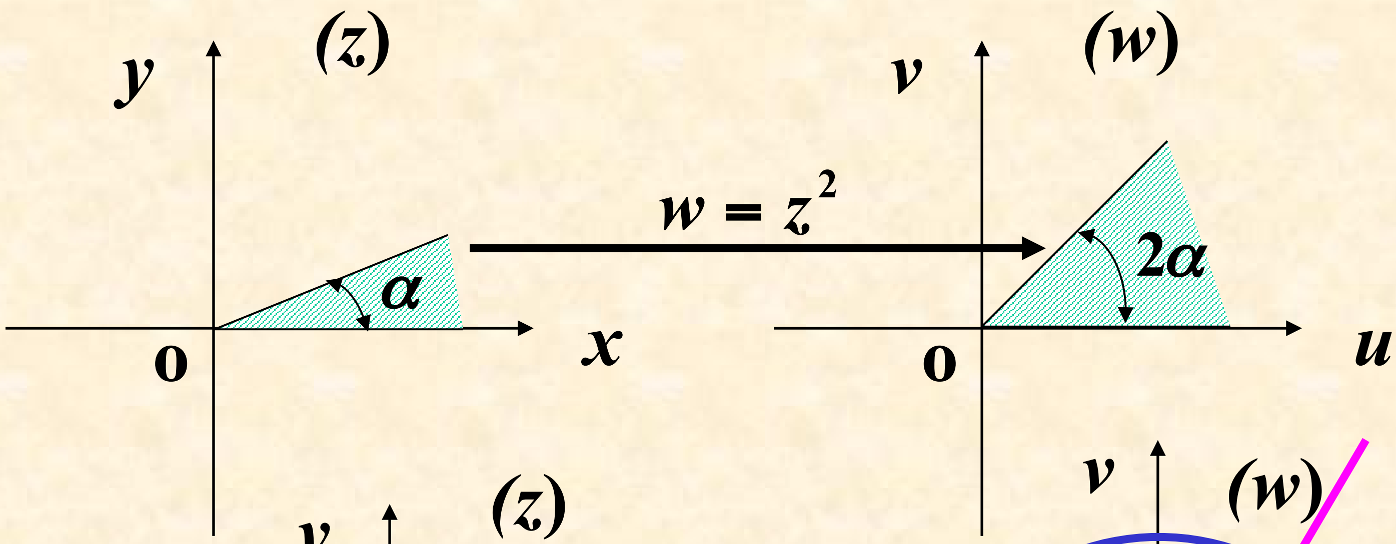
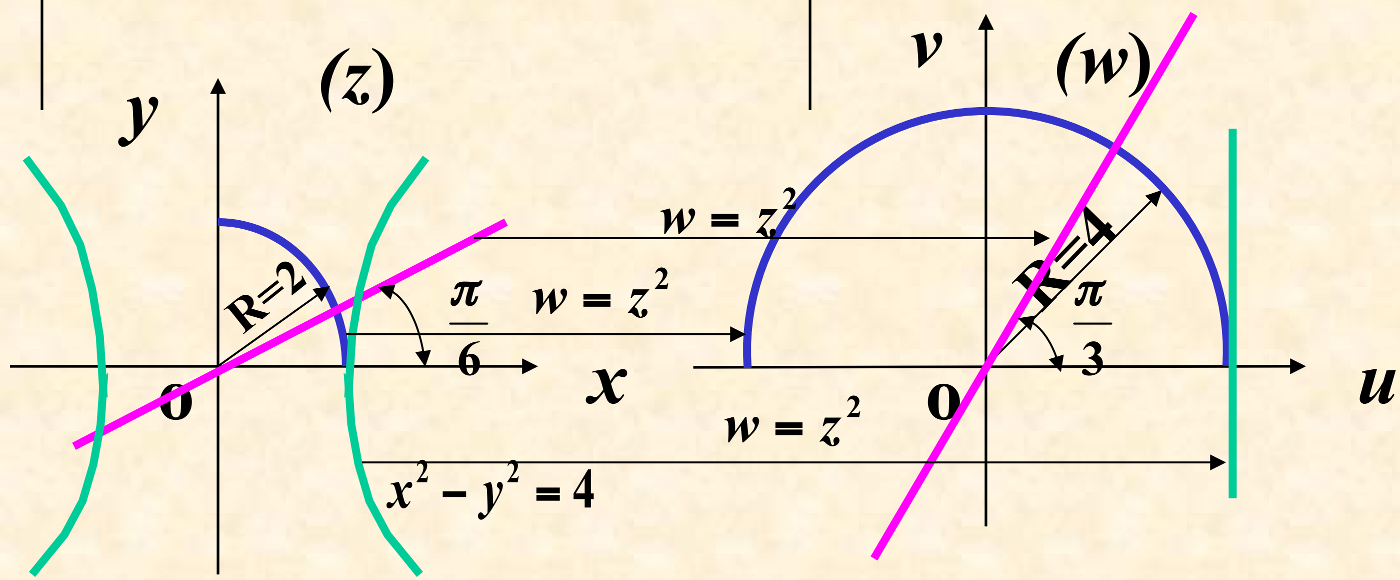


图 2

例 5　研究 $w = z^2$ 所构成的映射 .





3. 反函数或逆映射

例 设 $z=w^2$ 则称 $w=\sqrt{z}$ 为 $z=w^2$ 的反函数或逆映射

$$\because\ w=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{\frac{\theta+2k\pi}{2}}\ (k=0,1)\ \therefore$$ 为多值函数,2 支.

定义 设 $w=f(z)$ 的定义集合为 G, 函数值集合为 G^*

$$z\in G \xrightarrow{w=f(z)} w\in G^*$$

$$一个(或几个)z\in G \xleftarrow[z=\varphi(w)]{} w\in G^*$$

则称 $z=\varphi(w)$ 为 $w=f(z)$ 的反函数(逆映射).

显然有 $w=f[\varphi(w)]\quad \forall w\in G^*$

当反函数单值时 $z=\varphi[f(z)]\quad \forall z\in G\quad (一般 z\neq\varphi[f(z)])$

当函数(映射)$w=f(z)$和其反函数(逆映射)$z=\varphi(w)$都是单值的，则称函数(映射)$w=f(z)$是一一的。也称集合G与集合G^*是一一对应的。

例 已知映射 $w=z^3$，求区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 在平面 w 上的象。

例 已知映射 $w=\dfrac{1}{z}$,判断:z平面上的曲线 $x^2+y^2=1$被映射成 w平面上怎样的曲线 ?

(教材 P15-17 例 4 、例 5 请同学们自学！)

§6 复变函数的极限与连续性

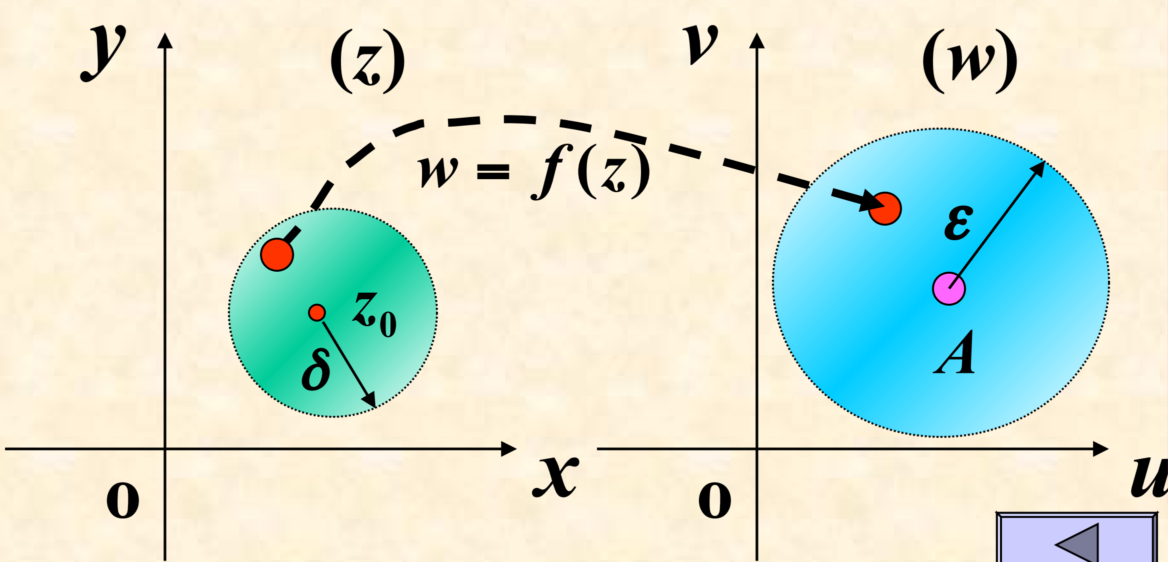
- 1. 函数的极限
- 2. 运算性质
- 3. 函数的连续性

1. 函数的极限

定义 设 $w=f(z)$, $z\in \overset{\circ}{U}(z_0,\rho)$, 若存在数 A，$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)$, 当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时, 有 $|f(z)-A|<\varepsilon$,
$(0<\delta\le\rho)$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$

或当 $z\to z_0$ 时，$f(z)\to A$



几何意义：
当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小去心邻域时，它的象点 $f(z)$ 就落入 A 的一个预先给定的 ε 邻域中

(1) 意义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的.

与一元实变函数相比较要求更高.

(2) A 是复数.

(3) 若 f(z) 在 z_0 处有极限，其极限是唯一的.

2. 运算性质

复变函数极限与其实部和虚部极限的关系：

定理 1

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\quad z=x+iy\ \ z_0=x_0+iy_0$

则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A=u_0+iv_0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0 \end{array}$$

定理 2

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$,则

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=\lim_{z\to z_0} f(z)\pm\lim_{z\to z_0} g(z)=A\pm B$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)\lim_{z\to z_0} g(z)=AB$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}\left(\lim_{z\to z_0} g(z)\neq 0\right)=\frac{A}{B}$$

以上定理用极限定义证！

例 1 证明$w = x^2 + y + i(x + y^2)$在平面上处处有极限.

$\because\ x^2 + y, x + y^2$在平面上处处有极限

例 2 求$f(z) = \bar{z}/z + z/\bar{z}$在$z \to 0$时的极限.

$\because\ f(z) = \dfrac{2(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$在(0,0)处极限不存在.

例 3 证明 $f(z) = \operatorname{Re} z/|z|$在$z \to 0$时的极限不存在.

3. 函数的连续性

定义 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称$f(z)$在$z_0$处连续;

若在区域D内处处连续，则称$f(z)$在D内连续;

若z、$z_0\in C$，且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称$f(z)$在曲线$C$上点$z_0$处连续.

定理 3 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$处连续

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u(x_0,y_0)\\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v(x_0,y_0)\end{cases}.$$

例 4 证明 $f(z)=\arg z$ 在原点及负实轴上不连续

证明： (1)$\because\ f(z)=\arg z$在原点没有定义，

故不连续。

(2)在负实轴上

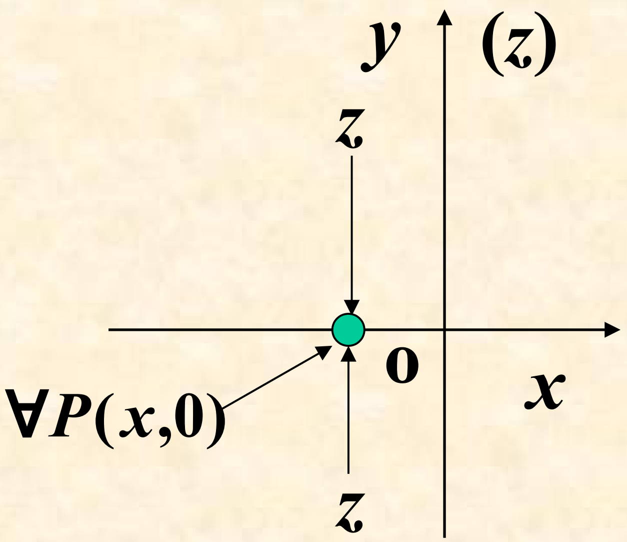
$\forall P(x,0)(x<0)$

$$\because \lim_{y\to 0^+} \arg z = \pi$$

$$\lim_{y\to 0^-} \arg z = -\pi$$

$\therefore \arg z$在负实轴

上不连续。



定理 4 连续函数的和、差、积、商 (分母不为 0)

仍为连续函数；

连续函数的复合函数仍为连续函数。

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在整个复平面内是连续的；

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面内除分母为0点外处处连续.

有界性：

设曲线C为闭曲线或端点包括在内的曲线段

若$f(z)$在C上连续 $\Rightarrow \exists M>0$, 在曲线上恒有$|f(z)|\le M$

作业　习题一

P22　11(1)、(3)、（ 5 ）、（ 7 ）

12(1), (2), (3), (4)