

在这种情况下,系统不仅是线性和因果的,也是时不变的。在本书的其余部分,我们将把注意力主要集中在LTI系统上,因此,当我们考虑用微分方程来描述系统时,需作初始静止的假设。在这种情况下,输出 $y(t)$ 当然可以用本节中已叙述过的求解微分方程的方法来计算,并且在本章的结尾几道习题中作更详细的说明。在第4章,我们将讨论分析连续时间LTI系统的另一些方法,将更加简化微分方程的求解,特别是将为我们提供一种方便的方法,以计算由线性常系数微分方程所描述的初始静止的LTI系统的冲激响应。

3.5.2 线性常系数差分方程

与式(3.104)相对应的离散时间表示式是 N 阶线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (3.106)$$

这类方程可以用与解微分方程完全类似的方法来求解(见习题3.31)①。具体说, $y[n]$ 的解可以写为式(3.106)的特解和如下齐次方程解的和,

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \quad (3.107)$$

如同在连续时间情况一样,式(3.106)不能完全地由输入来确定输出,要做到这点,必须给定某些辅助条件。此外,由式(3.106)和辅助条件所描述的系统是增量线性的,它由辅助条件单独引起的响应和假设零辅助条件下输入的线性响应之和组成。因此,由式(3.106)所描述的系统,如果其辅助条件为零,则系统是线性的。

虽然,我们可以直接仿照类似于对微分方程的讨论来导出所有这些特性,但离散时间情况提供了另一种途径。通过观察,发现式(3.106)可以重新排列成下面的形式

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\} \quad (3.108) \quad \text{www.blogoil.com}$$

这个方程用以前的输入和输出值,来直接表示在时间 n 时的输出。根据此式,可以直接看出需要辅助条件。为了计算 $y[n]$,我们需要知道 $y[n-1], \dots, y[n-N]$ 。因此,如果给出对所有 n 时的输入和一组辅助条件,如 $y[-N], y[-N+1], \dots, y[-1]$,则从式(3.108)中可以逐次的求出 $y[n]$ 值。

式(3.106)或(3.108)形式的方程称为递归方程,因为它给出了一个由输入和以前的输出来确定输出的递归过程。在 $N=0$ 的特殊情况下,式(3.108)简化为

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k] \quad (3.109)$$

这是和式(3.105)给出的连续时间系统相对应的离散时间的表示式。在这种情况下, $y[n]$ 是输入的现在值和以前值的显函数,为此,式(3.109)称为非递归方程。因为我们无法递归地使用以前算出的输出值来计算现在的输出值,因此,正如由式(3.105)给出系统的情况,为了确定 $y[n]$,我们不需要辅助条件。此外,式(3.109)描述一个LTI系统,根据直接计算,此系统的冲激响应为:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.110)$$

①对于解线性常系数差分方程的详细论述,我们介绍读者参阅由H. Levy和F. Lessman著的《Finite Difference Equations》(New York: Macmillan, Inc, 1961)或L. M. Milne-Thomson著的《The Calculus of Finite Differences》(New York: Macmillan, Inc, 1933)。在第5章中,我们提出求解差分方程的另一方法,使这种方程所描述的LTI系统的分析更为方便。此外,我们介绍读者参阅本章末尾有关求解微分方程的习题。

即, 式(3.109)就是卷积和。注意这个系统的冲激响应具有有限持续时间, 即仅仅在有限的时间区间内冲激响应是非零的。由于这一性质, 由式(3.109)所描述的系统, 通常称为有限冲激响应(FIR)系统。

在 $N=0$ 的情况下, 虽然我们不需要辅助条件, 对于 $N \geq 1$ 时的递归情况来说这样的条件是需要。为了深入了解递归差分方程性质, 以一阶方程为例

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (3.111)$$

这可以用下面形式表示

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] \quad (3.112)$$

假设已知 $y[-1]=a$, 并且输入是

$$x[n] = K\delta[n] \quad (3.113)$$

式中 K 是任意复数。我们就可以求解当 $n \geq 0$ 时 $y[n]$ 的逐次值, 如下所示:

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K + \frac{1}{2}a \\ y[1] &= x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \left(\frac{1}{2}\right)\left(K + \frac{1}{2}a\right) \\ y[2] &= x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(K + \frac{1}{2}a\right) \\ &\vdots \\ y[n] &= x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(K + \frac{1}{2}a\right), \quad n \geq 0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n K + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

把式(3.111)重新整理成如下形式

$$y[n-1] = 2\{y[n] - x[n]\} \quad (3.115)$$

再次利用 $y[-1]=a$ 的已知值, 我们也可以确定 $n < 0$ 时的 $y[n]$ 。具体说,

$$\begin{aligned} y[-2] &= 2\{y[-1] - x[-1]\} = 2a \\ y[-3] &= 2\{y[-2] - x[-2]\} = 2^2a \\ y[-4] &= 2\{y[-3] - x[-3]\} = 2^3a \\ &\vdots \\ y[-n] &= 2\{y[-n+1] - x[-n+1]\} = 2^{n-1}a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} a \end{aligned} \quad (3.116)$$

组合式(3.114)和(3.116), 对所有的 n 值来说, 我们得到

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a + K\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (3.117)$$

由式(3.117), 我们再次看到需要辅助条件。因为这个方程是 a 为任意值时式(3.111)的正确解, 为了确定 $y[n]$ 作为输入的函数, 必须给定该值。同样, 若 $K=0$, 输入是零, 而我们看到, 只有当辅助条件是零时输出才是零。若目前正是这种情况, 则由式(3.111)所描述的系统是线性的。这可以直接证明, 就像我们在连续时间情况下进行的一样(见习题3.31)。

此外, 和连续时间时一样, 为保证由式(3.111)所描述系统的线性和因果性, 我们必须作初始静止的假设, 即假设若 $n \leq n_0$ 时, $x[n]=0$, 则 $n \leq n_0$ 时 $y[n]=0$ 。在这种情况下, 只要从初始条件 $y[n_0]=0$ 出发, 求解 $n > n_0$ 时的前向时间差分方程。在这样的条件下, 由

式(3.111)所描述的系统不仅是线性的和因果的,而且它也是时不变的。线性是从零初始条件得出的,而时不变性可以用和连续时间中完全相同的方法来证明(见习题3.31)。在初始静止的假设下,则由式(3.117)得到这个LTI系统的单位冲激响应是

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

注意这个系统具有无限持续时间的冲激响应。

正如在本节开始时所指出的,我们对这个简单的例子已经作出的全面论述,此例归入式(3.106)描述的系统的一般情况。为了使系统是线性的,辅助条件必须为零。而若作出初始静止的假设,则系统是因果的,线性的,而且是时不变的。因为我们将注意力集中在LTI系统上,当考虑由差分方程所描述的系统时,通常作初始静止的假设。在第5章中,将讨论离散时间LTI系统分析的方法,它将为提供求解线性常系数差分方程和分析由它们所描述的LTI系统特性的非常有用和有效的方法。如在上述的例子中看到,由一般的递归差分方程(3.108)所描述的LTI系统,只要它确实是递归的,即只要 a_k 中, $k=1, \dots, N$,至少有一个是非零的,则系统具有无限持续时间的冲激响应。由于这个特点,由递归差分方程所描述的系统,通常称为无限冲激响应(IIR)系统。读者可参考本章结尾的习题,它更详细的说明了本节已介绍过的有关求解差分方程,以及由它们所描述的系统分析的概念。

3.6 由微分方程和差分方程所描述的LTI系统的框图表示法

LTI系统分析方法的一个很重要的应用是按指定要求的特性来进行系统设计。实际上,在设计时选定的系统型式,在连续时间情况下用微分方程来描述,而在离散时间情况下用差分方程来描述。作这些选择的理由,在于通常实现LTI系统的设计方案时,许多物理元件和系统本身就是用微分方程和差分方程来描述的。例如,RLC电路以及包括运算放大器的电路,都是用线性微分方程来描述的。此外用线性差分方程所描述的系统,在通用数字计算机或用专用硬件上用计算机算法是容易实现的。在本节中,介绍由微分方程和差分方程所描述的系统的框图表示法。我们将首先介绍离散时间的情况,然后介绍连续时间的情况。在本章及第4章、第5章中所介绍的表示法,使我们能对这些系统的实现有关的问题上有进一步的理解。

3.6.1 由差分方程所描述的LTI系统的表示法

如同在式(3.108)中所表示的那样,线性常系数差分方程可以看作计算 $y[n]$ 的逐次值的算法,而 $y[n]$ 可看作它的过去值以及输入的过去值和现在值的线性组合。要在数字计算机上或用专用硬件来实现这样一个LTI系统时,我们应当明确地实现这一算法。虽然式(3.108)提示了编制计算方法的一种途径,实际上还有各种其他可行的方法,其中每一种方法都表示由式(3.108)所描述的LTI系统的不同结构或实现。在本节中,我们讨论其中的两种,而其他的将在第5章中讨论。

为了研究和描述每一种可采用方法,通常用图示法来表示和处理式(3.108)是很方便的。为了研究这些图解表示法,我们注意到式(3.108)的计算需要三种基本运算:加法,系数乘法和延迟。因此,我们定义三种基本网络单元,如图3.24所示。为了了解怎样利用这些基本单元,我们考察一些例子。首先考虑初始静止,并且由一阶方程来描述的LTI系统

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n] \quad (3.118)$$

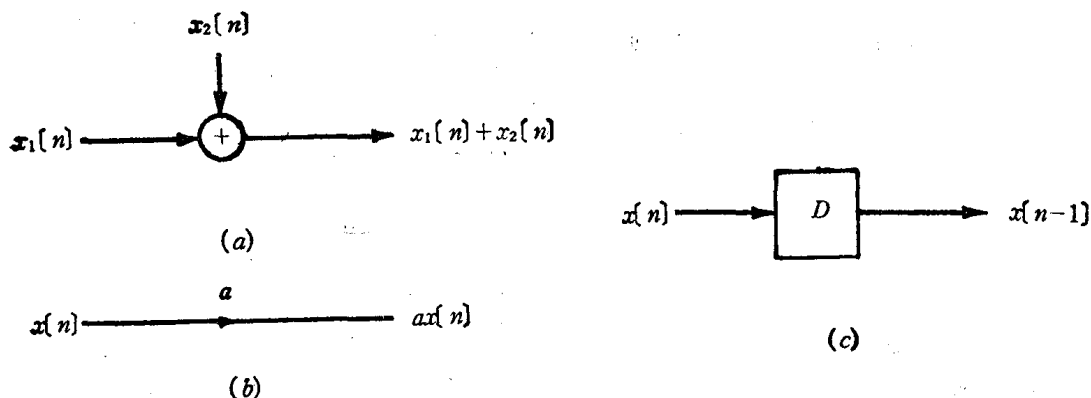


图3.24 用线性常系数差分方程描述的离散时间 LTI 系统的框图表示法的基本单元
(a) 加法器; (b) 系数乘法; (c) 单位延迟

上式可以直接改写为递归算法的形式

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n] \quad (3.119)$$

这种算法用图形表示在图3.25中。注意延迟单元需要存储元件：在时间 n 中的任意点，要求存储 $y[n-1]$ ，以便在 $y[n]$ 的计算中加以利用。还要注意，图3.25是一个反馈系统的例子，因为输出是通过延迟和系数乘法，再反馈然后与 $bx[n]$ 相加。反馈的存在是式 (3.119) 的

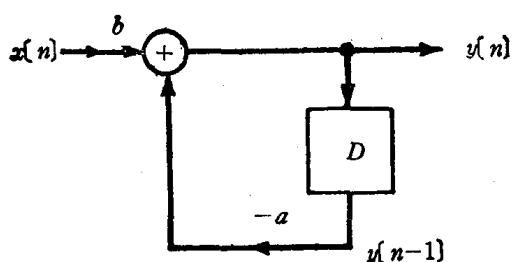


图3.25 由式(3.118)所描述的 LTI 系统框图表示法

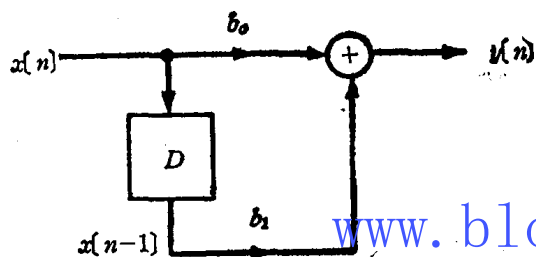


图3.26 由式 (3.120) 所描述的 LTI 系统框图表示法

递归性质的直接结果。

其次，考虑非递归 LTI 系统

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] \quad (3.120)$$

式(3.120)提供的算法表示在图3.26中。注意这个系统也需要一个延迟单元。而且，在这个框图中不存在反馈，因为前面的输出值未用于现在值的计算中。

作为第三个例子，考虑初始静止并由以下方程描述的 LTI 系统

$$y[n] + ay[n-1] = b_0x[n] + b_1x[n-1] \quad (3.121)$$

我们可以再次将式(3.121)看作给定的一个递归计算 $y[n]$ 的算法：

$$y[n] = -ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1] \quad (3.122)$$

在图3.27中用图形表示了这一算法。注意这一算法可以作为图3.25和图3.26所描绘的两个 LTI 系统的级联(在图3.25中 $b=1$)。即，计算

$$w[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] \quad (3.123)$$

以及

$$y[n] = -ay[n-1] + w[n] \quad (3.124)$$

然而，因为两个系统级联的总响应与两个系统级联次序无关，我们可以交换图3.27中两个系

统的次序, 得到由式(3.121)所给定的 LTI 系统的响应的另一种算法。这系统如图 3.28 所示。从这图中可见

$$z[n] = -az[n-1] + x[n] \quad (3.125)$$

$$y[n] = b_0 z[n] + b_1 z[n-1] \quad (3.126)$$

可以直接证明, 由式(3.125)和式(3.126)定义的 $y[n]$ 满足差分方程(3.121)。但是由于卷积的交换律, 及其含有交换 LTI 系统级联次序意义, 我们早已知道这必定是正确的。

由图 3.28 给出的形式表明, 这种结构较之图 3.27 没有明显的优点。然而, 根据对图 3.28 的分析, 我们看到两个延迟单元具有同样的输入(即它们要求相同数目的存储器), 从而可以合并为单个延迟单元, 如图 3.29 所示。因为每一个延迟单元要求存储, 在图 3.29 中的接法是比图 3.27 中的接法更为有效, 因为它仅需要存储一个数, 而图 3.27 要求在每个时刻存储两个数。

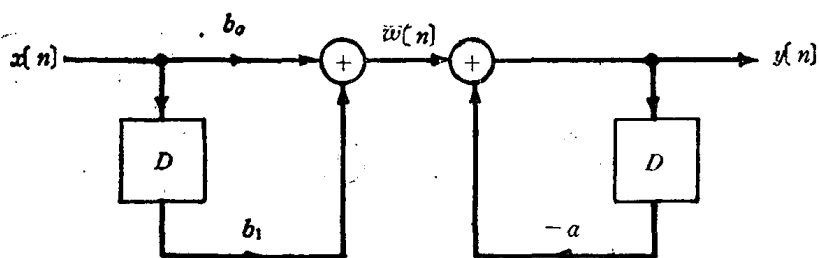


图3.27 由式(3.121)所描述的 LTI 系统框图表示法

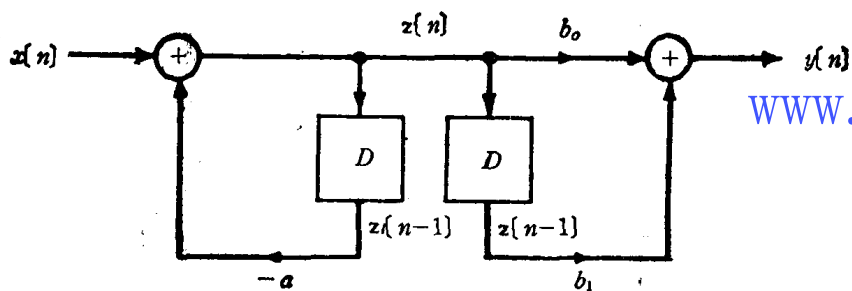


图3.28 由式(3.121)所描述的 LTI 系统框图另一种表示法(与图3.27相比)

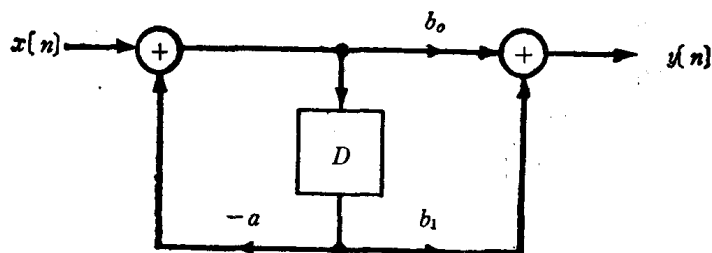


图3.29 由式(3.121)所描述的 LTI 系统, 只要求一个延迟单元的框图表示法(与图3.28相比较)

同样的基本概念可适用于一般的递归方程(3.108)。为了方便, 我们在 $M=N$ 的情况下重写该方程。如果 $M \neq N$, 那么相应的系数 a_k 或 b_k 可以令其为零:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\} \quad (3.127)$$

由这个方程隐含的算法表示在图3.30中。实现差分方程(3.127)的这种算法,称为直接形式 I 实现,从图中看到,可以把这种算法看作非递归系统

$$w[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \quad (3.128)$$

和递归系统

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + w[n] \right\} \quad (3.129)$$

的级联

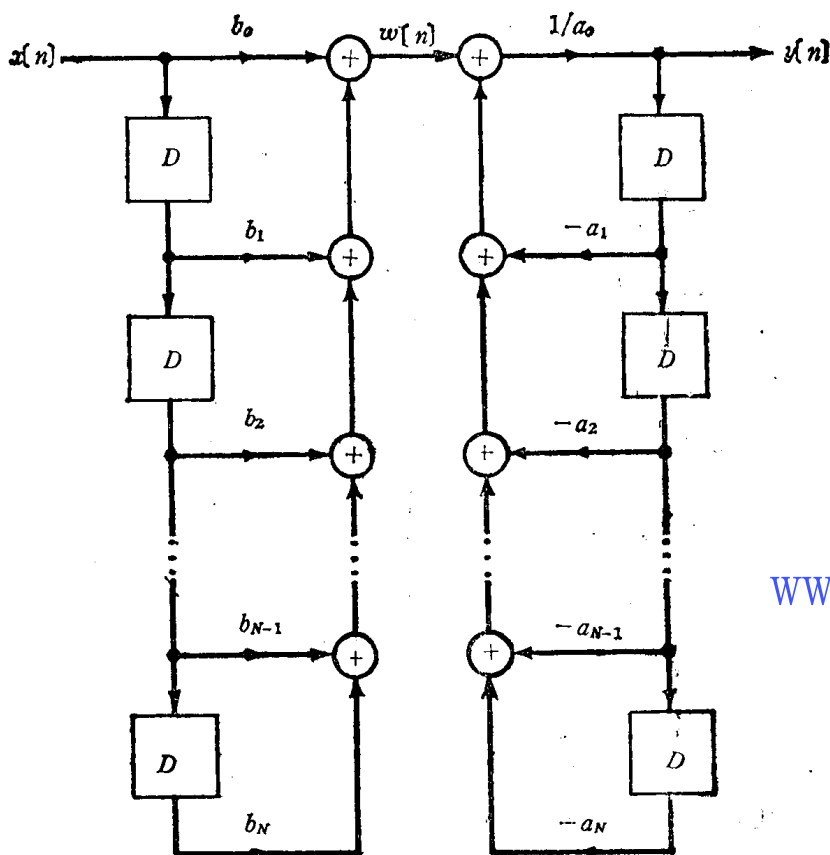


图3.30 由式(3.127)所描述的 LTI 系统的直接形式 I 实现

通过交换这两个系统的次序,我们得到如图3.31所表示的结构,它表示式(3.127)的实现另一种可采用的结构。相对应的差分方程是

$$z[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ - \sum_{k=1}^N a_k z[n-k] + x[n] \right\} \quad (3.130)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k z[n-k] \quad (3.131)$$

和前面一样,我们注意到图3.31中的两条延迟单元链路有同样的输入,因此,可以合并成单个支路,得到由图3.32所示的直接形式 II 实现。在这种结构中,差分方程的实现,只需要N个延迟单元而不是图3.30中所要求的2N个延迟单元。直接形式 II 实现有时称为典范实现,因为在实现式(3.127)时,它要求延迟单元的数目最少(即,它要求存储器的数目最少)。

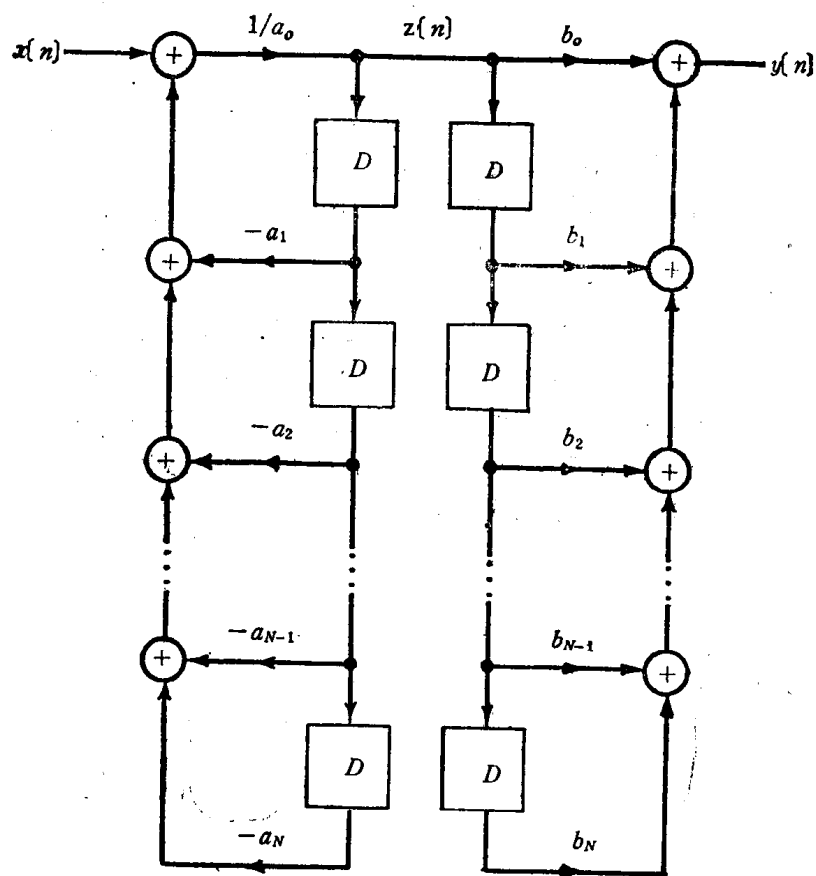


图3.31 由式 (3.127) 所描述的 LTI 系统的实现, 可采用的另一种结构 (与图3.30相比较)

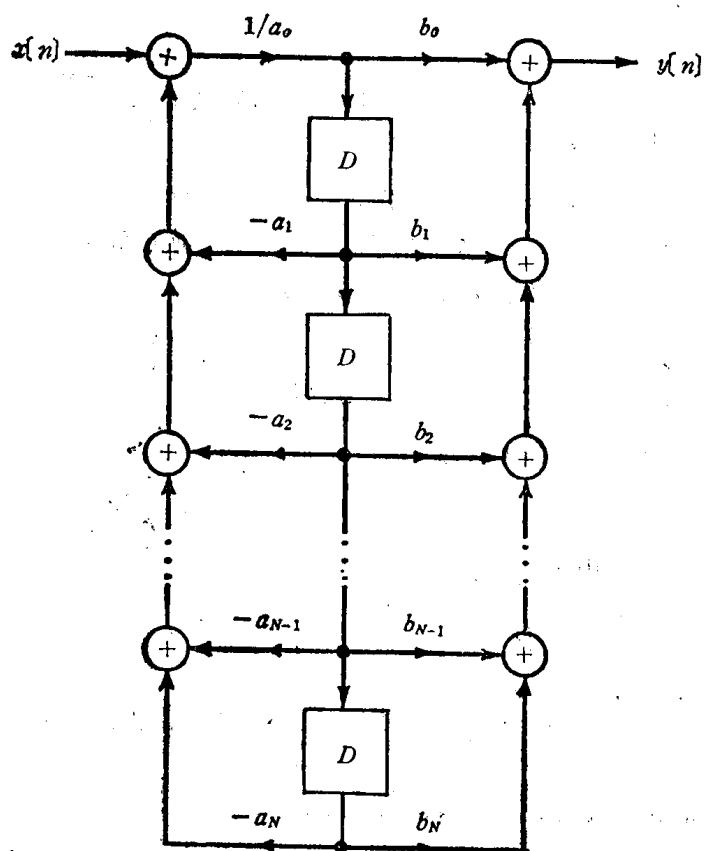


图3.32 由式 (3.127) 所描述的 LTI 系统直接形式 II 实现 (与图3.31相比较)

3.6.2 由微分方程所描述的 LTI 系统的表示法

在分析由微分方程所描述的连续时间系统时,我们可以按完全类似的方式进行。考虑一般的线性常系数微分方程(3.104)。为了方便,假设 $M=N$ (如果这一假设不符合,我们就简单地指定适当的 a_k 或 b_k 为零),在这种情况下,可以把式(3.104)重写为下述形式

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=1}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} \quad (3.132)$$

这方程式的右侧包括三种基本的运算:加法,系数乘法,微分。因此,如果定义三种基本网络单元如图3.33所示。我们认为实现式(3.132),可以看作这些基本网络单元的互连,这种连接方法与差分方程的实现是完全类似的。实际上,比较式(3.127)和(3.132),可简捷地验证图3.30是式(3.132)的直接形式 I 型实现。而图3.32是它的直接形式 II 型实现。在这里图中的 D 看作微分器件,而用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 来代替 $x[n]$ 和 $y[n]$ 。

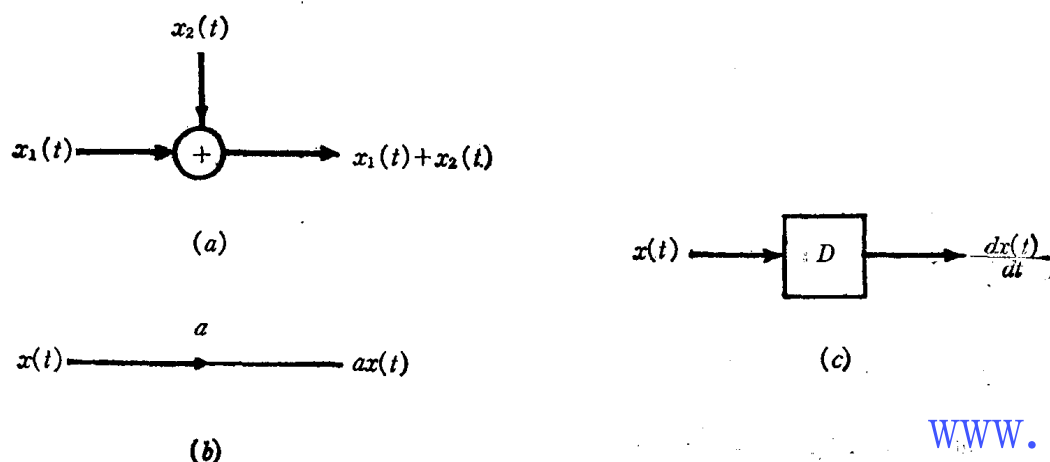


图3.33 用线性常系数微分方程所描述的连续时间 LTI 系统的方框图表示法的一组基本单元:
(a)加法器; (b)系数乘法; (c)微分器

利用图3.33的单元,来实现线性常系数微分方程时,一个实际困难是微分单元通常难以用硬件实现。一个替代的方法,是把 N 阶微分方程式(3.104)变换成积分方程,而运算放大器特别适合作积分器的。具体说,定义 $y(t)$ 的逐次积分为

$$y_{(0)}(t) = y(t) \quad (3.133)$$

$$y_{(1)}(t) = y(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \quad (3.134)$$

$$y_{(2)}(t) = y(t) * u(t) * u(t) \quad (3.135)$$

$$= y_{(1)}(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} y(\sigma) d\sigma \right) d\tau$$

更一般地说, $y(t)$ 的 k 次积分由下式给出

$$y_{(k)}(t) = y_{(k-1)}(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t y_{(k-1)}(\tau) d\tau \quad (3.136)$$

同样地,可以定义 $x(t)$ 的逐次积分 $x_{(k)}(t)$ 。

再一次考虑微分方程式(3.104),为了方便起见,在此重写该式,并仍然假设 $M=N$:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3.137)$$

注意,如果假设初始静止,因为积分的初始条件为零,则 $d^k y(t)/dt^k$ 的 N 次积分恰好是

$y_{(N-k)}(t)$ 。同样, $d^k x(t)/dt^k$ 的 N 次积分是 $x_{(N-k)}(t)$ 。因此, 取式(3.137)的 N 次积分, 得到方程式

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t) \quad (3.138)$$

因为 $y_{(0)}(t) = y(t)$, 式(3.138)可以重新表示为

$$y(t) = \frac{1}{a_N} \left\{ \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t) \right\} \quad (3.139)$$

式(3.139)的实现利用了加法器和系数乘法器, 如图3.33所示。在微分器的位置用如图3.34所定义的积分器来代替。这个单元的冲激响应为 $u(t)$, 而且它能用运算放大器来实现。式(3.139)的直接形式 I 和直接形式 II 实现的导出过程, 完全类似于差分方程的实现, 得到的结果如图3.35和3.36所示。注意, 直接形式 II 实现只需要 N 个积分器, 而直接形式 I 要用 $2N$ 个积分器。如前所述, 直接形式 II 的实现有时称作典范实现, 因为在由式(3.139)或者等效地由式(3.132)所描述的 LTI 系统的任何实现中, 它所需要的积分器的数目最少。在第4章中, 我们介绍由这样的方程所描述的 LTI 系统的实现的其他两种典范结构。

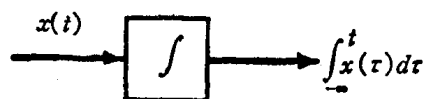


图3.34 积分器的图形表示

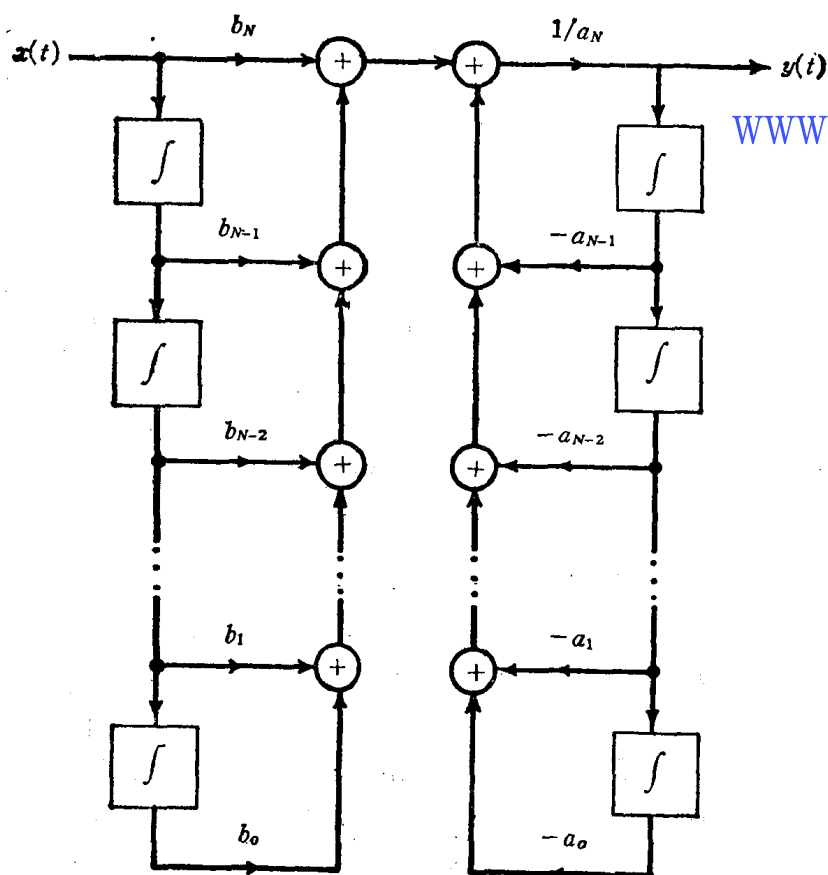


图3.35 由式(3.139)或式(3.132)所描述的 LTI 系统的直接形式 I 的实现

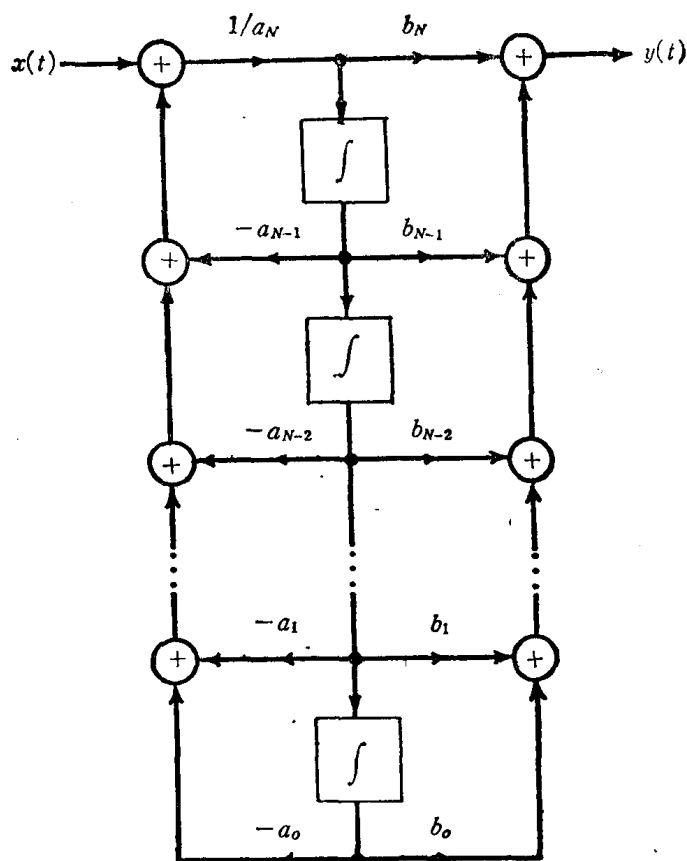


图3.36 由式(3.139)或式(3.132)所描述的 LTI 系统的直接形式 I 实现

www.blogoil.com

3.7 奇异函数

在连续时间单位冲激函数的最初讨论中, 我们把单位冲激描述为矩形脉冲的极限形式, 这矩形脉冲变得愈来愈窄, 愈来愈高, 但保持单位面积不变。虽然这种解释对 $\delta(t)$ 的性质提供了某些有价值的直观知识, 但是以这种形式来看待冲激是有局限性的。在本节中, 要重新考虑单位冲激和其他类似的信号, 并且要在卷积与连续时间 LTI 系统范围内来解释它们。

在3.4节中, 我们已经看到 $\delta(t)$ 是恒等系统的冲激响应。即对于任意信号 $x(t)$, 有

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \quad (3.140)$$

因此, 如果取 $x(t) = \delta(t)$, 得到

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t) \quad (3.141)$$

式(3.140)是单位冲激的基本性质, 并且它对于我们以前定义 $\delta(t)$ 为矩形脉冲的极限形式, 也具有重要的意义。具体说, 设 $\delta_\Delta(t)$ 相当于如图2.20中所定义的矩形脉冲, 并设

$$r_\Delta(t) = \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t) \quad (3.142)$$

则 $r_\Delta(t)$ 如图3.37所示。如果我们想把 $\delta(t)$ 看作 $\Delta \rightarrow 0$ 时 $\delta_\Delta(t)$ 的极限, 那么, 根据式(3.141), 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时 $r_\Delta(t)$ 的极限必定也是单位冲激。用同样的方法, 可以证明, 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时 $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ 或 $r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ 等等的极限也必定是单位冲激。于是, 为了一致起见, 我们看到, 如果把单位冲激定义为某些信号的极限形式, 那么, 实际上有无数外观非常不同的信号, 在极限的情况下都表现为一个冲激函数。

前面一段话中的关键词是“表现为一个冲激”。通常,一个函数或一个信号是根据在独立变量的每一个值时是用什么来定义的,正是这种观点,导致我们选择像矩形脉冲那样的信号的极限形式,作为冲激响应的定义。然而,单位冲激最重要之点不是在于每一个 t 值时是什么,而在于在卷积情况下它的作用如何。因此,按线性系统分析的观点,可用另一种形式来定义单位冲激,我们把单位冲激定义为这样的信号,对该信号而言,对于任意 $x(t)$ 来说,都有

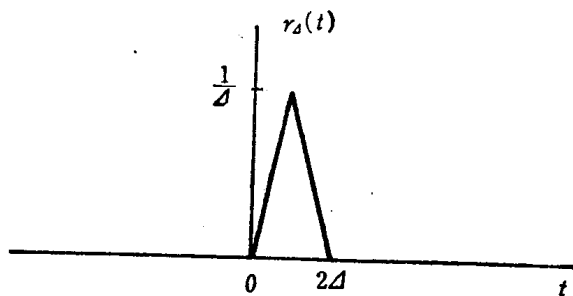


图3.37 由式(3.142)定义的 $r_d(t)$ 信号

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \quad (3.143)$$

在这种意义上,所有上一段中所涉及的信号,在极限情况下表现为一个单位冲激,因为如果用这些信号中的任意一个替代 $\delta(t)$,则在极限情况下式(3.143)是满足的。

我们所需要的单位冲激的全部性质,可以从式(3.143)给出的运算定义中得到。例如,若对所有的 t 设 $x(t)=1$, 那么

$$\begin{aligned} 1 = x(t) &= x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau \end{aligned}$$

因此,单位冲激具有单位面积。此外,如果取一个任意的信号 $g(t)$, 把它反转得到 $g(-t)$, 然后将 $g(-t)$ 和 $\delta(t)$ 卷积, 得到

$$g(-t) = g(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau-t) \delta(\tau) d\tau$$

当 $t=0$ 时得到

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \delta(\tau) d\tau \quad (3.144)$$

因此,由式(3.143)给出的 $\delta(t)$ 的运算定义蕴含式(3.144)。另一方面,式(3.144)也蕴含式(3.143)。为了解这点,设 $x(t)$ 是一个已知信号,固定时间 t , 并定义

$$g(\tau) = x(t-\tau)$$

则,利用式(3.144),有

$$x(t) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) \delta(\tau) d\tau$$

此式恰好是式(3.143)。因此式(3.144)是单位冲激的一个等效的运算定义,即单位冲激是这样一个信号,它乘上一个任意信号 $g(t)$, 然后从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分,得到的值是 $g(0)$ 。按同样的方式,用一个信号与另一任意信号 $g(t)$ 相乘,然后从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分,根据积分性质,我们可以运算地定义任何信号。

因为我们将主要涉及 LTI 系统及卷积,由式(3.143)给出的 $\delta(t)$ 的表征,将是我们最常涉及到的一种。另一方面,式(3.144)在决定单位冲激的其他性质时是有用的。例如,设信号 $f(t)\delta(t)$, 其中 $f(t)$ 是一任意信号。则由式(3.144)得出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(\tau) \delta(\tau) d\tau = g(0) f(0) \quad (3.145)$$

另一方面,如果我们考虑信号 $f(0)\delta(t)$, 我们看到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(0) \delta(\tau) d\tau = g(0) f(0) \quad (3.146)$$

式(3.145)和(3.146)比较, 我们看到 $f(t)\delta(t)$ 和 $f(0)\delta(t)$ 两个信号, 当用 $g(t)$ 相乘 并从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分时其结果是相同的。因此, 利用这种形式信号的运算定义, 可以得出

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (3.147)$$

这一性质我们在2.3节中用另一种方法推导过〔见式(2.24)〕。

单位冲激是奇异函数信号类型中的一种, 根据它在卷积时的性质, 可以运算地定义每一种奇异函数。设有 LTI 系统, 其输出是输入的导数

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (3.148)$$

这个系统的单位冲激响应是单位冲激的导数, 称为单位偶 $u_1(t)$ 。根据 LTI 系统的卷积表示式, 对于任意信号 $x(t)$ 则有

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) \quad (3.149)$$

正如式(3.143)作为 $\delta(t)$ 的运算定义一样, 我们把式(3.149)作为 $u_1(t)$ 的运算定义。同样, 可以把 $\delta(t)$ 的二阶导数 $u_2(t)$ 定义为一个 LTI 系统的冲激响应, 其输出是输入的二阶导数

$$\text{从式(3.149)我们看到} \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = x(t) * u_2(t) \quad (3.150)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) = x(t) * u_1(t) * u_1(t) \quad (3.151)$$

因此

$$u_2(t) = u_1(t) * u_1(t) \quad (3.152)$$

一般地说, $k > 0$ 时 $u_k(t)$ 是 $\delta(t)$ 的 k 阶导数, 因此是一个输出为输入的 k 阶导数的系统的冲激响应。因为, 这个系统可以看作由 k 个微分器的级联得到, 我们有

$$u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{k \text{ 次}} \quad (3.153)$$

这些奇异函数中的每一种函数所具有的性质, 如同单位冲激一样, 可以由它的运算定义导出。例如, 若我们假设有恒定信号 $x(t) = 1$, 则,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) x(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) d\tau \end{aligned}$$

因此单位偶的面积是零。此外, 若信号 $g(-t)$ 和 $u_1(t)$ 卷积得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau-t) u_1(\tau) d\tau = g(-t) * u_1(t) = \frac{dg(-t)}{dt} = -\frac{dg(t)}{dt}$$

当 $t=0$ 时得到

$$-g'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u_1(\tau) d\tau \quad (3.154)$$

按照类似的方法, 可以导出 $u_1(t)$ 和更高阶奇异函数的有关性质, 这些性质中的一些性质将在习题3.39中讨论。

除了把单位冲激的各阶导数作为奇异函数以外, 也可以定义表示单位冲激函数逐次积分的信号。如同在3.4节中所看到的。单位阶跃是一个积分器的冲激响应。

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

因此,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (3.155)$$

而且我们同样有一个 $u(t)$ 的运算定义:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (3.156)$$

同样, 我们也可以定义由两个积分器级联组成的系统, 其冲激响应用 $u_{-2}(t)$ 来表示, 它仅仅是一个积分器的冲激响应 $u(t)$ 和它本身的卷积:

$$u_{-2}(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (3.157)$$

因为当 $t < 0$ 时 $u(t)$ 等于零, 当 $t > 0$ 时 $u(t)$ 等于 1, 可得

$$u_{-2}(t) = tu(t) \quad (3.158)$$

这种信号称为单位斜坡函数, 如图 3.38 所示。

同样, 我们也可以根据式(3.156)和(3.157)得到在卷积情况下 $u_{-2}(t)$ 性质的运算定义:

$$\begin{aligned} x(t) * u_{-2}(t) &= x(t) * u(t) * u(t) \\ &= \left(\int_{-\infty}^t x(\sigma) d\sigma \right) * u(t) \\ &= \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma) d\sigma \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.159)$$

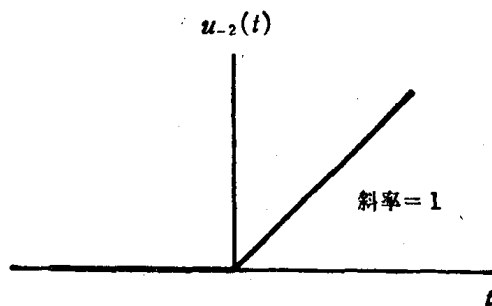


图3.38 单位斜坡函数 www.blogoil.com

按类似的方式, 可以把 $\delta(t)$ 的更高阶积分定义为积分器级联的冲激响应:

$$u_{-k}(t) = u(t) * \cdots * u(t) = \int_{-\infty}^t u_{-(k-1)}(\tau) d\tau \quad (3.160)$$

$x(t)$ 与 $u_{-3}(t)$, $u_{-4}(t)$, \cdots 的卷积, 相应地产生 $x(t)$ 的更高阶积分。同样, 正如在式(3.158)中所做的那样, 注意到式(3.160)的积分可以直接计算(习题3.40), 得到

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t) \quad (3.161)$$

因此, 不同于 $\delta(t)$ 的导数, 单位冲激的逐次积分是可以对每一个 t 值下求值的函数[式(3.161)], 也是可以根据它们在卷积情况下的性质定义的函数。

有时 $\delta(t)$ 和 $u(t)$ 采用另一种符号将是有益的, 具体说

$$\delta(t) = u_0(t) \quad (3.162)$$

$$u(t) = u_{-1}(t) \quad (3.163)$$

用这种符号, 当 $k > 0$ 时 $u_k(t)$ 表示 k 个微分器级联的冲激响应, $u_0(t)$ 是恒等系统的冲激响应, 当 $k < 0$ 时, $u_k(t)$ 是 $|k|$ 个积分器级联的冲激响应。此外, 因为微分器是积分器的逆系统,

$$u(t) * u_1(t) = \delta(t)$$

或用另一种符号,

$$u_{-1}(t) * u_1(t) = u_0(t) \quad (3.164)$$

更一般地, 从式(3.153)、(3.160)和(3.164)可以看到, 当 k 和 r 是任意整数时,

$$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t) \quad (3.165)$$

若 k 和 r 都为正整数时, 式(3.165)表示 k 个微分器再加上 r 个微分器级联, 它得到的输出是输入的 $(k+r)$ 阶导数。同样, 若 k 是负的, 而 r 也是负的, 我们得到 $|k|$ 个积分器再加上另外 $|r|$ 个积分器的级联。还有, 若 k 是负的而 r 是正的, 则我们得到 $|k|$ 个积分器再加上 r 个微分器的级联, 从式(3.165)得知, 若 $(k+r) < 0$, 整个系统等效于 $(k+r)$ 个积分器的级联; 若 $(k+r) > 0$, 则等效于 $(k+r)$ 个微分器的级联; 当 $(k+r) = 0$ 时, 等效于一个恒等系统。因此, 根据函数在卷积时的性质来定义奇异函数, 可以得到奇异函数的一组性能, 它使我们能比较方便地运用它们, 并且直接根据它们对于 LTI 系统的重要性来解释它们。因为这是本书的主要内容, 故在本节中已经给出的关于奇异函数的运算定义, 已足够我们应用^①。

3.8 小 结

在本章中, 我们已经讨论了在离散时间和连续时间两种情况下 LTI 系统的十分重要的表示式。在离散时间情况下, 我们推导了作为移位单位冲激加权求和的信号表示式, 并且利用此式导出了离散时间 LTI 系统响应的卷积和表示式。在连续时间情况下, 我们导出了作为移位单位冲激的加权积分的连续时间信号的类似表示式, 并且利用这些表示式导出了对于连续时间 LTI 系统的卷积积分的表示式。这些表示式是非常重要的, 因为它们可使我们根据其单位冲激响应来计算 LTI 系统对任意输入的响应。而且, 卷积和以及卷积积分为我们提供了用 3.4 节中的方法去分析 LTI 系统的特征, 特别是把许多 LTI 系统的性质, 包括因果性和稳定性与单位冲激响应相对应的性质联系起来。此外, 在 3.7 节中, 我们根据在卷积下它们的作用, 讨论了单位冲激和其他有关奇异函数的解释。这种解释对 LTI 系统的分析是特别有用的。

连续时间系统中重要的一类, 是用线性常系数微分方程所描述的那些系统, 以及与离散时间对应的线性常系数差分方程, 在离散时间情况下起了同样重要的作用。在 3.5 节中, 我们回顾了对于这些类型方程的求解方法, 并且讨论了由这些方程所描述的系统的因果性、线性以及时不变性等性质。我们还介绍了这些系统的图形表示法在实现系统的结构描述时, 它们是有用的。

习 题

3.1. 计算下列各对信号的卷积 $y[n] = x[n] * h[n]$ 。

- (a) $x[n] = \alpha^n u[n]$, $h[n] = \beta^n u[n]$, ($\alpha \neq \beta$)
- (b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$,
- (c) $x[n] = 2^n u[-n]$, $h[n] = u[n]$,
- (d) $x[n] = (-1)^n \{u[-n] - u[-n-8]\}$, $h[n] = u[n] - u[n-8]$,
- (e) $x[n]$ 和 $h[n]$ 如图 P3.1(a) 所示,
- (f) $x[n]$ 和 $h[n]$ 如图 P3.1(b) 所示,
- (g) $x[n]$ 和 $h[n]$ 如图 P3.1(c) 所示,

^①如同在 P25 的脚注中所叙述的, 在数学领域中, 奇异函数已在广义函数和分布论的名义下作了大量的研究。在本节中, 我们所作的研究和 P25 中给出的资料中所作的精确研究, 在思维方面有紧密地联系。

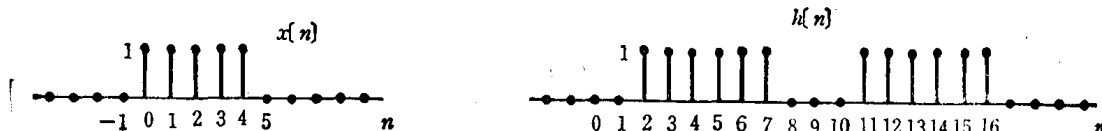
(h) $x[n]=1$, 对于所有的 n ,

$$h[n]=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0, \\ 4^n, & n < 0, \end{cases}$$

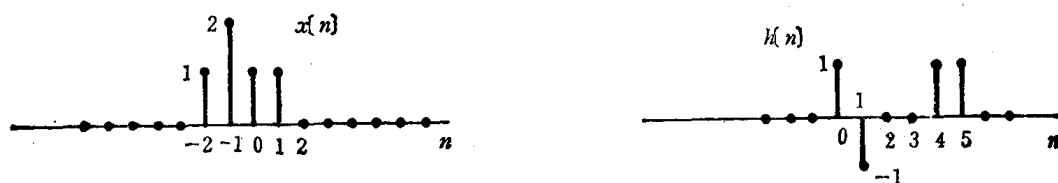
(i) $x[n]=u[n]-u[-n]$, $h[n]=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0, \\ 4^n, & n < 0. \end{cases}$

(j) $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$,

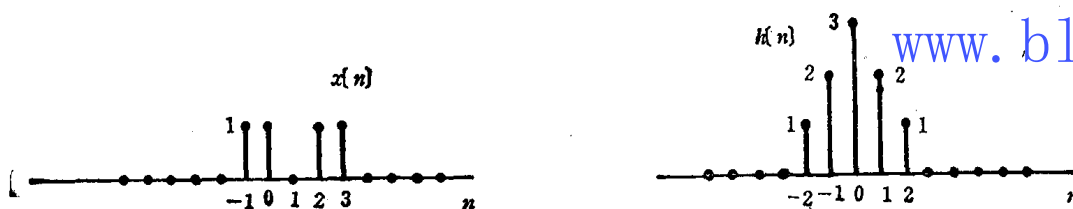
$$h[n]=4^n u[2-n],$$



(a)



(b)



(c)

图 P3.1

3.2. 对下列每一对波形, 利用卷积积分求出具有冲激响应 $h[t]$ 的 LTI 系统对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$, 画出所得结果的示意图。

(a) $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$, $h(t)=e^{-\beta t}u(t)$, (求 $\alpha \neq \beta$ 和 $\alpha = \beta$ 两种情况时的结果)

(b) $x(t)=u(t)-2u(t-2)+u(t-5)$, $h(t)=e^{2t}u(1-t)$,

(c) $x(t)=e^{-3t}u(t)$, $h(t)=u(t-1)$,

(d) $x(t)=e^{-2t}u(t+2)+e^{3t}u(-t+2)$, $h(t)=e^t u(t-1)$,

(e) $x(t)=\begin{cases} e^t, & t < 0, \\ e^{6t}-2e^{-t}, & t > 0, \end{cases}$

- $h(t)$ 如图 P3.2(a) 所示;
 (f) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P3.2(b) 所示;
 (g) $x(t)$ 如图 P3.2(c) 所示,
 $h(t) = u(-2-t)$;
 (h) $x(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$, 而 $h(t)$ 如图 P3.2(d) 所示;
 (i) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P3.2(e) 所示;
 (j) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P3.2(f) 所示;
 (k) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P3.2(g) 所示;
 (l) $x(t)$ 如图 P3.2(h) 所示,
 $h(t) = e^{-t}[u(t-1) - u(t-2)]$;
 (m) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P3.2(i) 所示。

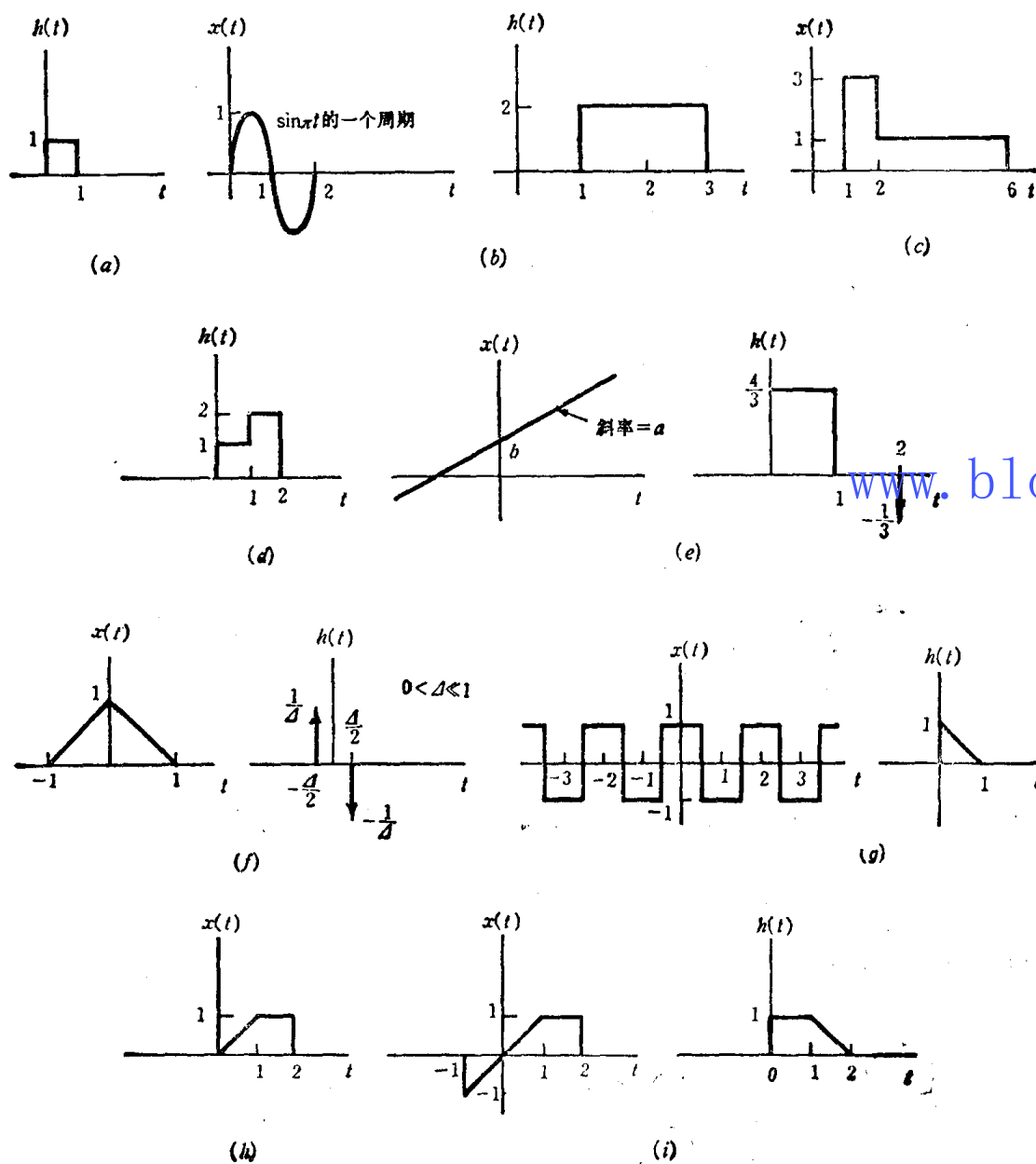


图 P3.2

3.3. (a) 如同3.1节中已经看到的那样, 离散时间线性系统(可能为时变系统)是用它对延迟单位样值 $\delta[n-k]$ 的响应 $h_k[n]$ 来表示的。对下列每一个 $h_k[n]$ 的选择, 确定这样表示的线性系统的输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 之间的显函数关系式:

- (i) $h_k[n] = \delta[n-k]$;
- (ii) $h_k[n] = \begin{cases} \delta[n-k], & k \text{ 偶数}, \\ 0, & k \text{ 奇数}, \end{cases}$
- (iii) $h_k[n] = \delta[2n-k]$;
- (iv) $h_k[n] = ku[n-k]$;
- (v) $h_k[n] = k\delta[n-2k] + 3k\delta[n-k]$;
- (vi) $h_k[n] = \begin{cases} \delta[n-k+1], & k \text{ 奇数}, \\ 5u[n-k], & k \text{ 偶数}, \end{cases}$

(b) 试证明在(a)中的系统哪些是因果的, 哪些不是的?

(c) 试确定并画出(a)中的每一个系统对输入 $x[n] = u[n]$ 的响应。

3.4. 考虑一个线性系统, 它对 $\delta(t-\tau)$ 有如下响应:

$$h_\tau(t) = u(t-\tau) - u(t-2\tau)$$

(a) 这个系统是否为时不变的?

(b) 它是因果系统吗?

(c) 对下列两个输入, 试求系统对每一个输入的响应:

- (i) $x_1(t) = u(t-1) - u(t-3)$;
- (ii) $x_2(t) = e^{-t}u(t)$ 。

3.5. 在连续时间和离散时间两种情况下, 卷积的重要性质之一是结合律。在本题中加以说明并验证该性质。

(a) 试通过证明式(P3.5—1)两边等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma$$

来证明等式

$$[x(t) * h(t)] * g(t) = x(t) * [h(t) * g(t)]. \quad (\text{P3.5—1})$$

(b) 设想两个 LTI 系统, 有如图 P3.5—1 所示的单位样值响应 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 。这两个系统如图 P3.5—2 所示级联, 设 $x[n] = u[n]$ 。

- (i) 计算 $y[n]$, 首先计算 $w[n] = x[n] * h_1[n]$, 然后计算 $y[n] = w[n] * h_2[n]$, 即 $y[n] = \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n]$;
- (ii) 通过先对 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 卷积以得到 $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$, 再对 $x[n]$ 和 $g[n]$ 卷积得到 $y[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$, 来求 $y[n]$ 。

(i) 和 (ii) 的解答应该是相等的, 从而说明离散时间卷积的结合律,

(c) 设想两个 LTI 系统的级联如图 P3.5—2 所示, 在这种情况下, 图中

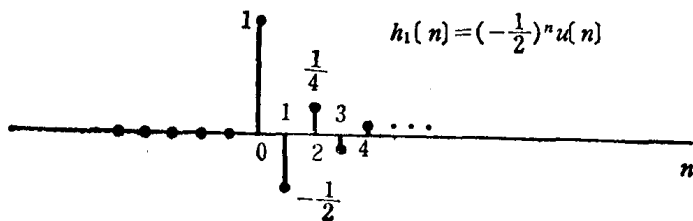
$$h_1[n] = \sin 8n$$

$$h_2[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

而输入为

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1],$$

试求输出 $y[n]$ (提示: 在此情况下, 利用卷积的结合律和交换律, 将极大地简化求解)。



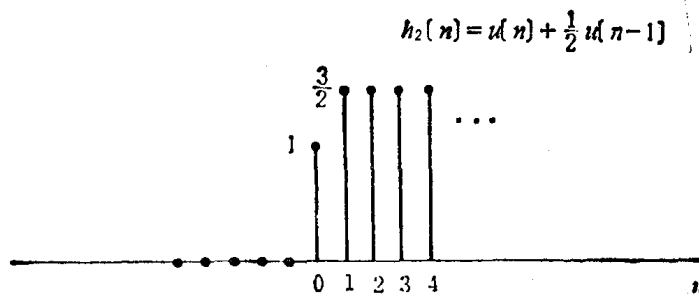


图 P 3.5—1

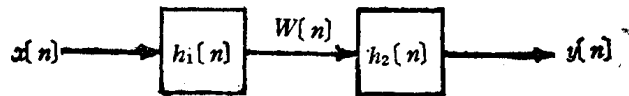


图 P 3.5—2

3.6. (a) 考虑如图 P 3.6—1 所示的 LTI 系统的连接。用 $h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$, $h_4[n]$ 和 $h_5[n]$ 表示总的冲激响应 $h[n]$;

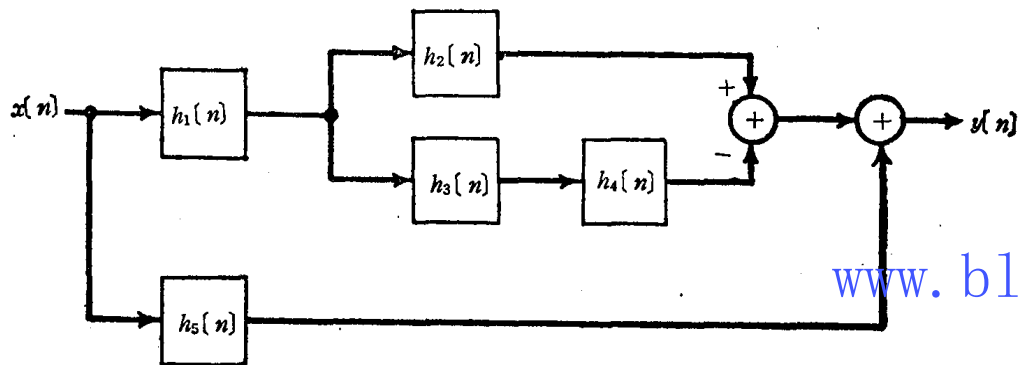


图 P 3.6—1

(b) 当 $h_1[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n] - u[n-3]\}$,

$$h_2[n] = h_3[n] = (n+1)u[n],$$

$$h_4[n] = \delta[n-1],$$

$$h_5[n] = \delta[n] - 4\delta[n-3]$$

时, 试求 $h[n]$;

(c) 若 $x[n]$ 如图 P 3.6—2 所示, 画出 (b) 中系统的响应。

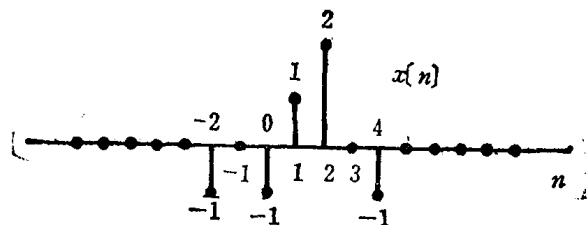


图 P 3.6—2

3.7. 假设三个因果 LTI 系统的相互级联如图 P 3.7—1 所示。冲激响应 $h_2[n]$ 由下式给出

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2],$$

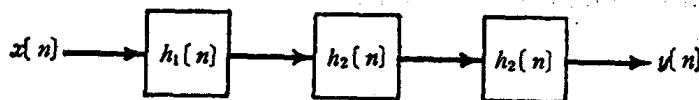


图 P 3.7—1

并且总的冲激响应如图 P 3.7—2 所示。

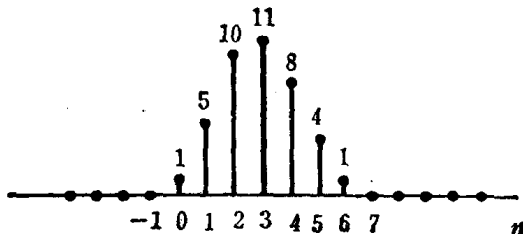


图 P 3.7—2

(a) 试求冲激响应 $h_1[n]$;

(b) 试求整个系统对以下输入的响应

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

3.8. (a) 假设一个 LTI 系统，它的输入和输出通过下列方程式相联系：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-6(t-\tau)} x(\tau-2) d\tau$$

此系统的冲激响应 $h(t)$ 是什么？

(b) 当输入 $x(t)$ 如图 P 3.8—1 所示时，试确定系统的响应，

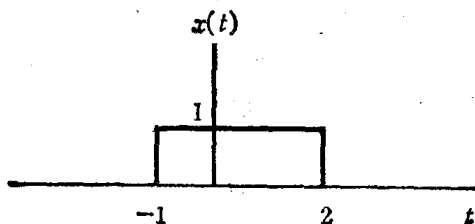


图 P 3.8—1

(c) 考虑如图 P 3.8—2 中的 LTI 系统的连接。图中 $h(t)$ 和 (a) 中的相同。当输入 $x(t)$ 仍然由图 P 3.8—1 给出时，试求输出 $y(t)$ 。用两种方法完成这个计算：

(i) 计算互连系统的总冲激响应，然后利用卷积积分求 $y(t)$ 的值。

(ii) 在不用卷积积分的情况下，利用 (b) 中的结果，连同卷积的性质一起，求出 $y(t)$ 。

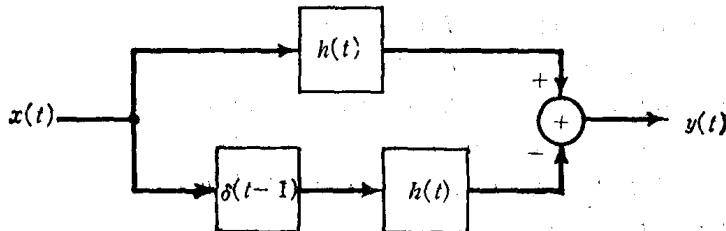


图 P 3.8—2

3.9. (a) 设 $h(t)$ 是如图 P 3.9—1 (a) 所示的三角形脉冲，并设 $x(t)$ 为如图 P 3.9—1 (b) 所示的冲激串，亦即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

(P 3.9—1)

对下列 T 值求出并画出 $y(t) = x(t) * h(t)$,

(i) $T = 4$;

(ii) $T = 2$;

(iii) $T = \frac{3}{2}$;

(iv) $T = 1$.

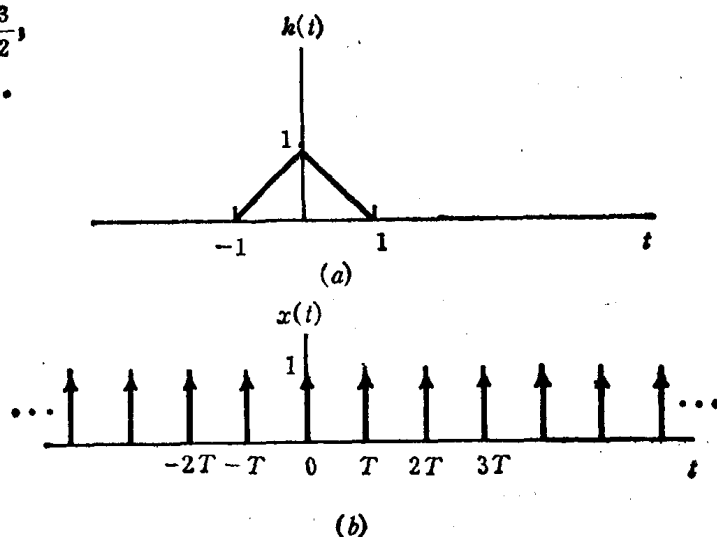


图 P3.9—1

(b) 考虑一个 LTI 系统, 其冲激响应为 $h(t) = e^{-t}u(t)$ 。当输入 $x(t)$ 是式 (P3.9—1) 在 $T=1$ 时的冲激串时, 试求出并画出 $y(t)$;

(c) 设 $x(t)$ 为冲激串

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta(t-k) \quad (\text{P3.9—2})$$

当式 (P3.9—2) 中的 $x(t)$ 是输入时, 试求出并画出 LTI 系统的输出。该系统的冲激响应 $h(t)$ 如图 P3.9—2 所示。

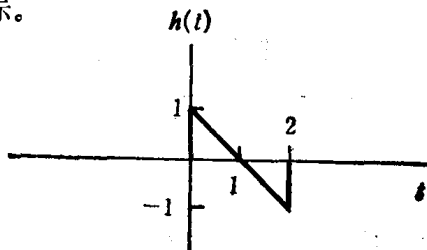


图 P3.9—2

3.10. 试确定以下每种说明或等式是否正确。对于你认为是正确的等式, 请给出证明; 若认为是错误的, 希作出反例。

(a) $x[n] * \{h[n]g[n]\} = \{x[n] * h[n]\}g[n]$;

(b) $a^n x[n] * a^n h[n] = a^n \{x[n] * h[n]\}$;

(c) 若 $y(t) = x(t) * h(t)$, 则 $y(2t) = 2x(2t) * h(2t)$;

(d) 若 $y[n] = x[n] * h[n]$, 则 $y[2n] = 2x[2n] * h[2n]$ 。

(e) 若 $x(t)$ 和 $h(t)$ 是奇数, 则 $y(t) = x(t) * h(t)$ 是偶数;

(f) 若 $y(t) = x(t) * h(t)$,

$$\text{则 } \mathcal{E}\{y(t)\} = x(t) * \mathcal{E}\{h(t)\} + \mathcal{E}\{x(t)\} * h(t)。$$

3.11. (a) 若

$$x(t) = 0, \quad |t| > T_1$$

和

$$h(t) = 0, \quad |t| > T_2$$

则

$$x(t) * h(t) = 0, |t| > T_s$$

对于某个正数 T_s , 用 T_1 和 T_2 表示 T_s ,

- (b) 一离散时间 LTI 系统有输入 $x[n]$, 冲激响应 $h[n]$ 和输出 $y[n]$ 。若 $h[n]$ 除在 $N_0 \leq n \leq N_1$ 区间之外都为零, 而 $x[n]$ 除在 $N_2 \leq n \leq N_3$ 区间之外都为零, 则输出 $y[n]$ 除在 $N_4 \leq n \leq N_5$ 之外均限定为零。

(i) 试用 N_0, N_1, N_2 和 N_3 来表示 N_4 和 N_5 ;

(ii) 若区间 $N_0 \leq n \leq N_1$, 具有长度 M_h , 区间 $N_2 \leq n \leq N_3$, 具有长度 M_x , 而区间 $N_4 \leq n \leq N_5$, 有长度 M_y , 试用 M_h 和 M_x 表示 M_y ;

- (c) 假设一离散时间 LTI 系统, 具有如下的特性: 当所有的 $n \geq 10$ 时, 输入 $x[n] = 0$, 则对于所有的 $n \geq 15$, 输出 $y[n] = 0$ 。系统的冲激响应 $h[n]$ 必须满足什么条件时, 这个假设才成立?

- (d) 假设一个 LTI 系统, 有如图 P 3.11 所示的冲激响应。为了确定 $y(0)$, 我们必须知道的 $x(t)$ 在什么区间范围中?

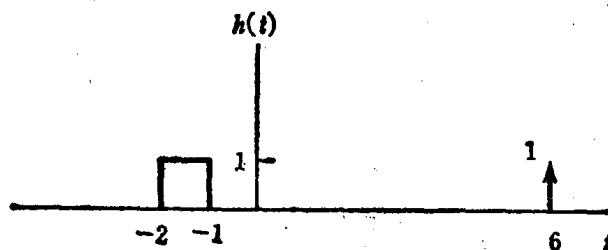


图 P 3.11

- 3.12. 设 x_1 和 x_2 为两个周期信号, 有公共周期 T_0 , 不难验证 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的卷积不收敛。然而, 有时认为这种信号的卷积的形式是很有用的, 被称为周期卷积。具体说, 定义 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的周期卷积为

$$y(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = x_1(t) \otimes x_2(t) \quad (\text{P 3.12-1})$$

注意, 我们恰巧在一个周期内进行积分。

- (a) 试证明 $y(t)$ 是周期为 T_0 的周期信号;

- (b) 假设信号

$$y_a(t) = \int_a^{a+T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

式中 a 是任意实数, 证明:

$$y(t) = y_a(t)$$

提示: 将 a 写成 $a = KT_0 + b$, 其中 $0 \leq b < T_0$ 。

- (c) 计算描绘在图 P 3.12-1 中的信号的周期卷积, 图中取 $T_0 = 1$ 。

- (d) 证明周期卷积服从分配律和交换律, 即

$$x_1(t) \otimes x_2(t) = x_2(t) \otimes x_1(t)$$

和

$$x_1(t) \otimes [x_2(t) \otimes x_3(t)] = [x_1(t) \otimes x_2(t)] \otimes x_3(t)$$

用同样的方法, 可以定义具有相同的周期 N_0 的两个离散时间周期信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的周期卷积 $y[n]$ 。由下列表示式给出

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} x_1[k] x_2[n-k]$$

又, 可以验证 $y[n]$ 是周期为 N_0 的周期信号。实际上, 通过在任意 N_0 个连续的 K 值上求和来计算, 即是

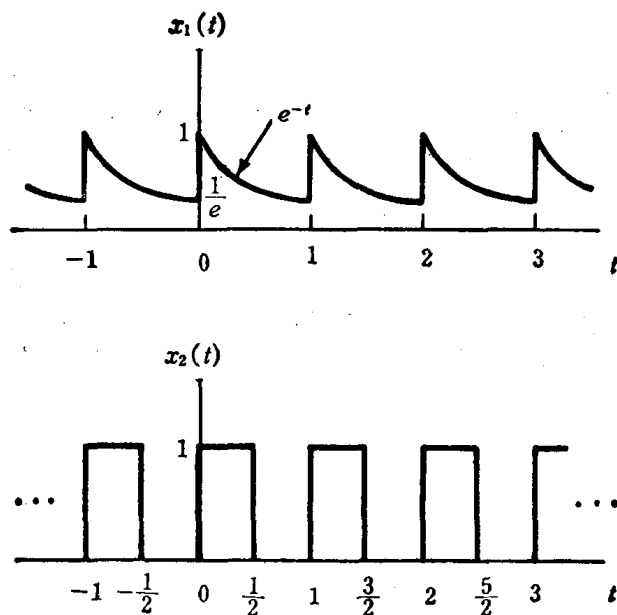


图 P 3.12-1

$$y[n] = \sum_{k=m}^{N_0+m-1} x_1[k] x_2[n-k]$$

m 为任意整数。

(e) 已知图 P 3.12-2 中的信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ ，这些信号是周期性的，它的周期为 6，用 $N_0=6$ 计算并画出周期卷积。

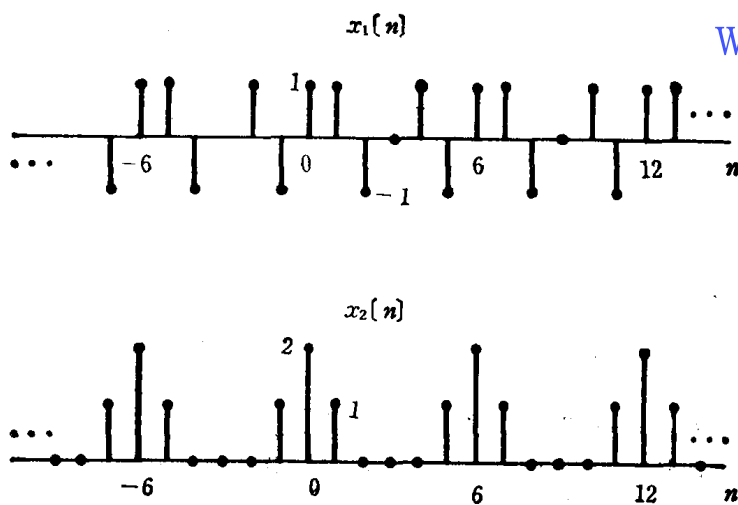


图 P 3.12-2

(f) 因为这些信号是周期为 6 的周期信号，它们也是周期为 12 的周期信号。用 $N_0=12$ 计算 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的周期卷积；

(g) 通常，若 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是周期为 N 的周期信号，用 $N_0=N$ 计算周期卷积，它与当 k 为正整数时用 $N_0=kN$ 得到的周期卷积之间的关系是什么？

3.13. 我们定义在连续时间信号 $v(t)$ 下的面积为

$$A_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt$$

证明：若 $y(t) = x(t) * h(t)$ ，则

$$A_y = A_s A_h$$

3.14. (a) 试证明: 若 LTI 系统对 $x(t)$ 的响应是输出 $y(t)$, 则系统对

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

的响应是 $y'(t)$ 。用三种方法完成此题:

(i) 直接从线性和时不变性的特性及以下事实来证明,

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$$

(ii) 通过对卷积积分作微分运算来证明,

(iii) 通过分析图 P3.14 中系统来证明,



图 P3.14

(b) 证明下列关系的正确性:

(i) $y'(t) = x(t) * h'(t)$;

(ii) $y(t) = \left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) * h'(t)$

$$= \int_{-\infty}^t [x'(\tau) * h(\tau)] d\tau = x'(t) * \left(\int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \right),$$

提示: 利用 (a) 的 (iii) 中的方框图与 $u_1(t) * u_{-1}(t) = \delta(t)$ 是容易证明的。

(c) 一个 LTI 系统对输入 $x(t) = e^{-5t}u(t)$ 的响应为 $y(t) = \sin \omega_0 t$ 。借助于 (a) 的结果, 确定该系统的冲激响应;

(d) 第二个 LTI 系统对输入 $x(t) = (\sin t)u(t)$ 的响应为 $y(t) = (e^t - 1)u(t)$, 求该系统的冲激响应;

(e) 利用下式计算题 3.2(b) 中两个信号的卷积

$$y(t) = \int_{-\infty}^t [x'(\tau) * h(\tau)] d\tau$$

(f) 设 $s(t)$ 为连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应。利用 (b) 的结果试推导输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 由下式给出

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) s(t-\tau) d\tau \quad (\text{P3.14-1})$$

并证明

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (\text{P3.14-2})$$

(g) 利用式 (P3.14-1) 来确定 LTI 系统对输入 $x(t) = e^t u(t)$ 的响应, 系统的阶跃响应为

$$s(t) = e^{-3t} - 2e^{-2t} + 1)u(t)$$

(h) 设 $s[n]$ 为离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应。式 (P3.14-1) 和式 (P3.14-2) 的离散时间对应式是什么?

(i) 利用式 (P3.14-1) 的离散时间形式来确定 LTI 系统对输入 $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ 的响应, 系统的阶跃响应为

$$s[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+1]$$

3.15. 给定某一个具有冲激响应 $h_0(t)$ 的线性时不变系统。已知当输入是 $x_0(t)$ 时, 输出是图 P3.15 中所画出的 $y_0(t)$, 并给出下列一组加到具有给定冲激响应的线性时不变系统的输入:

输入 $x(t)$	冲激响应 $h(t)$
(a) $x(t) = 2x_0(t)$	$h(t) = h_0(t)$
(b) $x(t) = x_0(t) - x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t)$
(c) $x(t) = x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t+1)$
(d) $x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(t)$
(e) $x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(-t)$
(f) $x(t) = x_0'(t)$	$h(t) = h_0'(t)$

其中 $x_0'(t)$, $h_0'(t)$ 表示 $x_0(t)$ 和 $h_0(t)$ 的一阶导数。

对这些情况的每一种, 确定是否已给出足够的条件, 来求出当输入是 $x(t)$ 和系统有冲激响应 $h(t)$ 时的输出 $y(t)$ 。若可以求出 $y(t)$, 请画出一个精确的图, 将数值清楚地表示在图上。

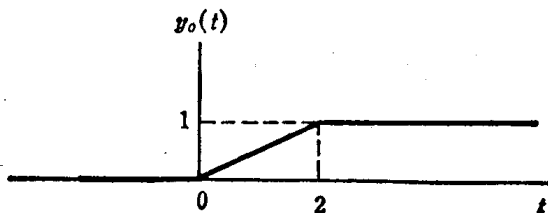


图 P 3.15

3.16. 连续时间 LTI 系统的一种重要类型, 是系统对单位冲激的响应由等间隔的冲激串组成。这就是, 若这种系统的输入是 $x(t) = \delta(t)$, 则输出是

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \delta(t - nT) \quad (\text{P 3.16-1})$$

式中 $T > 0$ 是冲激间隔, h_n 为给定的常数。这类系统可以用抽头延迟线的形式实现。抽头延迟线的例子如图 P 3.16-1 所示, 这系统的冲激响应为

$$\sum_{n=0}^3 h_n \delta(t - nT)$$

www.blogoil.com

图中标明“延迟 T ”的系统是理想延迟单元。它的输出是输入 $x(t)$ 的延迟形式, 即 $y(t) = x(t - T)$ 。在每个这种延迟单元的后面 (及第一个延迟单元的前面), 信号被“抽头”分出, 乘以固定增益 (h_0, h_1, h_2 等), 而输出是输入延迟形式的加权和。正如我们在本题的最后部分将看到, 抽头延迟线对于所列举响应特性的 LTI 系统的设计和实现很有实用价值。

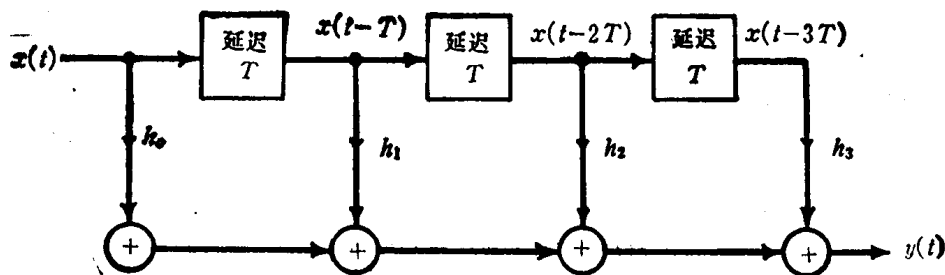


图 P 3.16-1

(a) 已知 LTI 系统的冲激响应由式 (P 3.16-1) 给定。假设该系统的输入是一个冲激串

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta(t - nT)$$

试证明输出 $y(t)$ 也是冲激串

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \delta(t - nT)$$

式中的系数 $\{y_n\}$ 定为序列 $\{x_n\}$ 和 $\{h_n\}$ 的离散时间卷积,

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k h_{n-k}$$

(P3.16-2)

- (b) 由三个相同抽头的延迟线级联组成的系统, 每个延迟线如图 P3.16-1 所示, 并有 $h_0=1$, $h_1=-1$, $h_2=h_n=0$, 该系统的冲激响应是什么?
- (c) 已知抽头延迟线如图 P3.16-2 所示, 图中每个抽头的增益等于延迟时间 T 。假设该系统的输入是

$$x(t) = e^{-t} u(t)$$

仔细地画出 $y(t)$ 。在 $T=0$ 的极限情况下, 即, 在抽头间有越来越短的延迟, 同时抽头增益变得越来越小时, $y(t)$ 是什么? 若我们称这个极限形式为输出 $y_0(t)$, 对于 $T>0$ 的任意给定值, 试证明

$$\frac{T}{1-e^{-T}} y_0(t+T)$$

形成 $y(t)$ 的包络线, 即该信号是连接 $y(t)$ 的逐个峰顶的平滑曲线。

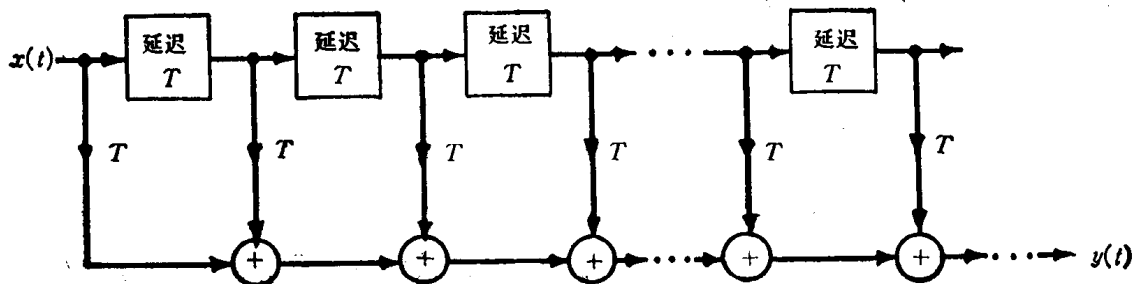


图 P3.16-2

- (d) 已知系统的冲激响应呈分段常数, 即

$$h(t) = h_n \quad (\text{对于 } n < t < n+1).$$

(P3.16-3)

信号 $h(t)$ 如图 P3.16-3 所示。试证明该系统可以由一个如式 (P3.16-1) 所示冲激响应的抽头延迟线和如图 P3.16-4 所示的 LTI 系统的级联来实现。

- (e) 试证明, 我们也能将式 (P3.16-3) 所给定的系统体现成为抽头延迟线和积分器的级联。从确定抽头系数来证明, 要使 $h(t)$ 具有所需的形状时, 抽头系数应该是什么。

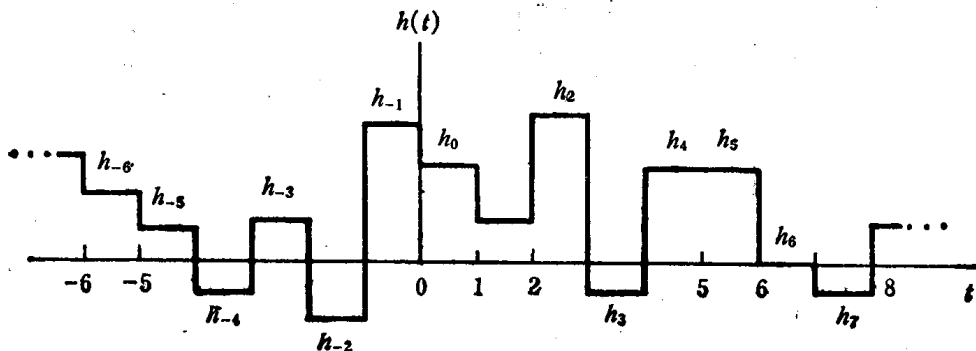


图 P3.16-3

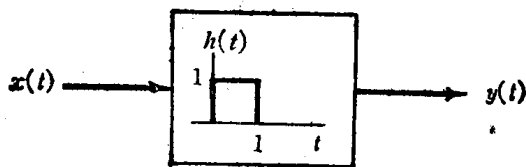


图 P3.16-4

注意, 通过上面两种方法中的任何一种, 可以得到一个系统, 它具有的冲激响应是任意所需冲激响应的阶梯近似值。本题中我们选择抽头间的时间间隔 T 为一, 其实 T 可为任何值, 结果是, 我们利用抽头延迟线能够得到任意精确的阶梯近似值。这一点, 以及实现抽头延迟线的廉价元件的发展, 已使这类系统在许多应用中引人注目。

(f) 作为最后的观察, 值得注意的是, 计算式 (P 3.16—3) 中 $h(t)$ 和相同种类的另一个信号

$$x(t) = x_n \quad (\text{当 } n < t < n+1 \text{ 时}) \quad (\text{P 3.16—4})$$

的卷积比较容易。具体说, 利用 (a) 和 (d) 的结果, 以及卷积的交换律和分配律, 证明卷积 $x(t) * h(t)$ 能按如下方法来确定:

(i) 计算式 (P 3.16—2) 中的离散卷积, 式中 h_n 和 x_n 分别由式 (P 3.16—3) 和 (P 3.16—4) 给出;

(ii) 然后, 当 $t = n+1$ 时, $x(t) * h(t) = y_n$ 。又当 $n+1 < t < n+2$ 时, 其值处在连接 y_n 和 y_{n+1} 的直线上 (见图 P 3.16—5)。

(g) 应用 (f) 的方法来求描绘在图 P 3.16—6 中信号的卷积。

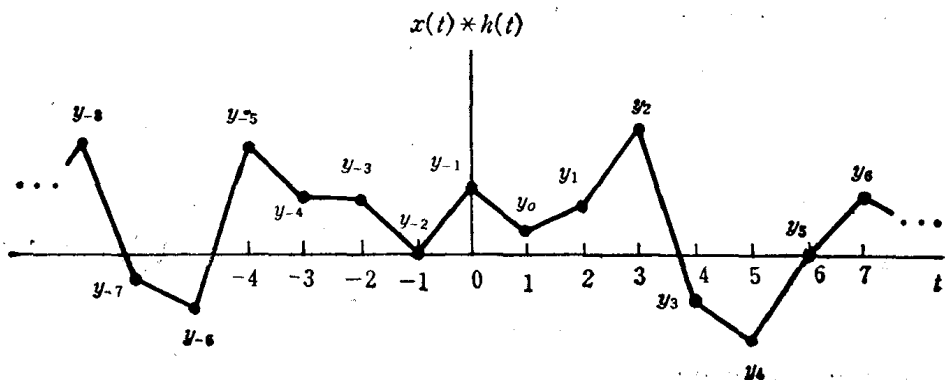


图 P 3.16—5

www.blogoil.com

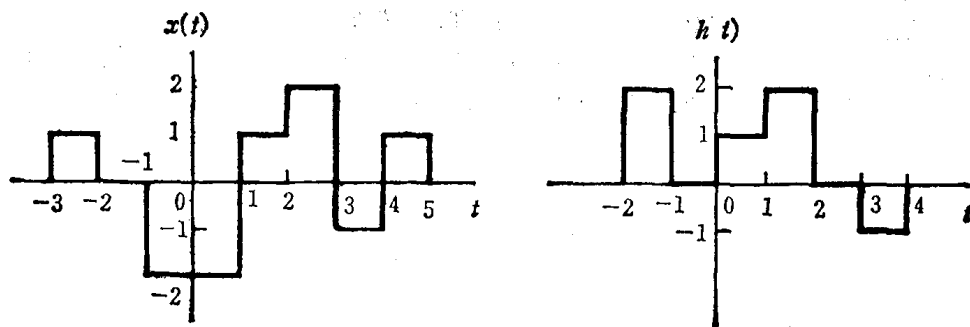


图 P 3.16—6

3.17. 对离散时间 LTI 系统卷积和表示式的研究, 是基于把单位样值函数当作任意输入信号表示式的基本单元。这个表示式, 加上关于对 $\delta[n]$ 的响应和迭加特性的知识, 使我们能用卷积表示系统对任意输入的响应。本题中, 我们考虑利用其他信号作为任意输入信号的基本构成单元。

考虑下列一组信号:

$$\phi[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\phi_k[n] = \phi[n-k] \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

(a) 试证明, 任意信号可用下面形式表示:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \phi[n-k]$$

- 这是通过用信号 $x[n]$ 的值来表示系数 a_n 的一个显函数表示式(提示: $\delta[n]$ 的表示式是什么?)
- (b) 设 $r[n]$ 为 LTI 系统对输入 $x[n]=\phi[n]$ 的响应。用 $r[n]$ 和 $x[n]$ 求出对任意输入 $x[n]$ 的响应 $y[n]$ 的表示式。
- (c) 通过求出信号 $\psi[n]$, 试证明 $y[n]$ 可写为
- $$y[n]=\psi[n]*x[n]*r[n],$$
- (d) 利用 (c) 的结果, 用 $r[n]$ 表示系统的冲激响应。并证明
- $$\psi[n]*\phi[n]=\delta[n]$$

3.18. 正如我们在题3.17中对离散时间信号和系统的分析中看到的, 可以考虑利用除了移位单位冲激以外的基本输入信号来表示连续时间 LTI 系统。例如, 本题中我们考虑的 LTI 系统, 对于如图 P3.18(a) 所示的输入 $p(t)$, 有如图 P3.18(b) 所示的响应 $q(t)$ 。

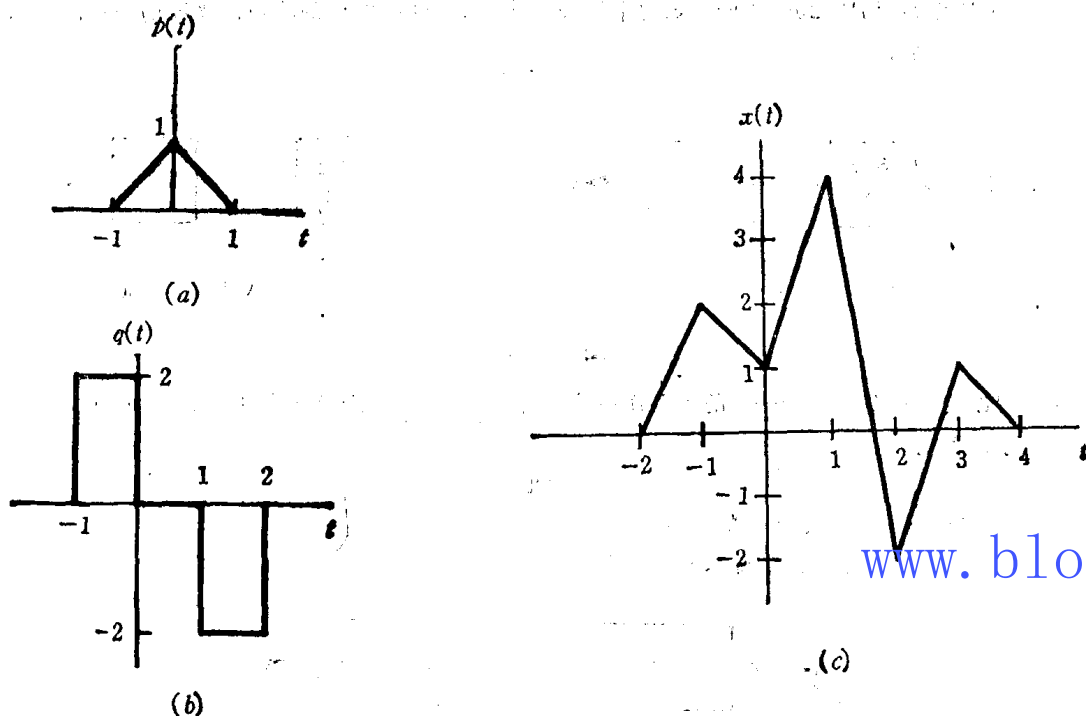


图 P3.18

- (a) 试证明图 P3.18(c) 的输入信号 $x(t)$ 可表示为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n p(t-n)$$

并求出 a_n 的值。

- (b) 根据基本单元输入 $p(t-n)$ 的响应, 写出对图 P3.18(c) 所示的输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 的表示式, 并画出 $y(t)$ 。
- (c) 试求出系统对单位斜坡输入 $u_{-2}(t)$ 的响应。
- (d) 试求该系统的阶跃响应和冲激响应。[提示: 这里可利用 (c) 和题3.14]
- (e) 用下列单元求系统的方框图表示: 积分器, 微分器, 理想单位延迟单元 (即这种延迟单元的输出等于输入被延迟了 1 秒), 加法器和信号乘以常系数的单元。

3.19. 已知离散时间 LTI 系统有单位样值响应

$$h[n]=(n+1)a^n u[n]$$

式中 $|a|<1$ 。

试证明该系统的阶跃响应如下式

$$S[n] = \left[\frac{1}{(a-1)^2} - \frac{a}{(a-1)^2} a^n + \frac{a}{(a-1)} (n+1)a^n \right] u[n]$$

提示：注意下式

$$\sum_{k=0}^N (K+1)a^k = \frac{d}{da} \sum_{k=0}^{N+1} a^k$$

3.20. 在课文中我们已了解到，两个 LTI 系统级联的总的输入—输出关系不取决于它们级联的次序。这一交换律性质，取决于两个系统的线性和时不变性。本题举几个例子证明这个论点。

(a) 已知两个离散时间系统 A 和 B，系统 A 是有单位样值响应 $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ 的 LTI 系统。另一方面，系统 B 是线性的但是时变系统。具体说，若加到系统 B 的输入是 $w[n]$ ，它的输出 $z[n]$ 给出如下

$$z[n] = nw[n]$$

通过计算如图 P 3.20—1 所示的每个系统对输入 $x[n] = \delta[n]$ 的响应，来证明交换性质不适用于这两个系统。

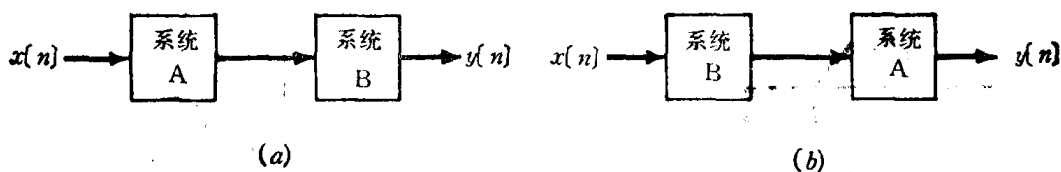


图 P 3.20—1

(b) 假设我们将图 P 3.20—1 的各互连系统中的系统 B，换成输入 $w[n]$ 和输出 $z[n]$ 之间有下列关系的系统

$$z[n] = w[n] + 2$$

在这种情况下重复 (a) 的计算。

(c) 图 P 3.20—2 系统总的输入—输出关系是什么？

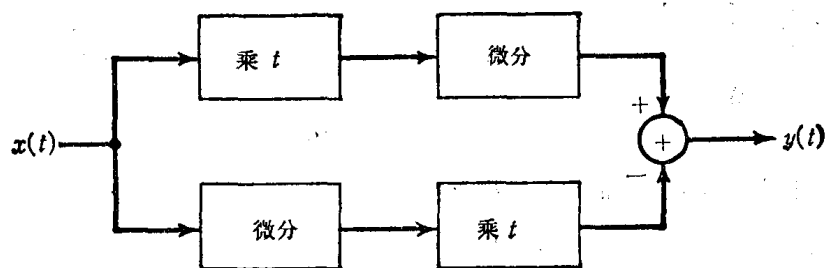


图 P 3.20—2

3.21. 在课文中我们证明，若 $h[n]$ 是绝对可和，

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

则 LTI 系统是稳定的。这意味着绝对可和是稳定性的充分条件。本题我们将证明它也是必要条件。已知一个 LTI 系统有冲激响应 $h[n]$ ，假设它不是绝对可和的，即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty$$

(a) 假设该系统的输入是

$$x[n] = \begin{cases} 0, & \text{若 } h[-n] = 0, \\ \frac{h[-n]}{|h[-n]|}, & \text{若 } h[-n] \neq 0. \end{cases}$$

这个输入信号是否表示一个有界输入？若是，则要使

$$|x[n]| \leq B \quad (\text{对全部 } n)$$

最小的数 B 是什么?

(b) 对输入的这个特殊选择, 在 $n=0$ 时计算输出。这个结果是否证明了绝对可和是稳定性的必要条件?

(c) 用相同的方法, 试证明, 对于连续时间 LTI 系统, 只要它的冲激响应是绝对可积时, 系统便是稳定的。

3.22. 已知两个系统的级联如图 P3.22 所示。第一个系统 A , 已知为 LTI 系统。第二个系统 B , 已知为系统 A 的逆系统。设 $y_1(t)$ 表示系统 A 对 $x_1(t)$ 的响应, $y_2(t)$ 表示系统 A 对 $x_2(t)$ 的响应。

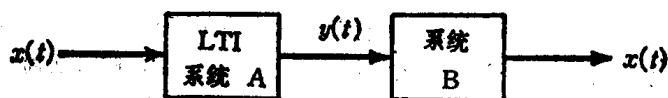


图 P3.22

(a) 系统 B 对输入 $ay_1(t) + by_2(t)$ 的响应是什么? 其中 a 和 b 是常数。

(b) 系统 B 对输入 $y_1(t - \tau)$ 的响应是什么?

3.23. 试确定下面有关 LTI 系统的每个叙述是否正确, 并说明理由。

(a) 若 $h(t)$ 是 LTI 系统的冲激响应, 并且 $h(t)$ 是周期性的和非零的, 则这系统是不稳定的。

(b) 因果 LTI 系统的逆系统总是因果的。

(c) 若对每个 n , $|h[n]| \leq K$, 其中 K 为已知数, 则 $h[n]$ 为冲激响应的 LTI 系统是稳定的。

(d) 若离散时间 LTI 系统有一个有限持续时间的冲激响应 $h[n]$, 则系统是稳定的。

(e) 若 LTI 系统是因果的, 则它是稳定的。

(f) 一个非因果的 LTI 系统和一个因果的 LTI 系统级联, 必定是非因果的。

(g) 一个连续时间 LTI 系统, 只有它的阶跃响应 $s(t)$ 是绝对可积时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

该系统是稳定的。

(h) 一个离散时间 LTI 系统, 只有当它的阶跃响应 $s[n]$ 在 $n < 0$ 时为零, 系统是因果的。

3.24. 下列各式是 LTI 系统的冲激响应, 系统或是连续时间系统或是离散时间系统。试确定是否每个系统都是稳定的或是因果的, 证明你的答案。

(a) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$

(b) $h[n] = (0.99)^n u[n+3],$

(c) $h[n] = (0.99)^n u[-n],$

(d) $h[n] = (4)^n u[2-n],$

(e) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[n-1],$

(f) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[1-n],$

(g) $h[n] = n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$

(h) $h(t) = e^{-3t} u(t-1),$

(i) $h(t) = e^{-3t} u(1-t),$

(j) $h(t) = e^{-t} u(t+100),$

(k) $h(t) = e^t u(-1-t),$

(l) $h(t) = e^{-4|t|},$

www.blogoil.com

(m) $h(t) = te^{-t}u(t)$;

(n) $h(t) = (2e^{-t} - e^{-(t-100)/100})u(t)$ 。

3.25. 逆系统的一个重要的应用,是在希望除去某种类型失真的场合中。一个很好的例子是从声音中消除回音的问题。例如,若一个音乐厅有可感觉到的回音,则起始的声音脉冲后面,会紧跟着有一个有规则间隔的,有衰减的声音。因此,这种现象常采用的模型是由下面的一系列冲激组成的冲激响应的 LTI 系统

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k_k \delta(t - kT) \quad (\text{P 3.25—1})$$

式中回音的发生相隔 T 秒,而 k_k 表示由原始声音冲激产生的第 k 次回音的增益系数。

(a) 假设 $x(t)$ 表示原始的声音信号(例如,由管弦乐队产生的音乐),而 $y(t) = x(t) * h(t)$ 是未加消除回音处理所听到的实际信号。为消除由于回音而引入的失真,假设话筒用来感知 $y(t)$,并且将所得的信号变换成电信号。我们也将用 $y(t)$ 来表示该信号,它是与声音信号等效的电信号,并且我们可以在不同位置放置声—电变换系统。

注意到重要的一点,具有由式 (P 3.25—1) 给出的冲激响应的系统是可逆的。因此,可求出具有冲激响应 $g(t)$ 的 LTI 系统,使得

$$y(t) * g(t) = x(t),$$

所以用这个方法处理电信号 $y(t)$,并且再变回到声音信号,就可以消除令人生厌的回音。

所需的冲激响应 $g(t)$ 也是一个冲激串

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT)$$

确定相继的 g_k 必须满足的代数方程式,求出用 h_k 表示的 g_0, g_1, g_2 (提示:可以发现题 3.16

(a) 的结果是有用的)。

(b) 假设 $h_0 = 1, h_1 = \frac{1}{2}$ 及在所有的 $i \geq 2$ 时 $h_i = 0$, 在这种情况下, $g(t)$ 是什么?

(c) 产生回音的一个好的模型如图 P 3.25 所示,因此,每个相继的回音代表 $y(t)$ 的反馈变型,它延迟了 T 秒,且幅度改变了 α 倍,当相继的回音是有衰减时,一般 $0 < \alpha < 1$ 。

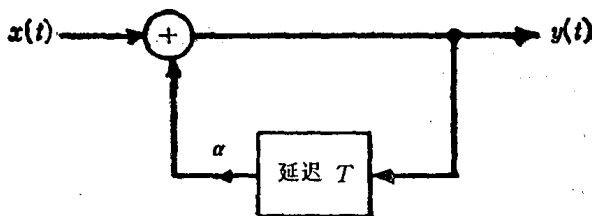


图 P 3.25

- i) 该系统的冲激响应是什么(假设初始静止,即,若当 $t < 0$ 时 $x(t) = 0$, 则 $t < 0$ 时 $y(t) = 0$);
- (ii) 试证明,若 $0 < \alpha < 1$ 时,系统是稳定的,若 $\alpha > 1$ 时,系统是不稳定的;
- (iii) 在这种情况下 $g(t)$ 是什么? 利用加法器,系数相乘器,和 T 秒延迟单元构成逆系统。

由于我们所考虑的应用,虽则我们用连续时间系统进行了这种讨论,同样的一般性概念也适于离散时间,即,有冲激响应

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - kN]$$

的 LTI 系统是可逆的,而且 LTI 系统的逆系统有冲激响应

$$g[n] = \sum_{k=0}^{\infty} g_k[n - kN].$$

不难验证, g_k 满足如 (a) 中所示同样的代数方程式。

(d) 现在考虑离散时间 LTI 系统,它有冲激响应

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$$

这系统是不可逆的。求产生相同输出的两个输入。

- 3.26. 在题3.23中介绍和研究了连续时间信号相关函数的某些基本性质。离散时间信号相关函数的性质与连续时间信号的相关函数在本质上是相同的。而且在许多应用中,两者都非常重要(正如下面两题中所讨论的)。本题中介绍离散时间相关函数,并讨论它的几个性质。

设 $x[n]$ 和 $y[n]$ 为两个实数离散时间信号。 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的自相关函数 $\phi_{xx}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$, 分别由下列表示式定义

$$\phi_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+n]x[m],$$

$$\phi_{yy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m+n]y[m],$$

而互相关函数由下式给出

$$\phi_{xy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+n]y[m],$$

$$\phi_{yx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m+n]x[m].$$

正如在连续时间中一样,这些函数具有某些对称的特性。具体说, $\phi_{xx}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 是偶函数, 而 $\phi_{xy}[n] = \phi_{yx}[-n]$ 。

- (a) 计算图 P3.26 所示的信号 $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ 和 $x_4[n]$ 的自相关序列。

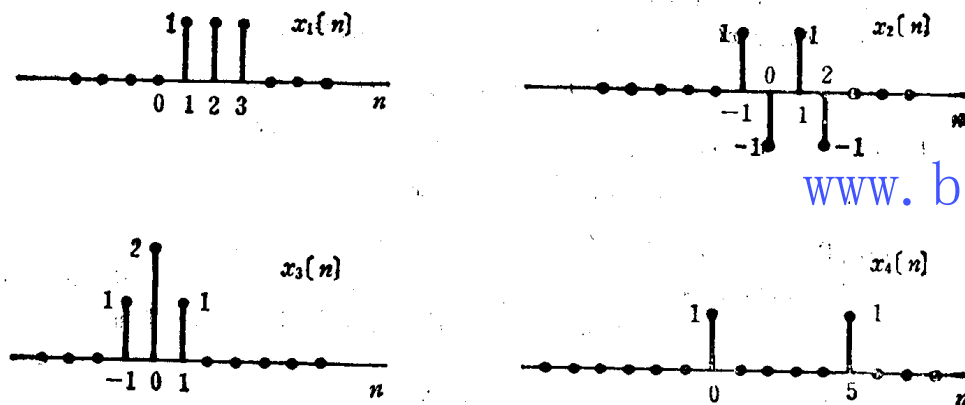


图 P3.26

- (b) 计算互相关序列

$\phi_{x_ix_j}[n]$, $i \neq j$, $i, j=1, 2, 3, 4$, 对于 $x_i[n]$, $i=1, 2, 3, 4$, 如图 P3.26 所示。

- (c) 设 $x[n]$ 是具有单位样值响应 $h[n]$ 的 LTI 系统的输入, 并设相对应的输出为 $y[n]$ 。

试求用 $\phi_{xx}[n]$ 和 $h[n]$ 表示的 $\phi_{xy}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 的表示式。并证明 $\phi_{xy}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 分别能看作以 $\phi_{xx}[n]$ 为输入的 LTI 系统的输出。提示: 从清楚地表明各系统的冲激响应来进行证明。

- (d) 设图 P3.26 中 $h[n] = x_1[n]$, 并在输入 $x[n]$ 等于 $x_1[n]$ 时, $y[n]$ 是具有冲激响应 $h[n]$ 的 LTI 系统的输出。利用 (c) 的结果计算 $\phi_{xy}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 。

- 3.27. 设如图 P3.27 所示的 $h_1(t)$, $h_2(t)$ 和 $h_3(t)$ 是三个 LTI 系统的冲激响应。这三个信号称为沃尔什函数。这是很实用很重要的函数, 因为它们能容易地通过数字逻辑电路形成, 又因为和这些函数相乘的过程能通过极性转换开关来实现。

- (a) 确定并画出具有下列性质的连续时间信号 $x_1(t)$ 。

(i) $x_1(t)$ 是实数;

(ii) 当 $t < 0$ 时, $x_1(t) = 0$;

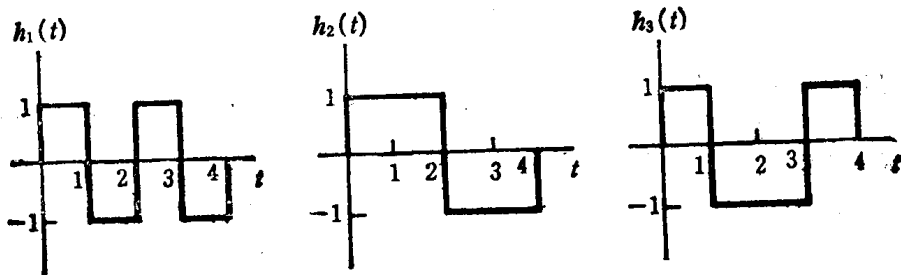


图 P3.27

- (iii) 当 $t \geq 0$, $|x_1(t)| \leq 1$;
 (iv) $y_1(t) = x_1(t) * h_1(t)$ 使在 $t=4$ 时, 达到尽可能大。
 (b) 对 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 重复 (a), 使 $y_2(t) = x_2(t) * h_2(t)$ 和 $y_3(t) = x_3(t) * h_3(t)$, 使得在 $t=4$ 时都达到尽可能大。
 (c) 对于 $i, j=1, 2, 3$, 在时间 $t=4$ 时 $y_{ij}(t) = x_i(t) * h_j(t)$, $i \neq j$ 的值是什么?
 (d) 试证明, 如何来实现各个冲激响应 $h_j(t)$, 如像抽头延迟线和积分器级联时的 LTI 系统 (见题 3.16) 那样。

具有冲激响应 $h_i(t)$ 的系统称为信号 $x_i(t)$ 的匹配滤波器。因为, 为产生最大的输出信号, 冲激响应已调整至 $x_i(t)$, 在下题中, 我们使匹配滤波器的概念与连续时间的相关函数相联系, 并且为这些概念的应用提供一些了解。

3.28. 两个连续时间实数信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的互相关函数给出如下

$$\phi_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau \quad (\text{P3.28-1})$$

在式 (P3.28-1) 中, 使 $y(t) = x(t)$, 可以得到信号 $x(t)$ 的自相关函数

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau$$

www.blogoil.com

- (a) 计算如图 P3.28-1 所示的两个信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 各自的自相关函数。
 (b) 设 $x(t)$ 为一已知信号, 并假设 $x(t)$ 是有限持续时间的信号, 即当 $t < 0$ 和 $t > T$ 时, $x(t) = 0$ 。要使输入为 $x(t)$ 时, 输出为 $\phi_{xx}(t-T)$, 求出 LTI 系统的冲激响应。

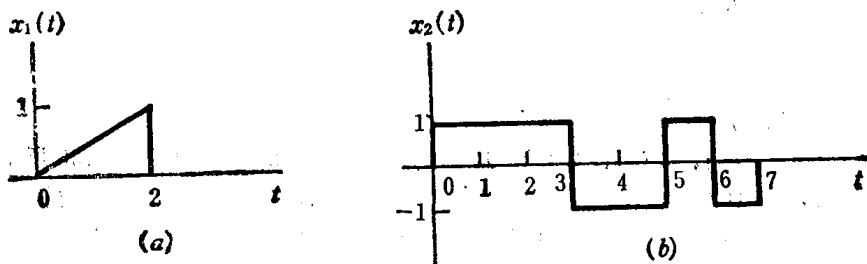


图 P3.28-1

在 (b) 中所求出的系统, 是对信号 $x(t)$ 的匹配滤波器。从下面可以看到, 匹配滤波器这个定义与题 3.27 中所介绍的相同。

- (c) 设 $x(t)$ 和 (b) 中相同, 并设 $y(t)$ 表示一个具有冲激响应 $h(t)$ 的 LTI 系统对这个信号的响应。假设当 $t < 0$ 和 $t > T$ 时, $h(t) = 0$ 。试证明, 在

$$\int_0^T h^2(t)dt = M, \quad \text{一个固定的正数 (P3.28-2)}$$

条件的约束下, 选择使 $y(T)$ 最大的 $h(t)$, 是 (b) 部分中所确定的冲激响应与一个标量的乘积 (提示: 许瓦兹不等式指出, 对任意两个信号 $u(t)$ 和 $v(t)$),

$$\int_a^b u(t)v(t)dt \leq \left[\int_a^b u^2(t)dt \right]^{1/2} \left[\int_a^b v^2(t)dt \right]^{1/2}$$

再利用该式得到 $y(T)$ 的取值范围。

由式 (P3.28—2) 给出的约束, 仅对冲激响应提供一个尺度, 当 M 增加时, 仅仅改变了在 (c) 中提到的比例乘数。因此, 我们看到, 在 (b) 和 (c) 中对于 $h(t)$ 的特定选择, 要与信号 $x(t)$ 相匹配, 以产生最大输出。正如我们将说明的, 在许多应用中, 这是非常重要的性质。

在通信问题中, 通常希望传输信息量尽可能少的一种信号。例如, 若一个复杂的消息编码成一个二进制数的序列, 我们可以设想一个系统, 它是逐位传送信息。通过发送一个信号, 就能传送一个比特。比如说, 若零位时用 $x_0(t)$; 若被传送的为 1 时, 用不同的信号 $x_1(t)$ 。在此情况下, 接收系统必须能辨别这些信号, 被接收的是 $x_0(t)$ 或 $x_1(t)$ 。直观上可理解为是接收机中要有两个系统, 一个“调谐”到 $x_0(t)$, 而另一个“调谐”到 $x_1(t)$ 。这里“调谐”的含意就是信号收到后, 对被调谐的信号系统能给出一个大的输出。当接收到一个特定的信号时, 匹配滤波器恰好产生大输出的特性。

实际上在传输和接收过程中, 总有失真和干扰。因此, 我们希望匹配滤波器对匹配输入的响应和滤波器对其他可能被传输信号其中的一个信号的响应, 要有最大的差别。为了说明这点, 考虑如下。

- (d) 已知两个信号 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 如图 P3.28—2 所示, 设 L_0 表示对于 $x_0(t)$ 的匹配滤波器, L_1 表示对于 $x_1(t)$ 的匹配滤波器。

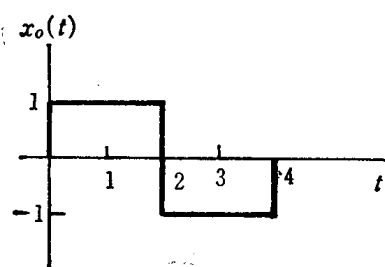


图 P3.28—2

- (i) 画出 L_0 对 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 的响应, 同样画出 L_1 对 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 的响应;
(ii) 比较在 $t=4$ 时这些响应的值。应如何改变 $x_0(t)$, 以使接收机在区分 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 时更为容易。此时 L_0 对 $x_1(t)$ 和 L_1 对 $x_0(t)$ 的响应, 在 $t=4$ 时应当都为零。
(c) 另外在雷达系统中, 匹配滤波器和相关函数起了重要的作用。雷达的基本原理是一个电磁脉冲发射到达目标, 并由目标反射, 而且经过一个延迟时间返回到发射机, 这个延迟时间与发射机到目标的距离成比例。在理想情况下, 被接收信号仅仅是初始传输信号的移位和比例值的模拟。

- (i) 设 $p(t)$ 是发出的初始脉冲, 试证明

$$\phi_{pp}(0) = \max_t \phi_{pp}(t)$$

利用它来推导, 若发射机接收到的返回信号波形是

$$x(t) = \alpha P(t - t_0)$$

式中 α 是正的常数, 则

$$\phi_{xp}(t_0) = \max_t \phi_{xp}(t)$$

提示: 利用许瓦兹不等式。

因此, 简单的雷达测距系统工作的方法, 是基于采用与传输波形 $p(t)$ 相匹配的滤波器, 并记录该系统达到最大输出的时间,

(ii) 对于图 P 3.28—3 所示的 $p(t)$ 和 $x(t)$, 试画出 $\phi_{xp}(t)$ 。假设传播速度为 $C=3 \times 10^8$ 米/秒。
求从发射机到目标的距离;

(iii) 因为估算传播时间的这种方法着眼于相关函数的峰值, 采用相关函数有明显峰顶的脉冲波形 $p(t)$ 是很有用的。因为在接收到的波形中不可避免的存在失真和干扰。在图 P 3.28—4 两个脉冲的波形中, 你建议用哪一个。

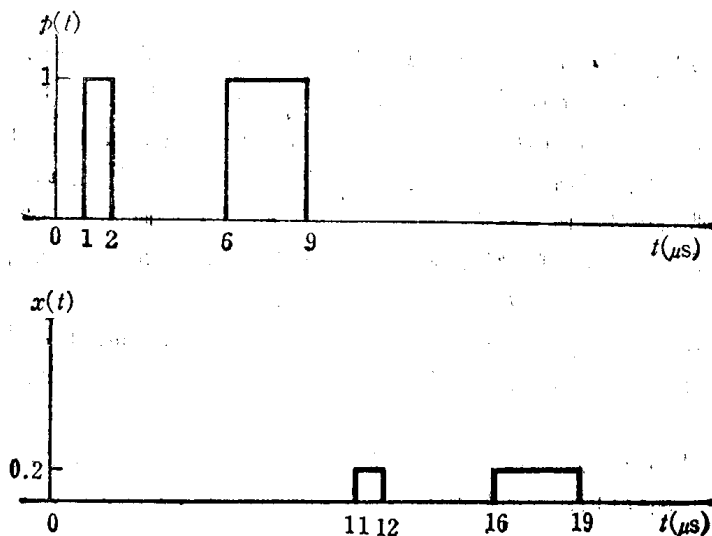


图 P 3.28—3

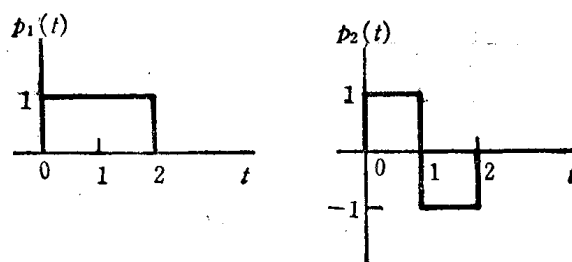


图 P 3.28—4

3.29. 一离散时间 LTI 系统, 它的输入—输出关系由下列差分方程表示
$$y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3] - 3x[n-4]$$

求出并画出该系统的单位样值响应。

3.30. 设 LTI 系统初始静止, 并由下列差分方程描述

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2]$$

通过递归求解差分方程, 试求该系统对图 P 3.30 所示输入的响应。

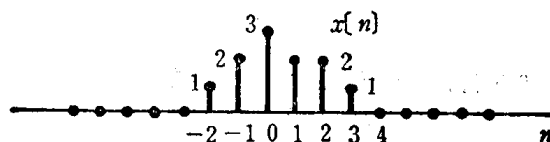


图 P 3.30

3.31. 为了提供一个求解线性常系数差分方程的标准方法, 在本题中, 我们用类似于 3.5.1 节的所讨论的方法。具体说, 考虑差分方程

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (\text{P3.31-1})$$

并假设

$$x[n] = K(\cos \Omega_0 n)u[n] \quad (\text{P3.31-2})$$

假定它的解 $y[n]$, 是式 (P3.31-1) 在 $n \geq 0$ 时的特解 $y_p[n]$ 与满足下列方程式的齐次解 $y_h[n]$ 之和组成,

$$y_h[n] - \frac{1}{2}y_h[n-1] = 0$$

(a) 若假定 $y_h[n] = Az_0^n$, z_0 必须选择什么值?

(b) 若假定, 当 $n \geq 0$ 时,

$$y_p[n] = B \cos(\Omega_0 n + \theta)$$

试求 B 和 θ 的值? (提示: 与连续时间相类似, 把 $x[n]$ 和 $y[n]$ 看做

$$x[n] = \text{Re}\{K e^{j\Omega_0 n} u[n]\}$$

$$\text{和 } y[n] = \text{Re}\{Y e^{j\Omega_0 n} u[n]\}$$

是方便的, 式中 Y 是待定的复数)

(c) 假设我们规定辅助条件

$$y[0] = 0 \quad (\text{P3.31-3})$$

试验证式 (P3.31-1) 和式 (P3.31-3) 表示一个线性系统, 从比较系统对下列两个输入的响应, 来证明系统是非因果的。

$$x_1[n] = 0 \quad (\text{对于所有的 } n)$$

$$x_2[n] = \begin{cases} 0, & n < -2; \\ 1, & n \geq -2. \end{cases}$$

(d) 已知由式 (P3.31-1) 描述的系统, 并假设初始静止, 试证明这是因果的 LTI 系统。

(e) 假设由式 (P3.31-1) 描述的系统是初始静止的 LTI 系统, 它的输入是式 (P3.31-2) 表示的信号。因为当 $n < 0$ 时 $x[n] = 0$, 相应得到当 $n < 0$ 时, $y[n] = 0$ 。并且根据 (a) 和 (b), 当 $n \geq 0$ 时, $y[n]$ 有如下形式

$$y[n] = Az_0^n + B \cos(\Omega_0 n + \theta)$$

为求解未知的常数 A , 对于某一个 $n \geq 0$ 时, $y[n]$ 必须给定一个相应的值。利用初始静止的条件和式 (P3.31-1) 和 (P3.31-2) 来确定 $y[0]$ 。再根据此值确定常数 A 。在输入由式 (P3.31-2) 给出时, 计算的结果可得到, 初始静止条件下差分方程 (P3.31-1) 的解。

3.32. 100 000 美元的抵押贷款, 是以每月偿还 D 美元来收回的。商定未支付部分以年利率 12% 按月计算复利记入帐内。例如第一个月以后, 总的借款额等于

$$\$100\,000 + \left(\frac{0.12}{12}\right)\$100\,000 = \$101\,000$$

问题是要求出 D , 以便在规定的時間以后, 还清所有的借款, 使留下的余款为零。

(a) 为了提出问题, 设 $y[n]$ 表示在第 n 个月以后尚未还清的余款, 假设本金是在第 0 个月借的, 并且在第一个月开始偿还借款, 试证明 $y[n]$ 满足差分方程

$$y[n] - \gamma y[n-1] = -D, \quad n \geq 1 \quad (\text{P3.32-1})$$

该方程的初始条件是

$$y[0] = \$100\,000,$$

式中 γ 是应确定的常数。

(b) 求解 (a) 的差分方程, 以求 $y[n]$, 当 $n \geq 0$ 。

提示: 式 (P3.32-1) 的特解是常数 Y 。求出 Y 的值, 并将 $n \geq 1$ 时的 $y[n]$ 表示为一个特解和齐次解的和。在齐次解中, 通过直接从式 (P3.32-1) 中计算 $y[1]$ 的值来确定未知常

数, 并和你的解进行比较。

(c) 如果借款是在30年以后还清的, 经过360个月每月付 D 元, 求出相应的 D 值。

(d) 在30年的时间里, 给银行的总的支付额是多少?

(e) 银行为什么要贷款?

3.33. (a) 已知齐次微分方程式

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad (\text{P3.33-1})$$

试证明若 s_0 是下列方程式的解

$$P(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k = 0 \quad (\text{P3.33-2})$$

则 $Ae^{s_0 t}$ 是式(P3.31-1)的解, 式中 A 为任意复数常数。

(b) 式(P3.33-2)中多项式 $p(s)$ 可按照它的根 s_1, \dots, s_r 来分解,

$$p(s) = a_N (s-s_1)^{\sigma_1} (s-s_2)^{\sigma_2} \dots (s-s_r)^{\sigma_r},$$

式中 s_i 是式(P3.33-2)的不同解, 而 σ_i 是它们的阶, 注意

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_r = N$$

通常, 若 $\sigma_i > 1$, 那末不仅 $Ae^{s_i t}$ 是式(P3.33-1)的解, 而且 $At^j e^{s_i t}$ 也是方程式的解, 只要 j 是大于或等于零并小于或等于 $(\sigma_i - 1)$ 的整数。为了说明这点, 试证明若 $\sigma_i = 2$, 则 $At e^{s_i t}$ 是式(P3.33-1)的解。

提示: 证明若 S 是一个任意的复数, 则

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k (At e^{St})}{dt^k} = A p(S) t e^{St} + A \frac{dp(S)}{dS} e^{St}$$

因此, 式(P3.33-1)的最一般的解是

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\sigma_i-1} A_{ij} t^j e^{s_i t}$$

式中 A_{ij} 是任意复数常数。

(c) 求解下列给定辅助条件的齐次方程式:

$$(i) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2,$$

$$(ii) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

$$(iii) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$(iv) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

$$(v) \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -2;$$

$$(vi) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(d) 已知齐次差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \quad (\text{P3.33-3})$$

试证明若 z_0 是方程式的解,

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0 \quad (\text{P3.33-4})$$

则 Az_0^n 是式(P3.33-3)的解, 其中 A 是任意常数。

www.blogoil.com

因现在我们利用只有 z 的正次幂的多项式更加方便, 故考虑式 (P3.34) 的两边乘以 z^N , 得到方程式

$$p(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = 0 \quad (\text{P3.33-5})$$

多项式 $p(z)$ 可分解为

$$p(z) = a_0(z-z_1)^{\sigma_1} \cdots (z-z_r)^{\sigma_r}$$

式中 z_1, \dots, z_r 是 $p(z)$ 的不同解。

(e) 试证明, 若 $y[n] = nz^{n-1}$, 则

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \frac{dp(z)}{dz} z^{n-N} + (n-N)p(z)z^{n-N-1}$$

利用这点证明, 若 $\sigma_i = 2$, 则 Az_i^n 和 Bn_i^{n-1} 是式 (P3.33-3) 的解, 其中 A 和 B 为任意复数常数。更一般地, 可利用这个相同的步骤证明, 若 $\sigma_i > 1$, 则

$$A \frac{n!}{r!(n-r)!} z^{n-r}$$

是式 (P3.33-3) 的解, 对于 $r=0, 1, \dots, \sigma_i-1$ 。①

(f) 求下列具有给定辅助条件的齐次差分方程的解:

$$(i) y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0, y[0]=1, y[-1]=-6$$

$$(ii) y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 0, y[0]=1, y[1]=0$$

$$(iii) y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 0, y[0]=1, y[10]=21$$

$$(iv) y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 0, y[0]=0, y[-1]=1$$

3.34. 在课文中我们叙述了求解线性常数系数差分方程的一种方法, 并在题3.31说明了求解这种方程的另一种方法。若作初始静止的假设, 因此由微分方程描述的系统是 LTI 和因果的, 那么, 原则上利用这些方法中的任意一个, 就可以求出单位冲激响应 $h[n]$ 。在第5章中, 我们叙述了一个更加简练的求出 $h[n]$ 的方法, 本题中, 我们再叙述了另一个方法。这种方法在本质上表明, $h[n]$ 可通过求解具有适当的初始条件的齐次方程而得到。

(a) 假设系统初始静止, 并由以下方程式描述

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (\text{P3.34-1})$$

假设 $x[n] = \delta[n]$, 则 $y[0]$ 是什么? 当 $n \geq 1$ 时, $h[n]$ 满足什么方程式? 并有什么辅助条件? 求解这个方程式, 求出 $h[n]$ 的闭合形式。

(b) 其次, 假设 LTI 系统满足初始在静止条件, 并由下列差分方程式描述

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] \quad (\text{P3.34-2})$$

这系统描绘在图 P3.34(a) 中, 它是两个初始静止的 LTI 系统的级联。由于 LTI 系统的性质, 我们可变换系统级联的次序, 从而得到一个相同的总系统的另一种表示, 如图 P3.34(b) 所示。根据这点, 利用 (a) 的结果, 确定由式 (P3.34-2) 描述的系统的冲激响应。

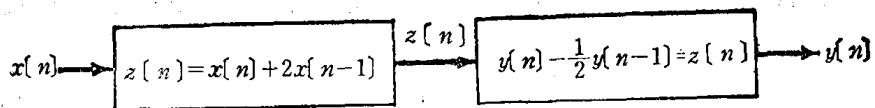
(c) 再次考虑 (a) 的系统, 用 $h[n]$ 表示它的冲激响应。试证明: 对任意输入 $x[n]$, 其响应 $y[n]$ 实际上由下列卷积和给定

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[n-m]x[m] \quad (\text{P3.34-3})$$

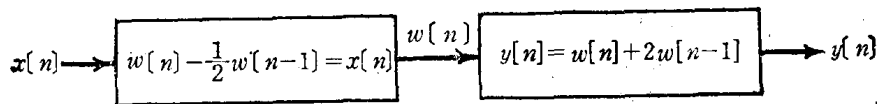
通过证明式 (P3.34-3) 满足差分方程 (P3.34-1), 来完成以上证明。

(d) 假设 LTI 系统初始静止, 并由下列差分方程描述

① 这里我们利用了阶乘的符号, 即 $k! = k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1$, 其中 $0!$ 被定义为 1。



(a)



(b)

图 P 3.34 (a); (b)

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = x[n] \quad (\text{P 3.34-4})$$

假设 $a_0 \neq 0$, 若 $x[n] = \delta[n]$, $y[0]$ 是什么? 利用这个结果, 说明该系统的冲激响应必须满足的齐次方程和初始条件。

其次考虑由下列差分方程描述的因果 LTI 系统

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (\text{P 3.34-5})$$

根据式 (P 3.34-4) 描述的 LTI 系统的冲激响应, 表示这系统的冲激响应。

(e) 确定由式 (P 3.34-5) 描述的 LTI 系统的冲激响应, 有另一种可采用的方法。具体说, 给定初始静止的条件, 即在这种情况下 $y[-N] = y[-N+1] = \dots = y[-1] = 0$, 当 $x[n] = \delta[n]$ 时, 为了确定 $y[0], \dots, y[m]$, 递归地求解式 (P 3.34-5)。当 $n \geq M$ 时, $h[n]$ 满足什么方程? 该式适当的初始条件是什么?

(f) 利用 (d) 和 (e) 中所简述方法中的任一个, 求出由下列方程式描述的因果 LTI 系统的冲激响应:

(i) $y[n] - y[n-2] = x[n];$

(ii) $y[n] - y[n-2] = x[n] + 2x[n-1];$

(iii) $y[n] - y[n-2] = 2x[n] - 3x[n-4];$

(iv) $y[n] - (\sqrt{3}/2)y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n].$

3.35. 本题中考虑的方法, 是在题 3.34 中所讨论在连续时间相对应的方法。此外, 我们将看到, 对于求出初始静止并由线性常系数微分方程描述的 LTI 系统, 在 $t > 0$ 时, 求解冲激响应 $h(t)$ 的问题, 可简化为求解有适当初始条件的齐次方程的问题。

(a) 考虑初始静止的 LTI 系统, 并由下列微分方程描述

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (\text{P 3.35-1})$$

假定 $x(t) = \delta(t)$ 。为了确定单位冲激刚作用之后, 求出 $y(t)$ 值。考虑从 $t=0^-$ 到 $t=0^+$ 来积分, 式 (P 3.35-1) (即采用刚开始冲激之前到刚结束冲激之后)。得到

$$y(0^+) - y(0^-) + 2 \int_{0^-}^{0^+} y(\tau) d\tau = \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad (\text{P 3.35-2})$$

因为系统是初始静止的, 而且 $t < 0$ 时 $x(t) = 0$, 故 $y(0^-) = 0$ 。因此我们看到 $y(0^+) = 1$, 这好像是 $y(t)$ 在 $t=0$ 时只包含一个阶跃的情况, 并由此可从 $t=0^-$ 到 $t=0^+$ 的积分为零。因为在 $t > 0$ 时, $x(t) = 0$, 我们看到, 这个系统的冲激响应是下列齐次方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

在初始条件

$$y(0^+) = 1$$

的解。为了得到该系统的冲激响应 $h(t)$ ，求解这个微分方程。通过证明下式

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

对任意的输入 $x(t)$ 能满足式 (P3.35-1)，以验证所得的结果。

(b) 为了推广这个论证，考虑一个 LTI 系统初始静止，其微分方程描述如下

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t) \quad (\text{P3.35-3})$$

并且有 $x(t) = \delta(t)$ ，因为当 $t < 0$ 时， $x(t) = 0$ ，则假设初始静止的条件，意味着

$$y(0^-) = \frac{dy}{dt}(0^-) = \dots = \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(0^-) = 0 \quad (\text{P3.35-4})$$

对式 (P3.35-3) 的两边从 $t=0^-$ 到 $t=0^+$ 积分一次，并利用式 (P3.35-4) 和在 (a) 中用到的相类似论点，证明所得到的方程式满足

$$y(0^+) = \frac{dy}{dt}(0^+) = \dots = \frac{d^{N-2}y}{dt^{N-2}}(0^+) = 0 \quad (\text{P3.35-5a})$$

和

$$\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(0^+) = \frac{1}{a_N} \quad (\text{P3.35-5b})$$

因此，系统在 $t > 0$ 时的冲激响应，可以通过求解由式 (P3.35-5) 给定初始条件的如下齐次方程式来得到

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

(c) 现在考虑由下列微分方程描述的因果 LTI 系统

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (\text{P3.35-6})$$

用 (b) 中系统的冲激响应表示这系统的冲激响应。

提示：分析图 P3.35。

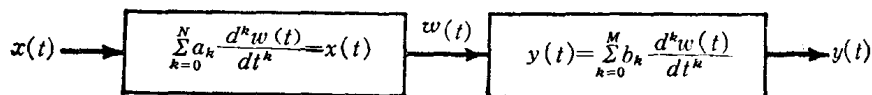


图 P3.35

(d) 应用 (b) 和 (c) 中简述的步骤，求出初始静止的并由下列微分方程描述的 LTI 系统的冲激响应：

$$(i) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t);$$

$$(ii) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t).$$

(e) 利用 (b) 和 (c) 的结果推断，若在式 (P3.35-6) 中 $M \geq N$ ，则冲激响应 $h(t)$ 将包含在 $t=0$ 处的奇异项。特别是 $h(t)$ 将包含下列形式的项

$$\sum_{r=0}^{M-N} a_r u_r(t)$$

式中 a_r 是常数，而 $u_r(t)$ 是在 3.7 节中定义的奇异函数。

(f) 求出由下列微分方程描述的因果 LTI 系统的冲激响应：

$$(i) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt} + x(t);$$

$$(ii) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

3.36. 考虑初始静止并由下列差分方程描述的 LTI 系统

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = 6x[n] - 7x[n-1] + 5x[n-2]$$

(a) 用两种方法确定该系统的单位阶跃响应的闭式的表示式:

(i) 通过直接求差分方程, (1) 当 $n > 0$ 时, 假设一个 $y[n] = Y$ 形式的特解, 并求解 Y ; (2) 求出齐次解, 它将有二个未定的常数; (3) 直接计算 $y[0]$ 和 $y[1]$, 并利用这些值, 通过在 $n=0$ 和 1 时使 $y[n]$ 和 $y_p[n] + y_h[n]$ 相等, 来确定常数。

(ii) 首先求出单位冲激响应 (见题 3.34), 然后利用卷积和。

(b) 当输入是

$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

时, 求系统的输出。利用上面给出的两种方法中的任何一种, 在第一种情况, 应假设特解的形式为

$$y[n] = Y \left[-\frac{1}{2}\right]^n \quad (n > 0)$$

(c) 若

$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-2] + 3u[n-4]$$

试求系统的冲激响应。

(d) 构成该系统直接形式 I 型实现。

3.37. 考虑连续时间 LTI 系统, 其初始静止, 并由下列微分方程描述:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

(P3.37-1)

(a) 用两种方法确定该系统的阶跃响应:

(i) 通过直接求解微分方程, 即是, (1) 假设 $t > 0$ 时的特解 $y(t) = Y$, 并求解 Y ; (2) 求出齐次解, 它将有二个未知常数; (3) 利用初始静止条件 $y(0) = y'(0) = 0$, 在 $t=0$ 时使 $y(t)$ 和 $y'(t)$ 分别与 $y_p(t) + y_h(t)$ 和 $y_p'(t) + y_h'(t)$ 相等, 从而确定常数。

(ii) 首先求出单位冲激响应 (见题 3.35), 然后利用卷积积分。

(b) 对于输入

$$x(t) = e^{-2t}(\cos 3t)u(t)$$

重复 (a) 中的 (i)。此时, 在 $t > 0$ 时, 特解的形式为

$$y(t) = \operatorname{Re}\{Y e^{-2t} e^{j3t}\}$$

(c) 对由式 (P3.37-1) 描述的 LTI 系统, 构成直接形式 I 实现。

3.38. 试确定下列各 LTI 系统的直接形式 I 实现, 所有的系统假设为初始静止的:

$$(a) 2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4];$$

$$(b) 4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - 3 \frac{d^2 x(t)}{dt^2};$$

$$(c) y[n] = x[n] - x[n-1] + 2x[n-3] - 3x[n-4];$$

$$(d) \frac{d^4 y(t)}{dt^4} = x(t) - 2 \frac{dx(t)}{dt};$$

$$(e) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt} + 3 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

3.39. 在 3.7 节中, 即对任意信号 $x(t)$ 通过下列方程式表征单位偶

$$x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) u_1(\tau) d\tau = x'(t)$$

(P3.39-1)