第七章 常微分方程的数值解法

王志明
wangzhiming@ies.ustb.edu.cn

本 章 内 容

- 7.1 欧拉(Euler)方程
- 7.2 改进的欧拉方程
- 7.3 龙格-库塔(Runge-Kutta)法
- 7.4 线性多步法

引言

一阶常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

假设函数f(x,y)连续，且满足**Lipschitz**条件：

$$\left| f(x,y) - f(x,\bar{y}) \right| \le L \, | y - \bar{y} |$$

常用的离散化方法包括：差商近似导数、数值积分、泰勒展开近似。

1、用差商近似导数

$$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \approx f(x_n, y(x_n)) \quad (n=0,1,\ldots)$$

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

以y_n近似$y(x_n)$，得到迭代求解公式：

$$\boxed{\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n=0,1,\ldots) \\ y_0 = y(a) \end{cases}}$$

2、用数值积分方法

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \quad (n = 0,1,\ldots)$$

运用矩形公式： $$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \approx hf(x_n, y_n)$$

迭代求解：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n = 0,1,\ldots) \\ y_0 = y(a) \end{cases}$$

3、用Taylor多项式近似

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) \approx y(x_n) + hy'(x_n) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

迭代求解：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n = 0,1,\ldots) \\ y_0 = y(a) \end{cases}$$

§7.1 欧拉(Euler)法

§7.1.1 Euler方法公式

$$\boxed{\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n = 0,1,\ldots) \\ y_0 = y(a) \end{cases}}$$

【例7.1 】Euler方法求解初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x - y \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

精确解： $y = x + e^{-x} - 1$

迭代公式： $y_{n+1} = y_n + h(x_n - y_n)$

Euler折线法(方向为向量场左端点值):

表 7-1 数值计算结果

x_n	y_n	$y(x_n)$	$y(x_n)-y_n$
0	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.000000	0.004837	0.004837
0.2	0.010000	0.018731	0.008731
0.3	0.029000	0.040818	0.011818
0.4	0.056100	0.070320	0.014220
0.5	0.090490	0.106531	0.016041
0.6	0.131441	0.148812	0.017371
0.7	0.178297	0.196585	0.018288
0.8	0.230467	0.249329	0.018862
0.9	0.287420	0.306570	0.019150
1.0	0.348678	0.367879	0.019201

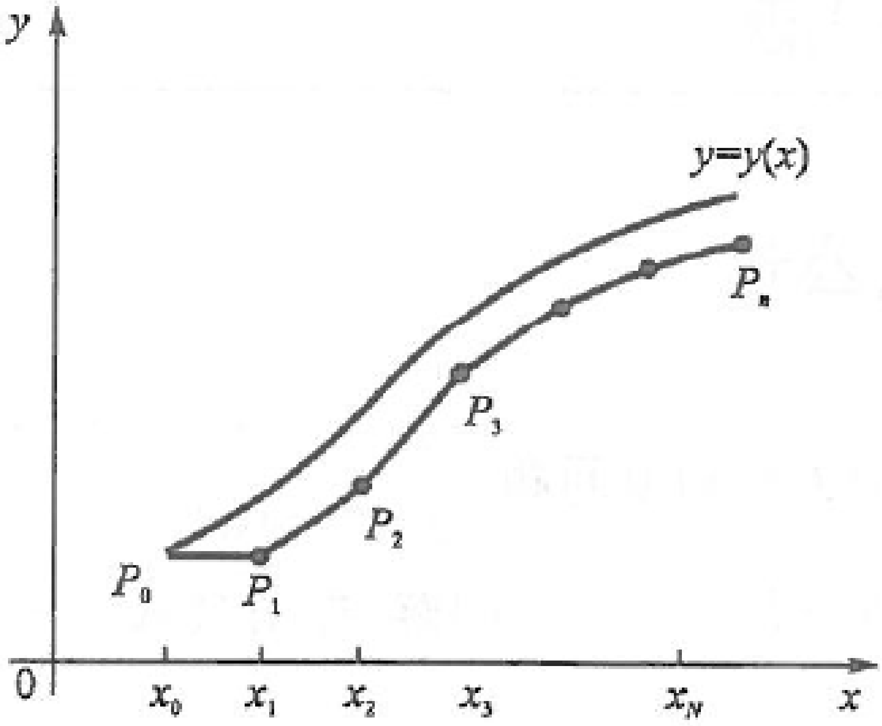

图 7-1 Euler 方法

向后差商代替导数：

$$y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

向后隐式迭代法：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (n = 0,1,\ldots) \\ y_0 = y(a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) \quad (k = 0,1,\ldots) \end{cases}$$

§ 7.1.2 Euler方法的估计误差

单步法的一般形式：

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}, h)$$

定义7.1 单步法的局部截断误差：

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n, y_n, x_{n+1}, y(x_{n+1}), h)$$

泰勒展开式估计：

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n))$$

$$= y(x_n + h) - y(x_n) - hy'(x_n) = \frac{1}{2}h^2 y''(\xi)$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

定义7.2 整体截断误差：

$$e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

推导可得：

$$|e_{n+1}| \le \left[\frac{hM}{2L} e^{L(b-a)} - 1\right] \quad (\forall x \in [a,b], |y''| < M)$$

局部截断误差为**O(h^p+1^)**，则称该方法是**p阶**的。