第三章　多维随机变量及其分布

返回主目录

§1　二维随机变量

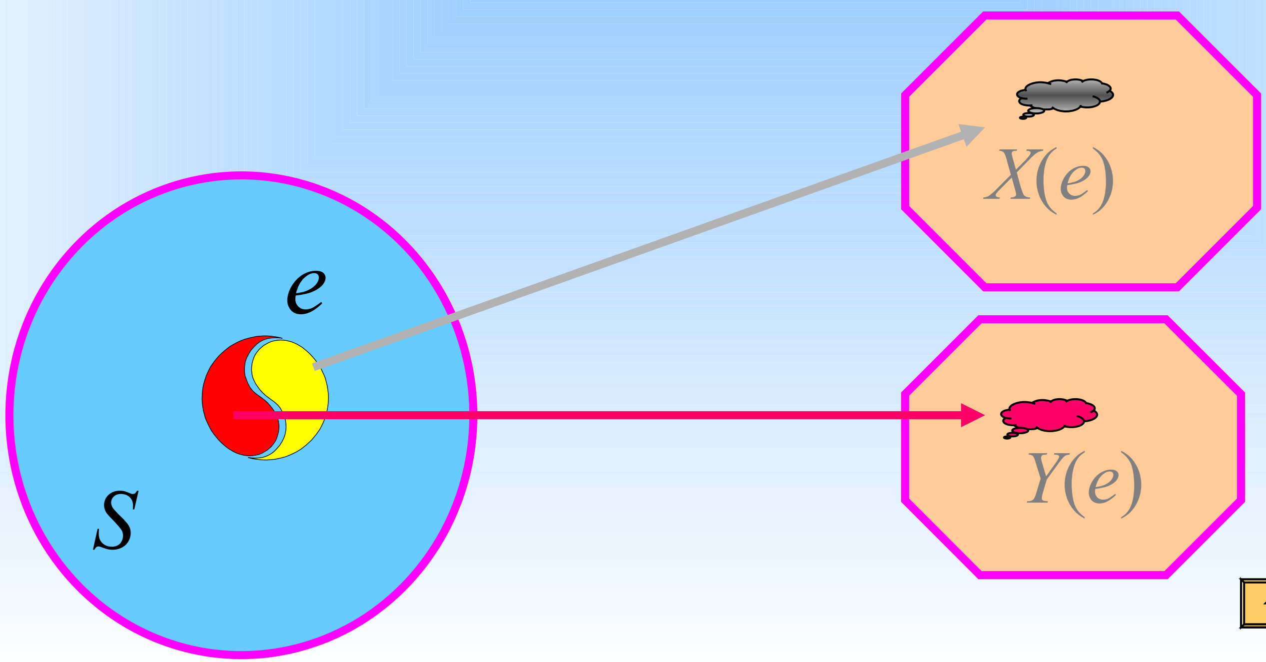
- ♣ 二维随机变量
- ♣ 联合分布函数
- ♣ 联合分布律
- ♣ 联合概率密度

返回主目录

§1　二维随机变量

1　二维随机变量的定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$ ，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量。由它们构成的一个向量 (X, Y) ，叫做二维随机向量，或二维随机变量。



注 意 事 项

(1) 我们应把二维随机变量

$$\left(X, Y\right)=\left(X(e), Y(e)\right) \quad \left(e \in S\right)$$

看作一个整体，因为 X 与 Y 之间是有联系的；

(2) 在几何上，二维随机变量 $\left(X, Y\right)$ 可看作平面上的随机点．

§1 二维随机变量

二维随机变量的例子

1. 考察某地区成年男子的身体状况，令

X：该地区成年男子的身高；

Y：该地区成年男子的体重．

则(X, Y)就是一个二维随机变量．

2. 对一目标进行射击，令：

X：弹着点与目标的水平距离；

Y：弹着点与目标的垂直距离；

则(X, Y)就是一个二维随机变量．

返回主目录

§1 二维随机变量

二维随机变量的例子

3. 考察某地区的气候状况，令：

X：该地区的温度；

Y：该地区的湿度．

则$\left(X, Y\right)$就是一个二维随机变量．

4. 考察某钢厂钢材的质量，令：

X：钢材的含碳量；

Y：钢材的含硫量；

则$\left(X, Y\right)$就是一个二维随机变量．

返回主目录

2 二维随机变量的联合分布函数的定 义

设(X, Y)是一个二维随机变量，则对于任意一对实数(x, y)，

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

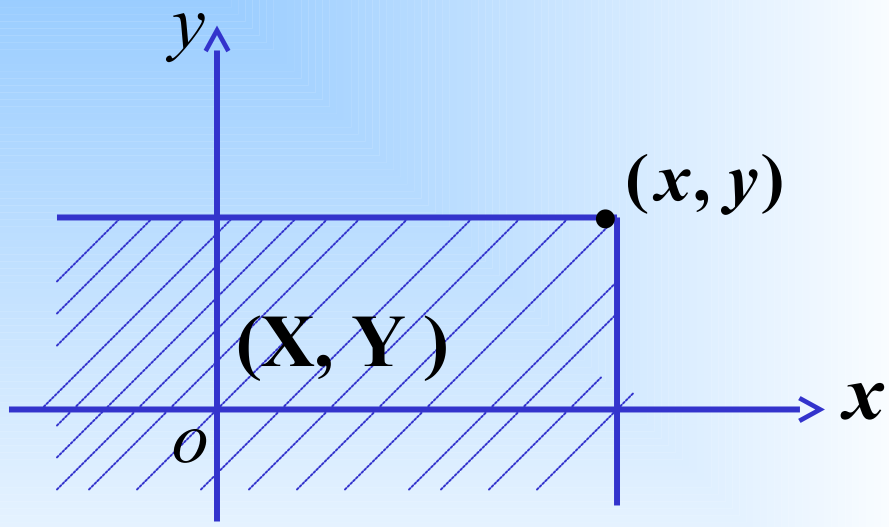
是(x, y)的函数．我们称此函数为二维随机变量(X, Y)的分布函数.

返回主目录

二维分布函数的几何意义

二维分布函数的几何意义是：$F(x,y)$ 表示平面上的随机点 (X,Y) 落在以 (x,y) 为右上顶点的无穷矩形中的概率．

$$F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$$



§1 二维随机变量

一个重要的公式

设：$x_1 < x_2$ ，$y_1 < y_2$ ，则

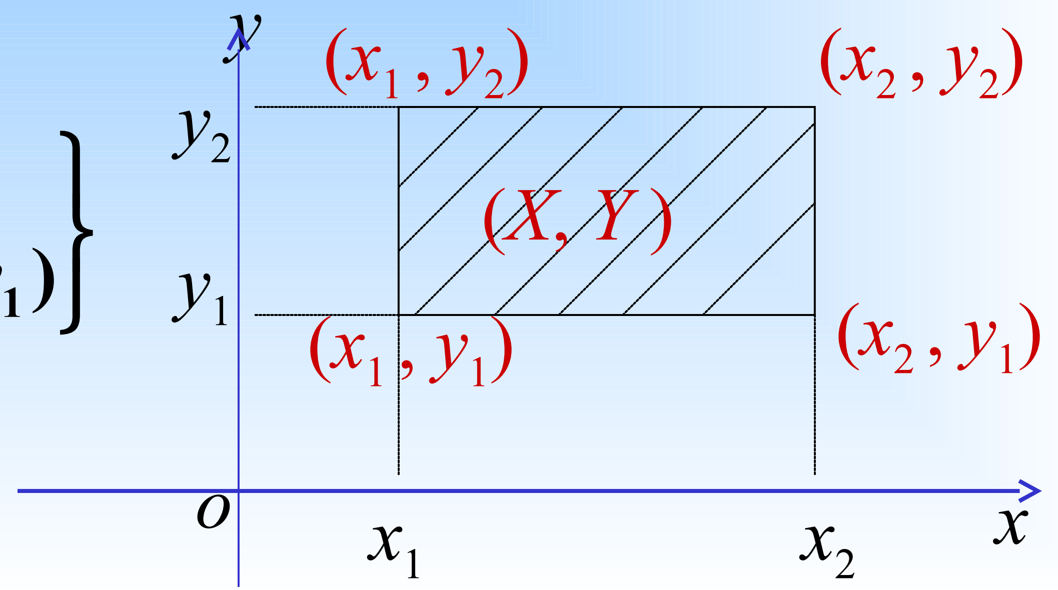
$$P\{x_1 < X \le x_2 ,\ y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2 ,\ y_2) - F(x_2 ,\ y_1) - F(x_1 ,\ y_2) + F(x_1 ,\ y_1)$$

$$\because\ P\{x_1 < X \le x_2 ,\ y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= P\{X \le x_2 ,\ Y \le y_2\}$$

$$- P\left\{\begin{matrix}(X \le x_1, Y \le y_2) \\ \cup (X \le x_2, Y \le y_1)\end{matrix}\right\}$$



§1 二维随机变量

分布函数具有以下的基本性质：

1)F (x , y) 是变量 x , y 的不减函数，即

对于任意固定的 y，当 $x_1 < x_2$ 时，$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$;

对于任意固定的 x，当 $y_1 < y_2$ 时，$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$;

2) $0 \le F(x, y) \le 1$, 且

对于任意固定的 Y，$F(-\infty, y) = 0$;

对于任意固定的 X，$F(x, -\infty) = 0$;

$$F(-\infty, -\infty) = 0; \quad F(+\infty, +\infty) = 1.$$

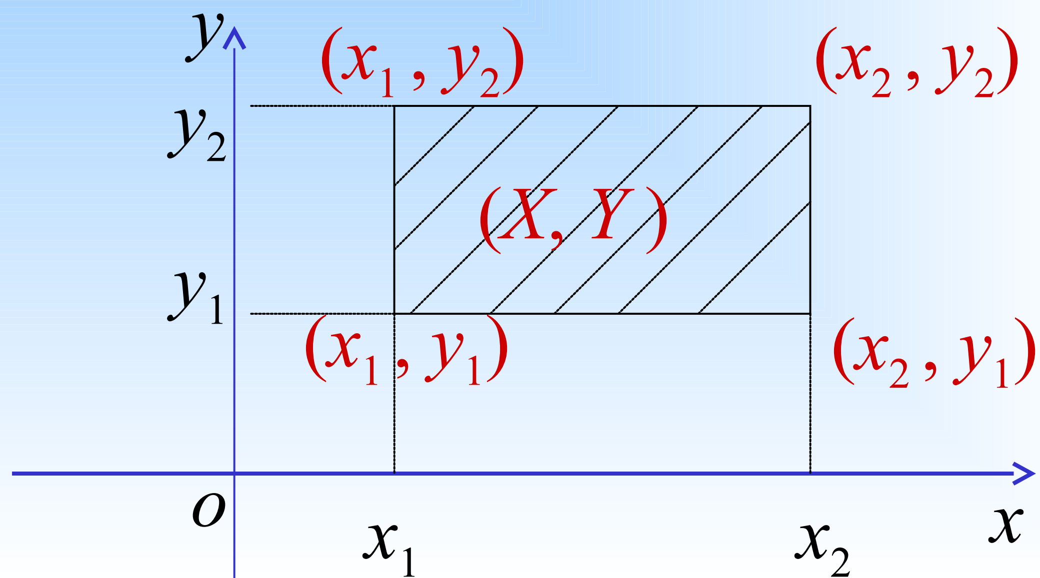
返回主目录

§1 二维随机变量

3) **F (x , y)=F(x+0, y), F (x , y)=F(x ,y+0),** 即

F (x , y) 关于 x 右连续，关于 y 也右连续 .

4) $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \quad 0.$



说　明

上述四条性质是二维随机变量分布函数的最基本的性质，即任何二维随机变量的分布函数都具有这四条性质；

更进一步地，我们还可以证明：如果某一二元函数具有这四条性质，那么，它一定是某一二维随机变量的分布函数（证明略）.

返回主目录

3 n 维随机变量

设 E 是一个随机试验，S是其样本空间，

$$X_i = X_i(e) \quad (e \in S) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

是该样本空间上的n个随机变量．

则称

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n) = (X_1(e), X_2(e), \cdots, X_n(e)) \quad (e \in S)$$

为样本空间 S上的 n 维随机变量．

返回主目录

n 维随机变量的分布函数

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个n维随机变量，则对于任意一n维实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n\}$$

我们称此函数为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数.

返回主目录

4 二维离散型随机变量

若二维随机变量(X, Y)的取值是有限个或可列无穷个，则称(X, Y)为二维离散型随机变量．

设(X, Y)二维离散型随机变量， X的取值为

$$x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_i, \quad \cdots$$

Y的取值为 $y_1, \quad y_2, \quad \cdots, \quad y_j, \quad \cdots$

则称

$$p_{ij} = P\{X = x_i, \ Y = y_j\} \quad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

为二维离散型随机变量(X, Y)的（联合）分布律．

二维离散型随机变量的联合分布律

(X, Y)的联合分布律也可以由下表表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

返回主目录

二维离散型随机变量联合分布律的性质

性质 1：

对任意的$(i\ ,\ j)$，$(i\ ,j=1,\ 2,\ \cdots)$

有 $$p_{ij}=P\{X=x_i\ ,\ Y=y_j\}\quad 0$$

性质 2： $$\sum_{i\ ,j} p_{ij}=1$$

返回主目录

§1 二维随机变量

例 1

将两个球等可能地放入编号为1 ,2 ,3的三个盒子中 .

令：X：放入1号盒中的球数；

Y：放入2号盒中的球数 .

试求$(X,\ Y)$的联合分布律 .

解：X的可能取值为 0 ,1 ,2；

Y的可能取值为 0 ,1 ,2 .

$$P\{X=0,\ Y=0\} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

返回主目录

例 1（续）

$P\{X=0,\ Y=1\} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$; $P\{X=1,\ Y=2\} = P(\varnothing) = 0$

$P\{X=0,\ Y=2\} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $P\{X=2,\ Y=0\} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$P\{X=1,\ Y=0\} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$; $P\{X=2,\ Y=1\} = P(\varnothing) = 0$

$P\{X=1,\ Y=1\} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$; $P\{X=2,\ Y=2\} = P(\varnothing) = 0$

返回主目录

例 1（续）

由此得(X, Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

§1 二维随机变量

例 2

设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在 1~X 中等可能地取一整数值。试求 (X,Y) 的分布律。

解： 由题意知，X=i ，Y=j 的取值情况是：i=1,2,3,4 ，且是等可能的；然后 j 取不大于 i 的正整数。

所以，当 $i < j$ 时，$p_{ij} = P\left\{X = i \text{，} Y = j\right\} = 0$

当$i \quad j$时，由乘法公式，得

$$p_{ij} = P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j \mid X = i\}P\{X = i\} = \frac{1}{i} \bullet \frac{1}{4},$$

其中 $i = 1,2,3,4,$

返回主目录

例 2（续）

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

返回主目录

二维离散型随机变量的联合分布函数

设(X, Y)二维离散型随机变量，其(联合)分布律为

$$p_{ij} = P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} \quad (i, j = 1, \quad 2, \quad \cdots)$$

则(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x, \ y_j \le y} p_{ij}$$

返回主目录

5 二维连续型随机变量

对于二维随机变量（X,Y）的分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负实函数 $f(x,y)$，使得对于任意的实数 x,y 有：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv,$$

则称（X,Y）是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$，称为二维随机变量（X,Y）的概率密度，或称为 X 和 Y 的联合概率密度。

返回主目录

§1 二维随机变量

按定义，概率密度 $f(x,y)$ 具有以下性质：

$1^0 \quad f(x,y) \quad 0;$

$2^0 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1;$

3^0 若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

4^0 设 **G** 是平面上的一个区域，点（**X,Y**）落在 **G** 内的概率为：

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.$$

返回主目录

$P\{(X,Y)\in G\}$的几何意义：

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面，上式

即表示 $P\{(X,Y)\in G\}$ 的值等于以 G 为底，以曲面

$z=f(x,y)$ 为顶的柱体体积

返回主目录

例 3 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数 c；

(2) 求 (X, Y) 的联合分布函数；

(3) 求 $P\{0<X<1, 0<Y<2\}$.

解：(1) 由密度函数的性质，得

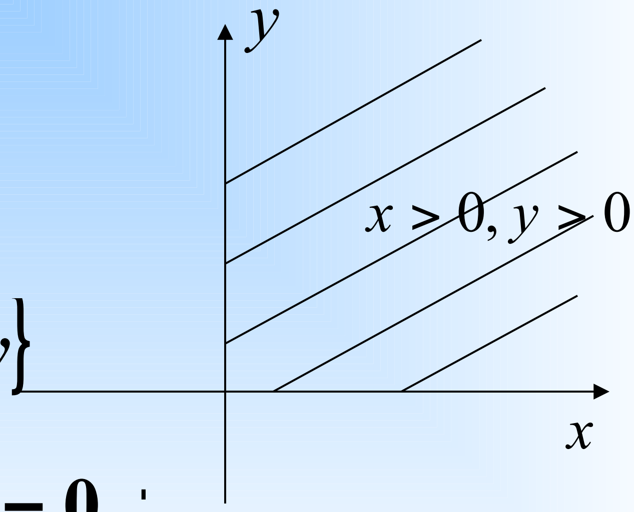
返回主目录

例 3（续）

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dxdy\ =c\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$=c\int_{0}^{+\infty}e^{-3x}dx\cdot\int_{0}^{+\infty}e^{-4y}\,dy\ =\frac{c}{12}$$

所以，$c=12$．



(2) $F(x,\ y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$

当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,\ y)=0$；

返回主目录

例 3（续）

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时，

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\,du\,dv = 12\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} e^{-(3u+4v)}\,du\,dv$$

$$= 12\int_{0}^{x} e^{-3u}\,du \cdot \int_{0}^{y} e^{-4v}\,dv = \left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

所以，$F(x, y) = \begin{cases} \left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right) & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

返回主目录

例 3（续）

(3) . $P\{0<X<1,\ 0<Y<2\}$.

$$=\iint_{0<x<1,\ 0<y<2} f(x,\ y)dxdy$$

$$=12\int_0^1\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$=12\int_0^1 e^{-3x}dx\cdot\int_0^2 e^{-4y}\,dy$$

$$=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$$

二维均匀分布

设 D 是平面上的有界区域，其面积为 A

如果二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{A} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

则称二维随机变量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布．

二维均匀分布几何意义

如果二维随机变量(X, Y)服从区域D上的均匀分布，我们可以认为随机点(X, Y)只落在区域D内；并且落在D内任一个子区域D_1内的概率与该子区域的面积成正比，而与D_1的形状以及D_1在D中的位置无关.

返回主目录

§1 二维随机变量

二维正态分布

设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则称随机变量(X, Y)服从参数为$(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$的正态分布，记作

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

$-\infty < \mu_i < +\infty\ (i=1, 2)$ $\sigma_i > 0\ (i=1, 2)$ $-1 < \rho < 1$

返回主目录

例 4

将一枚均匀的硬币掷3次，令：

X： 3次抛掷中正面出现的次数；

Y： 3次抛掷中正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值．

试求(X, Y)的联合分布律．

解：$S=\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

X的可能取值为 0 ,1 ,2 ,3；

Y的可能取值为1 ,3 ．

例 4（续）

$$S=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$$

$P\{X=0, Y=1\}=0$； $P\{X=0, Y=3\}=\dfrac{1}{8}$；

$P\{X=1, Y=1\}=\dfrac{3}{8}$； $P\{X=1, Y=3\}=0$；

$P\{X=2, Y=1\}=\dfrac{3}{8}$； $P\{X=2, Y=3\}=0$；

$P\{X=3, Y=1\}=0$； $P\{X=3, Y=3\}=\dfrac{1}{8}$.

由此得随机变量(X, Y)的联合分布律为

例 4（续）

Y \ X	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

例 5 设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right) & x^2+y^2<R^2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1)．求常数c；

(2)．求(X, Y)落入圆$x^2+y^2 \le r^2\ (0<r<R)$内的概率．

解：(1)．由密度函数的性质，得

返回主目录

例 5（续）

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)dxdy = \iint_{x^2+y^2<R^2} c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

作极坐标变换 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，得

$$1=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R c(R-\rho)\rho\,d\rho = \frac{1}{3}\pi R^3\cdot c$$

所以，$c=\dfrac{3}{\pi R^3}$.

返回主目录

例 5（续）

$$P\{(X,Y)\in\{x^2+y^2\le r^2\}\}$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{x^2+y^2<r^2} \frac{3}{\pi R^3}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

作极坐标变换 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$ ，得

$$P\{(X,Y)\in\{x^2+y^2\le r^2\}\}$$

$$=\frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r}(R-\rho)\rho\,d\rho = \frac{3r^2}{R^2}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)$$

返回主目录

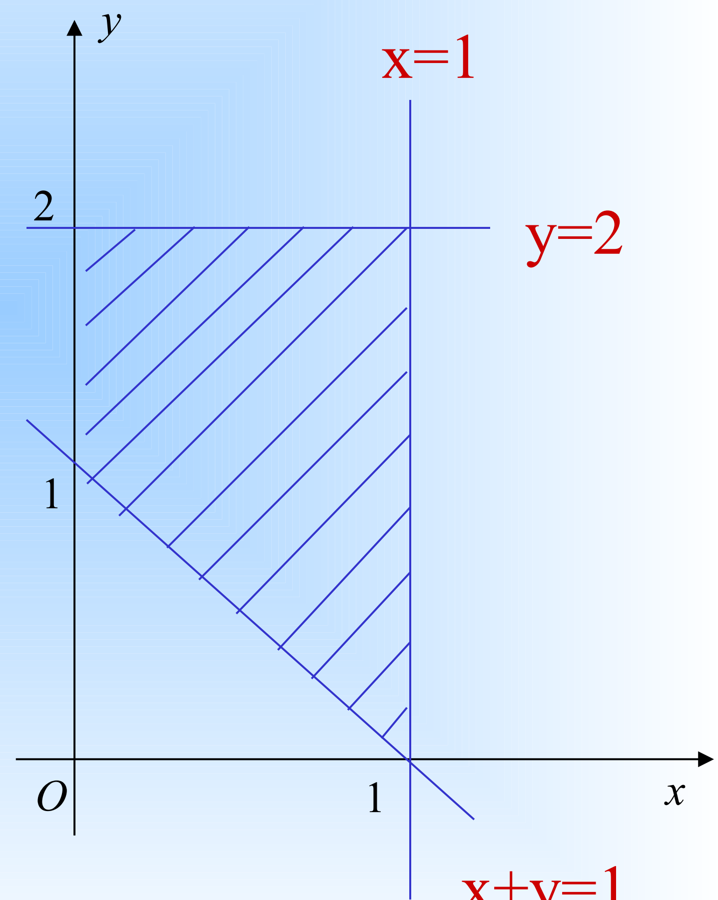
例 6

设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求概率 $P\{X+Y \quad 1\}$.

解：积分区域如图所示，



例 6（续）

$$P\{X+Y \quad 1\}.$$

$$=\iint\limits_{x+y \quad 1} f(x, y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx \quad =\frac{65}{72}$$

p_{84} 1,2,3