自觉遵守考试规则，诚信考试，谢绝作弊

装订线内不得答题

北京科技大学 2010-2011 学年第二学期

高等数学 AII 期末（A）卷

院（系）________ 班级________ 学号________ 姓名________ 考试教室_______

试卷卷面成绩						占课程考核成绩 70%	平时成绩占 30%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	小计			
得分								
评阅								

说明：1、要求正确的写出主要的计算或推倒过程，过程有错或只写答案者不得分；

2、考场、学院、班级、学号、姓名均需全写，不写全的试卷为废卷；

3、涂改学号以及姓名的试卷为废卷；

4、请在试卷上作答，在其它纸上解答一律无效.

得分

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1、曲面$x^2+2y^2+5z^2=8$在点$P_0(1,1,1)$处的切平面方程为________.

2、设L为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其周长为$a$，则$\oint_L(2xy+4x^2+3y^2)ds=$__________.

3、设$\vec{a}$、$\vec{b}$为两个非零的向量，当向量$\vec{a}+t\vec{b}$(t为实数)的模$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$为最小时，$t=$_________.

4、函数$u=xyz$在点$(5,1,2)$处沿从点$(5,1,2)$到点$(9,4,14)$的方向的方向导数__________.

5、函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值为___________.

6、函数 $y_1=e^x, y_2=2x$ 所满足的阶数最低的常系数齐次线性微分方程为__________.

得分

二、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

7、函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点$(0,0)$处（　　）

A 连续且存在一阶偏导数　　　B 不连续但存在一阶偏导数

C 连续但不存在一阶偏导数　　D 可微

8、设$f(x,y)$是连续函数，则$\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy$等于（　　）

A $\int_0^a dy\int_0^y f(x,y)dx$　　　B $\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx$

C $\int_0^a dy\int_a^y f(x,y)dx$　　　D $\int_0^a dy\int_0^a f(x,y)dx$

9、设l为上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2, y\geq0$,沿逆时针方向，则$\int_l(e^x\sin y-2y)dx+(e^x+\cos y-2)dy=$（　　）

A a^2　　B $\dfrac{1}{2}\pi a^2$　　C $2\pi a^2$　　D πa^2

10、设D是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域，则$\iint_D\ln(1+x^2+y^2)dxdy=$（　　）

A $\dfrac{\pi}{4}(\ln2-1)$　　B $\dfrac{\pi}{8}(\ln2-1)$　　C $\dfrac{\pi}{4}(2\ln2-1)$　　D $\dfrac{\pi}{8}(2\ln2-1)$

11、设$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq t^2}f(x^2+y^2+z^2)dv$，其中$f$为连续函数，且$f(0)=0, f'(0)=1, t>0$

则$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^5}$的值为（　　）

A π　　B $\dfrac{4}{5}\pi$　　C $\dfrac{3}{5}\pi$　　D $\dfrac{2}{5}\pi$

12、设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$（　　）

$A\ \frac{z}{x+z}$　　$B\ \frac{y}{x+z}$　　$C\ \frac{z}{y+z}$　　$D\ \frac{x}{x+z}$

得分

三、解答题（本题 4 小题，共 42 分）

13（10分）、设函数z=$f(xy,yg(x))$,其中f具有二阶连续偏导数，函数$g(x)$可导且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{x=1,y=1}$.

14（10分）、设L为以点A(1,2)为起点，B(3,4)为终点的曲线，求曲线积分$\int_L(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy.$

15（11分）、设闭区域$D:x^2+y^2\le y,x\ge0,f(x,y)$为$D$上的连续函数，且$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)dudv$，求$f(x,y)$.

16（11分）、计算曲面积分$\iint\limits_\Sigma\frac{bxdydz+yz^2dzdx+z^3dxdy}{x^2+y^2+z^2}$,其中$b>0,\sum$ 为球面$x^2+y^2+z^2=b^2$的外侧

自觉遵守考试规则，诚信考试，谢绝作弊

装订线内不得答题

得分

四、证明题（本题 2 小题，共 10 分）

17、设$f(x)$为一连续函数，且满足方程$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$，求$f(x)$.

18、设$f(x)$在$[a,b]$上连续，利用二重积分，证明：$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$，其中$D: a\le x\le b, a\le y\le b.$

北京科技大学本科生2010级第二学期

高等数学（AⅡ）期末考试试卷（A）答案

一、（1）$x+2y+5z=8$；（2）$12a$；（3）$t=-\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}$；

（4）$\dfrac{98}{13}$；（5）-5，（6）$y'''-y''=0$；

二、(7) B；(8) B；(9) D；(10) C；(11) B；(12) A；

三、(13) 由题设 $g'(1)=0, g(1)=1$，　　　　-------2分，

又 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2'$，　　　　-------4分，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}''[g(x)+xg'(x)]+g'(x)f_2'+yg(x)g'(x)f_{22}''$　-------8分，

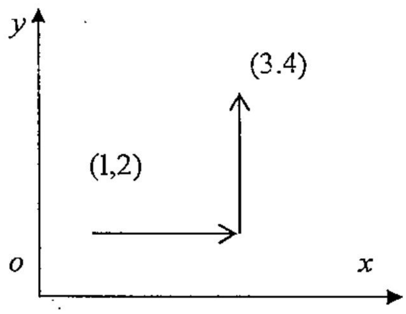
$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1,)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$　　　　-------10分，

(14) 因为 $P=6xy^2-y^3, Q=6x^2y-3xy^2$ 在整个 xoy 面这个单连通域内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

所以曲线积分在 xoy 面内与路径无关.　-------5 分，

如图选取积分路经



$$\text{原式}=\int_1^3(24x-8)dx+\int_2^4(54y-9y^2)dy$$

$$=80+156=236$$　　　　-------10分，

(15) 令 $A=\iint\limits_D f(u,v)dudv$，则

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A,$$　　　　--------2分，

在 D 上对上式两边积分，有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy-\frac{8}{\pi}A\iint_D dxdy \qquad \text{-------4分，}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}\,rdr-\frac{8}{\pi}A\frac{\pi}{8}$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta-1)d\theta-A=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}-A$$

即 $A=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}-A$，所以 $A=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}$， -------10分，

从而 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{2}{3}+\frac{8}{9\pi}$ -------11分，

（16）原式 $=\oiint_\Sigma \frac{1}{b^2}(bxdydz+yz^2dzdx+z^3dxdy)$ -------2 分，

$$=\frac{1}{b^2}\iiint_\Omega (b+z^2+3z^2)dxdydz \qquad \text{-------5 分，}$$

$$=\frac{4}{3}\pi\ b^2+\frac{8}{b^2}\int_0^b z^2dz\iint_{D_{zx}}d\sigma \qquad \text{-------9 分，}$$

$\pi(b^2-z^2)z^2=\pi b^2z^2-\pi z^4$

$$=\frac{4}{3}\pi\ b^2+\frac{16}{15}\pi\ b^3 \qquad \text{------11分，}$$

$\frac{\pi b^2}{3}\cdot b^3-\frac{\pi}{5}b^5=\frac{2}{15}\pi b^5$

四、(17) 由原方程知 $f(0)=0$，且有

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$$

两边对 x 求导，得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$$

（知 $f'(0)=1$）两边再对 x 求导，得

$$f''(x)+f(x)=-\sin x \qquad (*) \qquad \text{-------3分，}$$

这是二阶线性微分方程，由其特征方程 $r^2+1=0$ 得 $r=\pm\ i$，又 $\lambda+\omega\ i=i$ 为方程的单根，故设

特解 $f^*=x(A\cos x+B\sin x)$ 代入（*）式，得 $A=\frac{1}{2},B=0$，于是 $f^*=\frac{1}{2}x\cos x$，从而通解

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$$

再由 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，得 $C_1=0,C_2=\frac{1}{2}$，故所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x. \qquad \text{-------5分，}$$

(18). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，利用二重积分，证明：$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$，其中

$D: a \le x \le b, a \le y \le b.$

证明 $[f(x)-f(y)]^2 \ge 0,$

$$\therefore 0 \le \int_a^b dx\int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy = \int_a^b dx \int_a^b [f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)]dy$$ ------- （3 分）

$$= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx - 2[\int_a^b f(x)dx]^2.$$

所以 $\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$ -------5分