线性代数　试卷 4

院(系)__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

试卷卷面成绩										占课程考核成绩 70%	平时成绩占 30%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	小计			
得分												
评阅												
审核												

注意事项：

（1）本试卷共八道大题，共八页，请认真核对。

（2）正确填写学院、班级、姓名、学号等个人信息，空填或错填的试卷为无效试卷。

（3）请使用钢笔、签字笔或者圆珠笔答卷，使用铅笔答卷无效。

得 分

一、填空题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. 设某三阶行列式的第二行元素分别为 $-1,2,3$，对应的余子式分别为 $-3,-2,1$，则此行列式的值为______________。

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&3&2\end{pmatrix}$，那么其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=$______________。

3. 若线性方程组 $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&t&3\\3&6&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ 有无穷多解，则 $t=$______________。

4. 若三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 2，则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值的乘积为______________。

5. 二次型 $2x_1^2-7x_1x_2+4x_2^2$ 的规范型是______________。

得 分

二、选择题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1．设三阶方阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，其中 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 为 A 的列向量，且 $|A|=2$，则行列式 $\left|\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right|$ =________。

（A）-2　　（B）0　　（C）2　　（D）6

2．已知矩阵 A 与对角矩阵 $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，则 $A^2=$________。

（A）A　　（B）D　　（C）E　　（D）$-E$

3. 设 A,B 为任意 n 阶矩阵，E 为单位矩阵，O 为 n 阶零矩阵，则下列各式中正确的是________。

（A）$(A+E)(A-E)=A^2-E$　　（B）$(AB)^2=A^2B^2$

（C）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$　　（D）由 $AB=O$ 必可推出 $A=O$ 或 $B=O$

4. 已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是其导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系，k_1,k_2 是任意常数，则 $Ax=b$ 的通解可以表示为________。

（A）$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)$　　（B）$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$

（C）$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\alpha_1$　　（D）$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

5. 设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\ge 2)$ 线性无关，则________。

（A）向量组中增加任意一个向量后仍线性无关

（B）向量组中增加任意一个向量后线性相关

（C）向量组中减少任意一个向量后线性相关

（D）向量组中减少任意一个向量后仍线性无关

得 分

三、（本题 10 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$。

（1）计算 $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$；

（2）判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否可换？

（3）解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}\right)$。

得 分

四、（本题 12 分）

设$n\geq 2$阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$。

（1）计算矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式；

（2）求出矩阵$\boldsymbol{A}$的秩；

（3）矩阵$\boldsymbol{A}$是否为正定矩阵？

得 分

五、（本题 12 分）

设向量组由四个向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}7\\-13\\20\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}$组成。

（1）求出这个向量组的秩，并求出一个极大线性无关组；

（2）用求出的极大线性无关组表示其余向量；

（3）这个向量组可以找到几个极大线性无关组？为什么？

得 分

六、(本题 12 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases}$,

当 λ 取何值时，这个线性方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时给出方程组的通解。

得 分

七、（本题 14 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$。

（1）求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式；

（2）求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

（3）求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$ 是对角形矩阵；

（4）设多项式 $\varphi\left(x\right)=x^2+7x-8$，计算 $\varphi\left(\boldsymbol{A}\right)$。

得 分

八、（本题 10 分）证明题。

1. 设非零向量α,β的内积为零，证明：$|\alpha|^2+|\beta|^2=|\alpha+\beta|^2$。

2. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，构造向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$。证明：当$n$是偶数时，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性相关；当$n$为奇数时，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关。