第五章 矩阵的对角化

5.1 特征值与特征向量

5.1.1 特征值与特征向量的概念与计算

5.1.2 特征值和特征向量的性质

5.1.1 特征值与特征向量的概念与计算

1. 特征值与特征向量的概念

定义5.1 设A是n阶方阵，如果存在复数λ和n维列向量$x\neq 0$使得等式

$$Ax=\lambda x$$

成立，则称λ为矩阵A的一个特征值，非零向量x称为矩阵A的属于特征值λ的特征向量，简称为特征向量.

注：(1) 特征向量$x\neq 0$，特征值问题是对方阵而言的

(2) 若x是矩阵A的属于特征值λ的特征向量，$k\neq 0$，则非零向量kx也是矩阵A的属于特征值λ的特征向量.

$$A(kx)=kAx=k(\lambda x)=\lambda(kx),\qquad kx\neq 0$$

特征值λ对应的特征向量不唯一

例1 若 $A=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}$，取 $\lambda=5$, $x=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，则

$$Ax=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\20\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=5x$$

因此 $\lambda=5$是矩阵A的特征值，$x=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$是属于$\lambda=5$的特征向量.

如果取$\lambda=-2$, $x=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，则有

$$Ax=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-2x$$

因此 $\lambda=-2$ 也是矩阵A的特征值，$x=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$是属于$\lambda=-2$ 的特征向量.

例2 x_1,x_2是A的属于特征值λ的线性无关特征向量，证明：对任意不全为零的k_1,k_2，$k_1x_1+k_2x_2$都是矩阵A的属于特征值λ的特征向量.

证明：由已知 $Ax_1=\lambda x_1$, $Ax_2=\lambda x_2$

而 $k_1x_1+k_2x_2\neq 0$

$$\begin{aligned}A(k_1x_1+k_2x_2)&=k_1Ax_1+k_2Ax_2\\&=k_1(\lambda x_1)+k_2(\lambda x_2)\\&=\lambda(k_1x_1+k_2x_2)\end{aligned}$$

所以 $k_1x_1+k_2x_2$ 是属于λ的特征向量.

2. 特征方程与特征多项式

λ为矩阵A的特征值，x为A的属于特征值λ的特征向量

$$x\neq 0, Ax=\lambda x \Leftrightarrow x\neq 0,\text{使得}Ax=\lambda x$$

$$\Leftrightarrow \exists x\neq 0, \lambda x-Ax=0 \Leftrightarrow \exists x\neq 0, (\lambda E-A)x=0$$

$$\Leftrightarrow x\text{为}(\lambda E-A)x=0\text{的非零解} \Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$$

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

是λ的n次多项式，通常称为矩阵A的特征多项式，记作$f_A(\lambda)$或$f(\lambda)$，$|\lambda E-A|=0$称为A的特征方程，它的根称为A的特征根.(特征值)

在复数域内，A有n个特征值（可能相同）

3. 特征值与特征向量的求法

λ为矩阵A的特征值，x为A的属于特征值λ的特征向量

$x \neq 0, Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow x$为$(\lambda E - A)x = 0$的非零解$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

步骤:

（1）计算矩阵A的特征多项式$f_A(\lambda) = |\lambda E - A|$;

（2）求解 $f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$,得$A$的全部特征值;

（3）对每一特征值λ_0,求出$(\lambda_0 E - A)x = 0$一个基础解系 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$，其中$r(\lambda_0 E - A) = r$,

则A的属于特征值λ_0的特征向量为:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_{n-r} x_{n-r}$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为不全为零的任意常数$)$

$\boxed{\text{注:对角矩阵的特征值就是主对角线上的元素}}$

分析:
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \mathbf{0} \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & a_n \end{pmatrix}$$

A的特征多项式:

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & & & \\ & \lambda - a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - a_n \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_1)\cdots(\lambda - a_n)$$

所以A的特征值为:$\lambda_1 = a_1, \lambda_2 = a_2, \cdots, \lambda_n = a_n$

例3 求出二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$的全部特征值和相应的特征向量.

解 (1) 方阵A的特征多项式为

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8$$

所以,方阵A有两个特征值 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$

(2) 当 $\lambda_1 = -2$ 时，解齐次线性方程组$(-2E - A)x = 0$

$$(-2E - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系： $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以$\lambda_1 = -2$的全部特征向量是 $kx_1 = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$, $k \neq 0$

当 $\lambda_2 = -4$时，解齐次线性方程组$(-4E - A)x = 0$

$$(-4E - A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

得基础解系: $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

所以$\lambda_2 = -4$的全部特征向量是$kx_2 = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}, k \neq 0$

例4 求出三阶方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的全部特征值和相应的特征向量.

解 (1) A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2(\lambda - 3) - 1 - 1 - (\lambda - 3) + (\lambda - 1) + (\lambda - 1)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

所以A的特征值为： $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

(2) 当 $\lambda_1 = 1$ 时,

解齐次线性方程组 $(E - A)x = 0$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系: $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

所以$kx_1 (k \neq 0)$ 是属于 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量

$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，

解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为: $x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,

所以 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 全部特征向量为:

$k_2x_2+k_3x_3$ （k_2,k_3不同时为0）

说明 二重根2对应着两个线性无关的特征向量

例5 求出三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 的全部特征值和相应的特征向量.

解 (1) A的特征多项式:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1&-1\\4&\lambda-3\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

所以A的特征值为:

$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$

$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

(2) 当 $\lambda_1=2$ 时，

解方程组 $(2E-A)x=0$

$$2E-A=\begin{pmatrix}2+1&-1&0\\4&2-3&0\\-1&0&2-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系：$x_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

所以$kx_1(k\neq0)$ 是属于 $\lambda_1=2$的全部特征向量

$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，

解方程组 $(E-A)x=0$

$$E-A=\begin{pmatrix}1+1&-1&0\\4&1-3&0\\-1&0&1-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系：$x_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

所以$kx_2(k\neq0)$属于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量

说明 二重根1对应着一个线性无关的特征向量

例 6 求出三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

的全部特征值和相应的特征向量.

解 (1) A的特征多项式:

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\1&\lambda-2&1\\0&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)^2(\lambda-2)-(\lambda-1)-(\lambda-1)$$
$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$$

所以A的特征值为: $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$

$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$

(2) 当 $\lambda_1=0$ 时，

解方程组 $(0E-A)x=0$

得基础解系: $x_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

所以$kx_1(k\neq0)$ 是属于 $\lambda_1=0$的全部特征向量

当 $\lambda_2=1$ 时，解方程组 $(E-A)x=0$

得基础解系：$x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

所以$kx_2(k\neq0)$ 是属于 $\lambda_2=1$的全部特征向量

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$

当 $\lambda_3=3$ 时，

解方程组 $(3E-A)x=0$

得基础解系：$x_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

所以 $kx_3(k\neq 0)$ 是属于 $\lambda_3=3$ 的全部特征向量

例7 λ 是 A 的特征值，x 是 A 的属于 λ 的特征向量，则：
λ^k 是 A^k 的特征值，x 是 A^k 的属于 λ^k 的特征向量，
$k\lambda$ 是 kA 的特征值，x 是 kA 的属于 $k\lambda$ 的特征向量，
$\phi(\lambda)$ 是 $\phi(A)$ 的特征值，x 是 $\phi(A)$ 的属于 $\phi(\lambda)$ 的特征向量

证明 $\because\ Ax=\lambda x \quad \therefore\ A(Ax)=A(\lambda x)$

$\Rightarrow A^2x=\lambda(Ax)=\lambda(\lambda x)=\lambda^2 x \quad \cdots \quad \underline{A^k}x=\underline{\lambda^k}x$

$k(Ax)=k(\lambda x)\Rightarrow \underline{(kA)}x=\underline{(k\lambda)}x$

$\phi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

$\phi(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$

$\underline{\phi(A)}x=(a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n)x$

$=a_0x+a_1\lambda x+a_2\lambda^2x+\cdots+a_n\lambda^nx$

$=\underline{(a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n)}x$

例7 λ 是 A 的特征值，x 是 A 的属于 λ 的特征向量，则：
λ^k 是 A^k 的特征值，x 是 A^k 的属于 λ^k 的特征向量，
$k\lambda$ 是 kA 的特征值，x 是 kA 的属于 $k\lambda$ 的特征向量，
$\phi(\lambda)$ 是 $\phi(A)$ 的特征值，x 是 $\phi(A)$ 的属于 $\phi(\lambda)$ 的特征向量

例 λ_0 是 A 的特征值，

则 A^2 必有一个特征值为(λ_0^2)

则 $A^3+2A-3E$ 必有一个特征值为($\lambda_0^3+2\lambda_0-3$)

5.1.2 特征值和特征向量的性质

定理5.1 方阵 A 的属于不同特征值的特征向量线性无关

证明 设 λ_1,λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，
x_1,x_2 分别是属于这两个特征值的特征向量，则有
$\lambda_1x_1=Ax_1,\ \lambda_2x_2=Ax_2,\ \lambda_1\neq\lambda_2,$

设 $k_1x_1+k_2x_2=0$ ①

$A(k_1x_1+k_2x_2)=0 \quad k_1\lambda_1x_1+k_2\lambda_2x_2=0$ ②

②−①$\times\lambda_2 \quad k_1(\lambda_2-\lambda_1)x_1=0$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2,\ x_1\neq 0$，所以 $k_1=0$，从而 $k_2=0$

所以 x_1,x_2 线性无关.

定理5.2 n 阶方阵 A 的 m 个不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 所对应的特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性无关

证明 设 n 阶方阵 A 的互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$
所对应的特征向量为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$

下证 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性无关.

$Ax_i=\lambda_ix_i, i=1,2,\cdots,m$

设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m=0$ ①

则 $A(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m)=0$

即 $\lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2+\cdots+\lambda_mk_mx_m=0,$

①$\times A^2$ $A^2(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m)=0$

得 $\lambda_1^2k_1x_1+\lambda_2^2k_2x_2+\cdots+\lambda_m^2k_mx_m=0,$

定理5.2 n 阶方阵 A 的 m 个不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 所对应的特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性无关

$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m=0$ ①

$\lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2+\cdots+\lambda_mk_mx_m=0,$

①$\times A^2$ $\lambda_1^2k_1x_1+\lambda_2^2k_2x_2+\cdots+\lambda_m^2k_mx_m=0,$

①$\times A^3$ $\lambda_1^3k_1x_1+\lambda_2^3k_2x_2+\cdots+\lambda_m^3k_mx_m=0,$

……

①$\times A^{m-1}$ $\lambda_1^{m-1}k_1x_1+\lambda_2^{m-1}k_2x_2+\cdots+\lambda_m^{m-1}k_mx_m=0,$

即
$$\begin{cases}k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m=0\\ \lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2+\cdots+\lambda_mk_mx_m=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_1^{m-1}k_1x_1+\lambda_2^{m-1}k_2x_2+\cdots+\lambda_m^{m-1}k_mx_m=0\end{cases}$$

即 $\begin{cases} k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m=0 \\ \lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2+\cdots+\lambda_mk_mx_m=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{m-1}k_1x_1+\lambda_2^{m-1}k_2x_2+\cdots+\lambda_m^{m-1}k_mx_m=0 \end{cases}$

因 $i\neq j$ 时，$\lambda_i\neq\lambda_j$，系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 \\ \cdots\cdots & & & \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix}=\prod_{m\geq i>j\geq 1}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$$

即 $k_jx_j=0\left(j=1,2,\cdots,m\right)$. 但 $x_j\neq 0$,

故 $k_j=0\left(j=1,2,\cdots,m\right)$.

$\therefore$ 特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性无关

定理5.3 若 n 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

这里 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 称为 A 的迹，记 trA

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

证明

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})+\cdots\cdots$$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

比较等式两边多项式中 λ^{n-1} 项的系数，可知

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

定理5.3 若 n 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

这里 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 称为 A 的迹，记 trA

(2) $\underline{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|.}$

证明 $f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$,

$\therefore \underline{f(0)=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}$

$f(\lambda)=|\lambda E-A|$,

$\therefore \underline{f(0)=|0E-A|=|-A|=(-1)^n|A|}$

$\therefore\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

定理5.4 任一特征值的代数重数不小于它的几何重数.

对于 n 阶方阵 A，λ_0 是 A 的特征值

$\begin{cases} \lambda_0\text{的代数重数:}\lambda_0\text{作为特征根的重数} \\ \lambda_0\text{的几何重数:}(\lambda_0E-A)x=0\text{的基础解系所含} \end{cases}$

向量个数 $n-rank(\lambda_0E-A)$ λ_0 的特征向量

证明 设 n 阶方阵 A 的特征值 λ_0 的几何重数是 $m\leq n$,
那么，λ_0 有 m 个线性无关的特征向量，不妨记为
$x_1,x_2,\cdots,x_m$

从向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 出发，任意选择 n-m 个向量
$x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n$，构造 n 阶可逆方阵

$$P=(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)$$

定理5.4 任一特征值的代数重数不小于它的几何重数.

$$P=(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)$$

则有

$$AP=A(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)$$

$$=(Ax_1,Ax_2,\cdots,Ax_m,Ax_{m+1},\cdots,Ax_n)$$

$$=(\lambda_0x_1,\lambda_0x_2,\cdots,\lambda_0x_m,Ax_{m+1},\cdots,Ax_n)$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)\begin{pmatrix} \lambda_0E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$=P\begin{pmatrix} \lambda_0E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

其中 B 是 $m\times(n-m)$ 矩阵，C 是 n-m 阶方阵. 由于 P 是可逆矩阵，所以满足上式的 B,C 总是存在的.

定理5.4 任一特征值的代数重数不小于它的几何重数.

$$A=P\begin{pmatrix} \lambda_0E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}P^{-1} \qquad AP=P\begin{pmatrix} \lambda_0E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\left|\begin{pmatrix} \lambda E_m & 0 \\ 0 & \lambda E_{n-m} \end{pmatrix}-P\begin{pmatrix} \lambda_0E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}P^{-1}\right|$$

$$=|P|\left|\begin{pmatrix} \lambda E_m & 0 \\ 0 & \lambda E_{n-m} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda_0E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\right|\left|P^{-1}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} (\lambda-\lambda_0)E_m & -B \\ 0 & \lambda E_{n-m}-C \end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_0)^m|\lambda E_{n-m}-C|$$

由于 λ_0 仍有可能是多项式 $|\lambda E_{n-m}-C|$ 的根，所以 λ_0 的代数重数 $\geq m$.

对于n阶方阵A，λ_0是A的特征值

λ_0的代数重数：λ_0作为特征根的重数

λ_0的几何重数：$(\lambda_0E-A)x=0$的基础解系所含向量个数 $n-rank(\lambda_0E-A)$ λ_0的特征向量

例8 方阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$的特征多项式为 $f_A(\lambda)=(\lambda-2)^3$

A有一个三重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2.$

解方程组 $(2E-A)x=0$，得到基础解系 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

特征值2的代数重数是3，几何重数是1

例4中，$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值：$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当 $\lambda_1=1$ 时，解$(E-A)x=0$得基础解系：$x_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解$(2E-A)x=0$

得基础解系为：$x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $x_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

特征值1的代数重数是1，几何重数是1

特征值2的代数重数是2，几何重数是2

任一特征值的代数重数不小于它的几何重数

例9（特征子空间）如果λ是方阵A的特征值，则$(\lambda E-A)x=0$的解空间称为A的特征子空间，记作V_λ，

即 $V_\lambda=\{x\mid(\lambda E-A)x=0\}=\{x\mid Ax=\lambda x\}$

特征子空间V_λ的维数就是特征值λ的几何重数.

例8中， $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2.$

解方程组 $(2E-A)x=0$，得到基础解系 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

特征值2的几何重数是1，特征子空间为

$$\{kx\mid x=(1,0,0)^T\}$$

例4中，$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值：$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当 $\lambda_1=1$ 时，解$(E-A)x=0$得基础解系：$x_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解$(2E-A)x=0$

得基础解系为：$x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $x_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

特征值1的几何重数是1，特征子空间为：

$$\{kx_1\mid x_1=(-1,1,1)^T\}$$

特征值2的几何重数是2，特征子空间为

$$\{k_2x_2+k_3x_3\mid x_2=(1,0,1)^T,x_3=(0,1,1)^T\}$$

小结

一、特征值与特征向量的概念与计算

1. 特征值与特征向量的概念

定义5.1 设A是n阶方阵，，如果存在复数λ和n维列向量 $x\neq0$ 使得等式 $Ax=\lambda x$ 成立，则称λ为矩阵A的一个特征值，非零向量x称为矩阵A的属于特征值λ的特征向量，简称为特征向量.

说明 (1) 特征向量$x\neq0$，特征值问题是对方阵而言的

(2) 若x是矩阵A的属于特征值λ的特征向量，$k\neq0$，则非零向量kx也是矩阵A的属于特征值λ的特征向量.

特征值λ对应的特征向量不唯一

小结

2. 特征方程与特征多项式

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

是λ的n次多项式，称为矩阵A的特征多项式，记作 $f_A(\lambda)$或 $f(\lambda)$

$|\lambda E-A|=0$称为A的特征方程，它的根称为A的特征根.（特征值）

在复数域内，A有n个特征值（可能相同）

3. 特征值与特征向量的求法

小结

λ为矩阵A的特征值，x为A的属于特征值λ的特征向量

$x \neq 0, Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow x$为$(\lambda E - A)x = 0$的非零解 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

步骤：

（1）计算矩阵A的特征多项式$f_A(\lambda) = |\lambda E - A|$;

（2）求解 $f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$,得$A$的全部特征值;

（3）对每一特征值λ_0,求出$(\lambda_0 E - A)x = 0$一个基础解系 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$，其中$r(\lambda_0 E - A) = r$,

则A的属于特征值λ_0的特征向量为：

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_{n-r} x_{n-r}$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为不全为零的任意常数$)$

5.1 特征值与特征向量

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

二、特征值和特征向量的性质

小结

(1) 方阵A的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

(2) 若n阶方阵$A = (a_{ij})$的特征值是$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，那么

1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;

这里$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$称为$A$的迹，记$trA$

2) $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$.

(3) 任一特征值的代数重数不小于它的几何重数.

特征子空间 如果λ是方阵A的特征值，则 $(\lambda E - A)x = 0$的解空间称为A的特征子空间，记作 V_λ，即

$$V_\lambda = \{x \mid (\lambda E - A)x = 0\} = \{x \mid Ax = \lambda x\}$$

特征子空间V_λ的维数就是特征值λ的几何重数.

5.1 特征值与特征向量

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

作 业

习题5.1

A：1(1)(3)(5) 4

5.1 特征值与特征向量

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

5.2 相似矩阵及矩阵的对角化

- 5.2.1 相似矩阵
- 5.2.2* 矩阵的对角化

5.2.1 相似矩阵

1. 相似矩阵的定义

定义5.2 若A, B都是n阶方阵,如果存在n阶可逆矩阵P,使得 $\boxed{P^{-1}AP=B}$, 则称矩阵矩阵A与B相似,记作$A\sim B$.

2. 相似矩阵的性质

(1) 定理5.5 矩阵的相似关系是一种等价关系

反身性 矩阵A与A相似; $E^{-1}AE=A$

对称性 如果矩阵A与B相似, 则矩阵B与A相似;

$$P^{-1}AP=B\Rightarrow PBP^{-1}=A$$

传递性 如果矩阵A与B相似, B与C相似, 则A与C相似.

$$P^{-1}AP=B \quad Q^{-1}BQ=C \quad \therefore (PQ)^{-1}B(PQ)=C$$

(2) 定理5.6 相似矩阵有相同的特征多项式,进而有相同的特征值.

证明: 设A与B相似, 则有 $P^{-1}AP=B$

$$f_B(\lambda)=|\lambda E-B|=|P^{-1}(\lambda E)P-P^{-1}AP|$$
$$=|P^{-1}(\lambda E-A)P|$$
$$=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|=f_A(\lambda)$$

注:相似矩阵亦有相同的行列式、相同的秩、相同的迹.

由定理5.3可知相似矩阵亦有相同的行列式、相同的迹.

秩:
$$\left.\begin{aligned}P^{-1}AP=B &\Rightarrow r(B)\le r(A)\\ PBP^{-1}=A &\Rightarrow r(A)\le r(B)\end{aligned}\right\}r(B)=r(A)$$

(3) 若n阶方阵A与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$

相似,则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的$n$个特征值

例1 已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似,

求 x, y

解 因为相似矩阵有相同的特征值, 故A与B有相同的特征值 2, y, -1

根据特征方程根与系数的关系, 有

$$2+0+x=2+y+(-1),\quad |A|=-2y$$

而 $|A|=-2$, 故 $x=0, y=1$

例2 与单位矩阵E相似的矩阵有多少?

分析: 与单位矩阵E相似的矩阵为: $P^{-1}EP=E$

说明: 与E相似的矩阵只有E本身

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3$ $\therefore$ 矩阵A与B的特征值是:

$|\lambda E-B|=(\lambda-1)^3$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

但A与B不相似

有相同特征值的矩阵不一定相似

例3 若方阵A与B相似, P是可逆矩阵, 且$P^{-1}AP=B$.

如果 x_0是B的属于特征值λ_0的特征向量, 则 Px_0是A的属于特征值λ_0的特征向量.

证明 由题意有, $Bx_0=\lambda_0x_0$

由 $P^{-1}AP=B$, 可得$AP=PB$

右乘 x_0得到

$$A(\underline{Px_0})=PBx_0=\lambda_0\underline{Px_0}$$

5.2.2* 矩阵的对角化

所谓方阵A可以对角化，是指 A与对角阵相似.

即存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 成立。

1. 可对角化矩阵的性质

若A与对角阵相似，即存在可逆矩阵 P，使

$P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 成立，那么：

（1） $A^k=P\Lambda^kP^{-1}=Pdiag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)P^{-1}$

（2） $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$即是$A$的 n个特征值；而P的第i列 x_i 是A的对应于特征值λ_i的特征向量

（2） $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$即是$A$的 n个特征值；而P的第i列x_i 是A的对应于特征值λ_i的特征向量

证明 记$P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

A可对角化，存在n阶可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

上式两边左乘矩阵P： $AP=P\Lambda$

$$A(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Lambda$$

$$\Rightarrow(Ax_1,Ax_2,\cdots,Ax_n)=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots,\lambda_nx_n)$$

于是有 $Ax_i=\lambda_ix_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$

又由于P可逆， 所以结论成立。

2. 矩阵可对角化的条件

定理5.7 n阶方阵A可以对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

证明 $\Rightarrow$ 已证

$\Leftarrow$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$为A的n个线性无关的特征向量，它们相应的特征值依次为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

$Ax_i=\lambda_ix_i(i=1,2,\cdots,n)$ $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $\therefore$ P可逆

$$P^{-1}AP=P^{-1}A(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P^{-1}(Ax_1,Ax_2,\cdots,Ax_n)$$

$$=P^{-1}(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots,\lambda_nx_n)$$

$$=P^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda$$

所以A可以对角化

定理5.7 n阶方阵A可以对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

推论5.1 如果n阶方阵A有n个不同的特征值，则A可对角化.

定理5.8 设n阶方阵A的全部不同的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的代数重数依次为$n_1,n_2,\cdots,n_s$ $(n_1+n_2+\cdots+n_s=n)$

矩阵可以对角化

$\Longleftrightarrow$ 矩阵A有n个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ 所有特征值的代数重数都等于它的几何重数

$\Longleftrightarrow$ $r(\lambda_iE-A)=n-n_i\quad i=1,2,\cdots,s$

$\Longleftrightarrow$ λ_i都恰好有n_i个线性无关的特征向量$(i=1,2,\cdots,s)$

推论5.2 设n阶方阵A的全部不同的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的代数重数依次为$n_1,n_2,\cdots,n_s$ $(n_1+n_2+\cdots+n_s=n)$

矩阵不可以对角化

$\Longleftrightarrow$ 矩阵A没有n个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ 某个特征值的代数重数大于它的几何重数

$\Longleftrightarrow$ $r(\lambda_iE-A)>n-n_i$ 某个$1\le i\le s$

矩阵A对角化的步骤：

（1）求$|\lambda E-A|=0$的全部根；

（2）对每一特征值λ_i（重数为n_i），求出$(\lambda_iE-A)x=0$的一个基础解系 $x_1,x_2,\cdots,x_{t_i}$，

若有一个$n_i\ne t_i$，则A不能对角化；否则，将所有特征值对应的基础解系合在一起：

$$P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

例4 上节例4中，$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值：

$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(E-A)x=0$ 得基础解系：$x_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解 $(2E-A)x=0$

得基础解系为：$x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $x_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

特征值−1的代数重数是1，几何重数是1

特征值2的代数重数是2，几何重数是2

A可以对角化

当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(E-A)x=0$ 得基础解系：$x_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解 $(2E-A)x=0$

得基础解系为：$x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $x_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

取

$P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$， $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

若令 $P=(x_3,x_1,x_2)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$， $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

例5 上节例8中，方阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的特征多项式为：

$f_A(\lambda)=(\lambda-2)^3$

A有一个三重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2.$

解方程组 $(2E-A)x=0$，得到基础解系 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

特征值2的代数重数是3，几何重数是1

A不能对角化

例6 若二阶实方阵A的行列式 $|A|<0$，则A可以对角化.

证明 设方阵A的特征值是λ_1,λ_2，有$\lambda_1\lambda_2=|A|<0$

因此，A有两个实特征值，并且一正一负，即

A有两个不同特征值，一定可以对角化.

例7 证明：$n>1$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&&&\\&a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&a&1\\&&&&a\end{pmatrix}$

一定不能对角化.

证明：A的特征多项式为 $f_A(\lambda)=(\lambda-a)^n$

A只有一个n重特征值a，另一方面，由于

$aE-A=\begin{pmatrix}0&-1&&&\\&0&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&-1\\&&&&0\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}a&1&&&\\&a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&a&1\\&&&&a\end{pmatrix}$

$r(aE-A)=n-1\neq 0$

A的n重特征值a只有一个线性无关的特征向量.

特征值a的代数重数大于它的几何重数

A不能对角化.

例8

设 $A=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}$ 计算 $A^n,|A^n|$

解 先把A对角化后再行计算.

(1) A的特征多项式为 $f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

A的三个特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

(2) 进一步计算得到

$\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入 $(\lambda E-A)x=0$

解之得基础解系 $x_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$， $x_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_3=1$代入$(\lambda E-A)x=0$,

解之得基础解系 $x_3=\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix}$. $x_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

(3)

令 $P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}2&2&-3\\0&1&1\\1&0&-3\end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

即 $A=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$

$$A^n=\left(P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}^nP^{-1}$$

$$A^n=\left(P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2&2&-3\\0&1&1\\1&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&&\\&2^n&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-6&-5\\-1&3&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\-2^n+1&3\times2^n-2&2^{n+1}-2\\3\times2^n-3&-3\times2^{n+1}+6&-5\times2^n+6\end{pmatrix}$$

$$|A^n|=|A|^n=[2\times2\times1]^n=4^n$$

注:

$P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}2&2&-3\\0&1&1\\1&0&-3\end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

若令$P=(x_3,x_1,x_2)=\begin{pmatrix}-3&2&2\\1&0&1\\-3&1&0\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

例9 若数列 $F_n, n\ge0$ 满足条件 $F_0=F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, 则称之为*Fibonacci*数列. 求出F_n.

解: 设一组二维向量$\begin{pmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{pmatrix}$, $n\ge0$,则

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_{n+1}+F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{n-1}\\F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}F_{n-2}\\F_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}F_0\\F_1\end{pmatrix}$$ ①

记矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, 则$A$的特征多项式为

$$f_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$$

则A的特征多项式为 $f_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$ $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^n$

A的特征根是 $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2}, \lambda_2=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$

对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\\lambda_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\lambda_2\end{pmatrix}$. 取 $P=\begin{pmatrix}1&1\\\lambda_1&\lambda_2\end{pmatrix}$,

则

$P^{-1}=-\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\lambda_2&-1\\-\lambda_1&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}$

于是有

$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$

代入①式得到

$$\begin{pmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}F_0\\F_1\end{pmatrix}=-\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&1\\\lambda_1&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}\lambda_2&-1\\-\lambda_1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\lambda_1^n&\lambda_2^n\\\lambda_1^{n+1}&\lambda_2^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2&-1\\-\lambda_1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\lambda_1^n\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^n&\lambda_2^n-\lambda_1^n\\\lambda_1^{n+1}\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^{n+1}&\lambda_2^{n+1}-\lambda_1^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\lambda_2^{n-1}-\lambda_1^{n-1}&\lambda_2^n-\lambda_1^n\\\lambda_2^n-\lambda_1^n&\lambda_2^{n+1}-\lambda_1^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}\lambda_2^n-\lambda_1^n+\lambda_2^{n-1}-\lambda_1^{n-1}\\\lambda_2^{n+1}-\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^n-\lambda_1^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2^{\,n} - \lambda_1^{\,n} + \lambda_2^{\,n-1} - \lambda_1^{\,n-1} \\ \lambda_2^{\,n+1} - \lambda_1^{\,n+1} + \lambda_2^{\,n} - \lambda_1^{\,n} \end{pmatrix}$$

$$F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_2^{\,n} - \lambda_1^{\,n} + \lambda_2^{\,n-1} - \lambda_1^{\,n-1}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^{\,n} + \lambda_1^{\,n-1} - \lambda_2^{\,n} - \lambda_2^{\,n-1}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^{\,n+1} - \lambda_2^{\,n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

例10 设三阶方阵A有三个不同的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$ λ_3,对应的特征向量分别为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

已知 $|A^{-1}| = \frac{1}{6}$, 求: (1) λ_3, $|A|$ (2) A

解 (1) $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = 6,$

又 $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 所以 $\lambda_3 = 2$

(2) A有3个线性无关的特征向量,所以A可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix},$$

而 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

故 $A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

小结

一、相似矩阵

1. 相似矩阵的定义

定义5.2 若A, B都是n阶方阵,如果存在n阶可逆矩阵P,使得 $\boxed{P^{-1}AP = B}$, 则称矩阵矩阵A与B相似,记作 $A \sim B$.

2. 相似矩阵的性质

(1) 定理5.5 矩阵的相似关系是一种等价关系

反身性 对称性 传递性

(2) 相似矩阵有相同的特征多项式、相同的特征值、相同的行列式、相同的秩、相同的迹.

小结

(3) 若n阶方阵A与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

相似,则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的n个特征值

小结

二*、矩阵的对角化

所谓方阵A可以对角化,是指A与对角阵相似

即存在可逆矩阵P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 成立。

1. 可对角化矩阵的性质

若A与对角阵相似, 即存在可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 成立, 那么:

(1) $A^k = P\Lambda^k P^{-1} = Pdiag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)P^{-1}$

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 即是A的 n个特征值;而P的第i列x_i是A的对应于特征值λ_i的特征向量

小结

2. 矩阵可对角化的条件

如果 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值互不相等，则 A 与对角阵相似（A可对角化）.

设n阶方阵A的全部不同的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的代数重数依次为 $n_1,n_2,\cdots,n_s$，这里$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$

矩阵可以对角化

$\Longleftrightarrow$ 矩阵A有n个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ 所有特征值的代数重数都等于它的几何重数

$\Longleftrightarrow$ $r(\lambda_i E-A)=n-n_i \quad i=1,2,\cdots,s$

$\Longleftrightarrow$ λ_i 都恰好有 n_i 个线性无关的特征向量$(i=1,2,\cdots,s)$

小结

设n阶方阵A的全部不同的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的代数重数依次为 $n_1,n_2,\cdots,n_s$，这里$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$

矩阵不可以对角化

$\Longleftrightarrow$ 矩阵A没有n个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ 某个特征值的代数重数大于它的几何重数

$\Longleftrightarrow$ $r(\lambda_i E-A)>n-n_i$ 某个$1\le i\le s$

小结

矩阵A对角化的步骤：

（1）求$|\lambda E-A|=0$的全部根；

（2）对每一特征值 λ_i (重数为n_i)，求出$(\lambda_i E-A)x=0$ 的一个基础解系 $x_1,x_2,\cdots,x_{t_i}$，

若有一个$n_i\neq t_i$，则A不能对角化；否则，将所有特征值对应的基础解系合在一起：

$$P=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

作 业

习题5.2

A：1　2 (1)(3)　3

5.3 实对称矩阵的对角化

- 一、实对称矩阵的性质
- 二、实对称矩阵的对角化

引入:

A对角化$\Leftrightarrow n$个线性无关的特征向量

$\exists$可逆矩阵P, $P^{-1}AP=\Lambda$

A为实对称阵,肯定可以对角化

$\exists$正交矩阵Q, $Q^{-1}AQ=\Lambda$使得$Q^TAQ=\Lambda$

A为实对称阵,

与一般矩阵的特征值与特征向量的区别

一、实对称矩阵的性质

定理5.9 实对称矩阵的特征值为实数

须证 $\lambda=\bar{\lambda}$

证明: λ是A的特征值, x是特征向量, 即 $Ax=\lambda x$, $x\neq 0$,

$$A\bar{x}=\bar{A}\bar{x}=\overline{Ax}=\overline{\lambda x}=\bar{\lambda}\bar{x}$$

$$(\bar{x}^T)Ax=(\bar{x}^T)(Ax)=(\bar{x}^T)(\lambda x)=\lambda(\bar{x}^T)x \qquad ①$$

$$(\bar{x}^T)Ax=(\bar{x}^TA)x=(\bar{x}^TA^T)x=(A\bar{x})^Tx$$
$$=(\bar{\lambda}\bar{x})^Tx=\bar{\lambda}(\bar{x}^T)x \qquad ②$$

$$(\lambda-\bar{\lambda})(\bar{x}^T)x=0$$

$$\because x\neq 0,\quad \therefore\quad \bar{x}^Tx=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_ix_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0,$$

$$\therefore(\bar{x}^T)x\neq 0\quad \therefore\lambda=\bar{\lambda}$$

定理5.10 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量必正交

证明 设λ_1,λ_2对称矩阵是A的两个不同的特征值,

x_1,x_2分别是属于这两个特征值的特征向量，则有

$$\lambda_1x_1=Ax_1,\ \lambda_2x_2=Ax_2,\ \lambda_1\neq\lambda_2,$$

$$\lambda_1x_1^T=x_1^TA^T$$

$\because$ A对称, $A=A^T$,

$$\underline{\lambda_1x_1^Tx_2}=(x_1^TA^T)x_2=x_1^T(Ax_2)=x_1^T(\lambda_2x_2)=\underline{\lambda_2x_1^Tx_2}$$

$$\Rightarrow\quad(\lambda_1-\lambda_2)x_1^Tx_2=0$$

$$\because\lambda_1\neq\lambda_2,\quad\therefore x_1^Tx_2=0$$

定理5.11 设A为n阶对称矩阵,则必有n阶正交矩阵Q,

$$使\ Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的$n$个特征值.

证明 对矩阵A的阶数n用归纳法.

当n=1, 结论显然成立. 设此结论对n-1阶方阵成立，下面证明对n阶方阵也成立.

设 p_1是属于A的特征值λ_1的单位特征向量，即

$$Ap_1=\lambda_1p_1,\ 且|p_1|=1$$

构造正交矩阵$Q_1=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, 记$e_1=(1,0,\cdots,0)^T$

$$Q_1e_1=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=p_1$$

由于正交矩阵一定可逆，因此 $Q_1^{-1}p_1=e_1$

用矩阵 Q_1^{-1}左乘等式 $Ap_1=\lambda_1p_1$ 的两端

$$Q_1^{-1}AQ_1\underline{Q_1^{-1}p_1}=\lambda_1Q_1^{-1}p_1$$

$$(Q_1^{-1}AQ_1)e_1=\lambda_1e_1$$

$Q_1^T=Q_1^{-1}$, 因此, $Q_1^{-1}AQ_1=Q_1^TAQ_1$是对称矩阵,

且与 A有相同的特征值. 记 $Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&0^T\\0&B\end{pmatrix}$

B是$n-1$阶对称矩阵，其特征值为$\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$

由归纳假设，存在 $n-1$阶正交矩阵 Q_2 使得

$$Q_2^{-1}BQ_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0^T\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

令$Q=Q_1\begin{pmatrix}1 & 0^T\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}$，则由于

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}1 & 0^T\\ 0 & Q_2^T\end{pmatrix}Q_1^TQ_1\begin{pmatrix}1 & 0^T\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}=E$$

所以，Q是正交矩阵．并且进一步有

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1 & 0^T\\ 0 & Q_2^{-1}\end{pmatrix}Q_1^{-1}AQ_1\begin{pmatrix}1 & 0^T\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0^T\\ 0 & Q_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0^T\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0^T\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0^T\\ 0 & Q_2^{-1}BQ_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵.

推论5.3 实对称矩阵的特征值的几何重数都等于它们的代数重数.

分析： A互不相等的特征值：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_S$，

基础解系(特征向量) $n_1+n_2+\cdots+n_S=n$

$\lambda_1(n_1重)$： $x_1,x_2,\cdots,x_{n_1}$

$\lambda_2(n_2重)$：$x_{1+n_1},x_{2+n_1},\cdots,x_{n_2+n_1}$

……………………

$\lambda_s(n_s重)$：$x_{1+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},x_{2+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},\cdots,\underset{x_n}{\underline{x_{n_s+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}}}}$

可逆矩阵 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

使得$P^{-1}AP=\Lambda=diag(\overbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_s}^{n个})$

实对称矩阵A一定可以对角化

对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵.

分析：A互不相等的特征值：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_S$，

基础解系(特征向量) $n_1+n_2+\cdots+n_S=n$

$\lambda_1(n_1重)$： $x_1,x_2,\cdots,x_{n_1}\xrightarrow{正交化与单位化}p_1,p_2,\cdots,p_{n_1}$

$\lambda_2(n_2重)$：$x_{1+n_1},x_{2+n_1},\cdots,x_{n_2+n_1}$

……………………$\xrightarrow{正交化与单位化}p_{1+n_1},p_{2+n_1},\cdots,p_{n_2+n_1}$

$\lambda_s(n_s重)$：$x_{1+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},x_{2+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},\cdots,\underset{x_n}{\underline{x_{n_s+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}}}}$

$\xrightarrow{正交化与单位化}p_{1+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},p_{2+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},\cdots,\underset{p_n}{\underline{p_{n_s+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}}}}$

正交矩阵 $Q=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$

使得$Q^{-1}AQ=\Lambda=diag(\overbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_s}^{n个})$

A：一般矩阵

求 P,Λ满足$P^{-1}AP=\Lambda$

$$\begin{cases}\Lambda 由A的特征值构成 \quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\\ P 由A的特征向量构成\ P=(x_1,x_2,\cdots,x_n).\\ \lambda_i与p_i\ 一一对应\ Ax_i=\lambda_ix_i \quad (i=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

A:对称矩阵

求正交阵Q，Λ，满足$Q^{-1}AQ=\Lambda$

$$\begin{cases}\Lambda\ 由A的特征值构成 \quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\\ Q\ 若特征值为单根,对特征向量单位化\\ \quad 若特征值为重根,对特征向量正交化、单位化\\ \quad 由A的特征向量构成\ Q=(p_1,p_2,\cdots,p_n).\\ \qquad Q^{-1}AQ=\Lambda,Q^TAQ=\Lambda\end{cases}$$

二、对称矩阵的对角化

对称矩阵对角化的步骤:

(1) 求全部特征值;

(2) 求特征值对应的线性无关的特征向量:

若特征值为单根,对特征向量单位化;

若特征值为重根,对特征向量正交化、单位化;

(3) 写出正交矩阵 Q, 及相似标准形 $Q^{-1}AQ$

$Q=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$为正交阵,且$Q^{-1}AQ=\Lambda$

例1 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-2&-1&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$ 求正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

解 第一步 求 A 的特征值

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&2&2\\2&\lambda+1&2\\2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5)$$

得特征值: $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-5.$

注意 特征值的和 = 主对角线上元素的和

第二步 求 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量

求 $(E-A)x=0$ 的基础解系,

$$E-A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 得: $x_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$

正交化: $\eta_1=x_1,\quad \eta_2=x_2-\dfrac{[x_2,x_1]}{[x_1,x_1]}x_1$

单位化: $p_1=\dfrac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad p_2=\dfrac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

求 $\lambda_3=-5$ 的特征向量

求 $-(5E+A)x=0$ 的基础解系,

$$5E+A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 得: $x_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}p_3=\dfrac{x_3}{\|x_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

第三步

$$Q=(p_1\ p_2\ p_3)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$ 使得 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-5\end{pmatrix}$

例2 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$ 求正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

解 第一步 求 A 的特征值

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda+1)^2$$

得特征值: $\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=-1$

注意 特征值的和 = 主对角线上元素的和

第二步 求 $\lambda_1=8$ 的特征向量

求 $(8E-A)x=0$ 的基础解系

$$x_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}p_1=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix},$$

求 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量

求 $(-E-A)x=0$ 的基础解系

$$x_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{正交单位化}}p_2=\begin{pmatrix}0\\-2/\sqrt5\\1/\sqrt5\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}\sqrt5/3\\-2\sqrt5/15\\-4\sqrt5/15\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=-1$

$$p_1=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}0\\-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}\sqrt{5}/3\\-2\sqrt{5}/15\\-4\sqrt{5}/15\end{pmatrix}$$

第三步

$$Q=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}2/3&0&\sqrt{5}/3\\1/3&-2/\sqrt{5}&-2\sqrt{5}/15\\2/3&1/\sqrt{5}&-4\sqrt{5}/15\end{pmatrix}$$

使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}8&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$

例3 已知三阶实对称矩阵A的特征值为 $\lambda_1=1$(二重)，$\lambda_2=-2$, 向量$x_1=(1,0,-1)^T$, $x_2=(1,1,0)^T$是矩阵A的对应于$\lambda_1=1$的特征向量.

（1）求A的对应于特征值$\lambda_2=-2$的特征向量;

（2）求矩阵A.

解（1）设对应于$\lambda_2=-2$的特征向量是$x=(a_1,a_2,a_3)^T$

x和x_1,x_2都正交, 即 $\begin{cases}a_1-a_3=0\\a_1+a_2=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$得到一个线性无关解: $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

所以属于$\lambda_2=-2$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix}k\\-k\\k\end{pmatrix},k\neq 0$

（2）将向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

标准正交化得到: $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

取

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

因此

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\qquad Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$$

$$A=Q\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}Q^T$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

小结

一、实对称矩阵的性质

1. 特征值为实数;
2. 属于不同特征值的特征向量正交;
3. 特征值的代数重数=几何重数;
4. 必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值.

二、实对称矩阵的对角化 **小结**

对称矩阵对角化的步骤:

(1) 求全部特征值;

(2) 求特征值对应的线性无关的特征向量:

若特征值为单根,对特征向量单位化;

若特征值为重根,对特征向量正交化、单位化;

(3) 写出正交矩阵Q, 及相似标准形$Q^{-1}AQ$

$Q=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$为正交阵,且$Q^{-1}AQ=\Lambda$

小结

A互不相等的特征值：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$

基础解系(特征向量)　$n_1+n_2+\cdots+n_S=n$

$\lambda_1(n_1重)$：$x_1,x_2,\cdots,x_{n_1}\xrightarrow{正交化与单位化}p_1,p_2,\cdots,p_{n_1}$

……………………

$\lambda_2(n_2重)$：$x_{1+n_1},x_{2+n_1},\cdots,x_{n_2+n_1}\xrightarrow{正交化与单位化}p_{1+n_1},p_{2+n_1},\cdots,p_{n_2+n_1}$

$\lambda_s(n_s重)$：$x_{1+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},x_{2+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},\cdots,x_{n_s+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}}$

$\xrightarrow{正交化与单位化}p_{1+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},p_{2+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}},\cdots,\underline{p_{n_s+n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}}}$

p_n

正交矩阵 $Q=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$

使得$Q^{-1}AQ=\Lambda=diag(\overbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_s}^{n个})$

作　业

习题5.3

A: 1(1)(4)(6)　3