§2　方差

在实际问题中常关心随机变量与均值的偏离程度，可用 E|X-EX|，但不方便；所以通常用 $E(X-EX)^2$ 来度量随机变量 X 与其均值 EX 的偏离程度。

1、定义

设 X 是随机变量，若 $E(X-EX)^2$ 存在，称其为随机变量 X 的方差，记作 DX，Var(X)，即：DX=Var(X)= $E(X-EX)^2$。$\sqrt{DX}$ 称为标准差。

$$DX = E(X-EX)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - EX)^2 \cdot p_i$$ ，离散型。

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2 f(x)dx$$ 连续型。

返回主目录

注：方差描述了随机变量的取值与其均值的偏离程度。

方差也可由下面公式求得：

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

证明：

$$DX = E(X - EX)^2$$

$$= E[X^2 - 2(EX)\cdot X + (EX)^2]$$

$$= EX^2 - 2EX\cdot EX + (EX)^2$$

$$= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2$$

$$= EX^2 - (EX)^2$$

返回主目录

例 1

甲、乙两人射击，他们的射击水平由下表给出:

X: **甲击中的环数；**

Y: **乙击中的环数；**

X	8	9	10
P	0.3	0.2	0.5

Y	8	9	10
P	0.2	0.4	0.4

试问哪一个人的射击水平较高？

返回主目录

例 1（续）

解：比较两个人的平均环数.

甲的平均环数为

$$EX = 8\times 0.3 + 9\times 0.2 + 10\times 0.5 = 9.2 \ (\text{环})$$

乙的平均环数为

$$EY = 8\times 0.2 + 9\times 0.4 + 10\times 0.4 = 9.2 \ (\text{环})$$

因此，从平均环数上看，甲乙两人的射击水平是一样的，但两个人射击环数的方差分别为

返回主目录

例 1
（续）

$$DX=(8-9.2)^2\times0.3+(9-9.2)^2\times0.2+(10-9.2)^2\times0.5$$

$$=0.76$$

$$DY=(8-9.2)^2\times0.2+(9-9.2)^2\times0.4+(10-9.2)^2\times0.4$$

$$=0.624$$

由于$DY<DX$,

这表明乙的射击水平比甲稳定 .

例 2　设　$X \sim U[-1,2]$，

$$Y=\begin{cases}1, & X>0\\ 0, & X=0\\ -1, & X<0\end{cases}$$　则方差 $DY=$_____

解：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$　　$DY=EY^2-(EY)^2$

$$E(Y)=1\times P\{Y=1\}+0\times P\{Y=0\}-1\times P\{Y=-1\}$$

$$=P\{X>0\}-P\{X<0\}$$

返回主目录

例 2

$$DY = EY^2 - (EY)^2$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$EY = P\{X>0\} - P\{X<0\}$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{3}dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}$$

$$EY^2 = P\{Y=1\} + P\{Y=-1\}$$

$$= P\{X>0\} + P\{X<0\} = 1$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

返回主目录

2、方差的性质

$$DX = E(X - EX)^2$$

1) DX 0，若 C 是常数，则 DC=0

2) $D(CX) = C^2 DX$

$$\because \; D(CX) = E(CX - ECX)^2$$

3) $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2abE(X - EX)(Y - EY)$，

a，b 是常数。若 X，Y 独立，

则 $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY$

证 3）$\because D(aX + bY) = E[aX + bY - E(aX + bY)]^2$

$$= E[a(X - EX) + b(Y - EY)]^2$$

$$= E[a^2 (X - EX)^2] + E[b^2 (Y - EY)^2] + 2E[ab(X - EX)(Y - EY)]$$

$$= a^2 DX + b^2 DY + 2abE(X - EX)(Y - EY)$$

若 X,Y 独立，则

E(X-EX)(Y-EY)=E (X-EX)E (Y-EY)=0

故：$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2abE(X-EX)(Y-EY)$

$$=a^2DX+b^2DY$$

特别,当X、Y相互独立时，$D(X\pm Y)=DX+DY$。

4) $DX=0 \Leftrightarrow P\{X=c\}=1$，$c=EX$

注：令 $\boxed{Y=(X-EX)/\sqrt{DX}\ ,}$ **则**

$$EY=E[(X-EX)/\sqrt{DX}\,]=E(X-EX)/\sqrt{DX}=0,$$

$$DY=D[(X-EX)/\sqrt{DX}\,]$$

$$=D(X)/(\sqrt{DX})^2=1$$

称 Y 是随机变量 X 的标准化了的随机变量。

3. 几种重要随机变量的数学期望及方差

1）. 两点分布

X	0	1
p_k	$1-p$	p

EX=p ,

$$DX=EX^2-(EX)^2=p-p^2=pq\ 。$$

2. 二项分布

$X \sim B(n,p)$　$\boxed{EX = np}$　$\boxed{DX = npq}$

方法 1 ：用定义 $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP\{X = k\}$

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,\cdots,n$$

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} = np\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} p^{i} q^{n-1-i}$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np$$

返回主目录

几种期望与方差

$$EX^2=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=p\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=p\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}+p\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!}p^{k-2}q^{n-2-(k-2)}+np$$

$$=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np=n^2p^2-np^2+np$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=n^2p^2-n\ p^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npq$$

几种期望与方差

方法 2　设 X_i 服从（0-1）分布，

：$P\{X_i=0\}=q, P\{X_i=1\}=p, i=1,2,\cdots,n$

且 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，令 $X=X_1+\cdots+X_n$，则 $X\sim B(n,p)$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,\cdots,n$$

$$EX=\sum_{i=1}^{n}EX_i=np \qquad DX=\sum_{i=1}^{n}DX_i=npq,$$

3．泊松分布

$$\boxed{EX=\lambda=DX}$$

设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，

其分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,\ldots$

返回主目录

几种期望与方差

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

$$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2+\lambda$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

返回主目录

几种期望与方差

4. 均匀分布　$X \sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), a<x<b\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

$$\boxed{EX=\frac{a+b}{2}}$$

$$\boxed{DX=\frac{(b-a)^2}{12}}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-(\frac{a+b}{2})^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

返回主目录

几种期望与方差

5．正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\boxed{EX=\mu \quad , \quad DX=\sigma^2}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\left(\frac{x-\mu}{\sigma}=t\right)$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$$

$$DX=E(X-\mu)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,\left(\frac{x-\mu}{\sigma}=t\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma^2t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tde^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2$$

返回主目录

$$P\{|X-\mu|\le\sigma\}=P\{\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma\}$$

$$=\Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826$$

$$P\{|X-\mu|\le 2\sigma\}=P\{\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma\}$$

$$=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$$P\{|X-\mu|\le 3\sigma\}=P\{\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma\}$$

$$=2\Phi(3)-1=0.9974$$

因此，对于正态随机变量来说，它的值落在区间 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 内几乎是肯定的。

用切比晓夫不等式估计概率有：

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}\quad 0.8889$$

返回主目录

6. 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$\boxed{E(X)=\theta \quad ,D(X)=\theta^2}$$

$$\because \quad E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_{0}^{\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

$$\therefore \quad DX=E(X^2)-(EX)^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$$

返回主目录

例 3

设$X \sim B(n, p), E(X) = 2.4, D(X) = 1.44$

则 $p =$_____，　$n =$_____.

解： $\because \quad E(X) = np, D(X) = np(1-p)$

$\therefore \quad p = 0.4, \quad n = 6.$

例 4　设$X \sim \pi(\lambda), E[(X-1)(X-2)] = 1$

则 $\lambda =$_____.

例 4（续）

$DX = EX^2 - (EX)^2$　　　$DX = EX = \lambda$

解：$\because$　$1 = E(X^2 - 3X + 2)$

$= E(X^2) - 3E(X) + 2$

$= D(X) + (EX)^2 - 3E(X) + 2$

$= \lambda + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

$\therefore$　$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\therefore$　$\lambda = 1$

返回主目录

例 5 设X、Y相互独立，$X \sim N\left(2, \frac{1}{18}\right)$，
$Y \sim N\left(3, \frac{1}{8}\right)$，则 $P\{3X < 2Y\} =$______.

解：$\because$ $$E(3X - 2Y) = 3E(X) - 2E(Y) = 0$$

$$D(3X - 2Y) = 9D(X) + 4D(Y) = 1$$

$$\therefore \quad 3X - 2Y \sim N(0,1)$$

$$\therefore \quad P\{3X < 2Y\} = P\{3X - 2Y < 0\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

3、定理

定理：（切比晓夫不等式） (Chebyshev 不等式)

设随机变量 X 有数学期望 $EX=\mu,$ **方差** $DX=\sigma^2$ **，对任意**

$$P\{|X-\mu| \quad \varepsilon\}\le\sigma^2/\varepsilon^2$$

>0, **不等式** **成立，或**

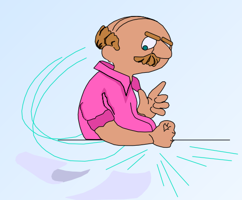
$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\} \quad 1-\sigma^2/\varepsilon^2$$

证明 :(只证 X 是连续型)

$$P\{|X-\mu| \quad \varepsilon\}=\int_{|x-\mu| \quad \varepsilon} f(x)dx \le \int_{|x-\mu| \quad \varepsilon} \frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2} f(x)dx$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

。



返回主目录

这个不等式给出了随机变量X的分布未知情况下，事件$\{|X-\mu|<\varepsilon\}$的概率的一种估计方法

[illegible]

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\} \quad 0.8889$$

$$P\{|X-\mu|<4\sigma\} \quad 0.9375$$

例 6

（1）设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比晓夫（Chebyshev）不等式有估计：

$$P\{|X-\mu| \quad \varepsilon\} \leq \sigma^2/\varepsilon^2$$

$$P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \quad 1-\sigma^2/\varepsilon^2$$

$$P\{|X-E(X)| \quad 2\} \leq \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

（2）设相互独立的随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，则根据切比晓夫（Chebyshev）不等式有估计：

$$P\{|X+Y| \quad 6\} = P\{|Z-E(Z)| \quad 6\} \leq \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

令 $Z = X + Y$　则 $E(Z) = E(X) + E(Y) = 0$

$$D(Z) = D(X) + D(Y) = 1 + 4 = 5$$

例 7

假设一批种子的良种率为$\frac{1}{6}$，从中任意选出 600 粒，试用切比晓夫（Chebyshev）不等式估计：这 600 粒种子中良种所占比例与$\frac{1}{6}$之差的绝对值不超过 0.02 的概率

解：设 X 表示600粒种子中的良种数,则 $X \sim B(600,\frac{1}{6})$.

$$EX = 600\times\frac{1}{6} = 100, \qquad DX = 600\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{500}{6}.$$

由切比晓夫不等式有

$$P\{\left|\frac{X}{600}-\frac{1}{6}\right| \le 0.02\} = P\{\left|\frac{X-100}{600}\right| \le 0.02\}$$

$$= P\{|X-100| \le 12\} \quad 1-\frac{DX}{12^2} = 1-\frac{\frac{500}{6}}{144} = 0.4213$$

例 8

利用Chebyshev不等式证明： 若$DX=0$，则$P\{X=EX\}=1$，

证明：

$$P\{X=EX\}=P\{X-EX=0\}=P\{|X-EX|=0\}$$

$$=1-P\{|X-EX|\neq 0\}$$

而 $$P\{|X-EX|\neq 0\}=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{|X-EX| \quad \frac{1}{n}\right\}\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}P\left\{|X-EX| \quad \frac{1}{n}\right\}$$ （概率的次可列可加性）

由概率的非负性及Chebyshev不等式，得

例 5（续）$0 \le P\left\{ |X-EX| \quad \frac{1}{n} \right\} \le \frac{DX}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0$

所以，$P\left\{ |X-EX| \quad \frac{1}{n} \right\} = 0 \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$

所以，$0 \le P\{|X-EX| \ne 0\} \le \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

所以，$P\{|X-EX| \ne 0\} = 0$　因此，$P\{X = EX\} = 1$.

由此例及方差的性质，我们有：

$$P\{X = C\} = 1 \quad (C\text{为常数})$$

的充分必要条件为　$DX = 0$.

返回主目录

例 9　设$X,Y \sim U[0,1]$，且相互独立。

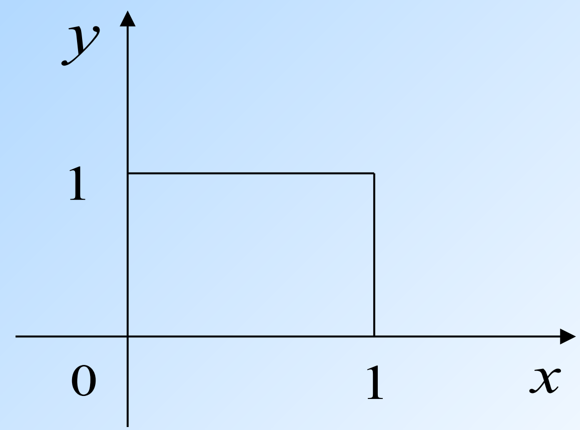
求：$E|X-Y|, D|X-Y|$

解：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

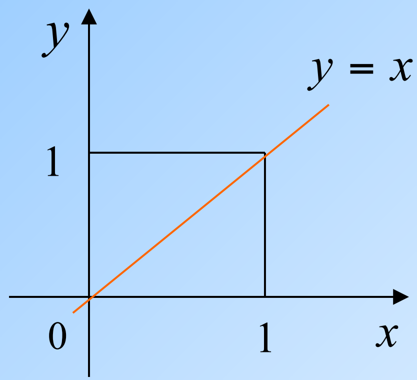


返回主目录

例 9 续

$$E|X-Y| = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|\,f(x,y)\,dxdy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}|x-y|\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)\,dy+\int_0^1 dy\int_0^y (y-x)\,dx$$



$$=2\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)\,dy = 2\int_0^1 \left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{3}$$

$$D|X-Y| = E|X-Y|^2-(E|X-Y|)^2$$

先求：$E|X-Y|^2 =$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^2\,f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 |x-y|^2\,dxdy$$

返回主目录

例 9（续）

$$=\int_0^1\int_0^1 (x-y)^2\,dxdy=\int_0^1\int_0^1 (x^2-2xy+y^2)\,dxdy=\frac{1}{6}$$

则：$D|X-Y| = E|X-Y|^2-(E|X-Y|)^2$

$$=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$$

思考题：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且它们独立，

求：$E|X-Y|, D|X-Y|$

例 10　若 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，且它们独立，求：$E|X-Y|, D|X-Y|$

分析：$E|X-Y| = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|f(x,y)dxdy$

解：令 $Z = X - Y$，则 $Z \sim N(0,2\sigma^2)$，

$$E(Z)=0,\quad D(Z)=2\sigma^2, E(Z^2)=2\sigma^2.$$

$$E|X-Y| = E(|Z|) = \int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2\sigma^2}}dz$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2\sigma^2}}dz \qquad = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

例 10（续）

$$D|X-Y| = E|X-Y|^2 - (E|X-Y|)^2$$

$$= E|Z|^2 - (E|Z|)^2$$

$$= 2\sigma^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$$

p_{116}　19,21,22,23,26.