

## §3.2.2 原函数与不定积分

- 📖 1. 原函数与不定积分的概念
- 📖 2. 积分计算公式

# 1. 原函数与不定积分的概念

由 §2 基本定理的推论知：设  $f(z)$  在单连通区域  $B$  内解析，则对  $B$  中任意曲线  $C$ ，积分  $\int_C f dz$  与路径无关，只与起点和终点有关。

当起点固定在  $z_0$ ，终点  $z$  在  $B$  内变动  $\int_{z_0}^z f(z) dz$

$z$

在  $B$  内就定义了一个变上限的单值函数，记作

**定理** 设  $f(z)$  在单连通区域  $B$  内解析，则  $F(z)$  在  $B$  内解析，且  $F'(z) = f(z)$

**定义** 若函数  $\varphi(z)$  在区域  $B$  内的导数等于  $f(z)$ ，即  $\varphi'(z) = f(z)$ ，称  $\varphi(z)$  为  $f(z)$  在  $B$  内的原函数。

上面定理表明  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  是  $f(z)$  的一个

原函数。 $H(z)$  与  $G(z)$  是  $f(z)$  的任何两个原函数，

$$\because [G(z) - H(z)]' = G'(z) - H'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

$$\therefore G(z) - H(z) = c, \quad (c \text{ 为任意常数})$$

(见第二章 §2 例 6)

这表明： $f(z)$  的任何两个原函数相差一个常数。

**定义** 设  $F(z)$  是  $f(z)$  的一个原函数，称  $F(z)+c$  ( $c$  为任意常数) 为  $f(z)$  的不定积分，记作

$$\int f(z)dz = F(z) + c$$

## 2. 积分计算公式

**定理** 设  $f(z)$  在单连通区域  $B$  内解析， $F(z)$  是  $f(z)$  的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) \quad (\forall z_0, z_1 \in B)$$

- 此公式类似于微积分学中的牛顿 - 莱布尼兹公式。
- 但是要求函数是**解析**的，比以前的**连续**条件要强

**例 1** 计算下列积分：

$$1) \int_C \frac{1}{z^2} dz$$

其中  $C$  为半圆周  $|z| = 3, \operatorname{Re} z \geq 0$ ,  
起点为  $-3i$ , 终点为  $3i$ ;

**解 1)**  $\because \frac{1}{z^2}$  在  $\operatorname{Re} z \geq 0, z \neq 0$  上解析,

$$\text{故 } \int_C \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{-2+1} z^{-2+1} \Big|_{-3i}^{3i} = \frac{2i}{3}$$

$$\text{解 2: } \int_C \frac{1}{z^2} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3ie^{i\theta}}{9e^{2i\theta}} d\theta = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{i}{e^{i\theta}} d\theta = \frac{2i}{3}$$

$$2) \int_C \frac{1}{z} dz$$

其中  $C$  为单连通区域  $D : -\pi < \arg z < \pi$  内  
起点为 1, 终点为  $z$  的任意曲线.

解 2)  $\because \frac{1}{z}$  在  $D$  内解析, 又  $\ln z$  是  $\frac{1}{z}$  的一个原函数,

$$\text{故 } \int_C \frac{1}{z} dz = \ln z - \ln 1 = \ln z \quad (z \in D).$$

### 例 3 计算下列积分

:

$$\int_{-i}^{+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{-i}^i = -\frac{2i}{3}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$$

$$\int_0^i z \sin z dz = (\sin z - z \cos z) \Big|_0^i = \sin i - i \cos i$$



## 小结 求积分的方法

$$(1) \int_c f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

$$(2) \int_c f(z) dz = \int u dx - v dy + i \int v dx + u dy$$

$$(3) \int_c f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt$$

$$(4) \text{若 } f(z) \text{ 解析, } B \text{ 单连通, } C \subset B, \text{ 则 } \oint_C f(z) dz = 0$$

(5) 若  $f(z)$  在  $B$  内解析,  $B$  单连通, 则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_0}^{z_1}, \quad F'(z) = f(z)$$



# §3.3 Cauchy 积分公式

## 主要内容

利用 Cauchy-Goursat 基本定理在多连通域上的推广，即**复合闭路定理**，导出一个**用边界值表示解**

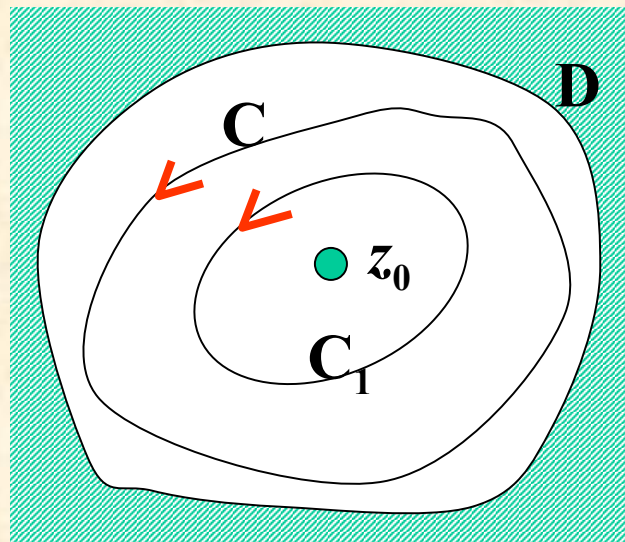
**析函数内部值的积分公式**，该公式不仅给出了解析函数的一个积分表达式，从而成为研究解析函数的有力工具，而且提供了计算某些复变函数沿闭路积分的方法。

**分析** 设 $D$  – 单连通,  $f(z)$ 在 $D$ 内解析,  
 $z_0 \in D$ ,  $C$ 是 $D$ 内围绕 $z_0$ 的一条闭曲线, 则

$$\frac{f(z)}{z - z_0} \text{ 在 } z_0 \text{ 不解析} \therefore \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \stackrel{\text{一般}}{\neq} 0$$

由复合闭路定理得,  
任意包含 $z_0$ 在内部的  
曲线 $C_1 \subset C$ 的内部

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



特别取  $C_1 = \{z \mid |z - z_0| = \delta (\delta > 0 \text{ 可充分小})\}$

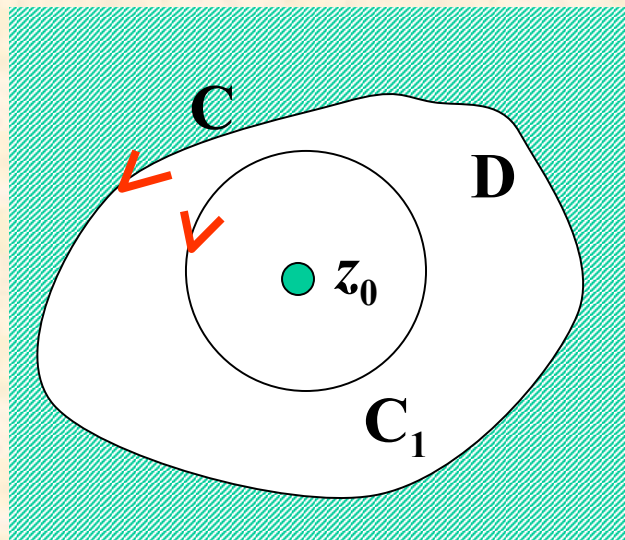
$\therefore f(z)$  的连续性, 在  $C_1$  上的函数值  $f(z)$

当  $\delta \rightarrow 0$  时,  $f(z) \rightarrow f(z_0)$

$\therefore$  **猜想积分**

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0}$$

$$\rightarrow f(z_0) \oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



这个猜想是对的, 这就是下面的定理.

## 定理 (Cauchy 积分公式)

- 1) 设  $f(z)$  在  $D$  内处处解析,
- 2)  $C$  是  $D$  内任意一条正向简单闭曲线,  
它的内部完全含于  $D$ ,

3)  $z_0$  为  $C$  内任意一点  $\Rightarrow$  
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

**证明** 设  $\forall K = \{z \mid |z - z_0| = R\} \subset C$  的内部.

$$\therefore \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz \text{ 与 } K \text{ 的半径 } R \text{ 无关,}$$

$$\therefore \text{ 只须证明: } \lim_{R \rightarrow 0} \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

即要证： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| = R < \delta$

$$\left| \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \left| \oint_k \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \oint_k \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \oint_k \frac{1}{z - z_0} dz \right|$$

$$= \left| \oint_k \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_K \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} ds < \frac{\varepsilon}{R} \oint_K ds = 2\pi\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad |z - z_0| = R < \delta \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{R \rightarrow 0} \int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

□ (1) 若定理条件改为  $f(z)$  在  $C$  所围区域  $B$  内解析, 及在  $C + B = \overline{B}$  上连续, *Cauchy* 积分公式仍成立.

(2) *Cauchy* 积分公式表明函数在  $\mathcal{Q}$  内部任一点的值可以用它在边界的值来表示. 即若  $f(z)$  在区域边界上的值一经确定, 则它在区域内部任一处的值也就确定了.



□ (3)若  $C : z = z_0 + Re^{i\theta}$  则

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值。



例  
1

求 : 1)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$     2)  $\oint_{|z|=4} \left( \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3} \right) dz$

解

$$1) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz = \sin z \Big|_{z=0} = 0$$

$$2) \oint_{|z|=4} \left( \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3} \right) dz = \oint_{|z|=4} \frac{dz}{z+1} + \oint_{|z|=4} \frac{2}{z-3} dz$$

$$f(z)=1 \text{ 及 } 2$$

$$= 2\pi i \cdot 1 + 2\pi i \cdot 2 = 6\pi i$$

**例 2** 求  $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$

$C$  为包含  $|z|=1$  在内的任意简单正向曲线.

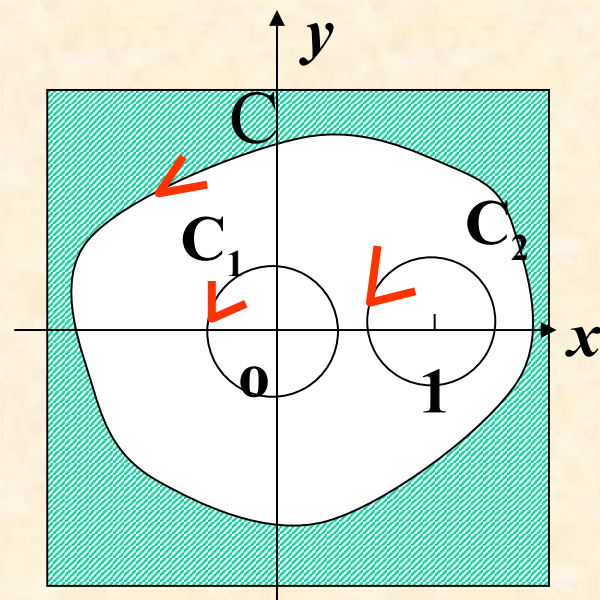
**解** 
$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z-1} dz$$

由  $C$  积分公式

$$= \left. \frac{2z-1}{z} \right|_{z=0} 2\pi i + \left. \frac{2z-1}{z-1} \right|_{z=1} 2\pi i$$

$$= 4\pi i$$



**例 3** 设  $C$  表圆周  $x^2 + y^2 = 3$ ,  $f(z) = \int_C \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$ ,  
求  $f'(1+i)$ .

**解**  $\because 3z^2 + 7z + 1$  在全平面上处处解析,

$$\therefore f(z) = \int_C \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 0 & |z| > 3 \\ 2\pi i(3z^2 + 7z + 1) & |z| < 3 \end{cases}$$

$$\text{又 } f'(z) = \begin{cases} 0 & |z| > 3 \\ 2\pi i(6z + 7) & |z| < 3 \end{cases}$$

$$\text{故 } f'(1+i) = 2\pi i[6(1+i) + 7] = 2\pi(13i - 6)$$

## 二、解析函数的高阶导数

### 主要内容

本节研究解析函数的无穷次可导性，并导出高阶导数计算公式。研究表明：一个解析函数不仅有一阶导数，而且有各阶导数，它的值也可用函数在边界上的值通过积分来表示。这一点与实变函数有本质区别。

形式上，

对积分公式  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  ( $z_0 \in D$ )

两边在积分号下对  $z_0$  求导得

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \quad \dots\dots$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$$

以下将对这些公式的正确性加以证明。

**定理** 解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，  
它的 $n$ 阶导数为

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

其中 $C$ 为在 $f(z)$ 的解析区域 $D$ 内围绕 $z_0$ 的任意正向简单闭曲线，而且它的内部 $\subset D$ 。

**证明** 用数学归纳法和导数定义。

先证 $n = 1$ 的情形。

$$\forall z_0 \in D \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

由柯西积分公式  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$

$$f(z_0 + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - \Delta z} dz$$

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left[ \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - \Delta z} dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz$$

令为 I

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz$$



$$\begin{aligned}
 |I| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|\Delta z| |f(z)|}{|z - z_0 - \Delta z| |z - z_0|^2} ds
 \end{aligned}$$

$\because f(z)$  在  $C$  上解析  $\therefore f(z)$  在  $C$  上连续

则  $\exists M, s.t. |f(z)| \leq M, d = \min_{z \in C} |z - z_0|$  取  $|\Delta z| < \frac{1}{2}d$ , 则有

$$|z - z_0| \geq d, \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{d}$$

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq |z - z_0| - |\Delta z| > \frac{d}{2}, \quad \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} < \frac{2}{d}$$

$$\therefore |I| < |\Delta z| \frac{ML}{\pi d^3} \quad (L \text{ — } C \text{ 的长度})$$

显然  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} I = 0$ , 从而有

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \quad (*)$$

再利用(\*)式及推导(\*)的方法可证  $n = 2$  的情形.

$$f''(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f'(z_0 + \Delta z) - f'(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

依次类推，用数学归纳法可得

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

定理表明 $f(z)$ 在 $z$ 平面上 $D$ 内解析  $\Rightarrow f(z)$ 在 $D$ 内具有各阶导数,即在 $D$ 内解析  $\Rightarrow$  无穷次可导.

**一个解析函数的导数仍为解析函数。**

---

用途：可计算积分  $\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

**例 1** 求下列积分值  $C : |z| = r > 1$

$$1) \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz \quad 2) \oint_C \frac{e^z}{(1+z^2)^2} dz$$

**解**

1)  $\because \cos \pi z$  在全平面处处解析

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz &= \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} \\ &= \frac{2\pi i}{4!} (-\pi^4) = -\frac{\pi^5}{12} i \end{aligned}$$

2)  $\because \frac{e^z}{(z^2 + i)^2}$  在  $z = \pm i$  处不解析. 取  $C_1 : |z - i| = \rho_1$

$C_2 : |z + i| = \rho_2$ ,  $C_2$  不相交且在  $C$  的内部

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{(1 + z^2)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(1 + z^2)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(1 + z^2)^2} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\overline{e^z}}{\overline{(z + i)^2}} dz + \oint_{C_2} \frac{\overline{e^z}}{\overline{(z - i)^2}} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!} \left( \frac{e^z}{(z + i)^2} \right)' \bigg|_{z=i} + \frac{2\pi i}{(2-1)!} \left( \frac{e^z}{(z - i)^2} \right)' \bigg|_{z=-i}$$

$$= \frac{\pi}{2} (1-i)(e^i - ie^{-i})$$

$$= \frac{\pi}{2} (1-i)^2 (\cos 1 - \sin 1) = \pi i \sqrt{2} \sin(1 - \frac{\pi}{4})$$

3)求下列积分值,  $C : |z| = r > 1, \oint_C \frac{e^z}{z^n} dz$

$$n = 1, \text{原式} = 2\pi i; \quad n \neq 1, \text{原式} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

4)求下列积分值,  $\oint_{|z|=4} \frac{\cos \pi z}{z^3 (z-1)^2} dz \quad (12 - \pi)\pi i$

# 第三周周五作业

## 1、书面作业

习题三 8(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

## 2、课后作业

- ① 预习第三章第四节，第四章第一节（复习高数“级数”部分有关内容）；
- ② 完成练习册相应部分习题。



祝大家中秋国庆快乐！