

试问

(i) 该系统是否是线性的;

(ii) 该系统是否是时不变的。

对于以上问题, 如果你的回答是肯定的, 请说明理由。如果你的回答是否定的, 请你提出相反的例证。

(b) 假设上述系统的输入是

$$x(t) = \cos 2\pi t,$$

请仔细画出并标明对应下列每一个  $T$  值的输出  $y(t)$

$$T = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$$

要求在所画的各图中具有相同的水平和垂直刻度。

(c) 对于输入信号为

$$x(t) = e^t \cos 2\pi t$$

重复(b)的要求。

2.21. 在这一习题中, 我们研究几种单位冲激函数的特性。

(a) 证明

$$\delta(2t) = \frac{1}{2} \delta(t)$$

提示: 参看图2.20, 分析一下  $\delta_\Delta(2t)$ 。

(b)  $\delta[2n]$  是什么?

(c) 在2.3节中, 我们把连续时间单位冲激定义为信号  $\delta_\Delta(t)$  的极限, 更确切地说, 我们通过研究  $\delta_\Delta(t)$  的相应特性定义了若干种  $\delta(t)$  的特性。例如, 因为由下式定义的信号

$$u_\Delta(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\Delta(\tau) d\tau$$

收敛于单位阶跃信号

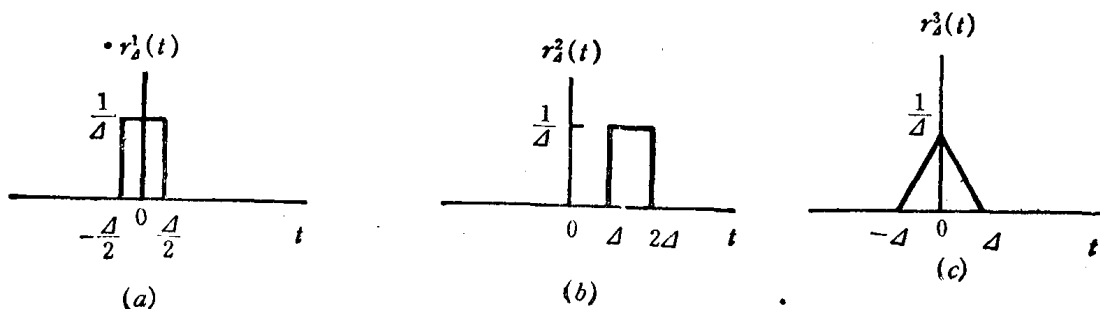
$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_\Delta(t)$$

因此, 我们得以通过等式

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

或者通过把  $\delta(t)$  视为  $u(t)$  的形式上的导数来阐明  $\delta(t)$ 。

以上讨论是相当重要的, 因为实际上我们力图通过单位冲激的特性来定义  $\delta(t)$ , 而不通过确定每一时刻  $t$  的单位冲激数值来定义  $\delta(t)$ , 而后者是不可能实现的。在第3章, 我们将提供一个十分简单的单位冲激特性的表示法, 这种表示法在线性时不变系统的研究中是非常有用的。然而, 目前我们着重阐明应用单位冲激的重要概念, 是为了了解它起怎样的作用。为此, 我们研究图 P2.21 描述的六种信号。证明随着图中  $\Delta \rightarrow 0$ , 每一个信号就“呈现为一个冲激”, 如果假定



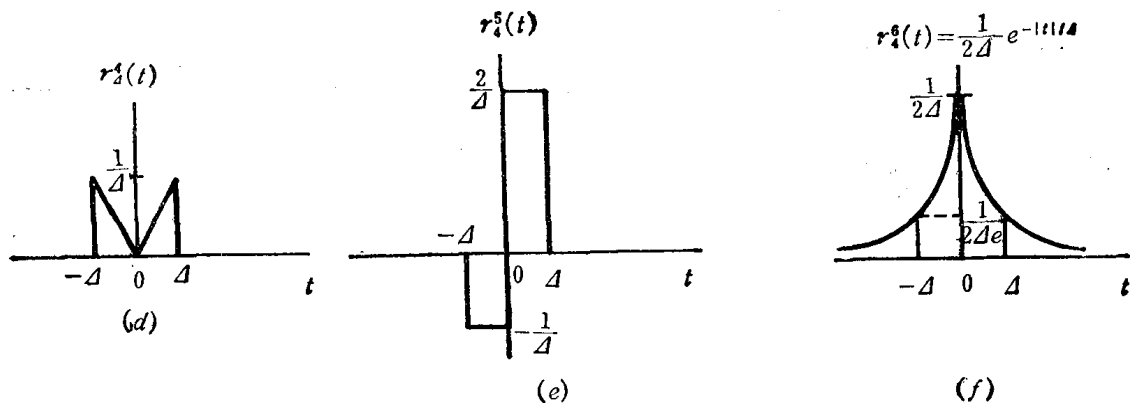


图 P2.21

$$u_D^t(t) = \int_{-\infty}^t r_D^t(\tau) d\tau$$

那么

$$\lim_{D \rightarrow 0} u_D^t(t) = u(t)$$

仔细画出并标明每种情况下的  $u_D^t(t)$  信号。注意，对于一切  $D$ ,

$$r_D^t(0) = r_D^t(0) = 0$$

因此，把  $\delta(t)$  定义为或者理解为： $t \neq 0$  时， $\delta(t)$  为零； $t = 0$  时， $\delta(t)$  为无穷大，是不充分的。倒不如说它具有如式 (P2.21—1) 所定义的冲激信号那样的特性。3.7 节中，我们还要定义所有通常称为奇异函数的信号，这类奇异函数信号与单位冲激有关，并且也是用它的特性而不用它的数值进行定义。

- (d) 在线性时不变系统研究中， $u(t)$ ， $\delta(t)$  和其他奇异函数所起的作用是使物理现象理想化。我们会看到，利用这些理想化能使我们获得这类系统的一种非常重要而又十分简单的表达式。但是，在使用奇异函数时，我们必须很仔细。特别是应该记住它们是理想化了的。因此，每当我们利用奇异函数进行计算时，总是隐含地假定这种计算提供了信号特性的精确描述，信号是被理想化了的。为了说明此点，我们研究等式

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (\text{P2.21—2})$$

该式是以

$$x(t)\delta_D(t) \approx x(0)\delta_D(t) \quad (\text{P2.21—3})$$

这一观测结果为依据的。只要对这一关系式取极限，就可得到式 (P2.21—2) 的理想化关系式。然而，对式 (P2.21—3) 的来源更仔细的研究表明，如果  $t=0$  时， $x(t)$  为连续的，则近似式 (P2.21—3) 才真正唯一具有上述意义。如果  $x(t)$  不连续，那么在  $t$  比较小时就不具有  $x(t) \approx x(0)$ 。

为了使上述论点更清楚，研究一个单位阶跃信号  $u(t)$ 。回顾式 (2.18) 可知，在  $t < 0$  时， $u(t) = 0$ ， $t > 0$  时， $u(t) = 1$ ，而当  $t = 0$  时， $u(t)$  没有定义 [例如，对于所有的  $D$ ， $u_D(0) = 0$ ，而  $u_D^t(0) = 1/2$  (根据 (c))。] $u(0)$  没有定义这一事实并无特别的麻烦，只要在我们利用  $u(t)$  进行计算时不依赖  $u(0)$  选择。例如，如果  $t = 0$  时， $f(t)$  是一连续信号，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

的大小不依赖于  $u(0)$  的选择。另一方面， $u(0)$  无定义这一事实之所以重要，在于含奇异函数的某些计算是未下定义的。假定试图为乘积  $u(t)\delta(t)$  之值下一定义，为了看出这是无法下

定义的,可证明

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} [u_{\Delta}(t)\delta(t)] = 0$$

但是

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} [u_{\Delta}(t)\delta_{\Delta}(t)] = \frac{1}{2}\delta(t)$$

通常,我们可以定义两个信号的乘积无任何困难,只要这些信号不含有位置相重的奇异点(如不连续性,冲激或3.7节中介绍的其他奇异点)。当位置相重时,其乘积是没有定义的。作为一个例子,试证明信号

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

和  $u(t)$  相同。即,在  $t < 0$  时,它为零;在  $t > 0$  时,它等于 1;而在  $t = 0$  时,它是未下定义的。

2.22. 在本章我们介绍了系统的一些一般性特性,特别是,一个系统可能是或可能不是:

- (1) 无记忆的;
- (2) 时不变的;
- (3) 线性的;
- (4) 因果的;
- (5) 稳定的。

对于下列每一个系统,试确定上述特性中哪个是具有的,哪个是不具有的,请说明理由。在下面每个例子中,  $y(t)$  或  $y[n]$  表示系统的输出,而  $x(t)$  或  $x[n]$  表示系统的输入。

(a)  $y(t) = e^{x(t)}$ ;

(b)  $y[n] = x[n]x[n-1]$ ;

(c)  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ;

(d)  $y[n] = x[-n]$ ;

(e)  $y[n] = x[n-2] - 2x[n-17]$ ;

(f)  $y(t) = x(t-1) - x(1-t)$ ;

(g)  $y(t) = \sin(6t)x(t)$ ;

(h)  $y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]$ ;

(i)  $y[n] = nx[n]$ ;

(j)  $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau)d\tau$ ;

(k)  $y[n] = \text{Ev}\{x[n]\}$ ;

(l)  $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ x(t) + x(t-100), & t \geq 0; \end{cases}$

(m)  $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-100), & x(t) \geq 0; \end{cases}$

(n)  $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \\ x[n+1], & n \leq -1; \end{cases}$

(o)  $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \\ x[n], & n \leq -1; \end{cases}$

(p)  $y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$ ;

www.blogoil.com

(q)  $y[n]=x[2n]$ 。

2.23. 在许多通信应用中, 一个重要的概念是两个信号之间的相关性。在第3章末尾的一些习题中, 我们要更多地谈及这个课题, 并提供在实践中如何利用相关性的若干论述。目前, 只对相关函数及其若干特性作简短的介绍。

设  $x(t)$  和  $y(t)$  为两个信号, 则定义相关函数为

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

通常把函数  $\phi_{xx}(t)$  称为信号  $x(t)$  的自相关函数, 而把  $\phi_{xy}(t)$  称做互相关函数。

(a)  $\phi_{xy}(t)$  和  $\phi_{yx}(t)$  之间的关系是什么?

(b) 计算  $\phi_{xx}(t)$  的奇数部分。

(c) 假定  $y(t)=x(t+T)$ , 试用  $\phi_{xx}(t)$  表示  $\phi_{xy}(t)$  和  $\phi_{yy}(t)$ 。

(d) 在实际中, 计算相关函数  $\phi_{hx}(t)$  常常是很重要的, 其中  $h(t)$  是确知信号,  $x(t)$  可以是任何各种各样的信号。在此情况下所要做的是设计一个输入为  $x(t)$ , 输出为  $\phi_{hx}(t)$  的系统。这个系统是线性的吗? 是时不变的吗? 是因果性的吗? 试说明之。

(e) 如果取输出为  $\phi_{xh}(t)$  而不是  $\phi_{hx}(t)$ , (d) 中的任何一个答案会改变吗?

2.24. 研究图 P2.24—1 所示的系统, 其中开方运算产生正的平方根。

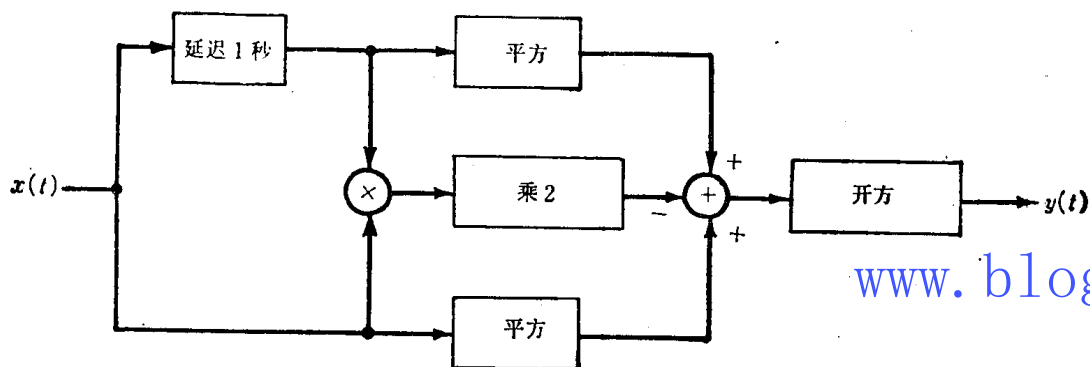


图 P 2.24—1

(a) 试求  $y(t)$  和  $x(t)$  之间的明确关系。

(b) 这个系统是线性的吗?

(c) 是时不变的吗?

(d) 当输入信号如图 p 2.24—2 所示时, 响应  $y(t)$  是什么?

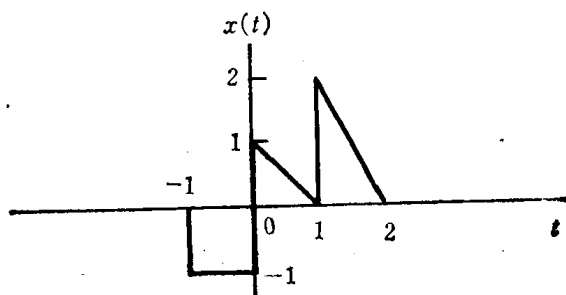


图2.24—2

2.25. (a) 下列论述是正确的还是错误的:

两个线性时不变系统串联连接仍然是线性时不变系统。

证实你的答案。

(b) 以下论述是否正确:

两个非线性系统串联连接仍然是非线性的。

证实你的答案。

(c) 已知具有下列输入—输出关系的三个系统:

$$\text{系统 1} \quad y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶数,} \\ 0, & n \text{ 为奇数;} \end{cases}$$

$$\text{系统 2} \quad y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}x[n+2],$$

$$\text{系统 3} \quad y[n] = x[2n].$$

假定这些系统按图 P 2.25 描述的串联方式连接。试求总的互连系统的输入—输出关系。该系统是线性的吗? 是时不变的吗?

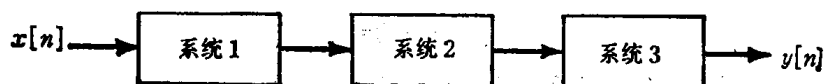


图 P 2.25

(d) 研究具有图 P 2.25 形式的第二个串联连接的系统, 此情况中, 三个系统由下列各等式确定:

$$\text{系统 1} \quad y[n] = x[-n],$$

$$\text{系统 2} \quad y[n] = ax[n-1] + bx[n] + cx[n+1],$$

$$\text{系统 3} \quad y[n] = x[-n].$$

这里  $a$ 、 $b$  和  $c$  是实数。试求总的互连系统的输入—输出关系。在什么情况下, 系数  $a$ 、 $b$  和  $c$  使总系统具有下列各种特性。

(i) 整个系统是线性的和时不变的;

(ii) 整个系统的输入—输出关系和系统 2 的输入—输出特性是相同的;

(iii) 整个系统是因果系统。

www.blogoil.com

2.26. 判别下列每一个系统是不是可逆的。如果是可逆系统, 请构成一个倒置系统; 如果不是可逆系统, 试求具有同样输出时系统的两个输入信号。

(a)  $y(t) = x(t-4)$ ;

(b)  $y(t) = \cos x(t)$ ;

(c)  $y[n] = nx[n]$ ;

(d)  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ ;

$$(e) \quad y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \\ x[n], & n \leq -1, \end{cases}$$

(f)  $y[n] = x[n]x[n-1]$ ;

(g)  $y[n] = x[1-n]$ ;

(h)  $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$ ;

$$(i) \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k],$$

(j)  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ;

$$(k) \quad y[n] = \begin{cases} x[n+1], & n \geq 0, \\ x[n], & n \leq -1, \end{cases}$$

(l)  $y(t) = x(2t)$ ;

(m)  $y[n] = x[2n]$ ;

$$(n) \quad y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n \text{ 为偶数,} \\ 0, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

2.27. 在课文中, 我们曾经讨论了系统的线性特性等效于系统具有迭加性和均匀性这一事实, 为方便起见, 在此我们重述这两个特性:

1. 设  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  是相应于输出为  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  的某一系统的任何两个输入。如果

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

则该系统是迭加系统。

2. 设  $x(t)$  是相应于输出为  $y(t)$  的某一系统的任何输入。如果

$$cx(t) \rightarrow cy(t),$$

(p 2.27—1)

则该系统是均匀系统。式中  $c$  是一任意复常数。

对于离散时间系统可用类似的定义说明。

- (a) 判别 (i)~(iv) 中定义的每一个系统是否为迭加的和 (或) 均匀的。如果这两个特性中有一个成立, 请提出证据并说明理由, 如果不成立, 请提供一个相反的例子并说明之。

(i)  $y[n] = \operatorname{Re}\{x[n]\};$

(ii)  $y(t) = \frac{1}{x(t)} \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right]^2,$

(iii)  $y[n] = \begin{cases} \frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]}, & x[n-1] \neq 0, \\ 0, & x[n-1] = 0; \end{cases}$

(iv) 一连续时间系统, 在所有输入  $x(t)$  不为零时, 其输出  $y(t)$  为零; 而在每个  $x(t)=0$  点处, 输出为一冲激, 其面积等于那时  $x(t)$  的导数。并假定该系统允许的所有输入具有连续的导数。

- (b) 如果一个系统具有迭加性, 并且对于  $c$  为任意实数时, 式 (P 2.27—1) 成立, 则把此系统称为实数线性系统。(a) 中讨论的几个系统之中有一个系统不是线性的, 而是实线性系统。请指出它是哪一个系统?

- (c) 试证明若一系统具有迭加性, 或具有均匀性, 则它具有输入恒等于零, 输出也恒等于零的特性。

- (d) 试决定一个系统 (可以是连续时间的, 也可以是离散时间的), 它既不是迭加的, 又不是均匀的, 但若其输入恒等于零时, 必有一个零输出。

- (e) 如果在  $t_1$  和  $t_2$  的连续时间间隔内 (或  $n_1$  和  $n_2$  之间的离散的区间内), 线性系统的输入为零, 那么, 根据 (c), 你能否作出结论认为在相同的时间间隔内系统的输出也必定为零? 阐明你的回答。

2.28. 考虑能实现下列运算的离散时间系统。按每一个时间  $n$ , 计算:

$$r_+[n] = |x[n] - x[n-1]|,$$

$$r_0[n] = |x[n+1] - x[n-1]|,$$

$$r_-[n] = |x[n+1] - x[n]|,$$

然后确定它们的最大值, 则系统输出  $y[n]$  为

$$y[n] = x[n+1], \text{ 当 } r_+[n] = \max(r_+[n], r_0[n], r_-[n]);$$

$$y[n] = x[n], \text{ 当 } r_0[n] = \max(r_+[n], r_0[n], r_-[n]);$$

$$y[n] = x[n-1], \text{ 当 } r_-[n] = \max(r_+[n], r_0[n], r_-[n]).$$

- (a) 试证明如果  $x[n]$  是实值, 则上述系统可以简单选择  $x[n-1]$ ,  $x[n]$  和  $x[n+1]$  三个数的中间值。这种运算通常称做中值滤波, 它往往用来消除信号  $x[n]$  中偶尔发生的较大的寄生值, 这种寄生值即代表信号所带信息的畸变。例如, 在外层空间通信时, 地球上接收到的信号可能包括由某种形式的干扰引起的无规则变化的短脉冲群。这时中值滤波可以提供一种能部分消除该短脉冲群的方法。还有许多试图达到上述同样目的的方法, 而这些方法的优缺点取决于原始的、未受干扰的信号和干扰信号的特性;

- (b) 试证明上述系统是均匀的, 但不是迭加的;

- (c) 在第 6 章, 我们要非常详细地讨论滤波问题, 即, 为了消除可能存在的干扰, 利用一个系统处理接收的信号。如我们将要看到的, 在设计这种系统时, 必须要考虑某些折衷的方案。这道习题剩下的部分, 我们通过研究下面三个可供选择的系统简略了解有关滤波的问题。

系统 1: 中值滤波器;

系统 2: 平均系统;

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\},$$

系统 3: 对当前信号给予更多加权的平均系统:

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{4}x[n+1].$$

假定输入信号  $x[n]$  是需要的信号  $x_a[n]$  与干扰信号  $x_i[n]$  之和:

$$x[n] = x_a[n] + x_i[n]$$

- (i) 首先, 假定  $x_i[n] = 0$ , 计算三个系统中每个系统的输出,  $x_a[n]$  先取图 P 2.28(a) 的信号, 后取图 P 2.28(b) 的信号。可以看出, 上述每一种系统都要引入失真, 也就是说, 输出是输入的一种畸变形式。对于中值滤波器, 输出的峰值被限幅, 而对于两种平均器, 输出峰值被衰减并扩展。当然, 哪种形式的失真具有最小的影响, 则取决于实用情况。

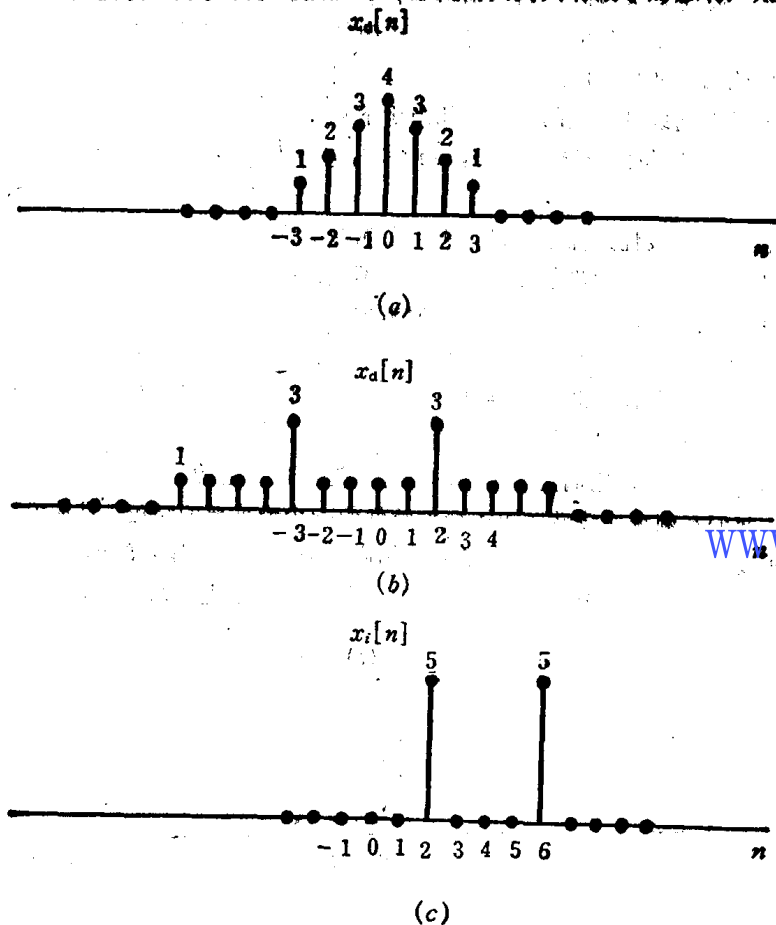


图 P 2.28

- (ii) 其次, 讨论  $x[n]$  是  $x_a[n]$  与  $x_i[n]$  之和的情况,  $x_a[n]$  由图 P 2.28(a) 给出,  $x_i[n]$  如图 P 2.28(c) 所描述。求三个系统的每一个的输出。可以看出, 中值滤波器可以做为一个消除偶发噪声脉冲的最佳部件, 而这恰好是这种滤波器使图 P 2.28(b) 的信号畸变的同一原因。也就是说, 中值滤波器可抑制偶发峰值, 而人们是否选用这种滤波器, 则取决于有用信号和干扰信号的特性; 如果有用信号预期有一些孤立的峰值, 则可能产生失真; 但如果有用信号仅有轻度变化, 并且干扰仅由偶发短脉冲组成, 那么中值滤波器的峰值抑制特性将有助于消除干扰;
- (iii) 现在再次讨论  $x_a[n]$  是由图 P 2.28(a) 表示的情况, 但此处  $x_i[n] = 5(-1)^n$ 。计算这种情况下三个系统的输出。请注意, 系统 3 是完全适合抑制这种噪声的;
- (iv) 应当指出, 由于系统 2 和系统 3 都是线性的, 因此, 干扰信号幅值的刻度可用以简单地

度量干扰输出的大小。另一方面, 由于系统 1 不是线性的, 因此可以预料, 对于输入  $x_a[n] + x_i[n]$  和  $x_a[n] + kx_i[n]$ , 会有形状非常不同的响应。为了说明此点, 计算当  $x_a[n]$

[如图 P 2.28(a) 所示] 和  $x_i[n] = \frac{1}{2}(-1)^n$  时的系统 1 和系统 3 的输出。把这些响应

与第(iii)部分确定的那些响应进行比较。

2.29. (a) 讨论一个输入为  $x(t)$ , 输出为  $y(t)$  的时不变系统。试证明, 如果  $x(t)$  具有周期为  $T$  的周期性, 则  $y(t)$  也是如此。并且证明在离散时间情况下, 与上相似的结论也成立;

(b) 已知系统

$$y[n] = x^2[n]$$

试求一种周期输入, 以便输出信号的基本周期小于输入信号  $x[n]$  的基本周期。试求第二种周期输入, 此处  $x[n]$  和  $y[n]$  具有相同的基本周期。

(c) 提供一个线性时变系统的例子 (连续时间的或离散时间的), 对该系统输入一周期信号, 其相应的输出是非周期的。

2.30. (a) 试证明连续时间线性系统的因果性相当于下列论述:

对于任一时刻  $t_0$  和任一输入  $x(t)$ , 当  $t < t_0$  时, 若  $x(t) = 0$ , 则  $t < t_0$  时, 相应的输出  $y(t)$  也必等于零。

对于离散时间的线性系统, 可以作出与上相似的论述。

(b) 试求一非线性系统, 它满足以上论述, 但不是因果系统。

(c) 试求一非线性系统, 它具有因果性, 但不满足以上论述。

(d) 试证明离散时间线性系统的可逆性相当于下列论述:

对于所有的  $n$ , 导致输出  $y[n] = 0$  的唯一输入也等于零, 即, 对所有的  $n$ ,  $x[n] = 0$ 。类似的论述对连续时间线性系统也是正确的。

(e) 试求一非线性系统, 它满足(d)中的论述, 但不是可逆的。

2.31. 在本习题中, 我们举例说明线性和时不变性特性的一个最重要的结论。具体说, 一旦知道线性系统或线性时不变 (LTI) 系统对于单一输入的响应, 或对于几个输入的响应, 我们就可直接求出对于许多其他输入的响应。本题<sup>①</sup>余下的大部分篇幅论述了上述结论的详尽利用, 以便导出分析

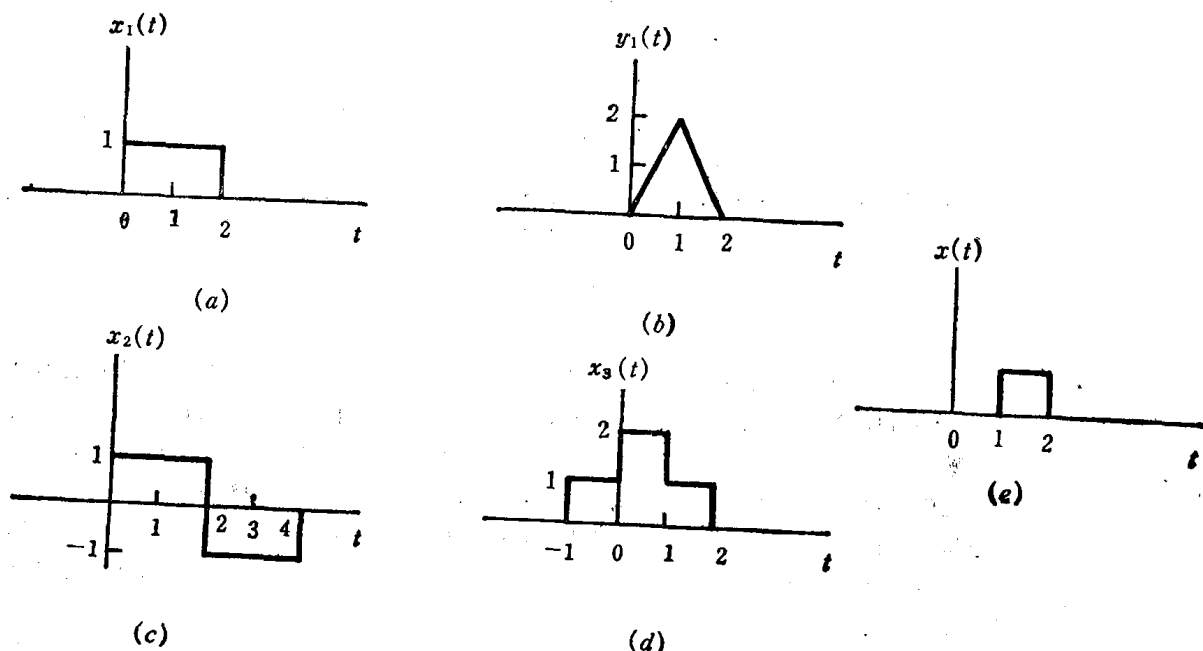


图 P 2.31-1

<sup>①</sup>原书中误为本书。——译者注



与综合 LTI 系统的技术和结果。

- (a) 研究一 LTI 系统, 该系统对于图 P 2.31—1(a) 所示的输入  $x_1(t)$ , 其输出为图 P 2.31—1(b) 所示的  $y_1(t)$ 。确定并仔细画出这个系统对于图 P 2.31—1(c) 所示输入  $x_2(t)$  的响应。
- (b) 确定并画出 (a) 题中已讨论的系统对于图 P 2.31—1(d) 所示输入  $x_3(t)$  的响应。
- (c) 假定另一个 LTI 系统, 当输入是一单位阶跃信号  $x(t)=u(t)$  时, 其输出为

$$y(t)=e^{-t}u(t)+u(t-1),$$

试确定并画出该系统对于图 P 2.31—1(e) 所示输入  $x(t)$  的响应。

- (d) 假定一个特殊的离散时间线性系统 (但不是时不变的), 对于输入信号  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  和  $x_3[n]$ , 其响应分别为  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$  和  $y_3[n]$ , 如图 P 2.31—2(a) 所示。如果该系统的输入  $x[n]$  如图 P 2.31—2(b) 所示, 其输出  $y[n]$  等于什么?

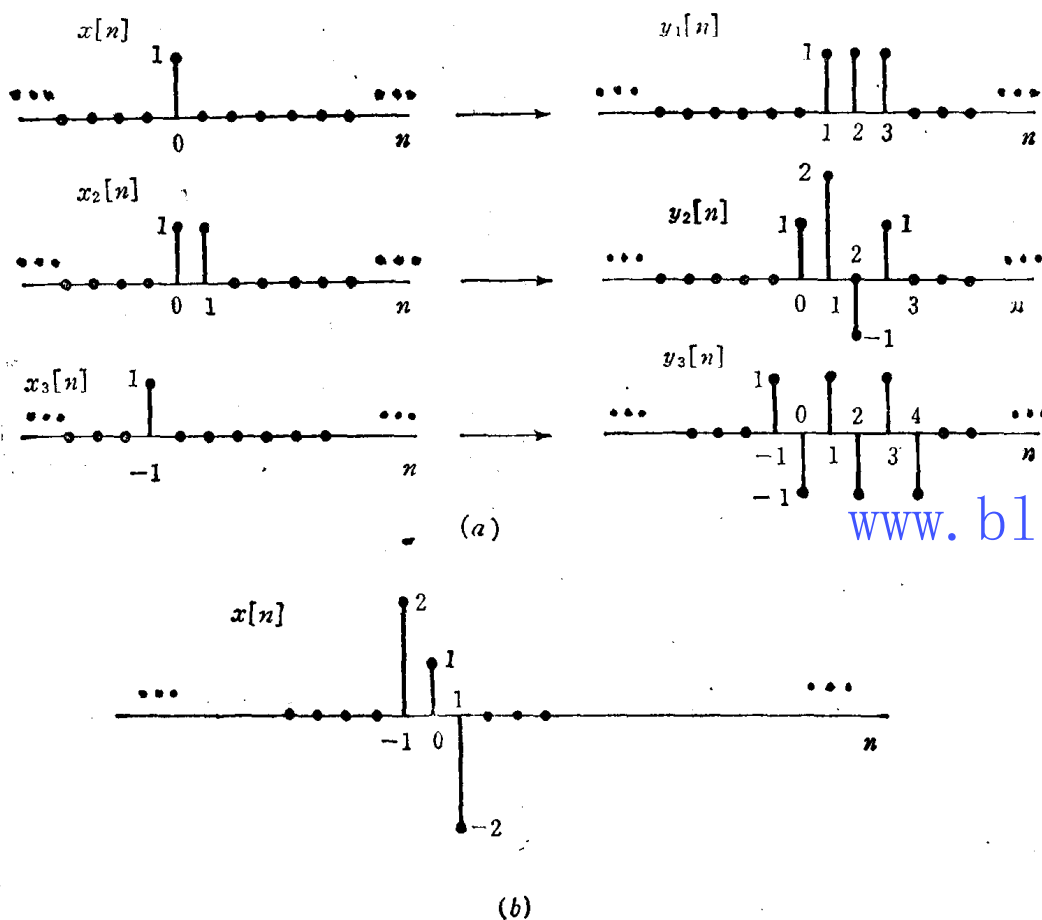


图 P 2.31—2

- (e) 如果一个 LTI 系统, 对于输入为图 P 2.31—2(a) 的  $x_1[n]$ , 其响应为  $y_1[n]$ , 那么对于输入为  $x_2[n]$  和  $x_3[n]$  时, 其响应等于什么?
- (f) 一个特殊的线性系统具有如下特性: 对于输入为  $t^k$  时, 其响应为  $\cos kt$ 。试问对于输入为

$$x_1(t)=\pi+6t^2-47t^5+\sqrt{e}t^6$$

时, 该系统的响应是什么?

如果输入为

$$x_2(t)=\frac{1+t^{10}}{1+t^2}$$

其响应是什么?

提示：请参看习题2.8中的(a)。

2.32. 研究图 P 2.32 的反馈系统。假定  $n < 0$  时,  $y[n] = 0$ 。

(a) 画出当  $x[n] = \delta[n]$  时的输出;

(b) 画出当  $x[n] = u[n]$  时的输出。

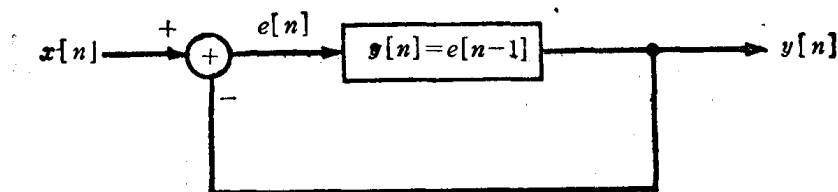


图 P 2.32

2.33. (a) 令  $s$  表示一个增量线性系统, 并且设  $x_1[n]$  是一对应于  $s$  系统输出为  $y_1[n]$  时的任意输入信号, 现在研究图 P 2.33—1 所绘的系统。试证明该系统是线性的, 且事实上  $x[n]$  和  $y[n]$  之间的输入—输出关系不决定于  $x_1[n]$  的特殊选择。

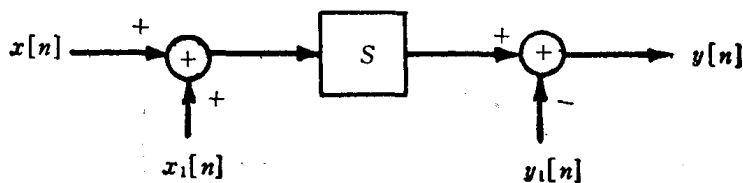
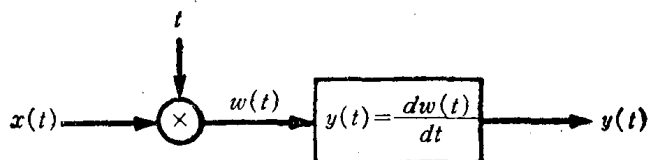


图 P 2.33—1

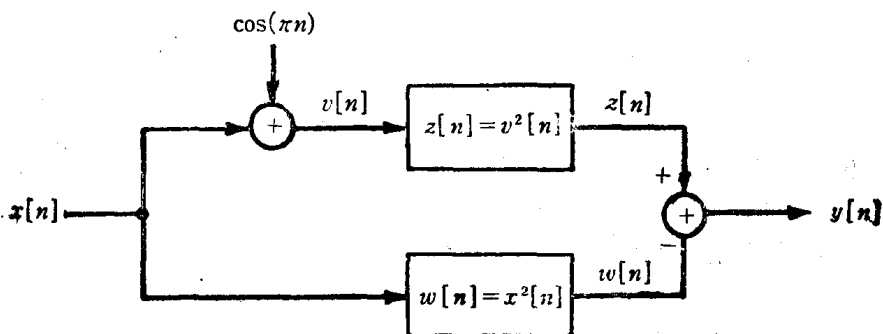
(b) 利用(a)的结果证明:  $s$  系统可用图2.41所示的形式来表示。

(c) 下列各个系统哪一个是增量线性的, 证实你的答案。如果某一系统是增量线性的话, 那么, 请辨别相当于图2.41所示系统模型中的线性系统  $L$  和零输入响应  $y_0[n]$  或  $y_0(t)$ 。

(i)  $y[n] = n + x[n] + 2x[n+4]$ ;



(a)



(b)

图 P 2.33—2

$$(ii) \quad y[n] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{(n-1)}{2} + \sum_{k=-\infty}^{(n-1)/2} x[k], & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

$$(iii) \quad y[n] = \begin{cases} x[n] - x[n-1] + 3, & \text{如果 } x[0] \geq 0, \\ x[n] - x[n-1] - 3, & \text{如果 } x[0] < 0, \end{cases}$$

• (iv) 图 P 2.33—2(a) 描述的系统;

(v) 图 P 2.33—2(b) 描述的系统。

(d) 假定一个具有如图 2.41 所示的特定的增量线性系统,  $L$  表示其中的线性系统,  $y_0[n]$  表示零输入响应。试证明: 当且仅当  $L$  是一时不变系统且  $y_0[n]$  为常数时,  $s$  是时不变系统。

www.blogoil.com

## 第三章 线性时不变系统

### 3.0 引言

在第2章中,我们介绍和讨论了一些基本的系统性质。其中线性和时不变性这两个性质,在信号与系统的分析中起到重要的作用,因为许多物理过程可用线性时不变系统(LTI)来模拟,而且对这样的系统可以作非常详细的分析。本书的基本目的是在于加深对信号与LTI系统性质和分析方法的了解,并介绍这些方法的几种很重要的应用。在本章中,我们通过推导和分析LTI系统的一种基本而极为有用的表示法,以及通过介绍这些系统中一个重要的类别来着手讨论。

LTI系统分析之所以容易可行,主要原因之一,是任何这样的系统均具有式(2.75)和(2.76)中对离散时间LTI系统所描述的迭加性质。同样的,若一个连续时间LTI系统的输入,包含有许多信号的线性组合

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) + \dots \quad (3.1)$$

则按迭加性质,输出由下式给出

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + a_3 y_3(t) + \dots \quad (3.2)$$

式中 $y_k(t)$ 是对于 $x_k(t)$ 的响应, $k=1, 2, 3, \dots$ 。因此,如果我们可以用一组基本信号来表示LTI系统的输入,那么就可以按照这些基本信号的响应用迭加法来计算系统的输出。

我们将在下一节中看到,在离散时间和连续时间两种情况下,单位冲激的重要性质之一,是可以用它作为组成单元以表示最一般的信号。由于这一点,以及迭加性和时不变性,将使我们能根据它对单位冲激的响应,导出任意LTI系统的完整的表达式。这种表示式在离散时间情况下称作卷积和,在连续时间情况下称作卷积积分,在处理LTI系统时,它提供了很大的分析上的方便。在3.2节中我们导出卷积和,而在3.3节中导出卷积积分,接着在3.4节中我们利用这些表示法来研究LTI系统某些其他的性质。在3.5节和3.6节中,我们介绍一类用线性常系数微分方程描述的连续时间系统,以及与它对应的一类用线性常系数差分方程描述的离散时间系统。在以后各章中,当我们继续进行信号与LTI系统分析方法的推导时,将在许多场合回过头来研究这两类非常重要的系统。

### 3.1 用冲激表示信号的方法

如在3.0节中所述,连续时间单位冲激和离散时间单位冲激都可以用来作为基本信号,用这些基本信号我们可以构成类型极为广泛的信号。为了搞清这种结构的表达式如何导出来,让我们首先研究离散时间情况。假设信号 $x[n]$ 如图3.1(a)所示,在该图的其余部分我们画了五种时移的比例改变的单位冲激序列,图中每个冲激的大小,等于单位样值所在特定时间瞬刻的 $x[n]$ 值。例如,

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

因此在图中五个序列的和，也就是当  $-2 \leq n \leq 2$  时

$$x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] \quad (3.3)$$

等于  $x[n]$ 。更一般地，由包括其他的位移了的成比例的各个冲激，我们可以写出

$$\begin{aligned} x[n] = & \dots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] \\ & + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

对于任何  $n$  值，若式 (3.4) 的右边只有一项非零，那么这项的大小恰为  $x[n]$ ，用更紧凑的方式写出求和式，得到

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (3.5)$$

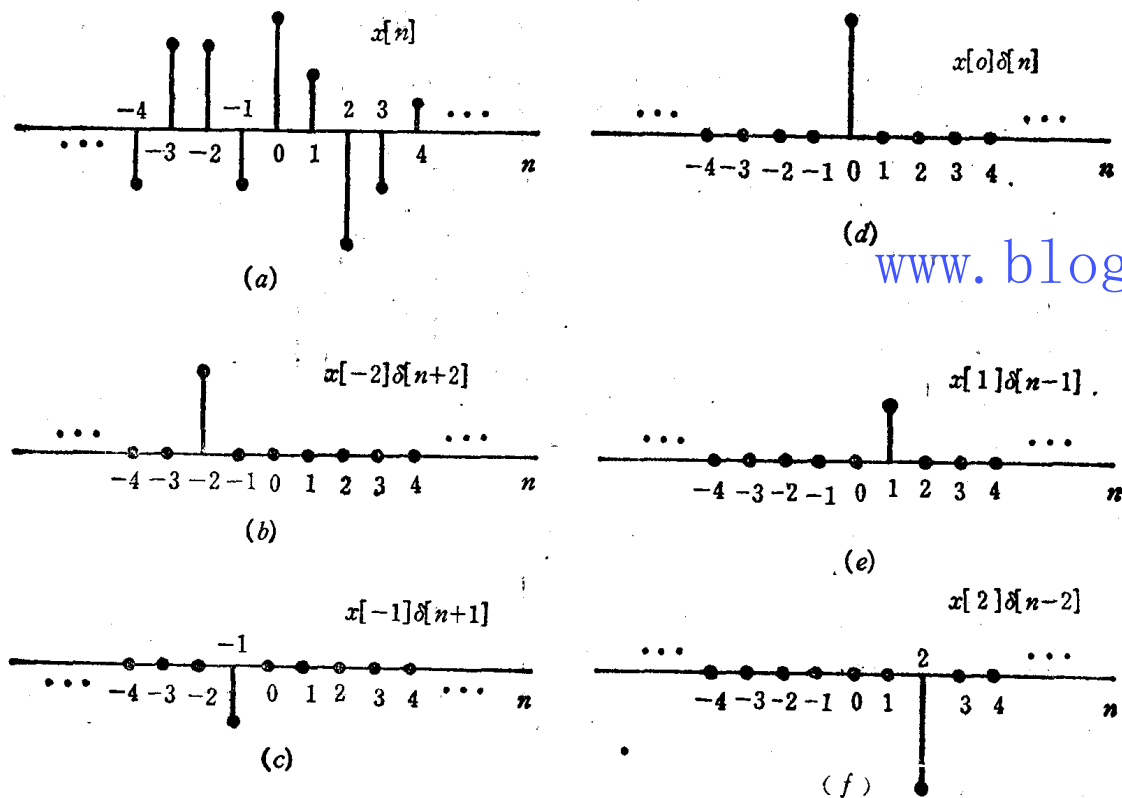


图3.1 离散时间信号分解为移位冲激的加权和

这相当于任意序列表示为位移单位冲激  $\delta[n-k]$  的线性组合，线性组合中的权是  $x[k]$ ，例如，我们假设  $x[n]=u[n]$  为单位阶跃。在这种情况下，因为  $k < 0$  时  $u[k]=0$ ，而  $k \geq 0$  时  $u[k]=1$ ，所以式 (3.5) 变为

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-k]$$

此式与我们在2.4节中〔见式(2.30)〕导出的表示式相同。式(3.5)称为离散时间单位冲激的筛选性质。

在连续时间情况下,相应的表示式仍然可通过单位冲激导出。具体说,考虑对于连续时间信号  $x(t)$  的脉冲或“阶梯状”近似  $\hat{x}(t)$ ,如图3.2(a)中所示。与离散时间情况类似,这种近似可以表示为延时脉冲的线性组合,如图3.2(a)~(c)所示。如果我们定义

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.6)$$

因为  $\Delta\delta_{\Delta}(t)$  具有单位幅度,我们得到表示式

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta \quad (3.7)$$

从图3.2中我们看到,如同离散时间情况那样对任何  $t$  值,在式(3.7)右边的求和式中仅有一项非零。

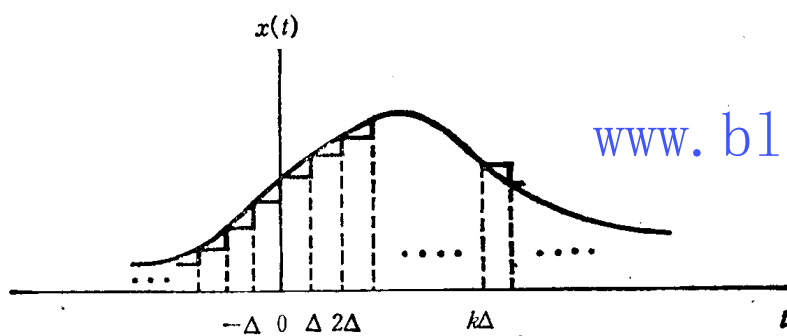
当我们令  $\Delta$  趋向于零时,近似式  $\hat{x}(t)$  变得愈来愈逼近,并且在极限情况下等于  $x(t)$ ,因此,

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta \quad (3.8)$$

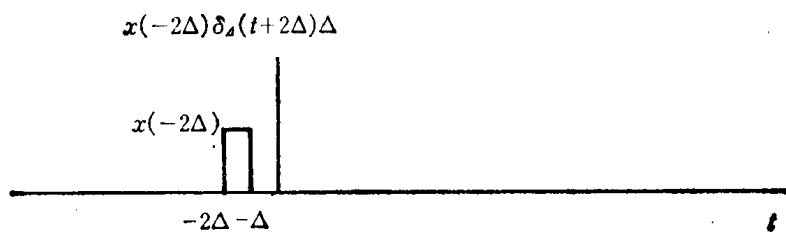
并且当  $\Delta \rightarrow 0$  时,式(3.8)的和式趋向于积分。考虑图3.3所表示的式(3.8)的图解说明,很容易看清这一点。这里

我们用图形说明了信号  $x(\tau)$ 、 $\delta_{\Delta}(t-\tau)$  和它们的乘积,也已示明了阴影区域,其面积近似于当  $\Delta \rightarrow 0$  时在  $x(\tau)\delta_{\Delta}(t-\tau)$  下的面积。注意,阴影区域的面积等于  $x(m\Delta)$ ,其中  $t-\Delta < m\Delta < t$ 。而且在式(3.8)的和式中,对于该  $t$  值来说,只有当  $k=m$  的那一项不是零,于是等式的右边也等于  $x(m\Delta)$ 。因而,我们从式(3.8)和以上的讨论得出,  $x(t)$  等于  $\Delta \rightarrow 0$  时  $x(\tau)\delta_{\Delta}(t-\tau)$  下面积的极限。而且,从式(2.22)我们知道,当  $\Delta \rightarrow 0$  时  $\delta_{\Delta}(t)$  的极限是单位冲激函数  $\delta(t)$ ,所以

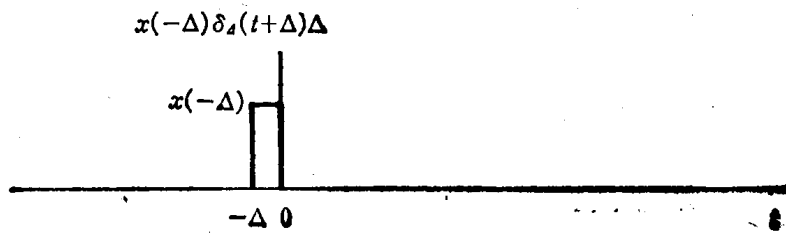
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (3.9)$$



(a)



(b)



(c)

如同离散时间情况一样,称式(3.9)为连续时间冲激函数的筛选性质。对于  $x(t)=u(t)$  的具体例子来说,我们注意到式(3.9)变成

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.10)$$

由于在  $\tau < 0$  时  $u(\tau) = 0$ , 而  $\tau > 0$  时  $u(\tau) = 1$ , 故式(3.10)与2.3节中〔见式(2.23)〕导出的表示式是相同的。

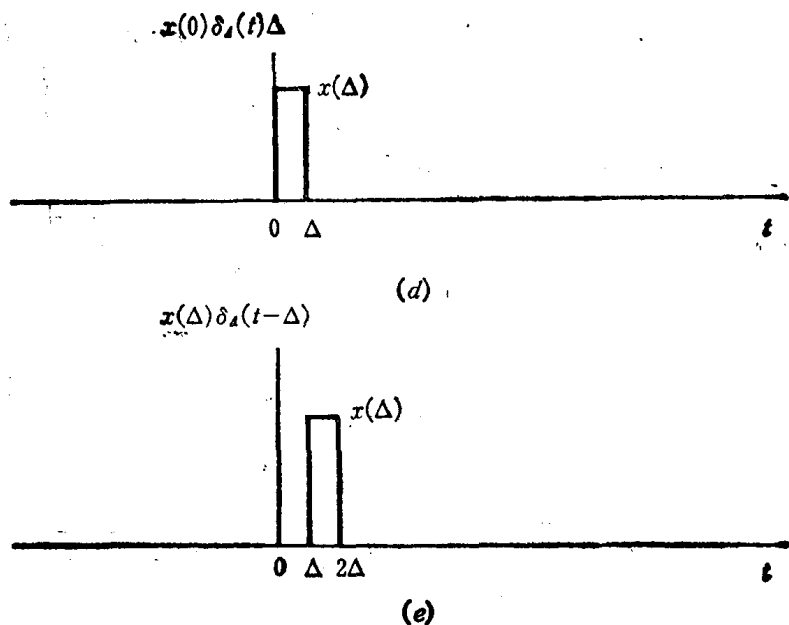


图3.2 连续时间信号的阶梯状近似

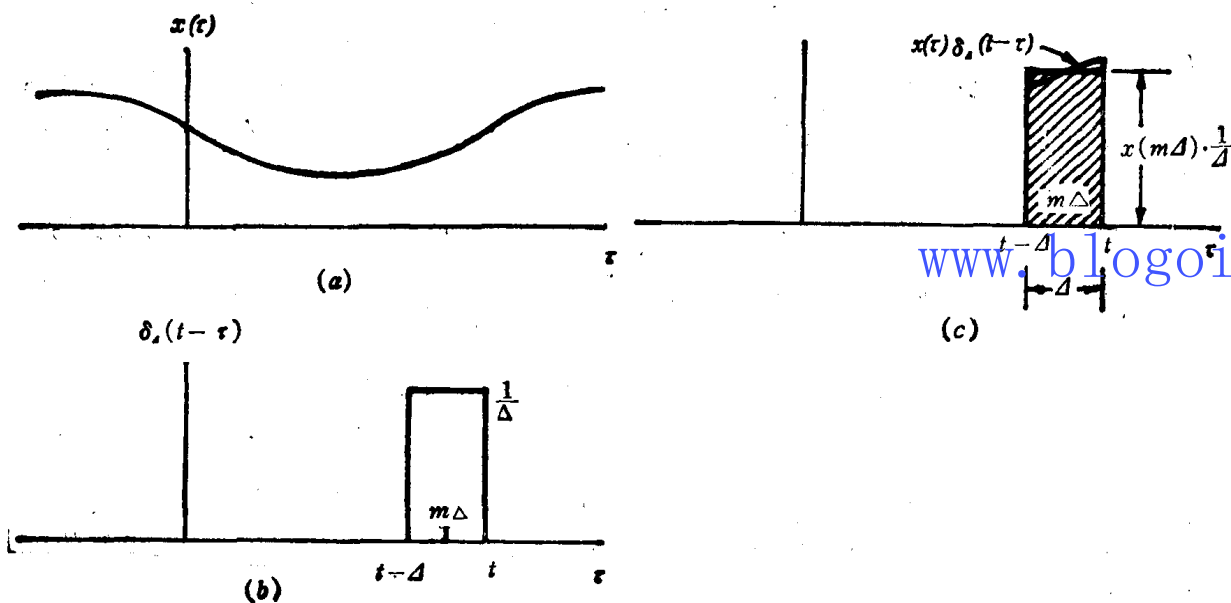


图3.3 式(3.8)的图解表示法

注意,我们直接利用在2.3.2节中所讨论的单位冲激的性质,可以导出式(3.9)。具体说,如图3.4(b)中所示,信号  $\delta(t-\tau)$  (当  $t$  固定时)是在  $\tau=t$  时的单位冲激。因而如图3.4(c)所示,信号  $x(\tau)\delta(t-\tau)$  等于  $x(t)\delta(t-\tau)$  (即,在  $\tau=t$  处的改变比例的冲激,其面积等于  $x(t)$  的值)。因此,从  $\tau=-\infty$  到  $\tau=+\infty$  对这个信号的积分等于  $x(t)$ ,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-\tau) d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

虽然这个推导直接从2.3.2节中得出,我们已包括了由式(3.6)~(3.9)所给出的推导,以强调与离散时间情况的相似性,特别是强调把式(3.9)解释为把信号  $x(t)$  表示为移位冲激的加权“和”(即积分)那样。在下面两节中,利用离散时间和连续时间信号的这种表示式,可帮助我们得到LTI系统响应的重要的表达式。

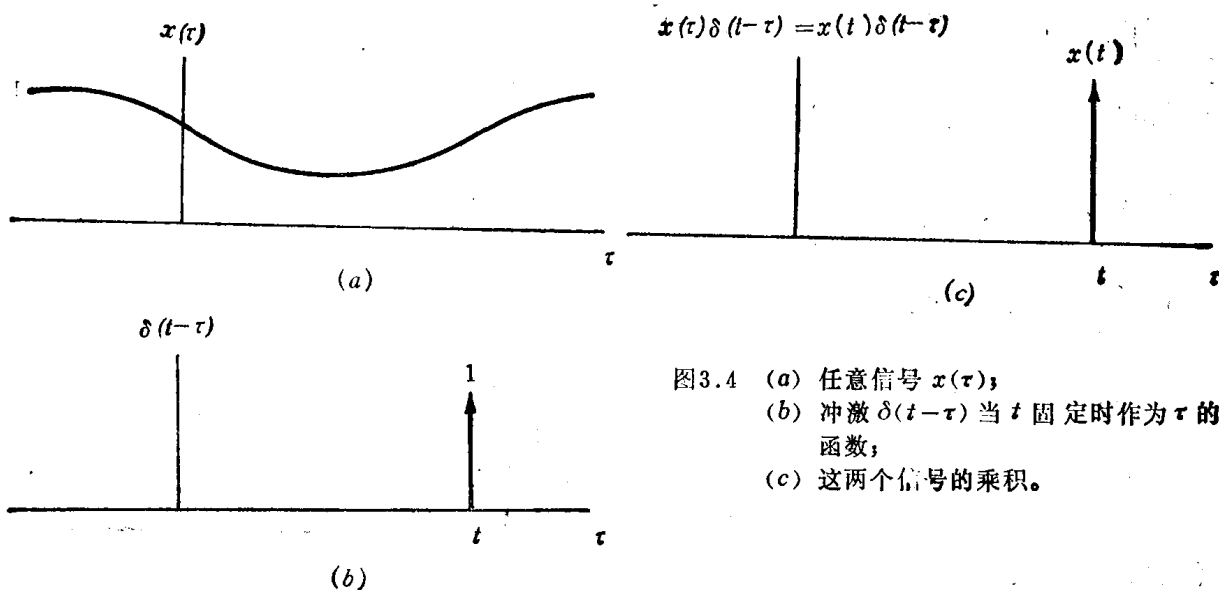


图3.4 (a) 任意信号  $x(\tau)$ ;  
(b) 冲激  $\delta(t-\tau)$  当  $t$  固定时作为  $\tau$  的函数;  
(c) 这两个信号的乘积。

### 3.2 离散时间LTI系统：卷积和

考虑一个离散时间线性系统，以及加到这系统的一个任意输入  $x[n]$ 。如我们在3.1节中看到的，可以把  $x[n]$  表示为式(3.5)形式的移位单位样值的线性组合。为方便起见，我们重写式(3.5)。

$$[\text{式}(3.5)] \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

利用线性系统的迭加性质〔式(2.75)和(2.76)〕，输出  $y[n]$  可以表示为系统对于位移单位样值的响应的线性组合。具体说，若我们令  $h_k[n]$  表示线性系统对于位移单位样值  $\delta[n-k]$  的响应，则系统对于任意输入  $x[n]$  的响应可以表示为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n] \quad (3.11)$$

按照式(3.11)，若我们知道了线性系统对一组移位单位样值的响应，就可以构成对任意输入的响应。式(3.11)的说明如图3.5所示。在图3.5(a)中，我们画了一个特定的信号  $x[n]$ ，它只在  $n=-1, 0, 1$  时， $x[n]$  不为零。此信号作为线性系统输入，这线性系统对信号  $\delta[n+1]$ ， $\delta[n]$  以及  $\delta[n-1]$  的响应表示在图3.5(b)中。因为  $x[n]$  可以写成  $\delta[n+1]$ ， $\delta[n]$  以及  $\delta[n-1]$  的线性组合，根据迭加性质，可将  $x[n]$  的响应写成各个移位冲激响应的线性组合。组成  $x[n]$  的各个移位的、比例改变的冲激，表示在图3.5(c)的左边，而在图3.5(c)的右边画出了这些信号分量的响应。最后，在图3.5(d)中描述了实际输入  $x[n]$ ，它是图3.5(c)中信号分量的和，还画出了实际输出  $y[n]$ ，按照迭加性质，它是图3.5(c)中该信号的分量之和。因此，线性系统在时间  $n$  时的响应，仅仅是各相继输入值响应的迭加。

当然，一般地说，对不同的  $k$  值，响应  $h_k[n]$  彼此之间不一定相互关联。然而，如果线性系统也是时不变的，则

$$h_k[n] = h_0[n-k] \quad (3.12)$$

具体说，因为  $\delta[n-k]$  是  $\delta[n]$  的时移形式，故响应  $h_k[n]$  是  $h_0[n]$  的时间移位形式。为了符号上的方便，我们将在  $h_0[n]$  中略去下标，并且定义单位冲激（样值）响应  $h[n]$  是



$$h[n] = h_0[n] \quad (3.13)$$

(即  $\delta[n] \rightarrow h[n]$ )。于是对于 LTI 系统, 式 (3.11) 写为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (3.14)$$

这个结果称为卷积和或迭加和, 而式 (3.14) 右边的运算称为序列  $x[n]$  和  $h[n]$  的卷积和, 我们将用符号  $y[n] = x[n] * h[n]$  来表示。注意, 式 (3.14) 用系统对单位冲激的响应表示了 LTI 系统对任意输入的响应。根据这一点, 我们立即可以看出, LTI 系统完全可由它的冲激响应来表征。在本章及下面几章, 将研究这一观察结果的一些推论。

式 (3.14) 的解释与以前给出的式 (3.11) 的解释相似。在这一情况下, 时间  $k$  由输入  $x[k]$  引起的响应是  $x[k]h[n-k]$ , 它仅仅是  $h[n]$  的移位和成比例改变的形式。如前所述, 实际输出是所有这些响应的迭加。因而, 在任何固定时刻  $n$  输出  $y[n]$  由所有  $k$  值下  $x[k]h[n-k]$  的和组成。如图 3.6 所说明的那样, 式 (3.14) 的这种解释直接引出了一种非常有用的方法, 这个方法可使得利用卷积和进行  $y[n]$  的计算形象化。具体说, 考虑对某些特定的  $n$  值时的输出求值。在图 3.6(a) 中我们画出了  $h[k]$ , 而在图 3.6(b) 中把  $h[n-k]$  表示为  $n$  固定时  $k$  的函数。注意,  $h[n-k]$  是由  $h[k]$  反转后经移位  $n$  而得, 若  $n$  是正时则向右移动  $n$ , 若  $n$  是负的则向左移动  $n$ 。最后, 在图 3.6(c) 中我们画出了  $x[k]$ 。对于这个特定  $n$  值时的输出  $y[n]$ , 是用相应的  $h[n-k]$  的值加权每一个  $x[k]$  的值来算得, 也就是将图 3.6(b) 及 (c) 中的对应点相乘, 然后对这些乘积求和。为了说明这个过程, 现在我们来考虑两个例子。

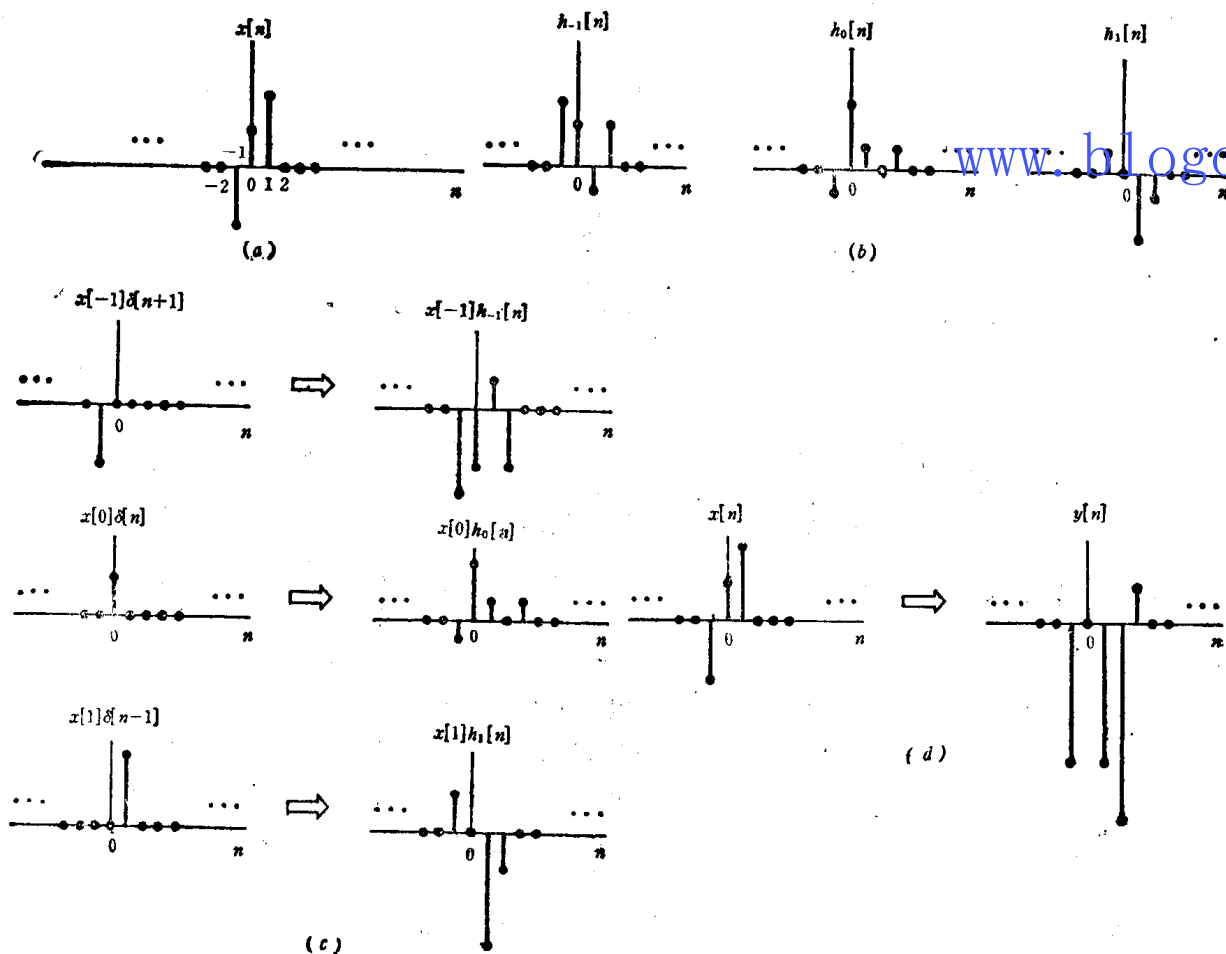
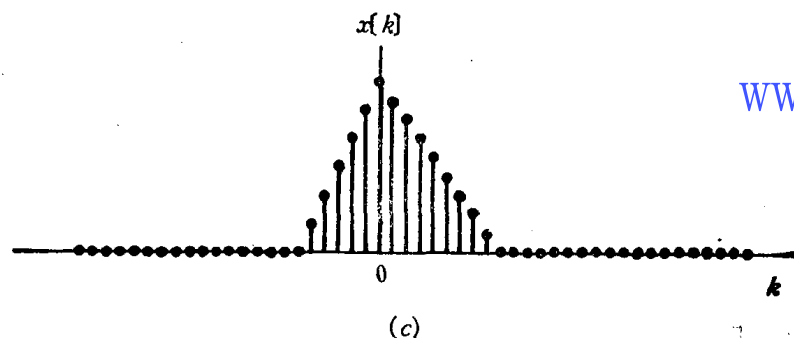
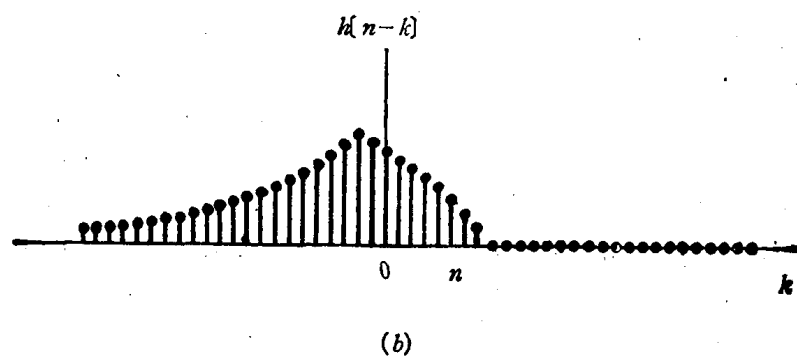
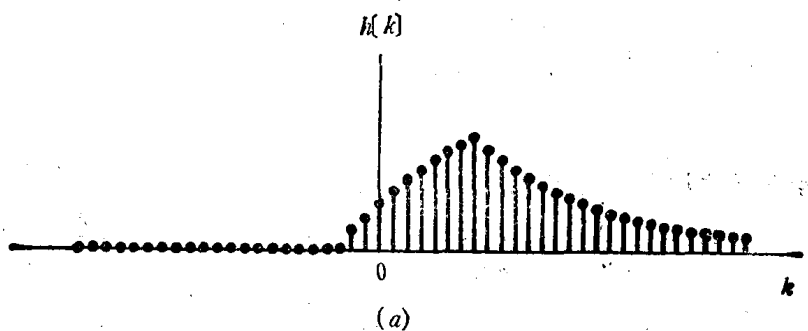


图3.5 由式 (3.11) 所表示的离散时间线性系统的响应图解说明



www.blogoil.com

图3.6 式(3.14)的说明。信号  $h[n-k]$  (把  $n$  固定时作为  $k$  的函数) 是以单位样值响应  $h[k]$  通反转和位移得到。响应  $y[n]$  是由 (b) 和 (c) 中的信号  $x[k]$  和  $h[n-k]$  相乘, 然后对全部  $K$  值的乘积求和得到。

例3.1 设输入  $x[n]$  和单位样值响应  $h[n]$ , 其中  $0 < \alpha < 1$  由下式给出:

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

$$h[n] = u[n]$$

在图3.7中表示了  $h[k]$ 、 $h[-k]$ 、 $h[-1-k]$  以及  $h[1-k]$ , 即当  $n=0, -1, +1$  时的  $h[n-k]$ , 以及  $n$  取任意正值和  $n$  取任意负值时的  $h[n-k]$ 。最后, 在图 3.7(g) 中画出了  $x[k]$ 。从这图中我们注意到, 对于  $n < 0$  的部分,  $x[k]$  和  $h[n-k]$  的非零部分之间不重叠, 这样在  $n < 0$  时, 对所有的  $k$  值,  $x[k]h[n-k] = 0$ , 因此, 在  $n < 0$  时  $y[n] = 0$ 。在  $n \geq 0$  时,  $x[k]h[n-k]$  可以表示为

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

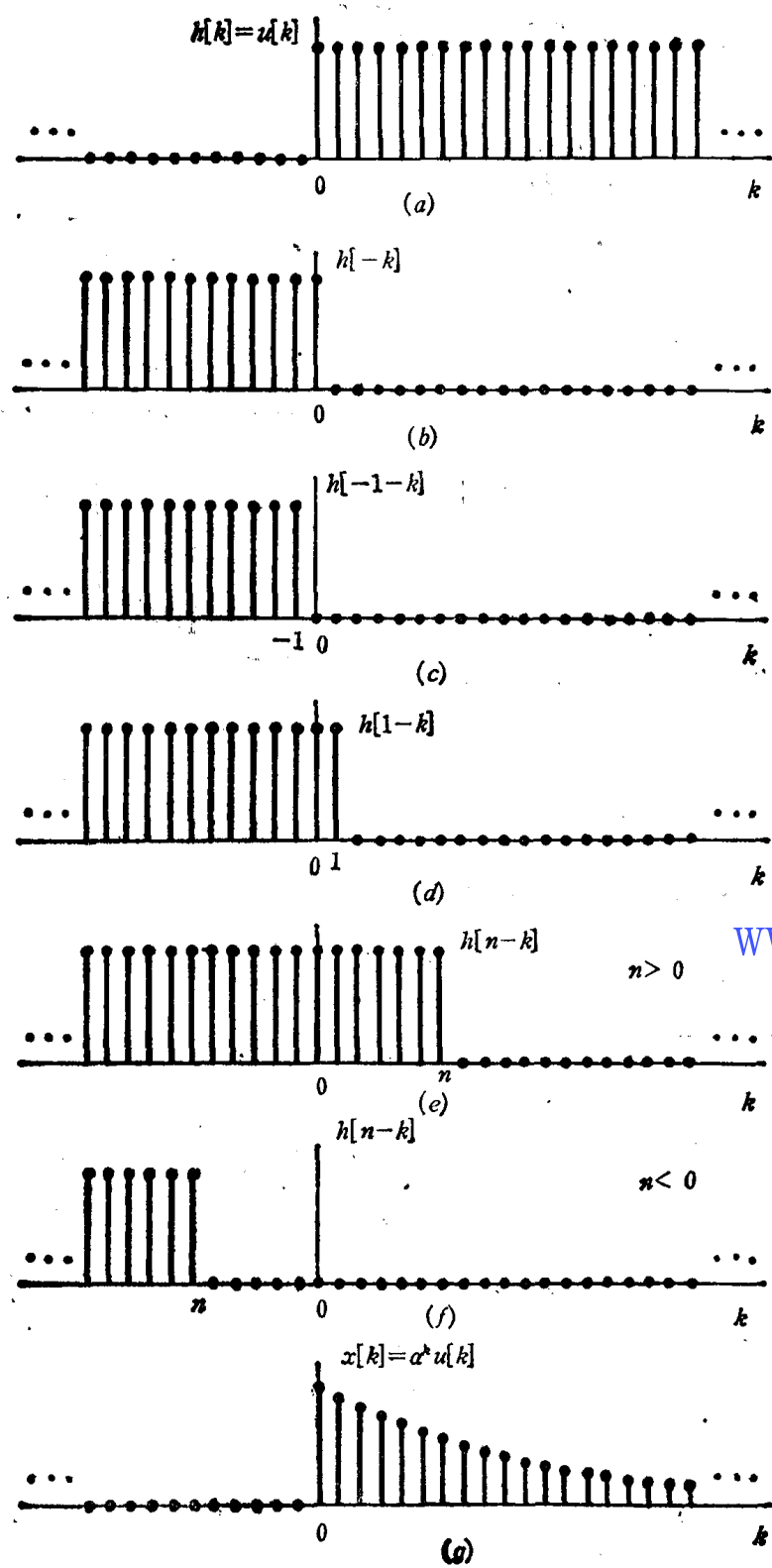


图3.7 例3.1计算卷积和的图示法

因此，在  $n \geq 0$  时

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k$$

而利用习题2.8的结果，可以写出

$$y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, \text{ 当 } n \geq 0 \text{ 时}$$

因此, 对全体  $n$ ,  $y[n]$  由下式给出:

$$y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} u[n]$$

在图3.8中画出了  $y[n]$  的示意图

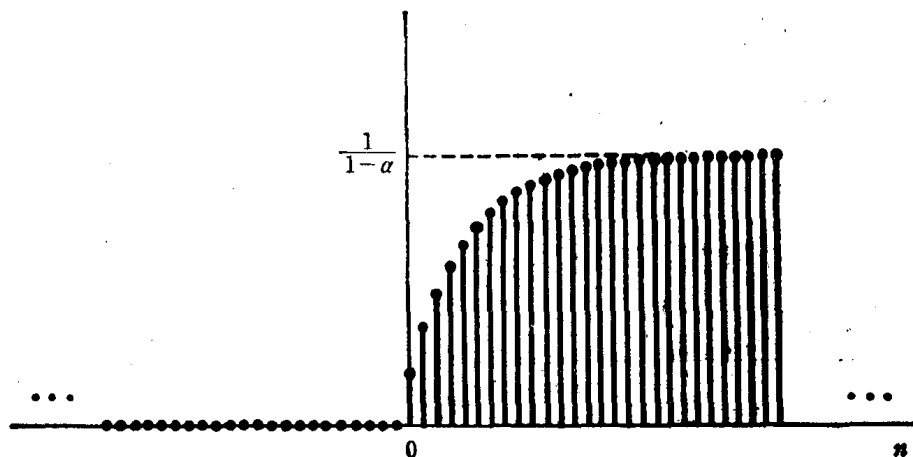


图3.8 例3.1的输出

**例3.2** 第二个例子, 考虑以下两个序列  $x[n]$  和  $h[n]$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

在图3.9中画出这些信号, 为了计算这两个信号的卷积, 方便起见, 设想把  $n$  分为五个分开的区间, 如图3.10所示。

区间1 当  $n < 0$  时,  $x[k]$  和  $h[n-k]$  的非零部分之间不重叠, 因此  $y[n] = 0$ 。

区间2 当  $0 \leq n \leq 4$  时, 乘积  $x[k]h[n-k]$  由下式给出

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此, 在这一区间中

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k}$$

求和变量从  $k$  变换为  $r = n - k$ , 我们得到

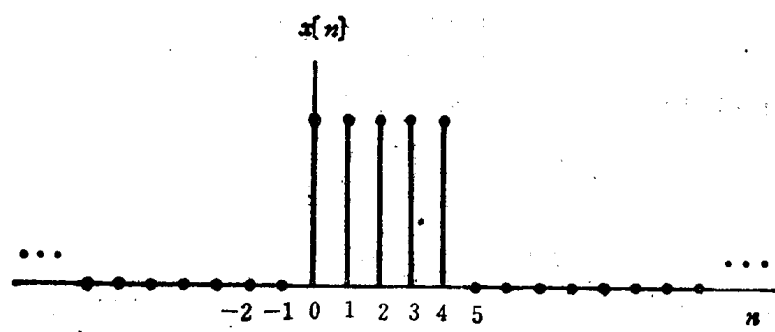
$$y[n] = \sum_{r=0}^n \alpha^r = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

区间3 当  $n > 4$  但  $n - 6 \leq 0$  (即,  $4 < n \leq 6$ ),  $x[k]h[n-k]$  由下式给出

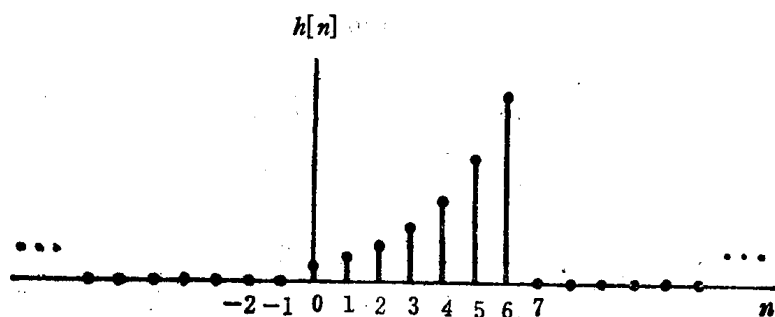
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此, 在这一区间中

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^4 (\alpha^{-1})^k$$



(a)



(b)

图3.9 例3.2中用来进行卷积的信号

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

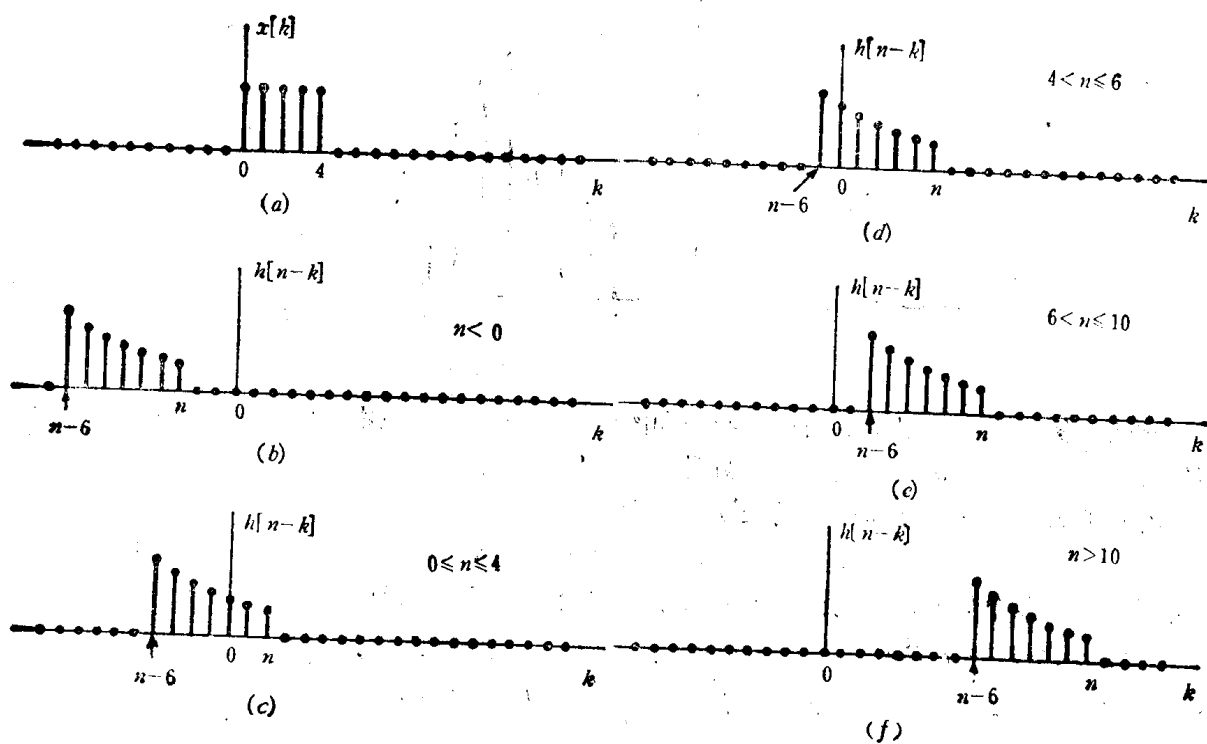


图3.10 在例3.2中实现卷积的图解说明

$$= \alpha^n \frac{1 - \alpha^{-5}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

区间 4 当  $n > 6$  但  $n - 6 \leq 4$  (即, 当  $6 < n \leq 10$ ),

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k}$$

令  $r = k - n + 6$  得到

$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

区间 5 当  $(n-6) < 4$ , 或相当于  $n > 10$ ,  $x[k]$  和  $h[n-k]$  的非零部分之间是不重叠的, 因此

$$y[n] = 0$$

可归纳为

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & 10 < n \end{cases}$$

在图3.11中画出了  $y[n]$

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

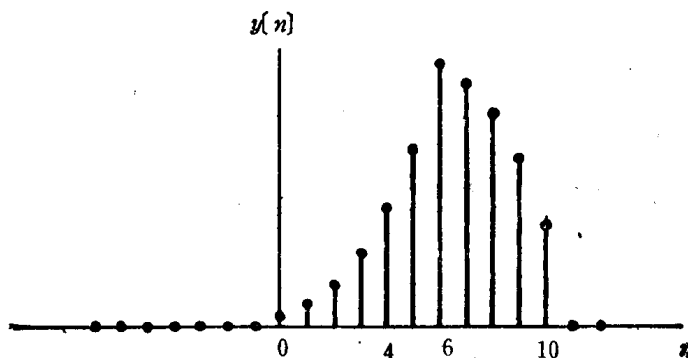


图3.11 在例3.2中实现卷积的结果

这两个例子说明了用图解法解释卷积和的计算是有效的。在本节的余下部分我们讨论卷积的若干重要性质, 这些性质在很多情况下会发现是有用的。

卷积的第一个基本性质是它的交换律, 即是

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad (3.15)$$

这可以用一个简单的方法, 通过式(3.14)中的变量替代来证明。特别是, 令  $r = n - k$  或  $k = n - r$ , 式(3.14)变为

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n] \end{aligned} \quad (3.16)$$

因此, 我们看到用这样的变量替代,  $x[n]$  和  $h[n]$  是可以互换的。按照式 (3.16), 具有输入  $x[n]$  以及单位样值响应  $h[n]$  的 LTI 系统的输出, 和具有输入  $h[n]$  以及单位样值响应  $x[n]$  的 LTI 系统的输出是相同的。例如, 在例 3.2 中先反转并移位  $x[k]$ , 然后使信号  $x[n-k]$  和  $h[k]$  相乘, 最后对所有  $k$  值时的乘积求和, 也可计算其卷积。

卷积的第二个有用的性质是结合律, 即是,

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad (3.17)$$

这个性质可用所涉及的和式的简单计算来证明, 在习题 3.5 中给出了证明这个性质的例子。结合律的说明如图 3.12(a) 和 (b) 所示。在这些方框图中所示的系统, 都是具有所指明的单位样值响应的 LTI 系统。用方框图表示 LTI 系统的图示法, 是特别方便的方法, 同时它也强调了一个事实, 即 LTI 系统的冲激响应完全表示了它的特性。

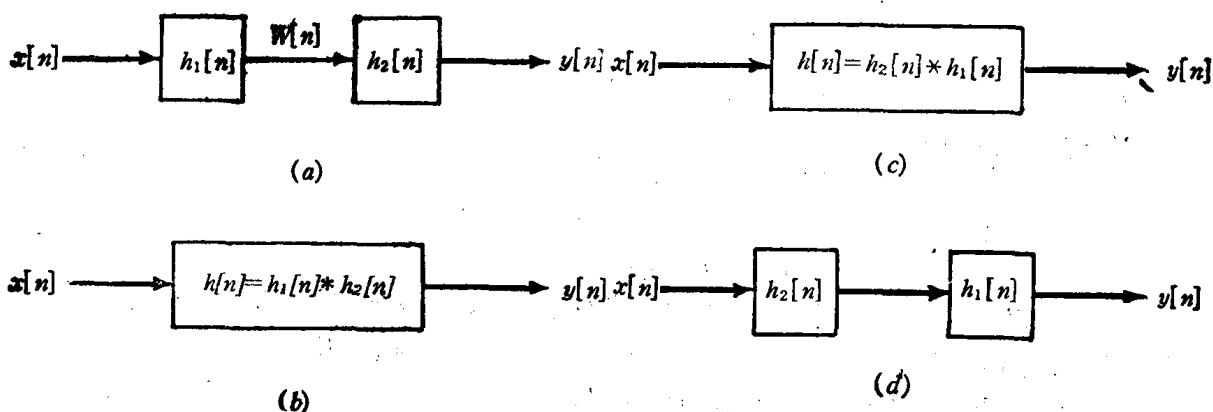


图 3.12 卷积的结合律和结合律与交换律的性质对 LTI 系统级联的含义

在图 3.12(a) 中,

$$\begin{aligned} y[n] &= W[n] * h_2[n] \\ &= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \end{aligned}$$

在图 3.12(b) 中,

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \end{aligned}$$

根据结合律, 在图 3.12(a) 中两个系统的级联连接等于图 3.12(b) 中的单个系统。这可以推广到任意个级联的 LTI 系统。此外, 由于卷积的结合律和交换律性质, 级联 LTI 系统的总单位样值响应与被级联的各系统的次序无关。仍然参照图 3.12, 从两个系统的例子中可以看到这一点。根据交换律, 图 3.12(b) 的系统等效于图 3.12(c) 的系统。然后, 根据结合律, 它又等效于图 3.12(d) 的系统, 我们注意到这是如图 3.12(a) 所示的两个系统的级联组合, 但是级联的次序交换了。我们还注意到, 由于卷积的结合律, 表示式

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] \quad (3.18)$$

是明确的。也就是说, 根据式 (3.17), 它与这些信号卷积的次序无关。

卷积的第三个性质是分配律, 即卷积对于加法的分配, 因此

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (3.19)$$

这也可以用简单的方法证明。分配律也有一个有用的解释。考虑并联的两个 LTI 系统如图 3.13(a) 所示。两系统  $h_1[n]$  和  $h_2[n]$  有相同的输入, 而它们的输出是相加的。

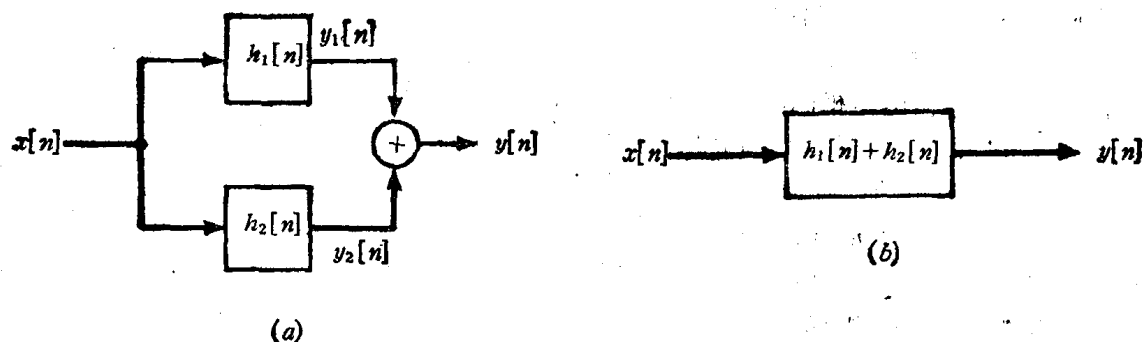


图3.13 对并联连接 LTI 系统的卷积分配律的说明

因为

$$y_1[n] = x[n] * h_1[n]$$

而

$$y_2[n] = x[n] * h_2[n]$$

图3.13(a)系统的输出为

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (3.20)$$

这与式(3.19)的右边相当。而图3.13(b)系统的输出为

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) \quad (3.21)$$

这与式(3.19)的左边相对应。于是, 根据卷积的分配律, 并联连接的 LTI 系统可以用一个 LTI 系统来代替, 它的单位样值响应是并联连接的各个单位样值响应的和。

在本节中, 我们已经得到关于离散时间 LTI 系统的几个重要的结论。具体说, 我们推导了关于 LTI 系统输出的卷积和公式, 并由这些公式已经看到, 单位样值响应完全可以表征系统的特性, 我们也讨论了卷积的几个重要性质(交换律, 结合律, 分配律), 并且根据这些性质, 导出与 LTI 系统连接有关的几个性质。应着重强调, 本节中的结果通常只适用于 LTI 系统, 特别是非线性系统的单位冲激响应不能完全表征系统的性质。例如, 考虑系统具有单位冲激响应为

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n=0, 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.22)$$

确实, 存在一个 LTI 系统以它作为单位冲激响应, 我们将式(3.22)代入式(3.14)的卷积和中, 可求得

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \quad (3.23)$$

然而, 有许多非线性系统对输入  $\delta[n]$  具有这样响应。例如, 下面的两个系统都有这样的性质:

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2$$

$$y[n] = \max(x[n], x[n-1])$$

此外, 若认为级联的各非线性系统其顺序改变而总响应不变, 一般来说, 这是不正确的。例如, 若我们有两个无记忆的系统, 一个乘 2, 另一个将输入平方, 若先乘 2 再平方, 得到

$$y[n] = 4x[n]^2$$

然而, 若先平方后乘 2, 得到

$$y[n] = 2x[n]^2$$

因此, 在级联中可以互换系统的次序, 只是 LTI 系统特有的一种性质。实际上, 如同在习题 3.20 中所证明的, 通常为了使这一性质能够成立, 系统既应是线性的又应是时不变性的。



前面的讨论表明, 离散时间 LTI 系统有许多性质是其他类型的系统所不具有的。我们将会看到, 这些性质能使 LTI 系统的分析更为简便, 而且使我们对系统的特性得到详细的了解。在本节中对 LTI 系统性质初步分析的基础是卷积和, 我们推导卷积和时利用了迭加性和时不变性, 以及把输入信号看作移位冲激加权 and 的表示法。在下节中, 我们再次利用迭加性, 时不变性和单位冲激的筛选性质, 对连续时间 LTI 系统的响应导出一个类似的表示式。在 3.4 节中, 我们利用本节和下节的表示法可得到在 2.6 节中介绍过的有关 LTI 系统性质更为明确的描述。

### 3.3 连续时间 LTI 系统: 卷积积分

和前节中已推导和讨论的结论类似, 本节的目的是为了得到连续时间 LTI 系统用它的单位冲激响应表示的完全表征。具体说, 假设有一个线性系统其输入为  $x(t)$ , 输出为  $y(t)$ 。在 3.1 节式 (3.8) 和 (3.9) 中可以看到, 一个任意的连续时间信号可以表示为移位脉冲线性组合的极限形式:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t-k\Delta) \Delta \quad (3.24)$$

式中的  $\delta_{\Delta}(t)$  由式 (3.6) 给出。运用 3.2 节中类似的方式, 我们定义  $\hat{h}_{k\Delta}(t)$  为 LTI 系统对输入  $\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$  的响应。则由式 (3.24) 和线性系统的迭加性质, 有

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta \quad (3.25)$$

式 (3.25) 的说明类似于离散时间情况下的式 (3.11)。特别是考虑图 3.14, 它是图 3.5 在连续时间情况下的对应图。在图 3.14 (a) 中描述了输入  $x(t)$  和它的近似  $\hat{x}(t)$ , 而在图 3.14 (b) ~ (d) 中, 表示了系统对于  $\hat{x}(t)$  中的三个加权脉冲的响应。于是对应于  $\hat{x}(t)$  的输出  $\hat{y}(t)$  是全部这些响应的迭加 [ 图 3.14 (e) ]。留待解决的是取当  $\Delta \rightarrow 0$  时  $\hat{y}(t)$  的极限, 以得到实际输入  $x(t)$  的响应  $y(t)$ , 如式 (3.25) 所示并如图 3.14 (f) 所说明的那样。注意, 由于脉冲  $\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$  相当于当  $\Delta \rightarrow 0$  时的移位单位冲激, 故响应  $\hat{h}_{k\Delta}(t)$  成为对这样的冲激在极限情况下的响应。因此, 如果令  $h_{\tau}(t)$  表示位于时间  $\tau$  的单位冲激  $\delta(t-\tau)$  在时间  $t$  时的响应, 则

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta \quad (3.26)$$

当  $\Delta \rightarrow 0$  时, 上式右边的求和变为积分, 正如在图 3.15 中所看到的。因此

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau \quad (3.27)$$

式 (3.27) 的解释完全类似于式 (3.25)。如同我们在 3.1 节中所表明的, 任意输入  $x(t)$  可以表示为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

也就是说, 我们可以直观上把  $x(t)$  看作移位冲激加权 “和”, 这里对冲激  $\delta(t-\tau)$  的加权是  $x(\tau) d\tau$ 。用这种解释, 式 (3.27) 只不过是对于这些输入的每一个响应的迭加, 并且由于线性性质, 对移位冲激  $\delta(t-\tau)$  的响应  $h_{\tau}(t)$  的加权也是  $x(\tau) d\tau$ 。

式 (3.27) 表示在连续时间情况下线性系统响应的一般形式。如果系统除了线性之外还是时不变的, 则  $h_{\tau}(t) = h_0(t-\tau)$ 。此外, 为了符号上的方便, 我们去掉下标并且定义单位冲激

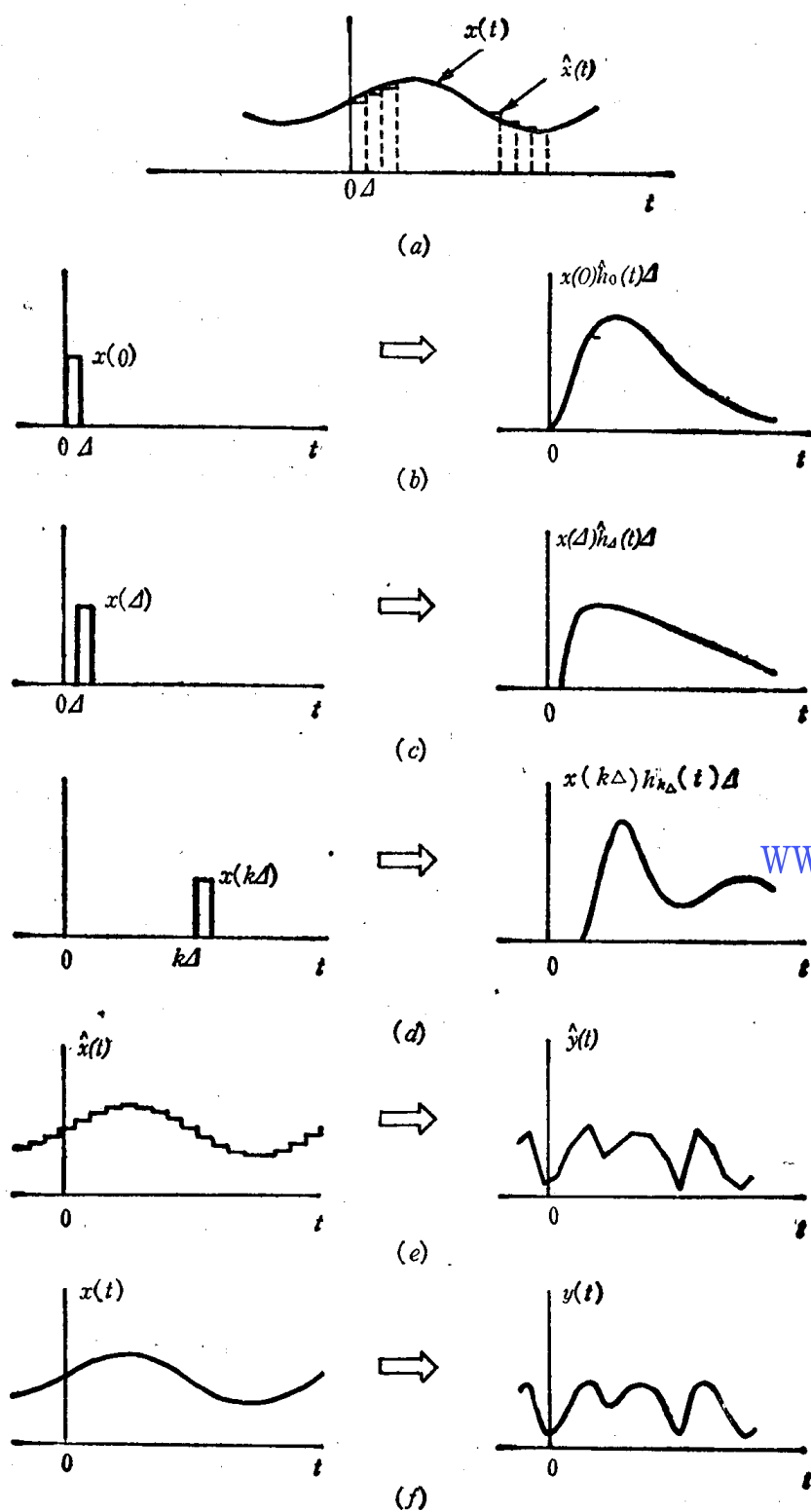


图3.14 由式(3.25)表示的连续时间线性系统响应的图解说明

响应  $h(t)$  为

$$h(t) = h_0(t) \quad (3.26)$$

(即  $\delta(t) \rightarrow h(t)$ ) 在这种情况下, 式(3.27)变为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (3.29)$$

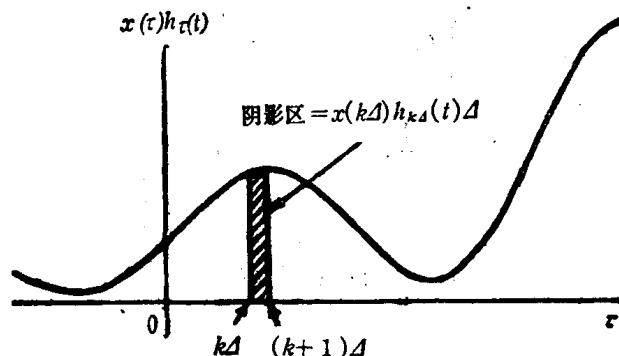


图3.15 式(3.26)和式(3.27)的图解说明

式(3.29)称为卷积积分或迭加积分, 它是式(3.14)的卷积和的连续时间对应式, 并且相当于用系统的单位冲激响应表示的连续时间 LTI 系统的表示式。两个信号  $x(t)$  和  $h(t)$  的卷积用符号表示为

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (3.30)$$

虽然我们使用相同的符号  $*$  来表示离散时间和连续时间两种情况的卷积, 但在课文中一般是能够区分这两种情况的。

连续时间卷积满足在离散时间卷积中讨论过的同样的性质。特别是连续时间卷积满足交换律, 结合律和分配律, 即

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (\text{交换律}) \quad (3.31)$$

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad (\text{结合律}) \quad (3.32)$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)] \quad (\text{分配律}) \quad (3.33)$$

这些性质和离散时间卷积中所讨论的有着完全相同的含意。由于交换律, 输入信号与冲激响应的地位可以互换。根据结合律, LTI 系统在级联连接时可以简化成单个系统, 其冲激响应是各个冲激响应的卷积。且总冲激响应与级联的各系统的次序无关。最后, 作为分配律的一个结果, 一个 LTI 系统的并联组合等效于单个系统, 它的冲激响应是在并联连接的各冲激响应的和。

应再次强调, 上述这些性质是 LTI 系统所特有的。正如离散时间一样, 非线性连续时间系统不能用其单位冲激响应所完全表征。同样地, 两个非线性系统(甚至是线性的但为时变的系统)级联时, 总响应与系统的级联次序有关。

求卷积积分的步骤与相应的求离散时间卷积和的步骤十分类似。具体说, 在式(3.29)中我们看到, 对于任意  $t$  值, 输出  $y(t)$  是输入的加权积分, 这里对  $x(t)$  的加权是  $h(t-\tau)$ 。为了计算这个特定  $t$  值的积分, 首先从  $h(\tau)$  得到信号  $h(t-\tau)$  (把  $t$  固定看作  $\tau$  的函数), 它是以  $h(\tau)$  对于原点的反转, 且当  $t > 0$  时往右移动  $t$ , 而当  $t < 0$  时往左移动  $|t|$  而得到。其次, 我们把信号  $x(\tau)$  和  $h(t-\tau)$  相乘, 而  $y(t)$  可通过对乘积从  $\tau = -\infty$  到  $\tau = +\infty$  进行积分得到。为了说明卷积积分的计算, 我们讨论两个例子。

例3.3 设  $x(t)$  为加到具有单位冲激响应  $h(t)$  的 LTI 系统的输入, 这里

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$h(t) = u(t)$$

式中  $a > 0$ 。在图3.16中我们描述了函数  $h(\tau)$ ,  $x(\tau)$ , 以及  $t$  为负值或正值时的  $h(t-\tau)$ 。从这个图中我们看到,  $t < 0$  时  $x(\tau)$  和  $h(t-\tau)$  的乘积是零, 因此  $y(t)$  是零。当  $t > 0$  时,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

根据此式, 我们可以计算  $t > 0$  时的  $y(t)$

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

因此, 对所有的  $t$ , 有

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$

它的图形如图3.17所示。

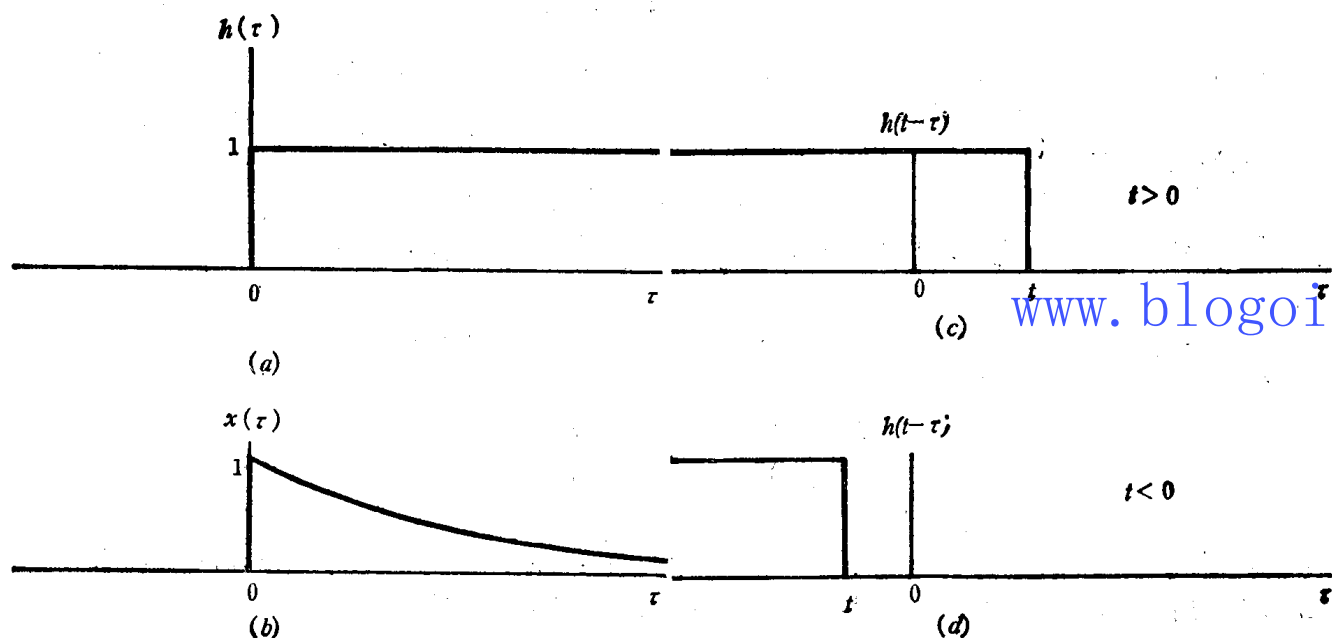


图3.16 例3.3卷积积分的计算

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$

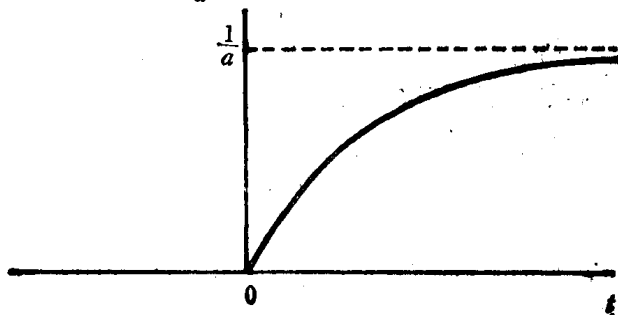


图3.17 对于输入  $x(t) = e^{-at}u(t)$  具有冲激响应  $h(t) = u(t)$  的例3.3中系统的响应

例3.4 研究下列两个信号的卷积:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如同例3.2中对于离散时间的卷积那样,考虑在分开的区间中进行 $y(t)$ 的计算较为方便。在图3.18中,我们已经画出 $x(\tau)$ 和感兴趣的每一个时间间隔的 $h(t-\tau)$ 。当 $t < 0$ 和 $3T < t$ 时, $x(\tau)h(t-\tau) = 0$ ,因此 $y(t) = 0$ 。对于其他时间区间, $x(\tau)h(t-\tau)$ 的乘积如图3.19所示。因此,对于这三个时间区间,其积分可以用图解法求出,其结果为

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases}$$

图3.20中描绘了这一结果。

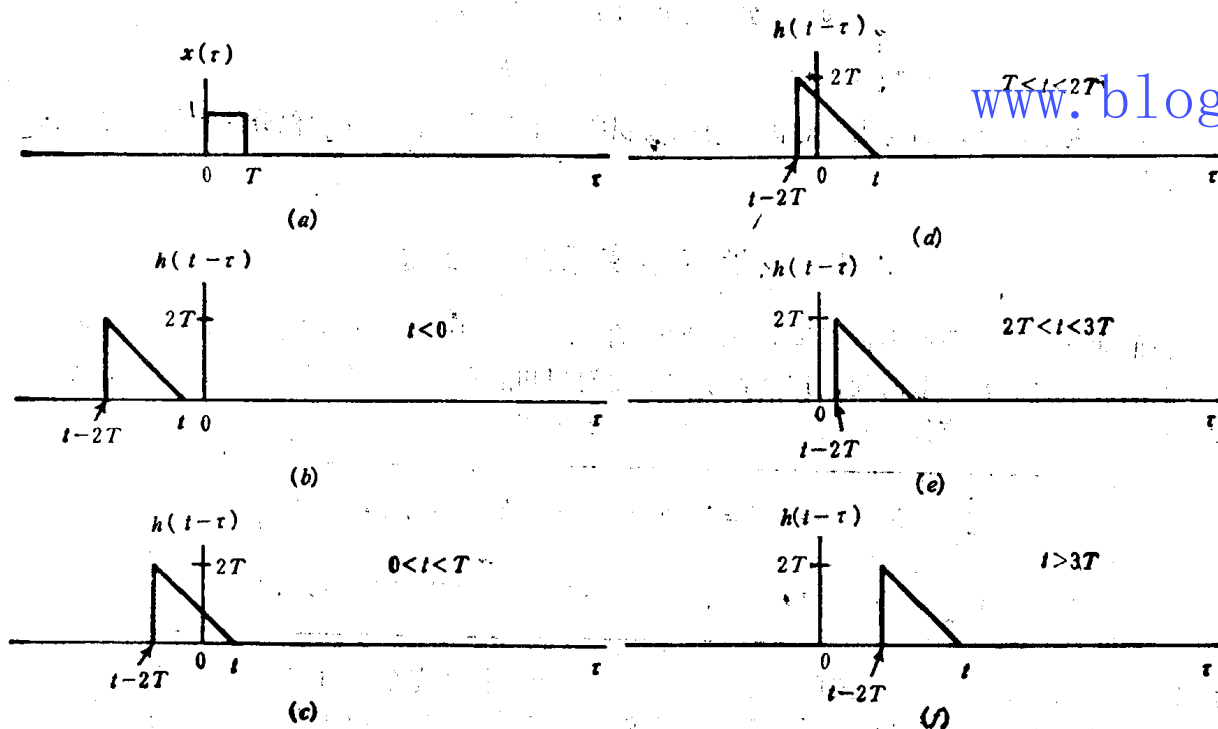


图3.18 例3.4中,当不同 $t$ 值时的信号 $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$

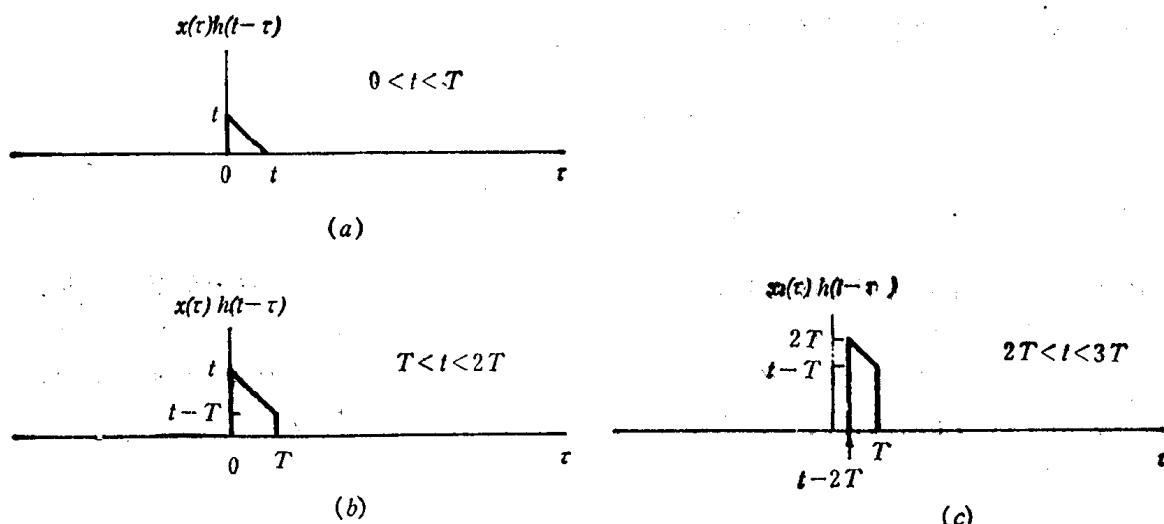


图3.19 例3.4中在  $t$  值的三个区间的乘积  $x(\tau)h(t-\tau)$ , 这乘积不等于零 (见图3.18)

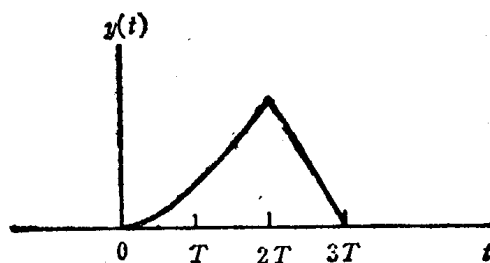


图3.20 例3.4中信号  $y(t) = x(t) * h(t)$

从这些例子可知, 如同我们对离散时间卷积所作的讨论那样, 卷积积分的图解算法通常是有用的。

### 3.4 线性时不变系统的性质

在前面两节中, 我们根据系统的单位冲激响应, 研究了连续时间和离散时间 LTI 系统十分重要的表示式。在离散时间, 这个表示式采用卷积和的形式, 与它相对应的连续时间表示式是卷积积分。为了方便, 我们在此重写这两个表示式。

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = x[n] * h[n] \quad (3.34)$$

$$y[t] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (3.35)$$

正如我们所强调的, 这些表示式的一个结论是 LTI 系统的特性完全可由它的冲激响应所确定。从这点出发, 我们已经导出了 LTI 系统串联和并联连接的性质, 而在本节中, 我们利用由系统的冲激响应表示的 LTI 系统的表示式, 以考察其他几个重要的系统性质。

#### 3.4.1 有记忆和无记忆 LTI 系统

记得在2.6节, 若一个系统在任何时间的输出仅取决于在该时刻的输入值, 则此系统是无

记忆的。由式(3.34)我们看到,对于离散时间 LTI 系统而言,无记忆系统能够成立的唯一途径,是当  $n \neq 0$  时  $h[n]=0$ 。在这种情况下,冲激响应具有如下形式

$$h[n]=K\delta[n] \quad (3.36)$$

式中  $K=h[0]$  是一常数,于是系统具有下述关系

$$y[n]=Kx[n] \quad (3.37)$$

如果一个离散时间 LTI 系统具有冲激响应  $h[n]$ , 它在  $n \neq 0$  时不恒为零, 则系统有记忆。有记忆 LTI 系统的例子由式(3.23)给出。这个系统的冲激响应由式(3.22)给出, 它在  $n=1$  时冲激响应是非零的。

从式(3.35)中,可以推出有记忆和无记忆连续时间 LTI 系统的类似性质。特别是,若  $\tau \neq 0$  时  $h(\tau)=0$ , 则连续时间 LTI 系统是无记忆的, 这种无记忆系统有如下的形式

$$y(t)=Kx(t) \quad (3.38)$$

对于某常数  $K$ 。这个系统具有冲激响应

$$h(t)=K\delta(t) \quad (3.39)$$

注意,在式(3.36)和式(3.39)中,如果  $K=1$ , 那么这系统变为恒等系统,其输入等于输出,单位冲激响应等于单位冲激。在这种情况下,卷积和及卷积积分公式表示为

$$x[n]=x[n]*\delta[n]$$

$$x(t)=x(t)*\delta(t)$$

这些公式无非是所熟悉的筛选性质

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

www.blogoil.com

### 3.4.2 LTI 系统的可逆性

在 2.6.2 节中我们讨论过系统的第二个性质,即可逆性。设一个连续时间 LTI 系统具有冲激响应  $h(t)$ , 只有当我们能够设计一个逆系统, 当它和原来的系统串联连接时能产生一个输出, 且这个输出等于加到第一个系统的输入时, 这个系统才是可逆的。此外, 如果一个 LTI 系统是可逆的, 则它就有个 LTI 逆系统(见习题 3.22)。所以, 如图 3.21 所示, 我们给出一个具有冲激响应  $h(t)$  的系统, 并且希望设计一个具有冲激响应为  $h_1(t)$  的系统以使得  $z(t)=x(t)$ 。也就是说, 为了使图 3.21(a) 中串联连接的系统等效于图 3.21(b) 中的恒等系统。因为图 3.21(a) 中系统的总冲激响应是  $h(t)*h_1(t)$ , 为使  $h_1(t)$  就是逆系统的冲激响应,  $h_1(t)$  必须满足如下条件

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t) \quad (3.40)$$

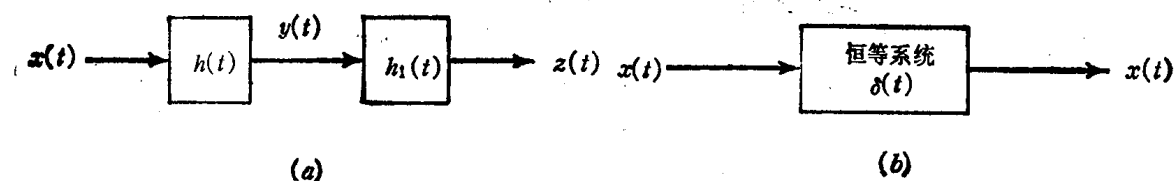


图 3.21 连续时间 LTI 系统的逆系统的原理, 若  $h(t)*h_1(t)=\delta(t)$ , 具有冲激响应  $h_1(t)$  的系统是具有冲激响应  $h(t)$  的逆系统

同样, 在离散时间情况下, 对于具有单位样值响应为  $h[n]$  的一个 LTI 系统, 其逆系统的单

位样值响应必须满足

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n] \quad (3.41)$$

例3.5 假设 LTI 系统由纯时间移位构成

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (3.42)$$

若  $t_0 > 0$  时, 这样的系统称为滞后系统, 而当  $t_0 < 0$  时称为超前系统。根据式(3.42), 取输入等于  $\delta(t)$ , 可以立即得到这个系统的冲激响应,

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (3.43)$$

因此,

$$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0) \quad (3.44)$$

即信号与移位冲激信号的卷积, 只不过使该信号移位。

可以很容易地得到这个系统的逆系统。为要恢复原输入信号, 我们只须将输出作相反的位移, 即, 如果我们取

$$h_1(t) = \delta(t + t_0)$$

则

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

同样, 离散时间的纯时间移位具有单位样值响应  $\delta[n - n_0]$ , 而它的逆系统具有单位样值响应  $\delta[n + n_0]$ 。

例3.6 设有一个 LTI 系统, 其单位冲激响应为

$$h[n] = u[n] \quad (3.45)$$

则利用卷积和, 我们可以计算这个系统对任意输入的响应:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k] \quad (3.46)$$

因为当  $(n-k) < 0$  时  $u[n-k] = 0$ , 而当  $(n-k) \geq 0$  时  $u[n-k] = 1$ , 式(3.46)变为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (3.47)$$

即, 这个系统是一个求和器, 或累加器, 它计算直至现在时刻的全部输入值的滑动和, 它就是我们第一次在2.6节中〔见式(2.54)〕见到过的系统。如同在2.6.2节中看到的, 这个系统是可逆的, 它的逆系统由下式给出

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (3.48)$$

这仅仅是一阶差分运算。如果令  $x[n] = \delta[n]$ , 可以得到逆系统的冲激响应是

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \quad (3.49)$$

这是由式(3.45)或等效地由式(3.47)给出的 LTI 系统的逆系统的单位样值响应, 可以通过直接计算来证明:

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n] \end{aligned} \quad (3.50)$$

### 3.4.3 LTI 系统的因果性

在2.6节中, 我们介绍了因果性的概念——因果系统的输出仅仅取决于现在和过去的输入值。利用式(3.34)及式(3.35)中给出的卷积和及卷积积分, 我们可以使这一性质与 LTI 系



统冲激响应的相应性质相联系。具体说,为了使离散时间 LTI 系统是因果的,当  $k > n$  时  $y[n]$  必须不依赖于  $x[k]$ 。由式(3.34),我们可以看到,如果

$$h[n] = 0 \quad (\text{对于 } n < 0) \quad (3.51)$$

将是这种情况,在这种情况下,式(3.34)成为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (3.52)$$

同样,当

$$h(t) = 0 \quad (\text{对于 } t < 0) \quad (3.53)$$

则连续时间系统是因果的,而且在这种情况下卷积积分由下式给出

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (3.54)$$

在例3.6中所讨论的累加器 ( $h[n] = u[n]$ ) 和它的逆系统 ( $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ ) 均满足式(3.51),因而是因果的。具有冲激响应  $h(t) = \delta(t-t_0)$  的纯时间移位,当  $t_0 \geq 0$  时(当时间移位是滞后)是因果的,但是在  $t_0 < 0$  时(在这种情况下时间移位是超前)是非因果的。

#### 3.4.4 LTI 系统的稳定性

回顾2.6.4节所述,若每个有界输入产生有界的输出,则系统是稳定的。为了确定 LTI 系统稳定的条件,设输入  $x[n]$ , 其数值是有界的:

$$|x[n]| < B \quad (\text{对所有的 } n) \quad (3.55)$$

假定我们用这样的输入加到具有单位样值响应为  $h[n]$  的 LTI 系统,那么,利用卷积和,可得到输出的绝对值为

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \right| \quad (3.56)$$

因为一组数的和的绝对值不大于每个数的绝对值之和,因此,可由式(3.56)得出

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[n-k]| \quad (3.57)$$

根据式(3.55),对于所有的  $k$  和  $n$  值,有  $|x[n-k]| < B$ 。它和式(3.57)一起意味着,

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \quad \text{对所有的 } n \quad (3.58)$$

由此式可以推论,如果单位冲激响应是绝对可和的,即,若

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty \quad (3.59)$$

则式(3.58)中  $y[n]$  的大小上是有界的,因此系统是稳定的。所以,式(3.59)是保证离散时间 LTI 系统稳定性的充分条件。事实上,这个条件也是必要条件,因为,如同在习题3.21中表明的,若式(3.59)得不到满足,有界输入会得到无界输出,因而,离散时间 LTI 系统的稳定性完全等价于式(3.59)。

在连续时间中,根据 LTI 系统的冲激响应,可得到一个类似的稳定性表征。具体说,若对于所有的  $t$  有  $|x(t)| < B$ ,则由式(3.56)~(3.58)得到

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau \end{aligned}$$

$$\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

因此, 如果冲激响应是绝对可积的

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (3.60)$$

则系统是稳定的, 和离散时间一样, 若不满足式(3.60), 有界输入会产生无界输出。所以, 连续时间 LTI 系统的稳定性等价于式(3.60)。

作为一个例子, 设一个系统在连续时间或离散时间两种情况下是纯时间移位。在这种情况下

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-n_0]| = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau-t_0)| d\tau = 1$$

我们断定这两个系统是稳定的。这是显然的, 因为若信号的绝对值是有界的, 那么信号的任意时间移位形式也是有界的。

第二个例子, 讨论在例3.6中描述过的累加器。如同我们在2.6.4节中所讨论的, 这是一个不稳定的系统, 因为如果加一个恒定的输入到累加器中, 其输出无界增长, 这个系统是不稳定的。也可以从以下事实看出, 即其冲激响应  $u[n]$  不是绝对可和的,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} u[n] = \infty$$

同样, 考虑一个积分器, 它是累加器在连续时间时的对应运算器,

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (3.61)$$

由于与累加器有完全相同的理由(即, 恒定的输入引起无界增长的输出), 这是一个不稳定的系统。这个系统的冲激响应可以通过令  $x(t) = \delta(t)$  来求得, 在这种情况下我们得到

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} d\tau = \infty$$

这证实了我们的论点, 式(3.61)代表一个不稳定系统。

### 3.4.5 LTI 系统的单位阶跃响应

从本节的前面部分我们已经看到, 用系统的单位冲激响应表示的LTI系统的表示式, 能得到系统性质的非常明确的表征。具体说, 因为  $h[n]$  或  $h(t)$  完全确定了 LTI 系统的特性, 我们就可以使稳定性、因果性一类的性质与这些信号的性质相联系, 以推论出若  $h[n] = \delta[n-n_0]$ , 则系统必定是一个时间移位, 以确定  $h(t) = u(t)$  相当于一个积分器等等。

在描述 LTI 系统的特性时, 也经常用到另一种信号, 这就是单位阶跃响应  $s[n]$  或  $s[t]$ , 即  $x[n] = u[n]$  或  $x(t) = u(t)$  时的输出。我们将发现, 有时用阶跃响应来表示是有用的, 因此值得把它和冲激响应联系起来。从卷积和的表示式中可知, 离散时间 LTI 系统的阶跃响应是单位阶跃与单位样值响应的卷积

$$s[n] = u[n] * h[n]$$

然而, 由卷积的交换律可知,  $s[n] = h[n] * u[n]$ , 因此,  $s[n]$  可以看作具有单位样值响应

$u[n]$  的离散时间 LTI 系统对输入  $h[n]$  的响应。如同我们看到的,  $u[n]$  是累加器的单位冲激响应。因此,

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad (3.62)$$

从此式和例 3.6, 我们看到  $h[n]$  可利用以下的关系由  $s[n]$  恢复

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \quad (3.63)$$

同样, 在连续时间情况下,  $s(t)$  等于积分器〔具有冲激响应  $u(t)$ 〕对输入  $h(t)$  的响应。即, 单位阶跃响应是单位冲激响应的积分,

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (3.64)$$

并从式(3.64)①可得,

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t) \quad (3.65)$$

因此, 在连续时间和离散时间两种情况下, 单位阶跃响应也可以用来表示 LTI 系统的特性, 因为我们可以用它来计算单位冲激响应。在习题 3.14 中, 为了用单位阶跃响应表示 LTI 系统, 导出了类似于卷积和及卷积积分的表示式。

### 3.5 用微分方程和差分方程描述的系统

连续时间系统非常重要的一类, 是它的输入和输出通过线性常系数微分方程相联系的系统。这类方程出现在各种各样的系统和物理现象的描述中。如同可以描述包括回复力和阻尼力的机械系统的响应一样 RLC 电路的响应也可以用微分方程来描述。还有, 化学反应的动力学和目标或运载工具的运动学, 通常是用微分方程来描述的。

相应的, 离散时间系统中重要的一类, 是它的输入和输出通过线性常系数差分方程相联系的系统。这类方程是用来描述许多不同过程的序列特性, 包括作为时间函数的投资得益, 以及作为人的声道对于从声带来的激励所产生响应的抽样语音信号。在离散时间系统的阐述中, 这样的方程也十分频繁的出现, 它用来完成对输入信号的特定要求的运算。例如, 在 2.6 节中〔见式(2.64)〕所讨论的系统对一个区间内输入平均值的计算, 是由差分方程来描述的。

全书中许多地方将研究和分析由线性常系数微分和差分方程所描述的系统。在本节中, 我们介绍并讨论这些系统的类型, 首先是连续时间, 而后是离散时间, 在后面各章中, 我们继续讨论有关信号与系统分析的其他方法, 这对于解线性常系数微分和差分方程, 以及对于分析由这种方程所描述的系统特性, 将为我们提供有效的方法。

#### 3.5.1 线性常系数微分方程

为了阐明用线性常系数微分方程表示的有关系统的重要概念, 我们首先讨论一个例子。具体说, 假设一个连续时间系统的输入和输出是通过下列方程式联系的

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (3.66)$$

式(3.66)隐含地表示了系统的响应, 我们必须求解这个微分方程, 以得到系统的输出作为输

①在本书中我们将引用式(3.65)中表示一阶微分的两种符号。类似的符号也将用来表示更高阶的微分。

入函数的显式表示。为了复习关于解线性常系数微分方程的常用方法<sup>①</sup>，我们来考虑具有特定输入信号的例子：

$$x(t) = K[\cos \omega_0 t]u(t) \quad (3.67)$$

式中  $K$  是实数。

式(3.66)的完全解由特解  $y_p(t)$  和齐次解  $y_h(t)$  的和组成，即

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad (3.68)$$

式中的特解满足式(3.66)，而  $y_h(t)$  是齐次微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \quad (3.69)$$

的解，为了求得由式(3.67)给出的输入的特解，我们注意到当  $t > 0$  时  $x(t)$  可以写为

$$x(t) = \operatorname{Re}\{K e^{j\omega_0 t}\} \quad (3.70)$$

于是假定解的形式为

$$y_p(t) = \operatorname{Re}\{Y e^{j\omega_0 t}\} \quad (3.71)$$

式中  $Y$  是一个复数。这两个表示式代入式(3.66)得到

$$\operatorname{Re}\{j\omega_0 Y e^{j\omega_0 t} + 2Y e^{j\omega_0 t}\} = \operatorname{Re}\{K e^{j\omega_0 t}\} \quad (3.72)$$

当  $t > 0$  时，因为式(3.70)一定满足，故方程式两边指数的复数幅值必定相等，即

$$j\omega_0 Y + 2Y = K$$

或

$$Y = \frac{K}{j\omega_0 + 2} = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} e^{-j\theta} \quad (3.73)$$

式中

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \quad (3.74)$$

因此，

$$y_p(t) = \operatorname{Re}\{Y e^{j\omega_0 t}\} = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \theta), \quad t > 0 \quad (3.75)$$

为了确定  $y_h(t)$ ，我们假定解的形式为

$$y_h(t) = A e^{st} \quad (3.76)$$

代入式(3.69)得到

$$A s e^{st} + 2A e^{st} = A e^{st}(s + 2) = 0 \quad (3.77)$$

从这个方程式看出，必须取  $s = -2$ ，并且  $A e^{-2t}$  是当  $A$  任意选择时式(3.69)的解。将这式和式(3.68)及(3.75)结合，当  $t > 0$  时，微分方程的解是

$$y(t) = A e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \theta), \quad t > 0 \quad (3.78)$$

注意，根据式(3.78)，微分方程式(3.66)并不完全由输入  $x(t)$  确定输出  $y(t)$ 。具体说，式(3.78)中的常数  $A$  迄今尚未确定，这是由微分方程所描述的系统的基本性质。为了得到完全由输入来确定，我们必须确定微分方程的辅助条件。在上例中，必须确定在某个给定时

<sup>①</sup>这里求解线性常系数微分方程的讨论是简略的，因为我们假定读者已熟悉这方面的内容。为了复习，我们介绍一本关于求解常微分方程的书，如《Ordinary Differential Equations》(2nd ed.) by G. Birkhoff and G. C. Rota (Waltham, Mass.: Blaisdell publishing Co., 1969) or 《An Introduction to Ordinary Differential Equations》by E. A. Coddington (Englewood Cliffs, N. J.: prentice-Hall, Inc, 1961)。在电路原理的教科书中，也有许多讨论微分方程的内容。例如，《Basic Circuit Theory》by C. A. Desoer and E. S. Kuh (New York: McGraw-Hill Book company, 1969)。如在书中已经讲到，在下面的几章中，提出其他求解线性微分方程很有用的方法，将能够满足我们的目的。有关求解微分方程的练习，安排在本章结尾的习题中。

刻的  $y(t)$  的值。这将确定  $A$ ，从而将确定全部时间的  $y(t)$ 。例如，若我们给定

$$y(0) = y_0 \quad (3.79)$$

则，根据式(3.78)

$$A = y_0 - \frac{K \cos \theta}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \quad (3.80)$$

因此，当  $t > 0$  时，

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} [\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t} \cos \theta], \quad t > 0$$

当  $t < 0$  时， $x(t) = 0$ ，因此  $y(t)$  满足齐次微分方程(3.69)。正如我们已看到的，这个方程的解的形式是  $Be^{-2t}$ ，再利用由式(3.79)给出的辅助条件，得到

$$y(t) = y_0 e^{-2t}, \quad t < 0$$

组合  $t > 0$  及  $t < 0$  时的解，则得到

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} [\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t} \cos \theta] u(t) \quad (3.81)$$

因此，通过确定微分方程(3.66)的辅助条件，我们得到以输入  $x(t)$  表示输出  $y(t)$  的显式表示，由此可以研究用这一显式所确定的系统的特性。例如，考虑到由式(3.66)所确定的系统具有由式(3.79)给定的辅助条件。首先判别这个系统是否为线性的，记得在 2.6.6 节中已经证明，一个线性系统具有零输入产生零输出的性质，然而，在我们的例子中如果令  $K = 0$ ， $x(t) = 0$  (见式(3.67))，但是从式(3.81)看到

$$y(t) = y_0 e^{-2t}$$

因此，如果  $y_0 \neq 0$ ，则这个系统肯定不是线性的。然而，若辅助条件为零，则系统是线性的。为看清这一点，设  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  是两个输入信号，并且设  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  是两个输入相对应的响应，即。

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \quad (3.82)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \quad (3.83)$$

而  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  也必须满足辅助条件

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \quad (3.84)$$

其次考虑输入  $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ ，式中  $\alpha$  和  $\beta$  是任意的复数。于是，利用式(3.82)和(3.83)，不难看出  $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$  满足微分方程

$$\frac{dy_3(t)}{dt} + 2y_3(t) = x_3(t) \quad (3.85)$$

并且根据式(3.84)

$$y_3(0) = \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) = 0 \quad (3.86)$$

因此， $y_3(t)$  是对应于  $x_3(t)$  的响应，则系统是线性的。

虽然，由式(3.66)所描述的具有式(3.79)辅助条件的系统，对于非零的辅助条件来说，该系统不是线性的，但它是增量线性的。具体说，在式(3.81)中我们看到，它的解是由两项组成。第一项仅是非零辅助条件的响应，而第二项是  $y_0 = 0$  时的响应，即，假定辅助条件为零时系统的线性响应。这点可推广到由线性常系数微分方程描述的所有的系统，即任何这样的系统是增量线性的，因而可在概念上设想为图3.22所示的形式。因此，对于由线性常系数

微分方程所描述的系统,若辅助条件为零,系统是线性的。而具有非零辅助条件系统的总响应,只是具有零辅助条件线性系统的响应和系统单独对于辅助条件的响应之和。在本书的大部分章节中将涉及到线性系统,因此,本节以后讨论的范围将限于我们所关心的线性情况(即,对零辅助条件的情况)。由于图3.22的分解表示,线性情况的分析使我们对具有非零辅助条件系统的性质得到深入的了解。在9.8节中,将对线性系统的一种分析方法进行讨论,这种方法使我们能够分析具有非零辅助条件并用线性常系数微分方程描述的系统。

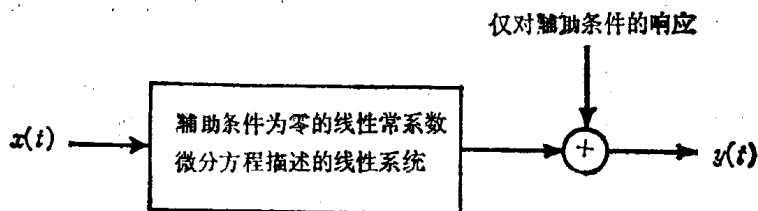


图3.22 由线性常系数微分方程描述的系统的增量线性结构

除线性之外,关于用微分方程描述的线性系统性质的第二个问题是关于因果性问题。具体说,为了使由线性常系数微分方程所描述的线性系统具有因果性,我们必须对这个系统的辅助条件作特殊的选择。这就是初始静止的条件,这一条件规定如果输入  $x(t)$  加到系统,若  $t \leq t_0$  时,  $x(t)=0$ , 则当  $t \leq t_0$  时,  $y(t)$  也是零。为了对这种条件有某些了解,考虑下面的例子。

例3.7 首先考虑由式(3.66)所描述的线性系统,并在固定时刻给定辅助条件,具体为,

$$y(0)=0 \quad (3.87)$$

正如我们刚才看到的,用这样两个方程一起来表示线性系统。设有如下两个输入:

$$x_1(t)=0 \quad \text{对于所有的 } t \quad (3.88)$$

$$x_2(t)=\begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & t > -1 \end{cases} \quad (3.89)$$

因为系统是线性的,对于输入  $x_1(t)$  的响应  $y_1(t)$  是

$$y_1(t)=0, \text{ 对于所有的 } t \quad (3.90)$$

现在考虑当  $x(t)=x_2(t)$  时对微分方程求解。当  $t > -1$  时,  $x_2(t)=1$ , 因此,若找到的特解是常数,

$$y_p(t)=Y, \quad t > -1$$

我们发现,上式代入式(3.66),则

$$2Y=1$$

包含齐次解,得到

$$y_2(t)=Ae^{-2t} + \frac{1}{2}, \quad t > -1 \quad (3.91)$$

而且,为满足式(3.87),必须取  $A=-\frac{1}{2}$ , 得到

$$y_2(t)=\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad t > -1 \quad (3.92)$$

为求得当  $t < -1$  时的  $y_2(t)$ , 首先注意到当  $t < -1$  时,  $x_2(t)=0$ 。因此,当  $t < -1$  时特解是零,因而

$$y_2(t)=Be^{-2t}, \quad t < -1 \quad (3.93)$$



因为在式(3.92)和(3.93)中两部分的解必须在  $t = -1$  时相等, 所以可从方程中确定  $B$ ,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 = Be^2$$

这样得到

$$y_2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2\right)e^{-2(t+1)}, \quad t < -1 \quad (3.94)$$

注意, 因为当  $t < -1$  时,  $x_1(t) = x_2(t)$ , 若这个系统是因果的, 当  $t < -1$  时,  $y_1(t) = y_2(t)$  必定是正确的。然而, 比较式(3.90)和(3.94), 我们看出情况不是如此, 于是断定系统不是因果的。

现在考虑用式(3.66)描述的第二个线性系统, 并作初始静止的假设, 则对于输入  $x_1(t)$  的响应  $y_1(t)$  仍然由式(3.90)给出, 但是, 对于由式(3.89)给出的  $x_2(t)$  的响应, 不同于由式(3.92)和(3.94)所得出的。具体说, 因为当  $t < -1$  时,  $x_2(t) = 0$ , 初始静止意味着当  $t < -1$  时  $y_2(t) = 0$ 。为了求得当  $t > -1$  时的响应, 我们必须求解式(3.66), 它具有给定的初始静止的条件, 即

$$y_2(-1) = 0 \quad (3.95)$$

如前所述, 当  $t > -1$  时, 对于  $y_2(t)$  的解的一般形式由式(3.91)给出, 但是, 在这种情况下,  $A$  的选择是满足式(3.95), 得到解

$$y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t+1)}, \quad t > -1 \quad (3.96)$$

并且根据初始静止的假设, 可以写出对于全部时间的解为

$$y_2(t) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t+1)}\right]u(t+1) \quad (3.97)$$

由此可见, 系统满足因果性条件。即是当  $t < -1$  时  $x_1(t) = x_2(t) = 0$ , 并且当  $t < -1$  时  $y_1(t) = y_2(t) = 0$ 。

直观地说, 如同我们在式(3.87)中所做的那样, 在固定时刻给定辅助条件, 会导致非因果系统, 因为系统对于固定时刻以前为非零的输入(例如在式(3.89)中的  $x_2(t)$ ) 的响应, 在某种意义上必须预见这个将来的条件。另一方面, 初始静止的条件并不规定固定时刻的辅助条件, 而是在时间上调整这个点, 以便使得响应在输入变成非零以前保持为零, 因而预期未来响应的现象不再发生。事实上, 习题2.30证明, 当且仅当  $t \leq t_0$  时  $x(t) = 0$ , 而且当  $t \leq t_0$  时  $y(t) = 0$ , 线性系统才是因果的, 这正是初始静止的条件。

注意在上述例子中, 我们利用了初始静止的基本结论。具体说, 如果作初始静止的假设, 而且当  $t \leq t_0$  时  $x(t) = 0$ , 则只需要求解当  $t > t_0$  时的  $y(t)$ , 而且这个解可以由微分方程和  $y(t_0) = 0$  的条件得到, 在这种情况下,  $y(t_0) = 0$  称为初始条件。

除了保证线性和因果性之外, 初始静止也意味着时不变, 为了了解这点, 考虑由式(3.66)所描述的系统, 该系统是初始静止的, 而且设  $y_1(t)$  是对输入  $x_1(t)$  的响应, 当  $t \leq t_0$  时响应是零, 即

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \quad (3.98)$$

$$y_1(t_0) = 0 \quad (3.99)$$

现在考虑输入

$$x_2(t) = x_1(t - T) \quad (3.100)$$

从图3.23中可以看出, 当  $t \leq t_0 + T$  时  $x_2(t)$  是零。因此, 对于这个输入的响应  $y_2(t)$  必

须满足微分方程

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \quad (3.101)$$

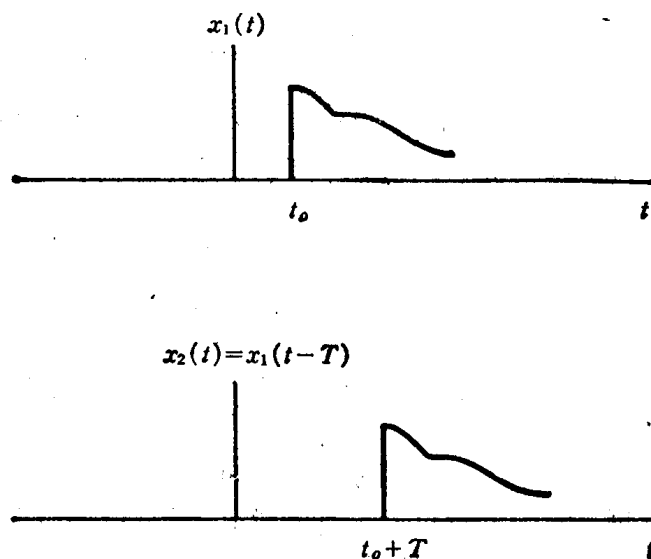


图3.23 事实说明, 若  $t < t_0$  时  $x_1(t) = 0$  而  $x_2(t) = x_1(t-T)$ , 则当  $t < t_0+T$  时  $x_2(t) = 0$

具有初始条件

$$y_2(t_0+T) = 0 \quad (3.102)$$

利用式(3.98)和(3.99), 可以直接证明  $y_1(t-T)$  满足式(3.101)和(3.102), 因此

$$y_2(t) = y_1(t-T) \quad (3.103)$$

通常,  $N$  阶线性常系数微分方程是由下式给出

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3.104)$$

这里阶数是指, 出现在方程式中的输出  $y(t)$  的最高阶导数的阶数。当  $N=0$  时, 式(3.101)简化为

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3.105)$$

即,  $y(t)$  是输入  $x(t)$  和它的导数的显函数。当  $N \geq 1$  时, 式(3.104)用输入隐含地表示输出。在这种情况下, 式(3.104)的分析处理正如上面的例子一样。  $y(t)$  的解由两部分组成, 齐次解和特解。此外, 如例中所示, 微分方程(3.104)不能完全由输入来确定输出。在一般的情况下, 我们需要一组在某一时刻与下列值相对应的辅助条件。

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

而且, 由式(3.104)和这些辅助条件描述的系统, 只有当这些辅助条件全部为零时系统才是线性的。否则, 系统就是增量线性的, 它具有当辅助条件为零时输入产生的响应, 再加上由辅助条件所产生的响应(图3.22)。此外, 为使系统是线性的而且是因果的, 则必须假设初始静止。即, 如果当  $t \leq t_0$  时  $x(t) = 0$ , 应当假设  $t \leq t_0$  时  $y(t) = 0$ , 因此, 对  $t > t_0$  时的响应可以根据具有以下初始条件的微分方程(3.104)来计算。

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$