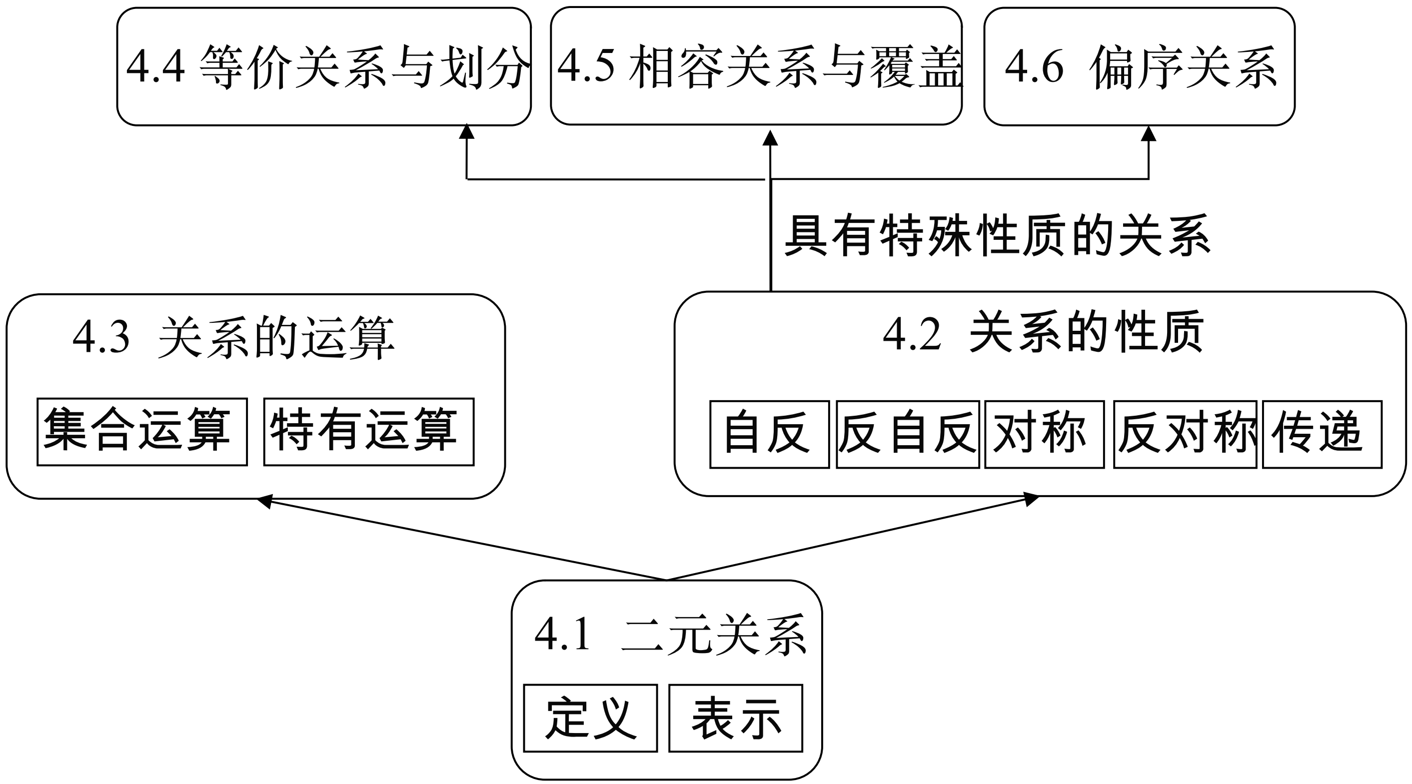
北京科技大学
University of Science and Technology Beijing

第四章二元关系

二元关系知识逻辑概图


4.4 等价关系与划分
4.5 相容关系与覆盖
4.6 偏序关系
具有特殊性质的关系
4.3 关系的运算
集合运算
特有运算
4.2 关系的性质
自反
反自反
对称
反对称
传递
4.1 二元关系
定义
表示

关系在计算机科学技术中的应用

- 关系在计算机科学中的应用
  - 关系数据库
  - 等价关系用于信息检索
  - 偏序关系用于项目管理

4.1 关系的概念

二元关系：仅含有序对的集合或此意义下的空集。

4.1.1 关系的定义

- 二元关系在日常生活中普遍存在，例如，人与人之间有“同学”关系、“师生”关系，两个数之间有“大于”关系、“等于”关系，程序之间有“调用”关系。无论是在数学上或是在计算机科学中关系都有着重要的地位。

例如，有 A ，B ，C 三个人和四项工作α，β，γ，δ，已知 A 可以从事工作α，δ，B 可以从事工作γ，C 可以从事工作α，β。那么人和工作之间的对应关系可以记作

$$R=\{<A, \alpha>, <A, \delta>, <B, \gamma>, <C, \alpha>, <C, \beta>\}$$

有序对反映了两个元素之间存在关系。

4.1.1 关系的定义

定义 4.1 设 A ，B 为集合，A×B 的任何子集称作**从 A 到 B 的二元关系**，特别当 A=B 时，称做 A 上的二元关系。二元关系简称为关系，一般记作 R 。即若 R⊆A×B ，R 是从 A 到 B 的二元关系，若 R⊆A×A ，R 是 **A 上的二元关系**。

对于二元关系 R ，如果 $<x, y>\in R$ ，则记作 xRy ，称 **x 与 y 之间有关系 R** ；相反，若 $<x, y>\notin R$ ，则称 **x 与 y 之间没有关系 R** $\tilde{R}$ 记为 $x \quad y$ 。

例如 $R_1=\{<1, 2>, <a, b>\}$ ，$R_2=\{<1, 2>, a, b\}$ ，$R_3=\varnothing$ ，则 R_1、 R_3 是二元关系，而 R_2 不是关系，除非将 a 和 b 定义为有序对。

例如，若 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ，$B=\{0, 1, 2\}$ ，则

$R_1=\{<2, 2>, <3, 1>, <4, 0>\}$ ，$R_2= A\times B$ ，$R_3=\varnothing$

等都是从 A 到 B 的关系，而 $R_4=\{<3, 4>\}$ 是 A 上的关系，不是从 A 到 B 的关系。

4.1.1 关系的定义

定理 4.1 设 A 是具有 n 个元素的有限集，则 A 上的二元关系有 2^{n^2} 种。

证：若 $|A|=n$，由排列组合原理知 $|A\times A|=n^2$，则 $A\times A$ 有 2^{n^2} 个子集，每一个子集代表一个 A 上的二元关系，所以 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系。

例如若 $|A|=3$，则 A 上有 $2^{3^2}=512$ 个不同的二元关系。

可以将二元关系扩展到 n 元关系，其定义如下：

定义 4.2 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个集合，$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ 的任一子集，都称为 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 间的一个 n 元关系。即若 R 是 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 间的一个 n 元关系，则 $R\subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$。

4.1.2 特殊的关系

设 A、 B 为任意集合，以下介绍 3 种特殊的关系：空关系∅，全域关系 E 和恒等关系 I_A。

定义 4.3 设 A、 B 为任意集合，

（ 1 ）空集∅是 $A\times B$ 的子集，叫做从 A 到 B 的空关系。

（ 2 ） $E = A\times B$ ，叫做从 A 到 B 的全域关系。

（ 3 ） $I_A = \{<x, x> \mid x\in A\}$ ，叫做 A 上的恒等关系。

例 4.1 设 $A =\{a, b\}, B = \{1, 2\}$, 求 A 上的恒等关系 I_A 和 A 到 B 的全域关系 E。

解：

A 上的恒等关系 $I_A = \{<a, a>, <b, b>\}$。

A 到 B 的全域关系 $E = A\times B = \{<a, 1>, <a, 2>, <b, 1>, <b, 2>\}$。

4.1.2 特殊的关系

除了以上 3 种特殊的关系以外，还有一些常用的关系如下：

（ 1 ）小于等于关系：设 A 为实数集 R 的子集，

$$L_A = \{<x, y>|x, y\in A\wedge x\le y\}$$

叫做 A 上的小于等于关系。

（ 2 ）整除关系：设 A 为非零整数集 Z^* 的子集，

$$D_A = \{<x, y>|x, y\in A\wedge x \text{ 是 } y \text{ 的因子}\}$$

称为 A 上的整除关系。

（ 3 ）包含关系：设 A 为任意一个集族，

$$R_\subseteq = \{<x, y>|x, y\in A\wedge x\subseteq y\}$$

称为 A 上的包含关系。

类似还可定义大于等于关系，小于关系，大于关系，真包含关系等。

4.1.2 特殊的关系

例 4.2 （1）设 $A=\{-1, 0.5, 4\}$，$B=\{1, 2, 3, 6\}$，求 L_A 与 D_B。

（2）设 $C=\{a, b\}$，求 $R_{\subseteq} = \{<x, y> \mid x, y \in P(C) \wedge x \subseteq y\}$。

解：

（1）$L_A = \{<-1, -1>, <-1, 0.5>, <-1, 4>, <0.5, 0.5>, <0.5, 4>, <4,4>\}$

$D_B = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 6>, <2, 2>, <2, 6>, <3, 3>, <3, 6>, <6, 6>\}$

（2）$P(C) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \mathrm{C}\}$，

$R_{\subseteq} = \{<\varnothing, \varnothing>, <\varnothing, \{a\}>, <\varnothing, \{b\}>, <\varnothing, C>, <\{a\}, \{a\}>, <\{a\}, C>,$

$<\{b\}, \{b\}>, <\{b\}, C>, <C, C>\}$

4.1.3 关系的表示

由二元关系的定义可以看出，二元关系是集合，所以集合的各种表示方法也适用于关系。

1. 列举法

可以用表示集合的列举法表示二元关系。例 4.1 中的 A 到 B 的全域关系 $E = A\times B = \{<a, 1>, <a, 2>, <b, 1>, <b, 2>\}$，$A$ 上的恒等关系 $I_A = \{<a, a>, <b, b>\}$ 等都是用列举法表示的。

2. 描述法

二元关系也可以用表示集合的描述法表示。上述常用的小于等于关系 $L_A=\{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x\leq y\}$、整除关系 $D_A = \{<x, y> \mid x, y\in A \wedge x$ 是 y 的因子$\}$ 以及包含关系 $R_{\subseteq} = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x\subseteq y\}$ 等都是用描述法表示的二元关系。

4.1.3 关系的表示

另外，对于有穷集上的关系还可以用矩阵表示法和图形表示法表示。

3. 矩阵表示法

还可以用矩阵表示二元关系，矩阵表示法只适用于有限集上的关系。

设 A、B 都是有限集，$A=\{a_1, a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，从 A 到 B 的关系 R 可以用一个 $m\times n$ 的矩阵 M_R 来表示，

$$M_R = (r_{ij})_{m\times n}$$

M_R 的第 i 行第 j 列的元素 r_{ij} 取值如下：

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若} a_i R b_j \\ 0 & \text{若} a_i \tilde{R} b_j \end{cases}$$，其中 $i = 1, 2, ..., m$，$j = 1, 2, ..., n$

矩阵 M_R 称为二元关系 R 的关系矩阵。

4.1.3 关系的表示

例 4.5 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，定义 A 上的二元关系 R：

$\langle a, b\rangle \in R$ 当且仅当 $a < b$。

求 R 的集合表示和关系矩阵。

解：由定义求得

$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$，

其关系矩阵为：

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.1.3 关系的表示

4. 关系图表示法

- 关系图表示法只适用于有限集上的关系。
- 若 A、B 都是有限集，从 A 到 B 的关系 R 还可以用图表示。表示二元关系 R 的图 G_R 叫作 R 的关系图。从 A 到 B 的二元关系的关系图和 A 上的二元关系的关系图的定义不一样，分别描述如下。

（1）从 A 到 B 的二元关系的关系图

设集合 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$、$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，$R$ 是从 A 到 B 的二元关系，其关系图 G_R 的绘制方法如下：

① 画出 m 个小圆圈表示 A 的元素，分别标记为 $a_1, a_2, \ldots, a_m$；再画出 n 个小圆圈表示 B 的元素，分别标记为 $b_1, b_2, \ldots, b_n$。这些小圆圈叫作关系图的顶点或结点。

② 如果 a_iRb_j，则从顶点 a_i 到顶点 b_j 画一条有向边。

4.1.3 关系的表示

例 4.4 中二元关系 R 的关系图如图 4.3 所示。

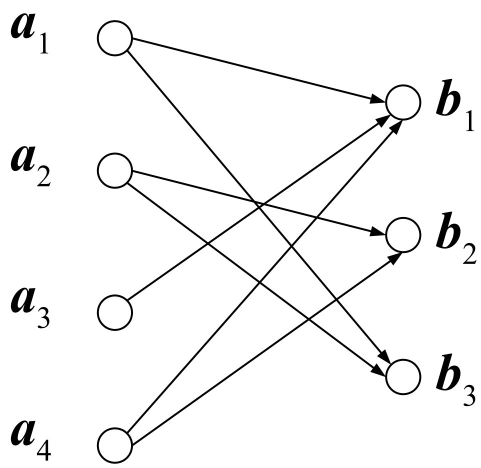


图 4.3 例 4.4 的关系图

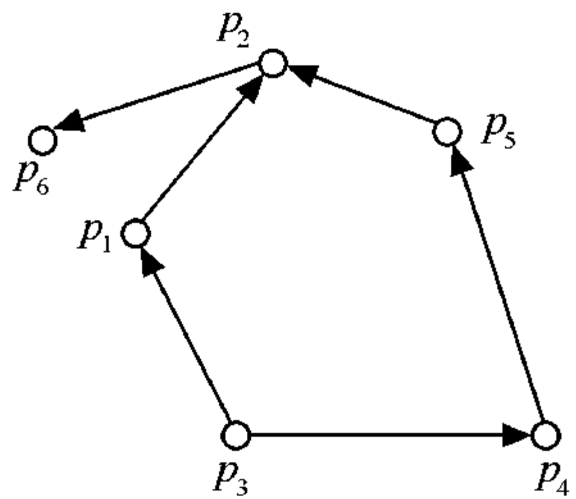


图 4.4 例 4.6 的关系图

4.1.3 关系的表示

（2）A 上的二元关系的关系图

设集合 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$R$ 是 A 上的二元关系，其关系图 G_R 的绘制方法如下。

① 画出 m 个小圆圈表示 A 的元素，分别标记为 $a_1, a_2, \ldots, a_m$。

② 如果 a_iRa_j，则从顶点 a_i 到顶点 a_j 画一条有向边。

例 4.6 设有六个程序 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$，它们之间有一定的调用关系：

R：p_1Rp_2、p_3Rp_4、p_4Rp_5、p_5Rp_2、p_2Rp_6、p_3Rp_1

则关系 R 是集合 $P=\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ 上的二元关系，且

$$R=\{<p_1, p_2>, <p_3, p_4>, <p_4, p_5>, <p_5, p_2>, <p_2, p_6>, <p_3, p_1>\}$$

其图形表示如图 4.4 所示。

小结

二元关系

- 定义：
  - $R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R$ 是从 A 到 B 的关系
  - $R \subseteq A \times A \Leftrightarrow R$ 是 A 上的关系
- 特殊关系:
  - 空关系、全域关系和恒等关系。
  - 小于等于关系、整除关系和包含关系等。
- 关系的表示法：
  - 集合表示法：包括列举法和描述法，便于书写
  - 矩阵表示法：便于计算机存储。
  - 关系图表示法：直观、清晰。

4.2 关系的性质

关系的性质主要有五种：自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性。

4.2 关系的性质

定义 4.4 设 R 为 A 上的关系，

（ 1 ）若$\forall x(x \in A \to \langle x, x\rangle \in R)$ ，则称 R 在 A 上是自反的。

（ 2 ）若$\forall x(x \in A \to \langle x, x\rangle \notin R)$ ，则称 R 在 A 上是反自反的。

例如以下关系是自反的：

A 上的全域关系 E_A ，恒等关系 I_A ，小于等于关系 L_A 以及整除关系 D_A 等都是 A 上的自反关系，包含关系 $R_\subseteq$ 是给定集合族上的自反关系。

以下关系是反自反的：

小于关系和真包含关系都是给定集合或集合族上的反自反关系，空关系$\varnothing$是 A 上的反自反关系。

4.2 关系的性质

自反关系与反自反关系的关系矩阵与关系图：

（1）若 R 在 A 上是自反的，由定义 4.4 可知，R 的关系矩阵 M_R 的主对角线元素全为 1，在关系图 G_R 中每一个顶点上都有环。

（2）若 R 在 A 上是反自反的，由定义 4.4 可知，R 的关系矩阵 M_R 的主对角线元素全为 0，在 R 的关系图 G_R 中每一个顶点上都没有环。

4.2 关系的性质

定义 4.5 设 R 为 A 上的关系，

（1）若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是对称的。

（2）若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x = y)$，则称 R 在 A 上是反对称的。

例如 A 上的全域关系 E_A，恒等关系 I_A 和空关系$\varnothing$都是 A 上的对称关系。

并且恒等关系 I_A 和空关系$\varnothing$也是 A 上的反对称关系。

A 上的小于等于关系 L_A 以及整除关系 D_A 等都是 A 上的反对称关系。

一个街道上的“邻居”关系是对称的，人与人之间的“母女”关系是反对称的。

4.2 关系的性质

对称关系与反对称关系的关系矩阵与关系图：

（1）若 R 在 A 上是对称的，由定义 4.5 可知，R 的关系矩阵 M_R 是对称矩阵。在 R 的关系图 G_R 中，如果两个不同的顶点间有边，一定有方向相反的两条边。

（2）若 R 在 A 上是反对称的，由定义 4.5 可知，R 的关系矩阵 M_R 中，以主对角线为轴的对称位置上不能同时为 1（主对角线除外）。在 R 的关系图 G_R 中每两个不同的顶点间不能有方向相反的两条边。

4.2 关系的性质

定义 4.6 设 R 为 A 上的关系，若

$$\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R)$$

则称 R 为 A 上的传递关系。

例如 A 上的全域关系 E_A，恒等关系 I_A 和空关系$\varnothing$等都是 A 上的传递关系。

小于等于关系、整除关系、包含关系等都是相应集合上的传递关系。

4.2 关系的性质

传递关系的关系矩阵与关系图：

若 R 在 A 上是传递的，由定义 4.6 易知，R 的关系矩阵 M_R 中若有 $(m_R)_{ij}=1 \wedge (m_R)_{jk}=1$ ，则必有 $(m_R)_{ik}=1$ 。在 R 的关系图 G_R 中，如果顶点 x 到 y 、 y 到 z 有边，则 x 到 z 一定存在有向边。

说明：

1. 关系的性质明显地反映在它的关系矩阵和关系图上，表 4. 1(见教材) 总结了以上五种性质在关系矩阵和关系图中的特点。
2. 综上所述，共有三种判断关系性质的方法：

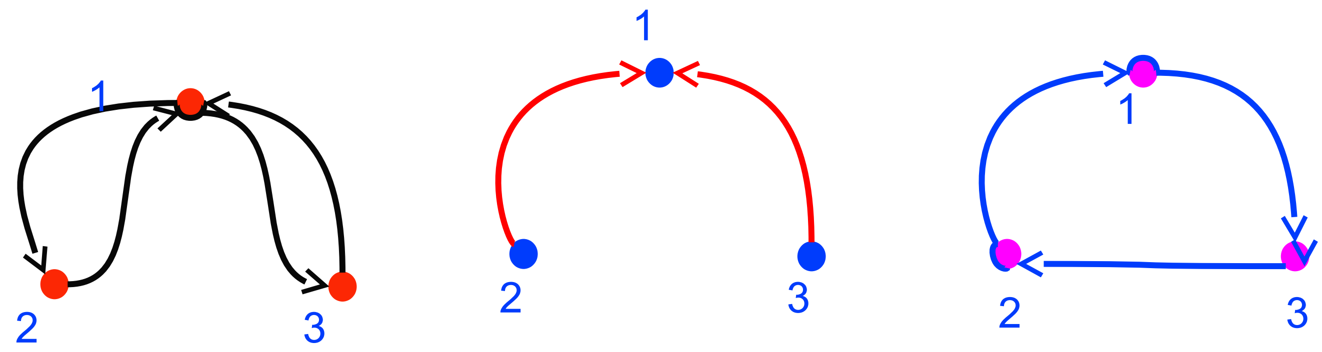
   （ 1 ）根据定义判断关系的集合表达式。

   （ 2 ）根据关系矩阵判断。

   （ 3 ）根据关系图判断。

4.2 关系的性质

例 4.10 判断下图中关系的性质，并说明理由。



解：（ 1 ）该关系是对称的，因为无单向边。它不是自反的也不是反自反的，因为有的顶点有环，有的顶点没有环。它不是反对称的，因为图中有双向边。它也不是传递的，因为图中有边 <3, 1> 和 <1, 3> ，但没有从 3 到 3 的边，即顶点 3 无环。

（ 2 ）该关系是反自反的但不是自反的，因为每个顶点都没有环。它是反对称的但不是对称的，因为图中只有单向边。它也是传递的，因为不存在顶点 x, y, z ，使得 x 到 y 有边， y 到 z 有边，但 x 到 z 没有边。

4.2 关系的性质

（3）该关系是自反的但不是反自反的，因为每个顶点都有环。它是反对称的但不是对称的，因为图中只有单向边。但它不是传递的，因为 2 到 1 有边，1 到 3 有边，但 2 到 3 没有边。

小结

关系的性质

- **分类：自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性。**
- 关系矩阵与关系图的特征，见表 **4.1** 。
- **判断方法：**
  - ① 根据定义判断
  - ② 判断关系矩阵
  - ③ 判断关系图

作业

- 补充习题 4.1 ， 4.2

1．给定 Z^+ 上的关系 R 和 S，$\forall x,y\in Z^+$，满足

$$xRy \Leftrightarrow x \text{整除} y，\quad xSy \Leftrightarrow 5x \le y$$

对于下面每个小题，确定哪些有序对属于给定的关系：

(1) 关系：$R\cup S$；有序对：$<2,6>$，$<3,17>$，$<2,1>$，$<0,0>$

(2) 关系：$R\cap S$；有序对：$<3,6>$，$<1,2>$，$<2,12>$

(3) 关系：$\sim R$（以全域关系为全集）；有序对：$<1,5>$，$<2,8>$，$<3,15>$

2．设 $A=\{1,2,3\}$．下图给出了 6 种 A 上的关系，对于每种关系写出相应的关系矩阵，并说明它所具有的性质．