Chapter 2 线性时不变(LTI)系统——卷积

- 离散**LTI**系统－卷积和
- 连续**LTI**系统－卷积积分

简介

为什么要研究LTI系统（Time-Invariant Systems）

- 很多物理现象都可以近似为LTI系统；
- 可以方便的对LTI系统进行数学分析，透彻的研究其各种性质。

知识回顾

时不变系统：系统的性能不随时间的变化而变化。 也就是说，输入信号与输出信号具有同样的时移特性。

$$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t-t_0) \to y(t-t_0) \qquad x[n] \to y[n] \Rightarrow x[n-n_0] \to y[n-n_0]$$

线性系统：系统输入是几个信号的加权，则其输出也是这些信号输出反应的加权。$x_k(t) \to y_k(t) \quad x_k[n] \to y_k[n] \qquad x(t) \to y(t) \quad x[n] \to y[n]$

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots \qquad y(t) = \sum_k a_k y_k(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \ldots$$

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + \ldots \qquad y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + \ldots$$

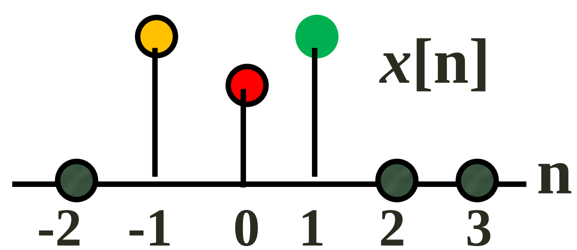
LTI系统

$$x(t-t_0) = \sum_k a_k x_k(t-t_0) \qquad y(t-t_0) = \sum_k a_k y_k(t-t_0)$$

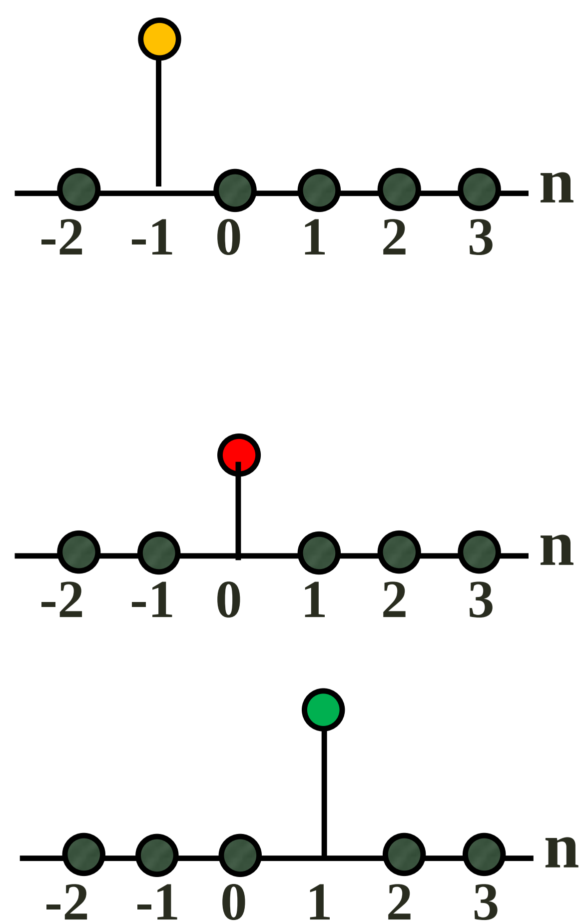
$$x[n-n_0] = \sum_k a_k x_k[n-n_0] \qquad y[n-n_0] = \sum_k a_k y_k[n-n_0]$$

用脉冲信号表征离散时间信号

离散时间信号可以用一系列的单个脉冲信号的叠加来表示.



$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$



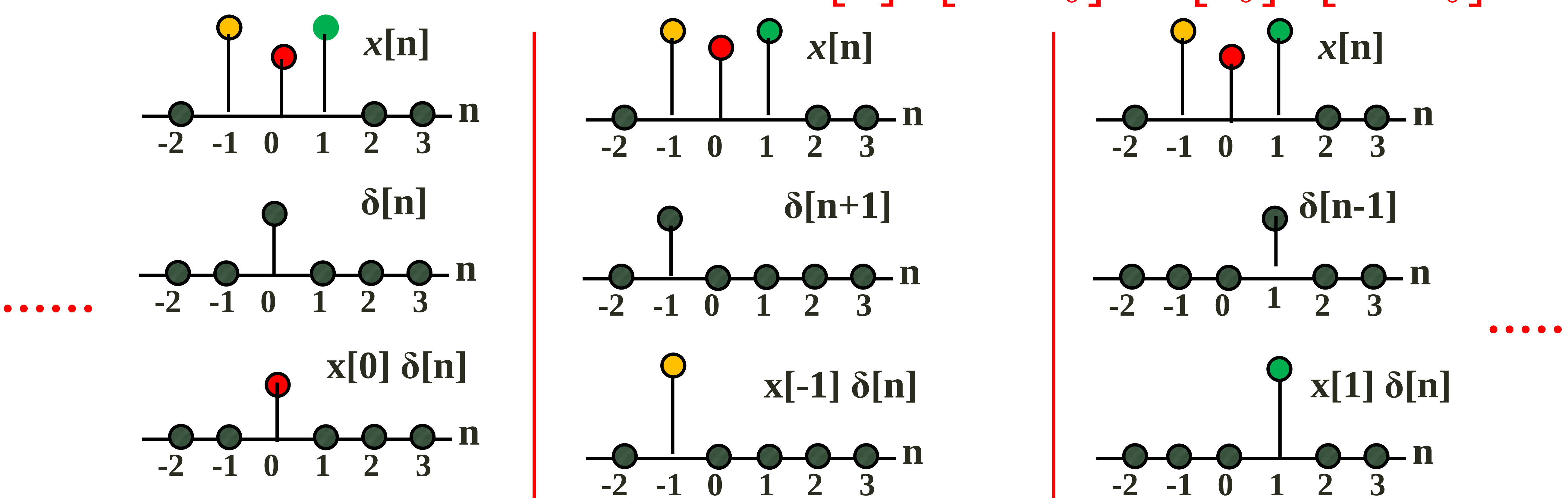
How to obtain these signals?

离散时间LTI系统：卷积和

用脉冲信号表征离散时间信号

样本值　　序列

单位脉冲信号具有采样特性 $x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$



$$x[0]\delta[n]=\begin{cases}x[0] & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$$x[-1]\delta[n+1]=\begin{cases}x[-1] & n=-1\\ 0 & n\neq -1\end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1]=\begin{cases}x[1] & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

$$x[n]=\ldots+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+\ldots.=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$$

DT信号可以表示为一系列**移位单位脉冲序列**的**加权组合(叠加)**，其中权因子是在k时刻的值$x[k]$。

单位脉冲序列的筛选性(**sifting property**)

离散时间LTI系统：卷积和

单位脉冲响应

单位脉冲响应表示系统在输入信号为单位脉冲信号时的系统输出。

$$\delta[n] \xrightarrow{\text{unit impulse signal}} \boxed{\text{System}} \xrightarrow{\text{unit impulse Response}} \text{h[n]}$$

LTI系统的单位脉冲响应

$$x[n-n_0]=\sum_k a_k x_k[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]=\sum_k a_k y_k[n-n_0]$$

对于任一线性系统 $x[n] \rightarrow y[n]$，记 $h_k[n]$为该线性系统对移位单位脉冲 $\delta[n-k]$ 的响应。根据线性系统叠加原理

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

$$\delta[n-k] \rightarrow h_k[n]$$

线性时不变系统

$$\rightarrow \delta[n] \rightarrow h_0[n] \overset{\text{时不变}}{\Rightarrow} \delta[n-k] \rightarrow h_k[n]=h_0[n-k] \rightarrow h_0[n-k] \overset{\text{简化符号，去掉下标0}}{\longrightarrow} h[n-k]$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]}$$

卷积和

离散时间LTI系统：卷积和

信号的卷积和

定义 离散时间LTI系统的输出等于输入信号与单位脉冲响应的卷积和。

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

DT LTI系统的输出响应为系统对移位单位脉冲响应的加权和。其中权重为输入信号的每一个样本值。

计算方法

- 单位脉冲响应的移位加权叠加法
- 序列相乘法---滑动图解法 sliding
- 数学分析法

离散时间LTI系统：卷积和

信号的卷积和

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

单位脉冲响应的移位加权叠加法

(1) 根据定义，求出每个加权后的移位脉冲响应 $g[n]=x[k]h[n-k]$ 。

(2) 将加权脉冲响应序列进行求和。

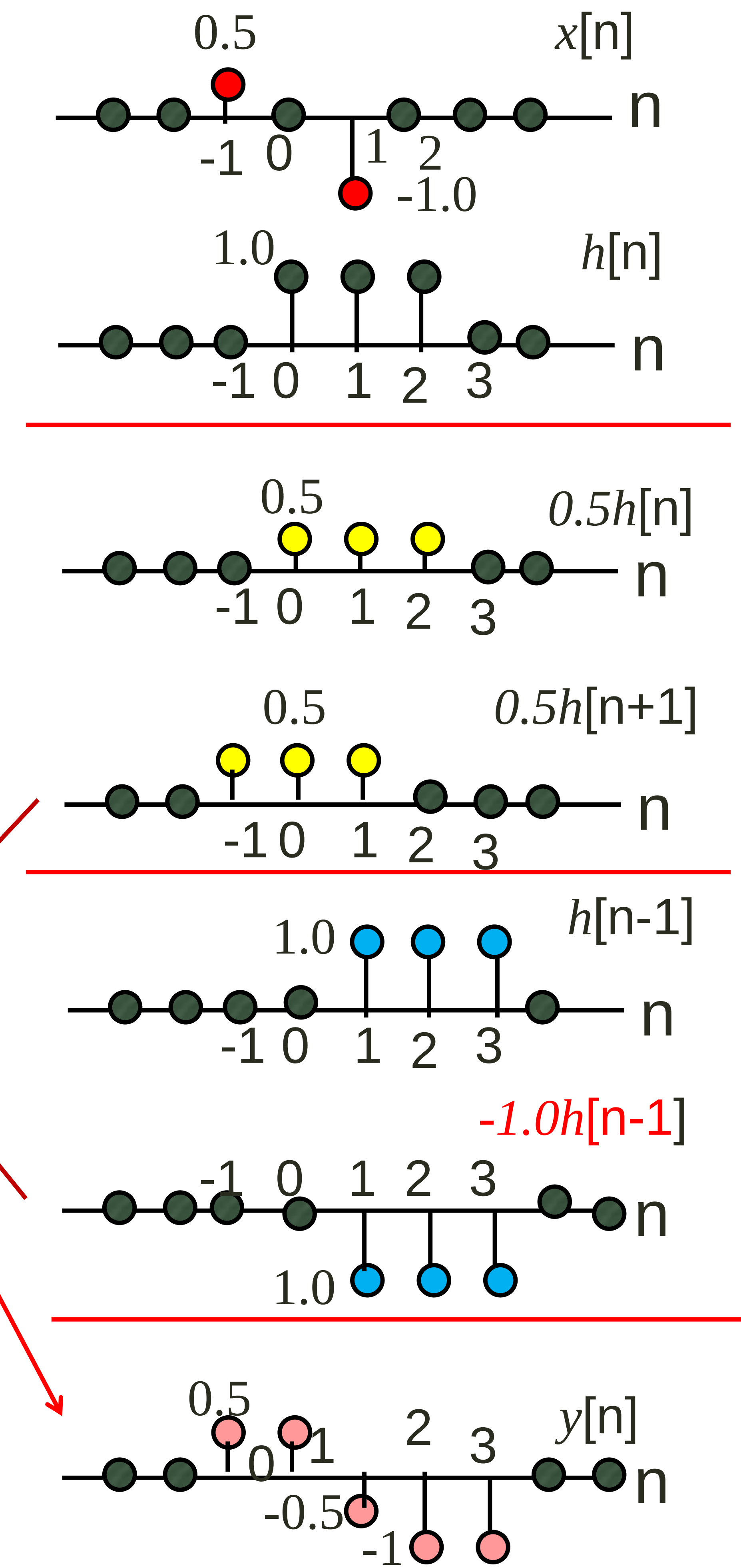
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=x[-1]h[n+1]+x[1]h[n-1]$$

$$=0.5h[n+1]-1.0h[n-1]$$

叠加

总的响应



离散时间LTI系统：卷积和

信号的卷积和

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

序列相乘—滑动图解法

若n看成固定值，对每一个n，把$x[k]/h[n-k]$看成k是独立变量的两个序列，定义$g[k]=x[k]h[n-k]$，对所有$g[k]$进行累加即可得到$y[n]$。改变n的值即可得到整个输出信号。

基本步骤

固定n

(1) 计算$h[n-k]$

$$h[k]\xrightarrow{\text{先平移}}h[k+n]\xrightarrow{\text{再反转}}h[-k+n]$$

$$h[k]\xrightarrow{\text{先翻转}}h[-k]\xrightarrow{\text{再平移}}h[-k+n]$$ ← 教材采用

$$h_1[k_1]\overset{\text{数学变换}}{=}h[-k+n]$$

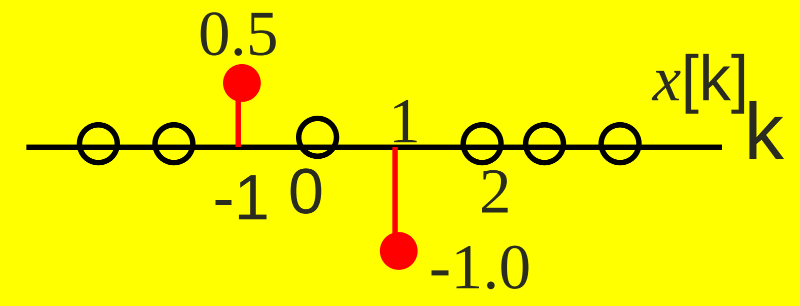
(2)序列相乘 $g[k]=x[k]h[n-k]$

(3)g(k)求和 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g[k]$

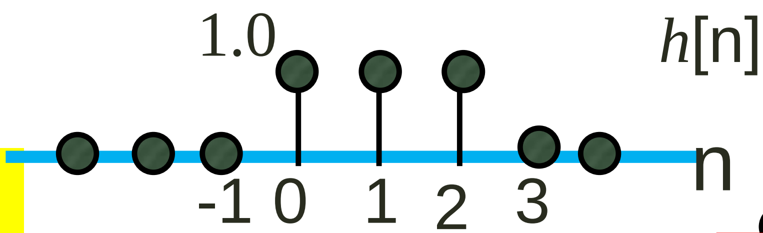
本质是重叠区域乘积累加
注意卷积上下限的确定

改变n (4)将h[n-k]从左到右移动，改变n的值，重复(1-3)中步骤。

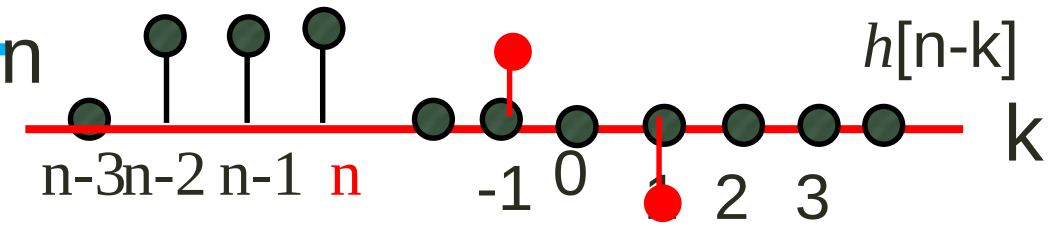
离散时间LTI系统：卷积和



信号的卷积和



序列相乘—滑动图解法



基本步骤

固定n

(1) 计算$h[n-k]$

$$h[k] \xrightarrow{\text{先平移}} h[k+n] \xrightarrow{\text{再反转}} h[-k+n]$$

$$h[k] \xrightarrow{\text{先翻转}} h[-k] \xrightarrow{\text{再平移}} h[-k+n]$$

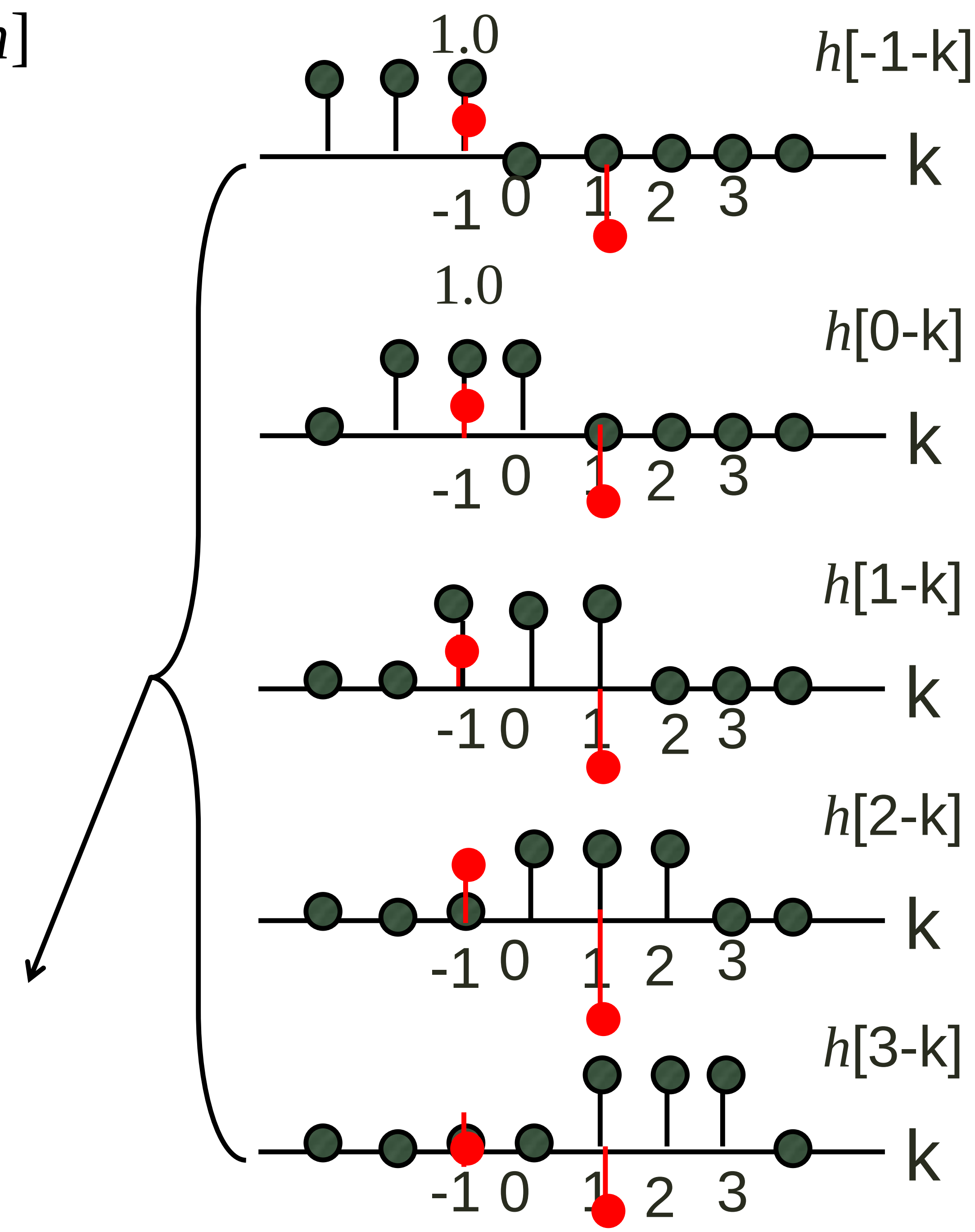
$$h_1[k_1] \overset{\text{坐标变换}}{=} h[-k+n]$$

(2)序列相乘 $g[k]=x[k]h[n-k]$

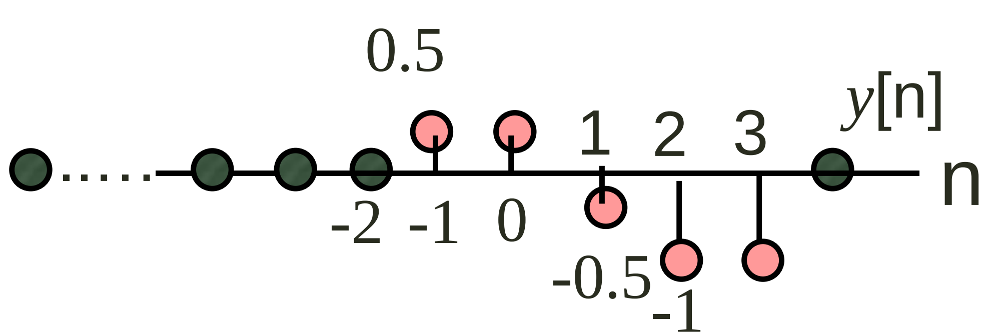
(3)g(k)求和 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]$

改变n

(4)将h[n-k]从左到右移动，改变n的值，重复(1-3)中步骤。



系统响应



离散时间LTI系统：卷积和

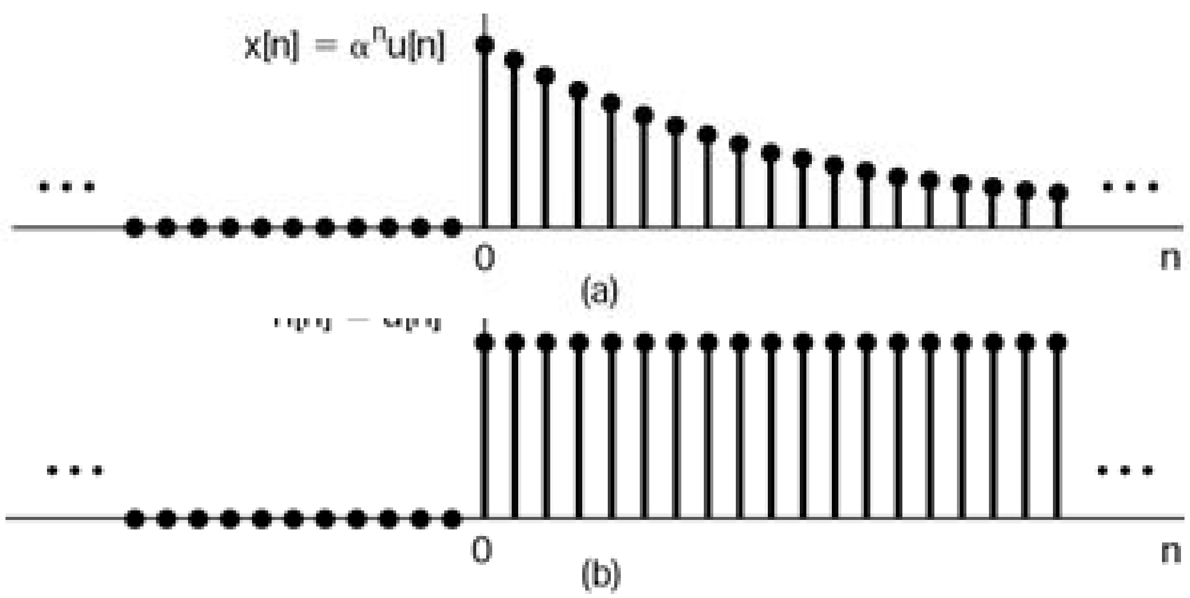
信号的卷积和 书上的反转/平移方案

(1) $h[k] \rightarrow h[-k]$ (2) $h[-k] \rightarrow h[n-k]$

(3) $g[k] = x[k]h[n-k]$ (4) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]$

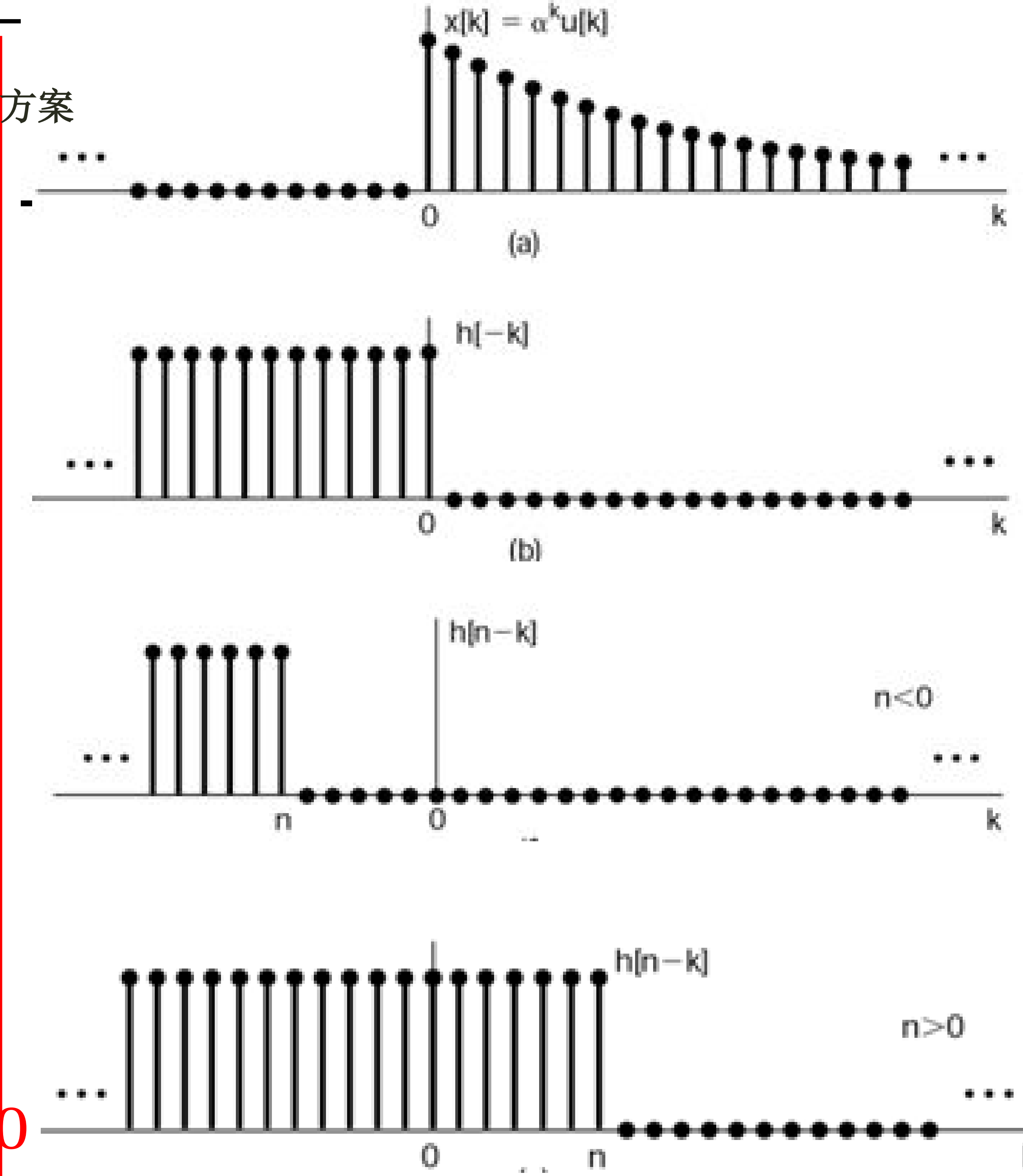
(5)改变n，重复(1-4)中步骤。

例2.3 求卷积 $x[n] = a^n u[n]$ $h[n] = u[n]$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad n \geq 0$$

$$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n]$$



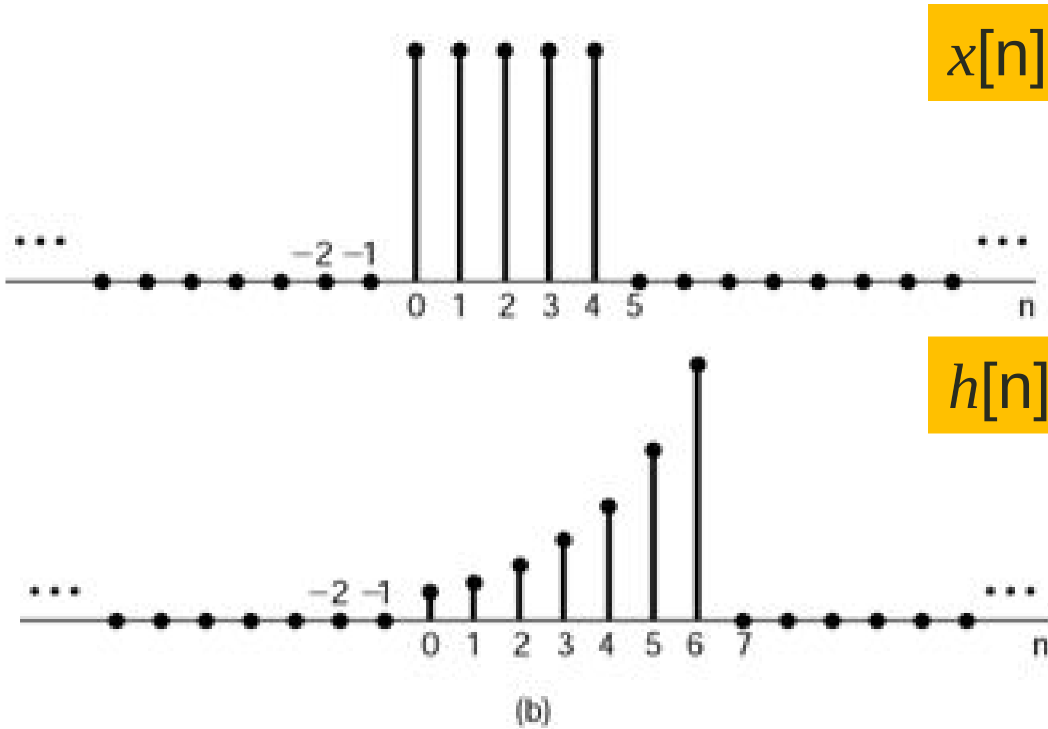
$$g[k] = a^k$$

离散时间LTI系统：卷积和

信号的卷积和

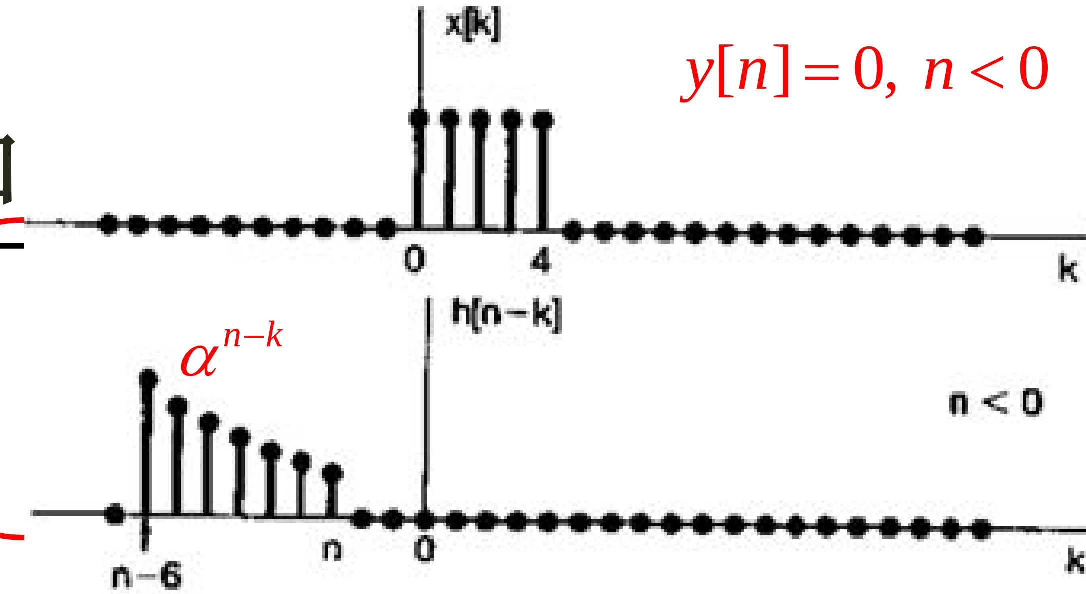
例2.3

$$x[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le 4\\ 0,\ \ otherwise\end{cases}\qquad h[n]=\begin{cases}\alpha^n,\ \ 0\le n<6\\ 0,\ \ otherwise\end{cases}$$

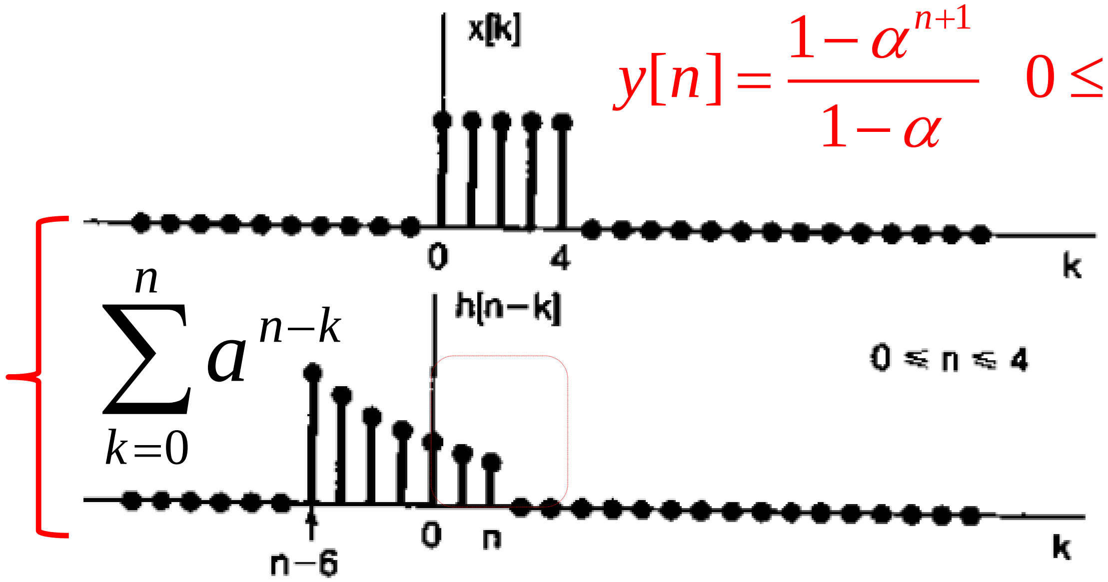


$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{+\infty}a^{n-k}$$

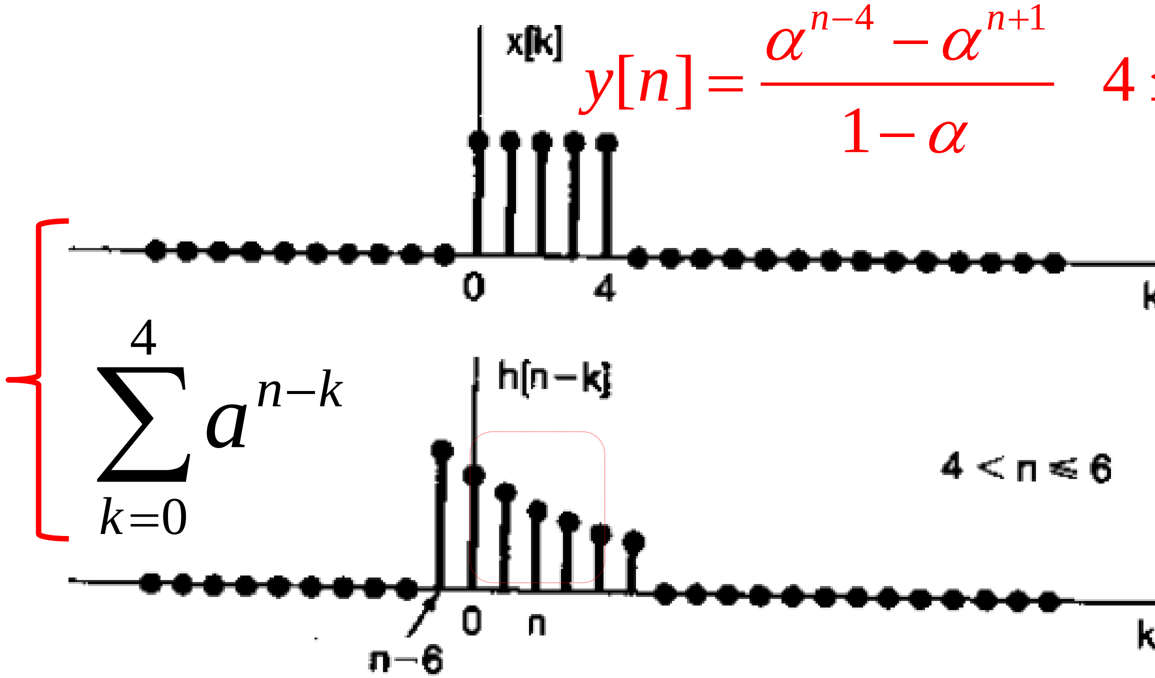
$y[n]=0,\ n<0$



$$y[n]=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\quad 0\le n\le 4$$



$$y[n]=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\quad 4\le n\le 6$$

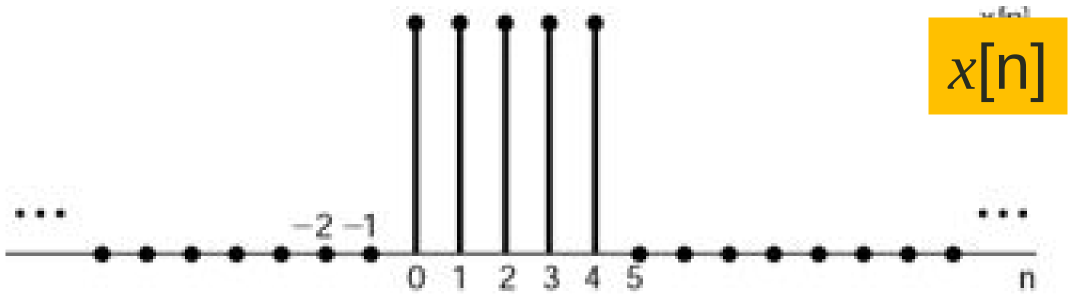


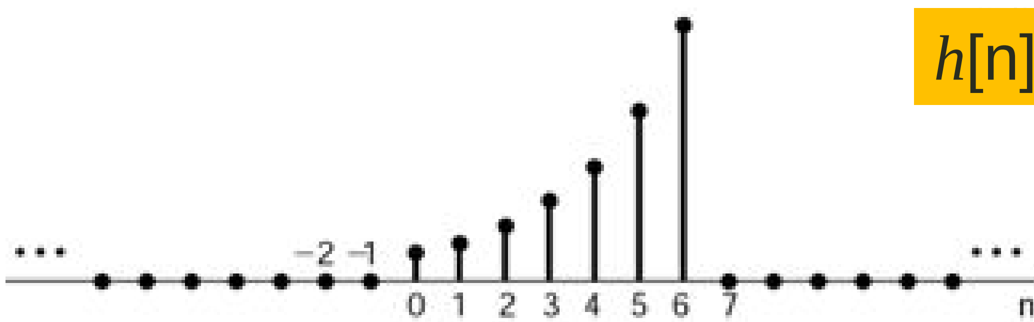
离散时间LTI系统：卷积和

信号的卷积和

例2.4

$$x[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le 4\\ 0,\ otherwise\end{cases}\qquad h[n]=\begin{cases}\alpha^{n},\ 0\le n<6\\ 0,\ otherwise\end{cases}$$

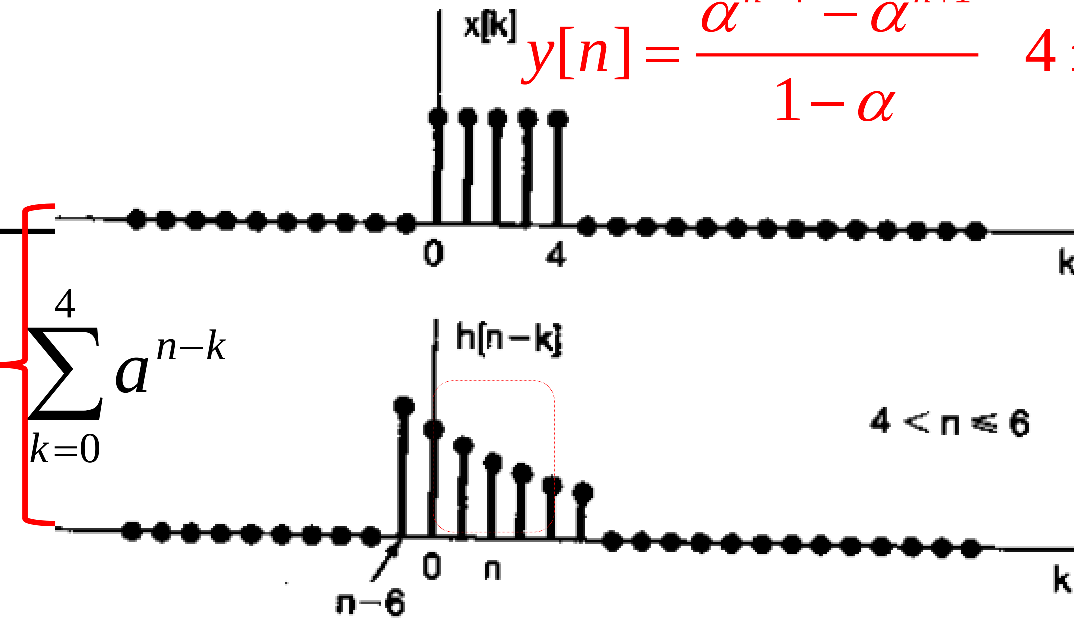




$$y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0\le n\le 4\\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 4<n\le 6\\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha} & 6<n\le 10\\ 0 & n>10\end{cases}$$

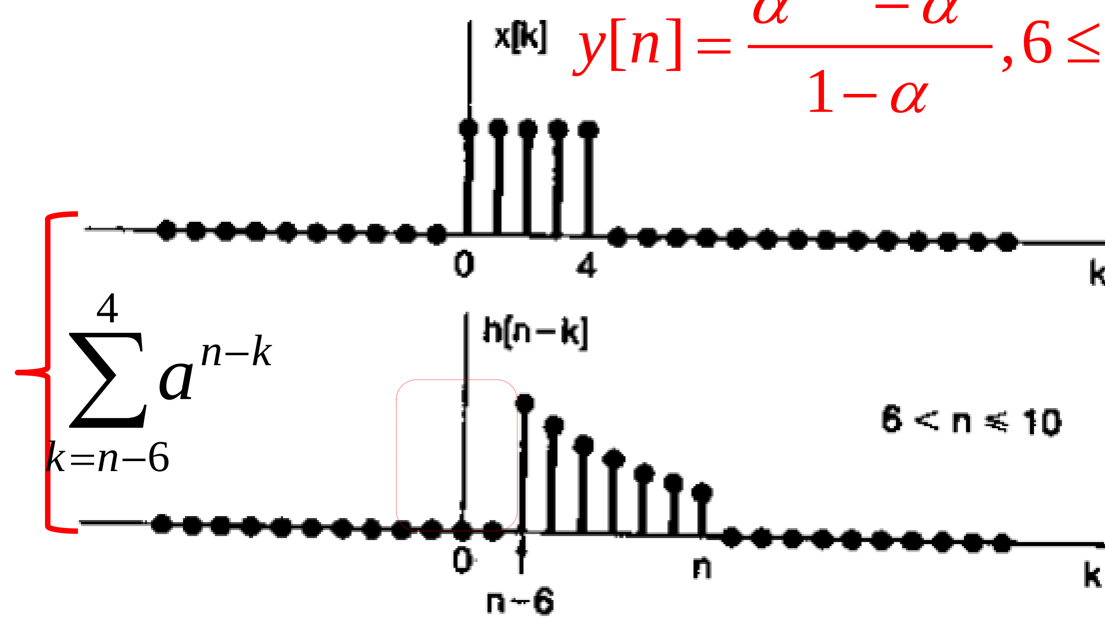
$$y[n]=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\quad 4\le n\le 6$$

$$\sum_{k=0}^{4}a^{n-k}$$

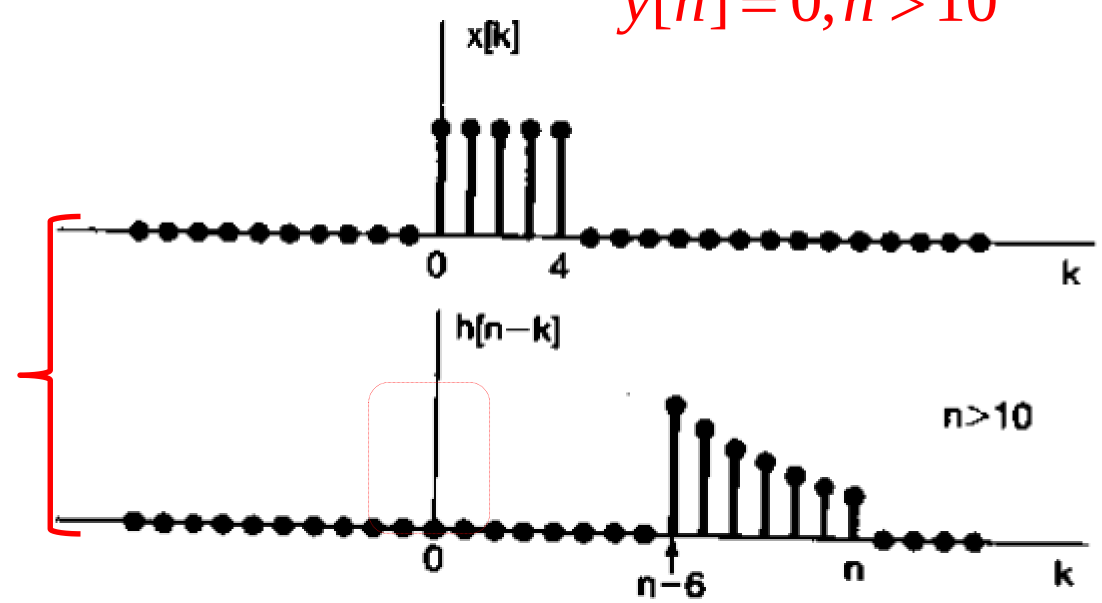


$$y[n]=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha},6\le n\le 10$$

$$\sum_{k=n-6}^{4}a^{n-k}$$



$$y[n]=0,n>10$$

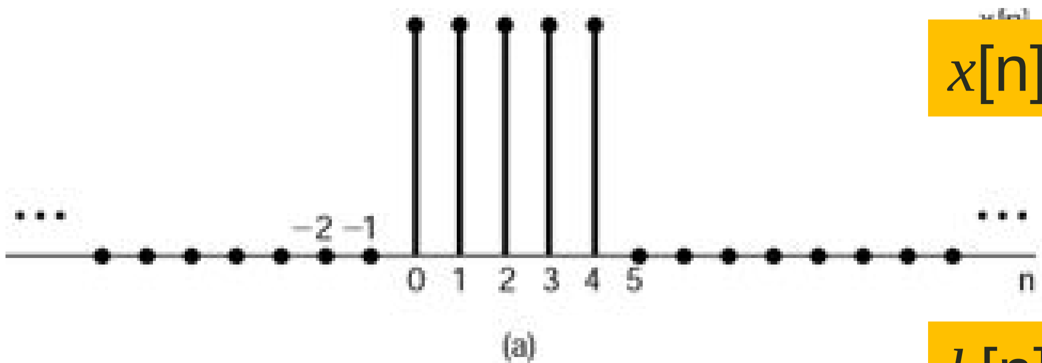


离散时间LTI系统：卷积和

信号的卷积和

例2.4

$$x[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le 4\\ 0,\ \ otherwise\end{cases}\qquad h[n]=\begin{cases}\alpha^n,\ \ 0\le n<6\\ 0,\ \ otherwise\end{cases}$$



x[n]

h[n]

$$y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0\le n\le 4\\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 4<n\le 6\\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha} & 6<n\le 10\\ 0 & n>10\end{cases}$$

$$x[n]: N\in[N_1, N_2]$$

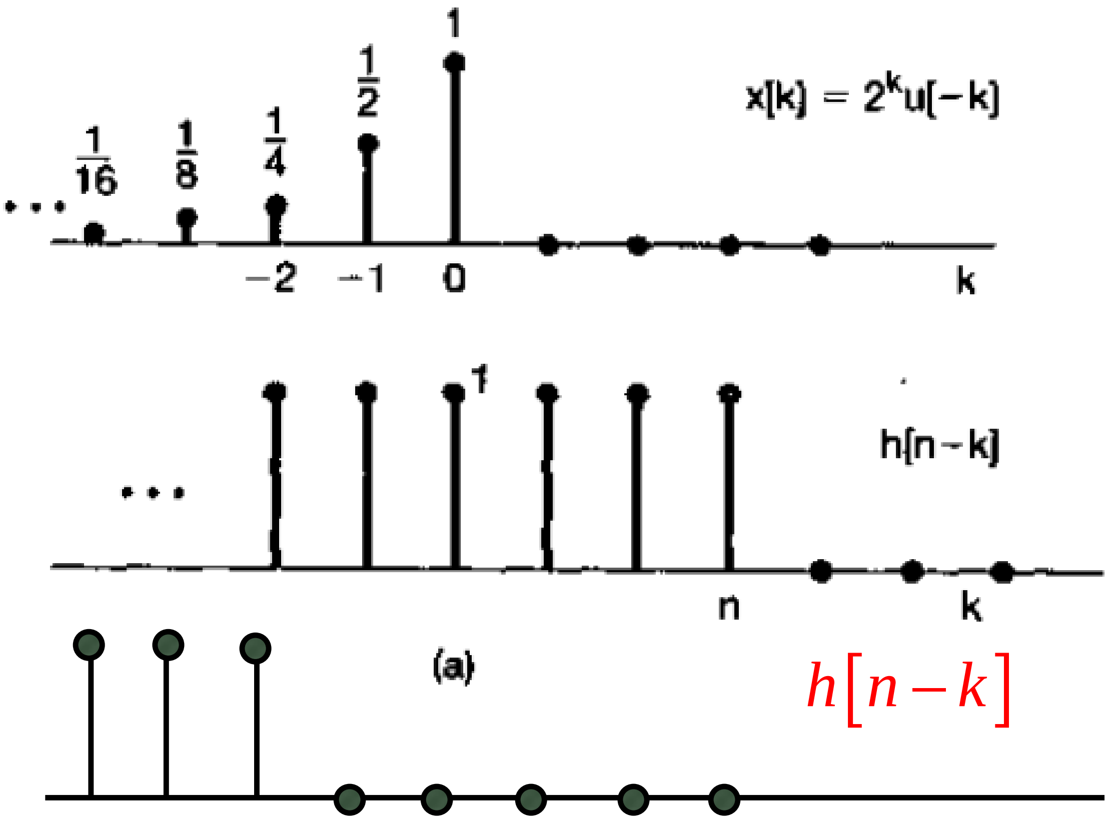
$$h[n]: N\in[N_3, N_4]$$

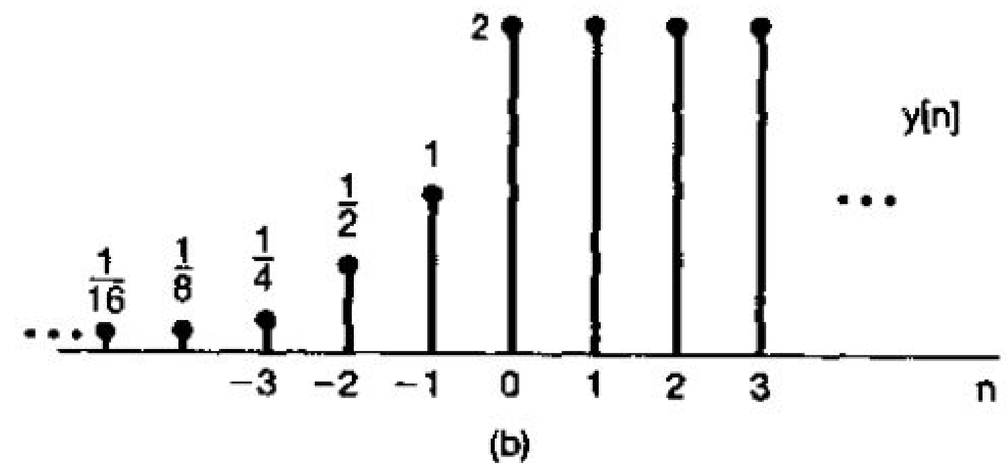
$$y[n]: N\in[N_1+N_3, N_2+N_4]$$

信号的卷积和

$$y[n]=\begin{cases}2 & n\ge 0\\ 2^{n+1} & n<0\end{cases}$$

例2.5 求卷积 $x[n]=2^n u[-n]\quad h[n]=u[n]$





n>0时 $\quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{0} 2^n.1$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2$$

n<0时

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^k.1 \xrightarrow{l=-k} y[n]=\sum_{l=-n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l \xrightarrow{m=l+n} y[n]=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}$$

$$y[n]=2^n\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

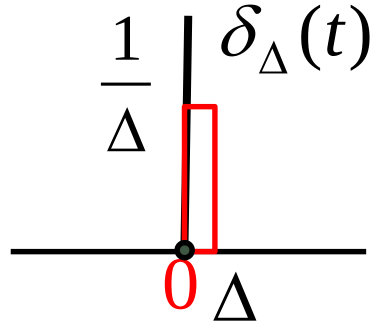
$$y[n]=2^{n+1}$$

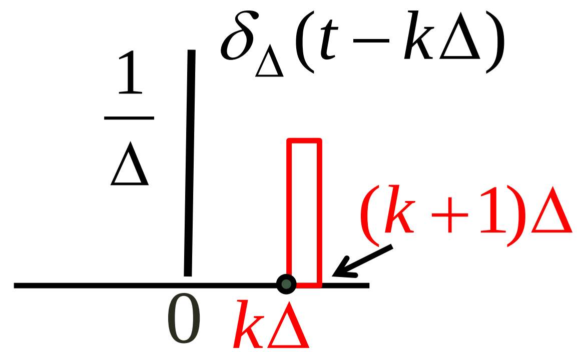
连续时间LTI系统：卷积积分

用冲激信号表征连续时间信号

脉冲串与冲激函数

定义脉冲函数 $\delta_\Delta(t)$





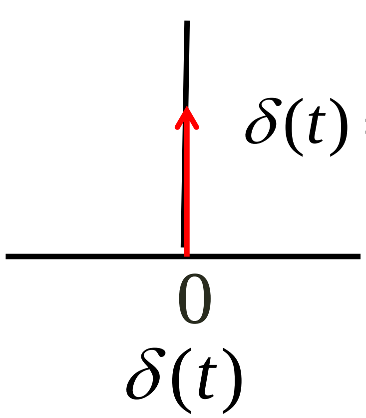
$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}, 0\le t\le\Delta \\ 0, \quad otherwise\end{cases}$$

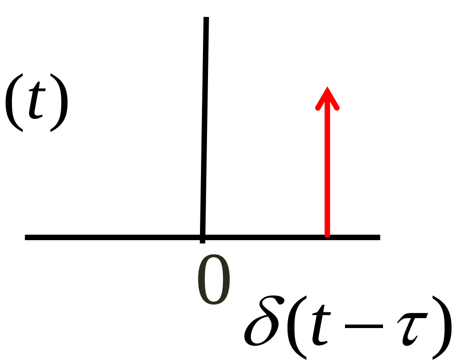
$$\delta_\Delta(t-k\Delta)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}, \quad k\Delta\le t\le(k+1)\Delta \\ 0, \quad otherwise\end{cases}$$

$\downarrow \Delta\to 0$

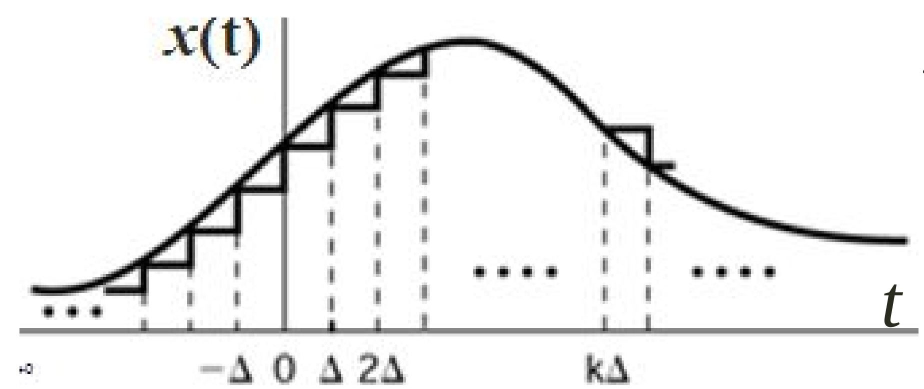
$$\delta(t-\tau)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t-k\Delta)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t-\tau)$$

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

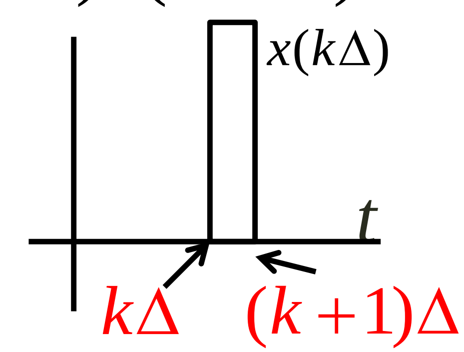




x(t)的脉冲串或阶梯信号表示



$x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\Delta$



$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{\Delta\to 0}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

连续时间冲激函数的筛选性质

连续时间LTI系统：卷积积分

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

连续时间信号可以表示成若干移位单位冲激信号的叠加

单位冲激响应 单位冲激响应表示系统在输入信号为单位冲激信号时的系统输出。

$$\delta(t)\longrightarrow \boxed{\text{CT System}} \longrightarrow h(t)$$

LTI系统的单位冲激响应

$$\delta(t)\to h(t)\overset{\text{时不变}}{\Rightarrow}\delta(t-\tau)\to h(n-\tau)$$

卷积积分

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)}$$

CT LTI系统的输出响应为系统对移位单位冲激响应的加权和。其中权重为输入信号的每一个样本值。

连续时间LTI系统：卷积积分

➡ **连续信号的卷积** $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$

计算步骤与离散信号的卷积和类似。

滑动图解法

基本步骤 注意积分上下限的确定

固定t

(1)反转平移/平移反转

$h(\tau)\rightarrow h[t-\tau]$

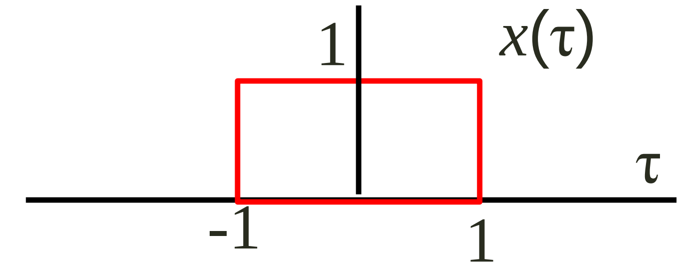
注意先反转，再平移与先平移再反转的区别

(2)序列相乘 $g(\tau)=x(\tau)h(t-\tau)$

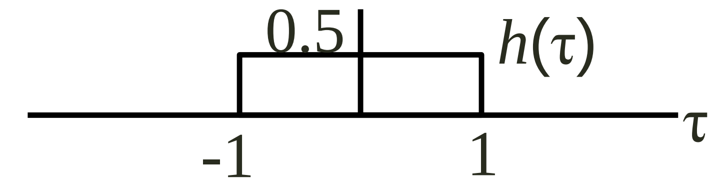
(3)g(τ)求和 $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)d\tau$ 本质是重叠区域乘积累加

改变t (4)将h(t-τ)从左到右移动，改变*t*的值，重复上述步骤(2~3)。

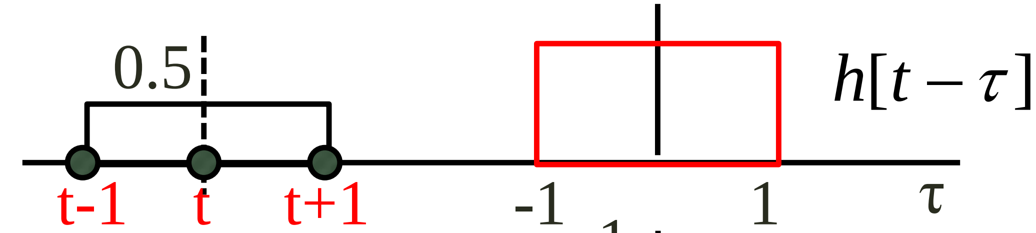
连续时间LTI系统：卷积积分



连续信号的卷积 $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

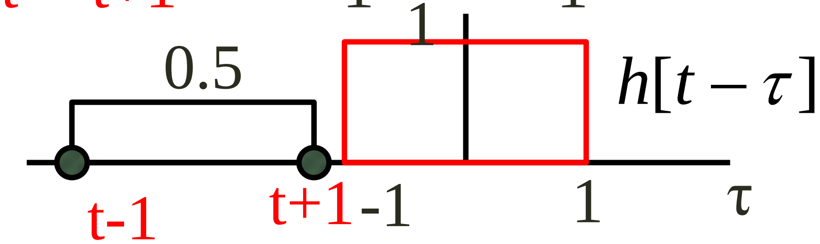


基本步骤 注意积分上下限的确定



(1)反折 $h(\tau)\to h[-\tau]$

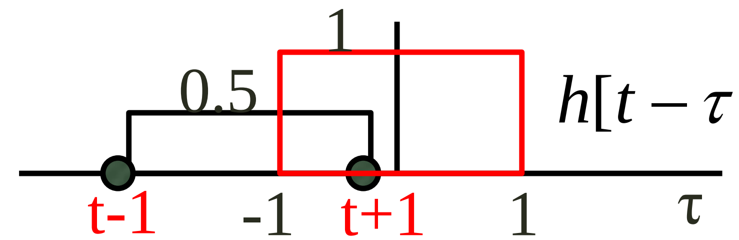
(2)平移 $h(-\tau)\to h[t-\tau]$



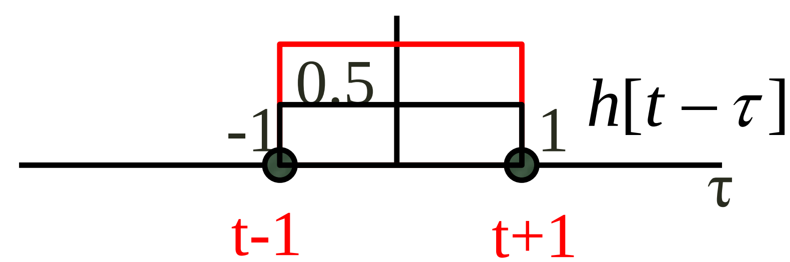
(3)相乘 $g(\tau)=x(\tau)h(t-\tau)$

(4)求和 $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g(\tau)$

$$y(t)=\int_{-1}^{t+1}1\bullet 0.5\,d\tau$$

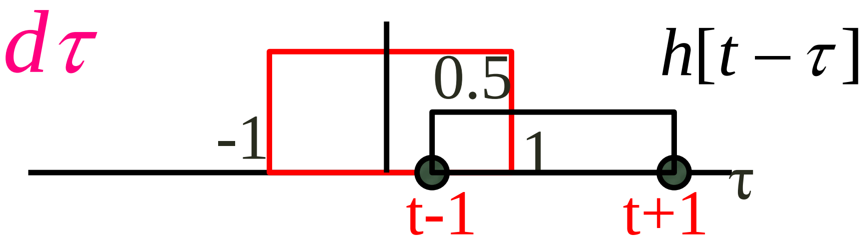


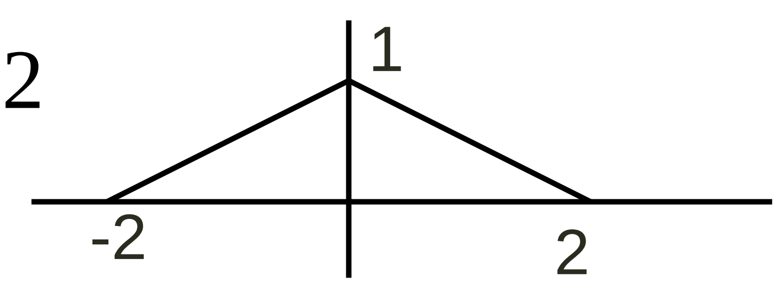
(5) 改变t的值，重复上述步骤**(2)~(4)**。

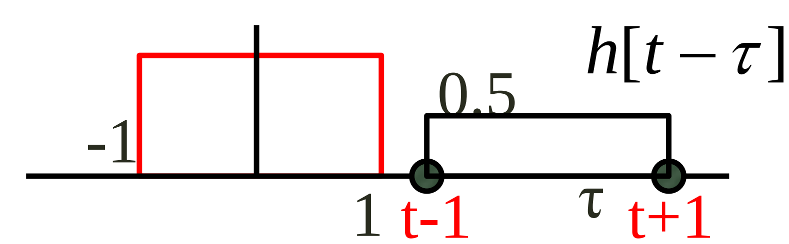


$$y(t)=\begin{cases}0 & t<-2\\ 0.5t+1 & -2\le t\le 0\\ 1-0.5t & 0\le t\le 2\\ 0 & t>2\end{cases}$$

$$y(t)=\int_{t-1}^{1}1\bullet 0.5\,d\tau$$





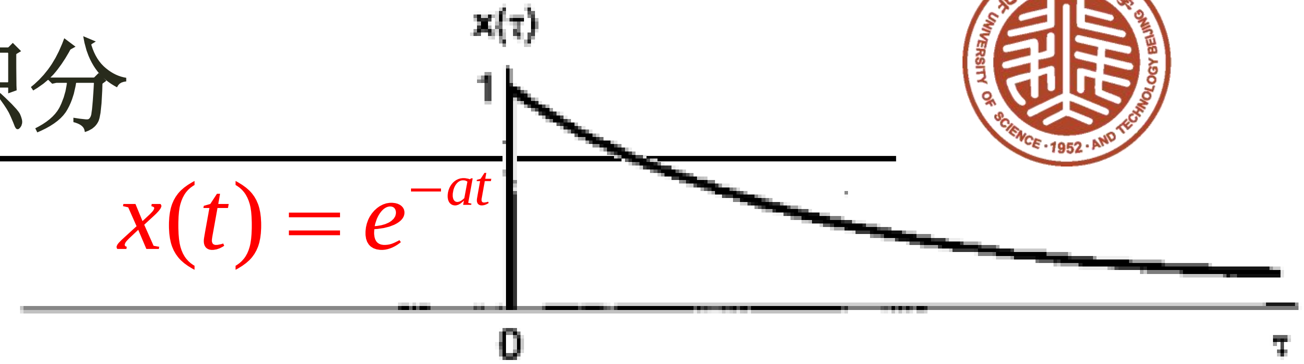


连续时间LTI系统：卷积积分

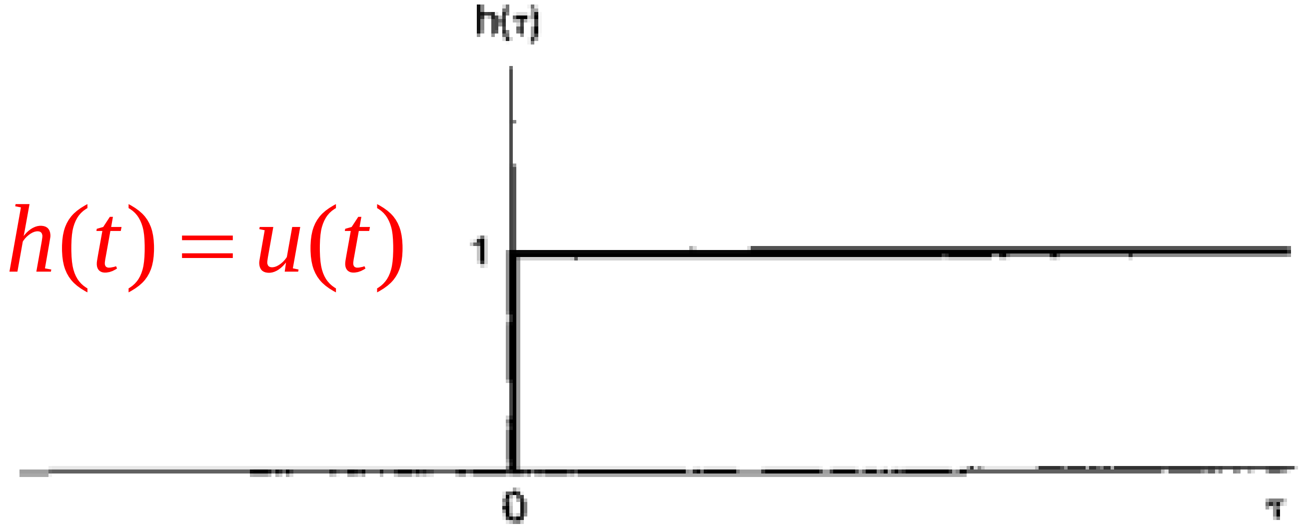
➡ 连续信号的卷积

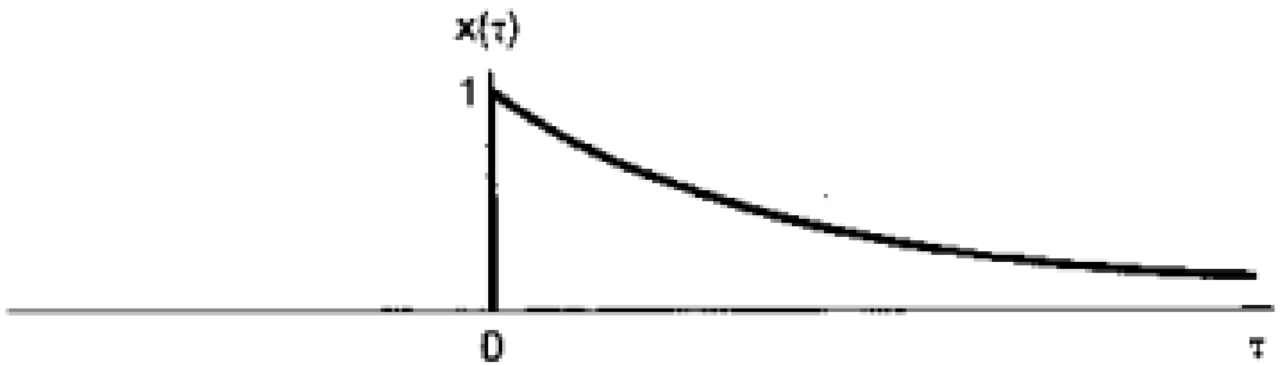
例2.6 $x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

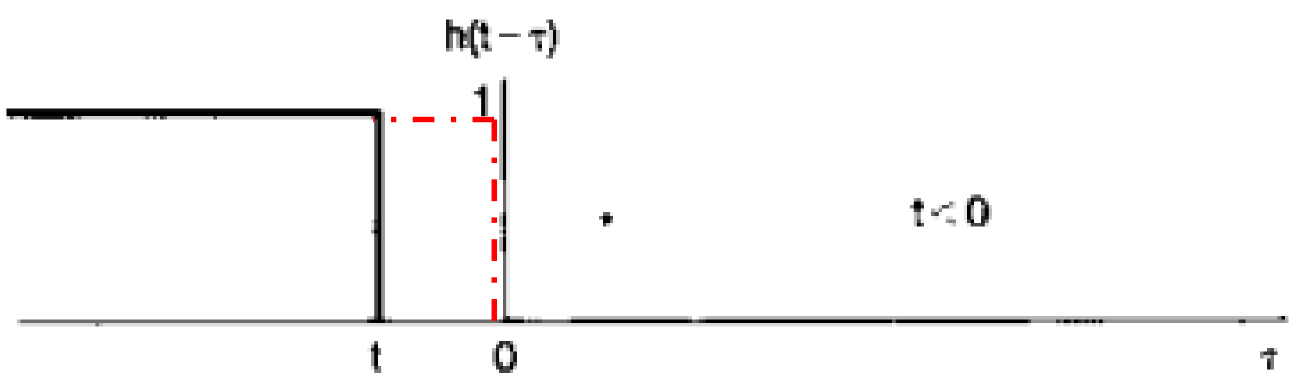
$x(t)=e^{-at}$

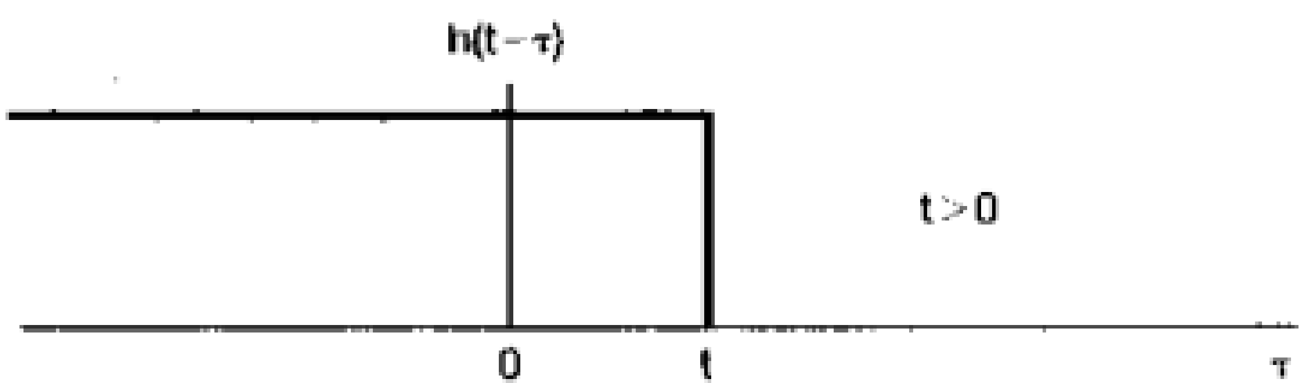


$h(t)=u(t)$









$t<0 \quad y(t)=0$

$t\geq 0 \quad y(t)=\int_0^t x(\tau)h\left(t-\tau\right)d\tau$

$$=\int_0^t e^{-a\tau}.1d\tau \;=\frac{1}{a}(1-e^{at})$$

↓

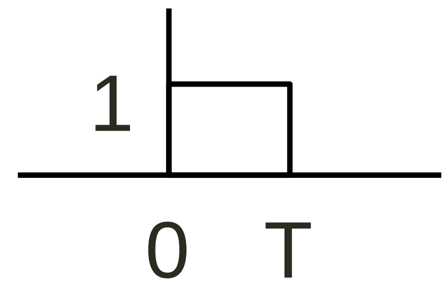
$$y(t)=\int_0^t e^{-a\tau}d\tau=\frac{1}{a}(1-e^{at})u(t)$$

连续时间LTI系统：卷积积分

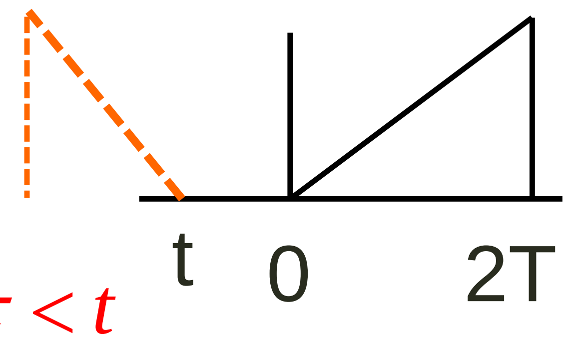
连续信号的卷积

例2.7

$$x(t)=\begin{cases}1, 0<t<T\\ 0, otherwise\end{cases}$$



$$h(t)=\begin{cases}t, 0<t<2T\\ 0, otherwise\end{cases}$$



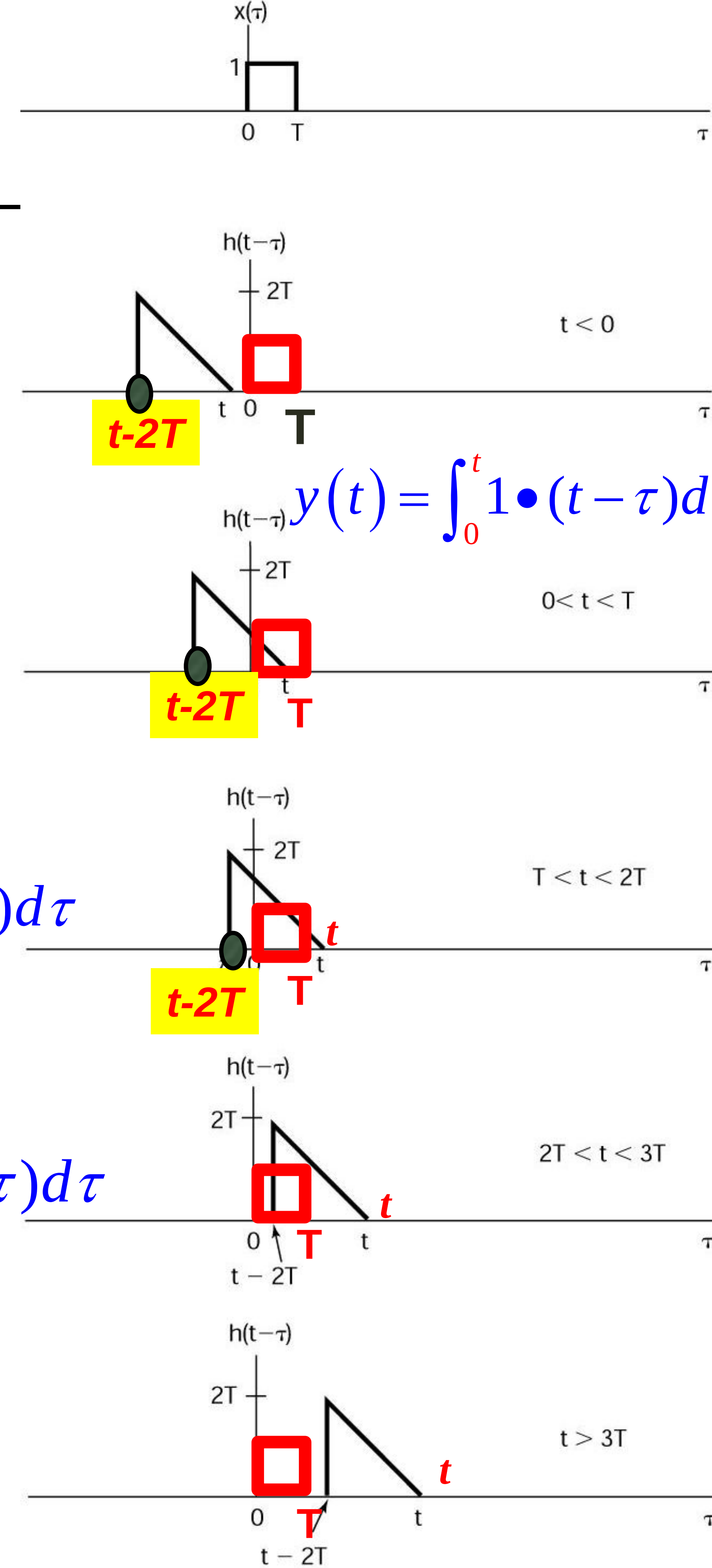
$$h(t-\tau)=\begin{cases}-\tau+t, \quad t-2T<\tau<t\\ 0, otherwise\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \frac{1}{2}t^2, 0<t<T\\ Tt-\frac{1}{2}T^2, T<t<2T\\ -\frac{1}{2}t^2+Tt+\frac{3}{2}T^2, 2T<t<3\\ 0, t>3T\end{cases}$$

$$y(t)=\int_0^t 1\bullet(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=\int_0^T 1\bullet(t-\tau)d\tau$$

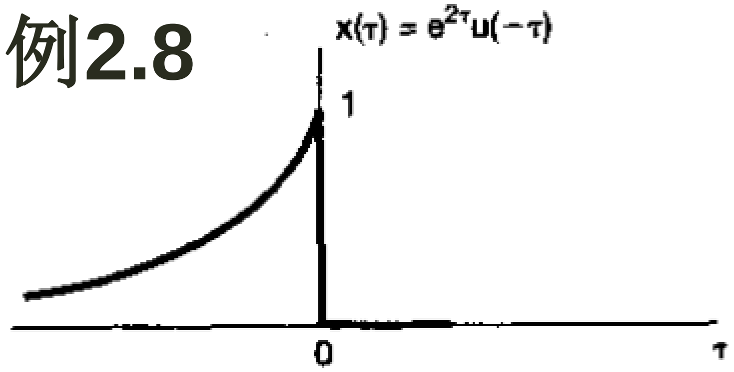
$$y(t)=\int_{t-T}^T 1\bullet(t-\tau)d\tau$$



连续时间LTI系统：卷积积分

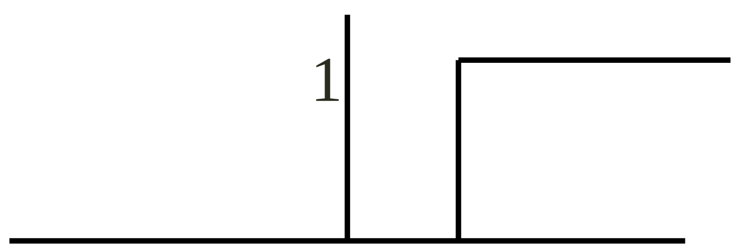
连续信号的卷积

例2.8

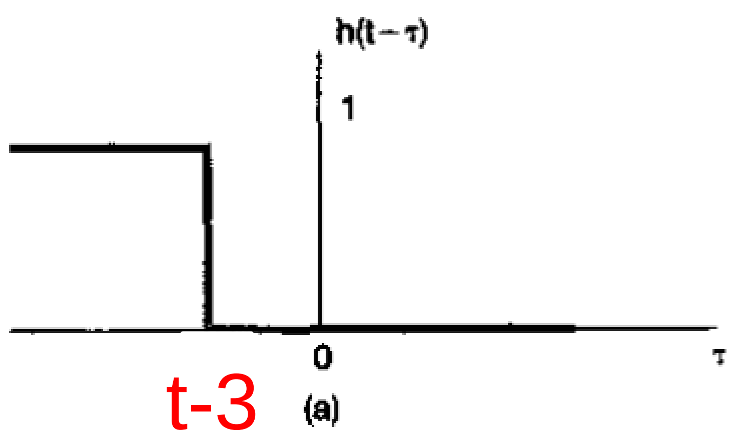


$x(t)=e^{2t}u(-t)$

$h(t)=u(t-3)$



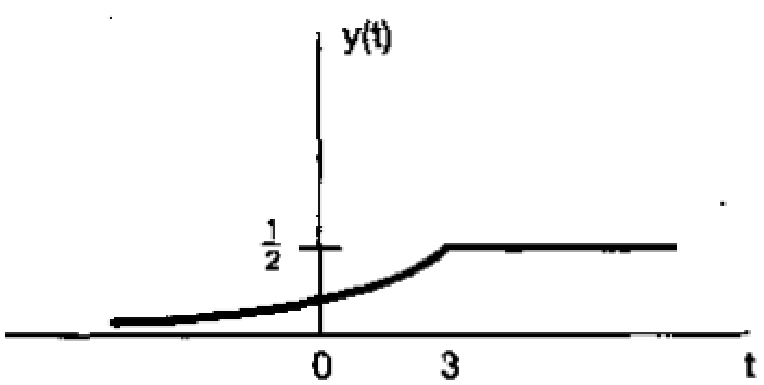
$h(t)=u(t-3)$



(a)

$$t-3\le 0 \qquad y(t)=\int_{-\infty}^{t-3}e^{2\tau}d\tau=\frac{1}{2}e^{2(t-3)}$$

$$t-3>0 \qquad y(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{2\tau}d\tau=\frac{1}{2}$$



(b)

作业

离散

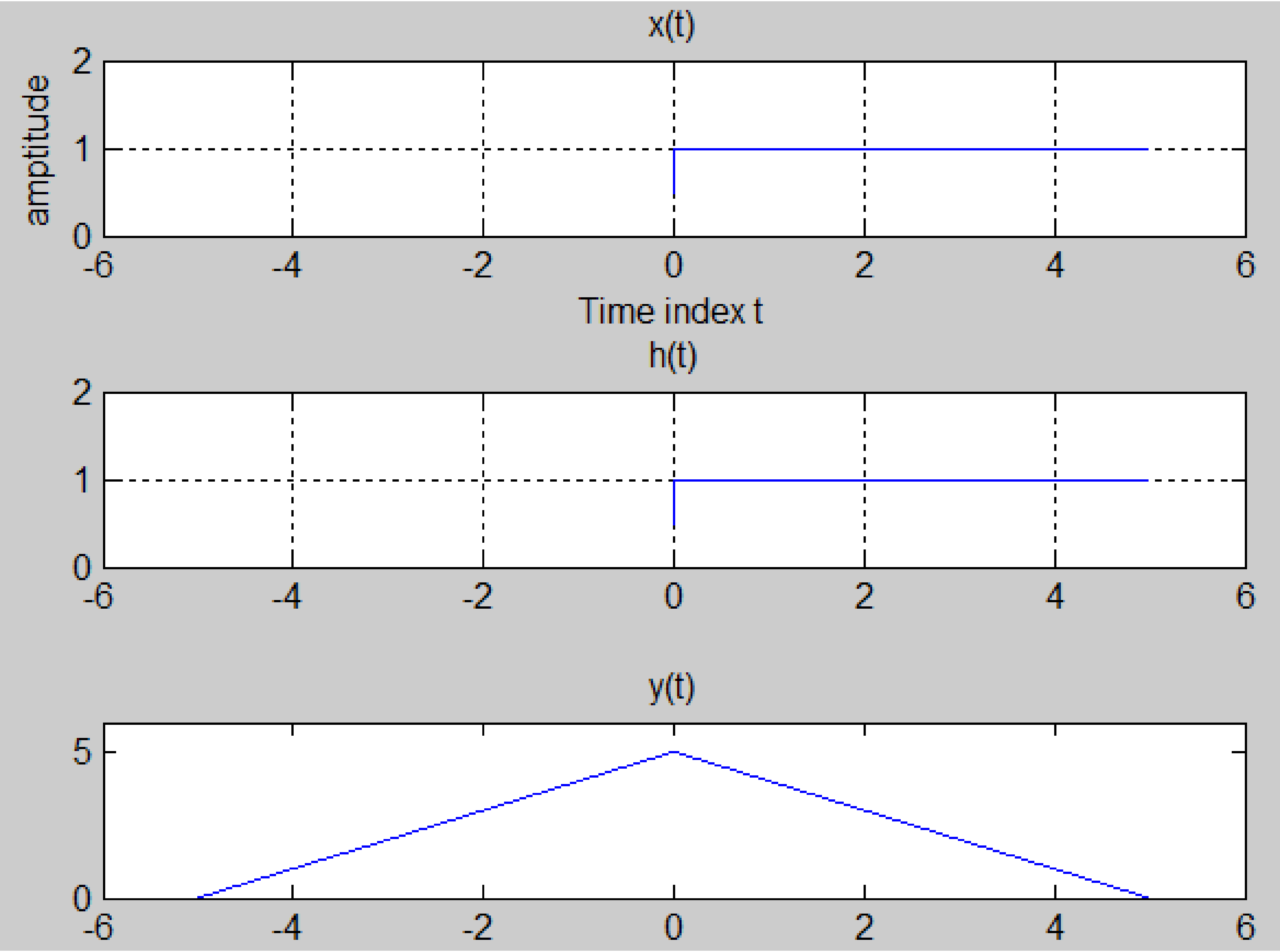
- 2.1(c) 选做
- 2.3
- 2.6

连续

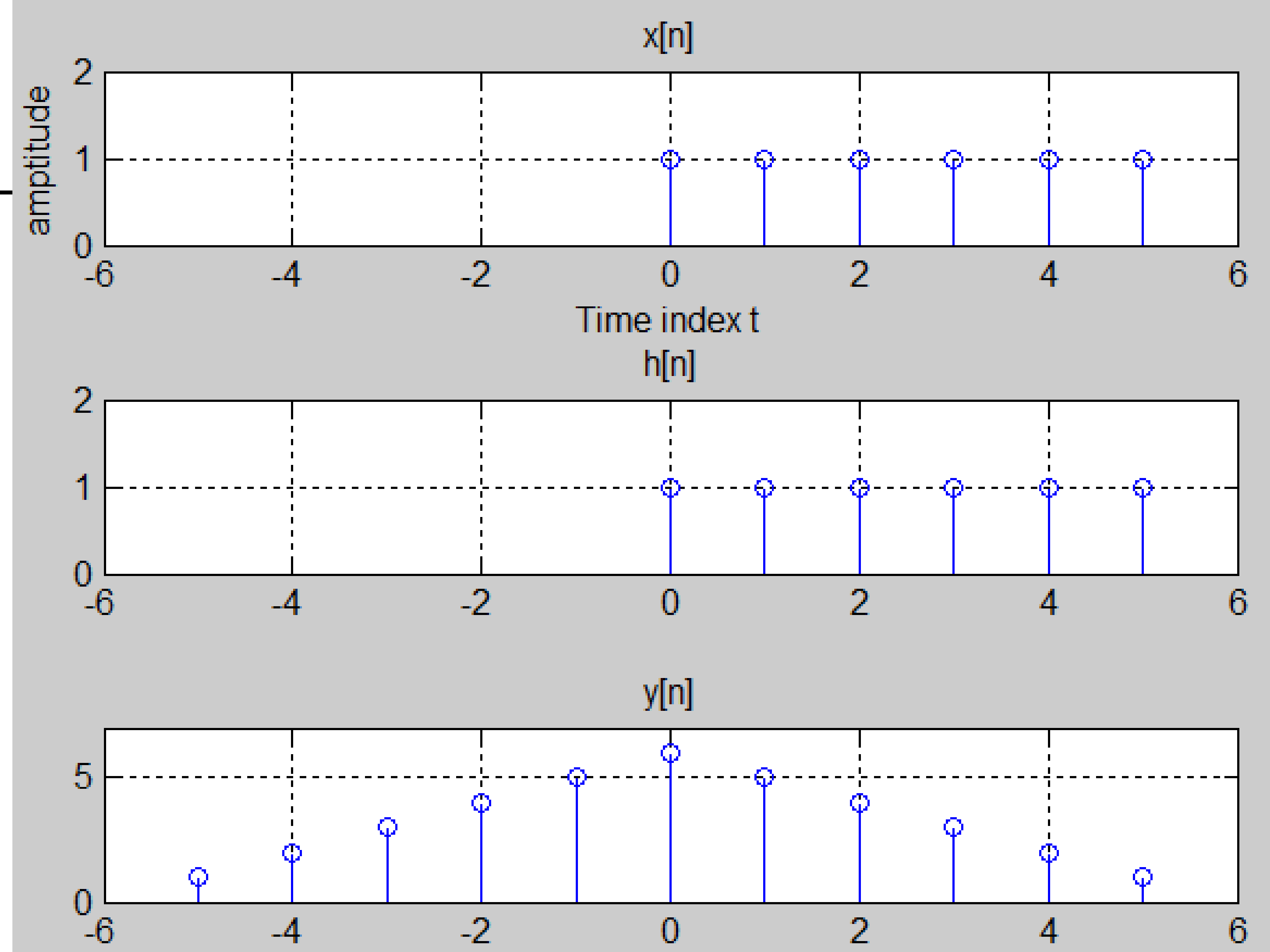
- 2.8 （可以利用卷积的某些性质计算）
- 2.10(a)
- 2.11(a)

2选1

```
step=0.01;
t1=0:step:5;
subplot(3,1,1);
x=Heaviside(t1);
plot(t1,x);  title('x(t)');
xlabel('Time index t');
ylabel('amptitude');
axis([-6,6,0,2]); grid

t2=0:step:5;
subplot(3,1,2);
h=Heaviside(t2);
plot(t2,h);  title('h(t)')
axis([-6,6,0,2]); grid

y=conv(x,h)*step;
t=-5:step:5
subplot(3,1,3)
plot(t,y);
title('y(t)')
axis([-6,6,0,max(y)+1]);
grid
```



```
n1=0:1:5;
subplot(3,1,1)
x=Heaviside_dis(n1);
stem(n1,x); title('x(n)')
xlabel('Time index t');
ylabel('amptitude');
axis([-6,6,0,2]); grid

n2=0:1:5;
subplot(3,1,2);
h=Heaviside_dis(n2);
%h=[1 1 1 1 1 1];
stem(n2,h);
title('h(n)')
axis([-6,6,0,2]); grid;

y=convn(x,h);
nh=-5:1:5
subplot(3,1,3)
stem(nh,y);title('y(t)')
grid; axis([-6,6,0,max(y)+1]);
```




```
function f = Heaviside_dis(t)
f=(t>=0);
end
```