高等数学习题课

中值定理及导数的应用

一、 微分中值定理及其应用

二、 导数应用

主讲人：学生讲师团金牌讲师徐志华

一、 微分中值定理及其应用

1. 微分中值定理及其相互关系

罗尔定理

$f(a)=f(b)$

拉格朗日中值定理

$f'(\xi)=0$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$F(x)=x$

$f(a)=f(b)$

$F(x)=x$

$n=0$

柯西中值定理

泰勒中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

2. 微分中值定理的主要应用

(1) 研究函数或导数的性态

(2) 证明恒等式或不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

3. 有关中值问题的解题方法

利用逆向思维，设辅助函数．一般解题方法:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用罗尔定理，可用原函数法找辅助函数．

(2) 若结论中涉及到含中值的两个不同函数，可考虑用柯西中值定理．

(3) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须多次应用中值定理．

(4) 若已知条件中含高阶导数，多考虑用泰勒公式，有时也可考虑对导数用中值定理．

(5) 若结论为不等式，要注意适当放大或缩小的技巧.

例1. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $|f'(x)| \le M$, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证: 取点 $x_0 \in (a,b)$, 再取异于 x_0 的点 $x \in (a,b)$, 对 $f(x)$ 在以 x_0, x 为端点的区间上用拉氏中值定理, 得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 界于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\therefore \quad |f(x)| = |f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)|$$

$$\le |f(x_0)| + |f'(\xi)||x - x_0|$$

$$\le |f(x_0)| + M(b-a) = K \quad \text{(定数)}$$

可见对任意 $x \in (a,b)$, $|f(x)| \le K$, 即得所证.

例2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

证: 问题转化为证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0.$

设辅助函数 $\varphi(x)=x^2 f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 **[0 , 1]** 上满足罗尔定理条件, 故至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$\varphi'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$$

即有 $$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

例3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, **且** $0<a<b$, **试证存在** $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证: 欲证 $\dfrac{f'(\xi)}{a+b}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$, **即要证** $\dfrac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏中值定理条件, 故有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b) \qquad ①$$

又因 $f(x)$ 及 x^2 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件, **故有**

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\quad \eta\in(a,b) \qquad ②$$

将①代入②, 化简得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta),\quad \xi,\eta\in(a,b)$

例4. 设实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足下述等式

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

证明方程 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 **(0 , 1)** 内至少有一个实根 .

证: 令 $F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, 则可设

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

显然, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$, 由罗尔定理知存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根 ξ.

例5. 设函数 $f(x)$ 在[0, 3] 上连续, 在(0, 3) 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1$, 试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$. (03考研)

证: 因 $f(x)$ 在[0, 3]上连续, 所以在[0, 2]上连续, 且在[0, 2]上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M \longrightarrow m\le \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

$\because f(c)=f(3)=1$, 且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续, 在 $(c,3)$ 内可导,

由罗尔定理知, 必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

例6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$,

且 $|f''(x)|\le 2$, 证明 $|f'(x)|\le 1$.

证: $\forall x\in[0,1]$, 由泰勒公式得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 \quad (0<\eta<1)$$

$$f(0)=f(x)-f'(x)\,x+\frac{1}{2}f''(\xi)\,x^2 \quad (0<\xi<1)$$

两式相减得 $\quad 0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

$$\therefore \quad |f'(x)|=\left|\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right|$$

$$\le\frac{1}{2}|f''(\eta)|(1-x)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2$$

$$\le(1-x)^2+x^2=1-2x(1-x)\le 1,\quad x\in[0,1]$$

二、 导数应用

1. 研究函数的性态:

增减， 极值， 凹凸， 拐点， 渐近线， 曲率

2. 解决最值问题

- 目标函数的建立与简化
- 最值的判别问题

3. 其他应用： 求不定式极限； 几何应用；

相关变化率； 证明不等式； 研究方程实根等.

例7. 填空题

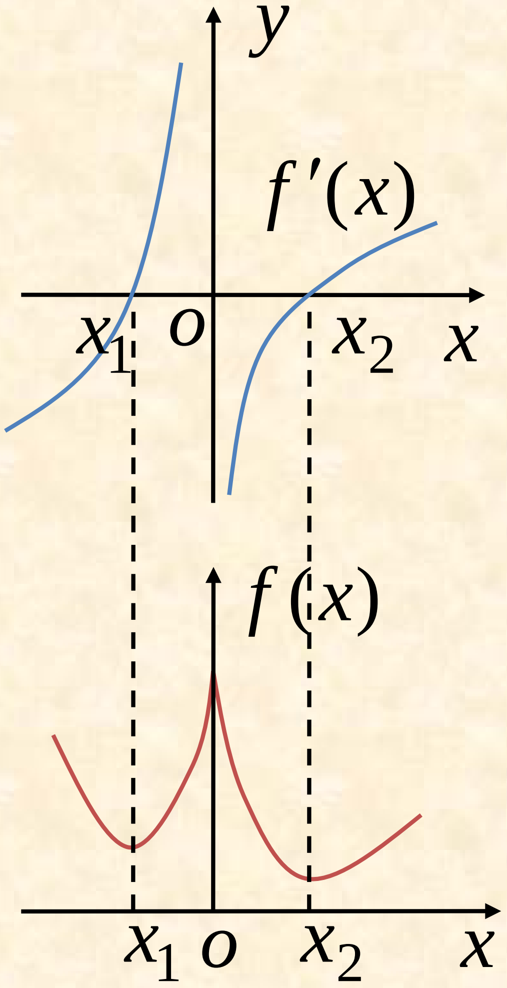
(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其导数图形如图所示，则 $f(x)$ 的

单调减区间为 $\underline{(-\infty, x_1), (0, x_2)}$；

单调增区间为 $\underline{(x_1, 0), (x_2, +\infty)}$；

极小值点为 $\underline{x_1, \ x_2}$；

极大值点为 $\underline{x=0}$.

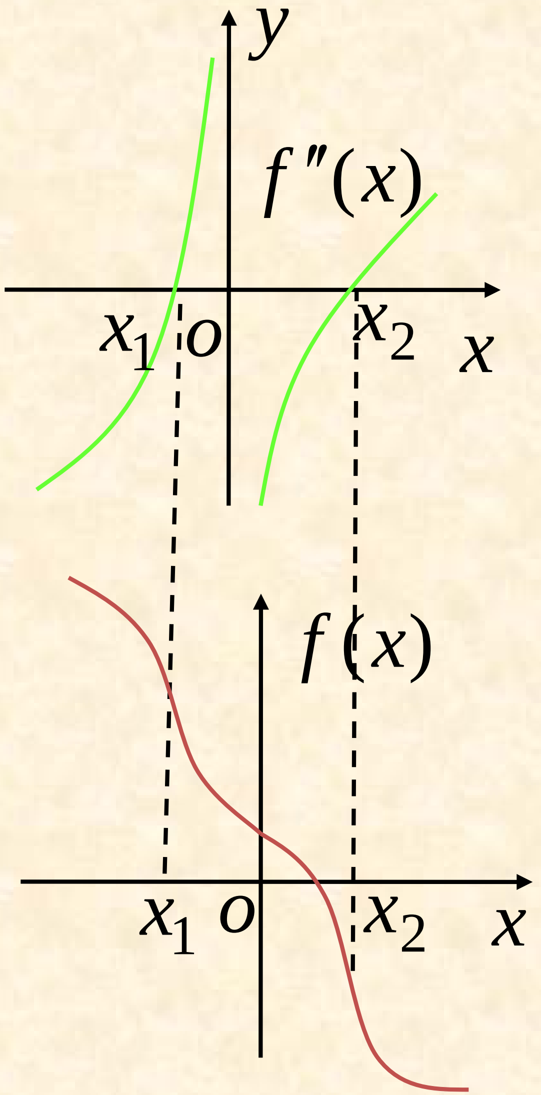


提示: 根据 $f(x)$ 的连续性及导函数的正负作 $f(x)$ 的示意图.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f''(x)$ 的图形如图所示，则函数 ***f*(*x*)** 的图形在区间 $\underline{(x_1, 0), (x_2, +\infty)}$ 上是凹弧；

在区间 $\underline{(-\infty, x_1), (0, x_2)}$ 上是凸弧；

拐点为 $\underline{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))}, (0, f(0))$



提示： 根据 $f(x)$ 的可导性及 $f''(x)$ 的正负作 ***f*(*x*)** 的示意图.

例8. 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$上单调增加.

证: $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=x[\ln(1+x)-\ln x]$$

$$\therefore \quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 **[*x* , *x* +1]**上利用拉氏中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x} \qquad (0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

例9. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且 $f(x)+f'(x)>0$，

证明$f(x)$至多只有一个零点.

证: 设 $\varphi(x)=e^{x}f(x)$

则 $\varphi'(x)=e^{x}[f(x)+f'(x)]>0$

故$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续单调递增，从而至多只有一个零点.

又因 $e^{x}>0$，因此 $f(x)$也至多只有一个零点.

思考: 若题中$f(x)+f'(x)>0$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$，其它不变时，如何设辅助函数? $\boxed{\varphi(x)=e^{-x}f(x)}$

例10. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

证: 设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\geq 1)$, **用对数求导法得**

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=e$,

列表判别:

x	$[1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

极大值

因为 $f(x)$ **在** $[1,+\infty)$ **只有唯一的极大点** $x=e$, **因此在** $x=e$ **处** $f(x)$ **也取最大值**.

又因 $2<e<3$, 且 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$, 故 $\sqrt[3]{3}$ 为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ **中的最大项.**

例11. 证明 $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0).$

证: 设 $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$，则 $\varphi(0) = 0$

$$\varphi'(x) = 1 + \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2} > 0 \qquad (x>0)$$

故 $x>0$ 时，$\varphi(x)$ 单调增加，从而 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$

即 $$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$$

思考: 证明 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$ $(0<x<1)$ 时，如何设辅助函数更好？

提示: $\boxed{\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

例12. 设 $f(0)=0$, 且在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 存在且单调递减, 证明对一切 $a>0, b>0$ 有

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

证: 设 $\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$, 则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=f'(a+x)-f'(x)<0 \quad (x>0)$$

所以当 $x>0$ 时, $\varphi(x)<\varphi(0)=0$

令 $x=b$, 得

$$\varphi(b)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0$$

即所证不等式成立.

例13. 证明:当$0<x<1$时, $e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}.$

证: 只要证 $(1-x)e^{2x}-1-x<0 \quad (0<x<1)$

设 $f(x)=(1-x)e^{2x}-1-x,$ 则 $f(0)=0$

$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1,$ $f'(0)=0$

$f''(x)=-4xe^{2x}<0 \quad (0<x<1)$

利用一阶泰勒公式, 得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

$$=-2\xi e^{2\xi}x^2<0 \quad (0<\xi<x<1)$$

故原不等式成立.

例14. 证明当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$.

证: 令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$, 则 $f(1)=0$

$$f'(x)=2x\ln x+x-\frac{1}{x}-2(x-1), \qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

法1 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的二阶泰勒公式，得

$$f(x)=\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3$$

$$=(x-1)^2+\frac{\xi^2-1}{3\xi^3}(x-1)^3 \geq 0 \qquad (x>0, \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } 1 \text{ 之间})$$

故所证不等式成立 .

法2 列表判别:

$$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2,\qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2\qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1,\qquad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow$ $+$	2	$\nearrow$ $+$
$f'(x)$	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $+$	0	$\nearrow$ $+$

故当$x>0$时 $f(x)\ge 0$, 即 $(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

$$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2,\qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2\qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1,\qquad \boxed{f''(1)=2>0}$$

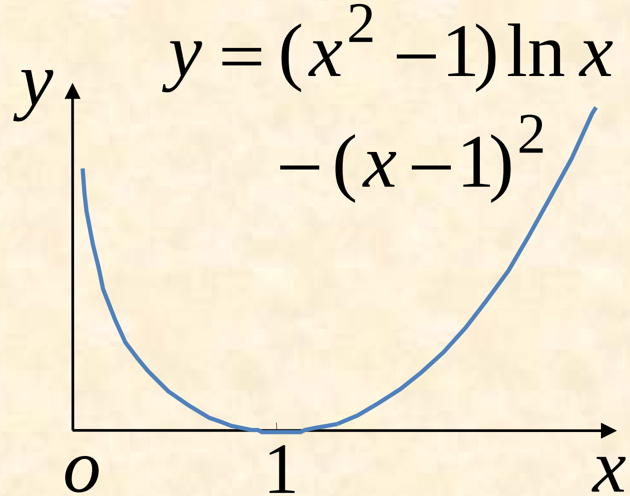
法3 利用**极值第二判别法**.

易知 $x=1$ 是 $f'(x)=0$ 的唯一根,

且 $f''(1)>0$, $\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的唯一极小点, **故** $f(1)=0$ 也是最小值,

因此当 $x>0$ 时 $f(x)\geq 0$, 即

$$(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2$$



例15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})\quad(a\neq 0)$

解法1 利用中值定理求极限

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1})$ （ξ 在 $\frac{a}{n}$ 与 $\frac{a}{n+1}$ 之间）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\frac{a}{1+\xi^2}$$

$=a$ (两边夹)

解法2 利用泰勒公式

令 $f(x)=\arctan x$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$=x+o(x^2)$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n^2\left\{\left[\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\left[\frac{a}{n+1}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{an^2}{n(n+1)}+\frac{+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right]=a$$

解法3 利用罗必塔法则

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

令 $t = \dfrac{1}{x}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\arctan at - \arctan bt}{t^2}$$

$$= \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}\right) \quad (a \neq 0)$$