计通学院 2014 级线性代数重点题型总结

刘畅

一、选择

1．矩阵 A,B 都是 n 阶方阵，则下列等式正确的是（　　）

(A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　　　(B) $\|A|B|=|A|^n|B|$

(C) $|A+B|=|A|+|B|$　　　　(D) $(2A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})^{-1}=\dfrac{1}{2}(B^{-1}A^{-1})^{\mathrm{T}}$

2．设四阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\beta & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $\left|A\right|=4,\left|B\right|=2$，则行列式 $\left|A+B\right|=$（　　）

(A) 6　　(B) 12　　(C) 36　　(D) 48

3．若 A 是 n 阶方阵，b 是 n 维非零向量，且齐次方程 $Ax=0$ 有非零解，则下列结论中**不会**发生的是（　　）

(A) $Ax=b$ 无解　　　　(B) $Ax=b$ 有唯一解

(C) $Ax=b$ 有无穷多解　　　　(D) $R(A)<n$

4．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一 n 维向量组，$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r<m$，下面说法**错误**的是（　　）

(A) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关。

(B) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成其极大无关组。

(C) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意一个向量都能由其余向量线性表示。

(D) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与其任一极大无关组等价。

5．矩阵 A,B,C 都是 n 阶方阵，且 $ABC=E$ 则下列等式正确的是（　　）

(A) $BAC=E$，　(B) $CAB=E$，　(C) $ACB=E$，　(D) $CBA=E$

6．设 A 为 4 阶方阵，且 $\left|A\right|=-2$ 则 $\left|\left|A\right|A\right|=$（　　）

(A) 4，　　(B) 2^5，　　(C) -2^5，　　(D) 8

7．设 A, B 均为 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则矩阵 A 和 B 的秩是（　　）

(A) 必有一个等于零　　　　　　　　(B) 都小于 n

(C) 一个小于 n，一个等于 n　　　　(D) 都等于 n

8. 设 A、B 均为 n 阶矩阵，且 A 可逆，则下列结论正确的是（　　　）

(A) 若 AB≠0，则 B 可逆　　　　　　(B).若 AB=0，则 B=0

(C) 若 AB≠0，则 B 不可逆　　　　　(D).若 AB=BA，则 B=E

9、 A、B 均为 n 阶方阵，则必有(　　)成立

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　（B）$(AB)^T=A^TB^T$

（C）$AB=0时,A=0或B=0$　　（D）$|A+AB|=0$ 的充要条件是 $|A|=0或|E+B|=0$

10、已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$ ，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{13}-5a_{12} & \frac{1}{2}a_{12} \\ 2a_{21} & 3a_{23}-5a_{22} & \frac{1}{2}a_{22} \\ 2a_{31} & 3a_{33}-5a_{32} & \frac{1}{2}a_{32} \end{vmatrix}=$ (　　)

（A）6　　（B）-6　　（C）-30　　（D）-10

11、n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (n>3)线性无关的充分必要条件是(　　)

（A）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个向量线性无关

（B）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 全是非零向量

（C）存在 n 维向量 β，使得 $\beta,\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

（D）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意一个向量都不能由其余两个向量线性表示

12、设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，P 为 m 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，则矩阵 PAQ 的秩为(　　)

（A）r　　（B）　r+1　　（C）　m　　（D）　n

13、n 阶方阵 A 满足 $A^2-E=0$，则(　　)

(A)　A=E　　(B)　$A=-E$　　(C)　$A=A^{-1}$　　(D)　$|A|=1$

14、设 A、B 为 n 阶可逆阵，则 $(A^{-1}B^{-1})^T=$________

(A) $(A^{-1})^T(B^{-1})^T$　　　(B) $(A^T)^{-1}(B^T)^{-1}$

(C) $(B^TA^T)^{-1}$　　　(D) $(A^TB^T)^{-1}$

15、设 $X=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=XX^T$，则 $\left|A^5-aE\right|=$____________

(A) a^5　　(B) $a^2(32-a)$　　(C) $32-a$　　(D) $32-a^3$

16、在齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 中，若 $R(A)<n$，则下列结论正确的是_______。

(A)当 $m=n$ 时，A 的 m 个行向量线性相关。
(B)当 $m<n$ 时，A 的 m 个行向量线性无关。
(C)当 $m>n$ 时，A 的 m 个行向量线性无关。
(D)当 $n=m+1$ 时，A 的 m 个行向量线性相关。

17、设四阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随矩阵 A^* 的秩为（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 0

18．设 A,B 均为 n 阶方阵，则下列等式正确的是（　　　）

（A）$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　（B）$[(AB)^T]^{-1}=(A^{-1})^T(B^{-1})^T$

（C）$(AB)^m=A^mB^m$　　（D）$\left||A|E\right|=|A|$

19．设矩阵 A 有 $k-1$ 阶子式不为 0，且所有 $k+1$ 阶子式全为 0，则 A 的秩 $R(A)$ 为（　　　）

（A）$k-1$ 或 k　　（B）k　　（C）$k-1$　　（D）$k+1$

20．设三阶行列式 $\left|a_1,a_2,b_1\right|=\lambda_1;\left|a_1,b_2,a_2\right|=\lambda_2$，其中 a_1,a_2,b_1,b_2 是三维列向量

则 $\left|a_1,a_2,2b_1+b_2\right|=$（　　　）

(A) $\lambda_1+\lambda_2$　　（B）$\lambda_1-\lambda_2$　　（C）$2\lambda_1+\lambda_2$　　（D）$2\lambda_1-\lambda_2$

21．矩阵 A,B 都是 n 阶方阵，$\lambda\in R$ 则下列等式正确的是（　　）

(A) $AB=BA$，　(B) $(AB)^T=A^TB^T$，　(C) $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$，　(D) $(\lambda A)^{-1}=\lambda A^{-1}$

22．已知行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k$，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & 3a_{13}-a_{12} \\ 2a_{21} & a_{22} & 3a_{23}-a_{22} \\ 2a_{31} & a_{32} & 3a_{33}-a_{32} \end{vmatrix}=$（　　）

(A) $5k$，　　(B) $6k$，　　(C) $3k$，　　(D) $4k$

23. 若 n 阶方阵 A 可逆，b 是 n 维列向量，则下列说法正确的是（　　）

(A) $Ax=0$ 有非零解，　　(B) $Ax=b$ 可能无解，

(C) $Ax=b$ 有唯一解，　　(D) $Ax=b$ 有无穷多解

24. 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的最大无关组是 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，（$r<m$），下面说法错误的是（　　）

(A) A 中任意 $r+1$ 个向量线性相关，(B) 向量组 A 能由向量组 A_0 线性表示，

(C) $R(A)=R(A_0)$，　　(D) 向量组 A_0 不一定能由向量组 A 线性表示

二、填空

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $(2B-A)\cdot A^{-1}=$ ________。

2. 在多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 2 & x & 1 & 4\\ 1 & 3 & x & 2\\ -2 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$ 中含 x^3 项的系数是________。

3. 已知三阶方阵 A 的秩 $R(A)=1$，且 $a_1=(1,1,2)^{\mathrm{T}}, a_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$,

$a_3=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 是方程 $Ax=b$ 的三个特解，则 $Ax=0$ 的基础解系是________。

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a-2 & 2 & 0\\ 2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$，若 A 的秩为 1，则=________________

5. 已知向量 $\alpha=(1,2,-3,3), \beta=(-1,2,3,1)$, 若 $3\alpha+4\xi=\beta$, 则 $\xi=$ ______________

6. 已知 4 阶行列式 D 的第一行元素分别是－1，1，0，2；第一行元素对应的代数余子式依次为 2，4，5，3，则 D= ________

7. 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=0\\ -x_1+2x_3=0\end{cases}$ 的一基础解系为________________.

8、若 3 阶方阵 A、B 的行列式分别为 $|A|=2$, $|\mathrm{B}|=3$，

则 $\left|-2A^{-1}B^*\right|=$ __________.

9、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a+2 & 2 & 0\\ 2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$，若 A 的秩为 1，则 $a=$ ____________________

10、设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$,三维向量 $\alpha=(b,1,1)^T$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 b=____________

11、设四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3，已知它的 3 个解向量为 β_1,β_2,β_3，且 $\beta_1=(2,3,4,5,)^T,\beta_1+\beta_2=(1,2,3,4,)^T$,则该方程组的通解为

____

12、当常数 $a=$______或______时，方程组 $\begin{cases} ax_1=0\\ ax_2+5x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$ 有非零解。

13、向量组 $\alpha_1=[1,1,0,0]^T,\alpha_2=[0,1,1,0]^T,\alpha_3=[0,0,1,1]^T,\alpha_4=[1,0,0,1]^T$ 的秩为______

14、$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=$______________

15．设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$______________

16．设 A 为四阶矩阵，且 A 的秩 $R(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(0,1,2,3)^T$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两不同的解向量，则 $Ax=0$ 的通解 $x=$___________

17．已知 A,B 都是三阶方阵，且 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$R(B)=2,$ 则 $R(AB)=$____

18．已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$_________，$\left|A^*\right|=$_________。

19．已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$，令 $A=\alpha_1\alpha_2^T$，求 $A^n=$_________。

20．已知三阶方阵 $A=(a_1,a_2,a_3),$ $R(A)=2$，且满足 $a_1=a_2-2a_3$，$a_1-a_2-a_3=b$，则 $Ax=b$ 的通解 $x=$_________。

三、解答

1．计算行列式：$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & a\\ -1 & 1 & 0 & b\\ 0 & -1 & 1 & c\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}$

2．已知$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，且$AX=B$，求$X$。

3.已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 7\\ 11\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\\ 8\end{pmatrix}$

求（1）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一最大无关组，（3）并把其余的向量用此最大无关组线性表示。

4．已知方程组 $\begin{cases}2x_1+4x_2 = 3\\ 2x_1+3x_2+ax_3=2\\ ax_2-9x_3=3\end{cases}$

(1)问a分别为何值时，方程有唯一解，无解，无穷多解？

(2)当方程组有无穷解时，求其通解。

5．计算行列式：$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$

6. 已知$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, 且$A^2-AB=E$, 求矩阵$B$.

7. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\\ 5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 5\\ 6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\\ 7\end{pmatrix}$, 求该向量组的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用此极大无关组线性表示。

8. 求非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$ 的通解.

9. 计算四阶行列式 D= $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

10. 若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，且 $AX=2X+B$，求矩阵 X

11. 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 线性相关，

求常数 k；并找出一组极大无关组以及用该极大无关组表示其余的向量。

12. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=4 \\ -x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$，当 λ 等于何值时，方程组（1）无解；（2）有惟一解；（3）有无穷多解，并求出此时方程组的通解.

13. 计算下列行列式 $\begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$

14. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

（1）、求 A^{-1}；（2）、已知 $AX=B$，求 X

15. 给定向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$,$\alpha_2=(1,-1,1,-1)^T$,$\alpha_3=(2,1,2,1)^T$

,$\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，并求该向量组的秩

16. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+\lambda x_3=3 \\ x_1+\lambda x_2+3x_3=2 \end{cases}$，当 λ 等于何值时，方程组(1)无解；(2)有惟一解；(3)有无穷多解，并求出此时方程组的通解.

17.计算 4 阶行列式 D $=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$

18.设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 $AX=2X+A$，求 X。

19.已知 $\alpha_1^T=(1,2,1,1)$， $\alpha_2^T=(0,1,2,-1)$， $\alpha_3^T=(0,1,1,0)$， $\alpha_4^T=(1,0,1,-1)$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的最大无关组，并把其余的向量用最大无关组线性表示。

20.已知方程组 $\begin{cases} -x_1-4x_2+x_3=1 \\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0 \\ ax_2-3x_3=3 \end{cases}$

(1)问 a 分别为何值时，方程有唯一解，无解，无穷多解？

(2)当方程组有无穷解时，求其通解。

21.已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关， $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3$， $\beta_2=\alpha_1+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关。

22.计算行列式：$D=\begin{vmatrix} a+1 & b & c & d \\ a & b+1 & c & d \\ a & b & c+1 & d \\ a & b & c & d+1 \end{vmatrix}$

23.已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AX=2X+B$，求 X。

24. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$， $\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的最大无关组，并把其余的向量用最大无关组线性表示。

25.已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3=3 \\ x_1+ax_2-2x_3=0 \end{cases}$

（1）问：当a分别为何值时，方程组有唯一解，无解，无穷多解？
（2）当方程组有无穷多解时，求其通解。

26.已知向量组a_1,a_2,a_3线性无关，且$b_1=a_1+a_2+a_3$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_3$，证明：向量组b_1,b_2,b_3线性无关。

答案

一、选择

1. B　2. D　3.B　4.C　5. B　6. C　7.B　8. B

9、D　10、B 11、D 12、A　13、C　14、D　15、B　16、A　17、D

18. B　19. A　20. D　21. C　22.B　23.C　24.D

二、填空

1. $\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$　2. 2　3. $k_1\xi_1+k_2\xi_2$,（k_1,k_2不全为零的任意实数）其中 ξ_1，ξ_2可取向量$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$中的任意两个

4. 6　5. $\xi=(-1,-1,3,-2)^{\mathrm{T}}$　6. 8　7. $(2,-3,1)^{\mathrm{T}}$

8、-36　9、6　10、-1　11、$X=k_1(2,3,4,5)^T+k_2(3,4,5,6)^T$（答案不唯一）

12、0 或-5　13、3　14、$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　15. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16. $x=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},k\in R$　17. $R(AB)=2$　18. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};-2$　19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

20. $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},k\in R$

三、解答

1. $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}=a+b+c+d$

2. $(A,E)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=(E,A^{-1})$ -

$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$ ----

$X=\begin{pmatrix}1&5\\0&3\\1&3\end{pmatrix}$------

3. $A=(\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \alpha_4\quad)=$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&3&0&1\\2&1&7&5\\3&2&11&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&3&3&3\\0&1&1&1\\0&2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=B$$

$R(A)=R(B)=2$ 易得 β_1,β_2 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的最大无关组，且

$\beta_3=3\beta_1+\beta_2,\beta_4=2\beta_1+\beta_2$，

于是 α_1,α_2 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的最大无关组，

且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$

4. $(A,b)=\begin{pmatrix}2&4&0&3\\2&3&a&2\\0&a&-9&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&4&0&3\\0&1&-a&1\\0&0&(a+3)(a-3)&3-a\end{pmatrix}$

（1）当 $a\neq 3$ 且 $a\neq -3$ 时，$R(A)=3,$ 方程组有唯一解。

当 $a=3$ 时，$R(A)=2<R(A,b)=3,$ 方程组无解。

当 $a=-3$ 时，$R(A)=R(A,b)=2<3,$ 方程组有无穷多解。

（2）当 $a=-3$ 时，

$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&0&6&-\frac{1}{2}\\0&1&-3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $x=k\begin{pmatrix}-6\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},k\in R$。

5. $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$=160

6. $A^2-E=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&1\\1&1&3\end{pmatrix}$-

$$(A,A^2-E)=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&3\\1&-1&0&0&0&1\\0&1&2&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&1&2\\0&1&0&-1&1&-3\\0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}=(E,A^{-1}(A^2-E))$$-

$AB=(A^2-E)\Rightarrow B$

$$=A^{-1}(A^2-E)=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&-3\\1&0&1\end{pmatrix}$$

7．解答：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}A=(\alpha_1,\quad\alpha_2,\quad\alpha_3,\quad\alpha_4\quad)=$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

该向量组的秩为 2 和一个极大线性无关组α_1,α_2，

$\alpha_3=2\alpha_2-\alpha_1$，$\alpha_4=3\alpha_2-2\alpha_1$

8．解答：$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得方程的特解$\eta^*=(\frac{5}{4},-\frac{1}{4},0,0)^{\mathrm T}$，

对应齐次方程的基础解系$\xi_1=(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1,0)^{\mathrm T}$，$\xi_2=(-\frac{3}{4},\frac{7}{4},0,1)^{\mathrm T}$

9．$$\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}\underline{\underline{c_1+c_2+c_3+c_4}}\begin{vmatrix}x&-1&1&x-1\\x&-1&x+1&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}r_2-r_1\\r_3-r_1x\\\underline{\underline{r_4-r_1}}\end{matrix}\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\0&0&0&-x\end{vmatrix}.$$

$$\underline{\underline{r_3\leftrightarrow r_2}}-x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\0&x&0&-x\\0&0&x&-x\\0&0&0&-x\end{vmatrix}=x^4.$$

10.

$\because AX = 2X + B \quad \therefore (A-2E)X = B \quad$ 而$A-2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

（法一）

$\therefore |A-2E| = -3 \neq 0 \quad \therefore (A-2E)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore X = (A-2E)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & -4 \end{pmatrix}$

（法二）

$$(A-2E, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-\frac{1}{3})]{r_1 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 10/3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -10/3 & -4 \end{pmatrix}$$

$\therefore X = (A-2E)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & -4 \end{pmatrix}$

11. 解：$\because \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，

$$\therefore |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & k & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k-8 & -11 \\ 0 & -7 & -7 \end{vmatrix} = -7k-21=0$$

$\therefore k=-3.$

$$\therefore (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & -11 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2.$

$\therefore$ 极大无关组为α_1,α_2，且$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$.

12. 对方程组的增广矩阵作初等变换

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & \lambda+1 & 1+\lambda & \lambda^2+4 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda^2+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{\lambda+1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1+\lambda)(4-\lambda)}{2} & \lambda(\lambda-4) \end{pmatrix}$$

可见 1. 当$\lambda=-1$时，$R(\overline{A})=3, R(A)=2$方程组无解；

2．当$\lambda\neq-1$且$\lambda\neq-4$时，$R(\overline{A})=R(A)=3$，方程组有唯一解；

3．当$\lambda=4$，$R(\overline{A})=R(A)=2<3$，方程组有无穷多解。………

$$有\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的方程组为$\begin{cases} x_1=-3x_3 \\ x_2=4-x_3 \end{cases}$，令$x_3=0$，得到非齐次方程组的特解为$\eta=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$，

令$x_3=1$时，对应的齐次方程组的基础解系为$\xi=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

则得到通解为$X=\eta+k\xi,k\in R$.

13.

$$原式=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \dots & x+(n-1)a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}=(x-a)^n+na(x-a)^{n-1}$$

14.（1）. $A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ……6 分

(2). $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

15. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见$R\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=3$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是一个最大无关组

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix}=-(\lambda^2+\lambda-6)=-(\lambda+3)(\lambda-2)$，

所以 $\lambda\neq-3$,且$\lambda\neq 2$时有唯一解。

λ＝－3 时 $(A,b)\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，无解

λ＝2 时 $(A,b)\sim\begin{pmatrix}1&0&-5&0\\0&1&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 有无穷多个解，

对应的方程组为$\begin{cases}x_1=5x_3\\x_2=-4x_3+1\end{cases}$，令$x_3=0$，得到非齐次方程组的特解为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

，令$x_3=1$时，对应的齐次方程组的基础解系为$\xi=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$通解为 X＝$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$＋$c\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$

17．解答：

$$D=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10+a&2&3&4\\10+a&2+a&3&4\\10+a&2&3+a&4\\10+a&2&3&4+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10+a&2&3&4\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}$$

$=(10+a)a^3$

18. $(A-2E)X=A$，又$(A-2E)=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$，知$(A-2E)$可逆，

$$X=(A-2E)^{-1}A$$

$$(A-2E,\quad A)=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&0&-1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&-2\\0&1&0&-2&1&2\\0&0&1&2&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$=\left(E,\quad (A-2E)^{-1}A\right)$$

即$X=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$

19.解答：令

$$A=\left(\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&1&1&0\\1&2&1&1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\right)$$

$=B$

$R(A)=R(B)=3,$ 易得 β_1,β_2,β_3 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的最大无关组，且

$\beta_4=\beta_1+2\beta_2-4\beta_3$，

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的最大无关组，

且 $\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3$

20.解答：$(A,b)=\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\1&3&a+1&0\\0&a&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-1&-1\\0&1&-a-2&-1\\0&0&(a+3)(a-1)&a+3\end{pmatrix}$

（1）当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -3$ 时，$R(A)=3,$ 方程组有唯一解。

当 $a=1$ 时，$R(A)=2<R(A,b)=3,$ 方程组无解。

当 $a=-3$ 时，$R(A)=R(A,b)=2<3,$ 方程组有无穷多解。

（2）当 $a=-3$ 时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $x=k\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},k\in R$

21.证明：设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$

$\Rightarrow(x_2+x_3)\alpha_1+(x_1+x_3)\alpha_2+(x_1+x_2-x_3)\alpha_3=0$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\Rightarrow\begin{cases}x_2+x_3=0\\x_1+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0\Rightarrow\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关

22.答：D $=\begin{vmatrix}1+a&b&c&d\\a&1+b&c&d\\a&b&1+c&d\\a&b&c&1+d\end{vmatrix}=a+b+c+d+1$

23.答：$(A-2E)X=B$，又 $(A-2E)=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$，知 $(A-2E)$ 可逆，

$X=(A-2E)^{-1}B$

$$(A-2E,\quad B)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -3 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=(E,\quad (A-2E)^{-1}B)$$

即 $X=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

24. 答：令 $A=(\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \alpha_4\quad)\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=B$

$R(A)=R(B)=2,$ 易得 β_1,β_2 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的最大无关组，且

$\beta_3=2\beta_1-\beta_2;\beta_4=6\beta_1-5\beta_2$，

于是 α_1,α_2 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的最大无关组，

$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2;\alpha_4=6\alpha_1-5\alpha_2$

25. 答：$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & 3\\ 1 & a & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3\end{pmatrix}$

（1）当 $a\neq -1$ 且 $a\neq 3$ 时，$R(A)=3,$ 方程组有唯一解。

当 $a=-1$ 时，$R(A)=2<R(A,b)=3,$ 方程组无解。

当 $a=3$ 时，$R(A)=R(A,b)=2<3,$ 方程组有无穷多解

（2）当 $a=3$ 时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $x=k\begin{pmatrix}-7\\ 3\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix},k\in R$

26. 证明：设 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$

$$\Rightarrow (x_1\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_1+x_2+x_3)\alpha_3=0$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_1+x_2=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0\Rightarrow b_1,b_2,b_3 \text{ 线性无关}$$