§4.2 幂级数

- 1. 幂级数的概念
- 2. 收敛定理
- 3. 收敛圆与收敛半径
- 4. 收敛半径的求法
- 5. 幂级数的运算和性质

1. 幂级数的概念

定义 设复变函数列：$\{f_n(z)\}\quad z\in D,\quad n=1,2,\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \qquad (1)$$

--- 称为复变函数项级数

级数的最前面 n 项的和

$$s_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

--- 级数的部分和

若$\forall z_0\in D\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)=s(z_0)$，称级数(1)在$z_0$收敛，

其和为$s(z_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)$不存在，称级数(1)发散，

若级数 (1) 在 D 内处处收敛，其和为 z 的函数

$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$--- 级数 (1) 的和函数

特殊情况，在级数 (1) 中 $f_n(z) = c_n(z - z_0)^n$ 得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (2) \qquad \text{当} z_0 = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \quad (3)$$

称为幂级数

$\because$ 在(2)中令 $z - z_0 = \xi$ $\quad (2) \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} c_n \xi^k$

$\therefore$ 研究级数(3)并不失一般性。

2. 收敛定理

同实变函数一样，复变幂级数也有所谓的收敛定理：

定理 1 (阿贝尔 (Abel) 定理)

(1)若级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$在$z=z_0(\neq 0)$收敛,则对满足$|z|<|z_0|$的$z$,级数必绝对收敛.

(2)若级数在$z=z_0$发散,则对满足$|z|>|z_0|$的z,级数必发散.

证明 (1)$\because \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$，即

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，$\ni n > N$，恒有$\left|c_n z_0^n\right| < \varepsilon$

取$M = \max\left\{\varepsilon, \left|c_0\right|, \left|c_1 z_0\right|, \left|c_2 z_0^2\right|, \cdots, \left|c_N z_0^N\right|\right\}$

故$\left|c_n z_0^n\right| < M, n = 0,1,2,\cdots$

若$|z| < |z_0|$，则$\dfrac{|z|}{|z_0|} = q < 1$　$\left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n\right| \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n$,

由于$\sum_{n=0}^{+\infty} Mq^n$收敛,由比较判别法得$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|c_n z^n\right|$收敛,

$\therefore \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛。

(2) 用反证法，设$\exists z_1, \ni |z_1| > |z_0|$，有$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_1^n$收敛，

由(1)知$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$收敛与假设矛盾，得证！

3. 收敛圆与收敛半径

由 *Abel* 定理，幂级数的收敛范围不外乎下述三种情况：

(*i*) 若对所有正实数都收敛，级数 (3) 在复平面上处　处收敛。

(*ii*) 除 $z=0$ 外，对所有的正实数都是发散的，这时，级数 (3) 在复平面上除 $z=0$ 外处处发散。

$(iii)\exists\alpha>0$, 使得 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\alpha^n$ 收敛,

$\exists\beta>0$, 使得 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\beta^n$ 发散.

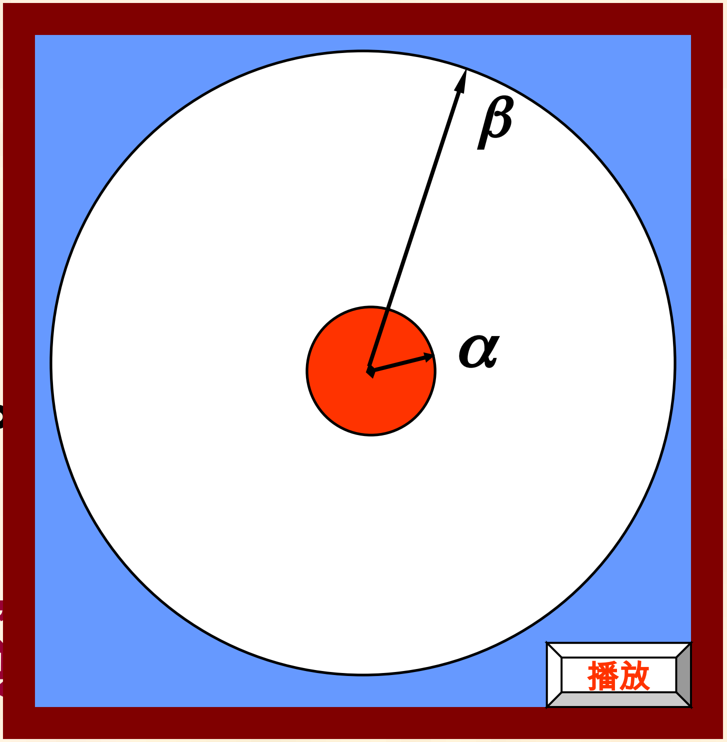
由 $Abel$ 定理，在圆周 c_α：$|z|=\alpha$ 内，级数(3)收敛；

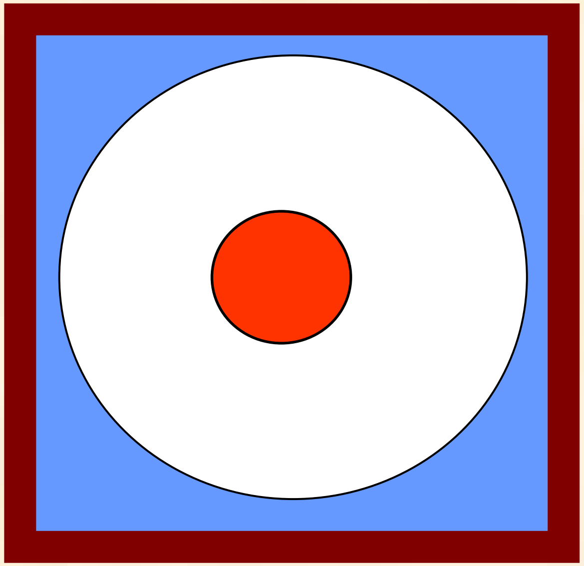
在圆周 c_β：$|z|=\beta$ 外，级数(3)发散. 显然，$\alpha<\beta$

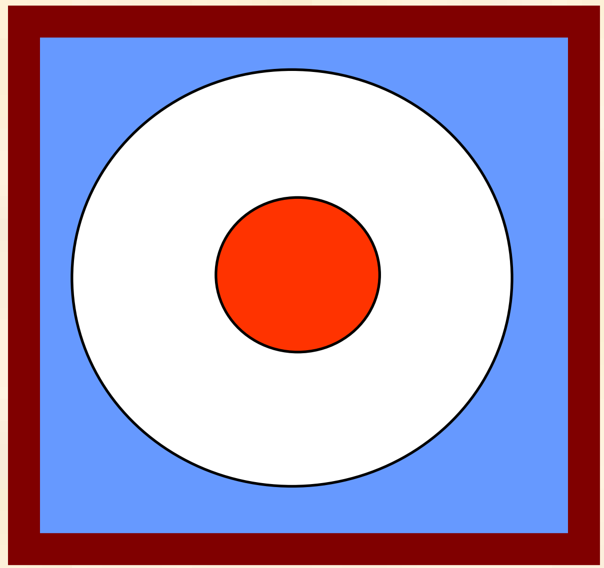
否则，级数 (3) 将在 α 处发散。

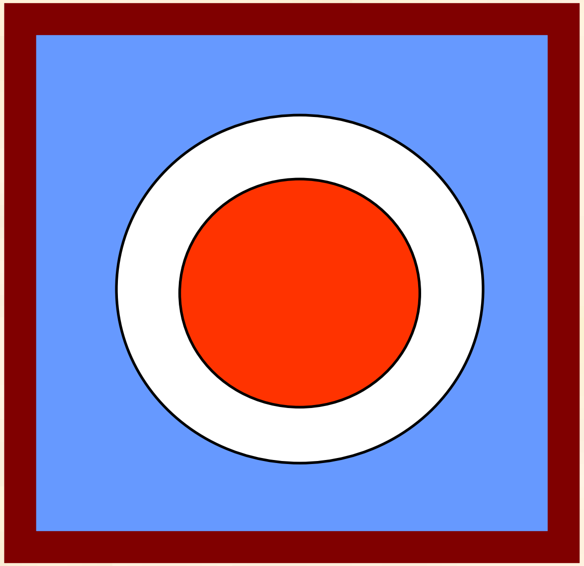
将收敛部分染成红色，发散部分染成蓝色，α 逐渐变大，在 c_α 内部都是红色，β 逐渐变

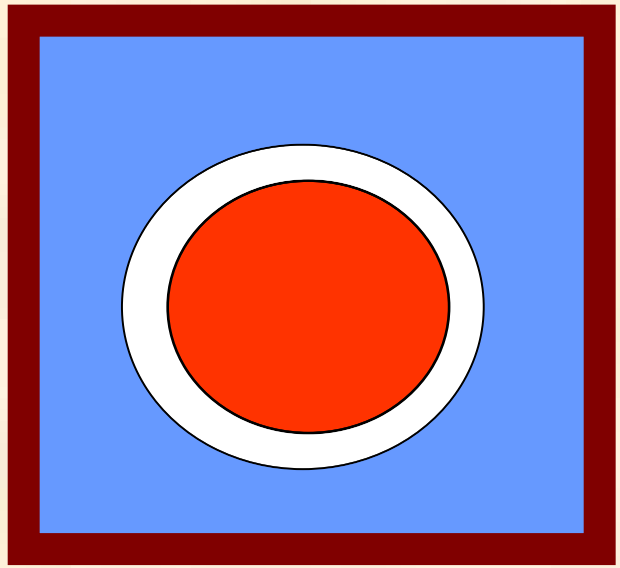
小，在 c_β 外部都是蓝色，红、蓝色不会交错。故一定 $\exists\ \boxed{c_R\ |z|=R}$，为红、蓝两色的分界线。

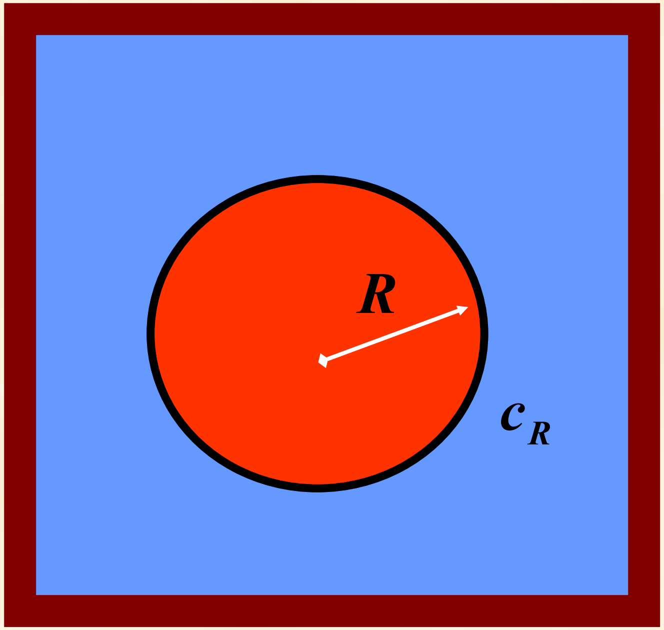












R
c R

定义 这个红蓝两色的分界圆周 c_R 叫做幂级数的收敛圆；这个圆的半径 R 叫做幂级数的收敛半径。

□ (i) 幂级数在收敛圆内部收敛，在收敛圆外部发散，在圆周上可能收敛可能发散，具体问题要具体分析。

(ii) 幂级数 (3) 的收敛范围是以 0 为中心，半径为 R 的圆域；幂级数 (2) 的收敛范围是以 z_0 为中心，半径为 R 的圆域.

4. 收敛半径的求法

关于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (3)的收敛半径求法，有

定理 2（比检法） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \rho$，则 $R = \begin{cases} 1/\rho & 0<\rho<+\infty \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$

证明 $(i)\rho \neq 0, \because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right||z| = \rho|z|$

当$\rho|z|<1$时，即$|z|<\dfrac{1}{\rho}$时，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$绝对收敛；

当$\rho|z|>1$时，即$|z|>\dfrac{1}{\rho}$时，$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$发散，

以下证：当$|z|>\frac{1}{\rho}$时，$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$也发散.

用反证法，设在$|z|=\frac{1}{\rho}$外有一点z_0，$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z_0^n$收敛，

再取一点z_1，满足$\frac{1}{\rho}<|z_1|<|z_0|$，由$Abel$定理得：

$\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n z_1^n|$收敛，矛盾！ $\therefore \sum_{n=0}^{+\infty}c_n z_0^n$**发散，即**

当$|z|>\frac{1}{\rho}$时，$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$发散，故$R=\frac{1}{\rho}$.

(ii)若$\rho=0$时，对$\forall z$都有$\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n z^n|$收敛

$\therefore \sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$**在复平面上处处收敛，故**$R=+\infty$;

(iii)当$\rho = +\infty$时，除$z = 0$外，对一切z, 有

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| c_n z^n \right|$发散，从而, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$也发散.

否则，如果有一点$z_0 \neq 0$, $s.t.$ $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0{}^n$收敛, 则

$\exists z_1$, 满足$|z_0| > |z_1| \neq 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| c_n z_1{}^n \right|$收敛，矛盾！ 故$R = 0$.

定理 3（根检法） 若$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \rho$，则 $R = \begin{cases} 1/\rho & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$

定理2 (比检法)

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \rho$，则 $R = \begin{cases} 1/\rho & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$

定理3 (根检法)

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \rho$，则 $R = \begin{cases} 1/\rho & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$

例 1 ★ 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

的收敛范围及和函数。

解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 \quad \therefore R = 1$

又$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$

$\because$ 当$|z| < 1$时 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0, \therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-z}.$

$\because$ 当$|z| = 1$时 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n \neq 0, \therefore$ 级数发散.

综上 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} \text{收敛,且和函数为 } \dfrac{1}{1-z} & \text{当} |z| < 1\text{时;} \\ \text{发散} & \text{当} |z| \quad 1\text{时.} \end{cases}$

例 2　求下列幂级数的收敛半径并讨论收敛圆周上的情形：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}(p>0);\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n;\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z}{\ln in})^n.$$

解　(1) $\because\ \lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^p=1 \quad \therefore R=1$

$\boxed{p=1}$　当 $z=1$ 时，　级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，　该级数发散

当 $z=-1$ 时，　级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，　该级数收敛

$\boxed{p=2}$ 在圆周 $|z|=1$ 上，$\because\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，

$\therefore$ 该级数在收敛圆上是处处收敛的。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\text{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n$;

(2) $\because\ c_n=\text{ch}\frac{i}{n}=\frac{1}{2}(e^{\frac{i}{n}}+e^{-\frac{i}{n}})$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{n}+i\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}-i\sin\frac{1}{n}\right]=\cos\frac{1}{n}$$

$$\because\ \lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\cos\frac{1}{n+1}\Big/\cos\frac{1}{n}\right|=1\quad\therefore R=1$$

在圆周$|z-1|=1$上，$\sum_{n=1}^{\infty}(\text{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{n})e^{in\theta}$

$\because\ \lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})e^{in\theta}\neq0,\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(\text{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n$发散。

综上 当$|z-1|<1$时，该级数收敛，

当$|z-1|$ 1时，该级数发散。

$$(3)\because\ \ln(in)=\ln|in|+i\arg(in)=\ln n+\frac{\pi}{2}i$$

其中 $|\ln in|=\sqrt{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

$$\therefore |c_n|=\frac{1}{|\ln in|^n}=\left[1\Big/\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\frac{1}{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]^{\frac{n}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=0$

$\therefore R=+\infty$

故该级数在复平面上是处处收敛的 .

Remark:

一个幂级数在其收敛圆周上的敛散性有如下三种可能：

（ 1 ）处处发散；

（ 2 ） 处处收敛；

（ 3 ）既有收敛点，又有发散点。

5. 幂级数的运算和性质

- 代数运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) \quad R = r_1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = g(z) \quad R = r_2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n = f(z) \pm g(z) \quad |z| < R$$

--- 幂级数的加、减运算

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0) z^n$$

$= f(z) g(z), \quad |z| < R$ 　　　　其中：$R = \min(r_1, r_2)$

--- 幂级数的乘法运算

设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \quad |z|<r$,

$g(z)$在$|z|<R$内解析，且$|g(z)|<r$

$$\Rightarrow f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n \quad |z|<R$$

--- 幂级数的代换（复合）运算

幂级数的代换运算在函数展成幂级数中很有用！

例 3　把$\dfrac{1}{z-b}$表成形如$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$的幂级数，

这里，复常数$b\neq a$.

解
$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\boxed{\dfrac{z-a}{b-a}}}=\frac{1}{1-g(z)}\left(-\frac{1}{b-a}\right)$$

代换

解 $$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\boxed{\dfrac{z-a}{b-a}}}=\frac{1}{1-g(z)}\left(-\frac{1}{b-a}\right)$$

代换

展开

$$\because \frac{1}{1-g(z)}=1+g(z)+[g(z)]^2+\cdots+[g(z)]^n+\cdots \quad ,|g(z)|<1$$

$$=1+\frac{z-a}{b-a}+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^2+\cdots+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^n+\cdots \quad ,|z-a|<|b-a|=R$$

还原

$$\therefore \frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-g(z)}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}(z-a)$$

$$-\frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2-\cdots\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots \quad |z-a|<R$$

❑ 分析运算

定理 4 设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z) \quad |z| < R$

$\Rightarrow (i) \quad f(z)$在$|z| < R$内解析.

$$(ii) \quad f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad |z| < R$$

--- 幂级数的逐项求导运算

$$(iii) \quad \int_c f(z) dz = \int_c \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_c z^n dz$$

或 $$\int_0^z f(\varsigma) d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} \qquad |z| < R, C \subset |z| < R$$

--- 幂级数的逐项积分运算

§4.3 泰勒 (*Taylor*) 级数

- 1. 泰勒展开定理
- 2. 展开式的唯一性
- 3. 简单初等函数的泰勒展开式

1. 泰勒 (*Taylor*) 展开定理

由 §4.2 幂级数的性质知：一个幂级数的和函数在它的收敛圆内部是一个解析函数。

现在研究与此相反的问题：
一个解析函数能否用幂级数表达？
(或者说，一个解析函数能否展开成幂级数？解析函数在解析点能否用幂级数表示？)

以下定理给出了肯定回答：
任何解析函数都一定能用幂级数表示。

定理（泰勒展开定理）

设$f(z)$在区域D内解析，$z_0 \in D$，R为z_0到D的边界上各点的最短距离 $\Rightarrow$ 当$|z-z_0|<R$时，

$$f(z)=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n} \qquad (1)$$

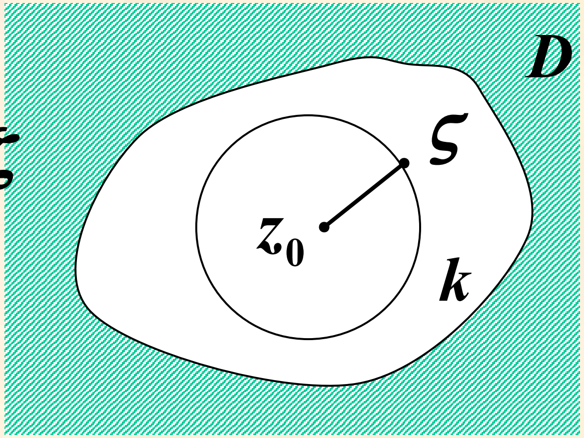
$f(z)$在z_0处的$Taylor$级数

其中：$c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) \qquad n=0,1,2,\cdots$

分析：

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_k \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

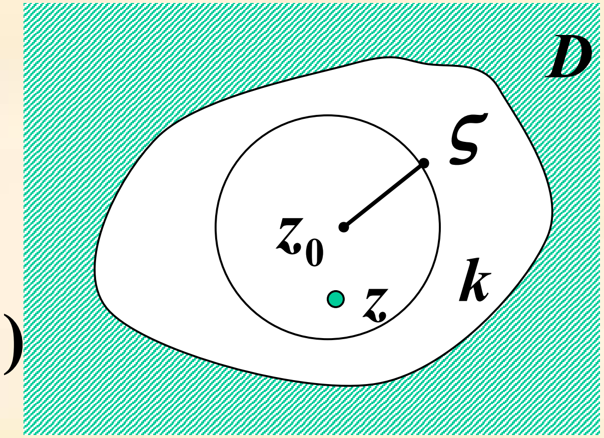
$k:|\zeta-z_0|=r$ 　　代入 (1) 得



$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z-z_0)^n$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \right) d\zeta \quad 1)$$



又$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_k \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad 2)$

比较1),2)有 ,$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \ (*)$

$$\because \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = q < 1,$$

注意到 $\dfrac{1}{\zeta-z} = \dfrac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = \dfrac{1}{\zeta-z_0}\dfrac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}},$

$$\therefore \frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0}\left[1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\cdots\right](2)$$

故 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \quad \text{---(*)}$$ 得证！

证明 设$k:\left|\xi - z_0\right| = r, \{\xi \| \xi - z_0| \le r\} \subset D,$

z为k内任一点,由$Cauchy$积分公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_k \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \qquad \because \left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = q < 1,$$

$$\therefore \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0}[1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + (\frac{z - z_0}{\xi - z_0})^2 + \cdots$$

$$+ (\frac{z - z_0}{\xi - z_0})^n + \cdots] \quad (3)$$

两端乘以$\dfrac{f(\zeta)}{2\pi i}$,沿着k逐项积分得,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_k \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_k \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta$$

$$+\frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_k \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta+\cdots$$

$$+\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_k \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta+\cdots$$

$$=f(z_0)+f'(z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots(4)$$

$--$函数$f(z)$在z_0处的$Talor$级数

级数(4)的收敛范围是以z_0为中心，r为半径的圆域$\left|\zeta - z_0\right| < r$,圆$k$的半径$r$可以任意增大，只要圆$k$及其内部包含在$D$内即可,$\therefore f(z)$在解析点$z_0$处的$Taylor$级数收敛半径至少等于从$z_0$到$D$的边界上各点的最短距 离.证毕!

(1) 若$f(z)$有奇点, 那么$f(z)$在解析点z_0的$Talor$展开式的收敛半径R等于从z_0到$f(z)$的最近的一个奇点α之间的距离,即,

$$R=\left|z_0-\alpha\right|$$

(2) α在收敛圆上,这是因为$f(z)$在收敛圆内解析,所以奇点α不可能在收敛圆内.

又$\because$ 奇点α不可能在收敛圆外, 不然的话, 收敛半径还可以扩大,因此, 奇点α只能在收敛圆周上.

2. 展开式的唯一性

利用泰勒级数可把解析函数展开成幂级数，这样的展开式是否唯一？

结论 解析函数展开成幂级数是唯一的，就是它的 *Taylor* 级数。

事实上，设 $f(z)$ 用另外的方法展开为幂级数：

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$

则 $f(z_0)=a_0$，再由幂级数的逐项求导性质得，

$$f'(z)=a_1+2a_2(z-z_0)+\cdots+na_n(z-z_0)^{n-1}+\cdots\Rightarrow f'(z_0)=a_1$$

$\cdots$，依此类推得，$a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\quad n=0,1,2,\cdots$

由此可见，任何解析函数展开成幂级数就是 *Talor* 级数，因而是唯一的。

当$z_0 = 0$时，*Taylor*级数为

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots$$

函数展开成 Taylor 级数的方法：

- **代公式 --- 直接法**
- **由展开式的唯一性，运用级数的代数运算、分析运算和 已知函数的展开式来展开 --- 间接法**

3. 简单初等函数的泰勒展开式

例 1 求$f(z)=e^z, \sin z, \cos z$在$z=0$的*Talor*展开式.

解 $\because \ (e^z)^{(n)}\Big|_{z=0} = e^z\Big|_{z=0} = 1 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$\therefore e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$\because \ e^z$在复平面上解析

$\therefore$该级数的收敛半径$R=+\infty$.

$$\because \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(zi)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-zi)^n}{n!}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2i^{2k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)!!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)!!}$$

$$\therefore \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)!!}$$

又 $\cos z = (\sin z)'$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$\because \sin z, \cos z$在全平面上解析 ,$\therefore$ 它们的半径$R = \infty$

上述求 sinz, cosz 展开式的方法即为间接法.

例 2 把下列函数展开成 z 的幂级数：

$$(1)\ f(z)=\frac{1}{1+z}\quad (2)\ f(z)=\frac{1}{(1+z)^2}\quad (3)\ f(z)=\ln(1+z)$$

解 $(1)\because \dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \quad |z|<1$

$$\therefore \frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=1-z+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \quad |z|<1$$

(2) 由幂级数逐项求导性质得：

$$\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{d}{dz}\left[-\frac{1}{1+z}\right]=\frac{d}{dz}\left[-1+z-z^2+\cdots+(-1)^{n-1}z^n+\cdots\right]$$

$$=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots \quad |z|<1$$

(3)在收敛圆$|z|=1$内任意取一条从$0\to z(|z|<1)$的路径c，将(1)的展开式两边沿c逐项积分得：

$$\int_0^z\frac{dz}{1+z}=\int_0^z dz-\int_0^z zdz+\cdots+\int_0^z(-1)^n z^n dz+\cdots$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{3}z^3-\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots \quad |z|<1$$

(1) 另一方面，因 ln(1+z) 在从 z=-1 向左沿负实轴剪开的平面内解析， ln(1+z) 离原点最近的一个奇点是 -1,∴ 它的展开式的收敛范围为$|z|<1$.

(2)在实数域中

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

为什么它的收敛半径$R=1$,在实数域中的不容易看清楚,在复数域中容易看出$\because \dfrac{1}{1+z^2}$有两个奇点

$z=\pm i, \therefore R=1$

例 3 求幂函数 $(1+z)^{\alpha}(\alpha$ 为复数$)$ 的主值

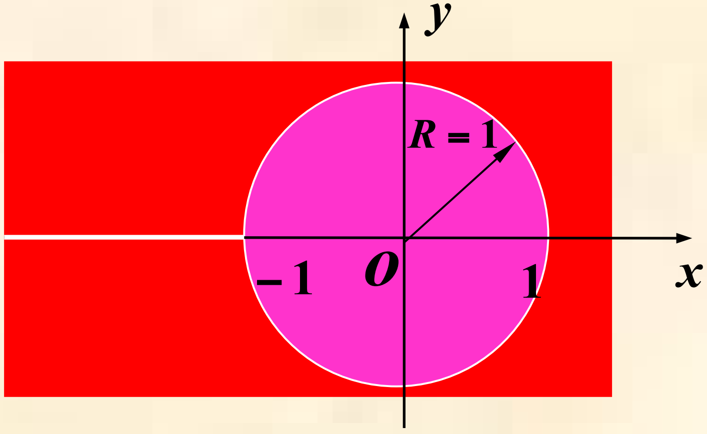
$$f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)},\quad f(0)=1$$

在 $z=0$ 点的 Taylor 展开式.

解 显然, $f(z)$在复平面中割去从点 -1 沿负实轴向左的射线的区域内解析. 因此在 $|z|<1$ 内, $f(z)$可展开为 z 的幂级数.

根据复合函数求导法则,

按照直接方法展开如下:



$$f'(z)=\alpha e^{\alpha\ln(1+z)}\frac{1}{1+z}=\alpha e^{(\alpha-1)\ln(1+z)},$$

$$f''(z)=\alpha(\alpha-1)e^{(\alpha-2)\ln(1+z)},$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\ln(1+z)},$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

令 $z=0$, 有

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\alpha,\quad f''(0)=\alpha(\alpha-1),\quad\cdots,$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\quad\cdots$$

于是

$$(1+z)^{\alpha}$$

$$=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^{3}$$

$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^{n}+\cdots$$

$$\left(|z|<1\right).$$

例 4 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ 在 $z_0=1$ 处展开成 Taylor 级数，并指出该级数的收敛范围.

解

$$f(z)=\frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{z+1}=1-\frac{1}{(z-1)+2}=1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}},$$

当 $\left|\dfrac{z-1}{2}\right|<1$, 即 $|z-1|<2$ 时，

$$f(z)=1-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

定理（解析函数在一点的泰勒展开定理）

(1) 函数$f(z)$在点z_0解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在z_0的某一邻域内可展成幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

(2) 函数$f(z)$在区域D内解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在D内可展成幂级数.

小结：$f(z)$在点z_0解析

(1) $f(z)$在点z_0的某一邻域内可导。

(2) $f(z)$的实部和虚部在点 z_0的某一邻域内有连续偏 导数且满足$C-R$方程。

(3) $f(z)$在点z_0的某一邻域内连续且沿 邻域内的任一条正向封闭路线的积分为 0。

(4) $f(z)$在点z_0的某一邻域内可展成幂 级数。

附：常见函数的 Taylor 展开式

$$(1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$(3)\ \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

$$(|z| < 1)$$

$$(4)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

$$(|z| < \infty)$$

$$(5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad (|z| < \infty)$$

$$(6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

$$(7)\ (1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \qquad (|z| < 1)$$

第五周周五作业

1、书面作业

习题四　8(1, 3, 5) 、 9 (1, 2, 3, 4,6)

2、课后作业

(1) 预习第四章第四节“洛朗级数”；

(2) 完成练习册第三章