- 随机变量
- 离散型随机变量的概率分布
- 随机变量的分布函数
- 连续型随机变量的概率密度
- 随机变量的函数的分布

返回主目录

§1 随机变量

一．随机变量的概念

例 1

袋中有 3 只黑球，2 只白球，从中任意取出 3 只球，观察取出的 3 只球中的黑球的个数．

我们将 3 只黑球分别记作 1 ，2 ，3 号，2 只白球分别记作 4 ，5 号，则该试验的样本空间为

$$S=\left\{\begin{array}{lll}(1,\ 2,\ 3) & (1,\ 2,\ 4) & (1,\ 2,\ 5) \\ (1,\ 3,\ 4) & (1,\ 3,\ 5) & (1,\ 4,\ 5) \\ (2,\ 3,\ 4) & (2,\ 3,\ 5) & (2,\ 4,\ 5) \\ (3,\ 4,\ 5) & & \end{array}\right\}$$

返回主目录

例 1（续）

我们记取出的黑球数为 X ，则 X 的可能取值为 1 ， 2 ， 3 .

因此， X 是一个变量 .

X 的取值情况可由下表给出：

§1 随机变量

例 1（续）

样本点	黑球数 X	样本点	黑球数 X
(1, 2, 3)	3	(1, 4, 5)	1
(1, 2, 4)	2	(2, 3, 4)	2
(1, 2, 5)	2	(2, 3, 5)	2
(1, 3, 4)	2	(2, 4, 5)	1
(1, 3, 5)	2	(3, 4, 5)	1

返回主目录

例 1（续）

由上表可以看出， X 取什么值依赖于试验结果，即该随机试验的每一个结果都对应着变量 X 的一个确定的取值，因此变量 X 是样本空间 上的实值单值函数：

$$X = X(\omega) \qquad (\omega \in S)$$

由于试验结果具有随机性，所以 X 的取值带有随机性。故，我们称 X 为随机变量.

例 1（续）

- **我们定义了随机变量后，就可以用随机变量的取值情况来刻划随机事件．例如**

$$\{X = 2\} = \{\, \omega : X(\omega) = 2 \,\}$$

表示取出 2 个黑球这一事件，即

$$\{X = 2\} = \{\, (1,2,4)\,,(1,2,5)\,,(1,3,4)\,,\\ (1,3,5)\,,(2,3,4)\,,(2,3,5)\,\}.$$

- **又如** $\{X \quad 2\}$

表示至少取出 2 个黑球这一事件，等等．

返回主目录

随机变量的定义

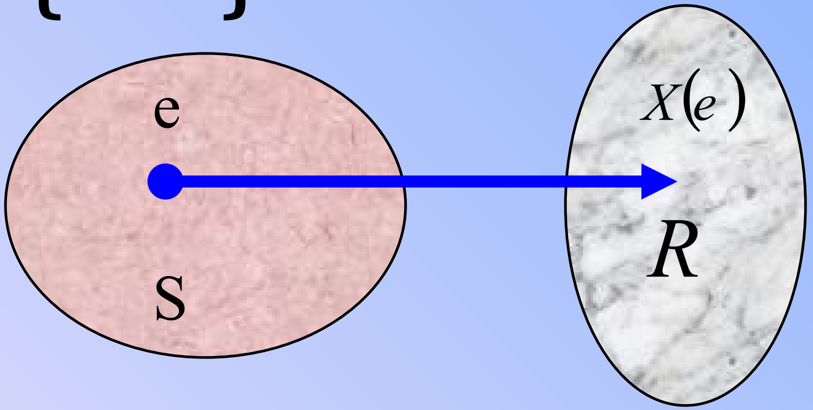
设 E 是一个随机试验，S 是其样本空间．我们称样本空间 S 上的实值单值函数

$$X = X(e) \qquad (e \in S)$$

为一个随机变量，如果对于任意的实数 x，集合

$$\{e : X(e) \le x\} = \{X \le x\}$$

都是随机事件．



说 明

(1) 随机变量常用大写的英 文字母

$$X、Y、Z、\cdots$$

或希腊字母

$$\xi、\eta、\varsigma、\cdots$$

等来表示 .

(2) 对于随机变量，我们常 常关心的是它的取值 .

(3) 我们设立随机变量，是要用随机变量的取值来描述随机事件 .

例 2

掷一颗骰子，令：

X：出现的点数．

则 X 就是一个随机变量．它的取值为 1，2，3，4，5，6．

$$\{X \le 4\}$$

表示掷出的点数不超过 4 这一随机事件；即

$$\{X \le 4\} = \{1,2,3,4\}.$$

$$\{X\text{取偶数}\}$$

表示掷出的点数为偶数这一随机事件．

返回主目录

例 3

一批产品有 50 件，其中有 8 件次品，42 件正品．现从中取出 6 件，令：

X ：取出 6 件产品中的次品数．

则 X 就是一个随机变量．它的取值为 0 ，1 ，2 ，… ，6 ．

$$\{X = 0\}$$

表示取出的产品全是正品这一随机事件；

$$\{X \quad 1\}$$

表示取出的产品至少有一件次品这一随机事件．

返回主目录

例 4

上午 8:00 ~ 9:00 在某路口观察，令：

Y ：该时间间隔内通过的汽车数．

则 Y 就是一个随机变量．它的取值为 0 ，1 ，… ．

$$\{Y < 100\}$$

表示通过的汽车数小于 100 辆这一随机事件；

$$\{50 < Y \le 100\}$$

表示通过的汽车数大于 50 辆但不超过 100 辆这一随机事件．

注意 Y 的取值是可列无穷个！

例 5

观察某生物的寿命（单位：小时），令：

Z ：该生物的寿命．

则 Z 就是一个随机变量．它的取值为所有非负实数．

$$\{Z \le 1500\}$$

表示该生物的寿命不超过 1500 小时这一随机事件．

$$\{Z > 3000\}$$

表示该生物的寿命大于 3000 小时这一随机事件．

注意 Z 的取值是不可列无穷个！

返回主目录

例　6

掷一枚硬币，令：

$$X=\begin{cases}1 & \text{掷硬币出现正面}\\ 0 & \text{掷硬币出现反面}\end{cases}$$

则 X 是一个随机变量 .

说　明

在同一个样本空间上可以定义不同的随机变量 .

例 7

掷一枚骰子，在例2中，我们定义了随机变量 X 表示出现的点数．我们还可以定义其它的随机变量，例如我们可以定义：

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{出现偶数点} \\ 0 & \text{出现奇数点} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{点数为6} \\ 0 & \text{点数不为6} \end{cases}$$

等等．

§2 离散型随机变量

一．离散型随机变量的概念与性质

离散型随机变量的定义

如果随机变量 X 的取值是有限个或可列无穷个，则称 X 为离散型随机变量．

返回主目录

离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为

$$x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_k, \quad \cdots$$

并设

$$P\{X = x_k\} = p_k \qquad (k = 1, \ 2, \ \cdots)$$

则称上式为离散型随机变量 X 的分布律．

离散型随机变量 X 的分布律还可写成矩阵的形式．

X	x_1	x_2	$\cdots,$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots,$	p_k	$\cdots$

返回主目录

说　明

1. **离散型随机变量可完全由其分布律来刻划．即离散型随机变量可完全由其的可能以及取这些值的概率唯一确定．**

2．$\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\} \cup \cdots = S$

且 $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \Phi \quad ,(i \neq j)$

离散型随机变量分布律的性质：

(1)．对任意的自然数 k，有

$$p_k \quad 0$$

(2)．$\sum_k p_k = 1$

返回主目录

例 1

从 1 ~ 10 这 10 个数字中随机取出 5 个数字，令：

X ：取出的 5 个数字中的最大值．

试求 X 的分布律．

解： X 的取值为 5 ， 6 ， 7 ， 8 ， 9 ， 10 ． 并且

$$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^{4}}{C_{10}^{5}}\qquad(k=5,\ 6,\ \cdots,\ 10)$$

具体写出，即可得 X 的分布律：

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

返回主目录

例 2

将 1 枚硬币掷 3 次，令：

X ：出现的正面次数与反面次数之差 .

试求 X 的分布律 .

解： X 的取值为 -3 ，-1 ，1 ，3 . 并且

X	-3	-1	1	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

例3 （已知分布律，求随机变量落在某区间上的概率）

设离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

则

$$P\{X \le 2\} = P\{\{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\}\}$$

$$= P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

返回主目录

例 3（续）

$$P\{X>3\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{4}{16}\quad=\frac{7}{16}$$

$$P\{0.5\le X<3\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\quad=\frac{4}{16}$$

返回主目录

例 4 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

试求常数c.

解：由随机变量的性质，得

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

该级数为等比级数，故有

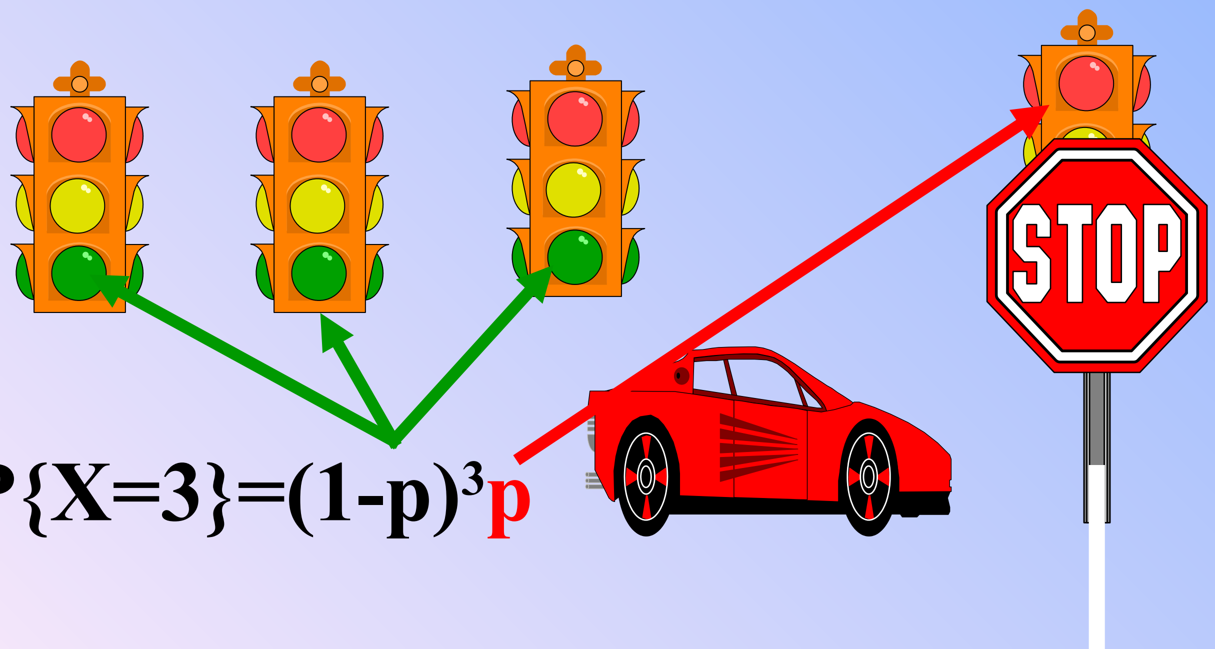
$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=c\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

所以 $c=3$.

返回主目录

例 5

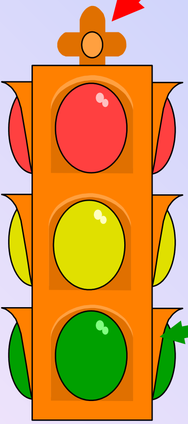
设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以 1/2 的概率允许或禁止汽车通过．以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的盏数，求 X 的分布律.(信号灯的工作是相互独立的).



$$P\{X=3\}=(1-p)^3p$$

例 5(续)

解：以 p 表示每盏信号灯禁止汽车通过的概率，则 X 的分布律为：



X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

或写成 $P\{X=k\}=(1-p)^k p$ ， $k=0,1,2,3$

$$P\{X=4\}=(1-p)^4$$

返回主目录

例 5（续） 以 p = 1/2 代入得：

X	0	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

返回主目录

n 重贝努里概型

1 、贝努里（ Bernoulli ）试验

如果随机试验 E 只有两个结果，则称 E 为 Bernoulli 试验

一般地，我们将这两个结果记作A与$\overline{A}$，分别称为“成功”与“失败”.

Bernoulli 试验的例子

掷一枚硬币，只有“出现正面”与“出现反面”两种结果，因此“掷一枚硬币”可看作是一次 Bernoulli 试验.

返回主目录

Bernoulli 试验的例子

掷一颗骰子，有六种结果．但如果我们只关心“出现六点”与“不出现六点”这两种情况，故“掷一颗骰子”也可以看作是 Bernoulli 试验．

- **对同一目标进行一次射击，若只考虑“击中目标”与“未击中目标”两种情况，则“同一目标进行一次射击”是 Bernoulli 试验．**
- **在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑“至少通过 100 辆车”与“至多通过 99 辆车”这两种情况，这也是 Bernoulli 试验．**

返回主目录

2. n 重 Bernoulli 试验

- 若独立重复地进行 n 次 Bernoulli 试验，这里“重复”是指每次试验中事件 A 发生的概率（即每次试验中“成功”的概率）不变，“独立”是指各次试验的结果相互独立，则称该试验为 n 重 Bernoulli 试验．

n 重 Bernoulli 试验的例子

- 掷 n 次硬币，可看作是一 n 重 Bernoulli 试验．
- 掷 n 颗骰子，如果我们对每颗骰子只关心“出现六点”与“不出现六点”这两种情况，故“掷 n 颗骰子”也可以看作是一 n 重 Bernoulli 试验．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验的例子

- 对同一目标进行 n 次射击，若每次射击只考虑"击中目标"与"未击中目标"两种情况，则"同一目标进行 n 次射击"是一 n 重 Bernoulli 试验．
- 在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑"至少通过 100 辆车"与"至多通过 99 辆车"这两种情况，这是一次 Bernoulli 试验．若独立重复地做该试验 n 次，则它是一 n 重 Bernoulli 试验．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验中的基本事件及其概率

在 n 重 Bernoulli 试验中的基本事件为

$$A_1'A_2'\cdots A_n'$$

其中$A_i'(i=1,2,\cdots n)$**为**A**或**$\overline{A}$，**总共**2^n**个。**

设在$A_1'A_2'\cdots A_n'$**中有**k**个**A_i'**为**A，$n-k$**个**A_i'**为**$\overline{A}$，

且$P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q$，**则由独立性，得**

$$P(A_1'A_2'\cdots A_n')=P(A_1')P(A_2')\cdots P(A_n')$$

$$=p^k q^{n-k}.$$

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验中恰好成功 k 次的概率

设在一次 Bernoulli 试验中，

$$P(A)=p\ ,\qquad P(\overline{A})=1-p=q$$

现考虑事件

$$B_{n\ ,\ k}=\{n\text{重}Bernoulli\text{试验中事件}A\text{恰好发生}k\text{次}\}$$

的概率 $P(B_{n\ ,\ k})=P_n(k)$ ：

在 n 次试验中，指定 k 次出现 A（成功），其余 $n-k$ 次出现 $\overline{A}$（失败），这种指定的方法共有 C_n^k 种．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验中恰好成功 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (q=1-p)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

注意　由二项式定理，我们有

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=(p+q)^n$$

$$=1$$

返回主目录

二、一些常用的离散型随机变量

1) Bernoulli 分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=1-p\ ,\quad P\{X=1\}=p$$

或
$$P\{X=k\}=p^k q^{1-k}\quad (k=0,1)$$

X	0	1
P	1-p	p

则称随机变量 X 服从参数为 p 的 **Bernoulli 分布**．

记作 $X\sim b(1,\ p)$ $\left(\text{其中 } 0\le p\le 1 \text{ 为参数}\right)$

Bernoulli 分布也称作 0-1 分布或二点分布．

Bernoulli 分布的概率背景

进行一次 Bernoulli 试验，设：

$$P(A) = p \ , \qquad P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

令：X ：在这次 Bernoulli 试验中事件 A 发生的次数．

或者说：令

$$X = \begin{cases} 1 & \text{若事件}A\text{发生} \\ 0 & \text{若事件}A\text{不发生} \end{cases}$$

则 $\quad X \sim b(1, p)$

返回主目录

例 6

15 件产品中有 4 件次品，11 件正品．从中取出 1 件令

X ：取出的一件产品中的次品数．则 X 的取值为 0 或者 1 ，并且

$$P\{X=0\}=\frac{11}{15}，\quad P\{X=1\}=\frac{4}{15}$$

即： $X \sim b\left(1,\ \frac{4}{15}\right).$

返回主目录

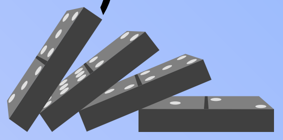
2）二项分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

则称随机变量 X 服从参数为 $(n,\ p)$ 的二项分布，记作 $X \sim b(n,\ p)$

（其中 n 为自然数，$0 \le p \le 1$ 为参数）



返回主目录

说 明

显然，当 n=1 时 $X \sim b(1,\ p)$

此时，X 服从 $Bernoulli$ 分布 .

这说明，$Bernoulli$ 分布是二项分布的一个特例 .

二项分布的概率背景

进行 n 重 Bernoulli 试验，设在每次试验中

$$P(A) = p\ , \qquad P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

令 X ：在这 Bernoulli 试验中事件 A 发生的次数

则· $X \sim b(n,\ p)$

返回主目录

分布律的验证

(1)．由于 $0 \le p \le 1$ 以及 n 为自然数，可知

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

(2)．又由二项式定理，可知

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \left[p + (1-p)\right]^n = 1$$

所以

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

是分布律．

返回主目录

例 7

一大批产品的次品率为 0.05 ，现从中取出 10 件．试求下列事件的概率：

B={ 取出的 10 件产品中恰有 4 件次品 }

C={ 取出的 10 件产品中至少有 2 件次品 }

D={ 取出的 10 件产品中没有次品 }

解： $A=\{\text{取出一件产品为次品}\}$

则 $P(A)=0.05$

取 10 件产品可看作是 10 重 Bernoulli 试验．

X ：取出的 10 件产品中的次品数．

则 $X\sim b(10,\ 0.05)$

返回主目录

例 7（续）

所以， $P(B)=P\{X=4\}=C_{10}^{4}\times 0.05^{4}\times 0.95^{10-4}$

$$=9.648\times 10^{-4}$$

$$P(C)=P\{X\quad 2\}=1-P\{X<2\}$$

$$=1-C_{10}^{0}\times 0.05^{0}\times 0.95^{10}-C_{10}^{1}\times 0.05^{1}\times 0.95^{9}$$

$$=0.08614$$

$$P(D)=P\{X=0\}=0.95^{10}=0.5987$$

返回主目录

例 8

一张考卷上有 5 道选择题，每道题列出 4 个可能答案，其中只有一个答案是正确的．某学生靠猜测至少能答对 4 道题的概率是多少？

解：每答一道题相当于做一次 Bernoulli 试验，

$A=\{\text{答对一道题}\}$，则 $P(A)=\dfrac{1}{4}$

则答 5 道题相当于做 5 重 Bernoulli 试验．

设：X：该学生靠猜测能答对的题数

则 $X\sim b\left(5,\ \dfrac{1}{4}\right)$

返回主目录

例 8（续）

所以

$$P\{\text{至少能答对4道题}\} = P\{X \quad 4\}$$

$$= P\{X = 4\} + P\{X = 5\}$$

$$= C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= \frac{1}{64}$$

例 9

设有 80 台同类型的设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01 ，且一台设备的故障能由一个人处理.考虑两种配备维修工人的方法：

其一，由 4 人维护，每人负责 20 台

其二，由 3 人，共同维护 80 台.

试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小.

返回主目录

例 9(续)

解：按第一种方法. 以 X 记“第 1 人负责的 20 台

中同一时刻发生故障的台数”，则知 X~b(20, 0.01).

以 A_i 表示事件“第 i 人负责的台中发生故障不能及时维修”， 则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \quad P(A_1) = P\{X \quad 2\}.$$

$$= 1 - P\{X \le 1\}.$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{1} P\{X = k\} = 1 - \sum_{k=0}^{1} C_{20}^{k} (0.01)^k (0.99)^{20-k}$$

$$= 0.0169$$

返回主目录

例 9(续) **按第二种方法.** 以 Y 记 80 台中同一时刻发生故障的台数， 则 Y~ b(80 ，0.01)

故 80 **台中发生故障而不能及时维修的概率为：**

$$P\{Y \quad 4\} = 1 - P\{Y \le 3\} = 1 - \sum_{k=0}^{3} P\{X = k\}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{3} C_{80}^{k} (0.01)^{k} (0.99)^{80-k} = 0.0087$$

第二种方法中发生故障而不能及时维修的概率小，且维修工人减少一人。**运用概率论讨论国民经济问题，可以有效地使用人力、物力资源。**

返回主目录

例 10 对同一目标进行射击，设每次射击的命中率均为 0.23 ，问至少需进行多少次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95 ？

解：设需进行 n 次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95 .

进行 n 次射击，可看成是一 n 重 Bernoulli 试验

令：$A=\{$命中目标$\}$ 则，$P(A)=0.23$

设 X={n 次射击中的命中次数} 则，$X \sim b(n, 0.23)$

$\{X \quad 1\}=$ { n 次射击至少命中一次目标 }=B

返回主目录

例 10（续）

则有 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-P\{X=0\}=1-0.77^n$

由题意，得 $P(B)=1-0.77^n \quad 0.95$

所以，有 $0.77^n \le 0.05$

取对数，得 $n\ln 0.77 \le \ln 0.05$

所以，有 $n \quad \dfrac{\ln 0.05}{\ln 0.77}=11.46$

即至少需进行 12 次射击，才能使至少命中一次目

标的概率不少于 0.95 .

二项分布的分布形态

若 $X \sim B(n, p)$，则

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}} = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{(k-1)!(n-k+1)!\,p}{k!(n-k)!\,q}$$

$$= \frac{(n+1-k)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq} \quad (q = 1-p)$$

$$\therefore \quad \frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}} = \begin{cases} >1, & k<(n+1)p \\ =1, & k=(n+1)p \\ <1, & k>(n+1)p \end{cases}$$

返回主目录

二项分布的分布形态

$$\therefore \quad \frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}} = \begin{cases} >1, k<(n+1)p \\ =1, k=(n+1)p \\ <1, k>(n+1)p \end{cases}$$

由此可知，二项分布的分布

$$P\{X=k\}$$

先是随着 k 的增大而增大，达到其最大值后再随着 k 的增大而减少．这个使得

$$P\{X=k\}$$

达到其最大值的 k_0 称为该二项分布的最可能次数．

返回主目录

$$\because \quad \frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\begin{cases} >1, k<(n+1)p \\ =1, k=(n+1)p \\ <1, k>(n+1)p \end{cases}$$

如果 $(n+1)p$ 是整数，则 $k_0=(n+1)p$ 或 $(n+1)p-1$；

如果 $(n+1)p$ 不是整数，则 $k_0=[(n+1)p]$；

返回主目录

例 10

对同一目标进行 400 次独立射击，设每次射击时的命中率均为 0.02 ，

（ 1 ）试求 400 次射击最可能命中几次？：

（ 2 ）求至少命中两次目标 的概率。

解：对目标进行 400 次射击相当于做 400 重 Bernoulli 试验 .

令 X： 400射击中命中目标的次数 .

则 $X \sim b(400,\ 0.02)$.

(1) 由于 $(400+1)\times 0.02 = 8.02$，它不是整数

例 10（续）

因此，最可能射击的命中次数为

$$k_0 = [8.02] = 8$$

P{ 至少命中两次目标 } $=P\{X \quad 2\}$

$$=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$

$$=1-0.98^{400}-C_{400}^{1}(0.02)(0.98)^{399}$$

$$=0.9972.$$