§3.4 解析函数与调和函数的关系

内 容 简 介

在 §3.3 我们证明了在 D 内的解析函数，其导数仍为解析函数，所以解析函数有任意阶导数。本节利用这一重要结论研究解析函数与调和函数之间的关系。

定义 若二元实变函数$\varphi(x,y)$在D内具有二阶连续偏导数且满足$Laplace$方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad \text{即}\ (\Delta\varphi=0)$$

则称$\varphi(x,y)$为D内的调和函数.

定理 若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析

$\Rightarrow u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$是D内的调和函数。

证明：设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析，则

由 $C-R$ 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

从而有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$

由解析函数高阶导数定理 $\Rightarrow u(x,y),v(x,y)$

具有任意阶的连续导数. $\quad \therefore \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$

故在D内有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ 同理有 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

即 u 及 v 在 D 内满足拉普拉斯 (*Laplace*) 方程：

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0 \quad \text{其中} \; \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$\therefore u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$是D内的调和函数。

定义 设$u(x, y)$为D内的调和函数,称使得 $u + iv$ 在D内构成解析函数的调和 函数$v(x, y)$为$u(x, y)$的共轭调和函数.

上面定理说明：

D内解析函数的虚部是实部的共轭调和函数.

即, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在D内解析 $\Rightarrow$

在D内$v(x,y)$必为$u=u(x,y)$的共轭调和函数.

由解析的概念得：

在D内满足$C-R$方程：$u_x=v_y, u_y=-v_x$的两个

调和函数u,v, v必为u的共轭调和函数.

现在研究反过来的问题：若u,v是任意选取的在

区域D内的两个调和函数, 则$u+iv$在D内就不

一定解析.

如　$v = x + y$不是$u = x + y$的共轭调和函数.

$\left(\because \; f(z) = u + iv = (x + y) + i(x + y)\right.$在$z$平面上处处不解析$u_x = 1 = v_y \quad u_y = 1 \neq -v_x \left. \right)$

要想使$u + iv$在D内解析, u及v还必须满足$C - R$方程，即v必须是u的共轭调和函数.由此，

已知一个解析函数的实部$u(x, y)$,利用$C - R$方程可求得它的虚部$v(x, y)$,从而构成解析函数$u + iv$.

(虚部$v(x, y)$)

(实部$u(x, y)$)

设D一单连通区域，$u(x,y)$是区域D内的调和函数，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

即，$-\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial x}$在$D$内有连续一阶偏导数

且 $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \overset{\exists v}{=} dv(x,y)$$

$$\boxed{v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c \qquad (*)}$$

$\because \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$满足$C-R$方程.

$\therefore u+iv$在D内解析.

定理 设$u(x,y)$在单连通D内调和函数,则(*)式所确定的$v(x,y)$,使得$f(z)=u+iv$在D内解析.

公式不用强记！可如下推出：

已知：$u(x,y)$,求其共轭调和函数$v(x,y)$:

$$由 dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy \overset{C-R方程}{=} -u_y dx+u_x dy$$

然后两端积分。

$$由 du=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy \overset{C-R方程}{=} \frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy$$

类似地，然后两端积分得，

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y dx - v_x dy + c \qquad (**)$$

 调和函数在流体力学和电磁场理论等实际问题中都有重要应用。本节介绍了调和函数与解析函数的关系。

例 1 由下列条件求解析函数 $f(z)=u+iv$

$$u=x^2+xy-y^2 \qquad f(i)=-1+i$$

解 $\because \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y \qquad -\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$

$$\therefore dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=(2y-x)dx+(2x+y)dy$$

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-x)dx+(2x+y)dy+c$$

$$=\int_o^x -xdx+\int_0^y(2x+y)dy+c$$

$$=-\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+c$$

曲线积分法

故 $$f(z)=(x^2-y^2+xy)+i(-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+c)$$

$$=(x+iy)^2-\frac{i}{2}(x+iy)^2+ic=(1-\frac{1}{2}i)z^2+ic$$

$\because\ f(i)=-1+i$ 代入上式得，$(1-\frac{i}{2})i^2+ic=-1+i$

$\therefore c=\frac{1}{2}$ $\quad f(z)=(1-\frac{i}{2})z^2+\frac{i}{2}$

□ $$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

又解 $\because\ dv=\dfrac{\partial v}{\partial x}dx+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy$

凑

$$=(2y-x)dx+(2x+y)dy$$

全

$$=2ydx+2xdy-xdx+ydy$$

微

$$=2dxy+d(-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})$$

分

法

$$v(x,y)=-\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+c$$

$$f(z)=(x^2-y^2+xy)+i(-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+c)$$

又解 $\because \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + y \Rightarrow v = 2xy + \dfrac{y^2}{2} + \varphi(x)$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) \overset{\because \frac{\partial v}{\partial x}}{=} 2y - x$$

偏积分法

$$\varphi'(x) = -x \qquad \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\therefore v(x, y) = 2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c$$

$$f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i(-\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + c)$$

又解 $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$

$=(2x+y)-i(x-2y)$

$=2(x+iy)-i(x+iy)$

$=(2-i)(x+iy)$

$=\left(2-i\right)z$

$\therefore f(z)=\dfrac{2-i}{2}z^2+ic$

$f(z)=(x^2-y^2+xy)+i(-\dfrac{1}{2}x^2+2xy+\dfrac{1}{2}y^2+c)$

不定积分法

第 四 章 复级 数

§4.1 复数项级数

- 1. 复数列的极限
- 2. 级数的概念

1. 复数列的极限

定义 设复数列 $\{\alpha_n\}(n=1,2,\cdots)$,其中$\alpha_n=a_n+ib_n$,

又设复常数 :$\alpha=a+ib$,

若 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\ni n>N$,恒有$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$,

那么α称为复数列$\{\alpha_n\}$当$n\to\infty$时的极限 ,

记作$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$,或当$n\to\infty$时,$\alpha_n\to\alpha$,

此时,也称复数列$\{\alpha_n\}$收敛于α.

定理 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\quad\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b.$

证明 $\Rightarrow$"已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ 即,

$$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\ni n>N,恒有|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$$

又$|\alpha_n-\alpha|=|(a_n-a)+i(b_n-b)|=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}$

$\therefore |a_n-a|\le|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon \qquad |b_n-b|\le|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b.$

"$\Leftarrow$"已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 即，

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\ni n>N$，恒有$|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ $|b_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

又$|\alpha_n-\alpha|=|(a_n-a)+i(b_n-b)|$

$\le|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha.$

2. 级数的概念

定义 ▪设复数列：$\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}(n=1,2,\cdots,)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$ --- 无穷级数

▪级数的前面 n 项的和

$$s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$ --- 级数的部分和

▪若部分和数列 $\{s_n\}$

- 收敛 - 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 称为收敛，$\lim_{n\to\infty}s_n=s$ 称为级数的和
- 不收敛 - 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 称为发散

例 1 判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3i}{2^n}$的敛散性。

解 $\because\ s_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{3i}{2^j}=3i(1-\frac{1}{2^n})$，又$\lim_{n\to\infty}s_n=3i$

$\therefore$ 级数收敛，且和为 $3i$.

定理 2 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛。

证明 $\because\ s_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+ib_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+i\sum_{k=1}^{n}b_k=\sigma_n+i\tau_n$

由定理 1，$\lim_{n\to\infty}s_n=a+ib\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\sigma_n=a,\lim_{n\to\infty}\tau_n=b$

$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛。

由定理 2 ，复数项级数的收敛问题可归之为两个实数项级数的收敛问题。

性质 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛的必要条件：$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0.$

定理 3 若$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，且$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|.$

证明 $\because |\alpha_n| = |a_n + ib_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$\therefore |a_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$

$|b_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

由比较判定法

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$均绝对收敛，

由定理2得$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛。

$\because \left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|, \therefore \left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$

由定理 3 的证明过程，及不等式$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le |a_n|+|b_n|$有：

定理 4 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$都收敛。

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛$\overset{?}{\Longrightarrow}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛. (例如：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n i}{n}$)

定义 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为绝对收敛；

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为条件收敛.

例 2 下列级数是否收敛？是否绝对收敛？

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\quad(2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}\quad(3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$$

解 (1) $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ 发散.

(2) $\because \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|8i|^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛，$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 绝对收敛。

(3) $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$ 收敛.

又 $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，$\therefore$ 原级数非绝对收敛.

例 3 讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$的敛散性。

解 令$|z|=r$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}=e^r$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$在复平面上处处绝对收敛。

练习： 讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$的敛散性。

讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$的敛散性。 $\cos in=\frac{e^n+e^{-n}}{2}$

§4.2 幂级数

- 1. 幂级数的概念
- 2. 收敛定理
- 3. 收敛圆与收敛半径
- 4. 收敛半径的求法
- 5. 幂级数的运算和性质

1. 幂级数的概念

定义

- 设复变函数列：$\{f_n(z)\}\quad z\in D,\quad n=1,2,\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots\qquad(1)$$

--- 称为复变函数项级数

- 级数的最前面 n 项的和

$$s_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

--- 级数的部分和

- 若$\forall z_0\in D$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)=s(z_0)$，称级数(1)在$z_0$收敛，

其和为$s(z_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)$不存在，称级数(1)发散。

若级数 (1) 在 D 内处处收敛，其和为 z 的函数

$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$--- 级数 (1) 的和函数

特殊情况，在级数 (1) 中 $f_n(z) = c_n(z - z_0)^n$ 得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (2) \qquad 当 z_0 = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \quad (3)$$

称为幂级数

$\because$ 在(2)中令 $z - z_0 = \xi$ $\quad$ (2) $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} c_n \xi^k$

$\therefore$ 研究级数(3)并不失一般性。

2. 收敛定理

同实变函数一样，复变幂级数也有所谓的收敛定理：

定理 1 (阿贝尔 (Able) 定理)

(1)若级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$在$z = z_0 (\neq 0)$收敛,则对满足$|z| < |z_0|$的$z$,级数必绝对收敛.

(2)若级数在$z = z_0$发散,则对满足$|z| > |z_0|$的z,级数必发散.

证明 (1) $\because \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$收敛,则$\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$，即

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，$\ni n > N$，恒有$\left|c_n z_0^n\right| < \varepsilon$

取$M = \max\left\{\varepsilon, \left|c_0\right|, \left|c_1 z_0\right|, \left|c_2 z_0^2\right|, \cdots, \left|c_N z_0^N\right|\right\}$

故$\left|c_n z_0^n\right| < M, n = 0,1,2,\cdots$

若$|z| < |z_0|$，则$\dfrac{|z|}{|z_0|} = q < 1$ $\quad \left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n\right| \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n$,

由于$\sum_{n=0}^{+\infty} Mq^n$收敛,由比较判别法得$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|c_n z^n\right|$收敛,

$\therefore \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛。

(2) 用反证法，设$\exists z_1, \ni |z_1| > |z_0|$，有$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_1^n$收敛，

由(1)知$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$收敛与假设矛盾，得证！

3. 收敛圆与收敛半径

由 *Able* 定理，幂级数的收敛范围不外乎下述三种情况：

(*i*) 若对所有正实数都收敛，级数 (3) 在复平面上处 处收敛。

(*ii*) 除 z=0 外，对所有的正实数都是发散的，这时，级数 (3) 在复平面上除 z=0 外处处发散。

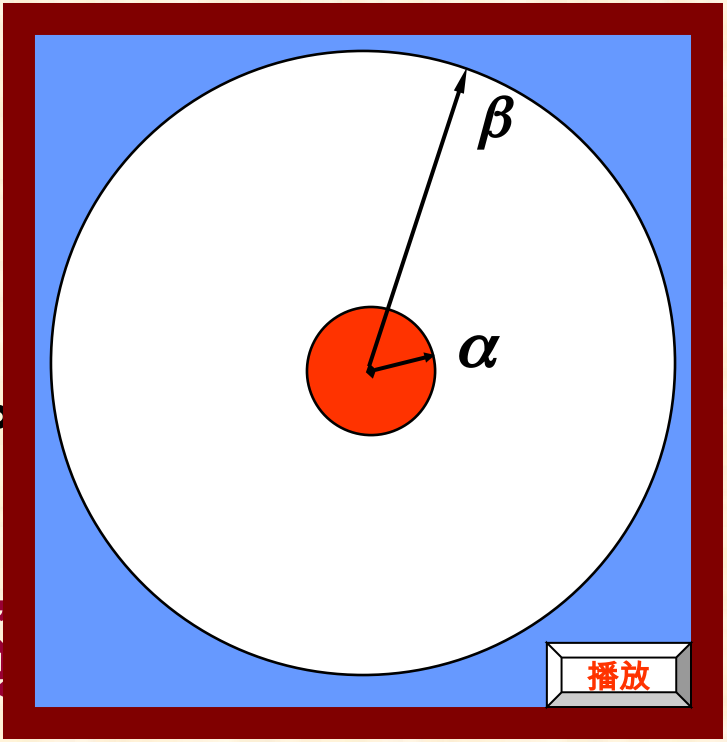
$(iii)\exists\alpha>0$,使得$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\alpha^n$收敛,

$\exists\beta>0$,使得$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\beta^n$发散.

由$Able$定理，在圆周c_α：$|z|=\alpha$内，级数(3)收敛；在圆周c_β：$|z|=\beta$外，级数(3)发散. 显然，$\alpha<\beta$

否则，级数 (3) 将在α处发散。

将收敛部分染成红色，发散部分染成蓝色，α逐渐变大，在 c_α 内部都是红色，β逐渐变小，在 c_β 外部都是蓝色，红、蓝色不会交错。故一定$\exists$ $\boxed{c_R\ |z|=R}$,为红、蓝两色的分界线。



定义 这个红蓝两色的分界圆周 c_R 叫做幂级数的收敛圆；这个圆的半径 R 叫做幂级数的收敛半径。

(*i*) 幂级数在收敛圆内部收敛，在收敛圆外部发散，在圆周上可能收敛可能发散，具体问题要具体分析。

(*ii*) 幂级数 (3) 的收敛范围是以 0 为中心，半径为 R 的圆域；幂级数 (2) 的收敛范围是以 z_0 为中心，半径为 R 的圆域.

4. 收敛半径的求法

关于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (3)的收敛半径求法，有

定理 2（比值法） 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$，则 $R = \begin{cases} 1/\lambda & 0 < \lambda < +\infty \\ +\infty & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = +\infty \end{cases}$

证明 $(i)\lambda \neq 0, \because \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right||z| = \lambda|z|$

当 $\lambda|z| < 1$ 时, 即 $|z| < \dfrac{1}{\lambda}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛；

当 $\lambda|z| > 1$ 时，即 $|z| > \dfrac{1}{\lambda}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ 发散，

以下证：当$|z| > \frac{1}{\lambda}$时 ,$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$也发散.

用反证法,设在$|z| = \frac{1}{\lambda}$外有一点z_0 ,$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$收,

再取一点z_1,满足$\frac{1}{\lambda} < |z_1| < |z_0|$，由*Able*定理得：

$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n||z_1|^n$收敛,矛盾! $\therefore \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$发散,即

当$|z| > \frac{1}{\lambda}$时 ,$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$发散,故$R = \frac{1}{\lambda}$.

(ii)若$\lambda = 0$时，对$\forall z$都有$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n|$收敛

$\therefore \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$在复平面上处处收敛，故$R = +\infty$;

(*iii*)当$\lambda=+\infty$时，除$z=0$外，对一切z,有

$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|c_n z^n\right|$发散，从而，$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$也发散.

否则，如果有一点$z_0\neq 0$，$\partial\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z_0{}^n$收敛，则

$\exists z_1$，满足$\left|z_0\right|>\left|z_1\right|\neq 0$，$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|c_n z_1{}^n\right|$收敛，矛盾！ 故$R=0$.

定理 3（根值法） 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n\right|}=\mu$，则 $R=\begin{cases}1/\mu & 0<\mu<+\infty\\ +\infty & \mu=0\\ 0 & \mu=+\infty\end{cases}$

定理 2（比值法） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$，则 $R = \begin{cases} 1/\lambda & 0 < \lambda < +\infty \\ +\infty & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = +\infty \end{cases}$

定理 3（根值法） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \mu$，则 $R = \begin{cases} 1/\mu & 0 < \mu < +\infty \\ +\infty & \mu = 0 \\ 0 & \mu = +\infty \end{cases}$

例 1 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

的收敛范围及和函数。

解 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 \quad \therefore R = 1$

又$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$

$\because$ 当$|z| < 1$时 $\lim_{n\to\infty} z^n = 0, \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-z}.$

$\because$ 当$|z| = 1$时 $\lim_{n\to\infty} z^n \neq 0, \therefore$ 级数发散.

综上 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} \text{收敛,且和函数为 } \frac{1}{1-z} & \text{当}|z| < 1\text{时;} \\ \text{发散} & \text{当}|z| \quad 1\text{时.} \end{cases}$

例 2 求下列幂级数的收敛半径并讨论收敛圆周上的情形：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}(p>0);\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n;\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z}{\ln in})^n.$$

解 (1) $\because\ \lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^p = 1 \quad \therefore R=1$

$\boxed{p=1}$ 当 $z=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，该级数发散

当 $z=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，该级数收敛

$\boxed{p=2}$ 在圆周 $|z|=1$ 上，$\because\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，

$\therefore$ 该级数在收敛圆上是处处收敛的。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n$;

(2)$\because$ $c_n=\operatorname{ch}\frac{i}{n}=\frac{1}{2}(e^{\frac{i}{n}}+e^{-\frac{i}{n}})$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{n}+i\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}-i\sin\frac{1}{n}\right]=\cos\frac{1}{n}$$

$\because$ $\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\cos\frac{1}{n+1}\Big/\cos\frac{1}{n}\right|=1$ $\therefore R=1$

在圆周$|z-1|=1$上，$\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{n})e^{in\theta}$

$\because$ $\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})e^{in\theta}\neq 0$，$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n$发散。

综上　当$|z-1|<1$时，该级数收敛，

当$|z-1|$　1时，该级数发散。

$$(3)\because\ \ln(in)=\ln|in|+i\arg(in)=\ln n+\frac{\pi}{2}i$$

其中 $|\ln in|=\sqrt{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n.$

$$\therefore |c_n|=\frac{1}{|\ln in|^n}=\left[1\Big/\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\frac{1}{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]^{\frac{n}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=0$

$\therefore R=+\infty$

故该级数在复平面上是处处收敛的 .

5. 幂级数的运算和性质

代数运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) \quad R = r_1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = g(z) \quad R = r_2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n = f(z) \pm g(z) \quad |z| < R$$

--- 幂级数的加、减运算

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0) z^n$$

$$= f(z) g(z), \quad |z| < R$$

其中：$R = \min(r_1, r_2)$

--- 幂级数的乘法运算

设$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n \quad |z|<r$,

$g(z)$在$|z|<R$内解析，且$|g(z)|<r$

$$\Rightarrow f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n \quad |z|<R$$

--- 幂级数的代换（复合）运算

幂级数的代换运算在函数展成幂级数中很有用.

例 3 把$\dfrac{1}{z-b}$表成形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$的幂级数，

这里，复常数$b\neq a$.

解

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\boxed{\dfrac{z-a}{b-a}}}=\frac{1}{1-g(z)}\left(-\frac{1}{b-a}\right)$$

代换

解 $$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\boxed{\frac{z-a}{b-a}}}=\frac{1}{1-g(z)}\left(-\frac{1}{b-a}\right)$$

代换

展开

$$\because \frac{1}{1-g(z)}=1+g(z)+[g(z)]^2+\cdots+[g(z)]^n+\cdots \quad ,|g(z)|<1$$

$$=1+\frac{z-a}{b-a}+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^2+\cdots+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^n+\cdots \quad ,|z-a|<|b-a|=R$$

还原

$$\therefore \frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-g(z)}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}(z-a)$$

$$-\frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2-\cdots\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots \quad |z-a|<R$$

□ 分析运算

定理 4 设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z) \quad |z| < R$

$\Rightarrow (i) \quad f(z)$在$|z| < R$内解析.

$(ii) \quad f'(z) = (\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad |z| < R$

--- 幂级数的逐项求导运算

$(iii) \quad \int_c f(z)dz = \int_c \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_c z^n dz$

或 $\int_0^z f(\varsigma)d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} \quad |z| < R, C \subset |z-a| < R$

--- 幂级数的逐项积分运算

第五周周三作业

1、书面作业

习题三　22、23(1, 2, 3)

习题四　2(1, 2, 3, 4)、3 (1, 2, 3, 4)

2、课后作业

预习第四章第三节“泰勒级数”（复习高数“泰勒级数”部分有关内容）

3、第 5 周答疑

周三、四晚 6:30-8:30，教学楼 103