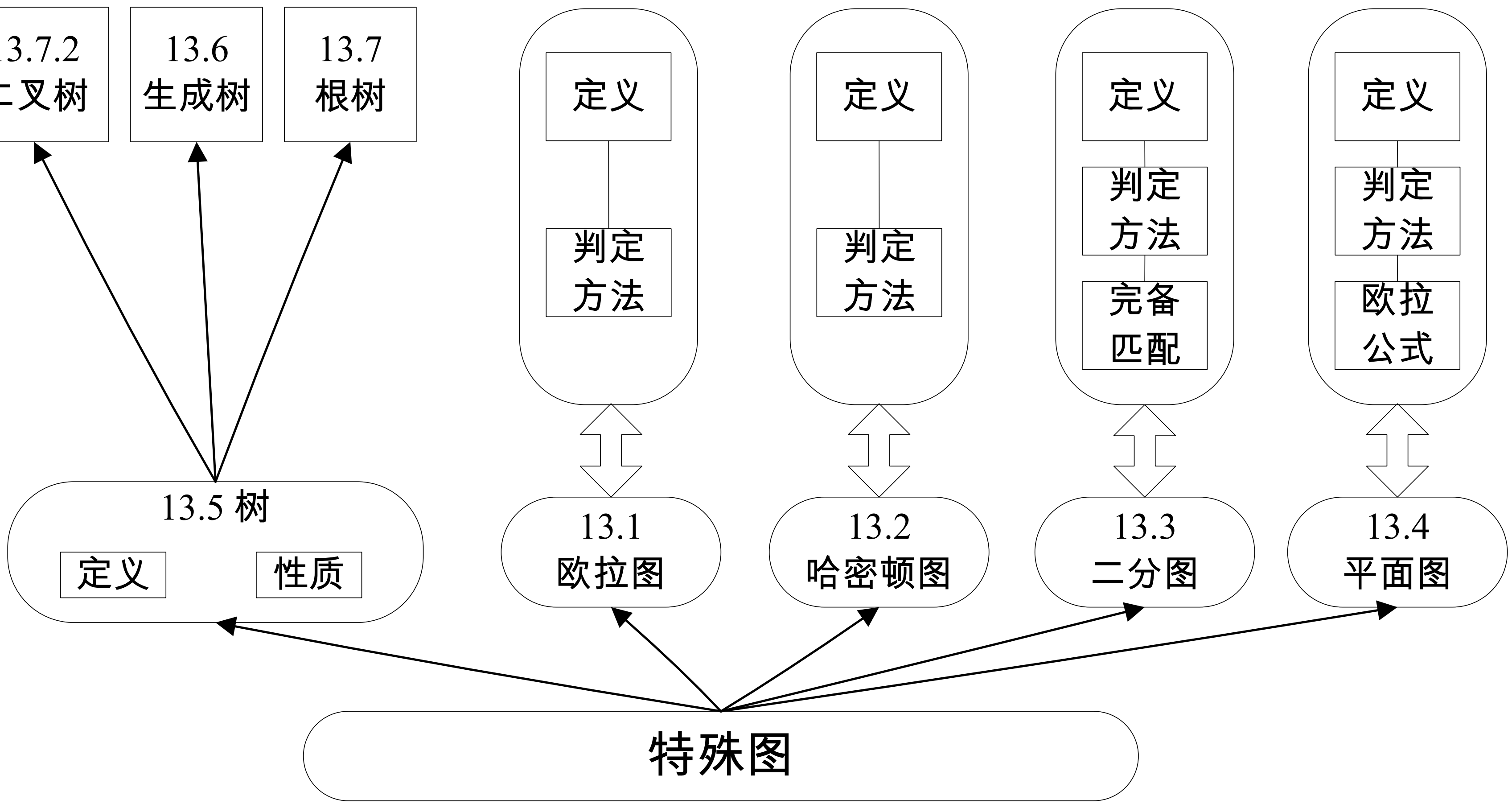
北京科技大学
University of Science and Technology Beijing

第四篇 图论

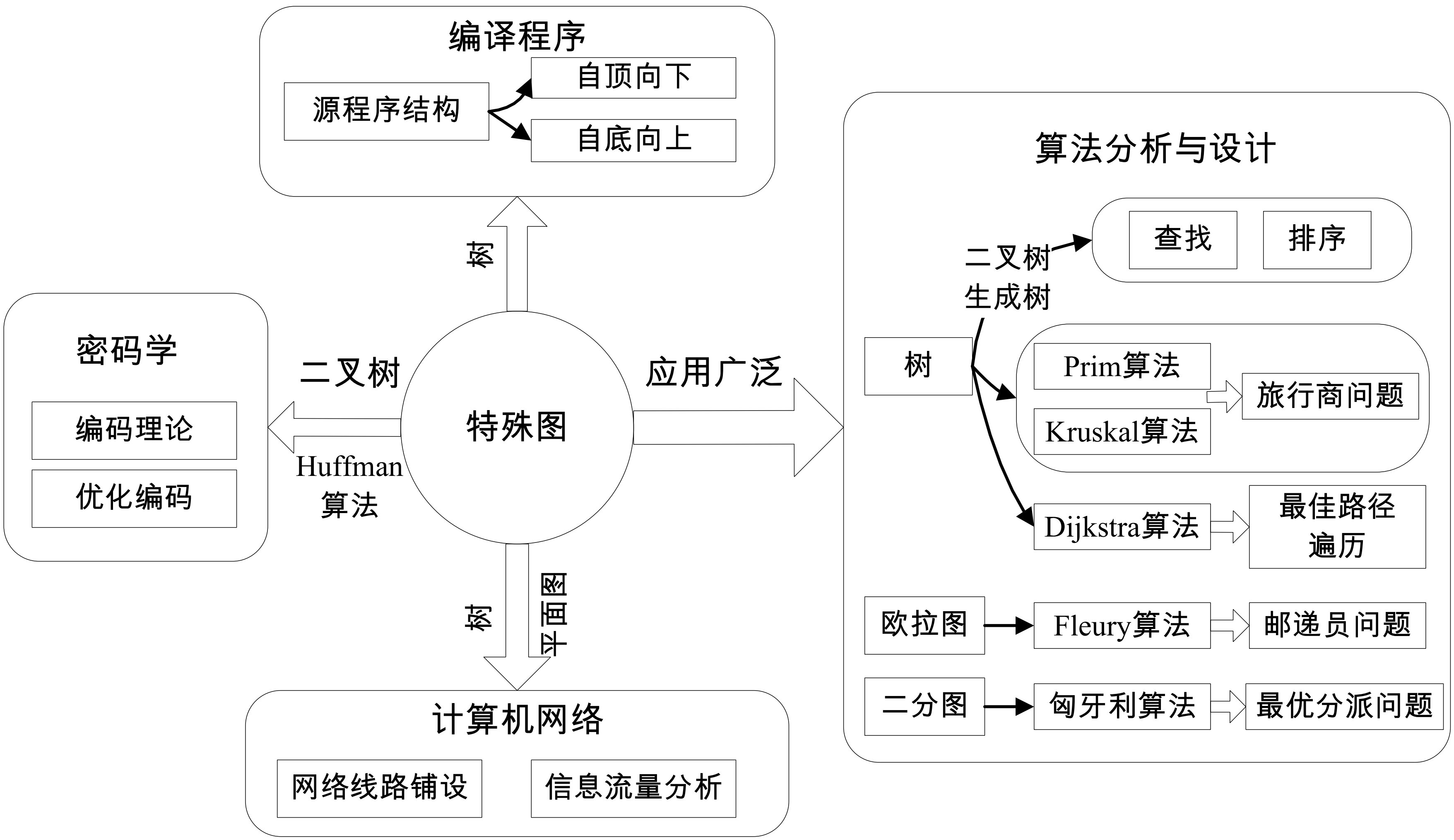
Graph Theory

第十三章 特殊图

本章各节间的关系概图


13.7.2
二叉树
13.6
生成树
13.7
根树
定义
判定
方法
定义
判定
方法
定义
判定
方法
完备
匹配
定义
判定
方法
欧拉
公式
13.5 树
定义
性质
13.1
欧拉图
13.2
哈密顿图
13.3
二分图
13.4
平面图
特殊图

特殊图在计算机科学技术相关领域的应用

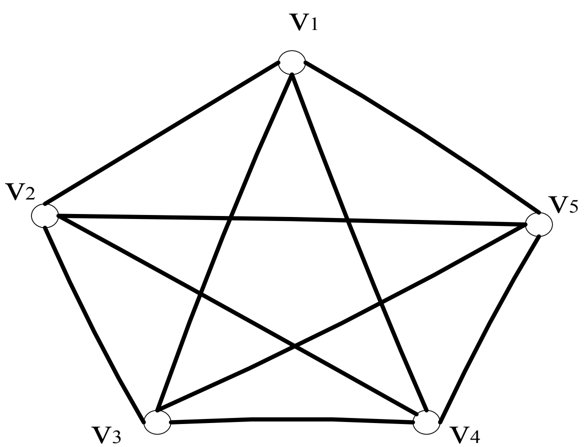


13.1 欧拉图

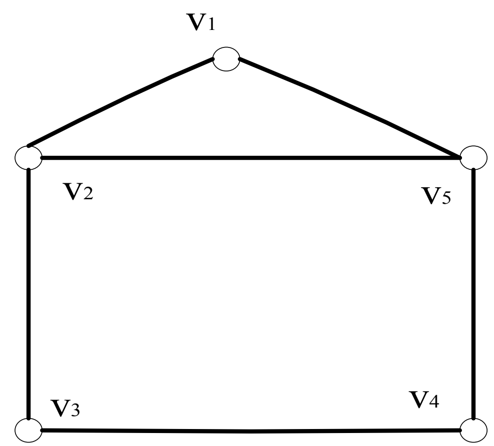
13.1.1 欧拉图的定义

定义 13.1 给定无孤立点图 G ，若存在一条路，经过图中**每边一次且仅一次**，该条路称为欧拉路；若存在一条回路，经过图中的**每边一次且仅一次**，该回路称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图。具有欧拉路而无欧拉回路的图称为半欧拉图。

欧拉图举例：



(a)



(b)

容易看出，（ a ）是欧拉图，而（ b ）不是欧拉图

13.1.2 欧拉图的判定

定理 13.1（欧拉路的充要条件）**无向图 G 具有一条欧拉路，当且仅当 G 是连通的，且有零个或两个奇数度结点。**

证：（1）**必要性：设 G 具有欧拉路，即有点边序列 $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \cdots e_i\ v_i\ e_{i+1} \cdots e_k\ v_k$ 可能重复出现，但边不重复，因为欧拉路经过图 G 中每一个结点，故图 G 必连通。**

① 对任意一个不是端点的结点，在一个欧拉路中每当 vi 出现一次，必关联两条边，故虽然 vi 可重复出现，但 deg(vi) 必是偶数。

② 对于端点，$v_0=v_k$ ，则 d(vi) 为偶数，即 G 中无奇数度结点。

若端 v_0 与 v_k 不同，则 d(v_0 为奇数，d(v_k 为奇数，G 中就有两个奇数度结点。

（ 2 ）充分性：若图 G 连通，有零个或两个奇数度结点，我们构造一条欧拉路如下。

① 若有两个奇数度结点，则从其中的一个结点开始构造一条迹，即从 v_0 出发关联 e_1 “ 进入” v_1 ，若 $\deg(v_1)$ 为偶数，则必由 v_1 再经过 e_2 进入 v_2 ，如此进行下去，每次仅取一次。由于 G 是连通的，故必可到达另一奇数度结点停下，得到一条 $v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2 \cdots e_{i-1}\, v_i\, e_{i+1} \cdots e_k\, v_k$ 。若 G 中没有奇数度结点，则从任一结点 v_0 出发，用上述的方法必可回到结点 v_0 ，得到上述一条闭迹 L1 。

② 若 L1 通过了 G 的所有边，则 L1 就是欧拉路。

③ 若 G 中去掉 L1 后得到子图 G′ ，则 G′ 中每一点的度数为偶数，因原图是连通的，故 L1 与 G′ 至少有一个结点 vi 重合，在 G′ 中由 vi 出发重复①的方法，得到闭迹 L2 。

④ 当 L1 与 L2 组合在一起，如果恰是 G ，则即得欧拉路，否则重复③可得到闭迹 L3 ，以此类推直到得到一条经过图 G 中所有边的欧拉路。 证毕。

推论 13.1（欧拉回路的充要条件） 无向图 G 具有一条欧拉回路，当且仅当 G 是连通的，并且所有结点度数为偶数。

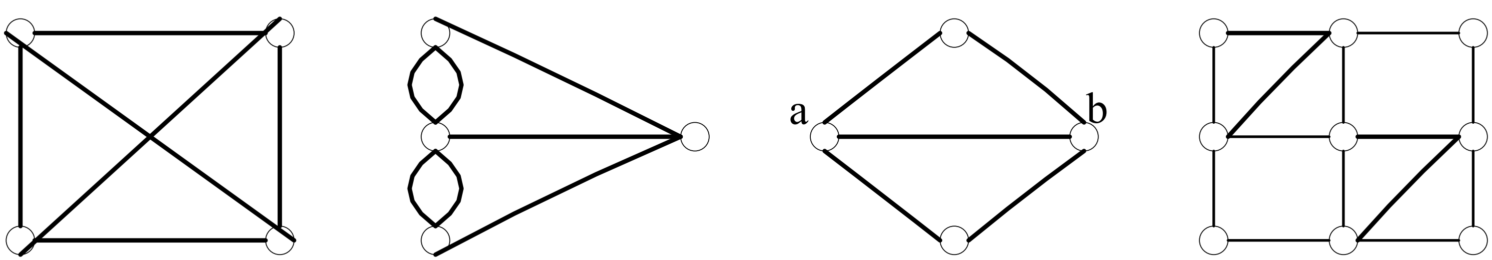
定义 13.2 给定有向图 G，通过每边一次且仅一次的一条单向路（回路），称作**单向欧拉路（回路）**。

定理 13.2 有向图 G 具有一条单向欧拉回路，当且仅当是连通的，且每个结点的入度等于出度。一个有向图 G 具有单向欧拉路，当且仅当是连通的，而且除两个结点外，每个结点的入度等于出度，但这两个结点中，一个结点的入度比出度大 1。另一个结点的入度比出度小 1。

民间一笔画：

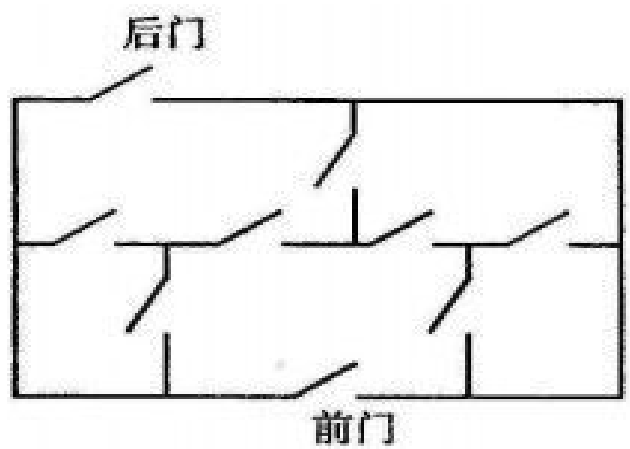
1）如果图中所有结点是偶数度结点，则可以任选一点作为始点一笔画完；

2）如果图中只有两个奇度结点，则可以选择其中一个奇度结点作为始点也可一笔画完。



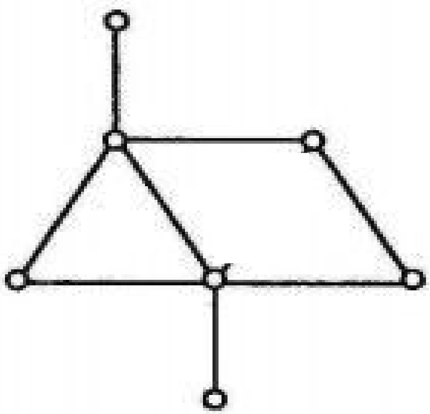
(1)　(2)　(3)　(4)

例 13.1 图是一幢房子的平面图形，前门进入一个客厅，由客厅通向 4 个房间。如果要求每扇门只能进出一次，现在你由前门进入，能否通过所有的门走遍所有的房间和客厅，然后从后门走出。



(a)

解：将 4 个房间和一个客厅及前门外和后门外作为结点，若两结点有边相连就表示该两结点所表示的位置有一扇门相通。由此得图（ b ）。由于图中有 2 个结点是奇度结点，故由定理 13.1 及其推论知本题有解。



(b)

小结：

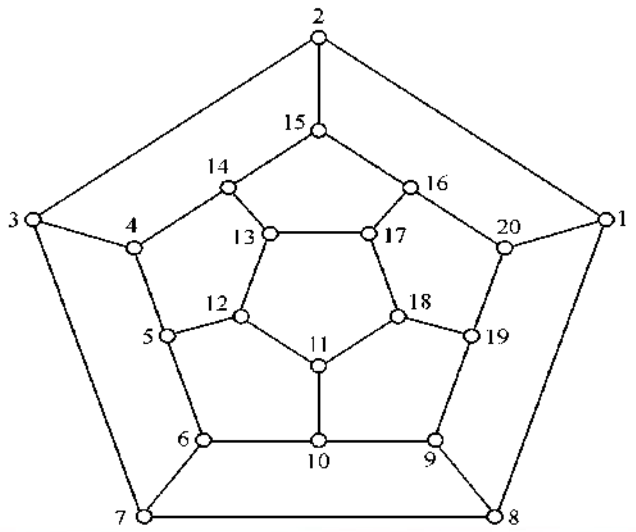
深刻理解欧拉图与半欧拉图的定义及判别定理，对于给定的图（无向或有向的），应用定理 13.1 和定理 13.2 准确判断出它是否为欧拉图。关于欧拉图的思维形式注记图如图所示。

欧拉图
- 定义：存在欧拉回路
- 判定:充要条件
  - 无向图：每个结点的度数均为偶数
  - 有向图：每个结点的入度等于出度

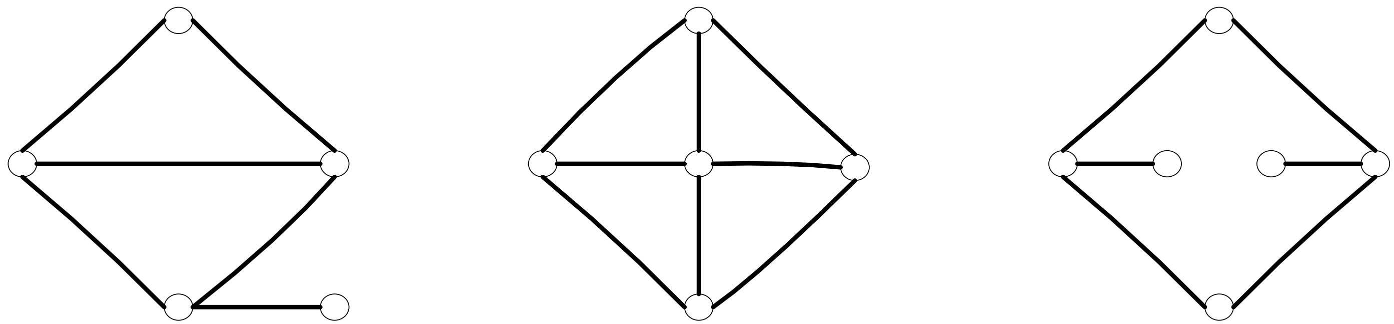
13.2 哈密顿图

13.2.1 哈密顿图的定义

与欧拉回路类似的是哈密顿回路问题。它是 1859 年哈密顿首先提出的一个关于 12 面体的数学游戏：能否在下图中找到一个回路，使它含有图中所有结点一次且仅一次？若把每个结点看成一座城市，连接两个结点的边看成交通线，那么这个问题就变成能否找到一条旅行路线，使得沿着该旅行路线经过每座城市恰好一次，再回到原来的出发地呢？为此，这个问题也被称为**周游世界问题**。



定义 13.3 给定图 G ，若存在一条路经过图中的每一个结点恰好一次，这条路称作**哈密顿（ Hamilton ）路**。若存在一条回路，经过图中的每一个结点恰好一次，这个回路称作**哈密顿回路**。具有哈密顿回路的图称为**哈密顿图**。具有哈密顿路但不具有哈密顿回路的图称为**半哈密顿图**。



(a) (b) (c)

（ a ）中存在哈密顿路，不存在哈密顿回路，所以（ a ）是半哈密顿图，（ b ）中存在哈密顿回路，（ b ）是哈密顿图，（ c ）不是哈密顿图。

13.2.2 哈密顿图的判定

定理 13.3（哈密顿回路的必要条件） 若图 $G=\langle V, E\rangle$ 具有哈密顿回路，则对于结点集 V 的每一个非空子集 S 均有 $W(G-S)\le|S|$ 成立。其中 $W(G-S)$ 是 $G-S$ 中连通分支数。

定理 13.4（哈密顿路的充分条件） 设 G 是具有 n 个结点的简单无向图，如果 G 中每一对不相邻顶点的度数之和大于等于 n−1，则在 G 中存在一条哈密顿路。

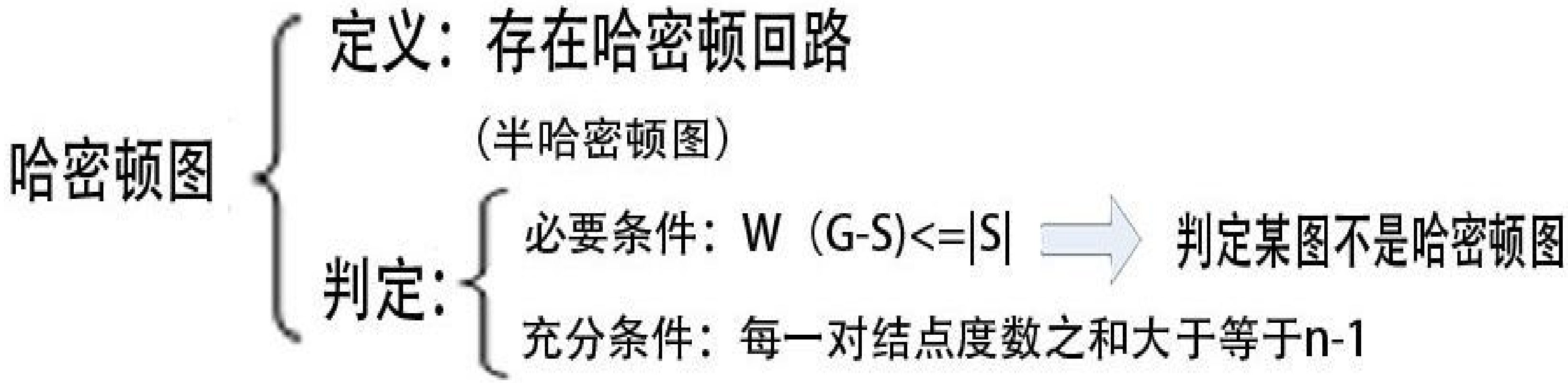
例 13.2　某地有 5 个风景点。若每个景点均有两条道路与其他景点相通，问是否可经过每个景点恰好一次而游完这 5 处？

解：将景点作为结点，道路作为边，则得到一个有 5 个结点的无向图。由题意，对每个结点 vi ，有 $\deg(v_i)=2(i\in N_5)$ 任意两点　　均有 $v_i, v_j\ (i, j\in N_5)$

$\deg(v_i)+\deg(v_j)=2+2=4=5-1$ ，本题有解。

小结：

（1）深刻理解哈密顿图及半哈密顿图的定义；（2）分清哈密顿图的必要条件和充分条件，会用哈密顿图的必要条件证明某些图不是哈密顿图。关于哈密顿图的思维形式注记图如图所示。



二分图及判定定理

定义 13.4 无向图 G=<V,E> 中的结点集合 V 如果可以划分成两个不相交的子集 X 和 Y，使得 G 中的每一条边的一个端点在 X 中而另一个端点在 Y 中，则称 G 为**二部图**或**二分图**，记为 G=<X,E,Y>。

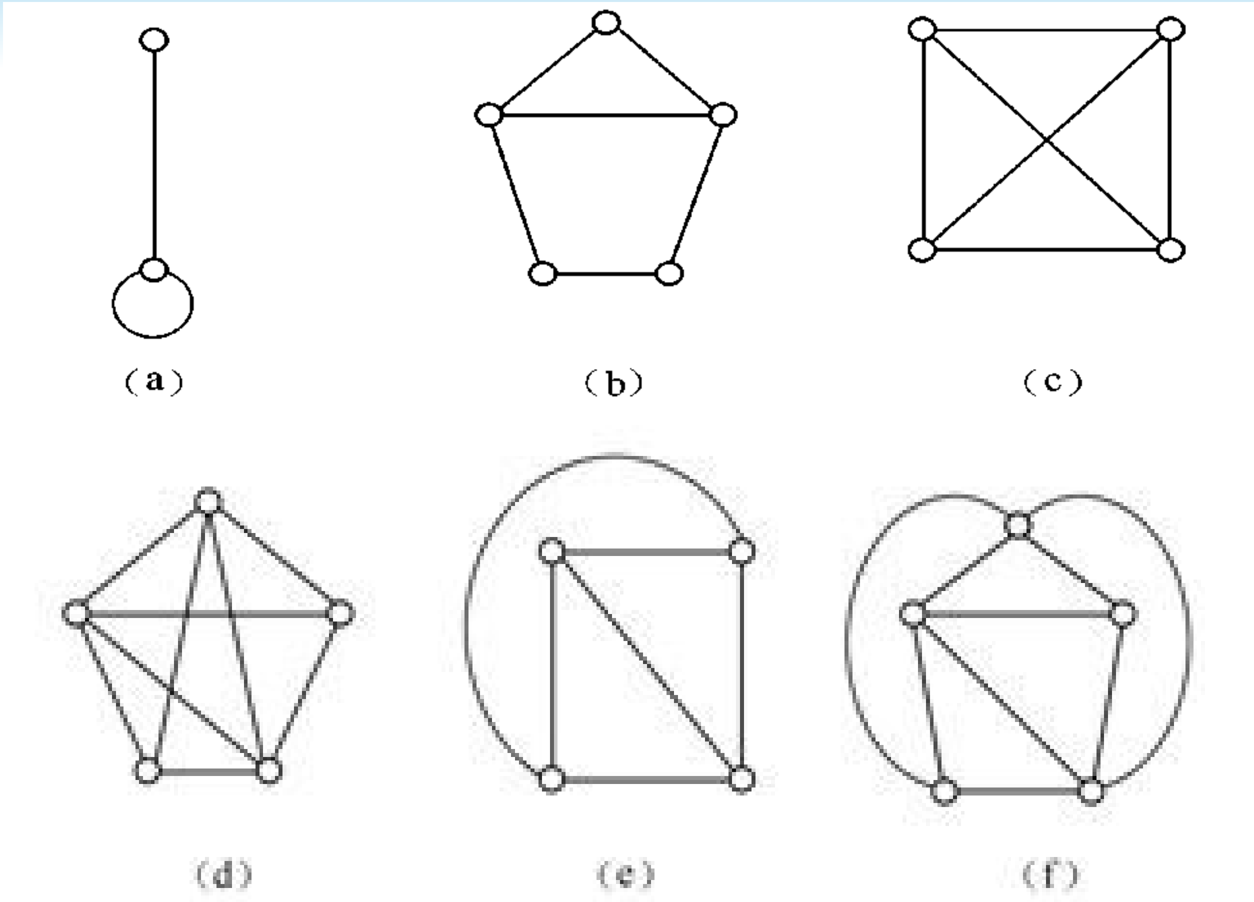
定义 13.5 设 G=<X,E,Y> 是一个二分图，若 G 是一个简单图，并且 X 中的每个结点与 Y 中的每个结点均邻接，则称 G 为**完全二分图**。如果 |X|=m ， |Y|=n ，在同构的意义下，这样的完全二分图只有一个 $K_{m,n}$ 为 。

定理 13.6 设 G 是无向图， G 是二分图当且仅当 G 中所有回路的长度均为偶数。

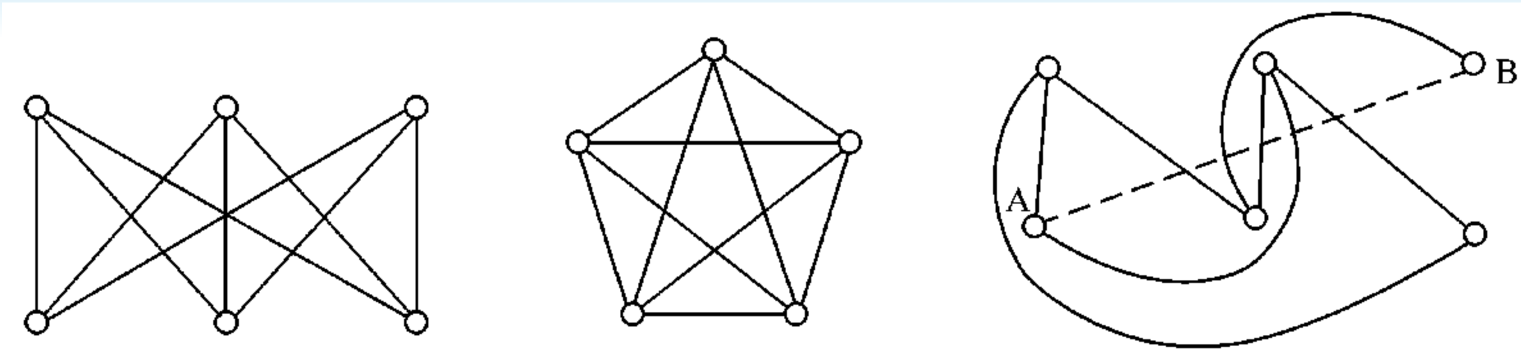
13.4 平面图

平面图的概念

定义 13.7 如果能将无向图 G 画在平面上使得除顶点外无边相交，则称 G 是**可平面图**，简称**平面图**。画出的无边相交的图称为 G 的平面嵌入。无平面嵌入的图称为**非平面图**。



（ a ），（ b ）显然是平面图。同样地，图（ c ），（ d ）也是平面图。如果将图（ c ），（ d ）分别表示为图（ e ），（ f ），则很容易看出这个事实。



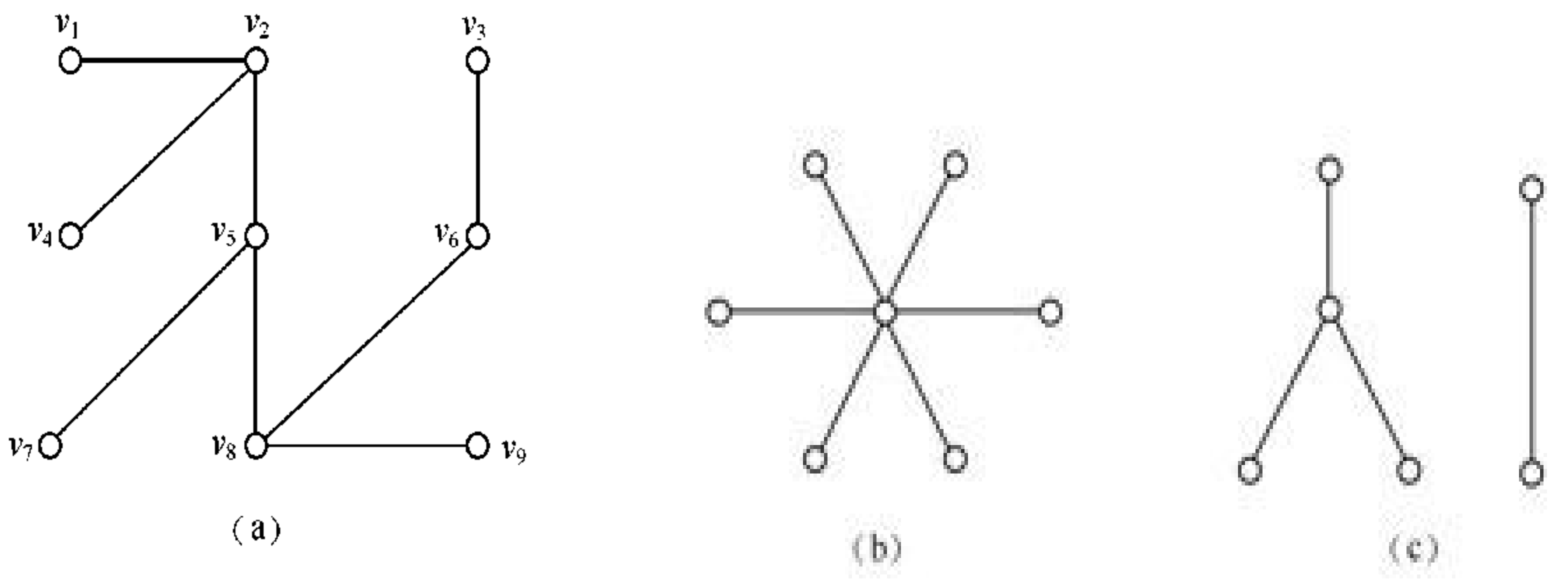
（a）　　（b）　　（c）

$K_{3,3}$无论怎样画，总有边相交，图（c）是其中一种情况。图（b）和K_5（a）的情况相同，后面将给出相关的证明。

13.5 树

13.5.1 树的定义及其相关术语

定义 13.11　一个连通且无回路的无向图称为**无向树**，简称**树**。在树中度数为 1 的结点称为**树叶**，度数大于 1 的结点称为**分支点（内点）**。单一孤立结点称为**平凡树**。如果一个无回路的无向图的每一个连通分支是树，且连通分支数大于等于 2，那么称为**森林**。



（ a ）、（ b ）为树，（ c ）为森林。

13.5.2 树的性质

定理 13.14 设 $G=\langle V,E \rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径 .

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥 .

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈 .

- **证明思路**
- **(1)⇒(2). 关键一步是，若路径不惟一必有回路．**
- **(2)⇒(3). 若 G 中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一．对 n 用归纳法证明 $m=n-1$.**

  $n=1$ 正确．设 $n\le k$ 时对，证 $n=k+1$ 时也对：取 G 中边 e ，因为 G 中无回路，故 $G-e$ 有且仅有两个连通分支 G_1,G_2. $n_i\le k$ ，由归纳假设得 $m_i=n_i-1$, $i=1,2$. 于是， $m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$.

- (3)⇒(4). 只需证明 G 连通．用反证法．否则 G 有 s（ s2 ）个连通分支都是小树．于是有 $m_i=n_i-1$,

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i - s = n - s \ (s \quad 2)$$

- 这与 $m=n-1$ 矛盾．

- (4)$\Rightarrow$(5). 只需证明 G 中每条边都是桥．因为$\forall e \in E$, $G-e$ 只有 $n-2$ 条边，由习题“设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，证明 m>=n-1”, 可知 $G-e$ 不连通，故 e 为桥．
- (5)$\Rightarrow$(6). 由 (5) 易知 G 中无回路，而且 G 连通，所以 G 为树，由 (1)$\Rightarrow$(2) 知，$\forall u,v \in V$（ $u \neq v$ ），

  u 到 v 有惟一路径，加新边 (u,v) 得惟一的一个圈．
- (6)$\Rightarrow$(1). 只需证明 G 连通，这是显然的．

定理 13.16 任何非平凡的无向树至少有两片叶子。

证 设 T 有 x 片树叶，由握手定理及定理 13.14 可知，

$$2(n-1)=\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \quad x+2(n-x)$$

由上式解出 x 2.

性质的应用

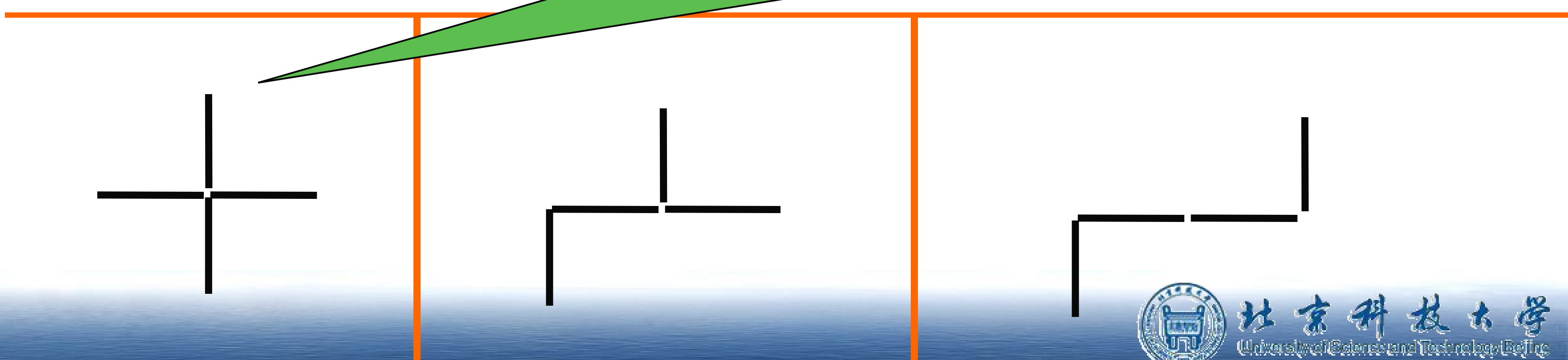
- 以上两个定理给出了无向树的主要性质，利用这些性质和握手定理，可以画出阶数 n 比较小的所有非同构的无向树。

例 1 ：画出 5 阶所有非同构的无向树。

解：设 T_i 为 5 阶无向树，则 T_i 的边数为 4 ， T_i 的度序列之和为 8 ，$\Delta(T_i)\le 4$, $\delta(T_i)\ge 1$，可能的度序列为：

(1) 1,1,1,1,4　　(2) 1,1,1,2,3　　(3) 1,1,2,2,2

称只有一个分支点且其度数为 n-1 的 n 阶无向树为星形图，称唯一的分支点为星心。



例 2：无向树 G 有 5 片树叶，3 个 2 度分支点，其余分支点均为 3 度，问 G 有多少个顶点？

解：由握手定理 $2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$

及定理 13.14　m = n-1

设 G 有 n 个顶点，则有下列关系式

5*1+3*2+(n-5-3)*3=2*(n-1)

解得： n=11

举例

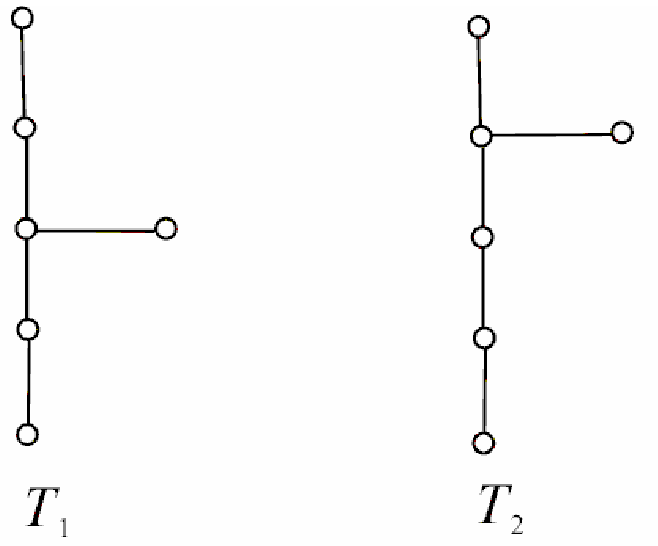
例 3 **已知无向树 T 中有 1 个 3 度顶点，2 个 2 度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.**

解 设有 x 片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出 $x = 3$，故 T 有 3 片树叶.

T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，易知 3 度顶点与 1 个 2 度顶点相邻与和 2 个 2 度顶点均相邻是非同构的，因而有 2 棵非同构的无向树 T_1, T_2，如图所示.



小结：

（ 1 ）深刻理解无向树的定义，熟练掌握无向树的主要性质，并能灵活应用它们。

（ 2 ）熟练地求解无向树，准确地画出阶数较小的所有非同构的无向树。关于树的术语和性质的思维形式注记图如图所示。

- 树
  - 树的定义
  - 相关术语
    - 树叶　分枝点
    - 平凡树　森林
  - 树的性质
    - 六个等价命题
    - 任何树至少有两片叶子

13.6 生成树

13.6.1 生成树的定义

定义 13.12 给定一个无向图 G，若 G 的一个生成子图 T 是一颗树，则称 T 为 G 的**生成树**或**支撑树**。

定义 13.12 设 G 为无向图

(1) G 的**树**—— T 是 G 的子图并且是树

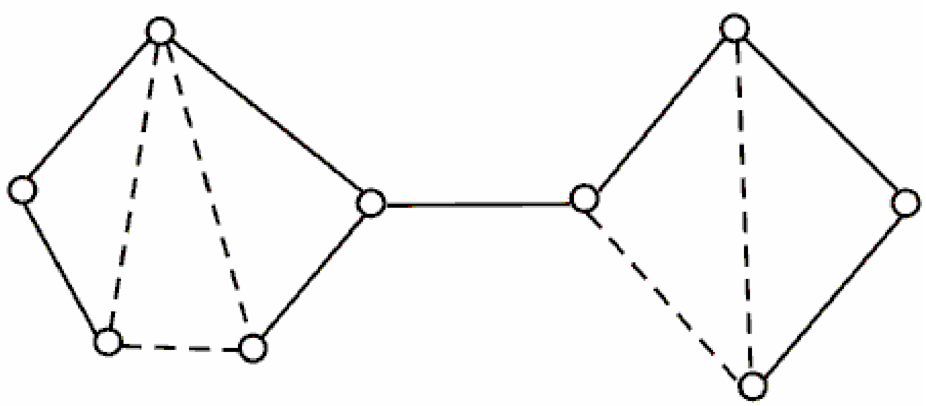
(2) G 的**生成树**—— T 是 G 的生成子图并且是树

(3) 生成树 T 的**树枝**—— T 中的边

(4) 生成树 T 的**弦**——不在 T 中的边

(5) 生成树 T 的**余树** $\overline{T}$ ——全体弦组成的集合的导出子图

$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路，如图所示



定理无向图 G 具有生成树当且仅当 G 连通 .

证 必要性显然 .

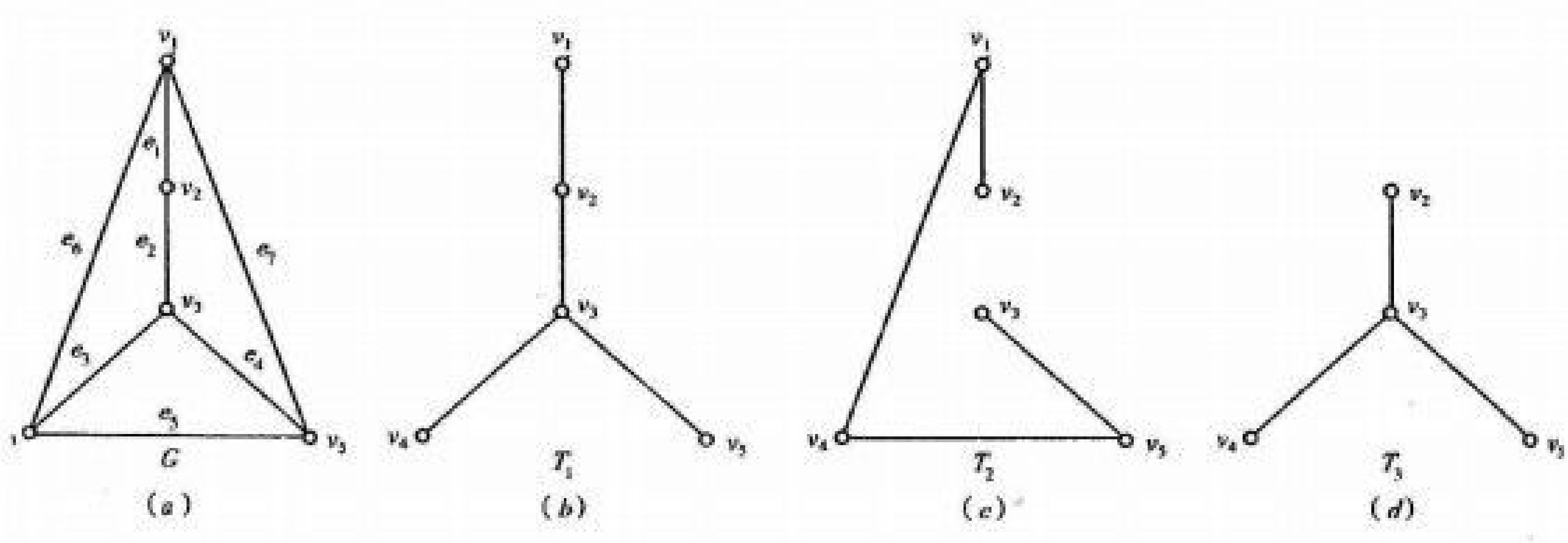
充分性用破圈法（注意：在圈上删除任何一条边，不破坏连通性）

推论 1 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $mn–1$.

推论 2 $\overline{T}$ 的边数为 m–n+1.

推论 3 $\overline{T}$ 为 G 的生成树 T 的余树，C 为 G 中任意一个圈，则$\overline{T}$ C 与一定有公共边 .

证 否则，C 中的边全在 T 中，这与 T 为树矛盾 .



（ b ）、（ c ）所示的树、是（ a ）图的生成树，而（ d ）所示的树不是（ a ）图的生成树。一般的，图的生成树不唯一。

基本回路系统

定理设 T 为 G 的生成树，e 为 T 的任意一条弦，则 $T\cup e$ 中含一个只有一条弦其余边均为 T 的树枝的圈．不同的弦对应的圈也不同．

证 设 $e=(u,v)$ ，在 T 中 u 到 v 有惟一路径Γ，则$\Gamma\cup e$ 为所求的圈．

定义 设 T是 n 阶 m 条边的无向连通图 G 的一棵生成树，设 $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m-n+1}$ 为 T 的弦．设 C_r 为 T 添加弦 e'_r 产生的只含弦 e'_r、其余边均为树枝的圈．称 C_r 为 G 的对应树 T 的弦 e'_r 的**基本回路**或**基本圈**，$r=1, 2, \ldots, m-n+1$. 并称 $\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$ 为 G 对应 T 的**基本回路系统**，称 $m-n+1$ 为 G 的**圈秩**，记作 $\xi(G)$.

求基本回路的算法：设弦 $e=(u,v)$ ，先求 T 中 u 到 v 的路径Γ_{uv} ，再并上弦 e ，即得对应 e 的基本回路．

基本割集的存在

定理 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，e 为 T 的树枝，则 G 中存在只含树枝 e ，其余边都是弦的割集，且不同的树枝对应的割集也不同．

证 由树的性质可知，e 是 T 的桥，因而 $T-e$ 有两个连通分支 T_1 和 T_2 ，令

$S_e=\{e \mid e \in E(G)$ 且 e 的两个端点分别属于 $V(T_1)$ 和 $V(T_2)\}$ ，

由构造显然可知 S_e 为 G 的割集，$e \in S_e$ 且 S_e 中除 e 外都是弦，

所以 S_e 为所求．显然不同的树枝对应的割集不同．

基本割集与基本割集系统

定义 设 T 是 n 阶连通图 G 的一棵生成树，$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}$ 为 T 的树枝，S_i 是 G 的只含树枝 e'_i 的割集，则称 S_i 为 G 的对应于生成树 T 由树枝 e'_i 生成的**基本割集**，$i=1, 2, \ldots, n-1$. 并称 $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$ 为 G 对应 T 的**基本割集系统**，称 $n-1$ 为 G 的**割集秩**，记作 $\eta(G)$.

求基本割集的算法

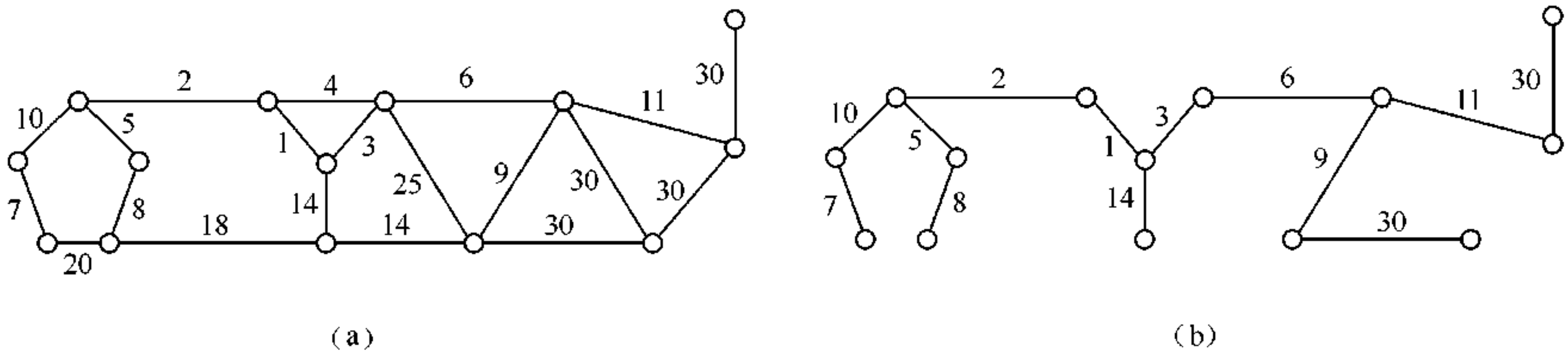
设 e' 为生成树 T 的树枝，$T-e'$ 为两棵小树 T_1 与 T_2，令

$$S_{e'} = \{e \mid e \in E(G) \text{ 且 } e \text{ 的两个端点分别属于 } T_1 \text{ 与 } T_2\}$$

则 $S_{e'}$ 为 e' 对应的基本割集.

13.6.2 最小生成树

定义 13.13 设 G 是具有 n 个结点的带权连通图。 G 的生成树 T 的所有边的权之和为树的**权**。在图 G 的所有生成树中，树权最小的那棵生成树称作**最小生成树**。



（ a ）、（ b ）给出了一个带权图及其最小生成树的例子。

算法 13.1 避圈法（ Kruskal 算法） 设图 G 有 n 个结点，按以下步骤可以求得图 G 的最小生成树。

1 ）按权值升序将图 G 的边排序，得到表 L ；

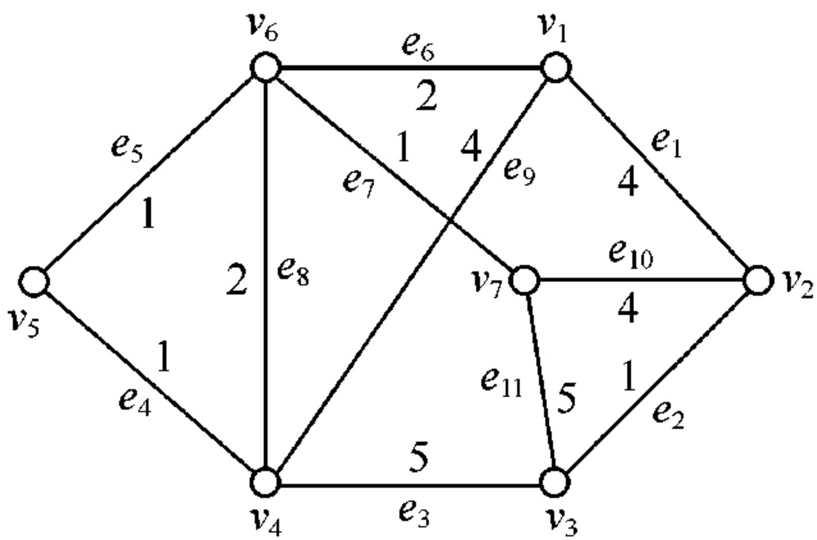
2 ）令 $S=\varnothing$

3 ）在表 L 中依次选取下一条边 e ，如 $e \notin S$ ，且 $S\cup\{e\}$ 成的子图是无圈图，则令 $S=S\cup\{e\}$

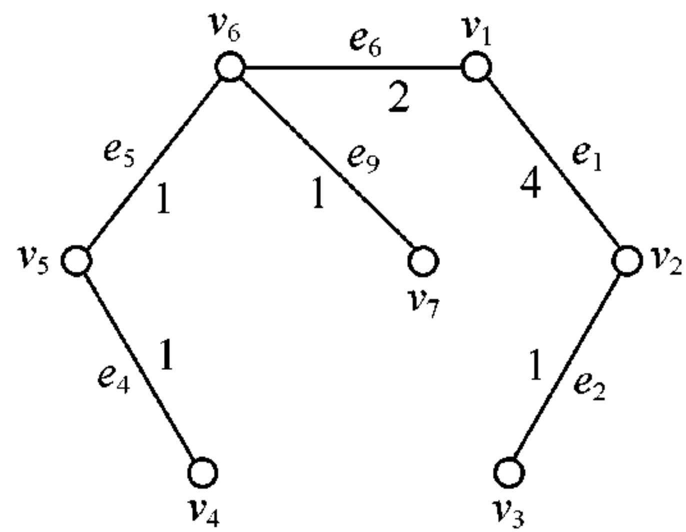
4 ）若 |S|=n−1 ，则算法停止，输出集合 S 即为所求。否则，转 3 ），继续遍历表 L 。

可以证明，算法 13.1 求得的是图 G 的最小生成树。

例 13.7 应用算法 13.1 求图 G 的最小生成树，G 如图（ a ）所示。



（a）



（b）

解：

（ 1 ）根据 Kruskal 算法，首先根据图 G 得到按权值的边排序表

L ：e_5， e_9， e_2， e_4， e_6， e_8， e_7， e_1，e_{10}， e_3， e_{11}

（ 2 ）然后，令$S=\varnothing$，

（ 3 ）接下来，依次 e_5， e_7， e_2， e_4， e_6， e_1；边 ，被忽略 e_8， e_9它们的加入会形成圈。

（ 4 ）此时 S 中有 6 条边， $|S|=n-1$，所以算法结束。

得到的最小生成树如图（ b ）所示，树权为 10 。

算法 13.2（ Prim 算法）

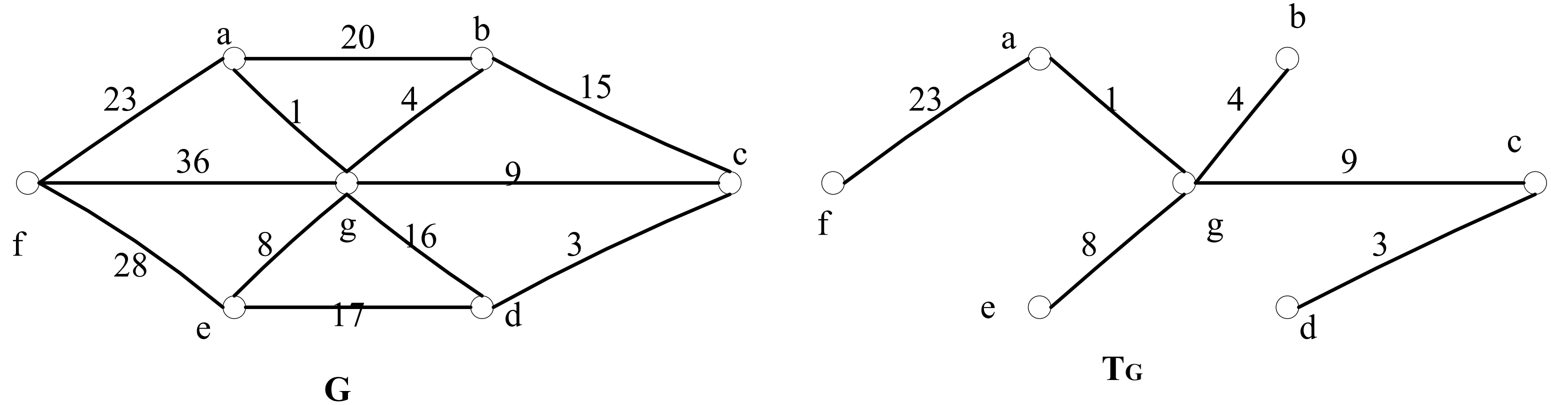
1 ）选出结点 v ，令 V(T)={v} $E(T)=\varnothing$;

2 ）在所有 $u\notin V(T)$ 结点中，若连接结点 u 和 w 的边 e= （ u ，w ）是最小权重边，若 $w\in V(T)$ 则令 $V(T)=V(T)\cup\{u\}$，

$E(T)=E(T)\cup\{(u, w)\}$

3 ）若 |E(T)|=n−1 ，算法停止，输出 E(T) 。否则，转 2 ），继续向树中增加新结点。

例 13.8 下左图所示的赋权图 G 表示七个城市 a，b，c，d，e，f，g 及架起城市间直接通讯线路的预测造价。试给出一个设计方案使得各城市间能够通讯并且总造价最小，并计算出最小造价。



解：该问题相当于求图的最小生成树问题，此图的最小生成树为图中的 T_G 因此如图架线使各城市间能够通讯，并且总造价最小，最小造价为：

$$W(T_G)=1+3+4+8+9+23=48.$$

算法 13.3（破圈法）

1）令 E'=E;

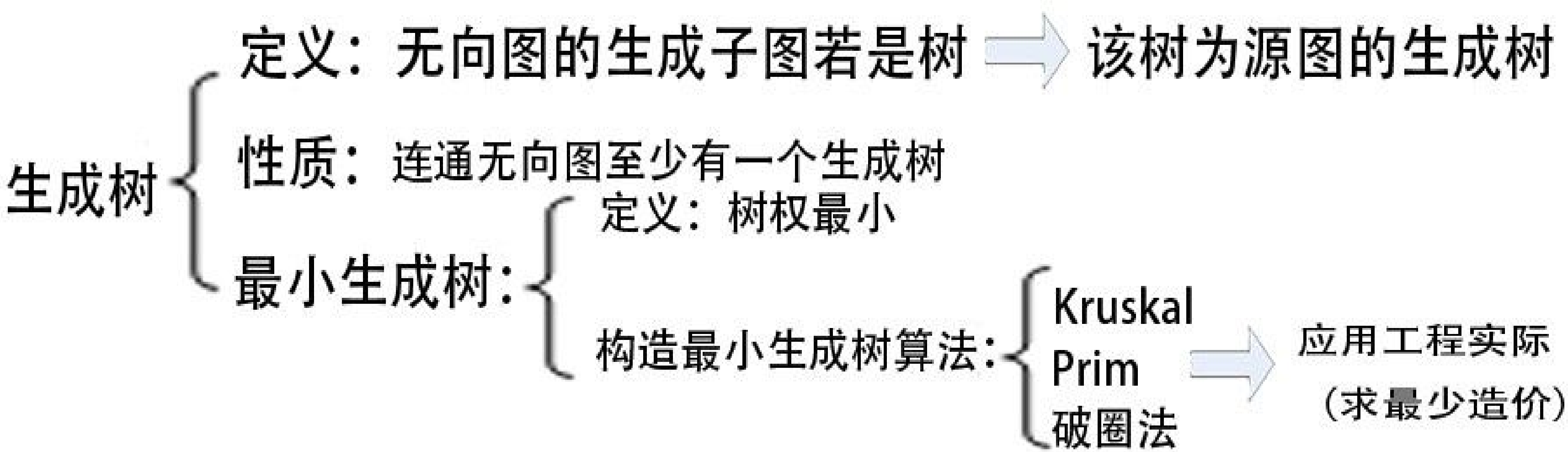
2）选取 E' 中的一条简单回路 C，设 C 中权最大的边为 e，令 E'=E'-{e}；

3）重复步骤 2），直到 |E'|=|V|-1 为止。

不停地选取图 G 中的一条简单回路，从回路中删去权值最大的一条边，直到图中无简单的回路为止。

小结：

（1）深刻理解基本回路、基本回路系统、基本割集、基本割集系统，并且对给定的生成树能熟练地求出它们。（2）熟练地应用Kruskal算法求最小生成树。关于生成树的思维形式注记图如图所示。



13.7 根树

- 根树
- 根树的周游
- 最优树 , Huffman 算法
- 最佳前缀码

13.7.1 根树的定义

定义 T 是有向树（基图为无向树）

(1) T 为**根树**—— T 中一个顶点入度为 0 ，其余的入度均为 1.

(2) **树根**——入度为 0 的顶点

(3) **树叶**——入度为 1 ，出度为 0 的顶点

(4) **内点**——入度为 1 ，出度不为 0 的顶点

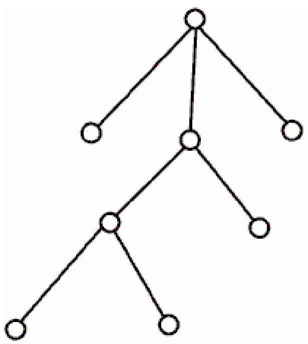
(5) **分支点**——树根与内点的总称

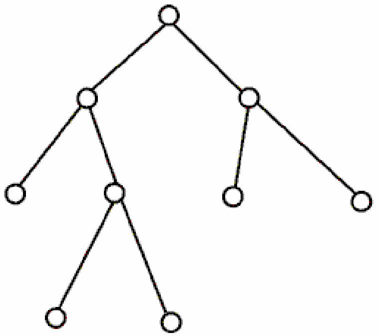
(6) 顶点 v 的**层数**——从树根到 v 的通路长度

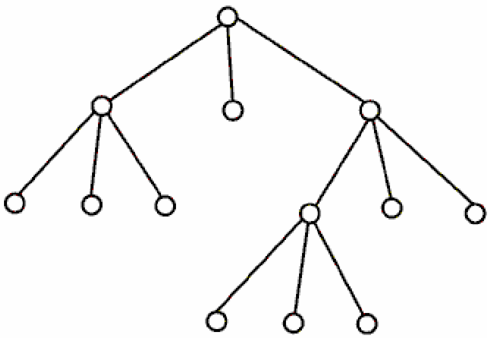
(7) **树高**—— T 中层数最大顶点的层数

(8) **平凡根树**——平凡图

根树的画法——树根放上方，省去所有有向边上的箭头



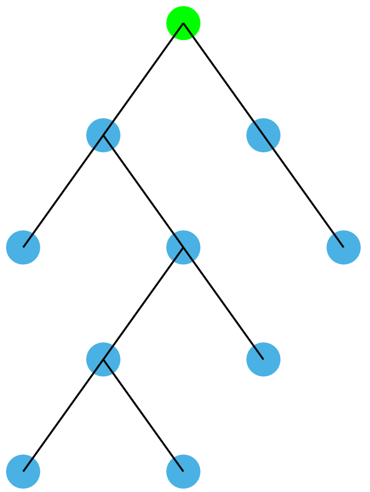




家族树与根子树

定义 T 为非平凡根树

- **祖先：** 从 u 可达 v, u 是 v 的**祖先**
- **后代：** 从 u 可达 v, v 是 u 的**后代**
- **儿子：** u 邻接到 v, v 是 u 的**儿子**
- **父亲：** u 邻接到 v, u 是 v 的**父亲**
- **兄弟：** u 与 v 有相同父亲 , u 是 v 的**兄弟**



定义设 v 为根树 T 中任意一顶点，称 v 及其后代的导出子图为以 v 为根的**根子树**.

13.7.2 二叉树

(1) T 为**有序根树**——同层上顶点标定次序的根树

(2) 分类

① r **叉树**——每个分支点**至多**有 r 个儿子

② r **叉有序树**—— r 叉树是有序的

③ r **叉正则树**——每个分支点恰有 r 个儿子

④ r **叉正则有序树**

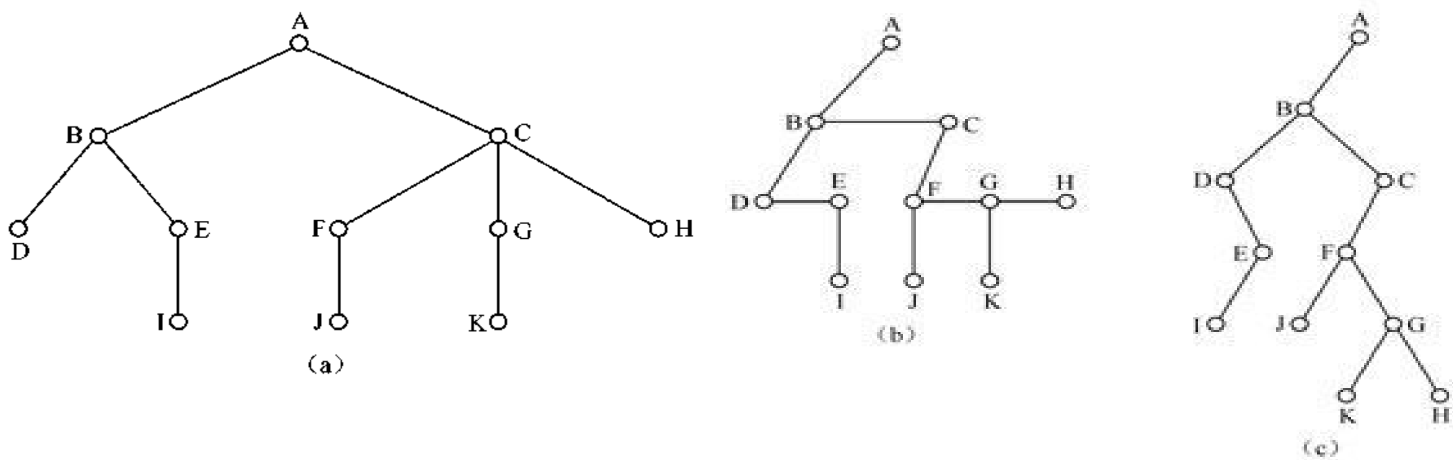
⑤ r **叉完全正则树**——树叶层数相同的 r 叉正则树

⑥ r **叉完全正则有序树**

我们特别关注 r=2 的特别情况。

- **完全二叉树 (Complete Binary Tree)**
- **若设二叉树的深度为 h ，除第 h 层外，其它各层 (1 ~ h-1) 的结点数都达到最大个数，第 h 层所有的结点都连续集中在最左边，这就是完全二叉树。**

- 任何一棵 m 叉树都可以改写为一棵对应的二叉树。方法如下：
- 首先，保留每个结点最左边的分支点，删去所有其他分支。同一层中，兄弟结点之间以从左到右的无向边连接。然后，将直接处于给定结点下面的结点，作为左儿子，与给定结点处于同一水平线上的右邻结点作为右儿子。



- 同样地，此方法可以推广到森林，将森林改写为二叉树。

定义设 2 叉树 T 有 t 片树叶 $v_1, v_2, \ldots, v_t$，权分别为 $w_1, w_2, \ldots, w_t$，称 $W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为 T 的权，其中 $l(v_i)$ 是 v_i 的层数．在所有有 t 片树叶，带权 $w_1, w_2, \ldots, w_t$ 的 2 叉树中，权最小的 2 叉树称为最优 2 叉树．

求最优树的算法—— Huffman 算法

输入：实数 w1,w2,…,wt,

输出：树叶权为 w1,w2,…,wt 的最优 2 叉树

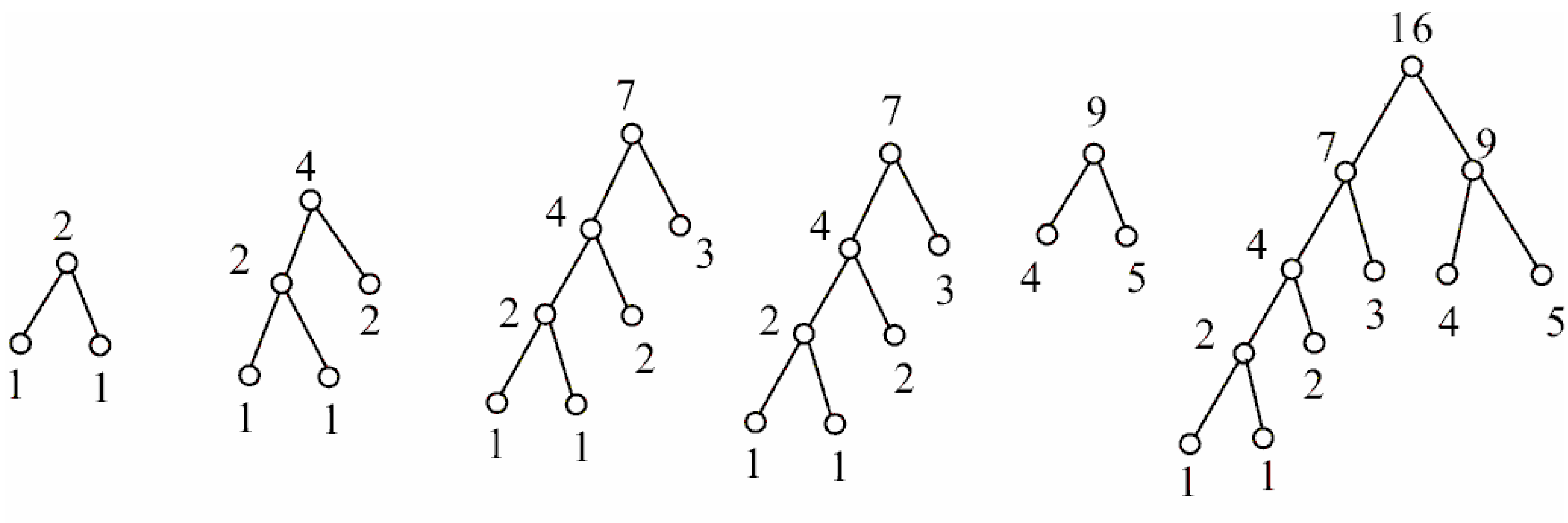
算法：1. 选择最小的 2 个权 w1,w2, 连接对应的树叶得到权为 w1+w2 的分支点；

2. 选择 w1+w2 ,w3,w4, …,wt 中最小的 2 个权，连接对应顶点得到新的分支点和权；

3. 同上重复进行，直到只剩 1 个权为止

例 求带权为 1, 1, 2, 3, 4, 5 的最优树 .

解题过程由下图给出， $W(T)$=38



不等长编码

若 {0,1,2,…,7} 出现频率不一样，则出现频率高的用短码字

例：频率递减：0,1,2,3,4,5,6,7，编码为

0,1,00,01,10,11,000,001.

若收到 000111，不能唯一解码：

651, 235, 075,… 等 .

原因：码字互为前缀，如 00 是 001 的前缀

最佳前缀码

定义设$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n$是长度为 n 的符号串

(1) **前缀**——$\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$

(2) **前缀码**—— $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ 中任何两个元素互不为前缀

(3) **二元前缀码**——$\beta_i\,(i=1, 2, \ldots, m)$ 中只出现两个符号，如 0 与 1.

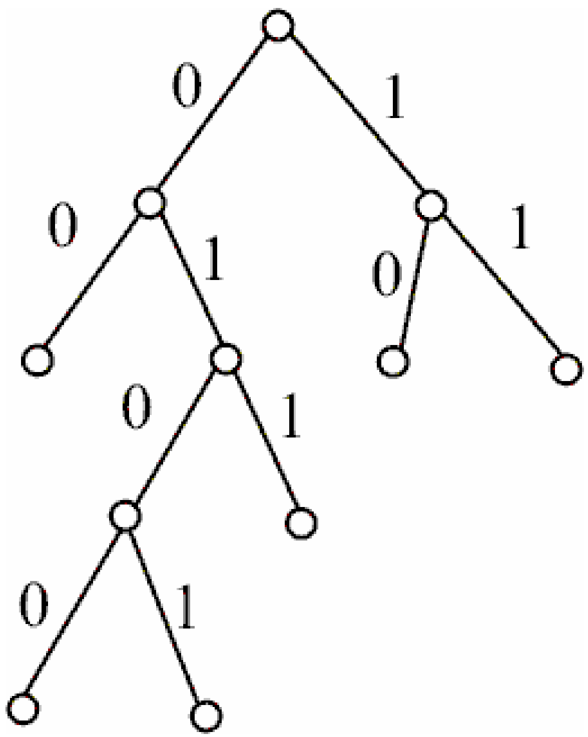
如何产生二元前缀码？

定理 任何一棵 2 叉树的树叶可对应一个二元前缀码 .

推论 一棵正则 2 叉树产生惟一的前缀码（按左子树标 0 ，右子树标 1 ）

下图所示 2 叉树产生的前缀码为

{ 00, 10, 11, 011, 0100, 0101 }



用 Huffman 算法产生最佳前缀码

例 在通信中，八进制数字出现的频率如下：

0 ： 25%　　1 ： 20%

2 ： 15%　　3 ： 10%

4 ： 10%　　5 ： 10%

6 ： 5%　　7 ： 5%

求传输它们的最佳前缀码，并求传输 10^n（ $n2$ ）个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？若用等长的（长为 3 ）的码字传输需要多少个二进制数字？

解 用 100 个八进制数字中各数字出现的个数，即以 100 乘各频率为权，并将各权由小到大排列，得 w_1=5, w_2=5, w_3=10, w_4=10, w_5=10, w_6=15, w_7=20, w_8=25. 用此权产生的最优树如图所示 .

01-----0　　11-----1

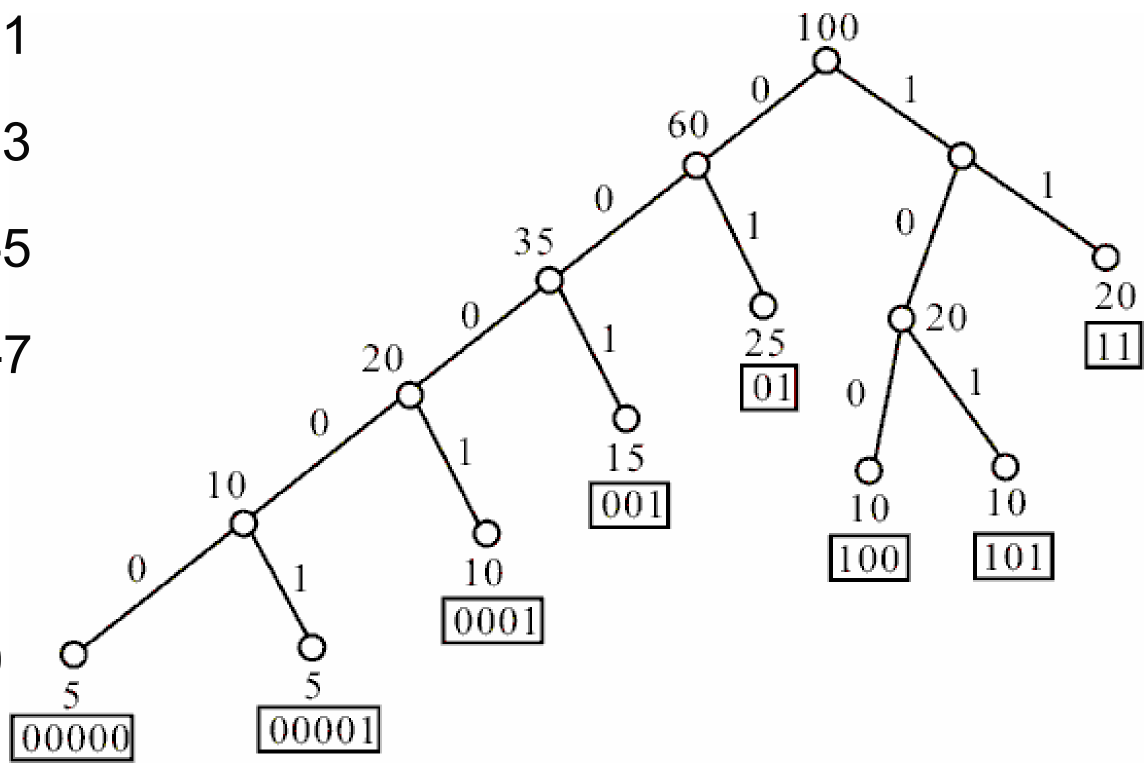
001-----2　　100-----3

101-----4　　0001-----5

00000-----6　　00001-----7

$W(T)$=285，传 $10^n(n2)$个

用二进制数字需 2.85×10^n个，用等长码需 3×10^n个数字 .



波兰符号法与逆波兰符号法

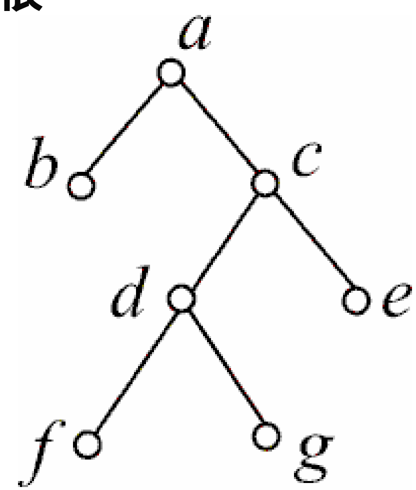
遍历或周游根树 T——对 T 的每个顶点访问且仅访问一次．

对 2 叉有序正则树的周游方式：

① **中序遍历法**——次序为：左子树、根、右子树

② **前序遍历法**——次序为：根、左子树、右子树

③ **后序遍历法**——次序为：左子树、右子树、根



对图所示根树按中序、前序、后序遍历法访问结果分别为：

$b\ a\ (f\ d\ g)\ c\ e$ ，

$a\ b\ (c\ (d\ f\ g)\ e)$ ，

$b\ ((f\ g\ d)\ e\ c)\ a$

用 2 叉有序正则树存放算式

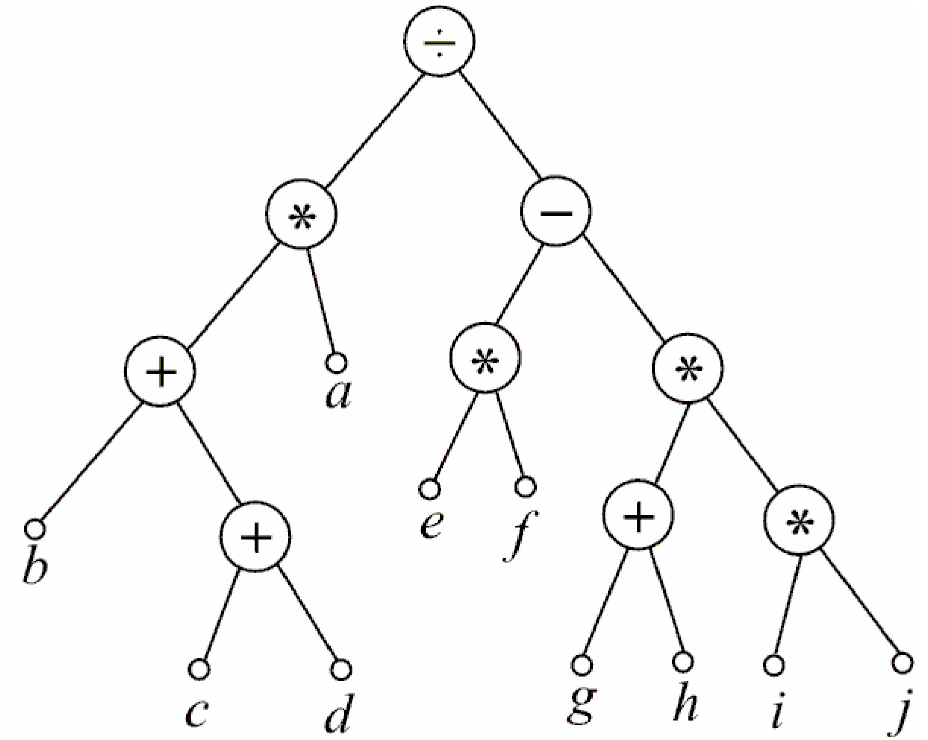
存放规则：

最高层次运算放在树根；

后依次将运算符放在子树的根上；

数放在树叶上；

规定：被除数、被减数放在左子树树叶上。



算式 $((b+(c+d))*a)\div((e*f)-(g+h)*(i*j))$

存放在图所示 2 叉树上 .

波兰符号法

波兰符号法

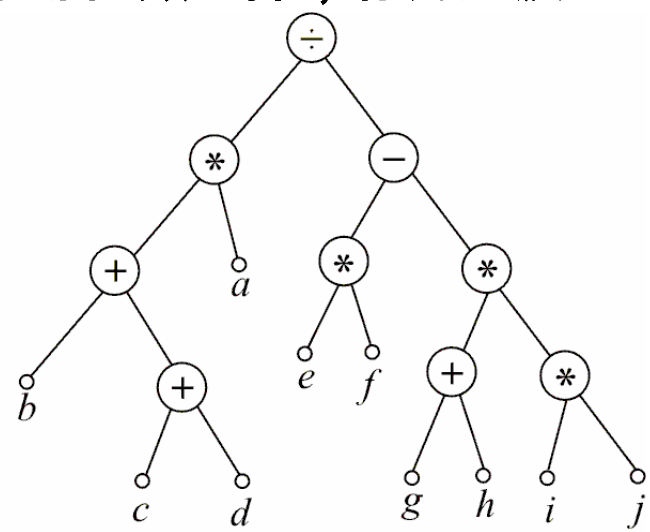
按前序遍历法访问存放算式的 2 叉有序正则树，其结果不加括号，规定每个运算符号与其后面紧邻两个数进行运算，运算结果正确．称此算法为波兰符号法或前缀符号法．对前图的访问结果为

$$\div * + b + c\, d\, a - * e f * + g h * i j$$

逆波兰符号法

按后序遍历法访问，规定每个运算符与前面紧邻两数运算，称为逆波兰符号法或后缀符号法．对上图的访问结果为

$$b\, c\, d + + a * e f * g h + i j * * - \div$$



作业

补充习题 13

13.8 常见题型解析

1）树的性质。

2）解无向树与生成树、最小生成树。

3）基本回路与基本割集。

4）根树与二叉树。

5）综合应用。

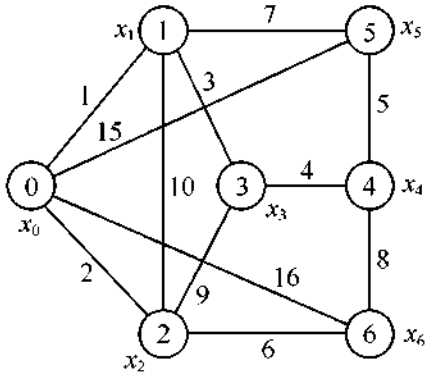
1 ）树的性质

例 13.15 试证明：如果无环图 G 的任意两顶点都被唯一的路相连，则 G 是树。

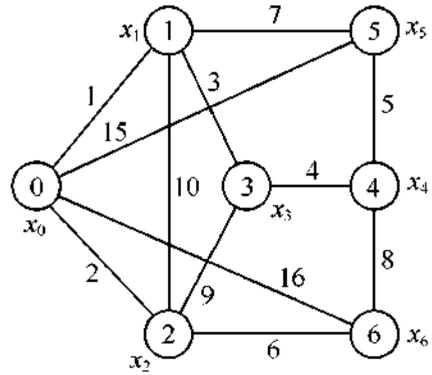
证：由于 G 中任意两顶点都被唯一的路相连，故 G 连通。又若 G 含有圈 C ，则 C 上的两点，在 G 中存在两条路相连，这与“唯一的路”的假定矛盾，故 G 中不含圈，由树的定义， G 是树。
证毕。

例 13.16 考虑图（a）所示的加权图 (G, w)。按 Prim 算法构造最小生成树 *T*。

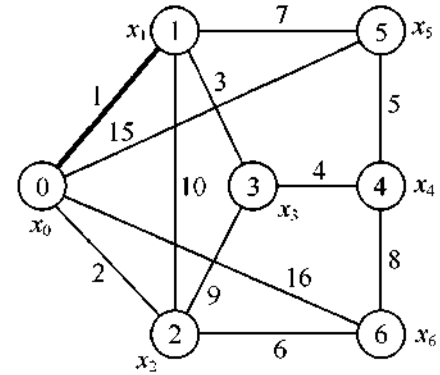
解：求解过程如图所示，其中图（b）所示的是算法的第 1 步；而图（c）到（h）所示的是算法第 2 步的 6 次迭代，每次迭代后得到一个新顶点 x_k 和一条新边 e_k（图中粗边所示）。$w(T)$=21（即各顶点标号 t(x) 之和）。



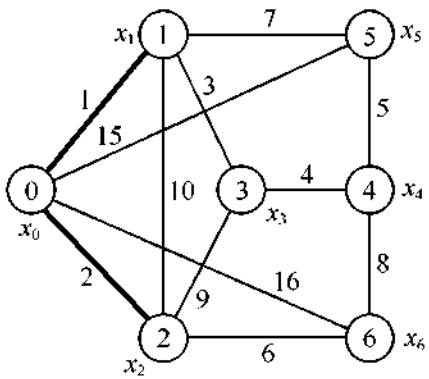
（a）



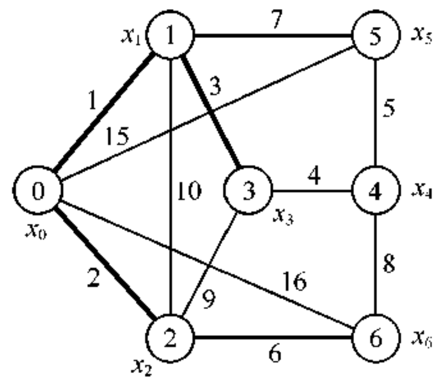
（b）令 $V(T)=\{x_0\}$，$E(T)=\phi$



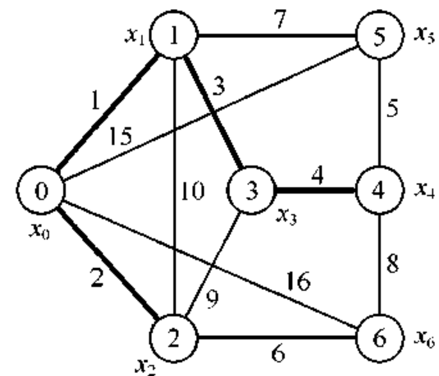
（c）



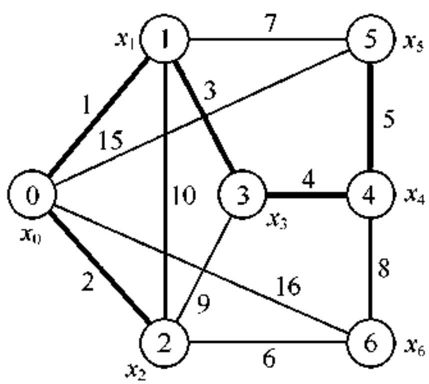
（d）



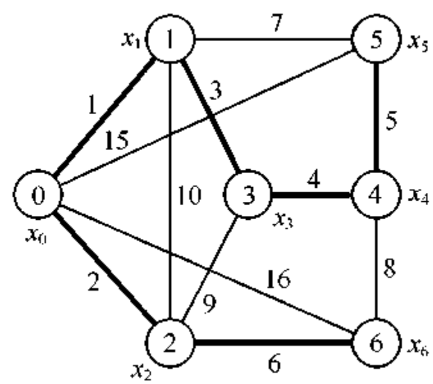
（e）



（f）



（g）



（h）

3）基本回路与基本割集

例 13.17 设 $G=<V, E>$ 是连通图，$e\in E$，证明：e 是 G 的割边的充分必要条件是 e 在 G 的每一棵生成树中。

证：设 e 是 G 的割边，下证 e 在 G 的每棵生成树。

e 是 G 的割边，则$\{e\}$是边割集，故$\{e\}$与生成树 T 至少有一条公共边，所以，e 在 T 中。

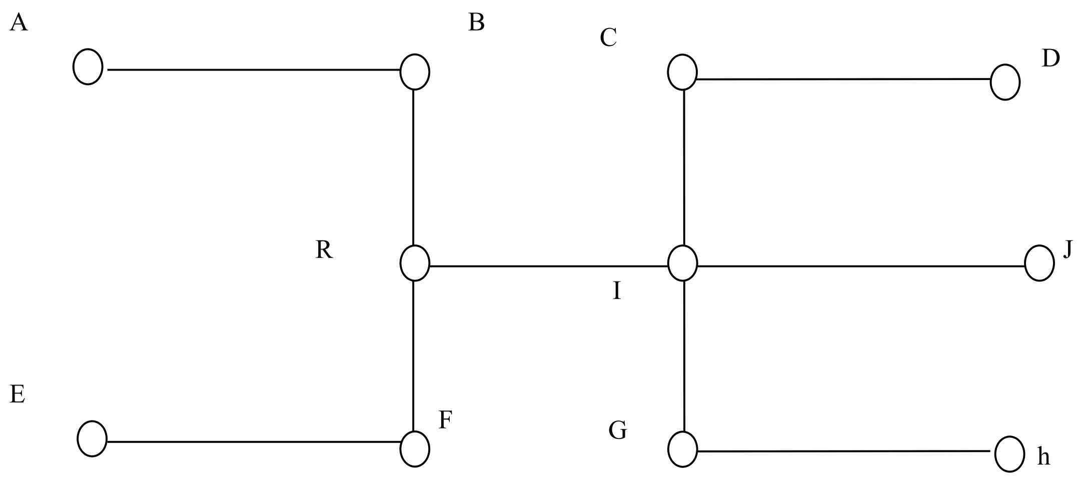
设 e 在 G 的每棵生成树中，下证 e 是 G 的割边。

反证法。设 e 不是 G 的割边，则删除 e，所得图 G' 是连通的，由定理 13.6 知 G' 中必有生成树 T'。显然，T' 也是 G 的生成树，但 e 不在 T' 中，与条件矛盾。

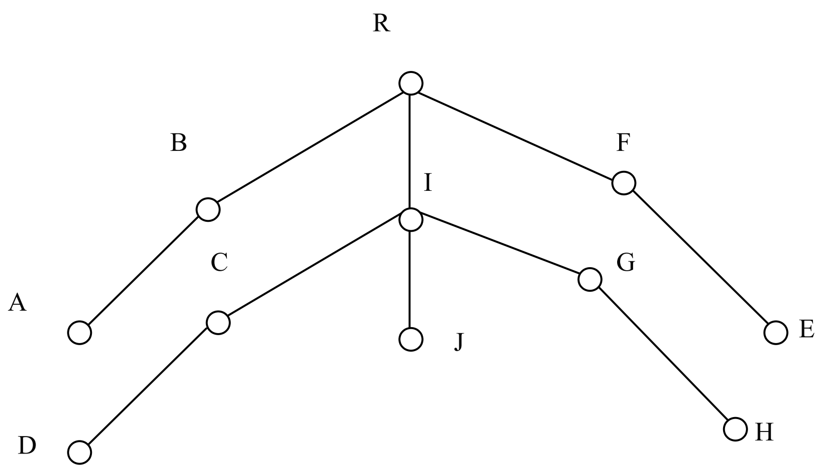
证毕。

4 ）根树与二叉树

例 13.18 将下图表示成以 R 为根的自顶向下的有根树，然后再将有根树化为二叉树。

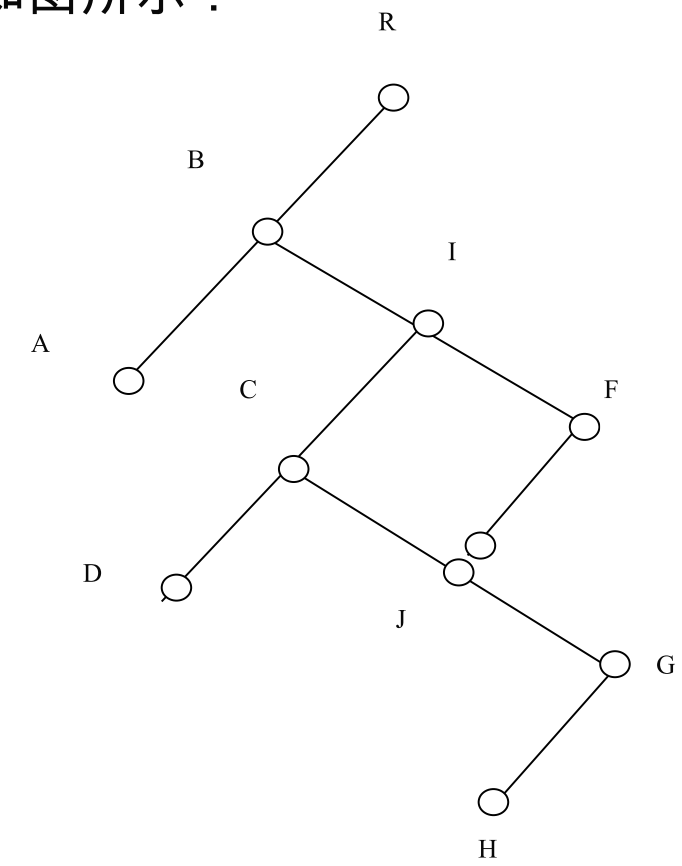


解：转化后的自顶向下的有根树如图所示：



（a）

相关的二叉树如图所示：



5) 综合应用

例 13.19 在通信中，当传输字符出现的频率不同时，怎样产生前缀码才能使传输同样多字符，而使用的二进制位最少。这样的前缀码称为最佳前缀码。最佳前缀码可以用下列方法产生：将各字符出现的频率乘 100 作为权，利用 Huffman 算法求最优 2 叉树，由此最优 2 叉树产生的前缀码，就得到了最佳前缀码。

设在通信中，0,1,2,3,4,5,6,7 出现的频率如下：

0 ： 30%　　4 ： 10%

1 ： 20%　　5 ： 5%

2 ： 15%　　6 ： 5%

3 ： 10%　　7 ： 5%

使用上述方法，求表示 0,1,2,3,4,5,6,7 的最佳前缀码。

解：各字符出现的频率乘 100 作为权，0,1,2,3,4,5,6,7 的权为：

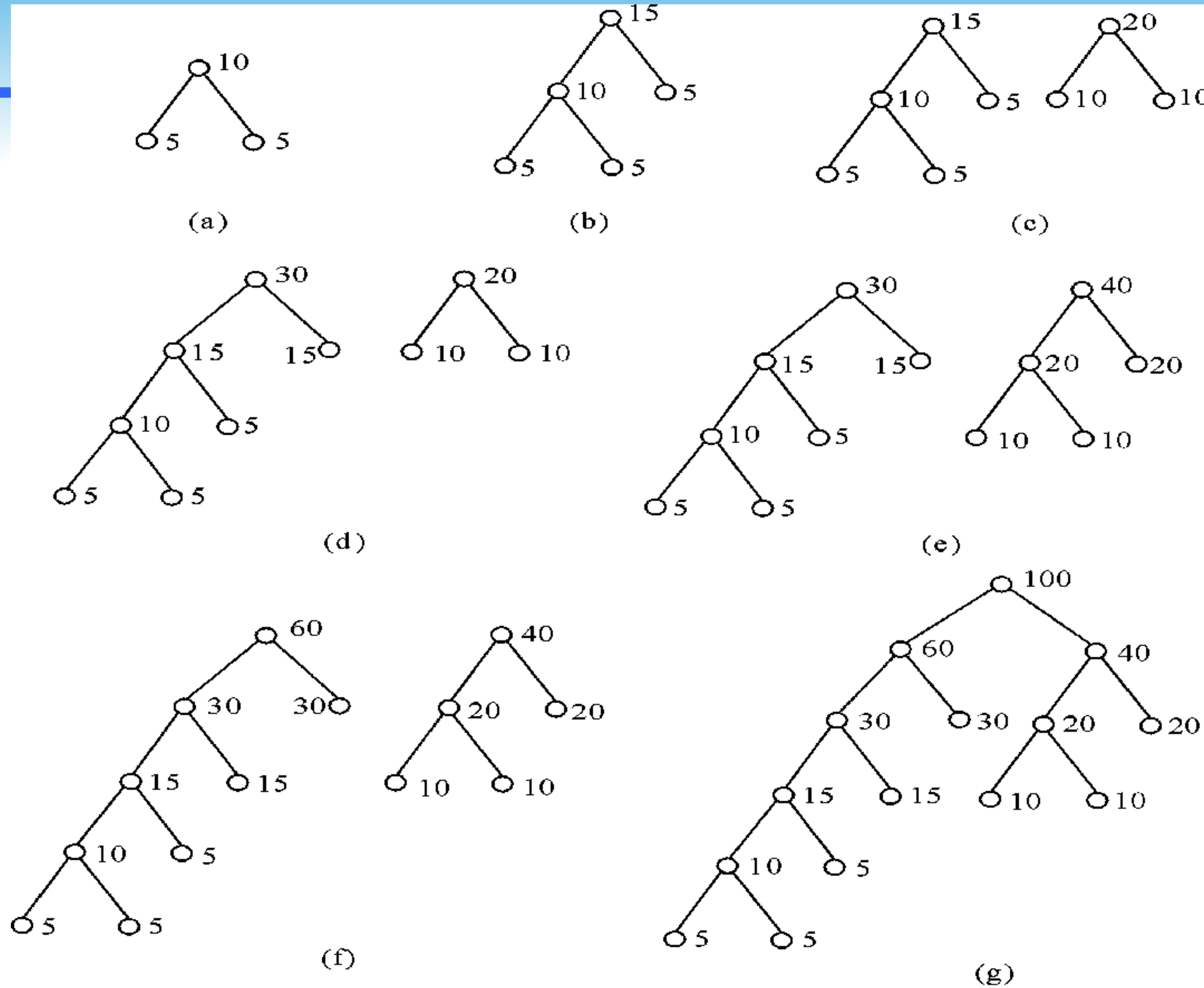
0 ：30 ，　4 ：10 ，

1 ：20 ，　5 ：5 ，

2 ：15 ，　6 ：5 ，

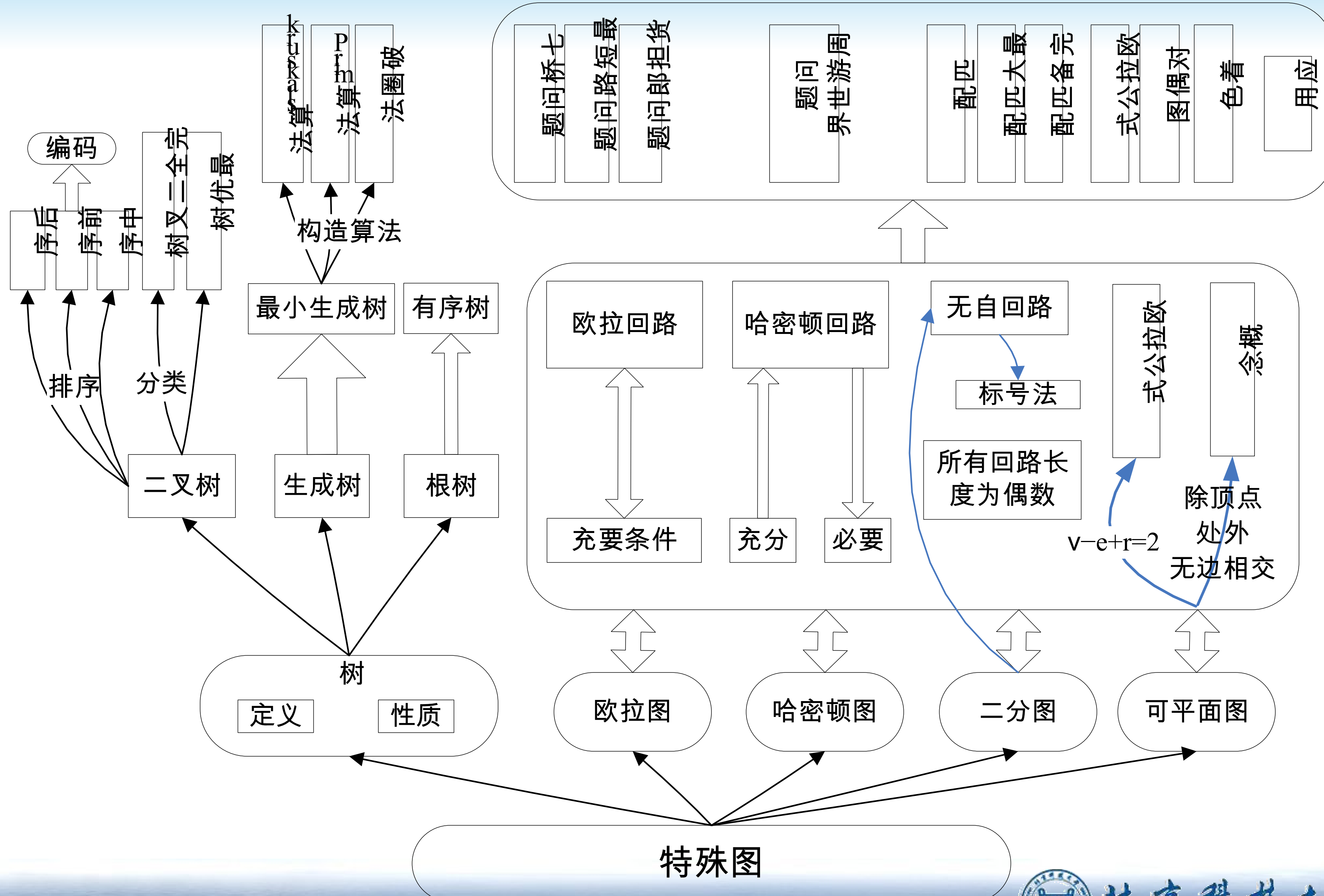
3 ：10 ，　7 ：5 ，

下图给出了生成最优二叉树的过程。



表示 0,1,2,3,4,5,6,7 的最佳前缀码是{ 01,11,001,100,101,0001,00000,00001 }
。

本章小结



七桥问题
最短路问题
货郎担问题
周游世界问题
匹配
最大匹配
完备匹配
欧拉公式
对偶图
着色
应用
Kruskal算法
Prim算法
破圈法
构造算法
编码
后序
前序
中序
完全二叉树
最优树
排序
分类
最小生成树
有序树
二叉树
生成树
根树
树
定义
性质
欧拉回路
哈密顿回路
充要条件
充分
必要
无自回路
标号法
所有回路长度为偶数
欧拉公式
概念
v−e+r=2
除顶点处外无边相交
欧拉图
哈密顿图
二分图
可平面图
特殊图