第十一讲

§4 几个初等函数所构成的映射

- 1. 幂函数
- 2. 指数函数

1. 幂函数

幂函数： $w = z^n (n \quad 2$为自然数)

$$\because \frac{dw}{dz} = nz^{n-1} \qquad \frac{dw}{dz} \neq 0 \quad (z \neq 0)$$

$\therefore$ 在z平面内除去原点外,由$w = z^n$所构成的映射处处共形.

令$z = re^{i\theta} \qquad w = \rho e^{i\varphi}$

又$w = z^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow \rho = r^n \qquad \varphi = n\theta$

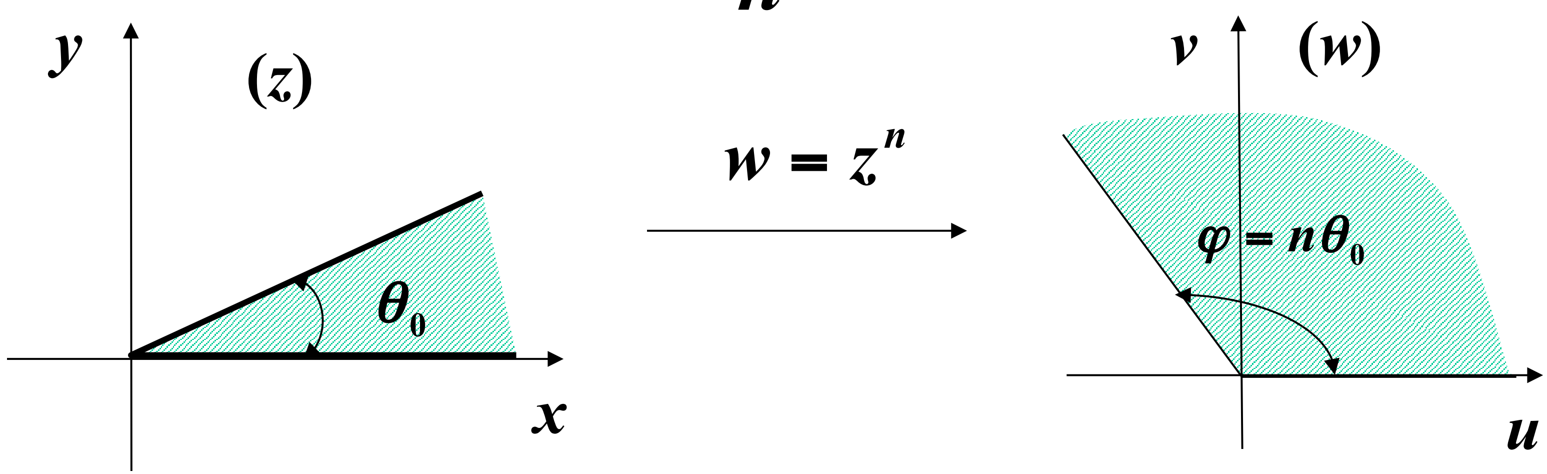
由此可见，在$w = z^n$映射下，

$|z| = r \to |w| = r^n$ 特别：$|z| = 1 \to |w| = 1.$

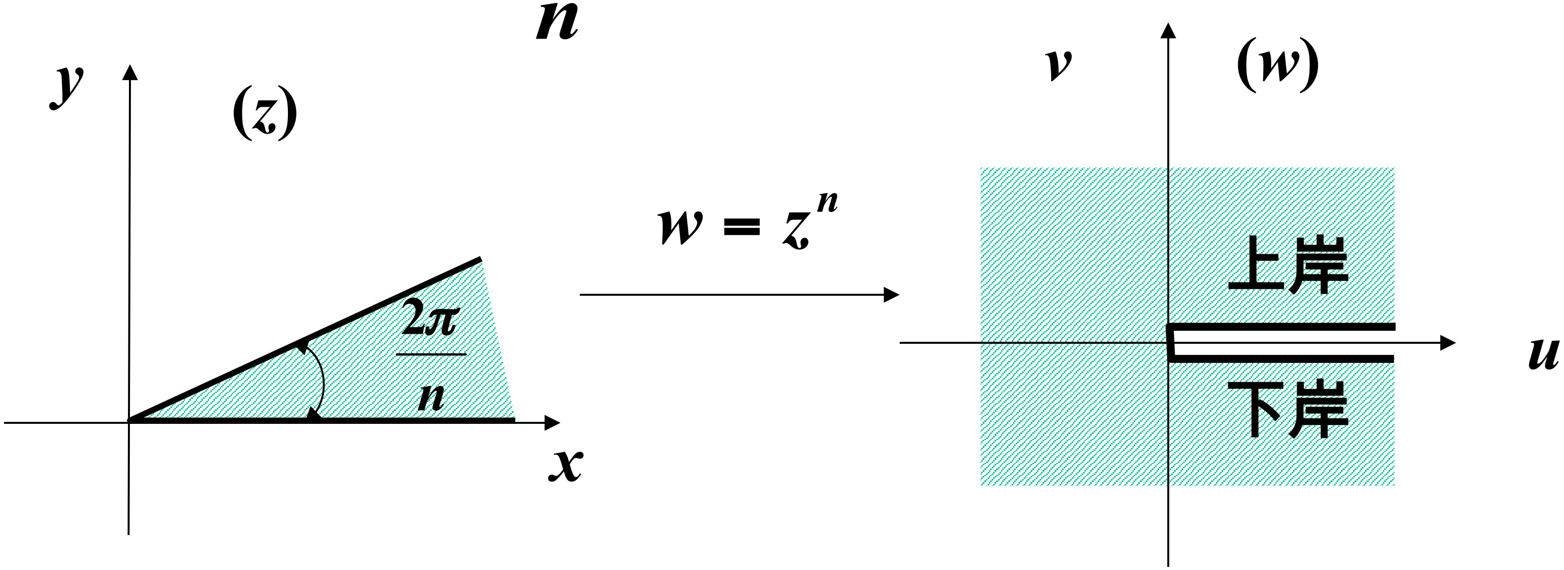
射线$\theta = \theta_0 \to \varphi = n\theta_0$

特形：$\theta = 0 \to \varphi = 0$(正实轴映射成正实轴)

角形域$0 < \theta < \theta_0 (< \frac{2\pi}{n}) \to$ 角形域$0 < \varphi < n\theta_0$



特别：$0 < \theta < \dfrac{2\pi}{n} \rightarrow 0 < \varphi < 2\pi$



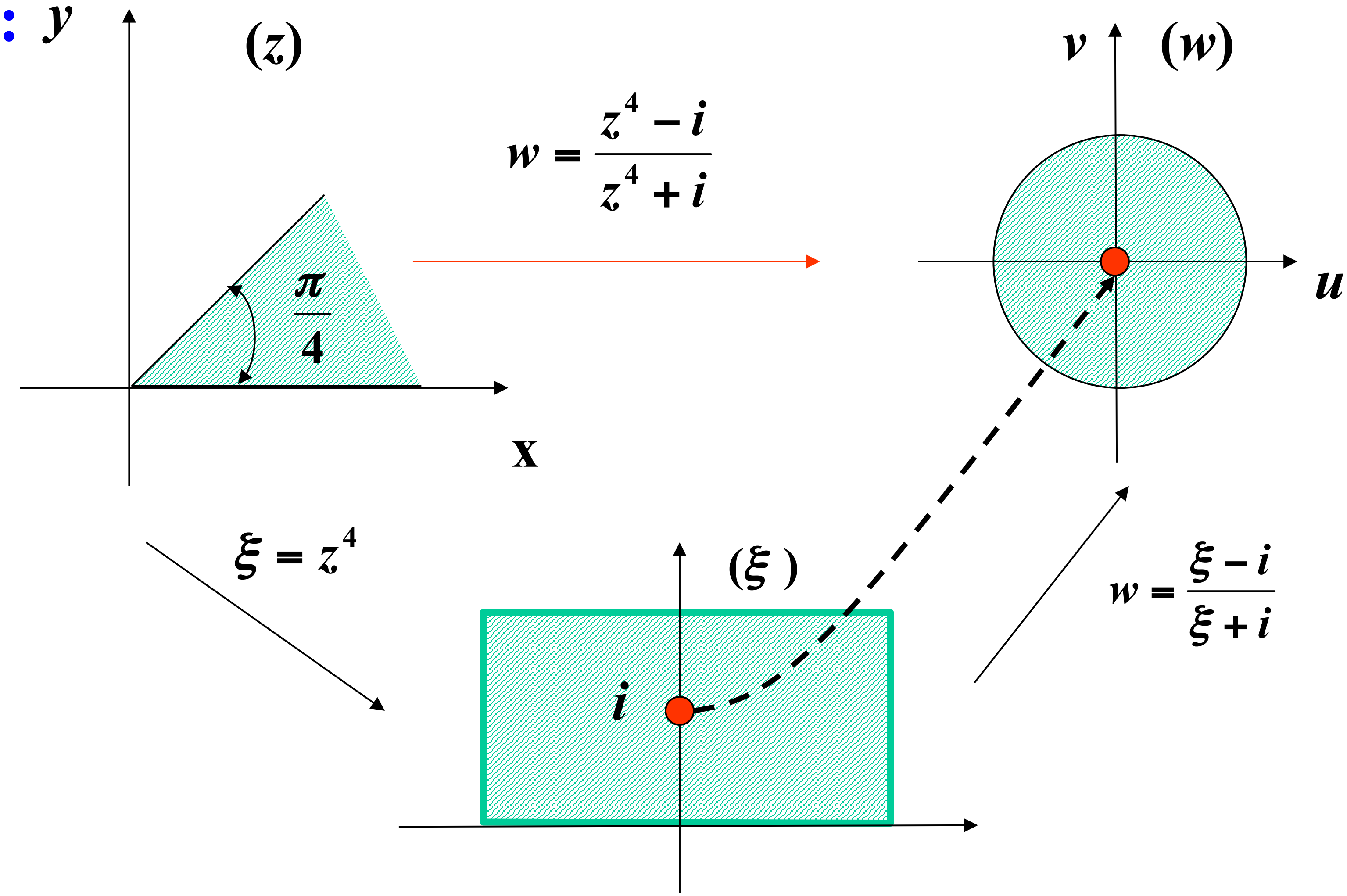
从这里可以看出在$z=0$处角形域的张角经过这一映射后变了原来的n倍，$\therefore n \quad 2$时，映射$w=z^n$在$z=0$处没有保角性.

幂函数所构成的映射特点：把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域，但张角变成了原来的 n 倍，因此，

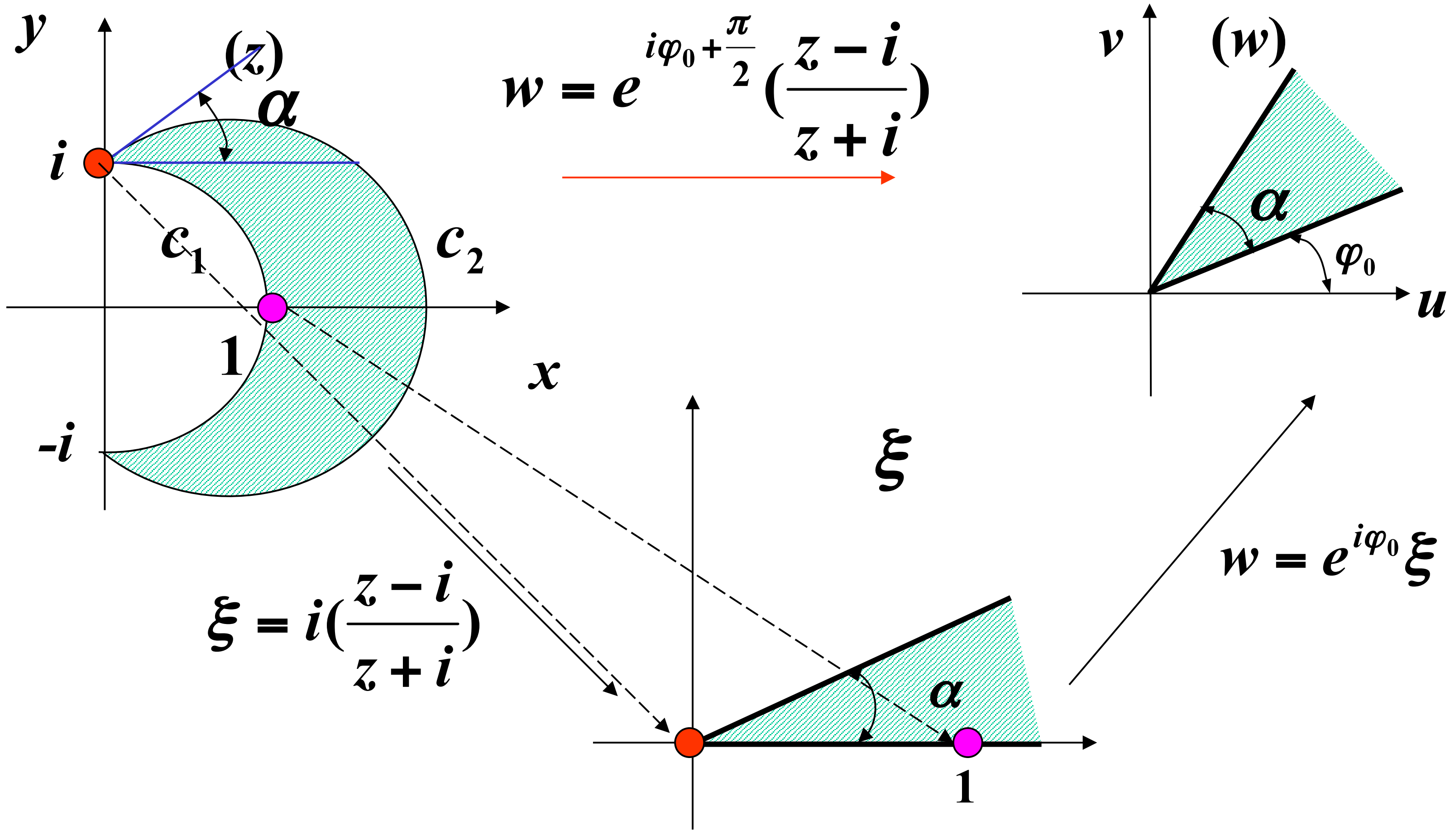
如果要把角形域 $\rightarrow$ 角形域常采用幂函数.

例 1 求将$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4} \to |w| < 1$的一个映射.

解：



例 2 求将图中由圆弧c_1与c_2所围成的交角为α的月牙域$\to \varphi_0 < \arg w < \varphi_0 + \alpha$的一个映射.



2. 指数函数

指数函数：$w = e^z$

$\because \ w' = e^z \neq 0$

$\therefore w = e^z$是全平面上的共形映射.

设$z = x + iy \quad w = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho = e^x \quad \varphi = y$ --(2)

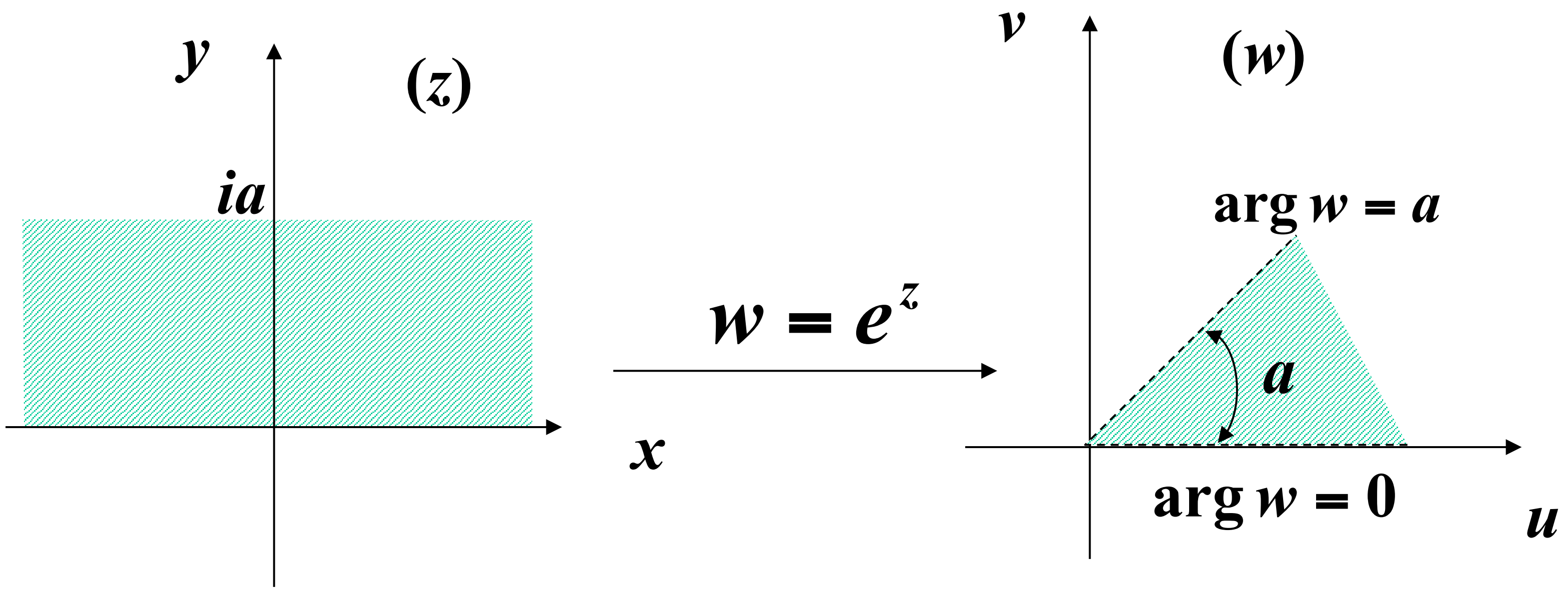
由此可知

直线 :$\operatorname{Re} z =$ 常数 $= c \to$ 圆 :$|w| = e^c$

直线:$\operatorname{Im} z =$ 常数 $= c_1 \to$ 射线：$\varphi = c_1$

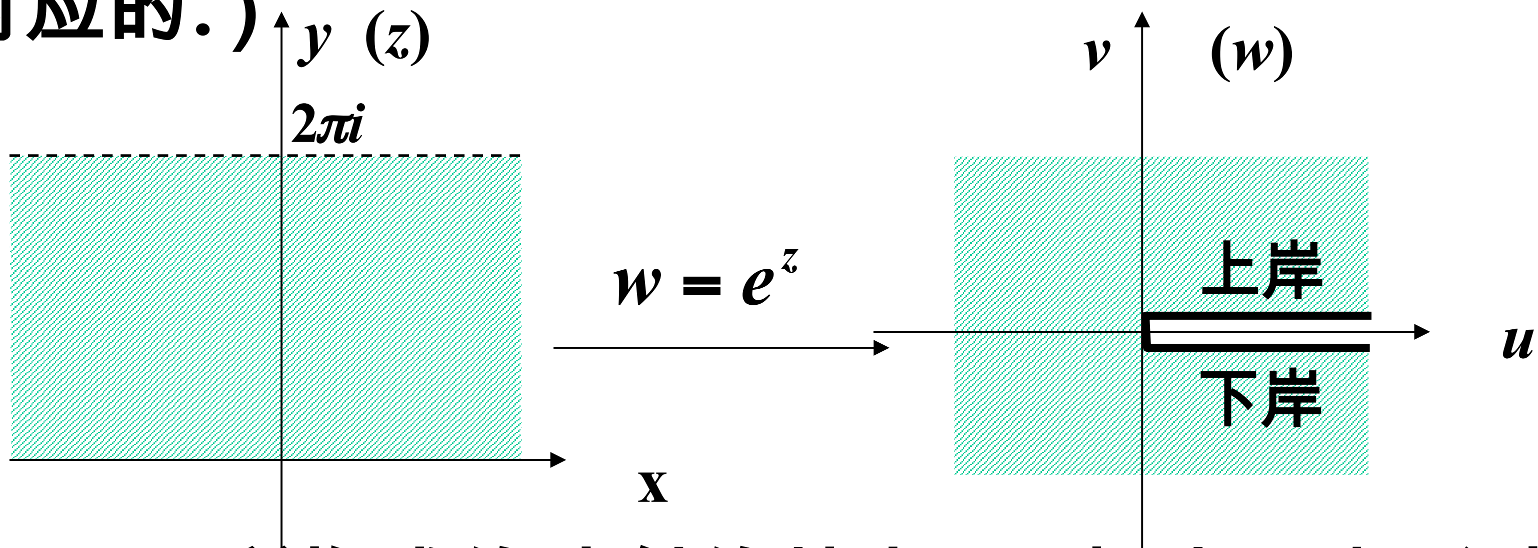
$$0 < \operatorname{Im} z < a \,(0 < a \leq 2\pi) \rightarrow 0 < \arg w < a$$

带形区域 $\longrightarrow$ 角形区域



特形 $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \rightarrow 0 < \arg w < 2\pi$

(沿正实轴剪开的 w平面,它们之间的点是一一对应的.)



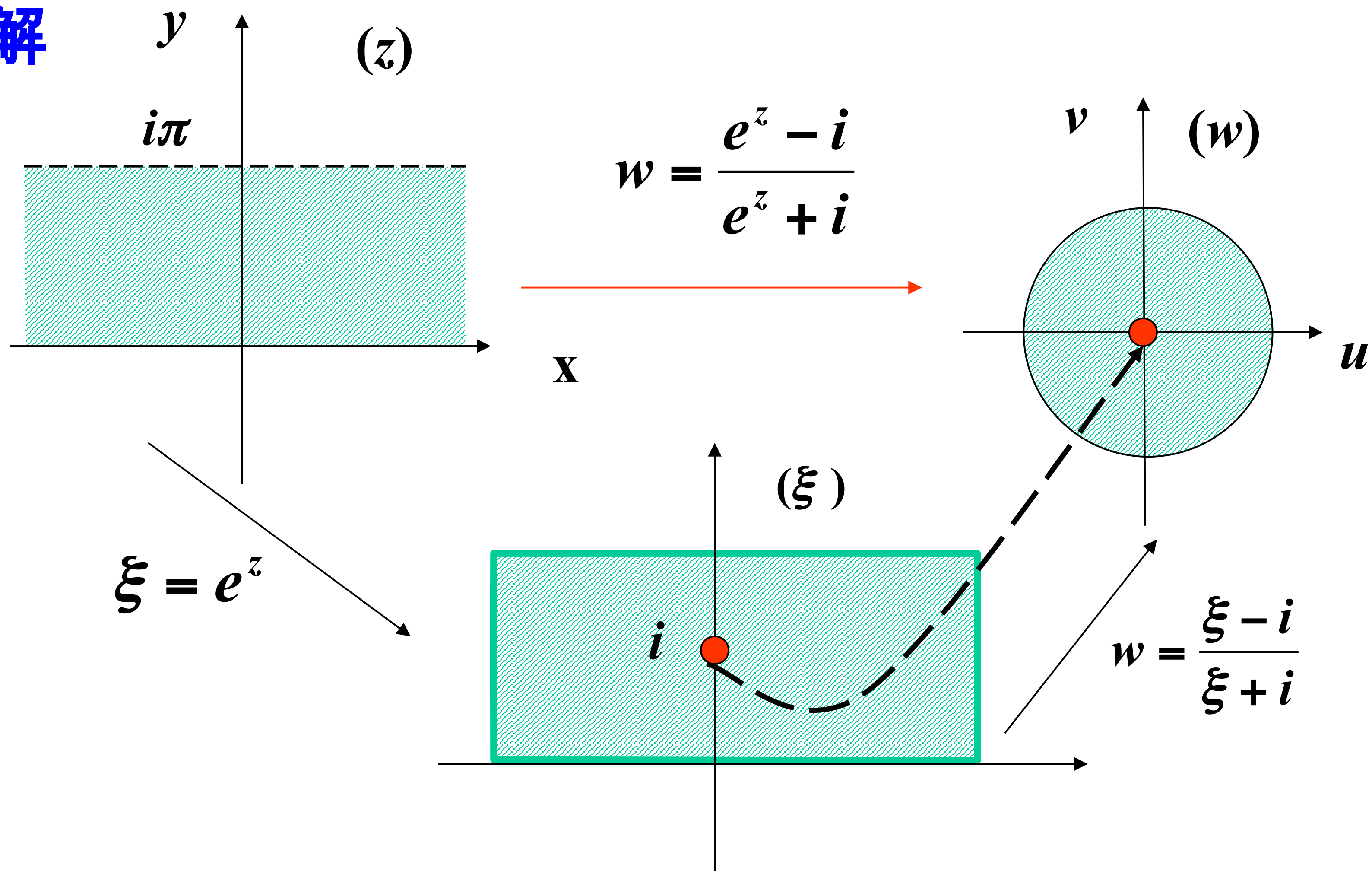
由$w = e^z$所构成的映射的特点是:把水平带形域

$0 < \operatorname{Im}(z) < a(a \leq 2\pi) \rightarrow$ 角形域$0 < \arg w < a$

因此,若需把 带形域映射成角形域常用指数函数.

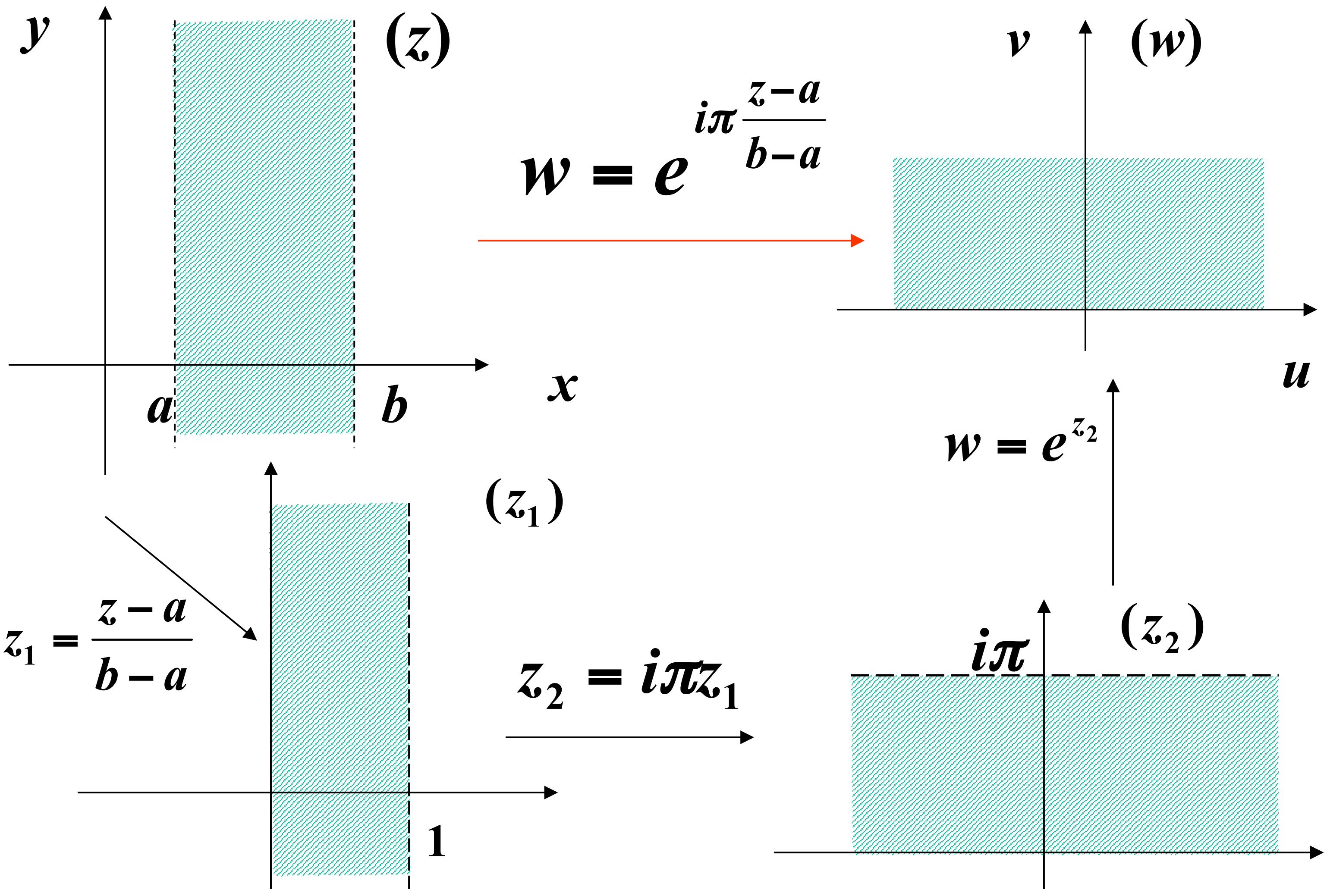
例 3 求将$0 < \mathrm{Im}(z) < \pi$映射成$|w| < 1$的一个映射.

解



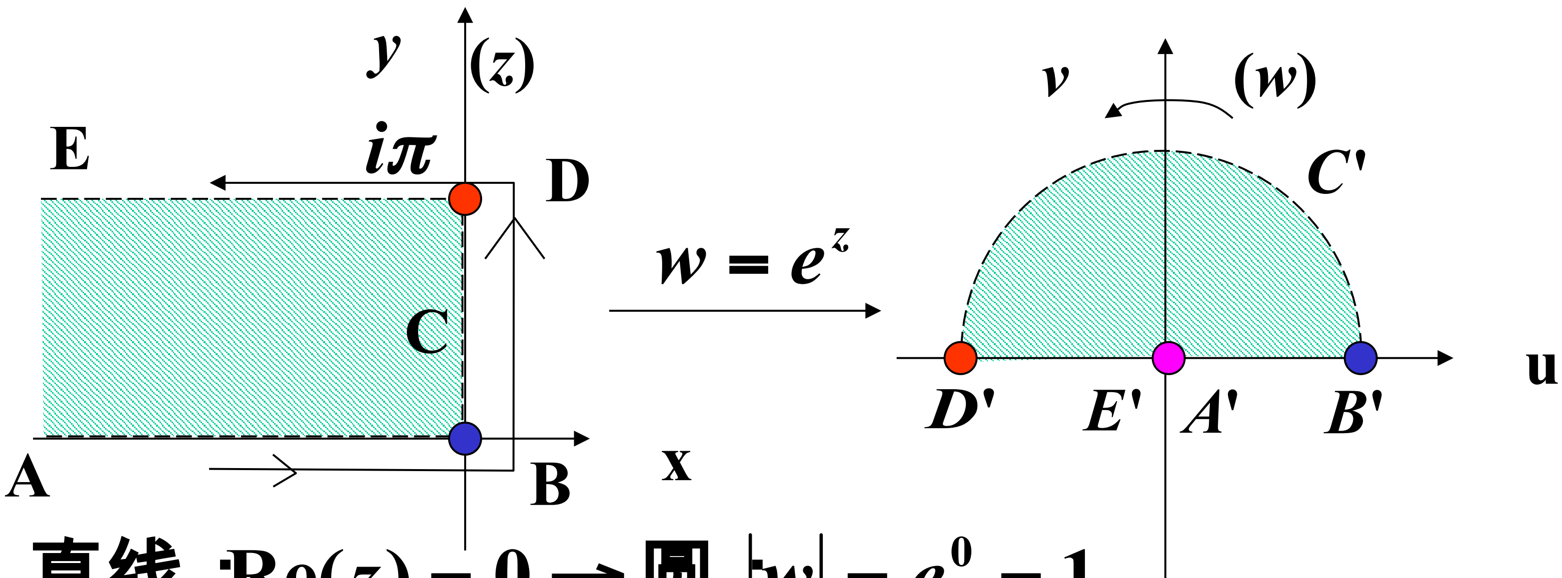
例 4 求把带形域$a < \mathrm{Re}\, z < b$映射成上半平面$\mathrm{Im}(z) > 0$.

解



例 5 问：$w = e^z$将半带形域：$\begin{cases} -\infty < \mathrm{Re}(z) < 0 \\ 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi \end{cases}$

映射成什么区域？



解 直线：$\mathrm{Re}(z) = 0 \rightarrow$ 圆：$|w| = e^0 = 1$

直线：$\mathrm{Im}(z) = 0 \rightarrow$ 射线：$\varphi = 0$

直线：$\mathrm{Im}(z) = \pi \rightarrow$ 射线：$\varphi = \pi$

$ABCDE \rightarrow$

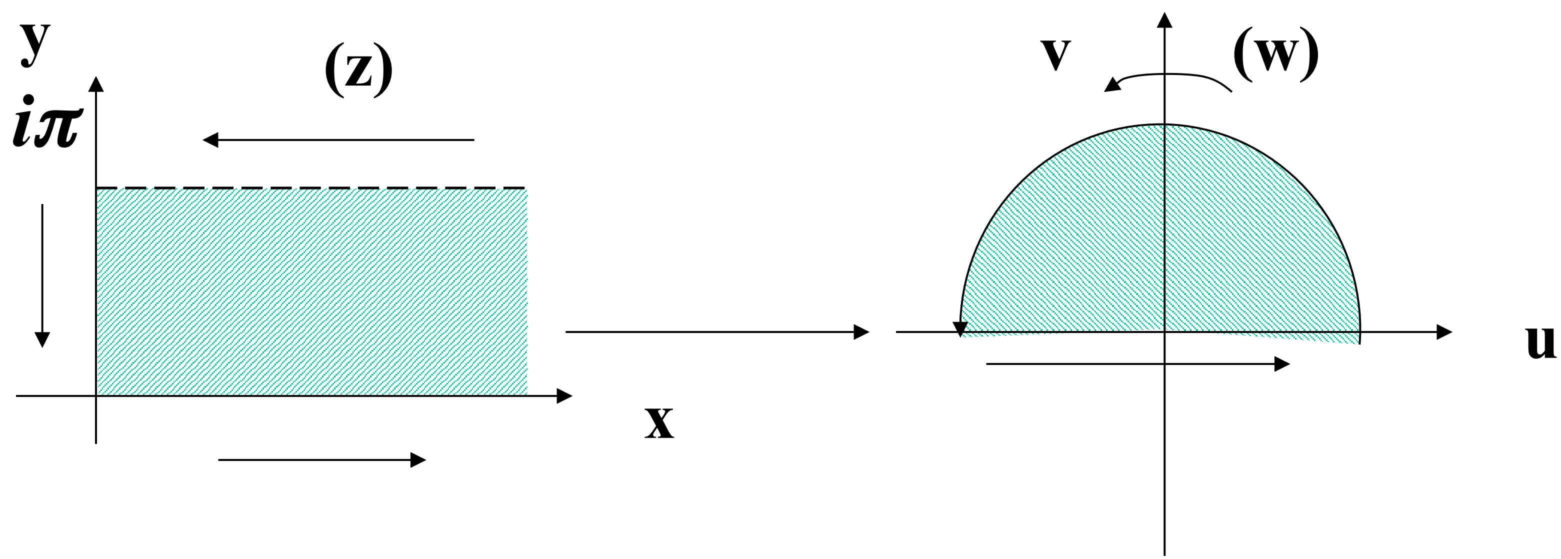
$A'B'C'D'E'$

答： $w = e^z$将半带形域：$\begin{cases} -\infty < \mathrm{Re}(z) < 0 \\ 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi \end{cases}$

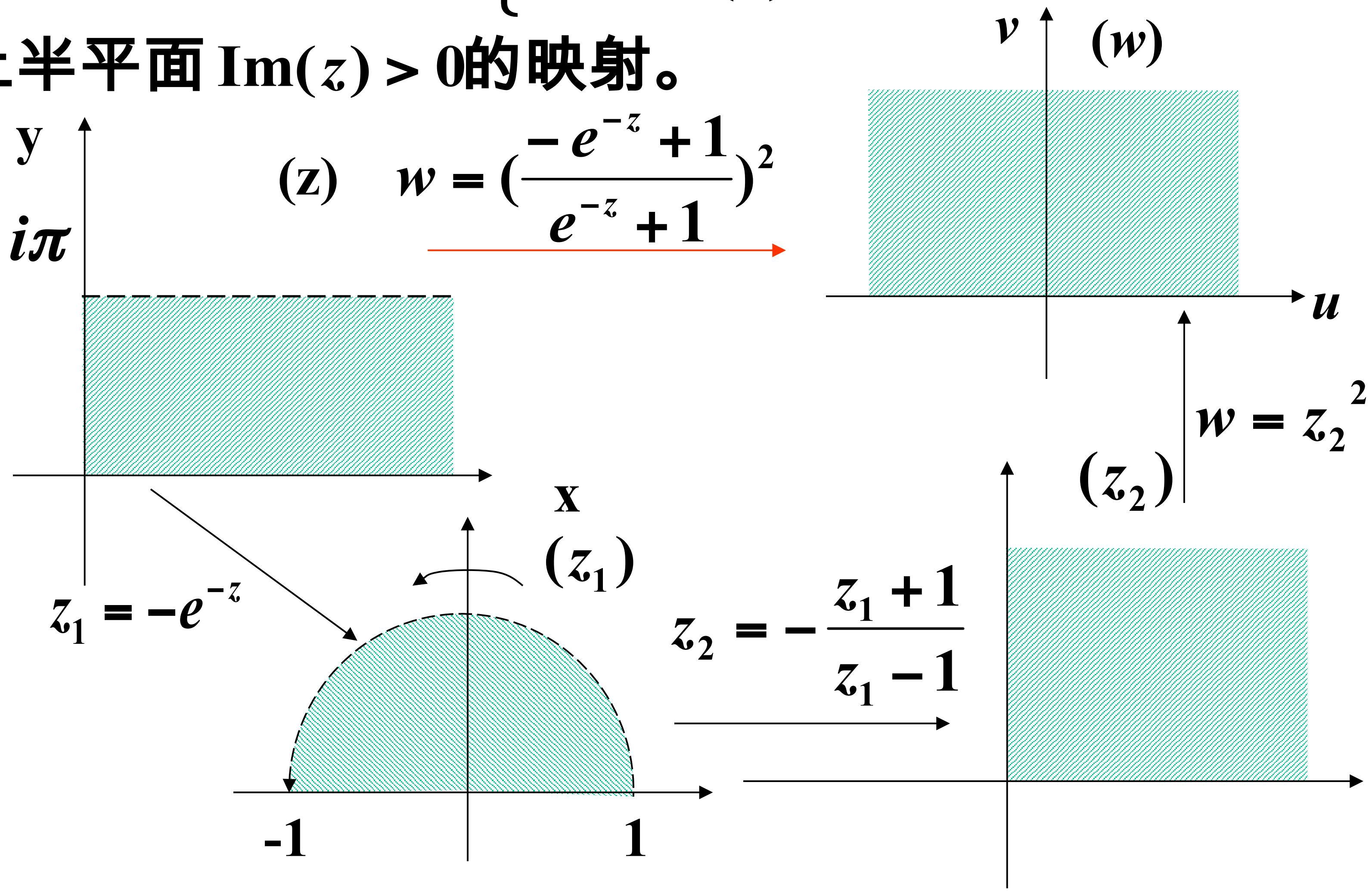
映射成半单位圆$|w| < 1(\mathrm{Im}(z) > 0)$

同理 $w = -e^{-z}$将半带形域：$\begin{cases} 0 < \mathrm{Re}(z) < +\infty \\ 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi \end{cases}$

半单位圆映射成$|w| < 1(\mathrm{Im}(z) > 0)$



例 6 求将半带形域 $\begin{cases} 0 < \mathrm{Re}(z) < +\infty \\ 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi \end{cases}$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 的映射。



例 7 求将扇形域：$\begin{cases} 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < |z| < 1 \end{cases}$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的映射。

解 见 P244 $\quad w = \dfrac{(z^2+1)^2 - i(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2 + i(z^2-1)^2}$

作业

- P246 19(1)(3)(8)(9)