§1 点估计

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$的形式为已知，θ是待估参数。$X_1 \cdots X_n$是X的一个样本，$x_1 \cdots x_n$是相应的样本值。

点估计问题：

构造一个适当的统计量$\theta(X_1,\cdots,X_n)$，用它的观察值$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$来估计未知参数$\theta$。

我们称$\theta(X_1,\cdots,X_n)$为θ的<u>估计量</u>；称$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为$\theta$<u>估计值</u>。

1. 矩估计法

设总体X为连续型随机变量，其概率密度为

$$f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

总体X为离散型随机变量，其分布列为

$$P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

其中$\theta_1,\cdots,\theta_k$是待估参数，，$X_1,\cdots,X_n$为来自X的样本。

设总体X的l阶原点矩

$$\mu_l=\mu_l(\theta_1,\cdots,\theta_k)=EX^l \qquad (l=1,2,\cdots,k)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^l f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)dx$$

或 $=\sum_i x_i^l p(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 存在。

返回主目录

样本的l阶原点矩为

$$A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l \qquad (l = 1, \cdots, k.)$$

令 $A_l = \mu_l(\theta_1, \cdots, \theta_k), \quad l = 1, \cdots, k.$

这里是包含k个未知参数θ_1，…，θ_k的联立方程组，

从中解出方程组的解 $\hat{\theta}_l = \hat{\theta}_l(X_1, \cdots, X_n),$

$$(l = 1, \cdots, k.)$$

用$\hat{\theta}_1$，…，$\hat{\theta}_k$分别作为θ_1，…，θ_k的估计量，这种求估计量的方法称为矩估计法。

$\hat{\theta}_l = \hat{\theta}_l(X_1, \cdots, X_n)$ 称为矩估计量；

$\hat{\theta}_l = \hat{\theta}_l(x_1, \cdots, x_n)$ 称为矩估计值。

矩估计法的具体做法如下：

1^0　求出总体X的l阶原点矩 $\mu_l = EX^l \quad (l = 1,2,\cdots,k)$

设：$\mu_1 = \mu_1(\theta_1, \cdots, \theta_k)$,

$$\vdots$$

$$\mu_k = \mu_k(\theta_1, \cdots, \theta_k),$$

2^0　以A_l分别代替上式中的μ_l($l = 1,2,\cdots,k$)，得

$$A_1 = \mu_1(\theta_1, \cdots, \theta_k),$$

$$\vdots$$

$$A_k = \mu_k(\theta_1, \cdots, \theta_k),$$

返回主目录

3^0 解上方程组得：

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(A_1, \cdots, A_k) = \hat{\theta}_1(X_1, \cdots, X_n)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(A_1, \cdots, A_k) = \hat{\theta}_k(X_1, \cdots, X_n)$$

分别为θ_1 ,$\cdots$ ，θ_k的矩估计量.

$$\hat{\theta}_l = \hat{\theta}_l(x_1, \cdots, x_n), \quad l = 1, 2, \cdots, k,$$

分别为θ_1 ,$\cdots$ ，θ_k的矩估计值.

返回主目录

例 1 设某炸药厂一天中发生着火现象的次数 X 服从参数为λ的泊松分布，λ未知，有以下样本值；试估计参数λ（用矩法）。

着火的次数k	0	1	2	3	4	5	6	
发生k次着火天数n_k	75	90	54	22	6	2	1	$\sum = 250$

解： $\mu_1 = EX = \lambda, \quad A_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$

则 $\hat{\lambda} = \overline{X}$ **为λ的矩估计量.**

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{250}(0\times 75 + 1\times 90 + \cdots + 6\times 1) = 1.22$$

为λ的矩估计值.

返回主目录

例2. 设总体 X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0<x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中$\theta>0$未知, $X_1,\cdots,X_n$是一个样本.

求：θ的矩估计量。

解：$\mu_1=EX=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$

令 $$\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$

解得 $$\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$$ 为θ的矩估计量.

返回主目录

例3. 设总体 $X \sim U[a,b]$, a,b未知；$X_1,\cdots,X_n$ 是一个样本；求：a,b的矩估计量。

解： $\mu_1 = EX = \dfrac{a+b}{2}$,

$$\mu_2 = EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4}$$

令 $\dfrac{a+b}{2} = A_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

返回主目录

例 3（续）

§1 点估计

即 $a+b=2A_1,\quad b-a=\sqrt{12(A_2-A_1^2)}$

解得 :$\hat{a}=A_2-\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

例4. 设总体X的均值μ，方差σ^2都存在，且$\sigma^2>0$，

但μ，σ^2未知，又设$X_1,\cdots,X_n$是一个样本；

求：μ,σ^2的矩估计量。

解：$\mu_1 = EX = \mu,$

$$\mu_2 = EX^2 = DX + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

令 $A_1 = \mu_1, \quad A_2 = \mu_2$

即 $\mu = A_1, \quad \sigma^2 + \mu^2 = A_2,$

所以 $\hat{\mu} = A_1 = \overline{X},$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

返回主目录

特别，若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2未知；

则 $\hat{\mu}=\bar{X}$, $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

2. 极大似然估计法

(1).若总体X属离散型，其分布律$P\{X=x\}=p(x;\theta),\theta\in\Theta$的形式为已知，$\theta$为待估参数，$\Theta$是$\theta$可能取值的范围。

设$X_1,\cdots,X_n$是来自X的样本,

$x_1,\cdots,x_n$是$X_1,\cdots,X_n$的一个样本值；

$$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

返回主目录

记 $L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),\theta\in\Theta.$ (1.1)

它是θ的函数。$L(\theta)$称为样本的似然函数。

极大似然估计法：固定$x_1,\cdots,x_n$，挑选使概率$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$达到最大的参数$\hat{\theta}$，作为θ的估计值，即取$\hat{\theta}$使得：

$$L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(x_1,\cdots,x_n;\theta) \quad (1.2)$$

$\hat{\theta}$与$x_1,\cdots,x_n$有关，记为$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$;

称其为参数θ的极大似然估计值。

$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$称为参数$\theta$的极大似然估计量。

(2).若总体X属连续型，其概率密度$f(x;\theta),\theta\in\Theta$的形式已知，$\theta$为待估参数;则$X_1,\cdots,X_n$的联合密度：

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

设$x_1,\cdots,x_n$是相应$X_1,\cdots,X_n$的一个样本值，则随机点$(X_1,\cdots,X_n)$落在$(x_1,\cdots,x_n)$的邻域（边长分别为$dx_1,\cdots,dx_n$的n维立方体）内的概率近 似为：

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)dx_i \qquad (1.3)$$

我们取θ的估计值$\hat{\theta}$，使概率(1.3)取到最大值。

但$\prod_i dx_i$不随θ而变，故只需考虑：

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta), \qquad (1.4)$$

的最大值，这里$L(\theta)$称为样本的似然函数。

若 $$L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

则称$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为$\theta$的极大似然估计值。

称$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的极大似然估计量。

因此,求θ的极大似然估计问题，即求似然函数

$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 的最大值点。

返回主目录

(1).若总体X属离散型，其分布律$P\{X=x\}=p(x;\theta),\theta\in\Theta$的形式为已知，$\theta$为待估参数，$\Theta$是$\theta$可能取值的范围。

则样本的似然函数为：

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}$$

(2).若总体X属连续型，其概率密度$f(x;\theta),\theta\in\Theta$的形式已知，$\theta$为待估参数;

则样本的似然函数为：

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),\qquad(1.4)$$

返回主目录

一般，$p(x;\theta), f(x;\theta)$关于θ可微，故θ可由下式求得：

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta}=0.$$

$$\boxed{L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)}$$

又因$L(\theta)$与$\ln L(\theta)$在同一θ处取到极值，因此θ的极大似然估计θ也可从下述方程解得：

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0. \qquad (1.5)$$

若总体的分布中包含多个参数，

即可令 $\frac{\partial L}{\partial \theta_i}=0, i=1,\cdots,k.$或$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}=0, i=1,\cdots,k.$

解k个方程组求得$\theta_1,\cdots,\theta_k$的极大似然估计值。

返回主目录

极大似然估计 法的具体做法如下：

1^0 写出似然函数：

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}$$

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

2^0 求似然函数$L(\theta)$的最大值点：

令 $\dfrac{dL(\theta)}{d\theta}=0.$ 或 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0.$

解之得θ的极大似然估计值$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n).$

返回主目录

若总体的分布中包含多个参数$\theta_1,\cdots,\theta_k$，则样本的似然函数为：

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

即可令 $\dfrac{\partial L}{\partial\theta_i}=0,i=1,\cdots,k.$或$\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}=0,i=1,\cdots,k.$

解k个方程组求得$\theta_1,\cdots,\theta_k$的极大似然估计值。

返回主目录

例5. 设$X \sim B(1,p)$; $X_1,\cdots,X_n$是来自X的一个样本，试求参数 p 的极大似然估计量。

解：设$x_1,\cdots,x_n$是一个样本值。X的分布律为：

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},\quad x=0,1;$$

故似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

而 $$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p).$$

令 $$\frac{d}{dp}\ln L(p)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0.$$

返回主目录

例 5（续）

解得p的极大似然估计值

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

p的极大似然估计量为

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$$

-------- 它与矩估计量是相同的

$$E(X)=p=\mu_1=A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$$

返回主目录

例6. 设总体 X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0<x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中$\theta>0$未知, $X_1,\cdots,X_n$是一个样本, $x_1,\cdots,x_n$是一组样本观察值. 求θ的极大似然估计。

解 :似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

$$=\begin{cases}\theta^{\frac{n}{2}}(x_1\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1} & 0<x_1,\cdots,x_n\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

返回主目录

例 6（续）

当$0 < x_1, \cdots, x_n \le 1$时，$L(\theta) = \theta^{\frac{n}{2}} (x_1 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}$

$$\ln L(\theta) = \frac{n}{2}\ln\theta + (\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

解之得θ的极大似然估计值

$$\hat{\theta} = \frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}$$

返回主目录

例7. 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$；μ,σ^2为未知参数，$x_1,\cdots,x_n$是来自X的一个样本值，

求：μ,σ^2的极大似然估计量。

解：X的概率密度为：

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

似然函数为：

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\}$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

返回主目录

例 7（续）

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu}=0\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}=0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^2}[\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\mu]=0\\ -\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\end{cases}$

解得：$\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=\bar{x}$，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

μ,σ^2的极大似然估计量为：

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\bar{X},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

返回主目录

例8. 设$X \sim U[a,b]$;a,b未知，$x_1,\cdots,x_n$是一个样本值，求：a,b的极大似然估计量。

解：X 的概率密度为：

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & 其它\end{cases}$$

似然函数为：

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_1,\cdots,x_n\le b\\ 0, & 其它\end{cases}$$

返回主目录

例 8（续）

设 $x_{(1)}=\min(x_1,\cdots,x_n),x_{(n)}=\max(x_1,\cdots,x_n)$,

因为$a\le x_1,\cdots,x_n\le b$,等价于$a\le x_{(1)},x_{(n)}\le b$,

所以

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, a\le x_{(1)},b\quad x_{(n)};\\ 0\qquad\quad , \quad 其它\end{cases}$$

当$a\le x_{(1)},b\quad x_{(n)}$时，

$$L(a,b)=\frac{1}{(b-a)^n}$$

返回主目录

例 8（续）

$$\frac{\partial}{\partial a}L(a,b)=\frac{n}{(b-a)^{n+1}}>0,\quad \frac{\partial}{\partial b}L(a,b)=\frac{-n}{(b-a)^{n+1}}<0$$

可见 $L(a,b)$是a的单增函数,是b的单减函数。

$\therefore$ $L(a,b)$在$a=x_{(1)},b=x_{(n)}$时，取最大值$\dfrac{1}{(x_{(n)}-x_{(1)})^n}$

故a,b的极大似然估计值为：

$$\hat{a}=x_{(1)}=\min x_i,\quad \hat{b}=x_{(n)}=\max x_i,$$

故a,b的极大似然估计量为：

$$\hat{a}=\min X_i,\quad \hat{b}=\max X_i,$$

例9. 设总体 X的概率密度为

$$f(x;\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-c}{\theta}} & x \quad c\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中$c,\theta(\theta>0)$是未知参数, $X_1,\cdots,X_n$是一个样本, $x_1\le\cdots\le x_n$是一组样本观察值.

求θ,c的极大似然估计。

解：似然函数为

$$L(\theta,c)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-c)} & c\le x_1\le\cdots\le x_n\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

返回主目录

例 9（续）

当$c \le x_1 \le \cdots \le x_n$时，$L(c,\theta) = \dfrac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)}$

$$\ln L(\theta,c) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)$$

$\because \quad \dfrac{\partial}{\partial c}\ln L(\theta,c) = \dfrac{n}{\theta} > 0$

可见 $L(\theta,c)$是c的单增函数，

$\therefore c$的极大似然估计值 $\hat{c} = x_1$;

令 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta,c) = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c) = 0$

返回主目录

例 9（续）

解之得θ的极大似然估计值

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{c})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_1)=\bar{x}-x_1$$

性质 :设θ的函数$u=u(\theta),\theta\in\Theta$具有单值反函数，

$\hat{\theta}$是θ的极大似然估计；

则$\hat{u}=u(\hat{\theta})$是$u(\theta)$的极大似然估计。

例：已知$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是$\sigma^2$的极大似然估计

求:(1) σ的极大似然估计；　(2) e^{σ^2}的极大似然估计 .

解：(1) $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=u(\sigma^2)$,

$u=u(\sigma^2)=\sqrt{\sigma^2}$有单值反函数$\sigma^2=u^2(u\quad 0)$,

返回主目录

故 $\hat{\sigma} = u(\hat{\sigma}^2) = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

是σ的极大似然估计.

求:(2) e^{σ^2}的极大似然估计 .

$u = u(\sigma^2) = e^{\sigma^2}$有单值反函数$\sigma^2 = \ln u \quad (u \quad 0)$,

故 $e^{\hat{\sigma}^2} = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$是$e^{\sigma^2}$的极大似然估计.

返回主目录

例10. 设$X \sim \pi(\lambda)$; $X_1, \cdots, X_n$是来自X的一个样本，试求 $P\{X=0\}$ 的极大似然估计量。

解：X的分布律为： $P\{X=x\}=\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, x=0,1,\cdots.$

$$P\{X=0\}=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}.$$

设$x_1, \cdots, x_n$是一个样本值,

故似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!\cdots x_n!}e^{-n\lambda}$$

$$\therefore \quad \ln L(\lambda)=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln\lambda-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i!$$

返回主目录

令 $$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0.$$

解之得 λ 的极大似然估计值

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$$

$$\because \quad u(\lambda)=P\{X=0\}=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}$$

有单值反函数 $\lambda=-\ln u \quad (u \quad 0)$,

$\therefore P\{X=0\}$ 的极大似然估计值

$$\hat{P}\{X=0\}=e^{-\hat{\lambda}}=e^{-\bar{x}},$$

P_{173} 1,2(1)(3),3(1)(3),4,6,8.

返回主目录

§3 估计量的评选标准

设$X_1,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本，$\theta\in\Theta$是总体X的分布中的待估参数。

1^0. 无偏性：若$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$的数学期望存在，且$E\hat{\theta}=\theta,\forall\theta\in\Theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计量。

2^0. 有效性：若$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$都是$\theta$的无偏估计量；若$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2),\forall\theta\in\Theta$，且至少$\exists\theta\in\Theta$使上式不等式成立，则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效。

返回主目录

3^0. 相合性：若$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量,若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\longrightarrow\infty$时$\hat{\theta}\xrightarrow{p}\theta$,

即：$\forall\varepsilon>0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$

则称$\hat{\theta}$是θ的相合（一致）估计量。

说明：$\hat{\theta}$是θ的相合（一致）估计量，是指：随着样本容量n的增大，估计量$\hat{\theta}$的值稳定于待估参数θ的真值。

例1：设总体X的 k 阶原点矩 $\mu_k = E(X^k)\ (k \quad 1)$ 存在，则无论总体X服从什么分布，样本 k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^k$ 既是总体 k 阶原点矩 μ_k 的无偏估计量，又是相合估计量.

证明：1^0无偏性

$$\because \quad E(A_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X^k) = \mu_k$$

$\therefore \quad A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^k$ **是 μ_k 的无偏估计量.**

返回主目录

例 1 续． 2^0 相合性

由于$X_1^k, X_2^k, \cdots X_n^k$相互独立,与$X^k$同分布，且$E(X^k) = \mu_k$，由辛钦大数定理，知

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k$$

$$\therefore \quad A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^k \text{ 是 } \mu_k \text{ 的相合估计量.}$$

特别：$A_1 = \overline{X}$是总体期望$\mu = E(X)$的无偏估计量，又是相合估计量.

例 2.

对于均值 μ，方差 σ^2 都存在的正态总体 X，若 μ,σ^2 均为未知，则估计量 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的有偏估计量，而 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计量. 且 S^2 是 σ^2 的相合估计量.

例 2. 证明：

1^0 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是$\sigma^2$ 的有偏估计量：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-\overline{X}^2=A_2-\overline{X}^2.$$

$$E(A_2)=\mu_2=E(X^2)=D(X)+(EX)^2=\sigma^2+\mu^2$$

$$E(\overline{X}^2)=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$$

$$E(\hat{\sigma}^2)=EA_2-E\overline{X}^2=\sigma^2+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2.$$

返回主目录

例 2 续.

2^0 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是$\sigma^2$的无偏估计量：

$\because \quad ES^2=\sigma^2$

3^0 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是$\sigma^2$的相合估计量：

$$\lim_{n\to\infty}P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}=1$$

$$\because \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

$$D(S^2)=D\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2(n-1)\right)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D(\chi^2(n-1))$$

$$=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

返回主目录

例 2 续. $P\{|X-\mu|<\varepsilon\} \quad 1-\sigma^2/\varepsilon^2$

$ES^2=\sigma^2$

由切比晓夫不等式 $\forall\varepsilon>0,$

$D(S^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

$$1 \quad P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}=P\{|S^2-E(S^2)|<\varepsilon\}$$

$$1-D(S^2)/\varepsilon^2=1-\frac{2\sigma^4}{(n-1)\varepsilon^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}=1$$

$\therefore S^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的相合估计量：

例 3.

设总体X服从指数分布，其密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$未知，$X_1,\cdots,X_n$是来自X的一个样本，

$Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$，试证：

(1) $\overline{X}$和nZ都是θ的无偏估计量；

(2) $n>1$时，θ的无偏估计量$\overline{X}$较θ的无偏估计量nZ有效；

例 3 续 证 (1)

$\because\ E(\overline{X})=E(X)=\theta,\ \therefore \overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量；

$Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$的分布函数为

$$F_Z(x)=1-[1-F_X(x)]^n$$

其中$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$为$X$的分布函数,

$Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$的密度函数为

$$f_Z(x)=n[1-F_X(x)]^{n-1}f_X(x)$$

例 3 续.

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$的密度函数为

$$f_Z(x)=n[1-F_X(x)]^{n-1}f_X(x)$$

$$=\begin{cases}\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$\therefore Z$服从参数为$\frac{\theta}{n}$的指数分布。

例 3 续 $\because E(nZ) = nE(Z) = n \times \dfrac{\theta}{n} = \theta,$

$\therefore nZ$ 是 θ 的无偏估计量；

(2) $D(\overline{X}) = \dfrac{1}{n} D(X) = \dfrac{\theta^2}{n},$

$$D(nZ) = n^2 D(Z) = n^2 \times \frac{\theta^2}{n^2} = \theta^2,$$

$\therefore n > 1$ 时，$D(\overline{X}) < D(nZ),$

$\therefore n > 1$ 时，θ 的无偏估计量 $\overline{X}$ 较 θ 的无偏估计量 nZ 有效；

$P_{174-175}$ 9,10,11,12,14,15

返回主目录

§4 区间估计

置信区间与置信水平

定义：设总体 X 的分布函数$F(x;\theta)$中含一待估参数$\theta\in\Theta$；对于给定值 $\alpha\ (0<\alpha<1)$,若由样本$X_1,\cdots,X_n$,确定的统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$

$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$,$\underline{\theta}<\overline{\theta}$,使得：

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}\quad 1-\alpha,\quad (0<\alpha<1)$$

则称是随机区间$(\underline{\theta},\ \overline{\theta})$为$\theta$的 置信水平 为$1-\alpha$ 的置信区间。$\underline{\theta}$和$\overline{\theta}$分别称为θ的 置信水平 为$1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和上限。

返回主目录

说明1：区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$是一个随机区间，$1-\alpha$给出该区间含真值$\theta$的可靠程度。$\alpha$表示该区间不包含真值$\theta$的可能性。

说明2：$P\{\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\} \quad 1-\alpha$ 的含义：

若反复抽样m次（每次抽样容量相同），每个样本值确定一个区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$，每个这样的区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$要么包含$\theta$，要么不包含$\theta$，我们可把每次抽样看作一次贝努利试验，用$A$表示区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$包含$\theta$，则

返回主目录

$P(A)=P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$,由贝努利大数定理，知

事件A发生的频率$\dfrac{m_A}{m}\xrightarrow{P}1-\alpha,(m\to\infty)$，即

m充分大时，$\dfrac{m_A}{m}\approx(1-\alpha)$,即$m_A\approx m(1-\alpha)$,其中$m_A$为

事件A发生的次数.

例如：若$\alpha=5\%$，即置信水平为$1-\alpha=95\%$.

这时重复抽样100次，则在得到的100个区间中包含θ真值的有95个左右，不包含θ真值的有5个左右。

通常，采用95%的置信水平，有时也取99%或90%

返回主目录

对参数 θ 作区间估计 ：就是对于给定值 α

$(0<\alpha<1)$,确定两个统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，

$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$,$\underline{\theta}<\overline{\theta}$使得：

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}\quad 1-\alpha,\quad (0<\alpha<1)$$

这里有两个要求：

返回主目录

1. 要求θ 以很大的可能被包含在区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$内，就是说，概率 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}$ 要尽可能大．即要求估计尽量可靠．

2. 估计的精度要尽可能的高：如要求区间长度 $\overline{\theta}-\underline{\theta}$ 尽可能短，或能体现该要求的其它准则．

可靠度与精度是一对矛盾，一般是在保证可靠度的条件下尽可能提高精度．

§5 正态总体均值与方差的区间估计

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况

1. 正态总体均值的区间估计

设$X_1,\cdots,X_n$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本。在置信水平$1-\alpha$下，来确定μ的置信区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$。

(1). 已知方差，估计均值

设已知方差$\sigma^2=\sigma_0^2$，又知道$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$是$\mu$的一个无偏估计，且$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma_0^2}{n})$，即 $W=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。

返回主目录

对于给定的置信水平$1-\alpha$，求μ_1,μ_2，使

$P\{\mu_1<\mu<\mu_2\}=1-\alpha$，转化为求$\lambda_1$，$\lambda_2$，使

$P\{\lambda_1<W<\lambda_2\}=1-\alpha.$ $\left(\because W=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\right)$

查正态分布表，可找出 临界值λ_1，λ_2，使得：

$$P\{\lambda_1\le W\le\lambda_2\}=1-\alpha.$$

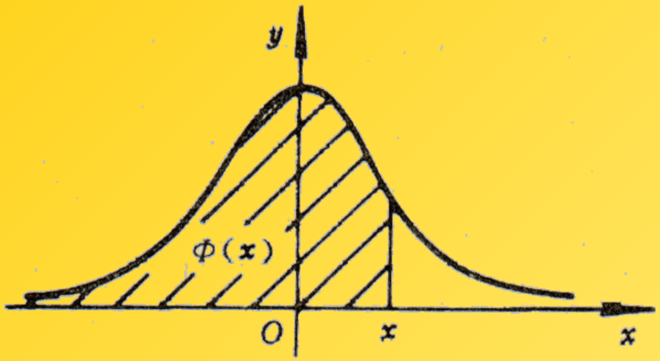
由此可找出无穷多组λ_1，λ_2；通常我们取对

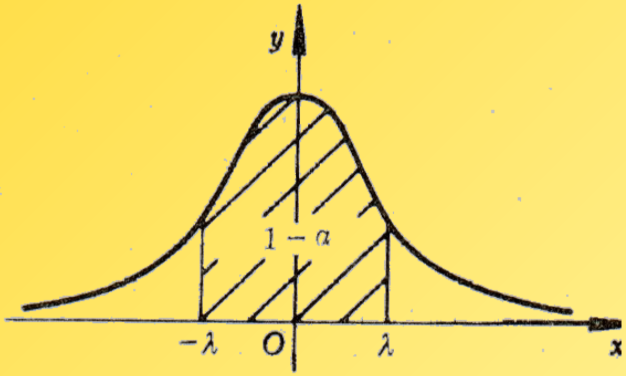
称区间$(-\lambda,\lambda)$，使：$P\{|W|<\lambda\}=1-\alpha$

即：$$P\left\{-\lambda<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}<\lambda\right\}=1-\alpha$$

返回主目录

由$P\{|W|<\lambda\}=1-\alpha$，可知：$\lambda=z_{\alpha/2}$





$$\therefore \quad P\{-z_{\alpha/2}<\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma_0}<z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\{\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\}=1-\alpha$$

返回主目录

结论1 已知方差σ^2，估计均值μ 的具体做法：

设$X_1,\cdots,X_n$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，

(1) 设$\sigma^2=\sigma_0^2$，找μ的一个无偏估计量：

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\text{，且 }\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma_0^2}{n}\right);$$

(2) 构造样本函数：$W=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

由$P\{|W|<\lambda\}=1-\alpha$，可知：$\lambda=z_{\alpha/2}$

$$\therefore\quad P\left\{-z_{\alpha/2}<\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma_0}<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

返回主目录

(3) 恒等变形得

$$P\{\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\} = 1 - \alpha$$

则 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 下的置信区间为：

$$\boxed{(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})}$$

返回主目录

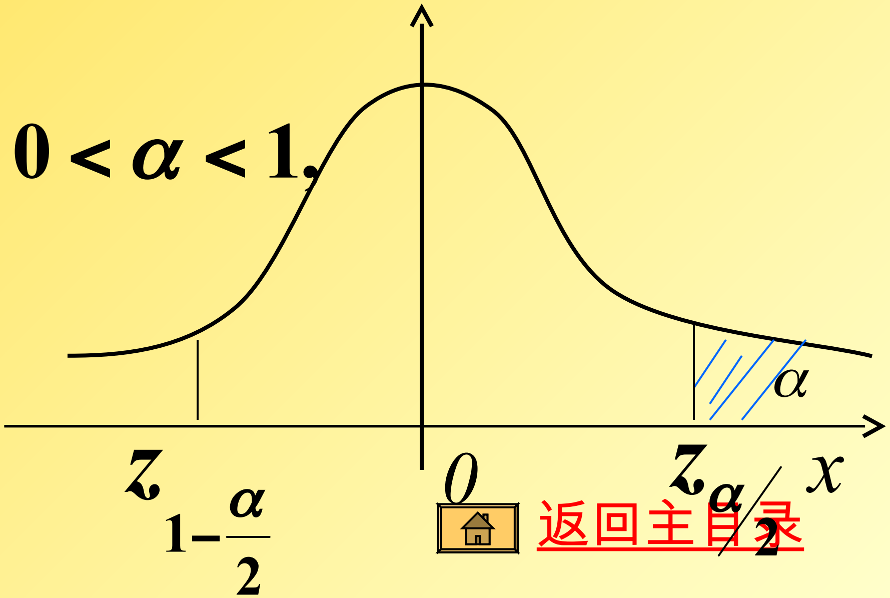
μ的一个置信水平为$1-\alpha$下的置信区间为：

$$\boxed{\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\ ,\quad \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)}$$

其中，$z_{\alpha/2}$为标准正态分布的上$\alpha/2$分位点，

即 $X\sim N(0,1)$，$z_{\alpha/2}$满足条件

$$P\{X>z_{\alpha/2}\}=\frac{\alpha}{2},\quad 0<\alpha<1,$$



返回主目录

已知α,求$z_{\alpha/2}$的方法:

$$\because \frac{\alpha}{2}=P\{X>z_{\alpha/2}\}=1-P\{X\le z_{\alpha/2}\}=1-\Phi(z_{\alpha/2})$$

$$\therefore \Phi(z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}$$

注意:$\alpha=0.05$,即$1-\alpha=0.95$时,

$$\because \Phi(z_{\alpha/2})=\Phi(z_{0.025})=1-0.025=0.975$$

$$\therefore z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$$

返回主目录

例 6. 已知幼儿身高服从正态分布，现从 5~6 岁的幼儿中随机地抽查了 9 人，其高度分别为：

115,120,131,115,109,115,115,105,110cm;

假设标准差 $\sigma_0 = 7$，置信度为95%；

试求总体均值μ的置信区间。

$$\boxed{\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\quad,\quad \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)}$$

解：已知$\sigma_0 = 7, n = 9, \alpha = 0.05.$ 由样本值算得：

$$\bar{x} = \frac{1}{9}(115 + 120 + \cdots + 110) = 115.$$

查正态分布表得临界值 $z_{\alpha/2} = 1.96$，由此得置信区间：

$$\left(115 - 1.96 \times 7/\sqrt{9}\ ,\ 115 + 1.96 \times 7/\sqrt{9}\right)$$

$$= \left(110.43\ ,\ 119.5\right)$$

返回主目录

(2). 未知方差，估计均值

由于未知方差σ^2，这时可用样本方差：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad 代替\sigma^2$$

而选取样本函数：$W = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

则随机变量 $W \sim t(n-1)$.

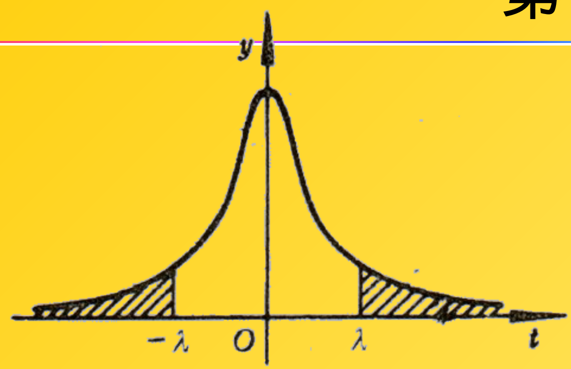
对于给定的$1-\alpha$，查t分布表，得临界值λ_1与λ_2，使得：

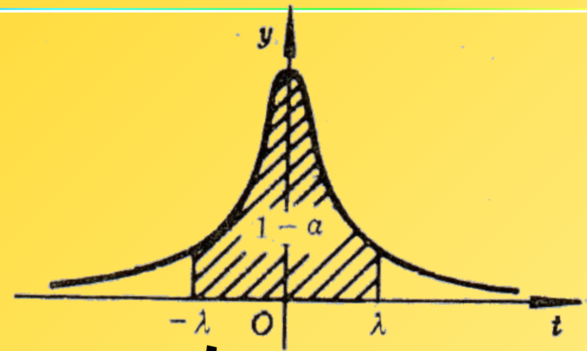
$$P\{\lambda_1 < W < \lambda_2\} = 1-\alpha\ ,$$

我们仍然取成对称区间 $(-\lambda, \lambda)$,使得：

$$P\{|W| < \lambda\} = 1-\alpha\ ,$$

返回主目录





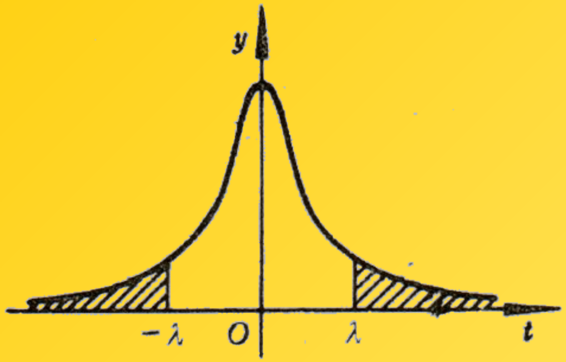
由$P\{|W|<\lambda\}=1-\alpha$，可知：$\lambda=t_{\alpha/2}(n-1)$

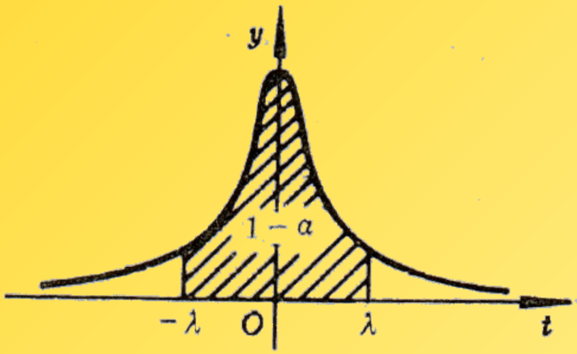
其中，n是样本容量。由此得：

$$P\{-t_{\alpha/2}(n-1)<\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha,$$

$$\mathrm{P}\{\overline{\mathrm{X}}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{\mathrm{X}}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\}=1-\alpha$$

返回主目录





$t_{\alpha/2}(n-1)$的求法：

由$P\{t(n-1)>t_{\alpha/2}(n-1)\}=\dfrac{\alpha}{2}$,查$t$分布表

$t(n-1,\dfrac{\alpha}{2})$,找出$\lambda=t_{\alpha/2}(n-1)$.

其中，n 是样本容量，n-1 是表中自由度；

返回主目录

结论 2：未知方差 σ^2，估计均值 μ 的具体做法：

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，

(1) 找 μ 的一个无偏估计量：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

方差 σ^2 未知，用样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 代替；

(2) 选取样本函数： $W=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

由 $P\{|W|<\lambda\}=1-\alpha$，可知：$\lambda=t_{\alpha/2}(n-1)$

$$P\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha\ ,$$

(3) 恒等变形得

$$\mathrm{P}\{\overline{\mathrm{X}} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{\mathrm{X}} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha$$

则 μ的一个置信水平为$1-\alpha$ 下的置信区间为：

$$\boxed{(\overline{\mathrm{X}} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{\mathrm{X}} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})}$$

例 7. 用仪器测量温度，重复测量 7 次，测得温度分别为： 115,120,131,115,109,115,115,105,110cm；设温度 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$。

在置信度为95%时，试求温度的真值所在范围。

解：设μ是温度的真值，X是测量值,

则 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 未知方差σ^2,

则 μ的一个置信水平为$1-\alpha$下的置信区间为：

$$\boxed{\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)}$$

返回主目录

已知$n=7,\alpha=0.05.$

由样本值算得： $\bar{x}=112.8,\quad S^2=1.29.$

查$t(6,0.025)$得临界值$z_{\alpha/2}=2.447$。由此得置信区间：

$$\left(112.8-2.447\sqrt{\frac{1.29}{7}},\quad 112.8+2.447\sqrt{\frac{1.29}{7}}\right)$$
$$=(111.75,\quad 113.85)$$

从解题的过程，我们归纳出求置信区间的一般步骤如下：

1. 明确问题，是求什么参数的置信区间？置信水平$1-\alpha$是多少？

2. 寻找参数θ的一个良好的点估计

$$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

3. 寻找一个待估参数θ和估计量的函数$W(\hat{\theta}, \theta)$且其分布为已知.

4. 对于给定的置信水平 $1-\alpha$，根据 $W(\hat{\theta},\theta)$ 的分布，确定常数 a, b，使得

$$P\{a < W(\hat{\theta},\theta) < b\} = 1-\alpha$$

5. 对“$a < W(\hat{\theta},\theta) < b$”作等价变形，得到如下形式：

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} \quad 1-\alpha, \quad (0 < \alpha < 1)$$

则 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 就是 θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 的置信区间.

这里，我们主要讨论总体分布为正态的情形． 若样本容量很大，即使总体分布未知，应用中心极限定理，可得总体的近似分布，于是也可以近似求得参数的区间估计．

2. 方差的区间估计

设$X_1,\cdots,X_n$为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本。

我们知道$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是$\sigma^2$的一个无偏估计

并且知道样本函数：$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

对于给定的$1-\alpha$，查χ^2分布表，得临界值λ_1与λ_2，使得：

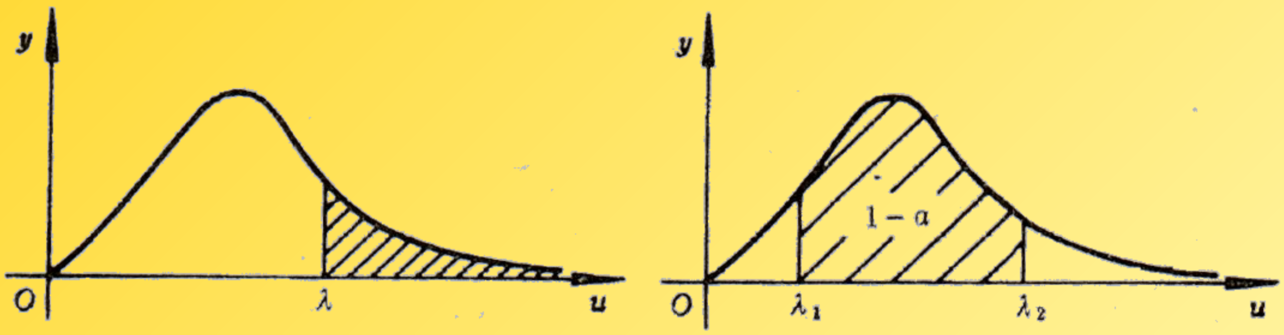
$$P\{\lambda_1<\chi^2<\lambda_2\}=1-\alpha,$$

返回主目录

由于χ^2分布无对称性，我们采用使概率对称的区间：

$$P\{\chi^2 < \lambda_1\} = P\{\chi^2 > \lambda_2\} = \alpha/2,$$

即
$$P\{\lambda_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \lambda_2\} = 1-\alpha,$$



由 $P\{\chi^2(n-1) > \lambda_2\} = \dfrac{\alpha}{2}$ 知，$\lambda_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$,

由 $P\{\chi^2(n-1)<\lambda_1\}=\dfrac{\alpha}{2}$ 知，$\lambda_1=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，

其中，n 是样本容量，n-1 是表中自由度；由此得：

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

即 $$P\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\}=1-\alpha$$

于是，σ^2的一个置信水平为$1-\alpha$下的置信区间为：

$$\boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)}$$

返回主目录

结论 3 ：

设$X_1,\cdots,X_n$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本,

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$ 样本方差：

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

则 σ^2的一个置信水平为$1-\alpha$下的置信区间为：

$$\boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)}$$

返回主目录

例 8. 设某机床加工的零件长度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，今抽查 16 个零件，测得长度（单位： mm ）如下：

12.15, 12.12, 12.01, 12.08,
12.09, 12.16, 12.03, 12.01,
12.06, 12.13, 12.07, 12.11,
12.08, 12.01, 12.03, 12.06,

在置信度为 95% 时，试求总体方差 σ^2 的置信区间。

解：已知 $n = 16, \alpha = 0.05.$ 由样本值算得：

$$S^2 = 0.00244.$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(16-1) = 6.26;$$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(16-1) = 27.5.$$

返回主目录

$$S^2 = 0.00244.$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(16-1) = 6.26;$$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(16-1) = 27.5.$$

由此得置信区间：

$$\boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)}$$

$$\left(\frac{15\times 0.00244}{27.5}, \quad \frac{15\times 0.00244}{6.26}\right) = (0.0013\,,\,0.005)$$

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2})$ 分别是具有两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且它们独立。

设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$ ， $\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$

分别是两个样本的均值 。

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2,$$

分别是两个样本方差 ；

返回主目录

1. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计

(1). 已知方差，估计均值

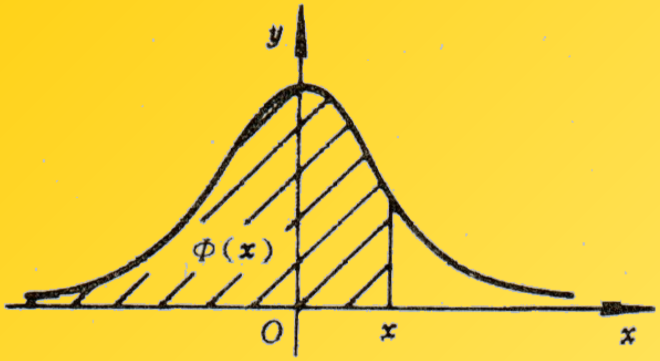
设方差σ_1^2,σ_2^2已知，因$\overline{X},\overline{Y}$分别是$\mu_1,\mu_2$的无偏估计，故 $\overline{X}-\overline{Y}$ 是 $\mu_1-\mu_2$的无偏估计。

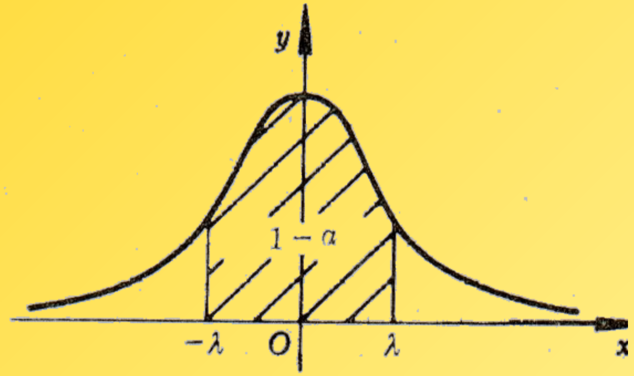
$\overline{X}\sim N(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}),\overline{Y}\sim N(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$ 且它们独立,

$$\therefore\quad \overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

所以 $$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

返回主目录





则 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 下的置信区间为：

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \overline{X}-\overline{Y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

返回主目录

(2). 未知方差，估计均值差

设$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$,但σ^2未知。

记 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$,

则 S_w^2是σ^2 的无偏估计量,

且 $$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

返回主目录

由$P\{|W|<\lambda\}=1-\alpha$，可知：$\lambda=t_{\alpha/2}(n-1)$

$$P\{-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)<\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=1-\alpha$$

则$\mu_1-\mu_2$的一个置信水平为$1-\alpha$下的置信区间为：

$$(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},$$

$$\bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$$

2. 两个总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的区间估计

S_1^2, S_2^2分别是σ_1^2, σ_2^2的无偏估计量,

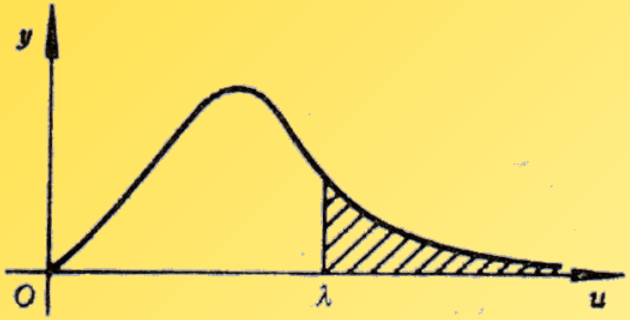
$$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1, n_2-1)$$

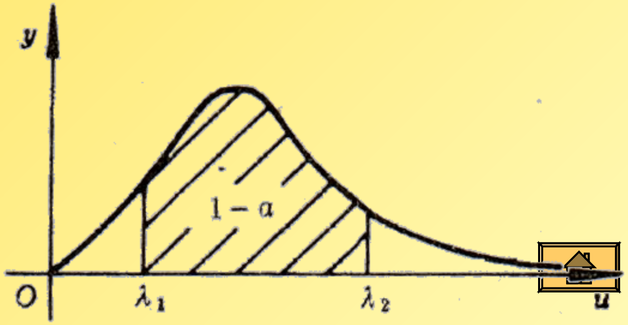
由于F分布无对称性，我们采用使概率对称的区间：

$$P\{F<\lambda_1\}=P\{F>\lambda_2\}=\alpha/2,$$

即

$$P\{\lambda_1<F<\lambda_2\}=1-\alpha,$$





返回主目录

知，$\lambda_1 = F^2_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$,

$$\lambda_2 = F^2_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1),$$

$$\therefore P\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}$$

$$= 1-\alpha$$

$\therefore \sigma_1^2/\sigma_2^2$ 的一个置信水平为$1-\alpha$下的置信区间为：

$$\boxed{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right)}$$

例 9. 从某中学高中三年级的两个班中分别抽出 5 名和 6 名男生，测得他们的身高为：

A 班： 172 ， 178 ， 180.5 ， 174 ， 175(cm) ；

B 班： 174 ， 171 ， 176.5 ， 168 ， 172.5 ， 170 (cm).

设两班男生的身高分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，求

(1)在两总体方差相等情况下，求置信度为 $95\%, \mu_1-\mu_2$ 的置信区间；

(2)置信度为 $95\%, \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间；

例 9（续）

解： (1) 设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但 σ^2 未知。

记 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$,

则 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 下的置信区间为：

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\right.$$

$$\left.\overline{X}-\overline{Y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

例 9(续) 已知$n_1=5, n_2=6, \alpha=0.05.$

由样本值算得：$\bar{x}=\frac{1}{5}(172+\cdots 175)=175.9$,

$\bar{y}=\frac{1}{6}(174+\cdots+170)=172,$

$$s_1^2=\frac{1}{5-1}[(172-175.9)^2+\cdots+(1175-175.9)^2]=\frac{45.2}{4}=11.3$$

$$s_2^2=\frac{1}{6-1}[(174-172)^2+\cdots+(170--172)^2]=\frac{45.5}{5}=9.1$$

$\bar{x}-\bar{y}=3.9,$

例 9(续)

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(5-1)S_1^2+(6-1)S_2^2}{5+6-2}}=\sqrt{\frac{45.2+45.5}{5+6-2}}=3.17$$

$$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(9)=2.262$$

$$t_{0.025}(9)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=2.262\times3.17\times0.61=4.374$$

例 9（续）

则 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为0.95下的置信区间为：

$$(3.9 - 4.374\ ,\ 3.9 + 4.374\ )$$

即 $(-0.474\ ,\ 8.274\ )$。

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\ ,\right.$$

$$\left.\overline{X} - \overline{Y} + t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\ \right)$$

返回主目录

例 9（续）

(2) σ_1^2 / σ_2^2 的一个置信水平为$1-\alpha$下的置信区间为：

$$\boxed{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)}$$

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(4,5)=7.39$$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(4,5)=\frac{1}{F_{0.025}(5,4)}=\frac{1}{9.36}$$

例 9（续）

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=7.39,\quad F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{9.36}$$

σ_1^2/σ_2^2 的一个置信水平为0.95下的置信区间为：

$$\left(\frac{11.3}{9.1}\times\frac{1}{7.39},\frac{11.3}{9.1}\times 9.36\right)$$

即 $(0.17\ ,11.62)$。

第七章 小　结

1 给出了点估计的概念，要掌握矩估计法、极大似然估计法。

2 理解估计量的评选标准（无偏性、有效性、一致性）。

3 掌握正态总体均值与方差的区间估计

$P_{175-176}$ 16,19,21,23

返回主目录