1.6 命题逻辑推理理论

命题公式 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 推 B 的推理正确当且仅当 $(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\rightarrow B$ 为重言式。

1.6.1 有效推理的概念

❖ 定义 1.21 设 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 和 B 都是命题公式，若对于 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 和 B 中出现的命题变元的任意一组赋值，

或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，

或者当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为真时，B 也为真，

则称由前提 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 推出 B 的推理是有效的或正确的，并称 B 是有效结论。

1.6.1 有效推理的概念

- 说明：1）由前提 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 推结论 B 的推理是否正确与诸前提的排列次序无关。因而前提的公式不一定是序列，而是一个有限的公式集合，若将这个集合记为 Γ(伽马），可将由 Γ 推 B 的推理记为 $\Gamma \vdash B$。若推理是正确的，则记为 $\Gamma \models B$，否则记为 $\Gamma \not\models B$。这里，可以称 $\Gamma \vdash B$ 和 $\{A_1,A_2,\ldots,A_k\} \vdash B$ 为推理的形式结构。

  2）设 $A_1,A_2,\ldots,A_k$，B 中共出现 n 个命题变元，对于任何一组赋值 $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$($\alpha_i$ =0 或者 1，i=1,2,…,n)，前提和结论的取值情况有以下四种：

  (1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为 0，B 为 0.　　(2) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为 0，B 为 1.

  (3) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为 1，B 为 0.　　(4) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为 1，B 为 1.

  3）由以上的讨论可知，推理正确，并不能保证结论 B 一定为真，这与数学中的推理是不同的。

- 这个与前面我们所介绍的哪个内容非常相关？——蕴涵联结词！

1.6.1 有效推理的概念

例 1.42 判断下列推理是否正确：

1）$\{Q, Q \to P\} \vdash P$

2）$\{P, Q \to P\} \vdash Q$

解：根据有效推理定义，只要给出前提合取式与结论的真值表，判断是否出现前提合取式为真，结论为假的情况。

1）由以下真值表可知，没有出现前提合取式为真，结论为假的情况，因而 1）中推理正确，即 $\{Q, Q \to P\} \models P$。

2）由以下真值表可知，在赋值为 10 时，出现前提合取式为真，结论为假的情况，因而 2）中推理不正确，即 $\{P, Q \to P\} \not\models Q$。

P Q	$Q \wedge (Q \to P)$ P	$P \wedge (Q \to P)$ Q
0 0	0 0	0 0
0 1	0 0	0 1
1 0	0 1	1 0
1 1	1 1	1 1

1.6.1 有效推理的概念

- 命题公式 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 推 B 的推理正确当且仅当 $(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\rightarrow B$ 为重言式；
- 推理的形式结构：$\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}\vdash B$ 是有效的当且仅当 $(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\rightarrow B$ 为重言式。$(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\rightarrow B$ 也称为上述推理的形式结构。
- 推理正确 $\{A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\}\models B$ 可记为 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\Rightarrow B$ 。
- 通过前面的学习，已有三种判断推理有效性的方法：真值表法、逻辑等价演算法、主析（合）取范式法

1.6.2 命题演算推证

- 命题演算推证由三个要素组成：推理根据、推理规则和证明方法。
  - 1）推理根据：命题演算推证的命题定律和推理定律；即主要指已知的基本逻辑等价式和逻辑蕴涵式（见表 1.17）
  - 2）推理规则：
    - （1）前提引入规则（P 规则）：在推证的任何步骤上都可以引入前提。
    - （2）结论引入规则（T 规则）：在推证的任何步骤上所得到的结论都可以作为后继证明的前提。
    - （3）附加前提规则（CP 规则）：若从 A 和 B 能有效地推出 C，则从 A 可有效地推出 $B \rightarrow C$。（通常在结论为蕴涵式时使用）

1.6.2 命题演算推证

❖ 推证格式中包含：步骤号，给定前提或得出的结论，推理时所用规则和定律类型。

例 1.43 构造下列推理的证明：

前提：$(\neg P \to Q)$，$(P \to R)$，$(\neg Q \vee S)$

结论 :$S \vee R$。

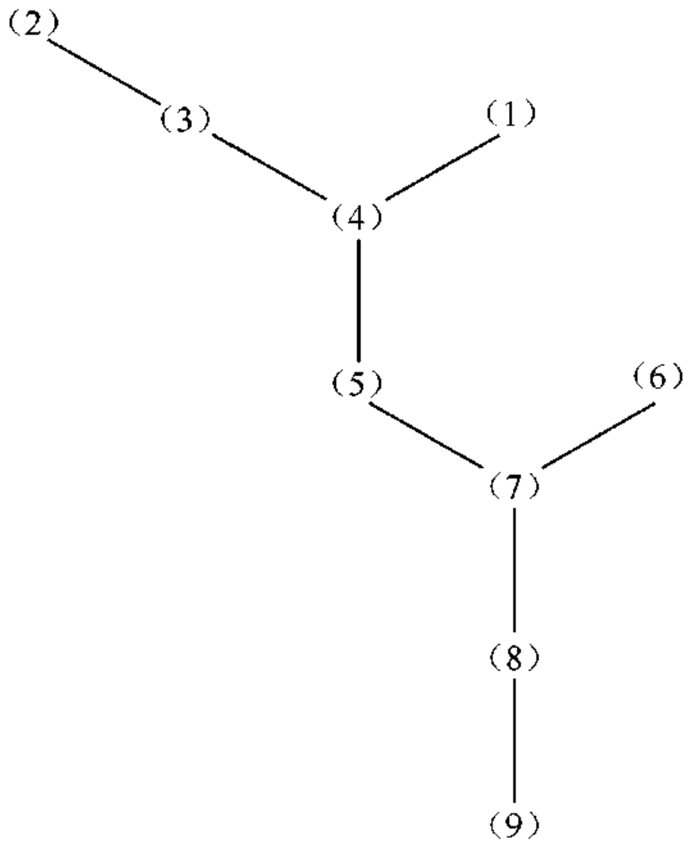
证：

(1)	$\neg P \to Q$	P
(2)	$\neg Q \vee S$	P
(3)	$Q \to S$	T (2) E
(4)	$\neg P \to S$	T (1)(3) I
(5)	$\neg S \to P$	T (4) E
(6)	$P \to R$	P
(7)	$\neg S \to R$	T (5)(6) I
(8)	$\neg\neg S \vee R$	T (7) E
(9)	$S \vee R$	T (8) E

证毕。

1.6.2 命题演算推证

- 上述推证过程可以用一棵倒置的树来形象地表示，前提作为树的“叶子”节点，逻辑结果作为树的“分支节点”，结论作为树的“树根”。



1.6.2 命题演算推证

例 1.44 构造推理的证明：$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$

证：	(1)$P \vee Q$	P
	(2)$\neg P \rightarrow Q$	T (1) E
	(3)$Q \rightarrow R$	P
	(4)$\neg P \rightarrow R$	T (2)(3) I
	(5)$P \rightarrow R$	P
	(6)$\neg R \rightarrow \neg P$	T (5) E
	(7)$\neg R \rightarrow R$	T (6)(4) I
	(8)$\neg\neg R \vee R$	T (7) E
	(9)$R \vee R$	T (8) E
	(10)R	T (9) E

证毕。

1.6.2 命题演算推证

- 3 ）证明方法包括 ：
  - (1) 直接证法：如前例所示。
  - (2) 间接证明方法 ：反证法 和附加前提证法 。
- ① 反证法
  - 在命题演算推证中，为了证明某个结论是某些前提的有效结论，通常先假设结论的否定成立，然后推出此假设与前提相矛盾。此类间接证法又称为反证法 。
- 定义 1.22 假设公式 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 中的全体命题变元为 $P_1, P_2, \ldots, P_n$。若存在某些赋值，使得 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$ 的真值为 1 ，则称公式 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是相容的；若对于任何赋值都使得 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$ 的真值都为 0 ，则称公式 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是不相容的。

1.6.2 命题演算推证

❖ **定理 1.10** 设命题公式集合 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ 是相容的，那么从 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ 出发可逻辑地推出结论 B 的充分必要条件是从 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B\}$ 可逻辑地推出一个矛盾式。

证：先证必要性。

由于 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \Rightarrow B$，所以 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m) \to B$ 是重言式。

因而对能使 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$ 的真值为 1 的赋值必然使 B 的真值也为 1，从而 $\neg B$ 的真值为 0。

因此 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge \neg B$ 是矛盾式。

故从 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B\}$ 可逻辑地推出一个矛盾式。

1.6.2 命题演算推证

再证充分性。

由于从 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B\}$ 可逻辑地推出一个矛盾式，即

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge \neg B \Rightarrow P \wedge \neg P$$（ P 是任意命题变元）

因而

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge \neg B \rightarrow (P \wedge \neg P)$$

是永真式。故

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge \neg B$$

必为矛盾式。

又由于 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ 是相容的，那么任意使 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$ 的真值为 1 的赋值必然使 $\neg B$ 的真值为 0 ，从而 B 的真值为 1 。

故有 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \Rightarrow B$ ，即从 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ 出发可逻辑推出结论 B 。

证毕。

1.6.2 命题演算推证

例 1.46 如果今天我没课，则我去机房上机或去图书馆查资料；若机房没有空机器，则我没法去上机；今天我没课，机房也没有空机器，所以我去图书馆查资料。

证：设 P ：今天我没课； Q ：我去机房上机； R ：我去图书馆查资料； S ：机房没有空机器

则上述语句可翻译为命题关系式： $P \rightarrow Q \vee R, S \rightarrow \neg Q, P, S \Rightarrow R$

(1) $\neg R$ P（结论的否定）

(2) $P \rightarrow Q \vee R$ P

(3) P P

(4) $Q \vee R$ T (2)(3) I

(5) Q T (4)(1) I

(6) $S \rightarrow \neg Q$ P

(7) S P

(8) $\neg Q$ T (6)(7) I

(9) $Q \wedge \neg Q$ T (5)(8) I

证毕。

1.6.2 命题演算推证

❖ ② 附加前提证法

- 间接证法的另一种情况是：若要证 $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow (B \rightarrow C)$，只要证 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge B \Rightarrow C$ 即可。
- 事实上：设 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$ 为 S, 即证 $S \Rightarrow (B \rightarrow C)$ 或 $S \Rightarrow (\neg B \vee C)$，即证 $S \rightarrow (\neg B \vee C)$ 为永真式。因为

$S \rightarrow (\neg B \vee C) \Leftrightarrow \neg S \vee (\neg B \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg S \vee \neg B) \vee C)$

$\Leftrightarrow \neg (S \wedge B) \vee C$

$\Leftrightarrow (S \wedge B) \rightarrow C$

如有 $(S \wedge B) \Rightarrow C$ ，即证得 $S \Rightarrow (B \rightarrow C)$ 。

由 $(S \wedge B) \Rightarrow C$ 证得 $S \Rightarrow (B \rightarrow C)$ ，就是前面提到的 CP 规则；其中的 B 称为附加前提。

1.6.2 命题演算推证

例 1.47 试证明 $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(R\to\neg S)\Rightarrow S\to Q$.

证：	(1) $P\to R$	P
	(2) $R\to\neg S$	P
	(3) $P\to\neg S$	T (1)(2) I
	(4) S	CP
	(5) $\neg P$	T (3)(4) I
	(6) $P\vee Q$	P
	(7) Q	T (5)(6) I

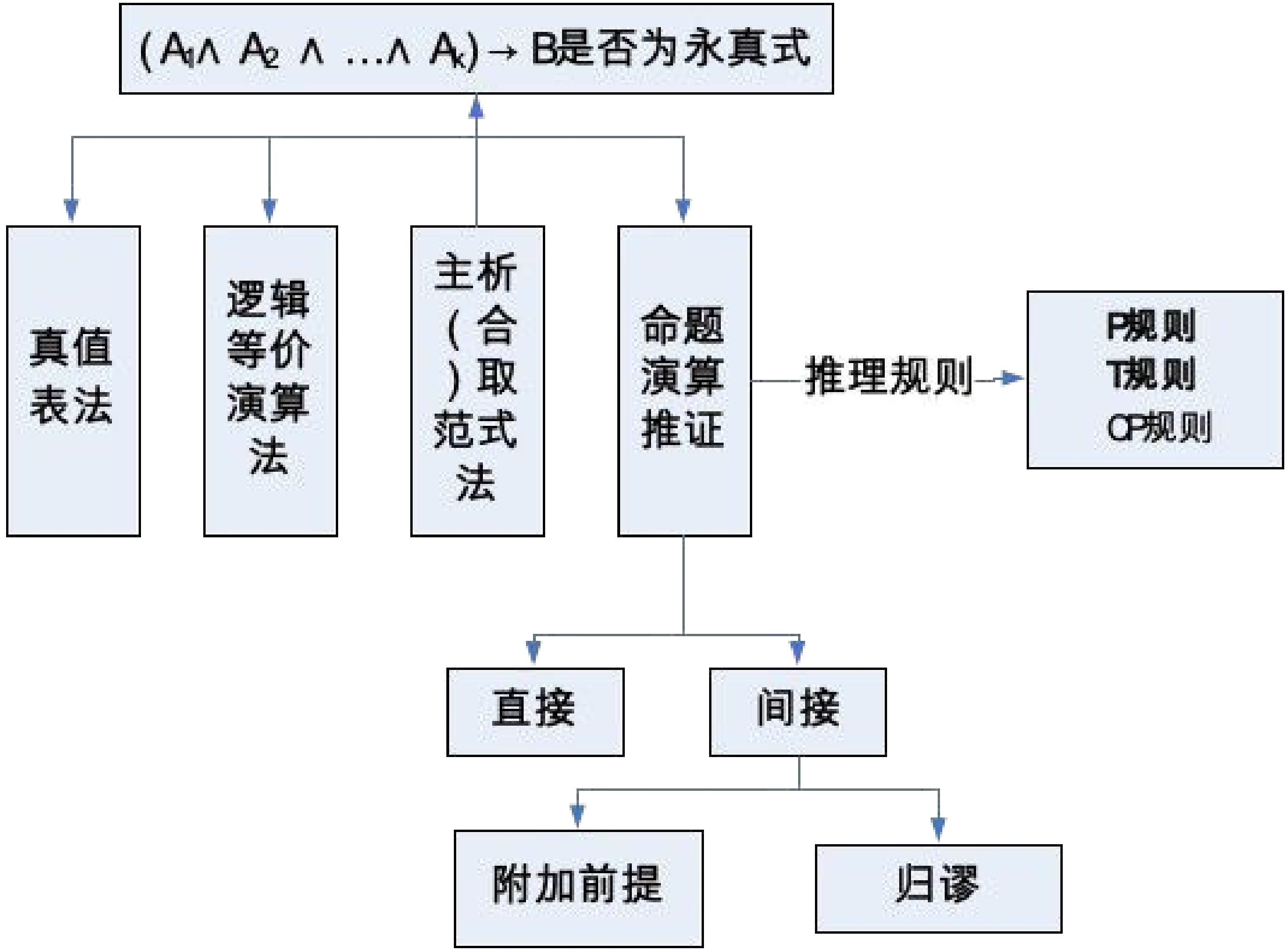
证毕。

小结

- 若推理形式结构的符号化表示：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$ 为重言式，则推理是有效的，并记为 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \Rightarrow B$ 。
- 判断推理正确的方法有：真值表法、逻辑等价演算法、主析（合）取范式法以及命题演算推理的证明法。
- 命题演算推理的证明中内含的证明方法有：直接证明法、间接证明法；间接证明法又包括归缪证明法和附加前提证明法。

小结

❖ 本小节的思维形式注记图：



作业

- 习题 11（2）（4）（6）

1.7 常见题型解析

1）命题的符号化

- 要想解决实际问题，很多时候需要我们将实际问题中的自然语言描述进行符号化。这类习题的思路是：
- 符号化原子命题→确定联结词→符号化联结词→复合命题符号化

2）求公式的主析取/合取范式

- 求一个公式的主析取范式或主合取范式主要有三种方法：真值表法、逻辑等价演算法以及利用主析取范式求主合取范式或利用主合取范式求主析取范式。

1.7 常见题型解析

- 3）求公式的成真赋值与成假赋值
  - 一般采用真值表法或求主范式的方法，主析取范式的极小项对应成真赋值，主合取范式的极大项对应成假赋值。
  - 如果公式形式过于繁琐，也可采用逻辑等价演算的方法将公式转化为与之逻辑等价的较简单公式后，再使用上述方法。
- 4）判断公式类型
  - 公式的类型主要有三种：重言式、矛盾式和非重言可满足式。
  - 判断的方法常用的主要是真值表法和主范式的方法。
  - 可以借助逻辑等价演算的方法进行简化后再进行判断。
  - 对于非重言可满足式只需要分别找到一个成真赋值和一个成假赋值即可。

1.7 常见题型解析

- 5）判断 / 证明两个命题公式的逻辑等价关系
  - 基本方法是真值表法（较直观）和主范式方法；
  - 如果确定是证明两个公式的逻辑等价关系，比较方便的方法是逻辑等价演算的方法；
  - 如果确定不是逻辑等价的，可以通过找出一个赋值，在此赋值下两公式真值不等证明公式间非逻辑等价。

1.7 常见题型解析

❖ 6）判断推理是否正确

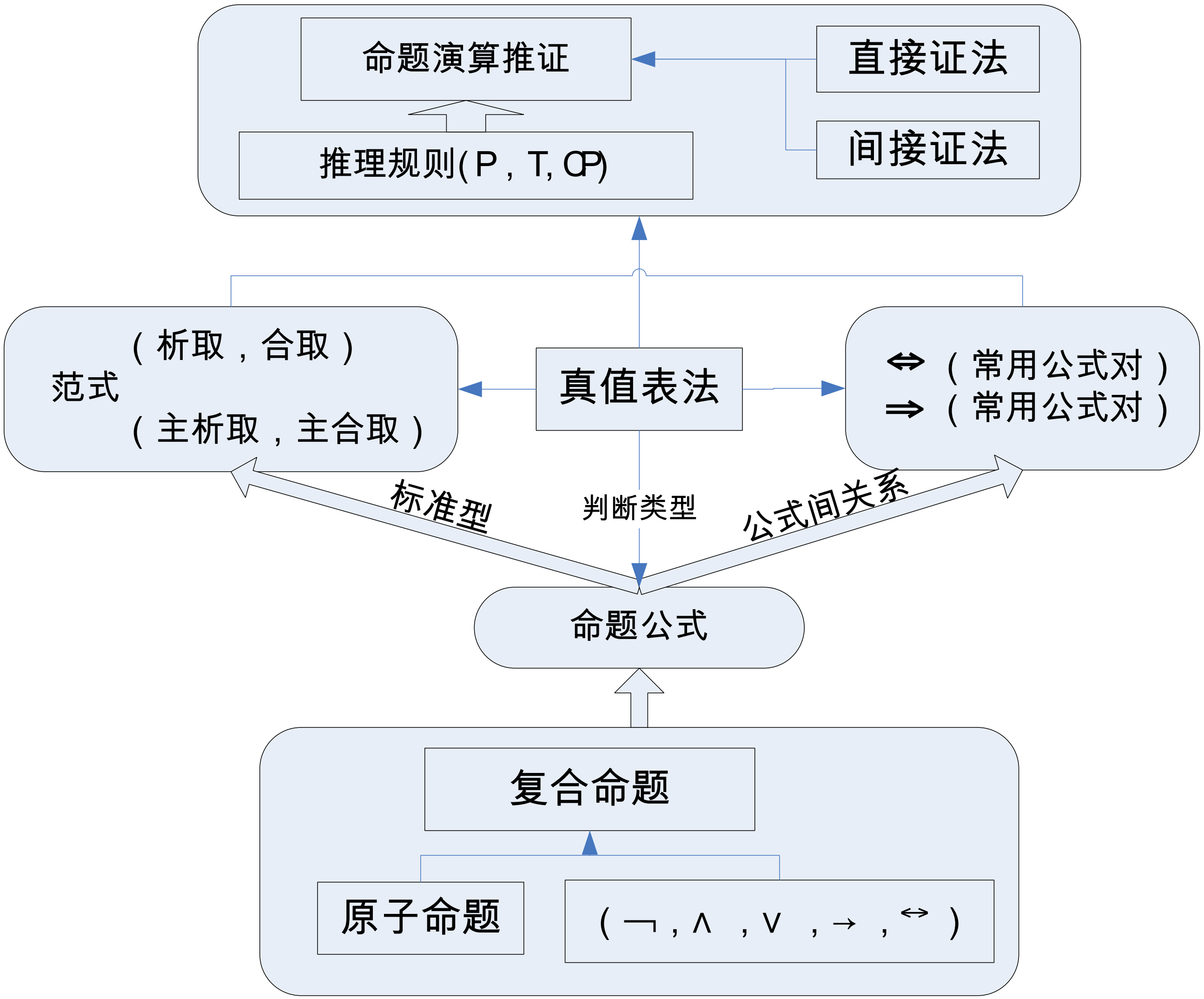
- 判断推理是否正确的实质是判断前提的合取与结论构成的蕴涵式是否为永真式。
- 一般，判断推理正确可使用的方法有真值表法、逻辑等价演算法、主析（合）取范式法和命题演算推证法等。
- 但一般比较有效的方法是命题演算推证法。这类方法证明过程中要注意一般首尾相接的原则，即一般上一步骤的结论是下一步骤的前提。

1.7 常见题型解析

7）解决逻辑难题

- 这类问题一般都来自于现实生活，所以解决这类问题首先需要进行命题的符号化，然后根据具体问题，确定解决思路。
- 对于推理问题，命题演算推理是比较有效的方法。

本章知识逻辑结构图


命题演算推证
直接证法
间接证法
推理规则(P，T, CP)
（析取，合取）
范式
（主析取，主合取）
真值表法
⇔（常用公式对）
⇒（常用公式对）
标准型
判断类型
公式间关系
命题公式
复合命题
原子命题
（¬，∧ ，∨ ，→ ，↔ ）