

第一章 绪 论

信号与系统的概念在非常广泛的领域中都有出现，而与这些概念有关的许多思想和方法，在通讯、航空学、宇航学、电路设计、声学、地震学、生物工程、能量的产生与分配系统、化学过程控制和语音处理等各种科学技术领域里都起着重要的作用。虽然，在各个学科中的信号与系统的物理本质可能大不相同，但他们都有两个非常基本的共同点。信号是单个或多个独立变量的函数，而且一般来说，含有关于某种现象变化过程和特征的信息，而系统则对特定信号响应而产生另外一些信号。一个电路中的电压和电流作为时间的函数，是信号的一个例子，而这一电路本身则是系统的一个例子，在这种情况下，系统对所施加的电压和电流产生响应。另一个例子，当驾驶员压下加速踏板时，汽车以增加车速为响应，在这种情况下，系统就是汽车，加速踏板上的压力则是系统的输入，汽车的速度是响应。一个心电图计算机自动诊断程序，也可看做一个系统，它以数字化的心电图作为其输入，而产生如心率这样的一些参数的估计值作为系统的输出。一架照相机也是一个系统，它接收来自不同光源和被目标反射的光而产生出一幅照片。

在出现信号与系统的许多场合，可以有各种各样的研究课题和论题。有时，我们面对的是一个特定的系统，而感兴趣的是要详细地表征这一系统，以搞清楚它如何对各种输入作出响应。一个例子就是已有悠久历史的关于人类听觉系统的研究工作。另一个例子是对某个特定地区的经济系统的认识和描述的研究，以便能更好的预测对诸如农作物歉收、新油田发现等潜在的或者是不可预料的输入会产生什么响应。

www.blogoil.com

在另一些信号和系统分析的场合，我们的兴趣不在于分析现有的系统，而在于系统的设计问题，以使用它们以各种特定方式来处理信号。经济预测系统是代表这种情况的一个极为普通的例子。例如，设有一组像证券市场平均价格一类的经济时序的记录，把这种记录看做信号，要是能根据过去记录去预测将来的状态显然是有用的。许多这样的系统已经精心研制成功，这些系统一般是计算机程序形式的，用这些系统可以求得证券市场平均价格的详细分析，还可进行其他类型的经济预报。虽则大多数这样的信号并不是全部可预测的，但有趣而重要的事实是，根据这些信号的许多过去的记录，其将来状态或多或少是可以预测的，换句话说，至少它们可近似地被外推。

第二种常见的应用，是恢复由于某些原因而恶化了的信号。在强背景噪声条件下进行语音通信时，就经常出现这种情况。例如，当飞机驾驶员同空运交通管制塔台通讯时，通信会因驾驶舱的高背景噪声电平而恶化。在这种情况下和其他类似情况下，设计各种系统，以保留需要的信号（现在是驾驶员的声音）而排除（至少近似地排除）不需要的信号（在此是噪声）是有可能的。从已恶化信号中恢复原信号的另一个成功的例子，是老唱片的修复系统。在录音时，采用一个根据输入信号而在唱片上刻出纹路形的录音系统，这一输入信号就是艺术家的声音。早期的录音，一般是采用角形机械录音筒录制的，而这种系统会在唱片上引入严重的失真。若能修复一些老唱片，使之达到符合现代录音技术的质量标准，是很有价值的。如果用一个适当设计的信号处理系统，就有可能大大改善老唱片的质量。

设计一个按一定方式处理信号的系统之第三种有价值的应用，是一般的图像恢复和图像增强领域。在接收来自深空探测火箭的图像时，一般来说，由于成像设备的缺陷，以及可能存

在的大气影响，或许还由于图像送回地球时信号传输的种种误差，收到的图像是所摄景物恶化的变形。因此，按常规，来自空间的图像要由图像处理系统进行处理，以补偿某些恶化。另外，这种图像通常还要经过处理，以增强某些特征，诸如线条（例如，这对应于河床或断层）或区域边界，在这些地方，色彩或暗度存在着强烈的对比。于是，实现这种处理的各种系统的开发，成为系统设计的一个任务。

另一类涉及信号与系统分析的各种概念和方法的非常重要的应用，出现在如下一些情况，当我们希望修正一个给定系统的特性时，可以通过选择特定的输入信号，或者通过该系统与另一系统的组合来实现。说明这类应用的例子是化工厂的控制，它属于一般称做过程控制的领域。在这类应用中，传感器一般可测量如温度、湿度、化学比等这样一些物理信号，在这些测得信号的基础上，调节系统产生控制信号，用于调节正在进行中的化学过程。第二个例子与某些高性能的飞行器自身本来就相当于一个不稳定的物理系统这一事实有关，换句话说，它们的空气动力学特性是这样的，若无仔细设计好的控制信号，它们就不能飞行。在本例及上述过程控制的例子中，反馈概念起着重要的作用，反馈概念也是本书中要加以阐述的重要内容之一。

以上所述的一些例子，只是有关信号与系统概念的广泛应用中的很小一部分。这些概念的重要性，不仅是由于出现这些概念的现象和过程的多样性，还由于已有的及正在开发用来解决涉及信号与系统种种问题的思想、分析技术和方法的积累。这一发展的历史可追溯许多个世纪，虽然大多数发展工作是由各种特殊问题所推动的，然而，其中许多概念已被证明对更多的应用问题具有十分重要的作用，其应用范围较原来所设想的要广泛得多。例如，傅里叶分析的各种方法形成了信号与系统的频域分析基础，这是本书中要详细研究的。它可以追溯到从古代巴比伦人研究的天文学问题到18、19世纪的数学物理研究。在近代，这些概念和方法已应用于各种问题，其范围从调频和调幅发射机与接收机的设计问题到图像的计算机辅助恢复。还由于那些已经形成体系的种种课题，以及某些信号与系统的表示、分析和综合的各种有力的数学工具的有关课题的研究工作。

在以上所述的某些例子中，信号随时间连续地变化，而在另一些例子中，信号的演变仅在离散的时间点上被描述。例如，在老唱片的修复处理中，就涉及到连续变化的高频信号。另一方面，如每天收盘证券平均价格，按其本质来说是在离散时间点上演变的信号（即每天营业结束时刻）。因此，与连续时间变量函数是一条曲线不同，收盘证券平均价格是与指定的离散时间瞬刻有关的一个数的序列。这种信号演变的基本描述上的差别，以及响应或处理这两类信号的系统的基本描述上的区别，自然地导致信号与系统分析的两种并行的体系。一种是描述连续时间上的现象和过程，另一种是描述离散时间上的现象和过程。同连续时间信号与系统以及离散时间信号与系统两者有关的概念和技术，有着丰富的历史记载，并且在概念上是密切相关的。然而在历史上，由于它们在过去的应用上大不相同，而且大部分研究和开发工作是多少有点独立的。连续时间信号和系统在与物理有关的学科中有着深厚的根源，而在当代，则与电路和通信有关的课题有密切的关系。离散时间信号与系统的各种方法，在数值分析、统计以及与经济和人口统计数据等应用有关的时间序列分析方面，有着深厚的根基。近几十年来，连续时间和离散时间信号与系统在学科上日益互相渗透，它们的应用已变得密切相关。促进这种相互关系的强大推动力，是系统的实现和信号产生技术的惊人发展。尤其是高速数字计算机、集成电路以及复杂的高密度器件制造技术的惊人发展，使得用连续时间信号的等时间间隔抽样值来表示和处理连续时间信号愈来愈有利（即把连续时间信号变换为离散时间信号）。正如我们要在第8章中详细阐述的那样，在比较弱的约束

下，连续时间信号完全可以由这样的一组抽样值来表示，这是一个值得重视的事实。

由于连续时间信号与系统和离散时间信号与系统之间日益增长的相互联系，以及与它们有关的概念和方法之间的密切关系，我们在本书中采用并行的方式来阐述连续时间和离散时间信号与系统的概念。因为许多概念是类似的（但并不相同），对这些概念并行地阐述，可对两者的理解与直觉知识相互对照，并可更清楚的看到两者的相似点和差别。此外，若我们通读全书就会明白，有些概念在一种体系中较之在另一种体系中本来就更易理解，而一旦在一种体系中得到理解之后，对问题的认识就容易推广到另一种体系中去。

如同我们迄今所作的描述那样，信号与系统的概念是一个非常普遍的概念。然而，在一般性讨论阶段，关于信号与系统的本质仅可作最概括的叙述，而它们的性质仅可用最初步的术语加以讨论。另一方面，在信号与系统的研究中一个重要而基本的思想是，仔细地选择一些小类，使每一小类具有可供利用的特殊性质，然后加以发挥，则我们就可非常深入地分析和表征这些信号与系统。本书主要着重于一类特殊的系统，这就是所谓线性时不变系统。根据定义这一类系统的线性性质和时不变性质，可引伸出一组值得注意的概念和方法，这些概念和方法，不仅具有实际的重要性，而且理论上也是令人满意的。

正如我们在本绪论中已指出的，信号与系统分析有一漫长的发展历史，在这一发展过程中，已经显示出具有广泛应用领域的某些基本方法和基本原理。此外，以集成电路技术及其应用的不断发展为例，说明信号与系统分析正随着新问题、新技术和新时机而持续不断地演变和发展。我们完全可以预期，由于技术的进步定会加速这种发展，使得日益复杂的信号与系统与信号的处理技术有可能实现。在将来，我们会看到信号与系统分析的方法和概念将被运用于更广阔的应用领域。在其中某些领域，信号与系统的分析方法具有直接的应用。而在远远超出那些传统上被认为是属于科学和工程范畴以外的其他领域中，正是这些方法中所包含的一套概念，远较这些特定的方法本身，在复杂系统的分析和处理中被表明是更有价值的。因为这些原因，我们认为信号与系统分析这一论题，为科学家和工程师们提供了非常重要的知识基础。本书包含了我们选定的一组课题，并选定了编排方式和每章的习题。我们认为，这样做对读者是有帮助的：可使读者获得信号与系统分析原理的坚实基础；了解这些基本原理在滤波、调制、抽样和反馈系统分析等各种课题中的一些非常重要的基本应用；学会把某些观点发展成表示问题和求解问题的有效方法。以及对这些方法的广泛的现实应用和潜在应用作出评价。

第二章 信号与系统

2.0 引言

为了研究信号与系统的分析技术，需要建立一种分析体系，该体系应能吸取第1章给出的有关信号与系统的直观概念。为此，我们通过引进信号与系统的数学描述和表达式，来着手建立这一分析体系，并且利用这些表达式去研究信号与系统分析中的某些基本概念。这样，我们就可获得对于信号与系统的特性以及它们的表达式的某些直观认识和深刻理解。

2.1 信号

如同第1章已讨论的那样，信号可以描述极为广泛的物理现象。虽然可用许多方法来表示信号，但在所有情况下，信号中的信息总是包含在某种形式的变化模式之中。例如，人类发音机理，就是通过形成声压起伏来产生语音的。图2.1是这种语音信号的录音波形，它是通过微音器传感声压变化，然后再将这种变化转为电信号而获得的。如图所示，不同的声音对

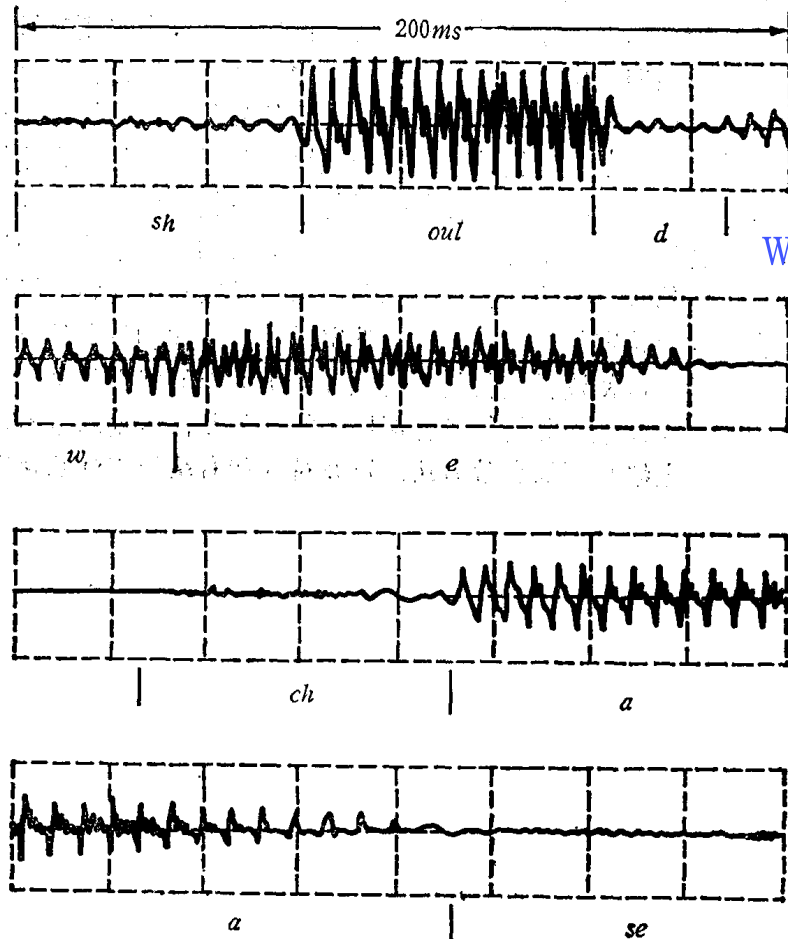


图2.1 语音信号的波音〔选自 Applications of Digital Signal Processing, A.V. Oppenheim, ed. (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1978), P.121.〕, 该信号表示口述语句 “should we chase” 作为时间函数的声压变化。图中顶上的一条线相应于单词 “should”，第二条线相应于单词 “we”，最下面两条线相应于单词 “chase” (图中已标出每个单词发音的始、终点大致位置)

应于不同的声压变化波形，而人类发音系统，正是通过产生这样的一串特定波形来形成可懂语音的。作为另一个例子，我们考虑图2.2所显示的单色图片，在这里，起作用的是亮度变化的模式。

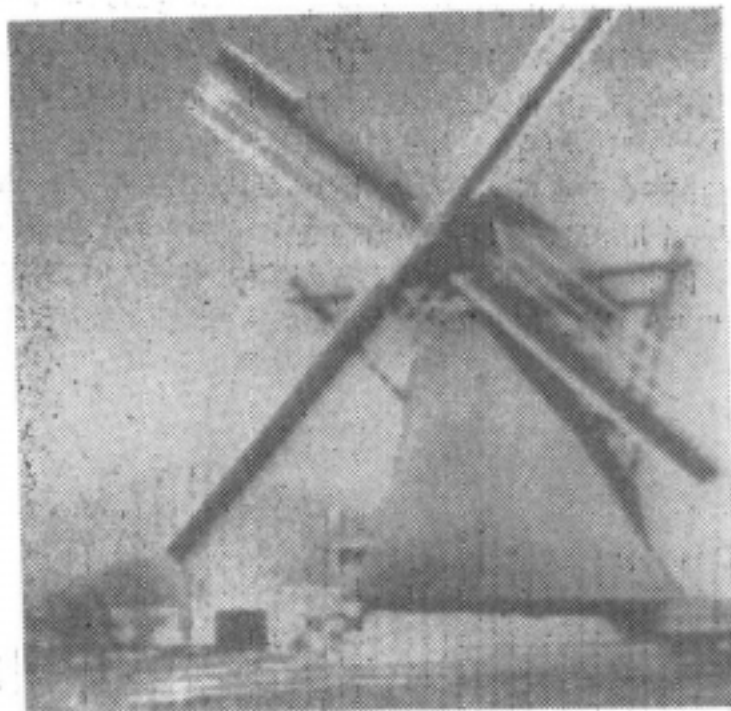


图2.2 单色图片

在数学上，可以把信号表示为单个或多个独立变量的函数。例如，语音信号可表示为声压对时间的函数，图像信号可表示为二维空间变量的亮度函数。在本书中，我们把注意力集中于单一独立变量的信号。为方便起见，我们一般把独立变量指定为时间，然而，在一些特殊应用中，它实际上可以

不代表时间。例如，在地球物理学中，为了研究地球的结构，信号就代表密度、空隙率和电阻率等物理量随深度的变化。又如，气象学研究中，具有十分重要意义的是气压、温度和风速等随高度的变化。图2.3描绘的是一个作为高度函数的年平均垂直风切面图的典型例子。测定随高度变化的风速不仅可用来研究气候变化的模式，也可用来研究影响飞机最终进场和着陆时的风力情况。

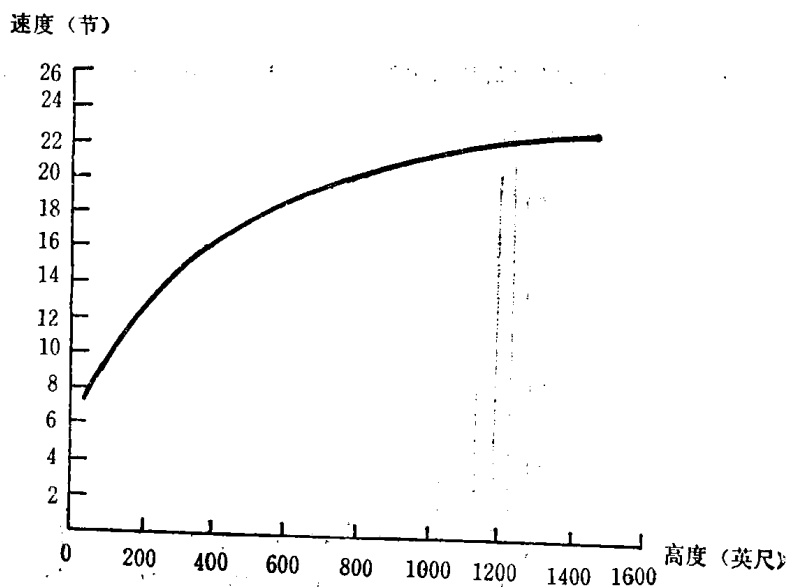


图2.3 典型的年平均垂直风切面图

(选自 Crawford and Hudson, National Severe Storms Laboratory Report, ESSA ERLTM-NSSL 48, August 1970.)

第一章我们已指出有两种基本信号，即连续时间信号和离散时间信号。对于连续时间信号，独立变量是连续的，因此，这类信号是对独立变量的连续值来定义的。另一方面，离散时间信号仅在离散的时间点上被定义，所以对于这种信号，其独立变量仅取一组离散值。作为时间函数的语音信号和作为高度函数的大气压力，都是连续时间信号的实例。而图2.4所示的每周 Dow Jones 证券行情指数，则是离散时间信号的一个实例。离散时间信号的其他一些例子，可在人口统计的研究中找到。而这种人口统计是按人口的各种特征进行的。例如，我们可以把平均收入、犯罪率和捕鱼量等特征，分别作为受教育年数、人口总数和捕鱼船吨位等离散独立变量的函数，并可列表表示之。图2.5中，表示了另一种离散时间信号。在这里，离散时间信号是一个用于生态研究的物种分布量关系的例子。其中独立变量是对应任何特定物种的个体数，因变量则是在被调查的生态共同体中具有特定个体数的物种数。图2.5所示信号的性质是相当典型的，图中有若干个丰富的物种，而多数是仅有少量样品的稀有物种。

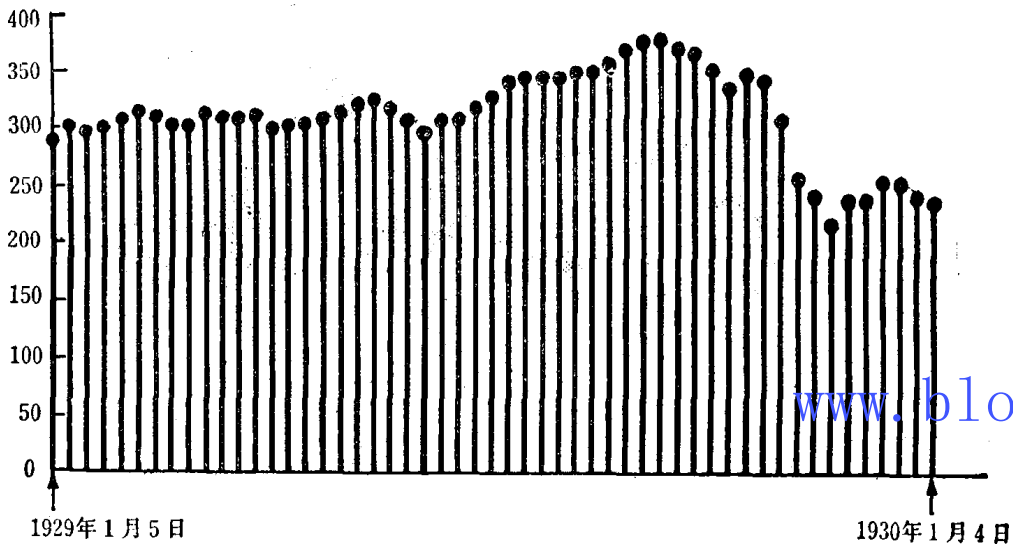


图2.4 一个离散时间信号的实例：每周 Dow Jones 证券行情指数（从1929.1.5.到1930.1.4.）

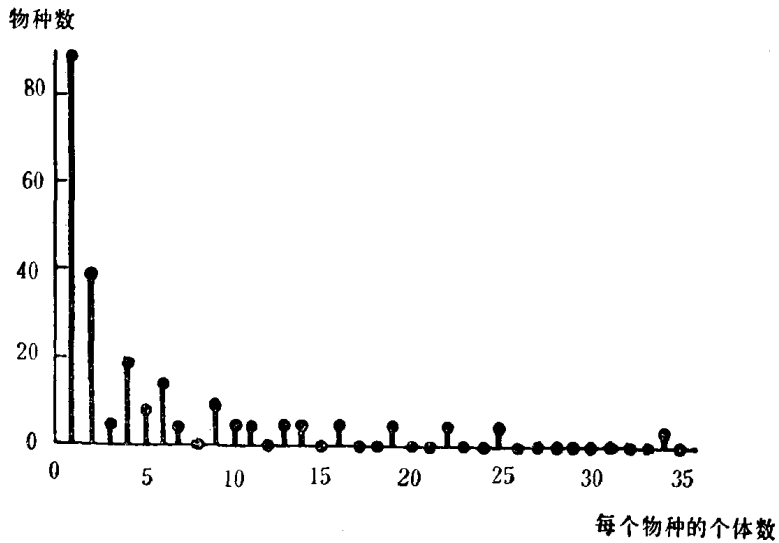


图2.5 表示生态共同体中物种分布量关系的信号〔选自 E.C.Piclou, An Introduction to Mathematical Ecology (New York : Wiley, 1969).〕

为了区别连续时间信号和离散时间信号，一般常用符号 t 表示连续时间变量，用 n 表示离散时间变量。另外，对于连续时间变量，常用圆括号 (\cdot) 把独立变量括起来，而对于离散时间信号，常用方括号 $[\cdot]$ 将独立变量括起来。有许多时候用图解法表示信号也是有效的。图2.6表示了连续时间信号 $x(t)$ 和离散时间信号 $x[n]$ 的两个例子。值得注意的是，离散时间信号 $x[n]$ 仅对独立变量的整数值有定义。我们选取 $x[n]$ 信号的图解表示正是为了强调这一事实，为此，必要时我们把 $x[n]$ 称为离散时间序列。

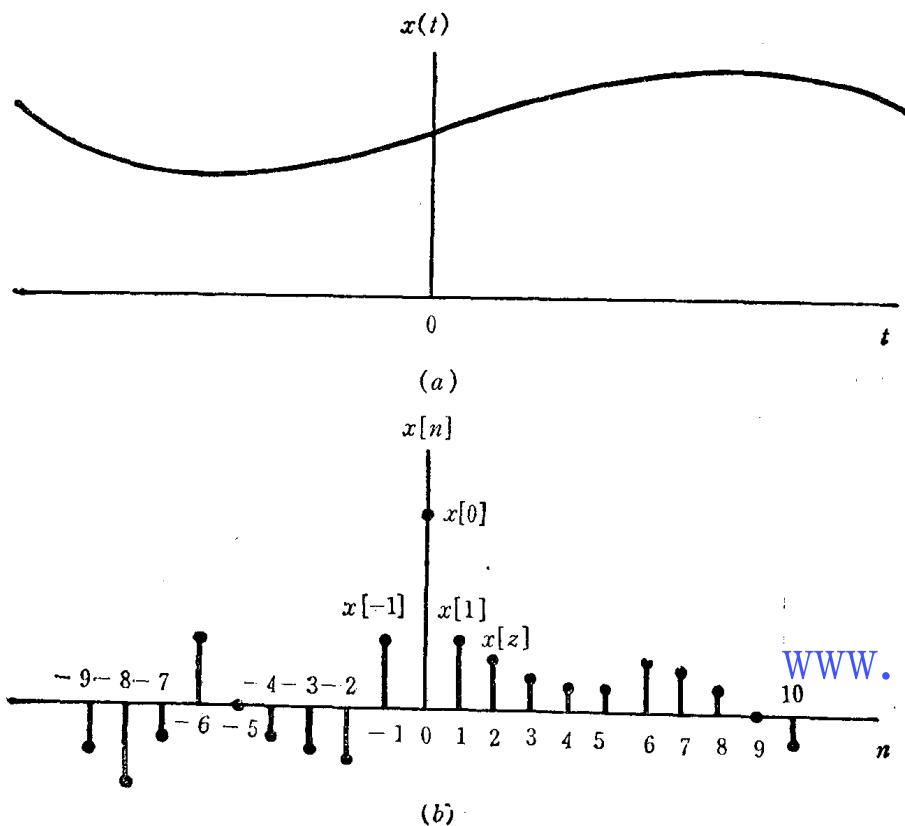


图2.6 信号的图解表示法：(a) 连续时间信号；(b) 离散时间信号

离散时间信号 $x[n]$ 可以表示那些独立变量本来就是离散的情况。例如，上述的物种分布量关系或人口统计资料，都是这种情况的例子。另一方面，离散时间信号 $x[n]$ 也可以用来表示连续独立变量的逐次抽样值。例如，在数字计算机上进行语音信号处理时，就需要利用这种离散时间序列，用它表示连续时间语音信号在离散时间点上的抽样值。另外，报纸上或书本中的图片也属于这种情况，实际上，每幅图片都是由许多微细的点子所组成，而每个点子表示原始图像相应点上亮度信号的一个抽样值。然而，无论原始的数据是什么，信号 $x[n]$ 仅定义在独立变量 n 的整数值上。也就是说，所谓的数字语音信号的第 $3\frac{1}{2}$ 个抽样值与所谓的具有 $4\frac{1}{3}$ 个样品的物种数，都是没有意义的。

本书的大部分章节，都以独立而又并行的方式论述离散时间信号和连续时间信号，这样我们就有可能凭借从一个方面获得的深刻认识，帮助对另一方面问题的理解。第8章我们还要返回到对抽样问题的讨论，在那里，我们要同时提出连续时间和离散时间的概念，以便研究连续时间信号和由它抽样获得的离散时间信号之间的关系。

2.2 独立变量的变换

在许多场合, 研究那些用独立变量的变形所描述的信号是很有意义的。例如, 图 2.7 中例举的, 信号 $x[-n]$ 是由信号 $x[n]$ 围绕 $n=0$ 反映而获得的 (即反转信号)。类似地, 图 2.8 所描述的信号 $x(-t)$ 是由信号 $x(t)$ 围绕 $t=0$ 的反映得到的。因此, 如果 $x(t)$ 表示录音磁

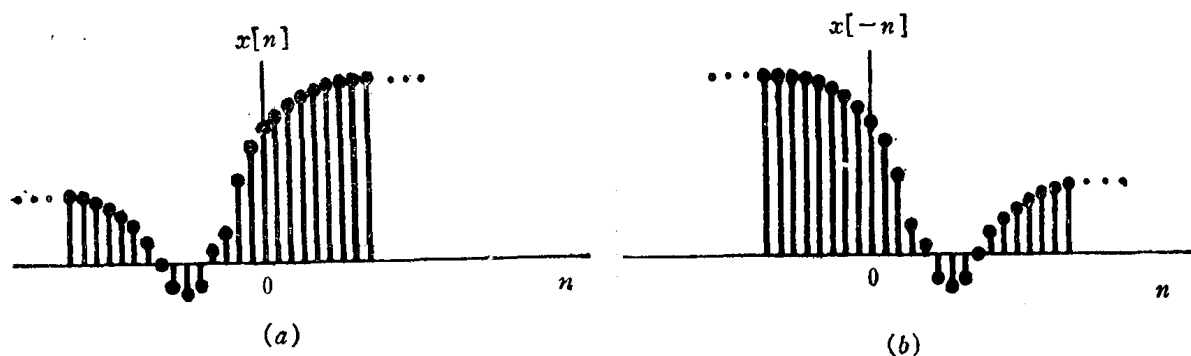


图2.7 (a) 离散时间信号 $x[n]$; (b) 它的反转信号 $x[-n]$ (对于 $n=0$)

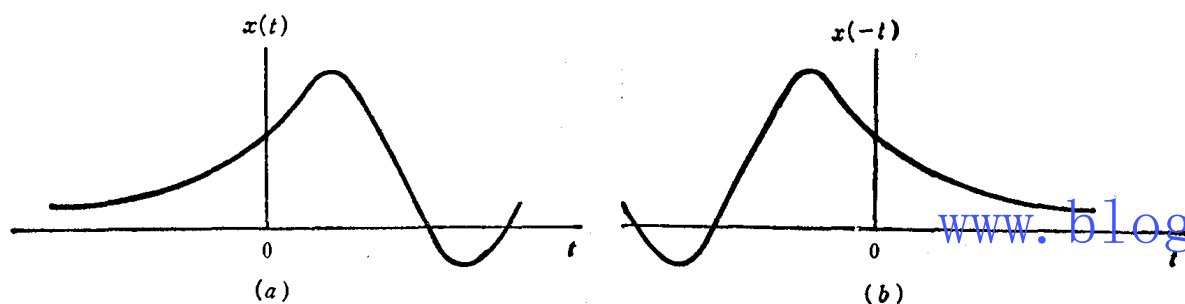


图2.8 (a) 连续时间信号 $x(t)$; (b) 它的反转信号 $x(-t)$ (对于 $t=0$)

带上的音频信号, 那么 $x(-t)$ 就是同一录音磁带的倒转放音。作为第二个例子, 在图 2.9 中列举了三个信号: $x(t)$ 、 $x(2t)$ 和 $x(t/2)$, 它们用独立变量 t 的线性刻度变化来描述。如果我们再次以录音磁带为例, 那么 $x(2t)$ 就是按 2 倍的速率放音, 而 $x(t/2)$ 则是按一半的速率放音。

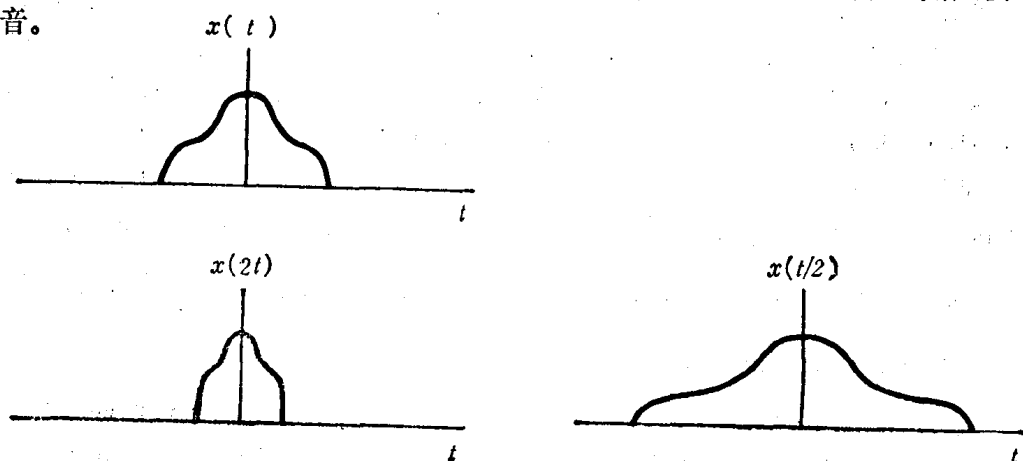


图2.9 随时间刻度变化的连续时间信号

图2.10举例说明了独立变量变换的第三个例子。图中有两个信号 $x[n]$ 和 $x[n-n_0]$, 它

们形状相同，但具有移位或相对的移位。与此类似，信号 $x(t-t_0)$ 是一个时间移位了 t_0 的 $x(t)$ 。有关这种形式的信号，在诸如声纳、地震信号处理和雷达等应用中均可见到。在这些应用中，处于不同位置的各个接收机观察到一个透过介质（例如水、岩石、空气等）传播的信号。在这种情况下，从发射信号的地点到任何两个接收点的传播时间差，即是两个接收机测得信号之间的时间移位。

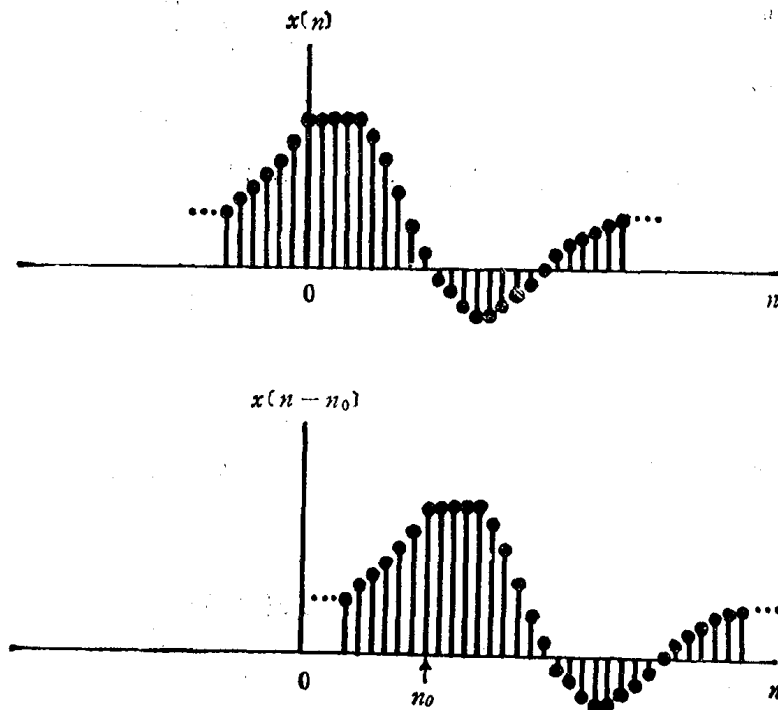


图2.10 用时间移位描述的离散时间信号

www.blogoil.com

独立变量的变换除了用于表示各种物理现象（如声纳信号的时间移位和音频磁带的反转等）之外，在研究一些信号的重要特性中，也是非常有用的。本节的余下部分，我们将要讨论这些重要特性，并在本章的稍后部分和第3章，还要利用独立变量的变换去分析系统特性。

如果信号 $x(t)$ 或 $x[n]$ 与其绕原点的映象完全相同，即对于连续时间情况，如有

$$x(-t) = x(t), \quad (2.1a)$$

或对于离散时间情况，如有

$$x[-n] = x[n], \quad (2.1b)$$

则称它们为偶信号。如果

$$x(-t) = -x(t) \quad (2.2a)$$

或

$$x[-n] = -x[n], \quad (2.2b)$$

则称它们为奇信号。应当指出，对于奇信号，当 $t=0$ 或 $n=0$ 时，它也必定等于零。图2.11显示了连续时间奇、偶信号的例子。

事实上，任何一个信号都可以分解为奇、偶两个信号之和。为了看清这一点，我们定义如下信号

$$\text{Ev}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (2.3)$$

为信号 $x(t)$ 的偶分量。同样，由下式

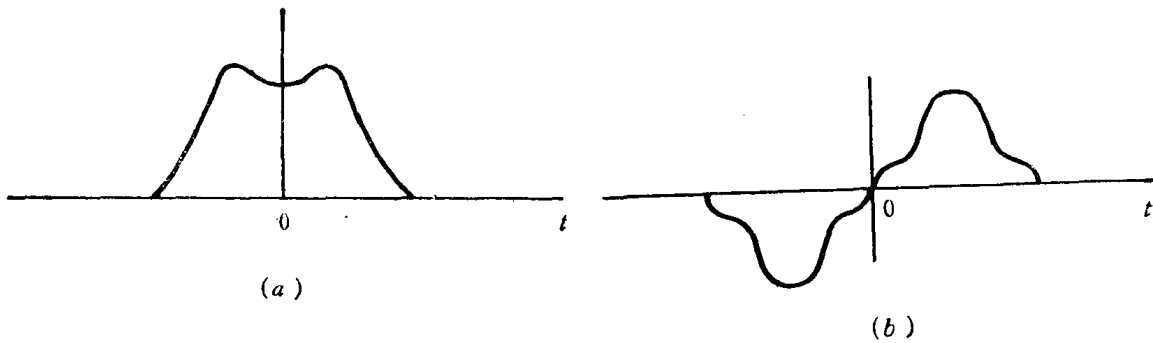


图2.11 (a) 连续时间偶信号; (b) 连续时间奇信号

$$\text{Od}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (2.4)$$

给出信号 $x(t)$ 的奇分量。通过简单地运算, 即可证明偶分量实际上就是偶信号, 奇分量即为奇信号, 而信号 $x(t)$ 即为这两者之和。与此完全类似的定义, 在离散时间情况下也成立。图2.12给出了离散时间信号奇、偶分解的例子。

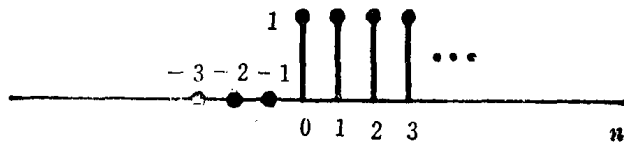
在信号与系统的整个讨论中, 我们有时涉及到周期性连续时间信号和离散时间信号。一个周期性连续时间信号 $x(t)$ 必定具有如下性质:

有一个正值 T , 对于一切 t , 使得 $x(t) = x(t+T)$ (2.5)

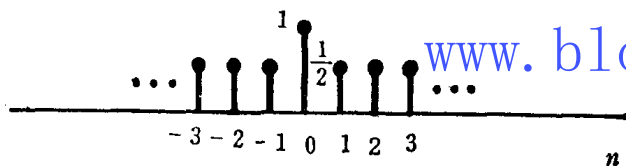
在这种情况下, 我们说 $x(t)$ 是一个具有周期 T 的周期信号。图2.13给出了这种信号的例子。根据图2.13或式(2.5), 我们可以很容易地推断: 如果 $x(t)$ 是具有周期 T 的周期信号, 那么, 对所有的 t 和任何整数 m , 则 $x(t) = x(t+mT)$ 。因此, $x(t)$ 也可以是周期为 $2T, 3T, 4T, \dots$ 的周期信号。满足式(2.5)的最小正值 T , 称为信号 $x(t)$ 的基本周期 T_0 。除了 $x(t)$ 等于常数以外, 其基本周期的确定值总是存在的。在 $x(t)$ 为常数的情况下, 因为对于 T 的任何选择, $x(t)$ 都是周期性的, 所以基本周期是不确定的(于是, 不存在最小的正值)。最后, 对于不是周期性的信号 $x(t)$, 就称它为非周期信号。

用类似方法可以定义离散时间周期信号。具体地说, 如果对于一切 n , 使得

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



$$\text{Ev}\{x[n]\} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n > 0 \end{cases}$$



$$\text{Od}\{x[n]\} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n < 0 \\ 0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n > 0 \end{cases}$$

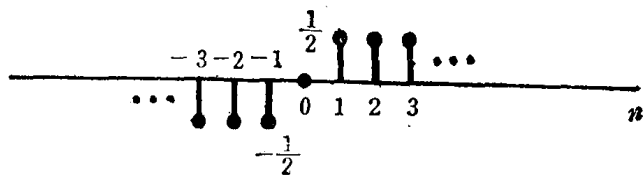


图2.12 离散时间信号的奇、偶分解

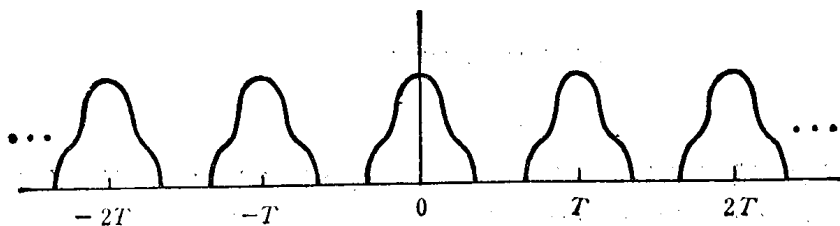


图2.13 连续时间周期信号

$$x[n] = x[n+N] \quad (2.6)$$

则离散时间信号 $x[n]$ 就是一个具有周期为 N 的周期信号, 其中 N 是正整数。如果式 (2.5) 成立, 那么 $x[n]$ 也是周期为 $2N, 3N, \dots$ 的周期信号, 并且其基本周期 N_0 就是满足式 (2.6) 的最小正值 N 。

2.3 基本连续时间信号

这一节介绍几种特别重要的连续时间信号。这些信号不仅经常存在于自然界, 而且它们也是构成其他许多信号的基本组成单元。在本章和以后各章, 可以看出, 按这种方法构成的信号, 能使我们更深入地研究和理解信号与系统的特性。

2.3.1 连续时间复指数信号和正弦信号

连续时间复指数信号的形式为

$$x(t) = Ce^{at} \quad (2.7)$$

其中 C 和 a 一般是复数。随着这些参数的不同数值, 复指数可以呈现几种不同的特性。如图2.14所示。如果 C 和 a 为实数 (此时 $x(t)$ 称为实指数信号), 则基本上有两种情况: 若 $a > 0$, 则 $x(t)$ 是随时间 t 增长的递增指数信号, 这种指数信号可用于描述各式各样的现象, 包括原子爆炸、复杂化学反应中的连锁反应和细菌培养中细菌总数的无抑制增长等; 若 $a < 0$, 则 $x(t)$ 是 t 的递减指数信号, 这种信号在如下许多方面也获得了广泛的应用, 如描述放射性衰变, RC 电路响应, 阻尼机械系统和许多其他物理过程等。最后, 当 $a = 0$ 时, 则 $x(t)$ 变为常量。

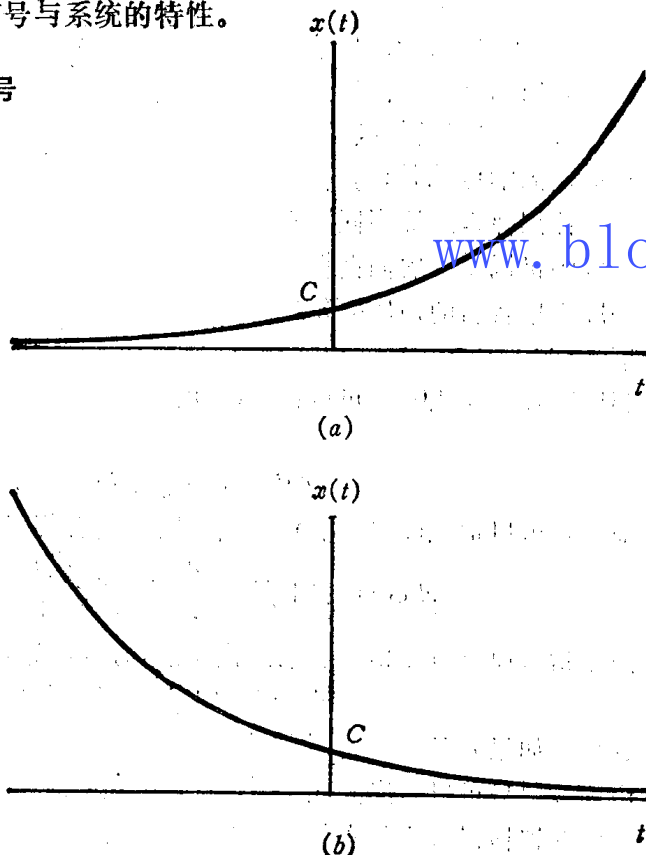


图2.14 连续时间实指数信号 $x(t) = ce^{at}$

(a) $a > 0$; (b) $a < 0$

第二类重要复指数信号, 是由限定 a 为纯虚数而获得的。明确地说, 研究如下信号

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (2.8)$$

可知, 它的一个重要特性是具有周期性。为了证明这一点, 我们回顾一下式 (2.5), 如果

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)} \quad (2.9)$$

由于

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

必有

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \quad (2.10)$$

那么, $x(t)$ 即表示周期为 T 的周期信号。若 $\omega_0 = 0$, 则 $x(t) = 1$, 这是一个周期为任何 T 值的周期信号。若 $\omega_0 \neq 0$, 那么 $x(t)$ 的基本周期就是 T_0 , 它是满足式 (2.10) 的 T 的最小正值, 并由下式给出

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \quad (2.11)$$

因此, 信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{-j\omega_0 t}$ 具有相同的基本周期。

与周期复指数信号有密切关系的信号是图2.15所示的正弦信号

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.12)$$

式中 t 的单位为秒, ϕ 和 ω_0 的单位分别为弧度和弧度/秒。通常, 还把 ω_0 写成 $\omega_0 = 2\pi f_0$ 的形式, 其中 f_0 的单位为周期/秒或赫 (Hz)。正弦信号也是具有基本周期为 T_0 的周期信号, T_0 由式 (2.11) 给出。正弦信号和周期复指数信号同样可用来描述许多物理过程的特征。例如, LC 电路的响应就是正弦信号。它如同物体用弹簧连接到固定支架上所组成的机械系统的简谐振动一样。相应于单音符的声压变化也是正弦信号。

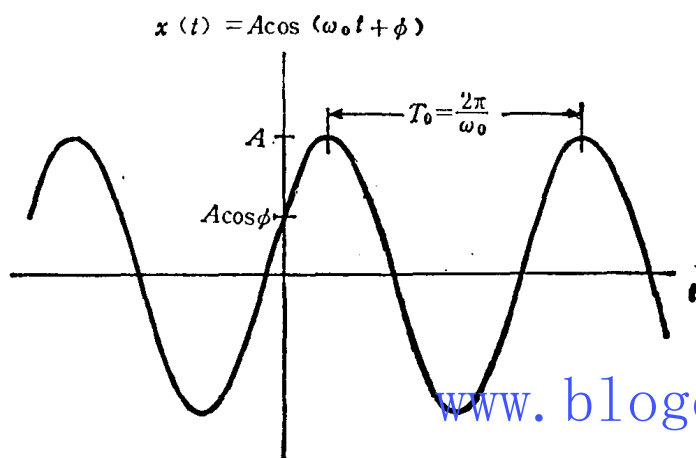


图2.15 连续时间正弦信号

利用欧拉关系式①, 可以把式 (2.8) 的复指数信号写成具有相同基本周期的正弦信号形式:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t \quad (2.13)$$

同样地, 也可以把式 (2.12) 的正弦信号写成具有相同基本周期的周期复指数信号

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t} \quad (2.14)$$

式中两个指数项具有复指数振幅。换句话说, 可以用复指数信号表示正弦信号

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\} \quad (2.15)$$

这里, 如果 c 是复数, 则 $\operatorname{Re}\{c\}$ 就表示 c 的实部, 而 $\operatorname{Im}\{c\}$ 表示 c 的虚部。

由式 (2.11) 可以看出, 连续时间正弦信号或周期复指数信号的基本周期 T_0 与 $|\omega_0|$ 成反比例, 因此把 $|\omega_0|$ 称为基本频率。从图2.16中可以看出其含意, 若减小 ω_0 , 则相当于降低振荡频率, 并因此而增大周期。若增大 ω_0 , 就会出现完全相反的结果。现在考虑 $\omega_0 = 0$ 的情况, 正如我们早已提及的, 在这种情况下, $x(t)$ 是一常量, 从而可以把它视为周期是任何 T 值为正数的周期信号。因此, 恒定信号的基本周期是没有定义的。另一方面, 把恒定信号基本频率定义为零是没有什么多义性的, 也就是说, 恒定信号仅具有一个零振荡频率。

① 在本章末尾的头几个习题中, 将复习与复数和指数运算有关的欧拉关系式及其他基本概念。

在信号与系统大部分论述中, 周期复指数信号将起重要的作用。有时候, 研究一种谐波相关的复指数概念是很有用的, 它是一组基本频率为 ω_0 的整倍数的周期指数信号:

$$\begin{aligned}\phi_k(t) &= e^{jk\omega_0 t}, \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}\quad (2.16)$$

当 $k=0$ 时, $\phi_k(t)$ 是一常量。而对于 k 的任何其他值, $\phi_k(t)$ 则是具有基本周期为 $2\pi/(|k|\omega_0)$ (或基本频率为 $|k|\omega_0$) 的周期指数信号。由于对于任何正整数 m , 周期为 T 的周期信号也即是周期为 mT 的周期信号, 因此, 可知所有的 $\phi_k(t)$ 都具有共同的周期 $2\pi/\omega_0$ 。这里, 我们使用了音乐中常用的“谐波”这一术语。它实际上指的是在谐波相关的频率上声压变化所形成的音调。

可以利用迄今我们已研究过的实指数和周期复指数信号两种情况, 来表示和说明复指数信号的最一般情况。具体地说, 分析一个复指数信号 ce^{at} , 其中 c 用极坐标形式表示, a 用直角坐标形式表示, 即

$$c = |c|e^{j\theta}$$

和

$$a = r + j\omega_0$$

因此

$$ce^{at} = |c|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t} = |c|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \theta)} \quad (2.17a)$$

利用欧拉关系式, 可将上式进一步展开为

$$\begin{aligned}ce^{at} &= |c|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|c|e^{rt}\sin(\omega_0 t + \theta) \\ &= |c|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|c|e^{rt}\cos\left(\omega_0 t + \theta - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\quad (2.17b)$$

因此, 当 $r=0$ 时, 复指数的实部和虚部都表示正弦信号。当 $r>0$ 时, 它们相当于正弦信号乘以递增指数信号。当 $r<0$ 时, 它们相当于正弦信号乘以递减指数信号。图2.17显示了这两种情况, 图中的虚线相应于函数 $\pm |c|e^{rt}$ 。由式(2.17a)可以看出, $|c|e^{rt}$ 是复指数信号振

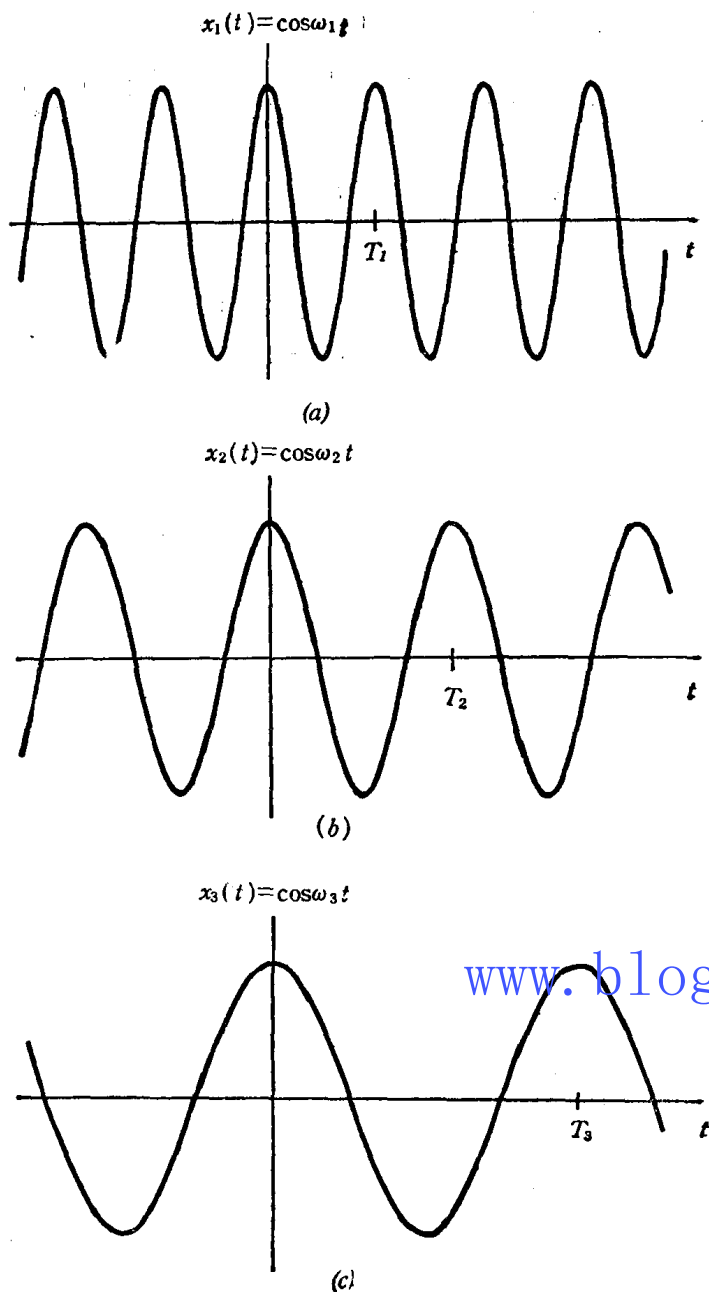


图2.16 连续时间正弦信号的基本频率和基本周期之间的关系; 图中 $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$, 其含意是 $T_1 < T_2 < T_3$ 。

幅的大小，因此，虚线即为图2.17中振荡曲线的包络线，在图中振荡曲线的峰值刚好触及包络线，据此，包络线为我们提供了一种简便方法来设想振荡幅度变化的一般趋势。正弦信号乘以递减指数信号，通常称为衰减正弦信号。 RLC 电路的响应和具有衰减与弹性恢复力的机械系统，例如自动悬置系统，正是这种信号的一些实例

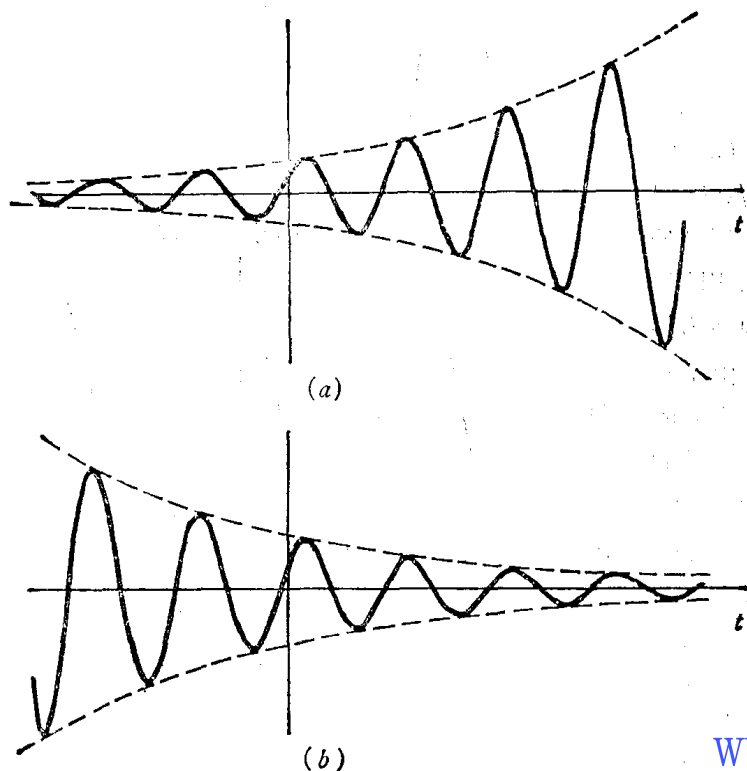


图2.17 (a)递增正弦信号 $x(t)=ce^{rt}\cos(\omega_0 t+\theta)$, $r>0$; (b)递减正弦信号 $x(t)=ce^{rt}\cos(\omega_0 t+\theta)$, $r<0$

2.3.2 连续时间单位阶跃和单位冲激函数

另一种基本连续时间信号，是图2.18所示的单位阶跃函数

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

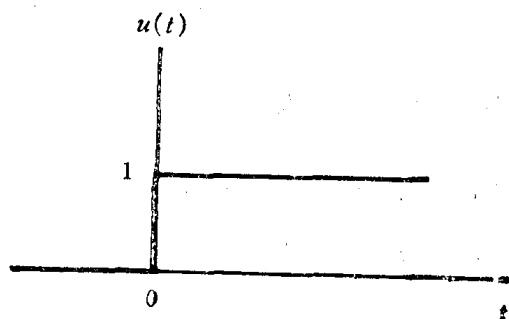


图2.18 连续时间单位阶跃函数

请注意，在 $t=0$ 处， $u(t)$ 是不连续的。如同复指数信号那样，在研究系统特性时，单

位阶跃函数是非常重要的。另一个相当有用的信号是连续时间单位冲激函数 $\delta(t)$ ，它与单位阶跃函数的关系由下式确定

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

也就是说， $u(t)$ 是单位冲激函数的连续积分。这样，我们就可以假定

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (2.20)$$

显然，由于 $u(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，因此在形式上它不是连续可微的，在这种情况下，式(2.20)作为单位冲激函数的定义有着形式上的困难。然而，我们可以把 $u(t)$ 看做连续函数的极限来解释式(2.20)。因此，定义一个如图2.19所示的函数 $u_{\Delta}(t)$ ，以便当 $\Delta \rightarrow 0$ 时， $u(t)$ 即等于 $u_{\Delta}(t)$ 的极限，同时把 $\delta_{\Delta}(t)$ 定义为如图2.20所示的函数

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) \quad (2.21)$$

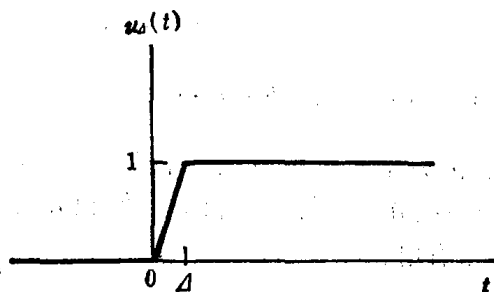


图2.19 对单位阶跃的连续近似

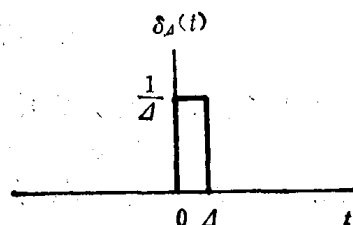


图2.20 $u_{\Delta}(t)$ 的导数

可以看出，对于任何 Δ 值， $\delta_{\Delta}(t)$ 具有单位面积，而在区间 $0 \leq t \leq \Delta$ 以外， $\delta_{\Delta}(t)$ 均为零。随着 $\Delta \rightarrow 0$ ， $\delta_{\Delta}(t)$ 的图形变得高而窄，当它保持单位面积时，它的极限形式为

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) \quad (2.22)$$

并可用图2.21所示的箭头来描述。更一般地说，标度冲激函数可写为 $k\delta(t)$ ，它具有 k 个单位面积，因此有

$$\int_{-\infty}^t k\delta(\tau) d\tau = ku(t)$$

图2.22显示了一个标度冲激函数。虽然，在 $t=0$ 处，冲激函数的“数值”是无限大的，但是，用于描述标度冲激函数的箭头高度将被选定表示它的面积。

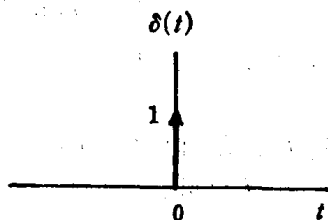


图2.21 单位冲激

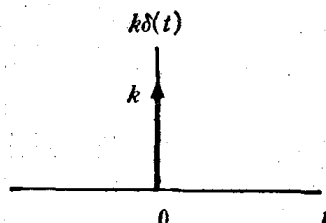


图2.22 标度冲激

图2.23列举了式(2.19)连续积分的图解说明。由于连续时间单位冲激函数 $\delta(\tau)$ 的面积集中于 $\tau=0$ 处，可以看出，对于 $t < 0$ 和 $t > 0$ ，连续积分分别等于零和1。此外，应当指出，

将积分变量 τ 改变为 $\delta = t - \tau$, 连续时间单位阶跃函数和单位冲激函数之间的关系式(2.19)可以重新写成如下不同形式

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{\infty}^0 \delta(t - \sigma) (-d\sigma)$$

或

$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \sigma) d\sigma \quad (2.23)$$

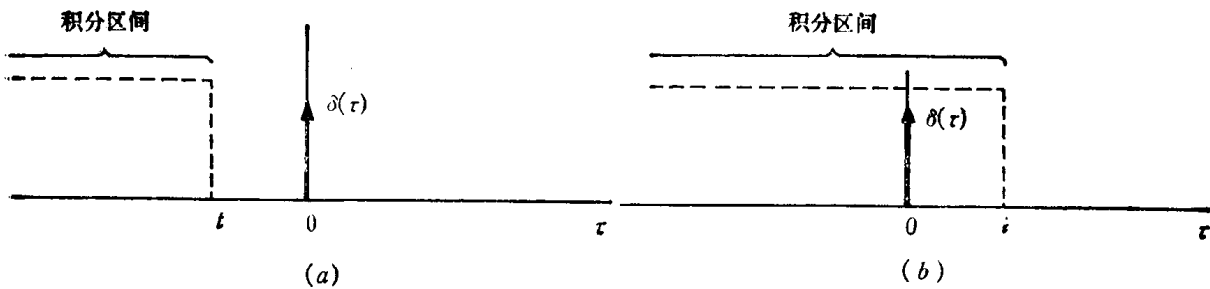


图2.2 式(2.19)给出的连续积分: (a) $t < 0$; (b) $t > 0$

图2.24说明了上式中 $u(t)$ 和 $\delta(t)$ 之间关系。因为此时 $\delta(t - \sigma)$ 的面积集中于 $\sigma = t$ 点, 我们可以再次看到, 对于 $t < 0$ 和 $t > 0$, 式(2.23)的积分分别等于零和1。在积分中, 单位冲激函数的这种形式的图解说明, 在第3章中非常有用。

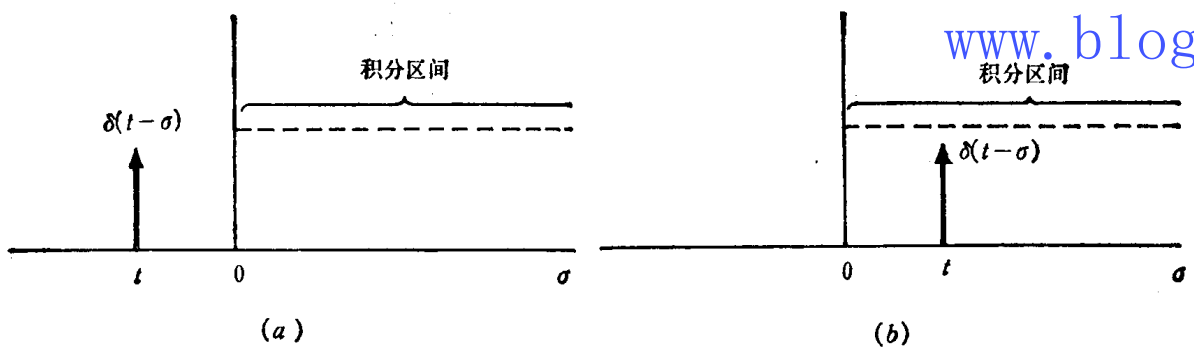


图2.24 式(2.23)给出的关系: (a) $t < 0$; (b) $t > 0$

虽然上述单位冲激函数的讨论并不那么正规, 但对目前来说, 它是适宜的, 并为我们提供了上述信号内在特性中的某些重要内容的直观认识。例如, 有时在研究冲激函数和一个优良特性的连续时间函数的乘积时, 它将是重要的。利用与式(2.22)相应的 $\delta(t)$ 的定义, 可以很方便地建立上述参量的说明。因此, 让我们分析由下式给出的 $x_1(t)$

$$x_1(t) = x(t) \delta_{\Delta}(t)$$

在图2.25(a)中, 我们描绘了两种时间函数 $x(t)$ 和 $\delta_{\Delta}(t)$ 。在图2.25(b)中, 我们可以看到它们乘积的非零部分放大图, 由该图可知, 在区间 $0 \leq t \leq \Delta$ 之外, $x_1(t)$ 为零。由于 Δ 足够小, 因此在此区间上, $x(t)$ 近似等于常量, 即

$$x(t) \delta_{\Delta}(t) \approx x(0) \delta_{\Delta}(t)$$

由于 $\delta(t)$ 是当 $\Delta \rightarrow 0$ 时 $\delta_{\Delta}(t)$ 的极限, 由此得出

$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t) \quad (2.24)$$

同理, 我们可得到一个集中于任意点 (例如 t_0 点) 上的单位冲激函数的类似表达式, 即

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

在第3章, 我们还要利用为系统研究所建立的某些概念, 提供另一种单位冲激函数的解释。把目前讨论中有关 $\delta(t)$ 的解释与今后的讨论结合起来, 将为我们提供信号与系统研究中采用冲激函数时所需的知识^①。

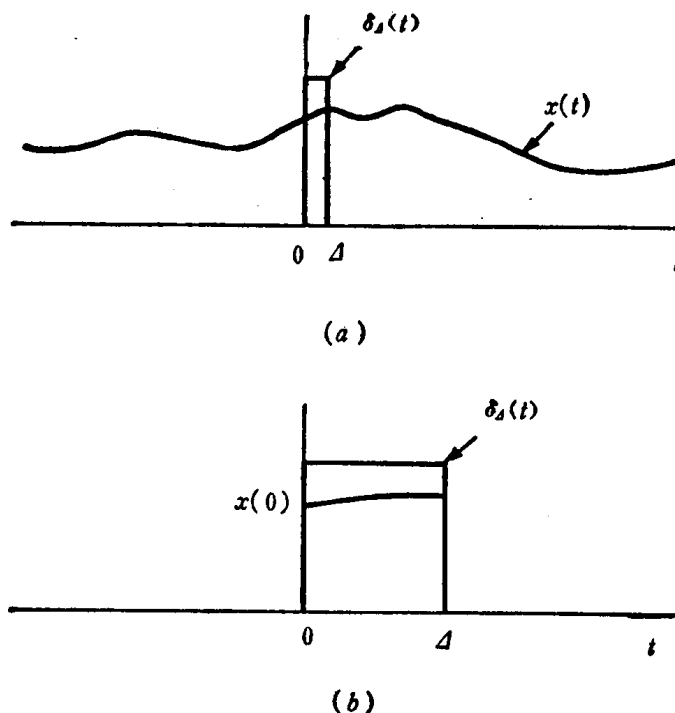


图2.25 乘积 $x(t)\delta_{\Delta}(t)$: (a) 两种函数的曲线图, (b) 它们乘积的非零部分放大图

2.4 基本离散时间信号

对于离散时间情况, 也有一些在信号与系统分析中起重要作用的基本信号。它们是2.3节中所描述的那些连续时间信号的直接对应物。同时, 我们将会看到, 基本离散时间信号的许多特性, 直接类似于基本连续时间信号的许多特性。然而, 就离散时间信号而论, 也存在一些重要差别, 在我们研究这些信号特性时, 将指出这些差别。

2.4.1 离散时间单位阶跃和单位冲激序列

与连续时间单位阶跃函数相对应的离散时间单位阶跃序列, 通常用 $u[n]$ 来表示, 并用下式定义

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

图2.26显示了这一信号序列。如我们在2.3节所讨论的, 第二个很重要的连续时间信号是单位冲激函数, 在离散时间情况下, 我们把单位冲激序列 (或称单位抽样) 定义为

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

^①单位冲激和其他的有关函数 (它们通称为奇异函数) 已在广义函数和分布论的数学领域中得到充分研究。关于这一课题的讨论请参阅参考书: Distribution Theory and Transform Analysis, by A. H. Zemanian (New York, McGraw-Hill Book Company, 1965) 或更高级的教程 Fourier Analysis and Generalized Functions, by M. J. Lighthill (New York, Cambridge University Press, 1958)。对于该课题的简要介绍, 可参阅: The Fourier Integral and Its Applications, by A. Papoulis (New York: McGraw-Hill Book Company, 1962) 或 Linear Systems Analysis, by C. L. Liu and J. W. S. Liu (New York, McGraw-Hill Book Company, 1975)。3.7节中奇异函数的讨论与这些教程所叙述的数学理论密切相关, 因此, 它不但提供了构成该课题基础的数学概念的简要介绍, 也提供了在信号与系统论述中要用到的这些函数的基本性质的讨论。

如图2.27所示。贯穿本书，我们将交替地把 $\delta[n]$ 称为单位抽样或单位冲激。需要指出的是，不像它的连续时间对应物—单位冲激函数那样，在定义 $\delta[n]$ 时，不存在分析上的困难。

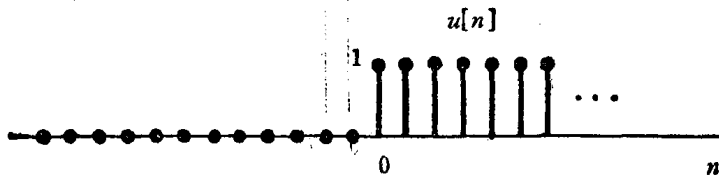


图2.26 单位阶跃序列



图2.27 单位抽样（冲激）

离散时间单位抽样具有许多与连续时间单位冲激函数完全类似的特性。例如，仅当 $n=0$ 时， $\delta[n]$ 不为零（而等于1），由此立即可知

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \quad (2.27)$$

该式与式(2.24)直接对应。此外，当连续时间冲激函数在形式上是连续时间单位阶跃函数的一阶导数时，离散时间单位抽样即是离散时间单位阶跃的一阶差分

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (2.28)$$

类似地，当连续时间单位阶跃函数是 $\delta(t)$ 的连续积分时，则离散时间单位阶跃就是离散时间单位抽样的运算和，即

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (2.29)$$

如图2.28所示。由于单位抽样的唯一非零值处于自变量为零的点上，因而由图可见，对

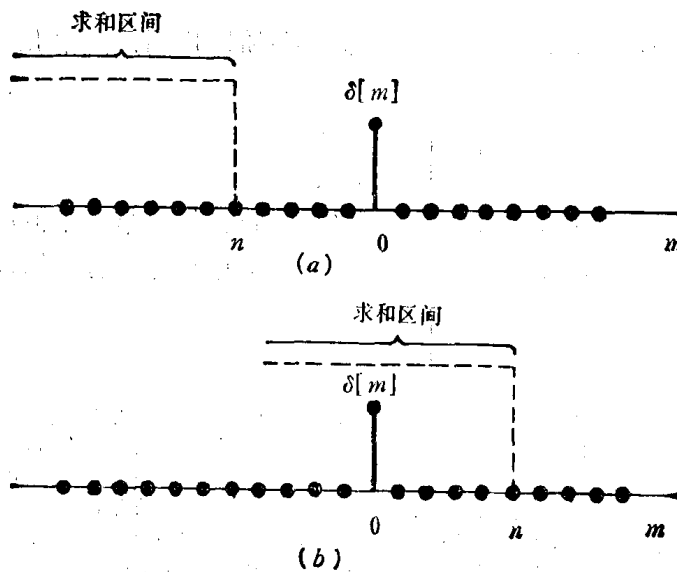


图2.28 式(2.29)的运算和：(a) $n < 0$ ；(b) $n > 0$

于 $n < 0$ 和 $n \geq 0$, 式 (2.29) 的运算和相应等于零和 1。同样, 与连续时间单位阶跃函数和单位冲激函数之间另一个关系式 (2.23) 相类似, 离散时间单位阶跃也可以按单位抽样项写成

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (2.30)$$

它可以通过改变求和变量 (把 m 换成 $k=n-m$), 由式 (2.29) 求得。图 2.29 举例说明了等式 (2.30) 的情况, 它与图 2.24 相对应。

2.4.2 离散时间复指数信号和正弦信号

如同连续时间情况那样, 一种重要的离散时间信号是复指数信号 (序列), 它由下式定义

$$x[n] = C\alpha^n \quad (2.31)$$

其中 C 和 α 一般是复数。该信号也可按另一种形式表示如下,

$$x[n] = Ce^{\beta n} \quad (2.32)$$

其中

$$\alpha = e^{\beta}$$

虽然以式 (2.32) 表示的离散时间复指数序列, 更类似于连续时间复指数信号的形式, 但按式 (2.31) 表示的离散时间复指数序列往往更方便。

如果 C 和 α 为实数, 即可得到图 2.30 所示的几种情况之一。若 $|\alpha| > 1$, 则信号按指数规律随 n 而增长; 若 $|\alpha| < 1$, 则为衰减指数信号。此外, 若 α 是正数, 则 $C\alpha^n$ 的所有值均同号; 若 α 是负数, 则 $x[n]$ 的符号正负交替变化。还需注意, 若 $\alpha = 1$, 则 $x[n]$ 等于恒量, 而如 $\alpha = -1$, 则 $x[n]$ 在 $+C$ 和 $-C$ 数值间交替变化。离散时间实指数经常用于描述: 人口增长作为世代^①的函数, 投资所得利润作为日、月或季度的函数。

通过限定式 (2.32) 中 β 为纯虚数, 可获得另一种重要的离散时间复指数。具体说, 把 $x[n]$ 看做

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \quad (2.33)$$

如同连续时间情况一样, 此信号与正弦信号之间的密切关系为

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi) \quad (2.34)$$

如果 n 没有注明量纲, 则 Ω_0 和 ϕ 均具有弧度单位。图 2.31 举出三个正弦序列的例子。如前所述, 欧拉关系式为我们建立了复指数序列和正弦序列之间的关系:

$$e^{j\Omega_0 n} = \cos \Omega_0 n + j \sin \Omega_0 n \quad (2.35)$$

和

$$A \cos(\Omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\Omega_0 n} \quad (2.36)$$

^①—世代约 30 年。——译者注

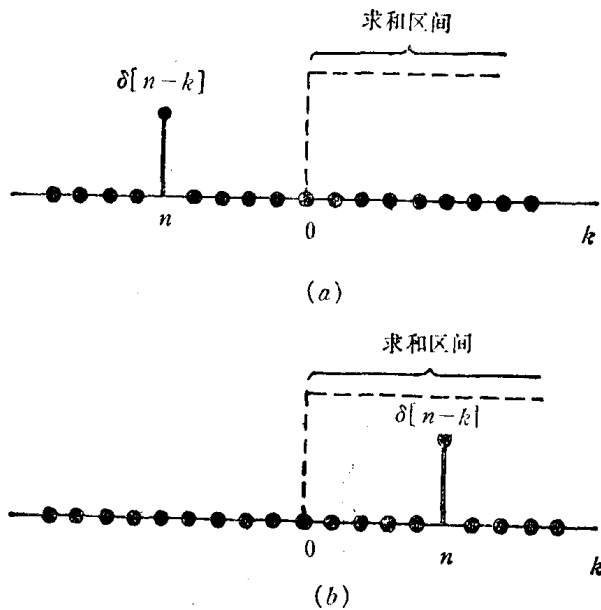


图 2.29 式 (2.30) 给出的关系:

(a) $n < 0$; (b) $n \geq 0$

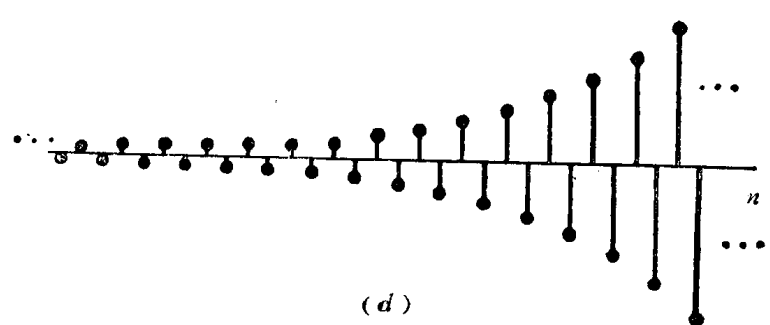
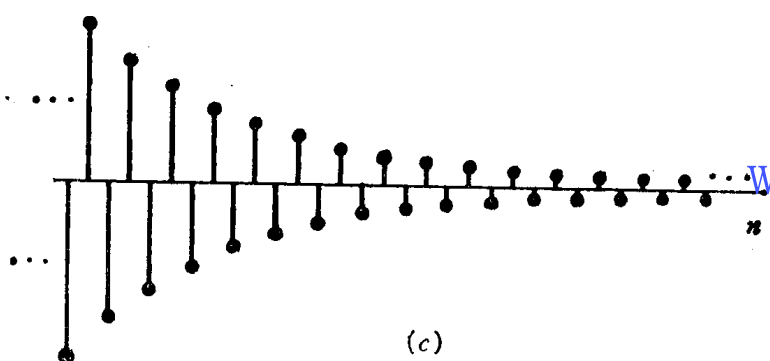
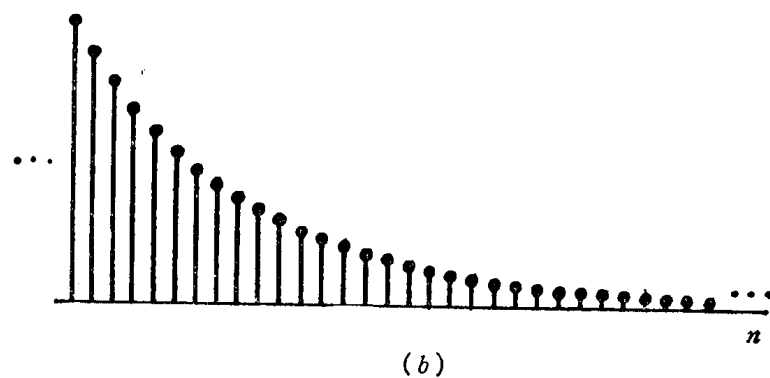
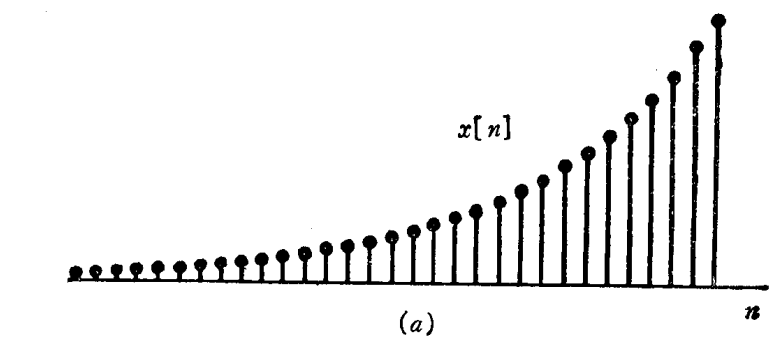


图2.30 $x[n]=ca^n$; (a) $a>1$; (b) $0<a<1$; (c) $-1<a<0$; (d) $a<-1$

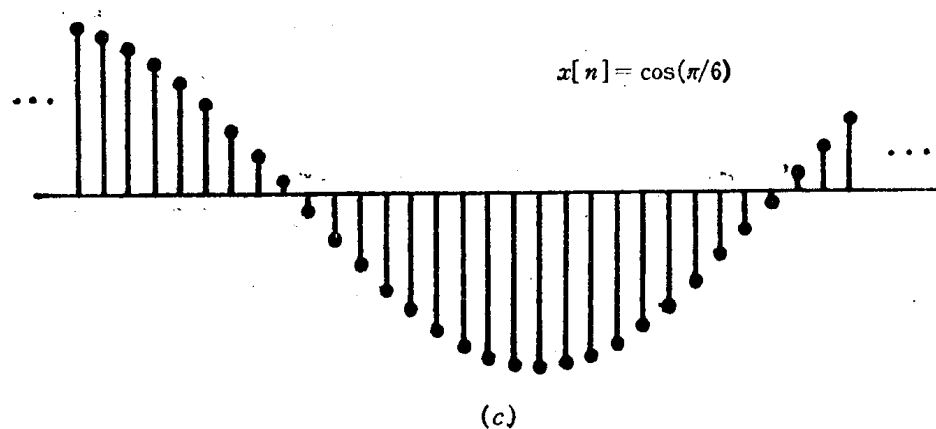
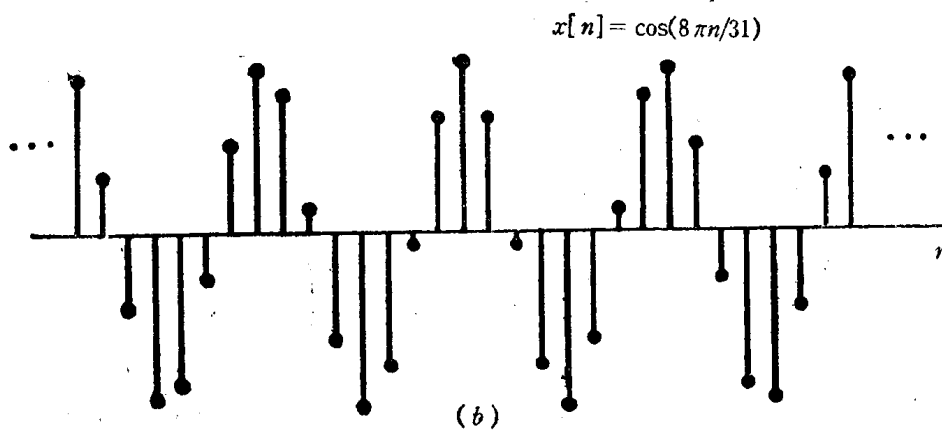
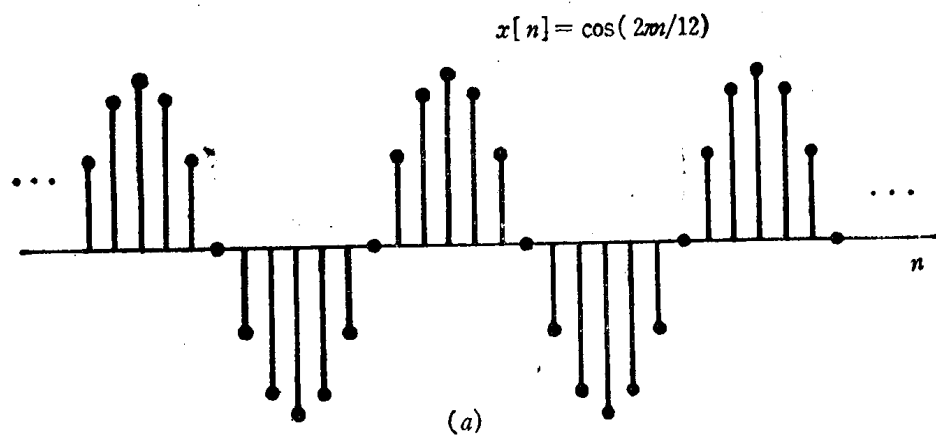


图2.31 离散时间正弦信号

同样地，一般复指数信号可以用实指数信号和正弦信号来书写和说明。具体说，若我们按极坐标形式把 C 和 α 写成

$$C = |C|e^{j\theta}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0}$$

那么

$$C\alpha^n = |C||\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\Omega_0 n + \theta) \quad (2.37)$$

因此, $|a|=1$ 时, 复指数序列的实部和虚部都是正弦的。 $|a|<1$ 时, 它们相当于用一个递减指数信号乘以正弦序列; 当 $|a|>1$ 时, 则相当于用一个递增指数序列乘以正弦序列。图2.32描述了这些信号。

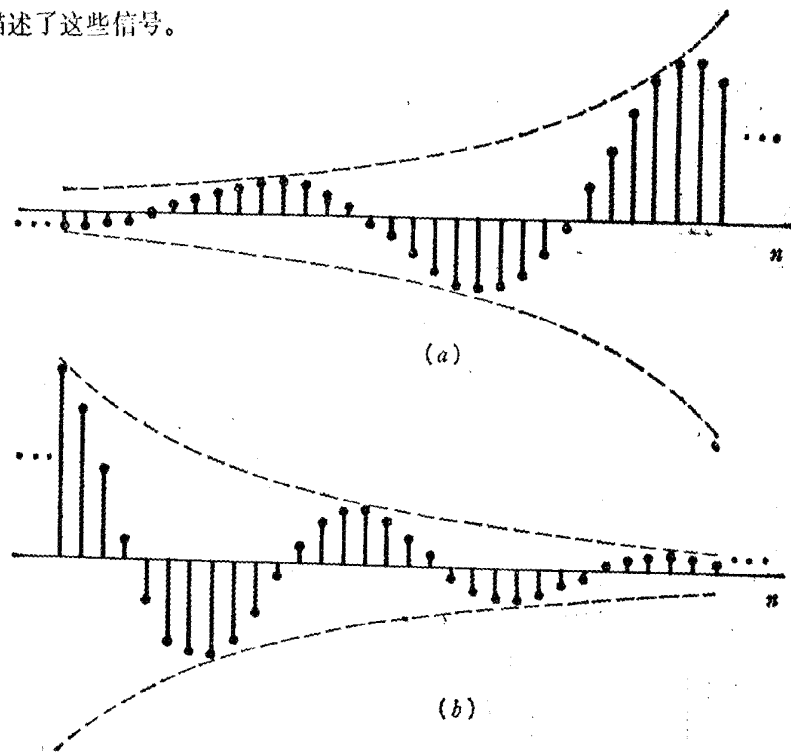


图2.32 (a)递增的离散时间正弦信号; (b)递减的离散时间正弦信号

www.blogoil.com

2.4.3 离散时间复指数的周期性

下面继续对信号 $e^{j\Omega_0 n}$ 进行讨论。首先回顾一下对应的连续时间信号 $e^{j\omega_0 t}$ 的如下两个特性:

- (1) ω_0 越大, 信号的振荡速率越高;
- (2) 对于 ω_0 的任何值, $e^{j\omega_0 t}$ 都是周期性的。

这一节我们要研究这两种特性的离散时间形式, 并且我们还会看到, 离散时间复指数的每一个特性与它的连续时间对应特性之间所具有的明显差别。

离散时间复指数的第一个特性不同于连续时间的第一个特性的事实, 是由离散时间和连续时间复指数之间的另一个很重要的差别直接引起的, 为了看清这一差别, 让我们考察一个具有频率为 $(\Omega_0 + 2\pi)$ 的复指数

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n} \quad (2.38)$$

从式(2.38)可以看出, 频率为 $(\Omega_0 + 2\pi)$ 的指数和频率为 Ω_0 的指数完全相等。这样, 就与连续时间情况很不一样, 在连续时间情况下, 对应不同的 ω_0 值, 信号 $e^{j\omega_0 t}$ 完全不同。而在离散时间情况下, 这些信号是一样的, 例如频率为 Ω_0 的信号和频率为 $\Omega_0 \pm 2\pi$ 、 $\Omega_0 \pm 4\pi$ 等等的信号, 都完全一样。因此, 在研究离散时间指数时, 我们仅需在 2π 间隔内选取 Ω_0 。虽然, 按照式(2.38), 对任何长度的 2π 区间都适用, 但在大多数情况下, 我们均采用区间 $0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$ 或 $-\pi \leq \Omega_0 \leq +\pi$ 。

由于式(2.38)具有周期性, 所以, 信号 $e^{j\Omega_0 n}$ 的振荡频率不是始终随 Ω_0 值的增加而连续

增长。具体说,当从0开始增加 Ω_0 ,直到 $\Omega_0=\pi$,这时可以得到一个振荡速率逐渐增长的信号。此后,尽管继续增加 Ω_0 ,得到的却是一个振荡速率逐渐下降的信号,直到 $\Omega_0=2\pi$,这时信号的振荡速率与 $\Omega_0=0$ 时一样。在图2.33中用图解说明了上述情况。因此,低频(慢速变化)离散时间指数具有接近0、 2π 或其他任何 π 的偶倍数的 Ω_0 值,而高频(相当于快速变化)离散时间指数都位于接近 $\Omega_0=\pm\pi$ 和其他 π 的奇倍数上。

我们要研究的第二个特性涉及离散时间复指数信号的周期性。为了使信号 $e^{j\Omega_0 n}$ 具有周期为 $N(N>0)$ 的周期性,必须有

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} \quad (2.39)$$

或

$$e^{j\Omega_0 N} = 1 \quad (2.40)$$

为了使式(2.40)成立, $\Omega_0 N$ 必须等于 2π 的整数倍。即必须有一个整数 m ,使得

$$\Omega_0 N = 2\pi m \quad (2.41)$$

或写成

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad (2.42)$$

根据式(2.42),信号 $e^{j\Omega_0 n}$ 不是对任意 Ω_0 值呈周期性,仅当 $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ 为一有理数时,如式(2.42)

那样,信号 $e^{j\Omega_0 n}$ 才具有周期性。显然,对于离散时间正弦信号,上述这些论述也是成立的。例如,图2.31(a)中的序列具有周期为12的周期性,图2.31(b)中的信号具有周期为31的周期性,而图2.31(c)中的信号,则不具有周期性。

利用刚才的计算,现在就可以研究离散时间复指数信号的基本周期和频率,我们将其中离散时间周期信号的基本频率按连续时间同样方式进行定义,即,如果 $x[n]$ 是具有基本周期为 N 的周期信号,则它的基本频率为 $2\pi/N$ 。然后,就可研究周期复指数 $x[n]=e^{j\Omega_0 n}$ ($\Omega_0 \neq 0$)。正如刚才所见,对于某些整数 m 和 $N(N>0)$, Ω_0 必须满足式(2.42)。习题2—17中表明,如果 $\Omega_0 \neq 0$,并且 N 和 m 没有公因子,那么, $x[n]$ 的基本周期就是 N 。假定情况正是这样,并且利用式(2.42),就可求得周期信号 $e^{j\Omega_0 n}$ 的基本频率

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_0}{m} \quad (2.43)$$

相应地,基本周期即可写为

$$N = m \left(\frac{2\pi}{\Omega_0} \right) \quad (2.44)$$

最后这两个表示式,再次表明与它们的连续时间对应公式(如表2.1中所列)不同。在表2.1中,摘要列出了连续时间信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和离散时间信号 $e^{j\Omega_0 n}$ 之间的若干差别。注意,像连续时间情况那样,由 $\Omega_0=0$ 而引起的恒定离散时间信号,其基本频率为零,而它的基本周期没有定义。关于离散时间周期指数特性的进一步讨论见习题2.17和2.18。

如同连续时间情况那样,有时候分析一种所谓谐波相关的周期性指数组(即具有周期为 N 的所有周期性指数)是有用的。由式(4.42)可知,它们正好是 $\frac{2\pi}{N}$ 的整数倍频率上的信号。即

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, k=0, \pm 1, \dots \quad (2.45)$$

在连续时间情况下,所有的谐波相关复指数 $e^{jk(2\pi/T)t}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 都是不同的。然而由式(2.38)可知,在离散时间的情况下就不是这样。具体说,

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)(2\pi/N)n} = e^{j2\pi n} e^{jk(2\pi/N)n} = \phi_k[n] \quad (2.46)$$

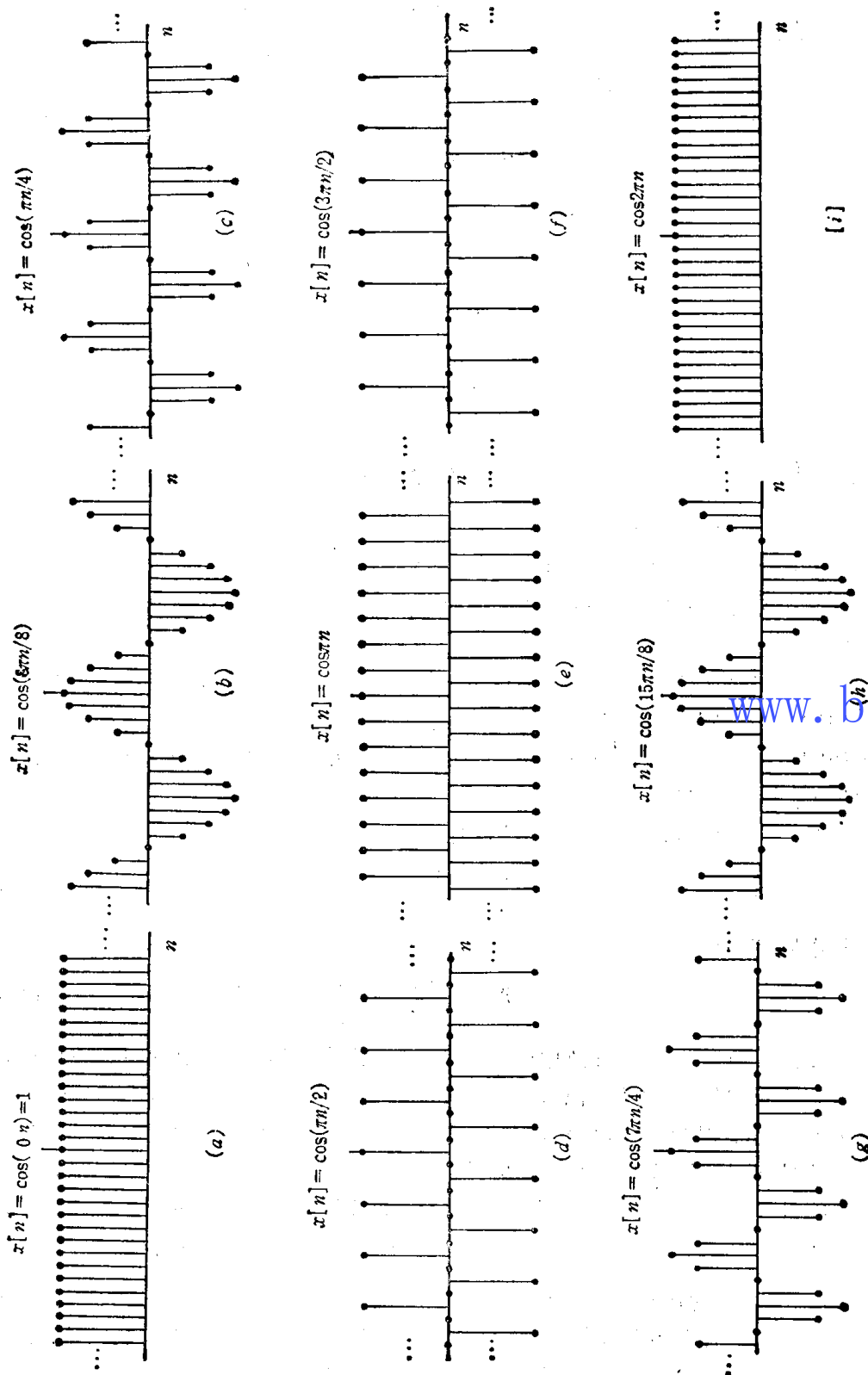


图2.33 几种不同频率的离散时间正弦序列

表2.1 信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\Omega_0 n}$ 之间的差别

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\Omega_0 n}$
对应不同的 ω_0 值, 指数信号不同	在 2π 间隔的频率上, 指数信号相同
对应任何 ω_0 都呈周期性	对应某些整数 m 和 $N (N > 0)$, 仅当 $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$, 才呈周期性
基本频率 ω_0	基本频率 Ω_0/m
基本周期 $\omega_0 = 0$: 无定义 $\omega_0 \neq 0$: $\frac{2\pi}{\omega_0}$	基本周期* $\Omega_0 = 0$: 无定义 $\Omega_0 \neq 0$: $m \left(\frac{2\pi}{\Omega_0} \right)$

* 这里假定 m 和 N 没有任何公共因子。

这意味着, 由式(2.45)给出的一组周期复指数中, 仅有 N 种不同的周期指数。例如, $\phi_0[n], \phi_1[n], \dots, \phi_{N-1}[n]$ 都是不同的周期指数, 而任何其他的 $\phi_k[n]$ 都和其中的一个相等(例如, $\phi_N[n] = \phi_0[n], \phi_{-1}[n] = \phi_{N-1}[n]$ 等等)。

最后, 为了对离散时间复指数的周期性概念有更深刻理解, 我们研究一个离散时间序列, 该序列是通过对连续时间指数 $e^{j\omega_0 t}$ 进行等时间间隔抽样得到的:

$$x[n] = e^{j\omega_0 nT} = e^{j(\omega_0 T)n} \quad (2.47)$$

从式(2.47)看出, $x[n]$ 本身就是一个具有频率为 $\Omega_0 = \omega_0 T$ 的离散时间指数。因此, 根据以上分析, 仅当 $\omega_0 T/2\pi$ 是有理数时, $x[n]$ 才是周期性的。对于通过连续时间正弦周期性信号等间隔抽样获得的离散时间序列, 可作同一叙述。例如, 若

$$x(t) = \cos 2\pi t \quad (2.48)$$

则图2.31中的三个离散时间信号, 可被认为是对应于不同的 T , 由式

$$x[n] = x(nT) = \cos 2\pi nT \quad (2.49)$$

所确定。具体而言, 对于图 2.31(a), $T=1/12$; 对于图 2.31(b), $T=4/31$; 而对于图2.31(c), $T=1/12\pi^\circ$ 。如果把离散时间正弦序列看做是由式(2.47)获得的, 那么可以看出, 即使序列 $x[n]$ 可能不是周期性的, 但它的包络线 $x(t)$ 却是周期性的。关于这一点, 可直接从图 2.31(c) 看出, 通过对图中离散序列值之间的视觉内插, 即可显现出一条连续时间周期性包络线。在习题2.18中, 对于利用抽样概念获得离散时间正弦序列周期性的深刻认识, 会有进一步的研究。

2.5 系 统

系统可视为能够导致任何一种信号变换的过程。因此, 每一个系统都有一个输入信号和一个经过系统变换而与输入信号相联系的输出信号。例如, 一个高保真度系统, 接受一个录制的音频信号, 并产生一个与输入信号相联系的复制(输出)信号。如果该高保真度系统具有音调控制机构, 那么就可通过调节控制机构来改变该系统的特性, 从而就可改善复制信号的音质。汽车也可以看做一个系统, 其输入就是加速器踏板上的压力, 而其输出是车辆的运行。

①原著中误为 $T = \frac{\pi}{12}$ 。——译者注

图像增强系统, 可把输入图像变换为具有某些所需特征 (如改善图像的对比度) 的输出图像。

已经指出, 我们总是同时关注连续时间和离散时间这两类系统。连续时间系统是一种将连续时间输入信号变换为连续时间输出信号的系统。这种系统通常用图 2.34(a) 中的框图表示, 图中 $x(t)$ 是输入信号, $y(t)$ 是输出信号。另一方面, 我们可以用下列符号来表示连续时间系统输入—输出之间的关系

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad (2.50)$$

同样, 离散时间系统即是一种将离散时间输入变换为离散时间输出的系统, 可用图 2.34(b) 描述, 并可用符号表示为

$$x[n] \rightarrow y[n] \quad (2.51)$$

本书的大部分篇幅, 要分别、并行地论述离散时间系统和连续时间系统。如以前已经谈到的, 这将使我们能够利用由一方获得的理解, 去帮助对另一方的理解。在第 8 章, 我们将通过抽样概念, 同时提出连续时间系统和离散时间系统, 并发展利用离散时间系统处理已被抽样的连续时间信号的某些见解。这一节的余下部分和下一节, 我们将建立连续时间系统和离散时间系统的某些基本概念。

贯穿本书的一个非常重要的概念, 是关于系统的互相连接。图 2.35(a) 举出了两个系统

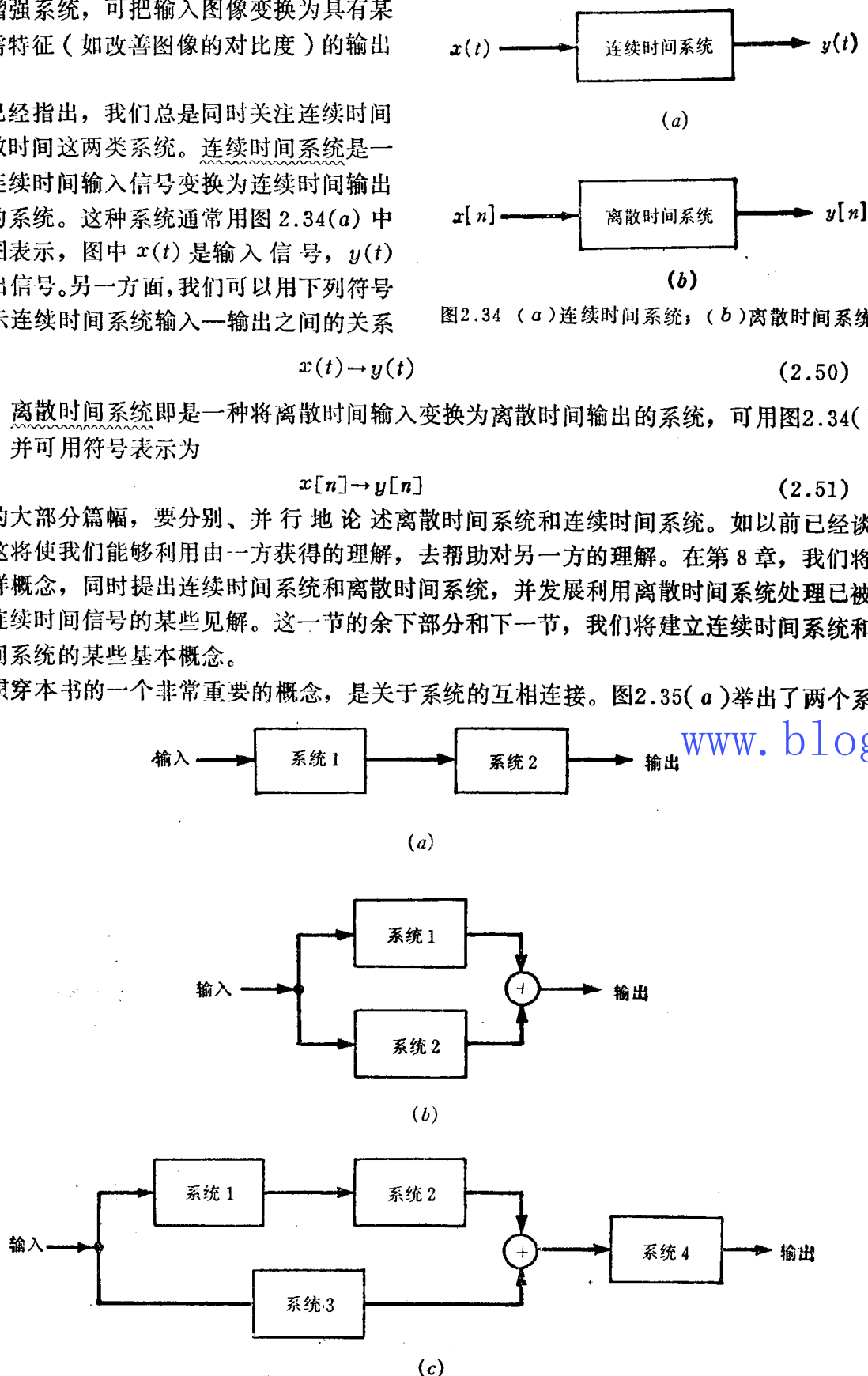


图 2.35 互连系统, (a) 串联(级连)连接; (b) 并联连接; (c) 串联/并联连接

的串联（或级联）连接。我们把像这样一类的图称为方框图。在这个方框图中，系统1的输出即是系统2的输入，而整个系统首先通过系统1，然后通过系统2对输入信号进行变换处理。同样，可以定义三个或多个系统的串联连接。图2.35(b)说明了两个系统的并联连接。这里，同一输入信号同时加于系统1和系统2，图中符号⊕表示相加，因此，并联连接系统的输出就是系统1和系统2的输出之和。我们还可以定义多于两个系统的并联连接系统，并且还可以把级联和并联互相组合起来得到更复杂的互连系统。图2.35(c)给出了这种互连系统的例子①。

我们可以利用如上所述的互连系统，建立一些不同于现有系统的新系统。例如，为了计算复杂的算术表达式，我们可以通过基本算法结构框图的互连来设计这类系统。图2.36中所列举的框图对应于下列计算

$$y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2 \quad (2.52)$$

图中，符号⊕旁边的“+”和“-”号，表明从信号 $2x[n]$ 中减去信号 $x[n]^2$ 。按照惯例，如果在符号⊕旁边不注明“+”或“-”号，则认为相应的信号是相加的。

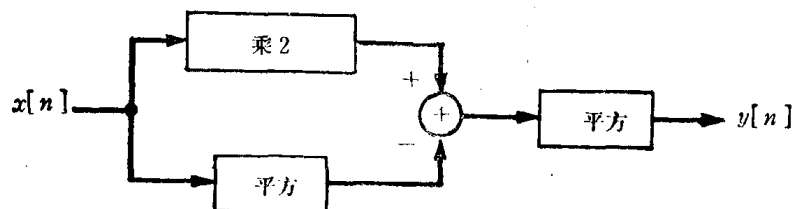


图2.36 实现 $y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2$ 运算的系统

互连系统除了提供一种建立新系统的结构方式以外，还允许我们把现有系统看作其组成部件的互连。例如，电路包含了基本电路元件（电阻器、电容器、电感器）的互连。又如，汽车的运转可以分解为汽化器、活塞、曲轴等等互连的运转。按这种方法观察复杂的系统，对简化系统特性的分析常常是很有利的。例如，RLC电路的响应特性可以从它们的元件，以及这些元件怎样互连的说明来直接确定。

系统互连的另一种重要形式是反馈互连，图2.37举出了反馈互连的一个例子。图中系统1的输出即是系统2的输入，而系统2的输出反馈到输入端，并与外部输入信号相加后形成系统1的实际输入。反馈系统呈现于广泛的应用之中。例如，汽车调速器指示车辆速度，并调节驾驶员施加的输入，以便保持安全行驶速度。同样地，电路也可作为一个实际的例子。

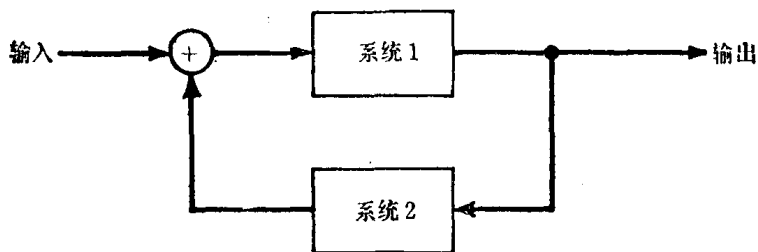


图2.37 反馈互连系统

图2.38(a)描述的电路，可表示为图2.38(b)那样，该系统可视为两个电路元件的反馈互连。在3.6节中，描述一类特别重要的系统结构时，还要用到反馈互连。第11章，还要专门详

①有时，为了表示两个信号的相乘运算，在系统的框图表示中还用到符号⊗（参看习题2.24中的图P2.24-1）。

细地分析反馈系统的特性。

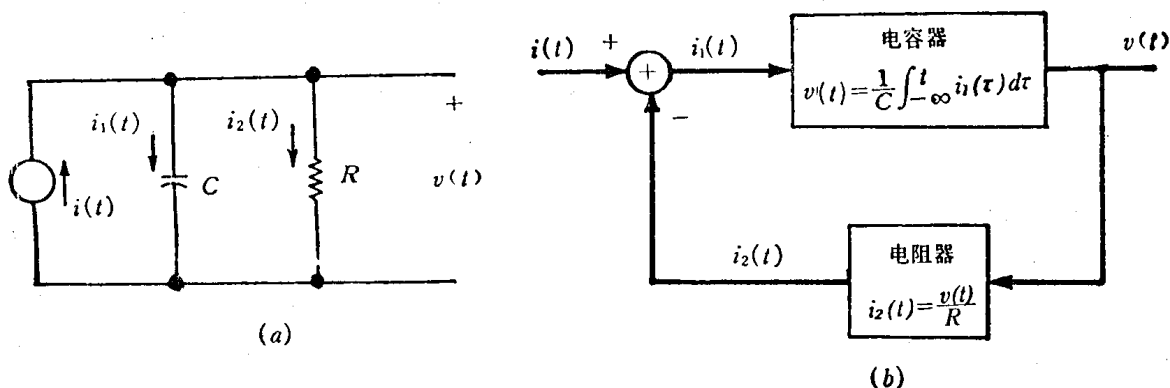


图2.38 (a)简单电路; (b)两个电路元件反馈互连的方框图

2.6 系统的性质

这一节,我们要介绍并讨论连续时间系统和离散时间系统的若干基本性质。这些性质具有物理和数学两方面的含意,因而,通过对它们的研究,我们也会对已经描述过的有关信号与系统的数学表达式,有进一步的深入理解与熟悉。

2.6.1 记忆系统与无记忆系统

如果对应于独立变量每个值,系统的输出仅取决于同一时刻系统的输入,则这一系统就称作无记忆系统。例如,式(2.52)和图2.36所表示的系统即为无记忆系统,因为在任一特定时刻 n_0 ,该系统的输出 $y[n]$ 仅决定于同一时刻系统的输入 $x[n]$ 。同样地,电阻器也是一个无记忆系统,输入 $x(t)$ 表示电流,输出 $y(t)$ 表示电压,那么电阻器的输入—输出关系就是

$$y(t) = Rx(t) \quad (2.53)$$

式中 R 是电阻。一种特别简单的无记忆系统是恒等系统,其输出恒等于它的输入,即

$$y(t) = x(t)$$

这是连续时间恒等系统的输入—输出关系。对于离散时间恒等系统,其相应的关系为

$$y[n] = x[n]$$

一个记忆系统的例子是

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (2.54)$$

第二个例子是

$$y(t) = x(t-1) \quad (2.55)$$

记忆系统的另一个实际的例子是电容器,因为,如果输入表示电流,输出表示电压,则

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (2.56)$$

式中 C 是电容。

2.6.2 可逆性系统与逆系统

如果一个系统的不同输入导致不同的输出,则把这一系统称为可逆系统。另一种说法

是, 如果通过观察系统的输出, 即可确定系统的输入, 则这一系统即为可逆系统。也就是说, 对于离散时间情况, 我们可以像图2.39(a)所表明的那样构成一逆系统, 当这个逆系统与原来的系统级联后, 就可得到一个等于原来系统输入信号 $x[n]$ 的输出信号 $z[n]$ 。因此, 图2.39(a)中的串联连接系统具有与恒等系统那样的输入—输出关系。

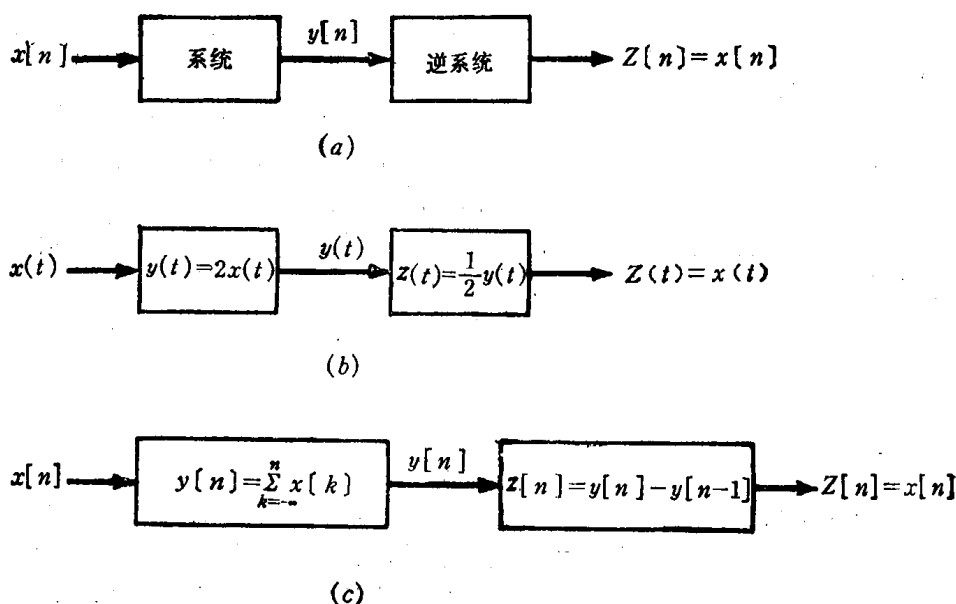


图2.39 倒置系统的概念: (a)一般可逆系统; (b)式(2.57)描述的可逆系统; (c)式(2.54)定义的可逆系统

一个可逆的连续时间系统的例子是

$$y(t) = 2x(t) \quad (2.57)$$

对应这个系统的倒置系统是

$$z(t) = \frac{1}{2}y(t) \quad (2.58)$$

图2.39(b)描述了这个例子。另一个可逆系统的例子, 是由式(2.54)确定的系统。对于这种系统, 输出的相继两值之差, 正好是最后一个输入之值。在这种情况下, 倒置系统是

$$z[n] = y[n] - y[n-1] \quad (2.59)$$

如图2.39(c)所示。非可逆系统的例子有

$$y[n] = 0 \quad (2.60)$$

即对于任何输入序列, 这种系统均呈现零输出序列, 还有

$$y(t) = x^2(t) \quad (2.61)$$

2.6.3 因果性

如果一个系统的任何时刻的输出仅决定于当前和过去时刻的输入, 则称这种系统为因果系统。由于这种系统的输出不能预测未来的输入值, 所以, 通常又把这样的系统称为非预测系统。因此, 如果输入到因果系统的两个信号直到某一时刻 t_0 (或 n_0) 是相等的, 那么相应的输出到此同一时刻也必定是相等的。汽车的运行是因果性的, 因为它不超前于驾驶员未来的操纵。同样, 式(2.55)和式(2.56)所描述的系统也是因果性的。但是由下列各式

$$y[n] = x[n] - x[n+1] \quad (2.62)$$

和

$$y(t) = x(t+1) \quad (2.63)$$

确定的系统，都不是因果系统。还须提出，所有的无记忆系统都是因果系统。

虽然因果系统是非常重要的，但它们不是在任何方式下都能构成唯一具有实际意义的系统。例如，在有些应用(如图像处理)中，因果性并不是非常重要的，因其中的独立变量不是时间。此外，数据处理中的独立变量虽是时间，但它们是已经被录制下来的，如经常发生于语音、地球物理或气象信号处理中那样，列举了这些例子，说明我们决不限定非要按因果关系来处理这些信号。作为另一个例子，在许多应用中，包括证券市场分析和人口统计的研究，我们可能感兴趣的是去测定数据缓慢变化的趋势，围绕这一趋势的数据也包含着高频起伏。在这种情况下，一种可能的处理方法是在一定的时间区间上求取平均数据，以便平滑这些起伏，而只保留其趋势。一个非因果平均系统的例子是

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k] \quad (2.64)$$

2.6.4 稳定性

稳定性是另一个重要的系统性质。直观而言，稳定系统是一种小信号输入而不导致发散响应的系统。假定我们考虑的是图2.40所描述的情况，这里我们把一个小球搁置在一曲面上。在图2.40(a)中，这曲面是一个峰，小球位于峰的顶部；而在图2.40(b)中，曲面是一个谷，小球置于谷底。如果设想这个系统的输入是一个作用于小球的水平加速，而它的输出是小球的垂直位置，那么，图2.40(a)描述的系统是不稳定的，因为沿水平方向对小球任意一点微小的触动，都会导致小球滚下峰顶。另一方面，图2.40(b)所示的系统是稳定的，因为小球的水平加速只会导致小球在垂直方向上微小扰动，而最后不会使小球垂直位置改变。同样地，以上各节谈到的任何一种现象，例如连锁反应和人口增长，凡是可用增长指数表示的都属于不稳定系统响应的例子。而如无源RC电路响应的现象，可以用衰减指数表示的，则是稳定系统响应的例子。

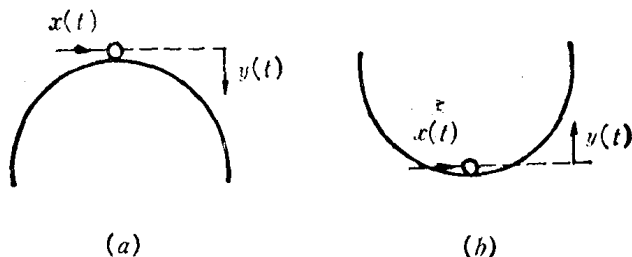


图2.40 例子：(a)不稳定系统；(b)稳定系统。图中输入是作用于小球的水平加速，输出是小球的垂直位置

以上举例为我们提供了稳定性概念的一种直观认识。实质上，如果稳定系统的输入是有界的(即，如果系统的输入幅度不是无限地增长)，那么它的输出也必定是有界的，并因此而不致发散，这就是贯穿本书所用到的稳定性的定义。为了说明这一定义的应用，我们分析一个由式(2.64)确定的系统。假定输入 $x[n]$ 具有某一数值的边界，比如说，对于所有的 n 值以 B 为边界，那么容易看出，最大可能的 $y[n]$ 也是 B ，因为 $y[n]$ 是有限的一组输入值的平均数。因此， $y[n]$ 是有界的，从而系统是稳定的。另一方面，我们分析一下由式(2.54)

确定的系统。这是一个不同于式(2.64)所描述的系统,这一系统的输入信号,是所有过去值的累加,而不是有限的一组数值,因此系统是不稳定的,因为即使 $x[n]$ 是有界的,但是累加和却可以连续增长。例如,假定输入等于单位阶跃序列,即 $x[n]=u[n]$,这显然是一有界输入,因为其最大值等于1。但在这种情况下,式(2.54)所示系统的输出是

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = (n+1)u[n] \quad (2.65)$$

即 $y[0]=1$, $y[1]=2$, $y[2]=3$ 等,因而 $y[n]$ 的增长是无界的。

本节到现在为止,我们所研究的关于系统的一些概念和性质是非常重要的,并且在本书的以后部分,我们还要对其中的某些概念和性质作更详细地讨论。下面,在本书余下的篇幅中,要对另外两个很重要的性质——时不变性和线性作一介绍,并进行初步的讨论。在本书以后各章中,它们将起重要的作用。

2.6.5 时不变性

如果一个系统,其输入信号的时间移位会导致输出信号的时间移位,则称这一系统是时不变系统。具体而言,如果 $y[n]$ 是离散时间时不变系统在其输入为 $x[n]$ 时的输出,那么, $y[n-n_0]$ 就应当是输入为 $x[n-n_0]$ 时的输出。在连续时间情况下,如果 $y(t)$ 是对应于输入为 $x(t)$ 的输出,那么 $y(t-t_0)$ 就是对应于输入为 $x(t-t_0)$ 时的输出。

为了检验一个系统是否是时不变系统,同时也为了获得对这种时不变性的深入理解,我们可以研究一下由下式确定的连续时间系统

$$y(t) = \sin[x(t)] \quad (2.66)$$

为检验该系统是时不变的还是时变的,我们可进行如下分析,假定 $x_1(t)$ 是该系统的任一输入,并且设

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)] \quad (2.67)$$

是相应的输出,那么通过 $x_1(t)$ 的时间移位而得到的第二个输入为

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \quad (2.68)$$

对应这一输入的输出即为

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t-t_0)] \quad (2.69)$$

类似地,根据式(2.67)

$$y_1(t-t_0) = \sin[x_1(t-t_0)] \quad (2.70)$$

比较式(2.69)和(2.70),可以看出 $y_2(t) = y_1(t-t_0)$,因此这一系统是时不变的。

作为第二个例子,考虑一个离散时间系统

$$y[n] = nx[n] \quad (2.71)$$

并且假定该系统对于两个输入 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的响应(这里设 $x_2[n] = x_1[n-n_0]$)分别为

$$y_1[n] = nx_1[n] \quad (2.72)$$

$$y_2[n] = nx_2[n] = nx_1[n-n_0] \quad (2.73)$$

然而,如果输出信号 $y_1[n]$ 有一个移位 n_0 ,则有

$$y_1[n-n_0] = (n-n_0)x_1[n-n_0] \neq y_2[n] \quad (2.74)$$

因此可以断定,这是一个时变的系统。式(2.71)表示的是一个具有时变增益的系统。因此,改变输入信号的移位就会得到乘以输入移位值的不同增益值。但应注意,如果增益是常数,如式(2.57)那样,那么系统就是时不变的。其他的一些时不变系统的例子如式(2.53)~(2.64)所给出。

2.6.6 线性

连续时间或离散时间的线性系统,是一种具有迭加特性的系统。如果系统输入是由若干信号的加权和组成,那么输出也完全是对应于每个输入信号的系统响应的加权和,按数学观点,设 $y_1(t)$ 是连续时间系统对输入 $x_1(t)$ 的响应, $y_2(t)$ 是对输入 $x_2(t)$ 的响应,那么,如满足如下两个特性:

1. $x_1(t) + x_2(t)$ 的响应为 $y_1(t) + y_2(t)$;

2. $ax_1(t)$ 的响应为 $ay_1(t)$, 其中 a 为任意复常数,则系统即是线性的。上述第一个特性称为线性系统的迭加性;第二个特性称为比例性或均匀性。虽然以上定义是根据连续时间信号给出,但是对于离散时间信号这一定义也同样成立。由式(2.53)~(2.60)、式(2.62)~(2.64),以及式(2.71)确定的系统,都是线性系统;而由式(2.61)和(2.66)确定的系统,却是非线性系统。应当指出,一个系统可以是线性的,但不是时不变的,如式(2.71)所确定的系统;同时,一个系统也可以是时不变的,但不是线性的,如式(2.61)和(2.66)所示的系统①。

在离散时间情况下,定义线性系统的两个特性可以合并为如下简单的关系:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow ay_1[n] + by_2[n] \quad (2.75)$$

式中 a 和 b 是任一复常数。此外,根据线性定义可以简单地证明,对于一个离散时间线性系统,如果有一组输入 $x_k[n]$, $k=1, 2, 3, \dots$, 其对应的输出为 $y_k[n]$, $k=1, 2, 3, \dots$, 那么,由下式给出的这些输入的线性组合

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \dots \quad (2.76)$$

的响应必为

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \dots \quad (2.77)$$

这一非常重要的结果通常就称为迭加性,这一特性对于连续时间和离散时间两类线性系统都是成立的。

线性系统具有另一种重要特性,是零输入产生零输出,例如,如果 $x[n] \longrightarrow y[n]$, 那么,由比例性可知

$$0 = 0 \cdot x[n] \longrightarrow 0 \cdot y[n] = 0 \quad (2.78)$$

现在,考虑如下系统

$$y[n] = 2x[n] + 3 \quad (2.79)$$

从式(2.79)可以看出,这一系统不是线性的,因为,当 $x[n]=0$ 时, $y[n]=3$ 。这似乎是意外的,因式(2.79)是一线性方程,但是这一系统确实违反线性系统的零输入—零输出的特性。不过,这一系统可以归到下一段要描述的增量线性系统。

连续时间或离散时间增量线性系统,是一种对输入的变化具有线性响应的系统。也就是说,一个增量线性系统的任何两个输入信号的响应之差,就是这两个输入信号之差的线性(即迭加性和均匀性)函数。例如,如果 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是式(2.79)所确定系统的两个输入, $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 是相应的输出,那么

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - \{2x_2[n] + 3\} = 2\{x_1[n] - x_2[n]\} \quad (2.80)$$

①还有一种可能,即系统可以是迭加的,但不是均匀的;或可以是均匀的,但不是迭加的。由于它们都违反了上述线性的两个条件之一,所以它们都是非线性的。在此我们不具体讨论这类系统,但在习题2.27中将要介绍这类系统的几个例子。

可以简单证明(习题2.33),任何增量线性系统均可设想为图2.41所示的结构(对应连续时间情况)。即这样一种系统的响应,等于一个线性系统的响应和另一个不受输入影响的信号之和。由于当输入是零,线性系统的输出也是零,所以可看出,这个附加的信号正好是整个系统的零输入响应。例如,对于式(2.79)所定的系统,其输出是由线性系统响应

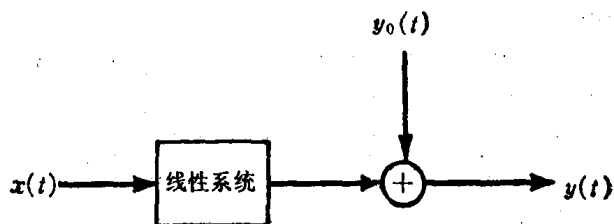


图2.41 增量线性系统的结构

$$x[n] \longrightarrow 2x[n]$$

和零输入响应

$$y_0[n]=3$$

之和组成的。由于图2.41提供了增量线性系统的结构,我们就可以利用对线性系统研究的方法,来分析这种系统的许多特性。在3.5节中,我们还要分析另一类特别重要的增量线性系统。

2.7 小结

这一章,我们已经讨论了许多有关连续时间和离散时间信号与系统的基本概念,特别是介绍了信号的图解表示法,以及利用这种表示法实现独立变量的变换。我们还定义并研究了连续时间和离散时间的若干基本信号,同时也研究了连续时间和离散时间信号的周期性概念。

在研究某些与系统有关的基本概念时,为了便于进行关于系统互连的讨论,我们引入了方框图,并且定义了一些重要的系统性质,包括因果性、稳定性、时不变性和线性等。本书讨论的重点是具有上述性质中最后两个性质的系统,即,关于连续时间和离散时间的线性时不变(LTI)系统。这类系统在系统分析和系统设计中起着特别重要的作用,一部分原因在于自然界已遇到的许多系统可以成功地模拟为线性时不变系统。此外,我们将会看到,线性和时不变性质使我们能够详细地分析LTI系统的特性。在第3章中,我们将推导这类系统的基本表示式,这类系统在发展信号与系统分析的许多重要方法中,将具有重要的作用。

习 题

本章的前七道习题用于复习复数知识,包括复数表示式和若干基本特性。在本书中,我们要广泛地用到复数,因此读者应使自己熟悉这些习题中用到和考虑到的基本概念,这点是相当重要的。

可以用几种方式表示复数 z , z 的笛卡尔或直角坐标形式由下式给定

$$z = x + jy$$

式中 $j = \sqrt{-1}$, x 和 y 是实数,并分别称作 z 的实部和虚部,如本章我们曾经指出的,实部和虚部常常用下列符号表示

$$x = \operatorname{Re}\{z\}, y = \operatorname{Im}\{z\}$$

复数 z 还可以用极坐标形式表示为

$$z = re^{j\theta}$$

式中 $r > 0$,表示 z 的幅值, θ 表示 z 的幅角或相位。这些参数通常写为

$$r = |z| \quad \theta = \angle z$$

复数的两个表示式之间的关系，可以根据欧拉关系式确定

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{P2.0-1})$$

或者绘制在如图 P2.0 所示的复平面上。图中水平坐标轴是 $\text{Re}\{z\}$ ，垂直坐标轴是 $\text{Im}\{z\}$ 。就图解表示法而言， x 和 y 是 z 的笛卡尔坐标，而 r 和 θ 是 z 的极坐标。

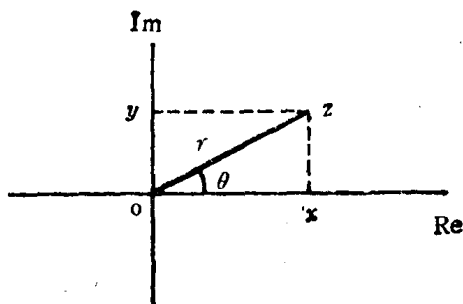


图 P2.0

2.1. (a) 使用欧拉关系式或图 P2.0，求以 r 和 θ 表示的 x 和 y 的表达式；

(b) 求以 x 和 y 表示的 r 和 θ 的表达式；

(c) 如果仅给出 r 和 $\text{tg } \theta$ ，能单值地确定 x 和 y 吗？试说明之。

2.2. 利用欧拉关系式，导出下列关系：

(a) $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$;

(b) $\sin \theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$;

(c) $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$;

(d) $\sin \theta \sin \phi = \frac{1}{2} \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2} \cos(\theta + \phi)$;

(e) $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$;

2.3. 设 z_0 是具有极坐标 (r_0, θ_0) 和笛卡尔坐标 (x_0, y_0) 的复数。求以 x_0 和 y_0 表示的下列复数的笛卡尔坐标表达式。当 $r_0=2$, $\theta_0=\pi/4$ 和 $r_0=2$, $\theta_0=\pi/2$ 时，在复平面上绘出 z_0 , z_1 , z_2 , z_3 , z_4 和 z_5 点。并在图上标出每个点的实部和虚部。

(a) $z_1 = r_0 e^{-j\theta_0}$; (b) $z_2 = r_0$; (c) $z_3 = r_0 e^{j(\theta_0 + \pi)}$; (d) $z_4 = r_0 e^{j(-\theta_0 + \pi)}$;

(e) $z_5 = r_0 e^{j(\theta_0 + 2\pi)}$ 。

2.4. 令 z 表示复数变量

$$z = x + jy = r e^{j\theta}$$

用 z^* 表示 z 的共轭复数

$$z^* = x - jy = r e^{-j\theta}$$

导出下列每一个关系式，式中 z , z_1 和 z_2 是任意复数

(a) $zz^* = r^2$;

(b) $\frac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$;

(c) $z + z^* = 2\text{Re}\{z\}$;

(d) $z - z^* = 2j\text{Im}\{z\}$;

(e) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$;

(f) $(az_1 z_2)^* = a z_1^* z_2^*$, 其中 a 是任一实数;

(g) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$;

(h) $\text{Re}\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*} \right]$ 。

2.5. 以笛卡尔坐标形式表示下列每一个复数，将它们画在复平面上，并标明每个数的实部和虚部

(a) $\frac{3+4j}{1-2j}$; (b) $\frac{j(2+j)}{(1+j)(2-j)}$; (c) $2j \frac{(1+j)^2}{(3-j)}$; (d) $4e^{j(\pi/6)}$; (e) $\sqrt{2} e^{j(25\pi/4)}$;

(f) $j e^{j(11\pi/4)}$; (g) $3e^{j4\pi} + 2e^{j7\pi}$;

(h) 复数 z ，其幅值为 $|z| = \sqrt{2}$ ，幅角为 $\angle z = -\pi/4$; (i) $(1-j)^9$;

$$(j) = \frac{6e^{-j\pi/3}}{1-j}.$$

2.6. 以极坐标形式表示下列每一个复数, 将它们画在复平面上, 并标明每个复数的幅值和幅角。

$$\begin{aligned} (a) & 1+j\sqrt{3}; \quad (b) -5; \quad (c) -5-5j; \quad (d) 3+4j; \quad (e) (1-j\sqrt{3})^3; \\ (f) & (1+j)^5; \quad (g) (\sqrt{3}+j^3)(1-j); \quad (h) \frac{2-j(6/\sqrt{3})}{2+j(6/\sqrt{3})}; \quad (i) \frac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}; \\ (j) & j(1+j)e^{j\pi/6}; \quad (k) (\sqrt{3}+j)2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}; \quad (l) \frac{e^{j\pi/3}-1}{1+j\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2.7. 导出下列关系式, 式中 z , z_1 和 z_2 是任意复数值。

$$\begin{aligned} (a) & (e^z)^* = e^{z*}; \\ (b) & z_1 z_2^* + z_1^* z_2 = 2\operatorname{Re}\{z_1 z_2^*\} = 2\operatorname{Re}\{z_1^* z_2\}; \\ (c) & |z_1| = |z^*|; \\ (d) & |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \\ (e) & \operatorname{Re}\{z\} \leq |z|, \operatorname{Im}\{z\} \leq |z|; \\ (f) & |z_1 z_2^* + z_1^* z_2| \leq 2|z_1 z_2|; \\ (g) & (|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

2.8. 本书的许多场合使用了这一习题中所考虑到的各种关系式。

(a) 证明下列表达式:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N, & a=1, \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & \text{任何 } a \neq 1 \text{ 的复数;} \end{cases}$$

(b) 求证: 如果 $|a| < 1$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a},$$

(c) 证明若 $|a| < 1$ 时, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a^n = \frac{a}{(1-a)^2},$$

(d) 计算

$$\sum_{n=k}^{\infty} a^n, \text{ 假设 } |a| < 1.$$

2.9. (a) 一连续时间信号 $x(t)$ 如图 P2.9(a) 所示, 仔细画出并标明下列每一个信号。

$$\begin{aligned} (i) & x(t-2); \quad (ii) x(1-t); \quad (iii) x(2t+2); \quad (iv) x(2-t/3); \\ (v) & [x(t)+x(2-t)]u(1-t); \quad (vi) x(t) \left[\delta\left(t+\frac{3}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{3}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

(b) 对于图 P2.9(b) 描述的信号 $h(t)$, 仔细画出并标明下列每一个信号:

$$\begin{aligned} (i) & h(t+3); \quad (ii) h(t/2-2); \quad (iii) h(1-2t); \quad (iv) 4h(t/4); \\ (v) & \frac{1}{2}h(t)u(t)+h(-t)u(t); \quad (vi) h(t/2)\delta(t+1); \\ (vii) & h(t)[u(t+1)-u(t-1)]. \end{aligned}$$

(c) 再次分别研究图 P2.9(a) 和(b) 所示的信号 $x(t)$ 和 $h(t)$, 仔细画出并标明下列每一个信号:

$$\begin{aligned} (i) & x(t)h(t+1); \quad (ii) x(t)h(-t); \quad (iii) x(t-1)h(1-t); \\ (iv) & x(1-t)h(t-1); \quad (v) x(2-t/2)h(t+4). \end{aligned}$$

2.10. (a) 一离散时间信号 $x(n)$ 如图 P2.10(a) 所示, 仔细画出并标明下列每一个信号:

$$\begin{aligned} (i) & x[n-2]; \quad (ii) x[4-n]; \quad (iii) x[2n]; \quad (iv) x[2n+1]; \\ (v) & x[n]u[2-n]; \quad (vi) x[n-1]\delta[n-3]; \end{aligned}$$

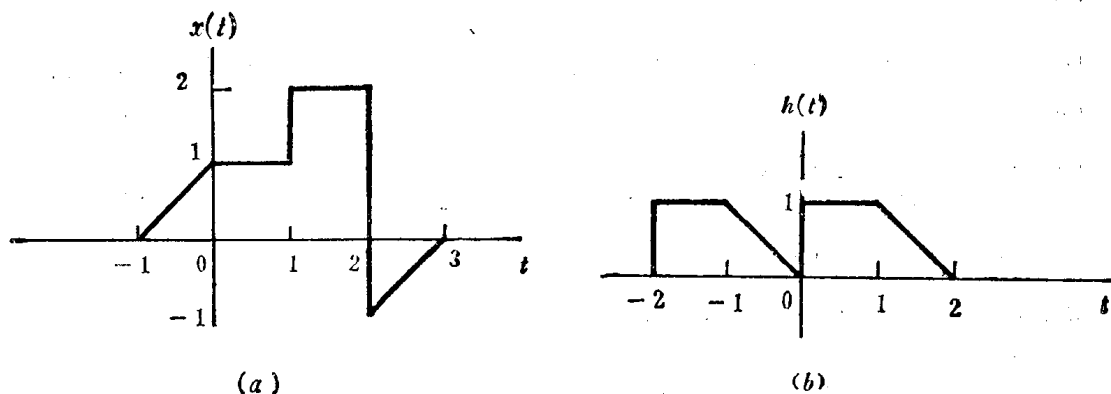


图 P 2.9

- (vii) $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$; (viii) $x[n^2]$.
- (b) 对于图 2.10(b) 所描述的信号 $h[n]$, 仔细画出并标明下列每一信号:
- (i) $h[2-n]$; (ii) $h[n+2]$;
 - (iii) $h[-n]u[n] + h[n]$; (iv) $h[n+2] + h[-1-n]$;
 - (v) $h[3n]\delta[n-1]$; (vi) $h[n+1]\{u[n+3] - u[-n]\}$.
- (c) 同时分析 (a) 和 (b) 部分已用到的信号 $x[n]$ 和 $h[n]$, 仔细画出并标明下列每一个信号:
- (i) $h[n]x[-n]$; (ii) $x[n+2]h[1-2n]$;
 - (iii) $x[1-n]h[n+4]$; (iv) $x[n-1]h[n-3]$.

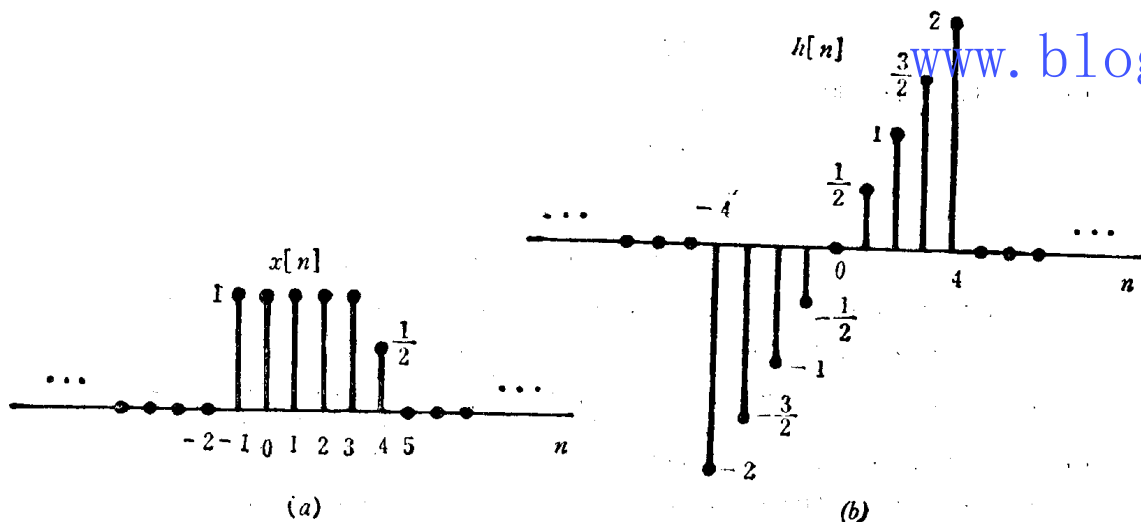
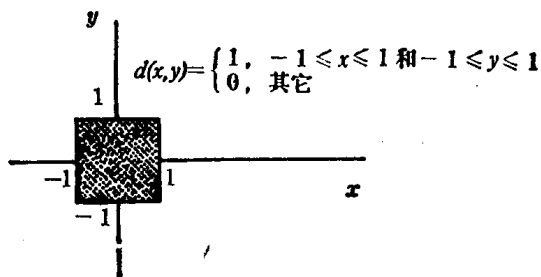


图 P 2.10

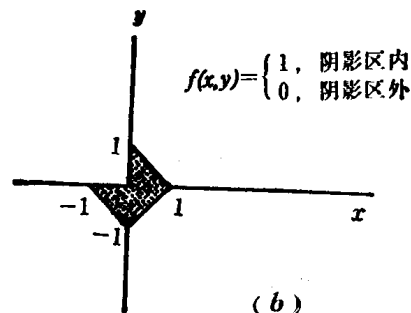
2.11. 虽然, 如课文所述, 我们把注意力集中于具有一个独立变量的信号, 但有时为了说明涉及到信号与系统的一些特殊概念, 研究某些具有两个独立变量的信号, 将是很有裨益的。二维信号 $d(x, y)$ 通常可想象为一幅图像, 其中任何一点的图像的亮度可用来表示该点 $d(x, y)$ 的数值。例如, 在图 P 2.11(a) 中, 我们已绘出了一幅表示信号 $d(x, y)$ 的图形, 如图所示, 在 (x, y) 平面上的阴影区内, $d(x, y)$ 取 1, 而在阴影区外, $d(x, y)$ 取 0。

(a) 根据图 P 2.11(a) 描述的信号 $d(x, y)$, 画出下列每一个信号:

- (i) $d(x+1, y-2)$; (ii) $d\left(\frac{x}{2}, 2y\right)$;



(a)



(b)

图 P 2.11

(iii) $d(y, 3x)$;

(iv) $d(x-y, x+y)$;

(v) $d\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

(b) 对于图 P 2.11(b) 所示的信号 $f(x, y)$, 画出下列每个信号:

(i) $f(x-3, y+2)$;

(ii) $f(x, -y)$;

(iii) $f\left(-\frac{1}{2}y, 2x\right)$;

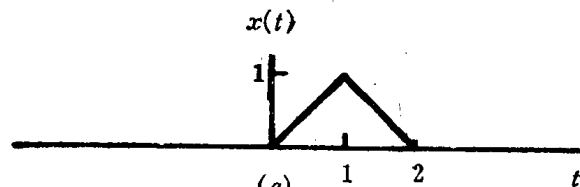
(iv) $f(2-x, -1-y)$;

(v) $f\left(2y-1, \frac{x}{3}+2\right)$;

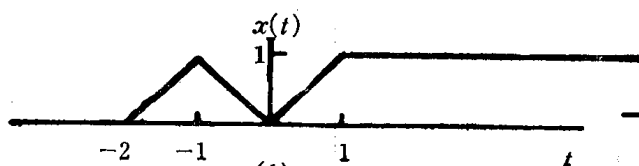
(vi) $f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$, $\theta = \pi/4$;

(vii) $f(x, y)u\left(\frac{1}{2}-y\right)$.

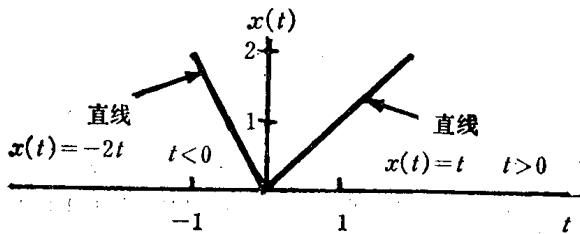
2.12. 确定并画出图 P 2.12 所描述的信号的偶数和奇数部分, 仔细标明你所画的各图。



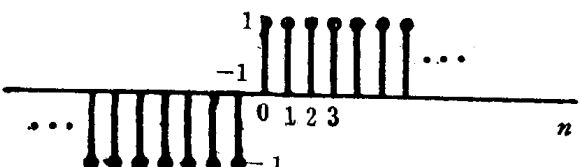
(a)



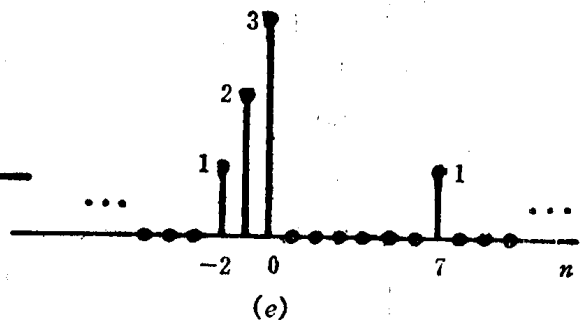
(b)



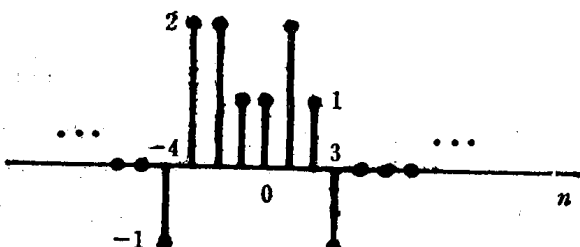
(c)



(d)



(e)



(f)

图 P 2.12

2.13. 在本习题中, 研究偶信号和奇信号的几种特性;

(a) 证明: 如果 $x[n]$ 是奇信号, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 0.$$

(b) 求证: 当 $x_1[n]$ 是奇信号, $x_2[n]$ 是偶信号时, 那么 $x_1[n]x_2[n]$ 是奇信号。

(c) 设 $x[n]$ 是一任意信号, 其偶数和奇数部分表示为

$$x_e[n] = \text{Ev}\{x[n]\},$$

$$x_o[n] = \text{Od}\{x[n]\},$$

证明

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n].$$

(d) 虽然(a)~(c)是按离散时间信号证明的, 但类似的特性对于连续时间信号也是有效的, 为了论证此点, 试证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t) dt,$$

式中 $x_e(t)$ 和 $x_o(t)$ 分别是信号 $x(t)$ 的偶数和奇数部分。

2.14. (a) 设图 P2.14(a) 所示的 $x_e[n]$ 是信号 $x[n]$ 的偶数部分, 已知 $n < 0$ 时, $x[n] = 0$, 确定并仔细画出对应所有 n 值的 $x[n]$ 。

(b) 设图 P2.14(b) 所示 $x_o[n]$ 是信号 $x[n]$ 的奇数部分, 假定 $n < 0$ 和 $x[0] = 1$ 时, $x[n] = 0$, 确定并仔细画出 $x[n]$ 。

(c) 设图 P2.14(c) 所示 $x_e(t)$ 是信号 $x(t)$ 的偶数部分, 此外, 在图 P2.14(d) 中, 我们已描绘了信号 $x(t+1)u(-t-1)$, 确定并仔细画出信号 $x(t)$ 的奇数部分。

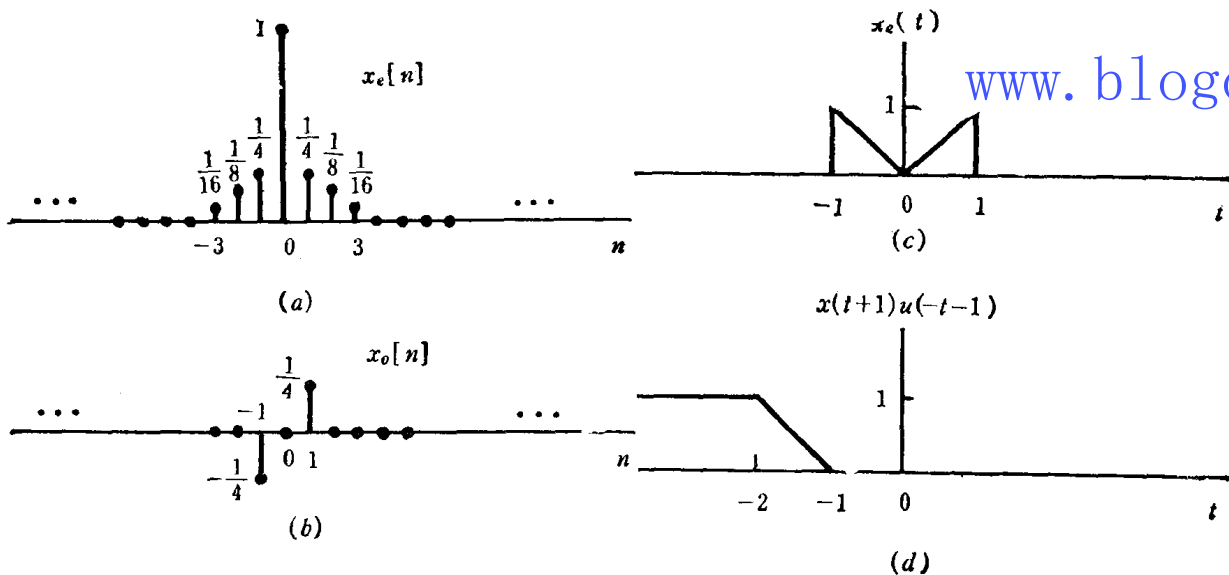


图 P2.14

2.15. 如果 $x(t)$ 是连续时间信号, 我们可看出 $x(2t)$ 是 $x(t)$ 的一种“加速”形式, 在这个意义上, 信号的持续时间相当于减少一半。类似地, $x(t/2)$ 表示 $x(t)$ 的“减速”形式, 信号的时间刻度扩展为原信号的两倍。“加速”或“减速”信号的概念在离散时间情况下有点不同, 如在下列习题中要看到的那样。

首先, 分析一个离散时间信号 $x[n]$, 并定义两个有关的信号, 在某种意义上, 这两个信号分别表示信号 $x[n]$ 的“加速”和“减速”信号:

$$y_1[n] = x[2n],$$

证明该信号的基本周期 N_0 为

$$N_0 = N / \gcd(m, N) \quad (\text{P2.17—1})$$

式中 $\gcd(m, N)$ 是 m 和 N 的最大公约数, 也就是说, 它是能够除尽 m 和 N 的整数中的最大整数。例如,

$$\gcd(2, 3) = 1, \gcd(2, 4) = 2, \gcd(8, 12) = 4$$

注意, 如果 m 和 N 没有公因子, 则

$$N_0 = N$$

(b) 研究下列谐波相关的周期指数信号

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/7)n}$$

求对应所有整数 k 值的信号基本周期和基本频率。

(c) 对于信号

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/8)n}$$

重复 (b) 的研究。

2.18. 令 $x(t)$ 是一基本频率为 ω_0 和基本周期为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 的连续时间复指数信号

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

设对信号 $x(t)$ 进行等间隔抽样所得到的离散时间信号为

$$x[n] = x[nT] = e^{j\omega_0 nT}$$

(a) 试证明当且仅当 T/T_0 为一有理数 (即, 当且仅当某个抽样间隔的倍数正好等于信号 $x(t)$ 一个周期的倍数), 则 $x[n]$ 是周期的。

(b) 假定 $x[n]$ 具有周期性, 即

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{q} \quad (\text{P2.18—1})$$

式中 p 和 q 是整数。 $x[n]$ 的基本频率和基本周期等于什么? 并把基本频率表示为 $\omega_0 T$ 的分数。

(c) 再次假定 T/T_0 满足式 (P2.18—1), 试确定需要多少个 $x(t)$ 的周期才能获得形成 $x[n]$ 单一周期的抽样。

2.19. (a) 令 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是分别具有基本周期为 T_1 和 T_2 的周期信号, 试问在什么条件下, 这两个信号之和

$$x(t) + y(t)$$

是周期性的, 如果该信号具有周期性, 那么它的基本周期等于什么?

(b) 令 $x[n]$ 和 $y[n]$ 是分别具有基本周期为 N_1 和 N_2 的周期信号, 试问在什么条件下, 这两个信号之和

$$x[n] + y[n]$$

是周期的, 如果该信号具有周期性, 那么它的基本周期是什么?

(c) 已知信号

$$x(t) = \cos \frac{2\pi t}{3} + 2 \sin \frac{16\pi t}{3}$$

$$y(t) = \sin \pi t$$

试证明

$$z(t) = x(t)y(t)$$

是周期信号, 并将其写成谐波相关复指数的线性组合形式。也就是求出周期 T 和复数 C_k , 使得

$$z(t) = \sum_k C_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

2.20. (a) 分析一输入为 $x(t)$ 的系统, 其输出 $y(t)$ 为

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - nT)$$