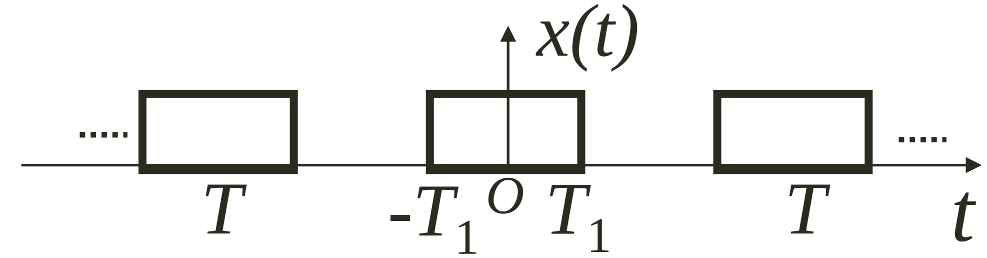
Chapter 4-1. 连续时间傅立叶变换FT

- 非周期信号的表示——连续时间傅里叶变换
- 傅里叶变换的收敛
- 周期信号的FT变换

周期扩展——非周期信号的周期表示方法

例3.5周期方波的傅里叶级数



$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1 \\ 0, & T_1<|t|<T/2\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}dt=\frac{2T_1}{T}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T},k\neq 0$$

$$=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

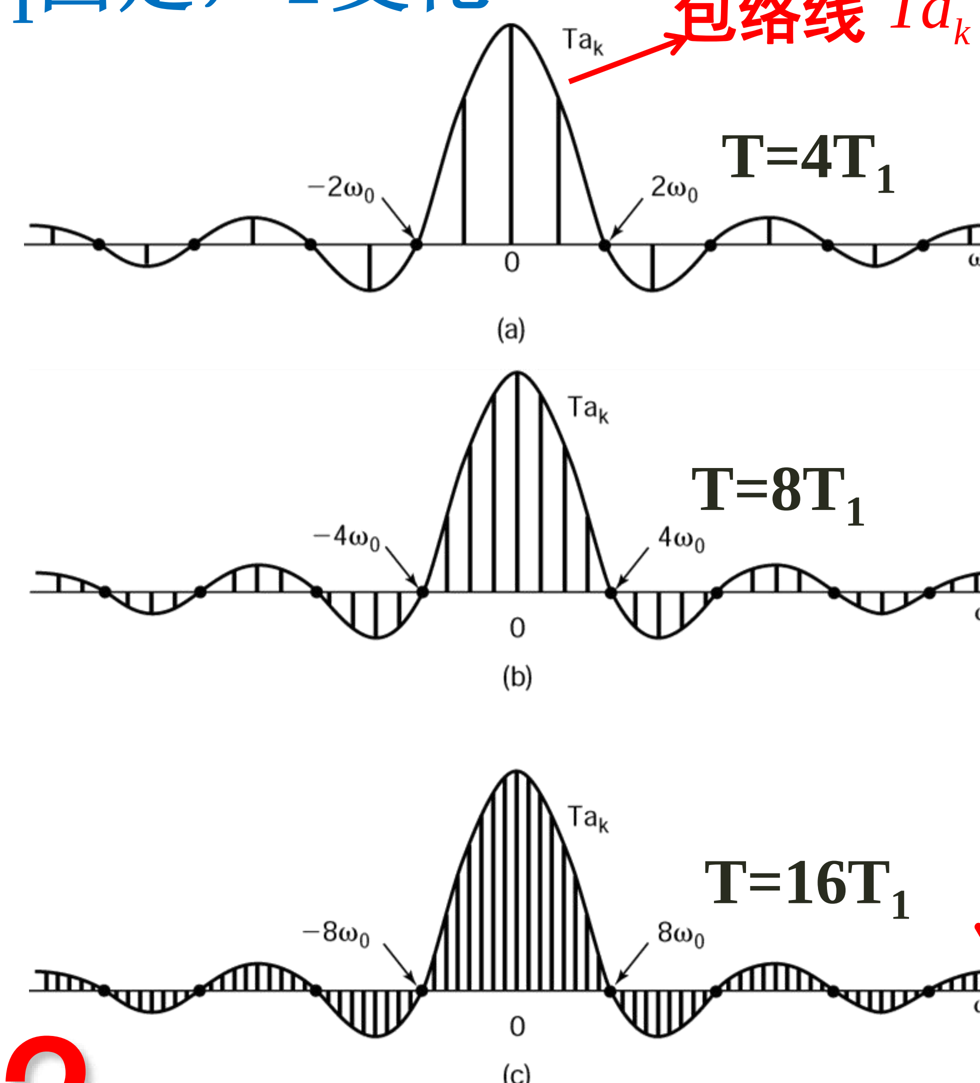
$$Ta_k=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\Big|\omega=k\omega_0$$

Ta_k：包络线的采样

$\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$：包络线

T_1固定，T变化

包络线 Ta_k



T变大，包络线更密集

? 若 $T\to\infty$, **Then** a_k会怎样?

方波信号形状如何?

周期扩展——非周期信号的周期表示方法

非周期傅里叶变换的基本思想----周期扩展

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$Ta_k = \int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

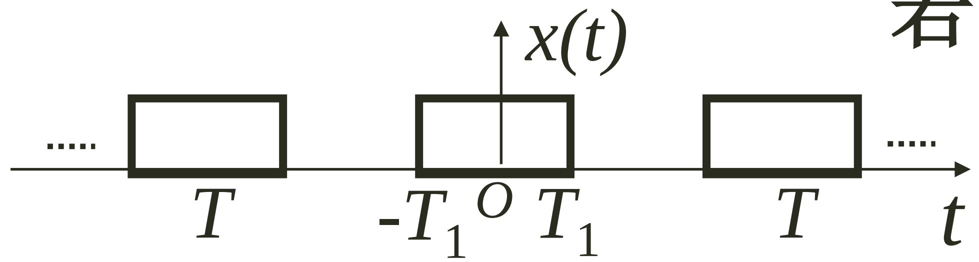
$$\Big\downarrow T \to \infty$$

$$X(j\omega) = \int_{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

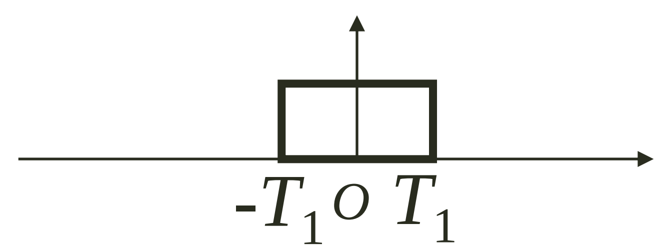
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{2\pi}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$\overset{T\to\infty}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$



$$\Big\downarrow T \to \infty$$



若 $T \to \infty$， a_k会怎样?

周期信号

$$\Big\downarrow T \to \infty$$

非周期信号

周期信号频谱 a_k

$$\Big\downarrow T \to \infty$$

非周期信号频谱

非周期信号频谱

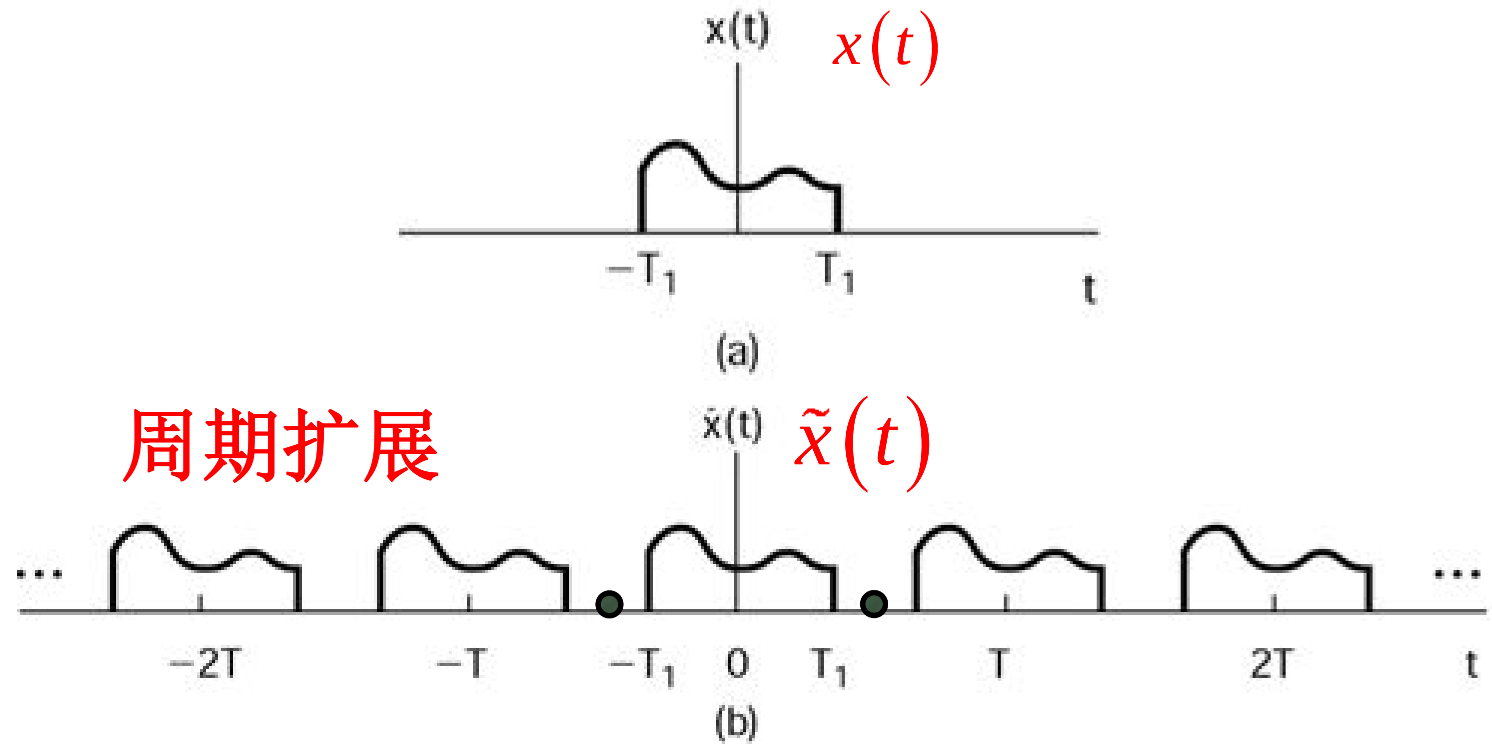
$$Ta_k \longrightarrow X(j\omega)$$

非周期信号傅里叶变换的推导

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$



$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$Ta_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=X(jk\omega_0)$$

定义

Ta_k的包络 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$$a_k=\frac{1}{T}X(jk\omega_0)=\frac{1}{T}X(jk\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Big\uparrow\ \omega_0 T=2\pi$$

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0$$

$$\Big\uparrow\ T\to\infty$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

非周期信号傅里叶变换的基本公式

合成公式

synthesis

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\mathrm{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

$$x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)$$

分析公式

analysis

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\mathrm{F}\{x(t)\}$$

其中，**X(jw)称为x(t)FT的频谱（频谱密度）。**

$$X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)}$$

$|X(j\omega)|$ 称为幅度谱，$\phi(\omega)$ 称为相位谱。

傅里叶变换的收敛

非周期信号只有满足**Dirichlet条件**才能表示成傅立叶变换形式。

条件1：在任何周期内，**x(t)**必须绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|dt<\infty$

条件2：在任意周期内，**x(t)**具有有限个最大值和最小值。

条件3：在任意周期内，只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上，函数值有限。

例子

➡ 例4.1计算x(t)的傅里叶系数

$$x(t)=e^{-at}u(t) \qquad a>0$$

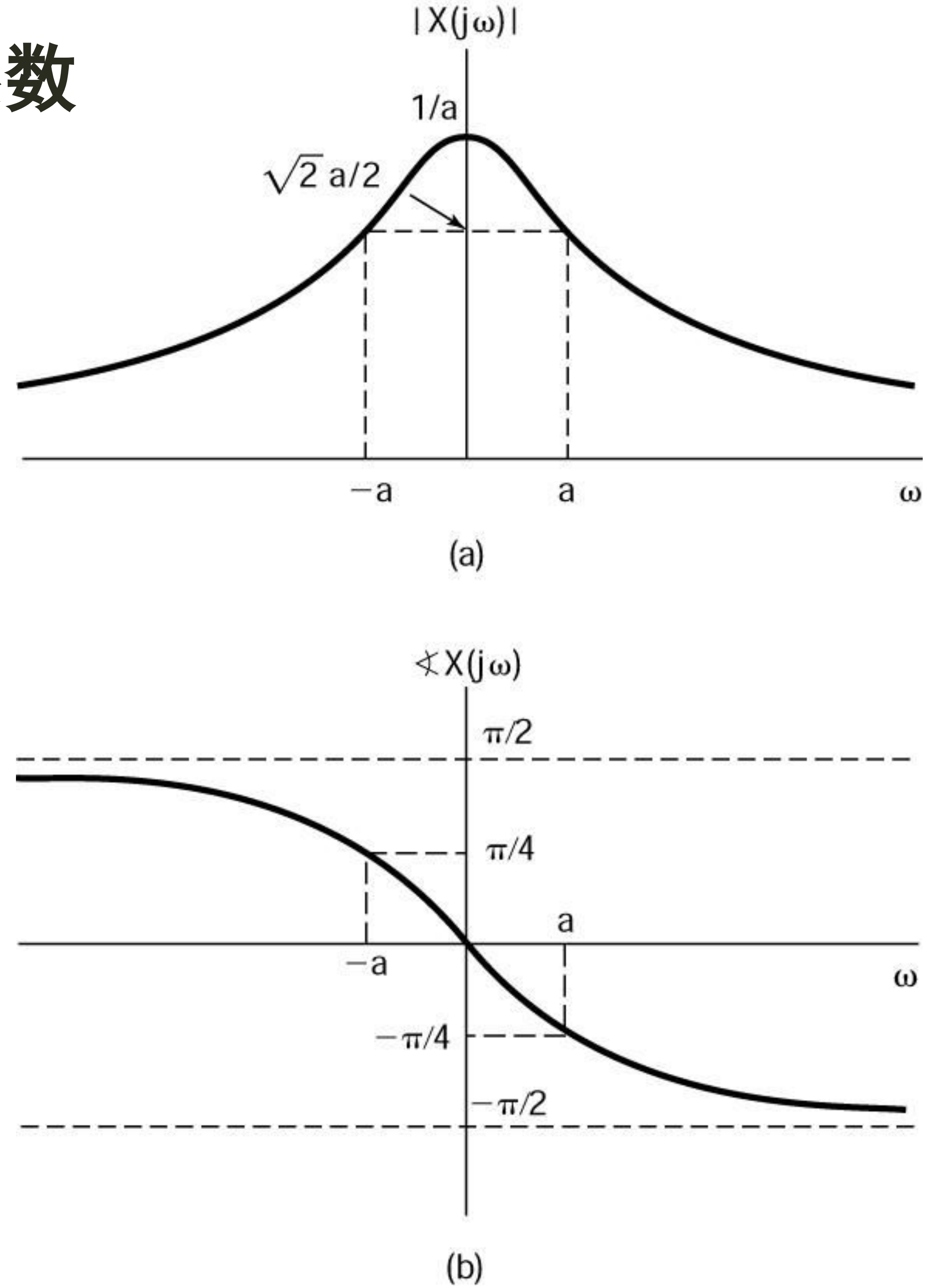
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

a 是实数 $\quad X(j\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega},a>0$

a 是复数 $\quad X(j\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega},\mathrm{Re}\{a\}>0$

?

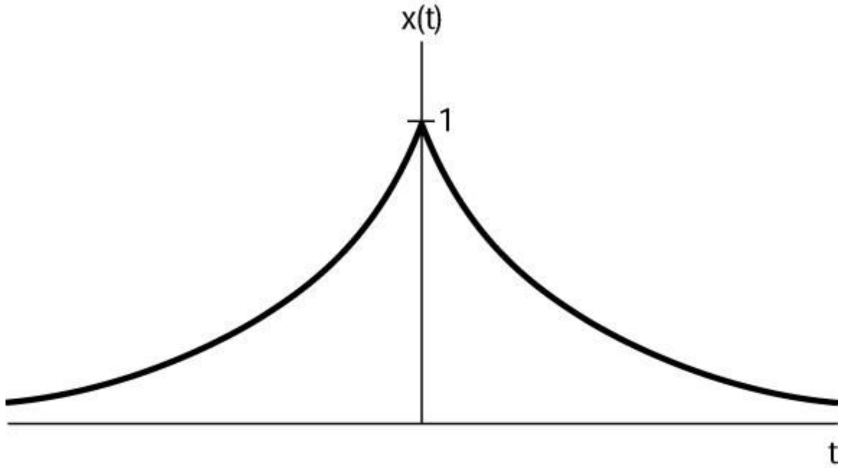


例子

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

例4.2计算x(t)的傅里叶系数

$$x(t)=e^{-a|t|} \qquad a>0$$

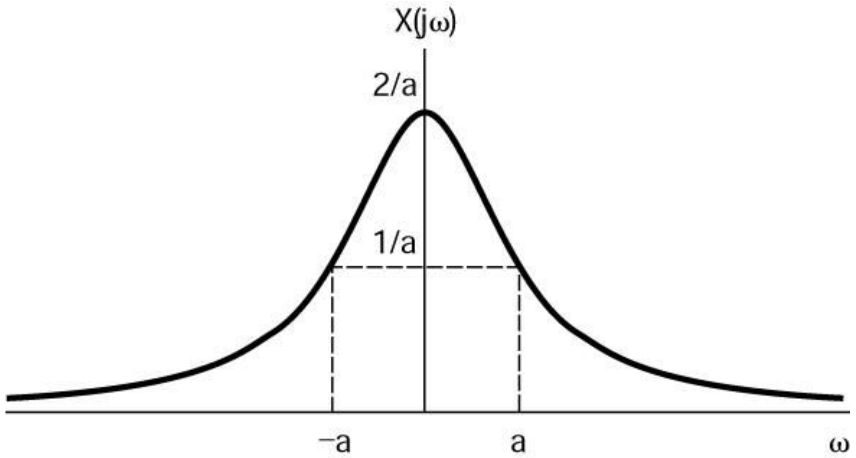


$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}$$

$$=\frac{2a}{a^2+\omega^2},a>0$$



例子 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

例4.3 计算x(t)的傅里叶系数。

$$x(t)=\delta(t) \qquad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$

$$x(t)=\delta(t-t_0) \qquad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t_0}$$

一个有用的推论

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1e^{j\omega t}d\omega \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}d\omega=2\pi\delta(t)$$

$$\delta(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$2\pi\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

例子 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

➡ **例计算x(t)**

$$X(j\omega)=\delta(\omega)$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}$$

$$x(t)=1\overset{FT}{\leftrightarrow}2\pi\delta(\omega)$$

$$X(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

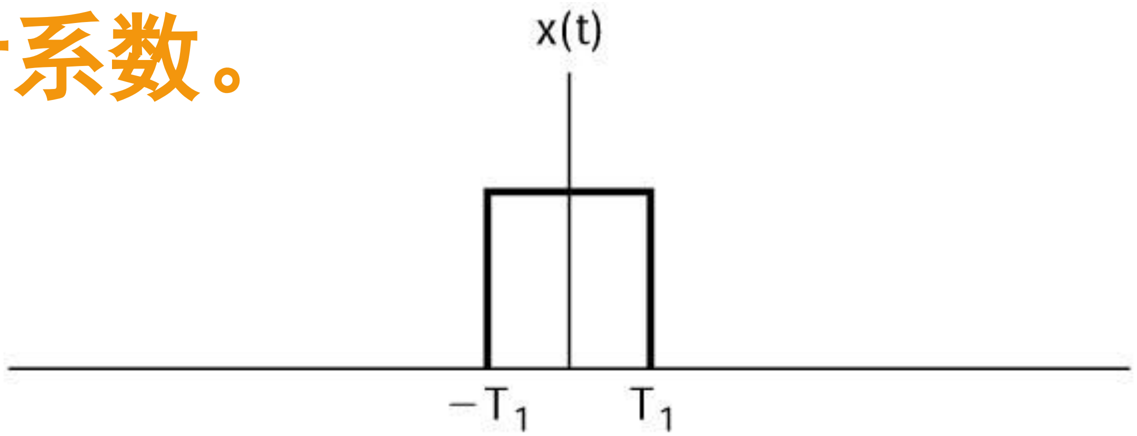
$$x(t)=e^{j\omega_0 t}\overset{FT}{\leftrightarrow}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$x(t)=e^{jk\omega_0 t}\overset{FT}{\leftrightarrow}2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

例子 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

例4.4计算x(t)的傅里叶系数。

$$x(t)=\begin{cases}1, |t|<T_1\\ 0, otherwise\end{cases}$$

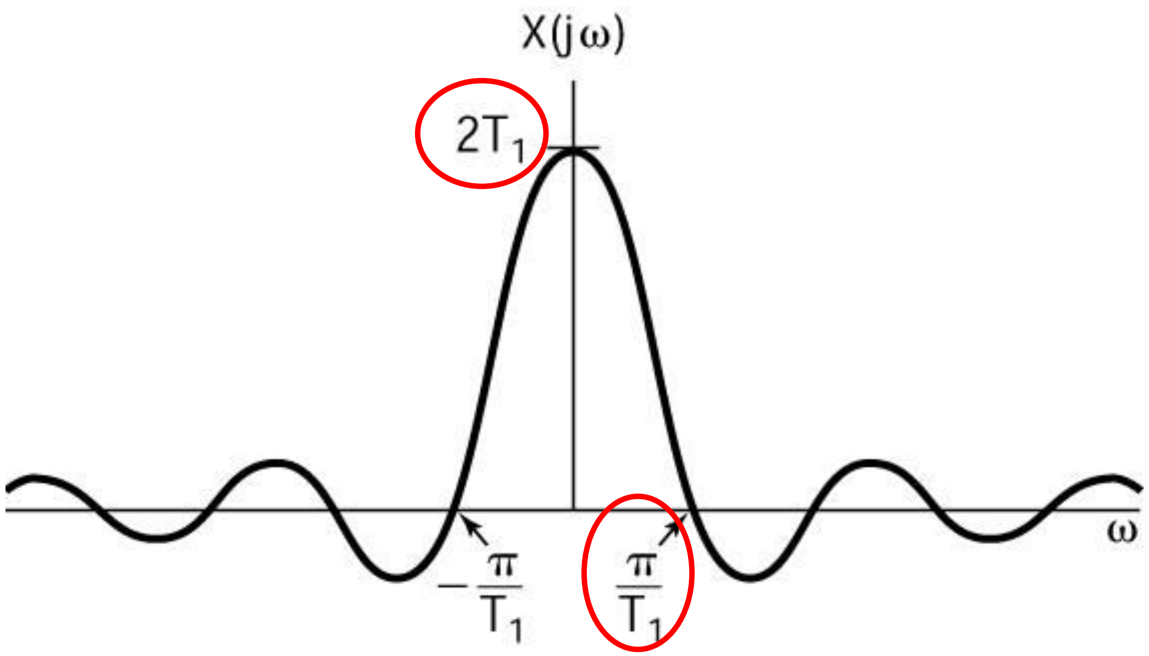


(a)

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-T_1}^{+T_1}1\bullet e^{-j\omega t}dt$$

$$=\left.\frac{je^{-j\omega t}}{\omega}\right|_{-T_1}^{T_1}$$



$$=\frac{2\sin(T_1\omega)}{\omega} \Rightarrow \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}=2T_1\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) \quad \sin c(\theta)=\frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

例子 $\sin c(\theta)=\dfrac{\sin\pi\theta}{\pi\theta}$

➡ **根据** $X(j\omega)$ **计算x(t)。**

$$X(j\omega)=\begin{cases}1,|\omega|<W\\0,|\omega|>W\end{cases}$$

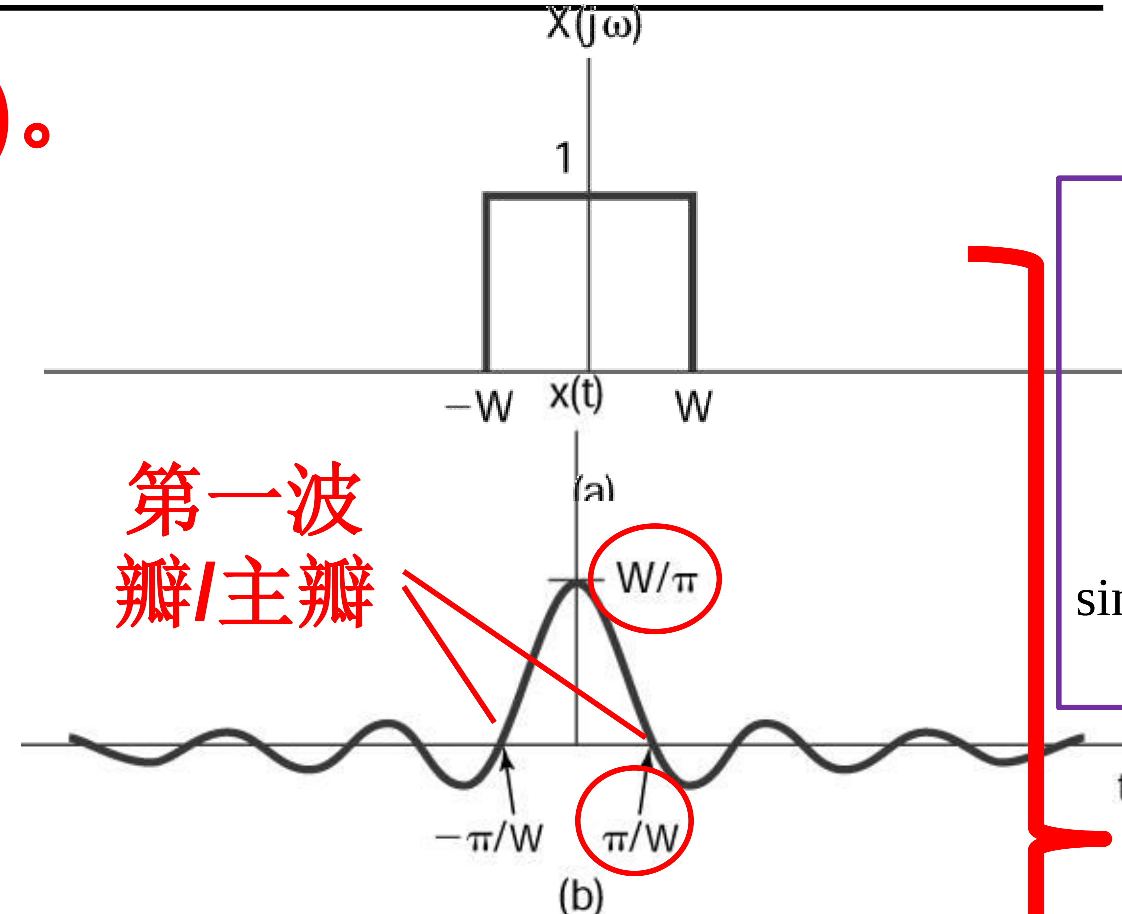
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W}1\bullet e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{-W}^{W}$$

$$=\frac{\sin Wt}{\pi t}$$

$$\frac{\sin Wt}{\pi t}=\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

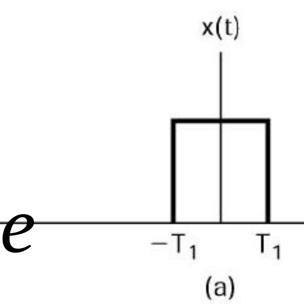


都包含矩形脉冲和sinc函数

$$\sin c(\theta)=\frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

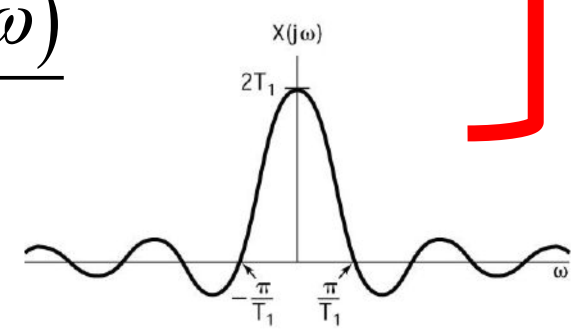
对偶性

$$x(t)=\begin{cases}1,|t|<T_1\\0,otherwise\end{cases}$$



$$X(j\omega)=\frac{2\sin(T_1\omega)}{\omega}$$

$$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}=2T_1\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$



频域与时域的矛盾

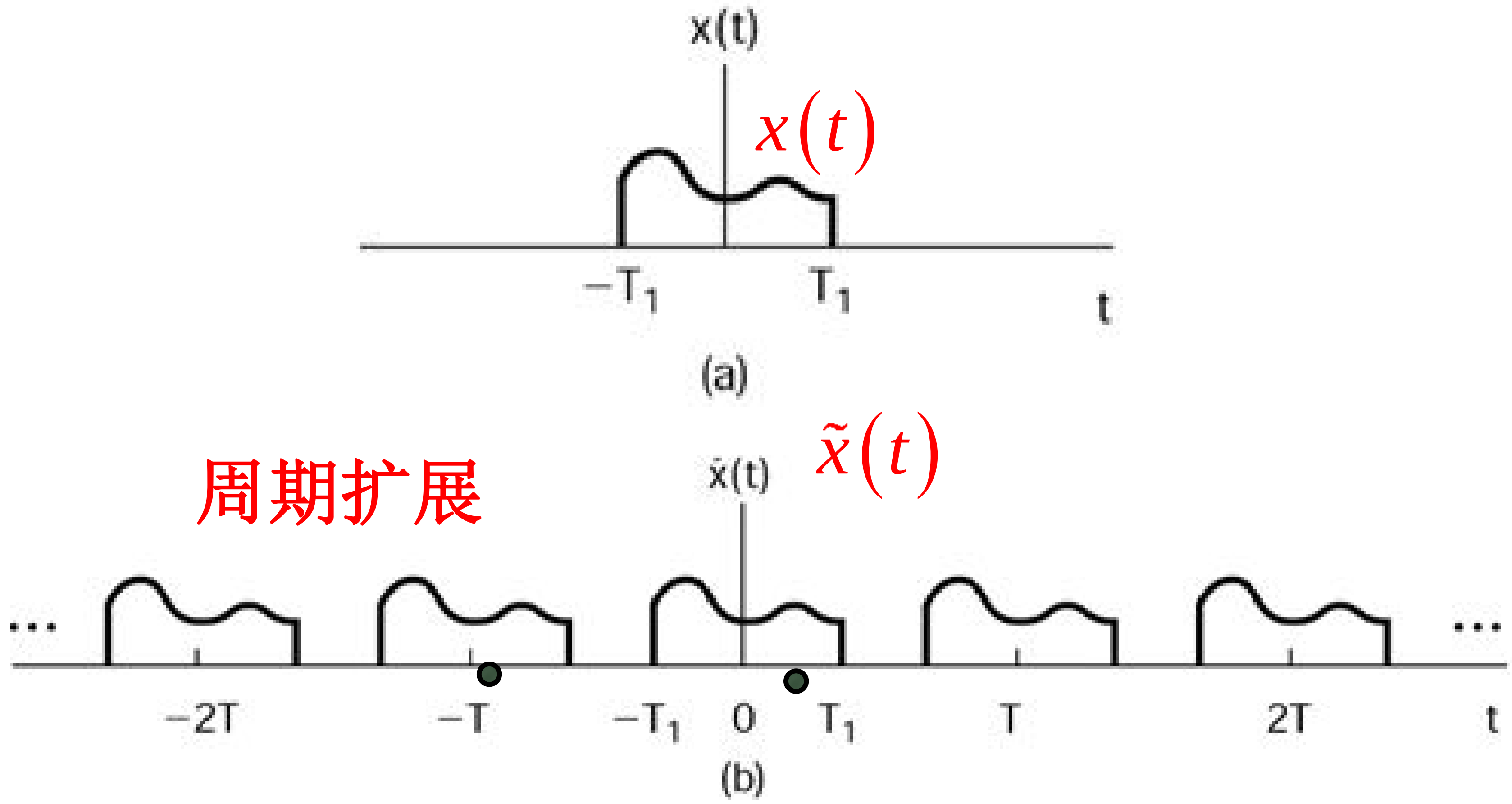
时域持续时间长，频域带宽窄

基本题4.2

吉伯斯现象

- 当用有限项傅里叶系数拟合方波时，同样存在吉伯斯现象。在接近不连续点处，信号将呈现起伏，起伏的峰值大小不随着*w*的增大而减小，但起伏会向不连续点压缩，而且起伏中的能量将收敛与零。

傅里叶变换与傅里叶级数之间的关系



定义 Ta_k的包络 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$$a_k=\frac{1}{T}X(jk\omega_0)=\frac{1}{T}X(jk\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

a_k 可以看成是对 $\frac{1}{T}X(j\omega)$ 的采样，采样间隔为 ω_0 。

周期信号的傅里叶变换

已知：$x_1(t)=e^{jk\omega_0 t}\overset{FT}{\leftrightarrow}X_1(j\omega)=2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$

周期信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ ⇨ $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k X_1(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

一个傅里叶级数系数为**$\{a_k\}$**的周期信号的傅里叶变换，可以看成是出现在**成谐波关系的频率 kw_0** 上的一串冲激函数，发生于**第k次谐波频率kw_0的冲激函数的面积是第k个傅里叶级数系数a_k的2π倍**。

$$x(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k \quad\Leftrightarrow\quad x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

周期信号的傅里叶变换

已知：$x_1(t)=e^{jk\omega_0 t}\overset{FT}{\leftrightarrow}X_1(j\omega)=2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$

周期信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ ⇨ $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt \quad =\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jk\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt}$$

⇩ $x_1(t)=e^{jk\omega_0 t}\overset{FT}{\leftrightarrow}X_1(j\omega)=2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k X_1(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

周期信号的傅里叶变换

已知：$x_1(t)=e^{jk\omega_0 t}\overset{FT}{\leftrightarrow}X_1(j\omega)=2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$

周期信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$

周期信号的傅里叶变换可以先计算ak，再计算X(jw)

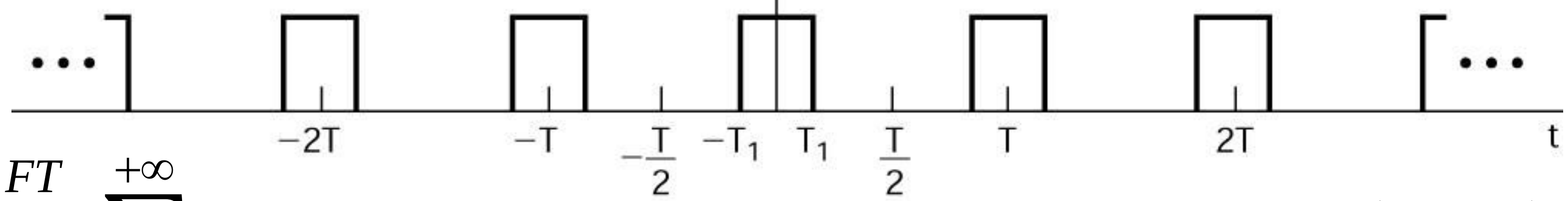
$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k X_1(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

一个傅里叶级数系数为**$\{a_k\}$**的周期信号的傅里叶变换，可以看成是出现在**成谐波关系的频率 kw_0** 上的一串冲激函数，发生于**第k次谐波频率kw_0的冲激函数的面积是第k个傅里叶级数系数a_k的2π倍**。

$$x(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k \iff x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

周期信号的傅里叶变换

例4.6 根据周期方波的傅里叶级数计算其傅里叶系数

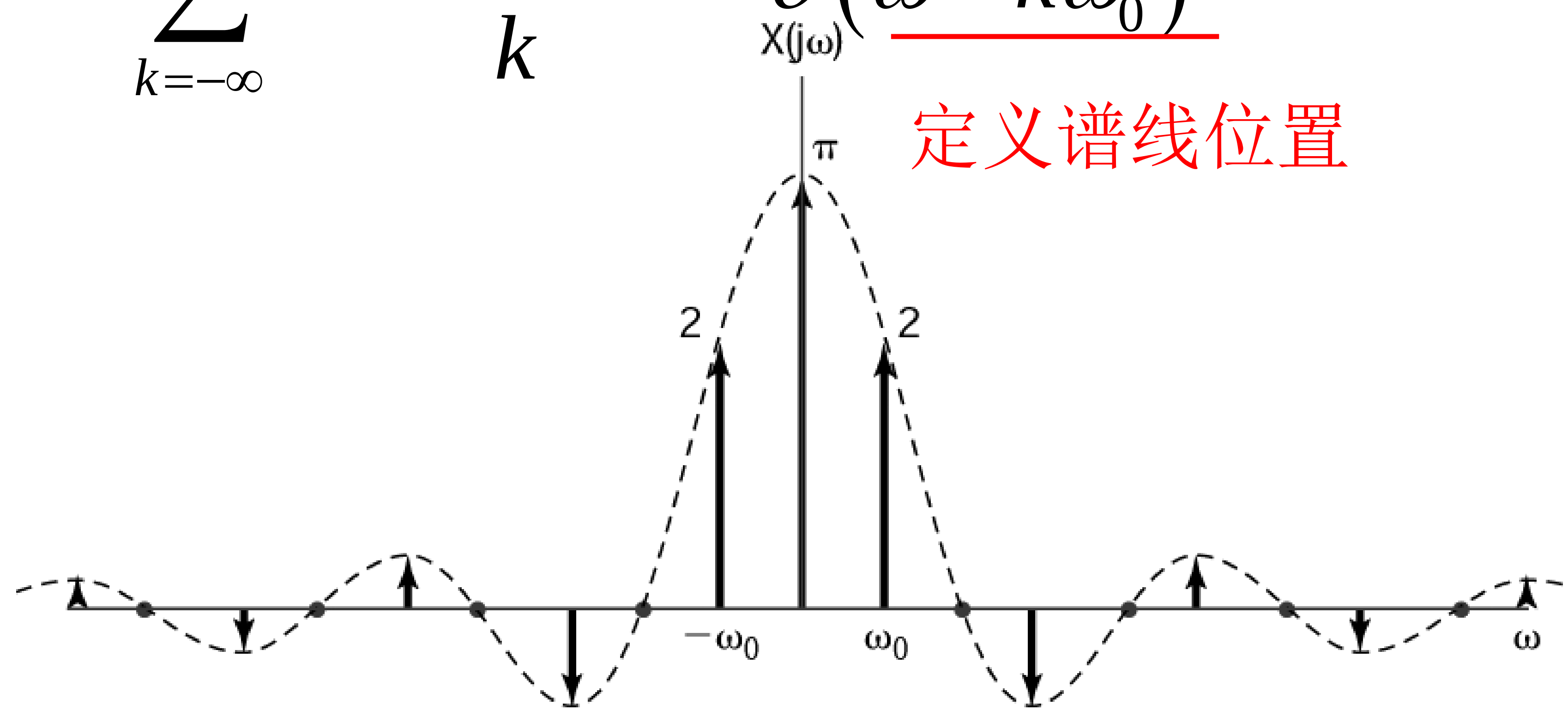


$$x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)\qquad a_0=\frac{1}{2}\qquad a_k=\frac{2\sin(k\omega_0T_1)}{k\omega_0T}\quad k\neq 0$$

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi\, a_k\delta(\omega-k\omega_0)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin(k\omega_0T_1)}{k\omega_0T}\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin(k\omega_0T_1)}{k}\underline{\delta(\omega-k\omega_0)}$$

定义谱线位置



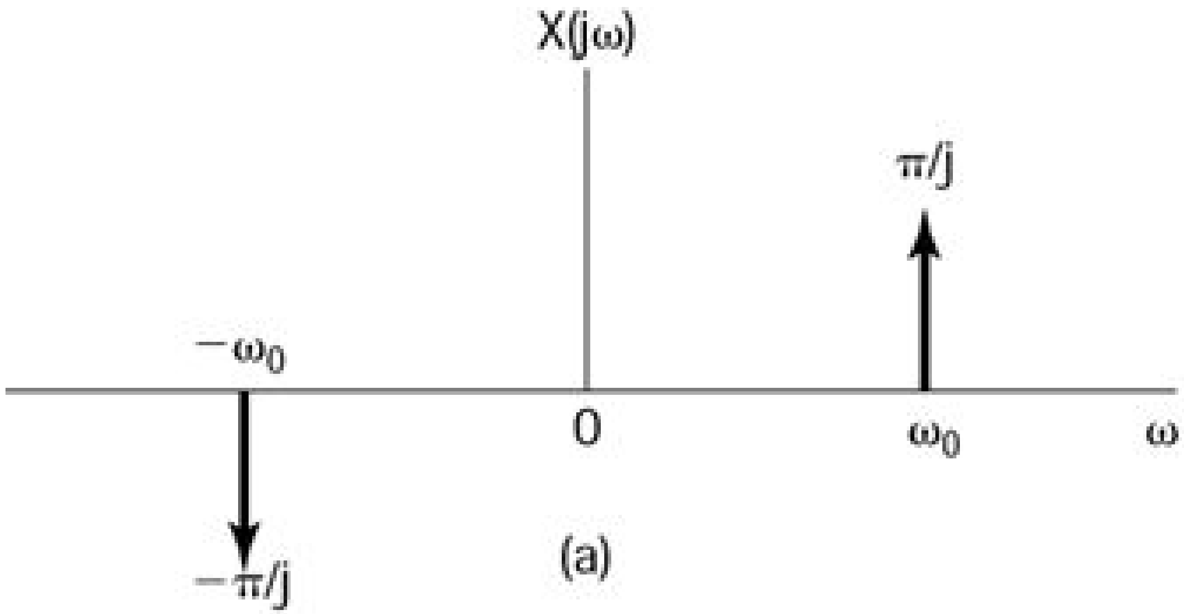
周期信号的傅里叶变换

例4.7 计算下面信号的傅里叶变换系数 $X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$

$$(1)\,x(t)=\sin(\omega_0 t)\quad (2)\,x(t)=\cos(\omega_0 t)$$

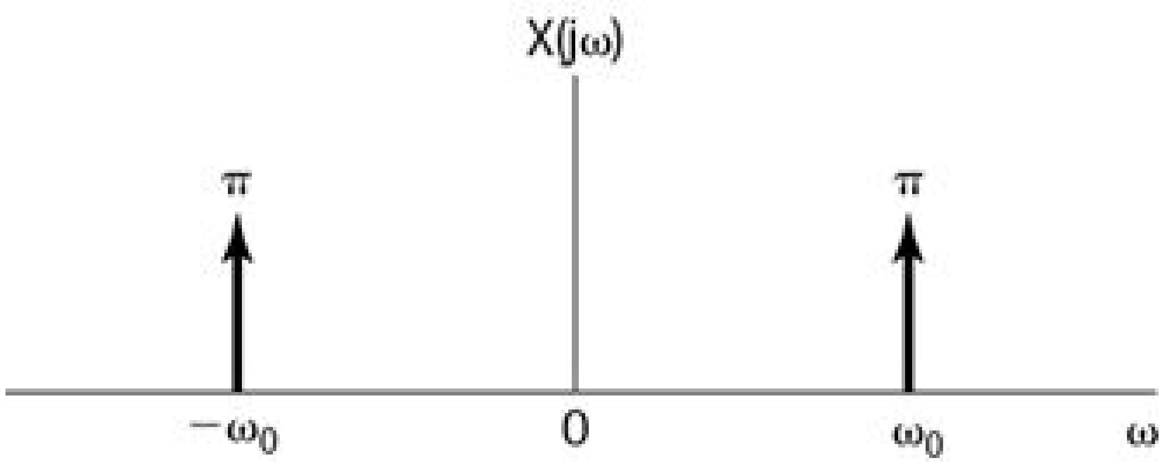
$$(1)\,a_1=\frac{1}{2j},a_{-1}=-\frac{1}{2j},a_k=0,k\neq\pm1$$

$$X(j\omega)=\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$$



$$(2)\,a_1=a_{-1}=\frac{1}{2},a_k=0,k\neq\pm1$$

$$X(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$



周期信号的傅里叶变换

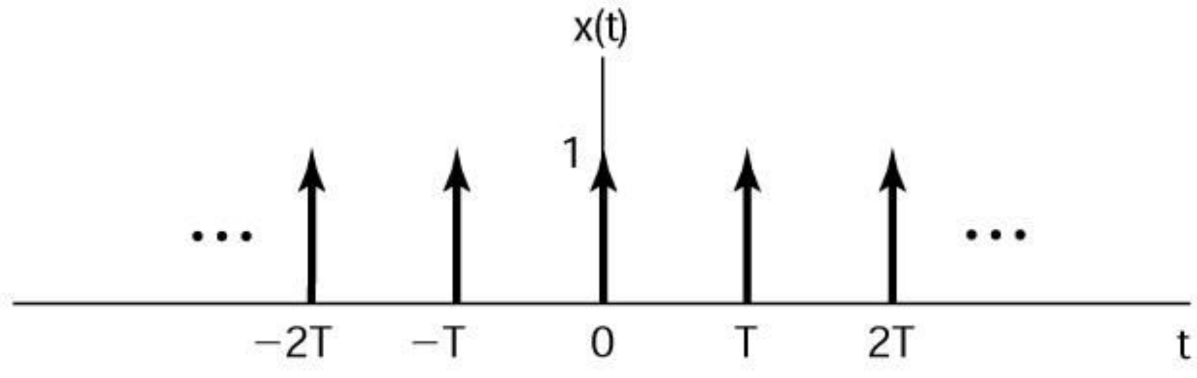
例4.8 计算周期性冲激串的傅里叶变换系数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) \qquad X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

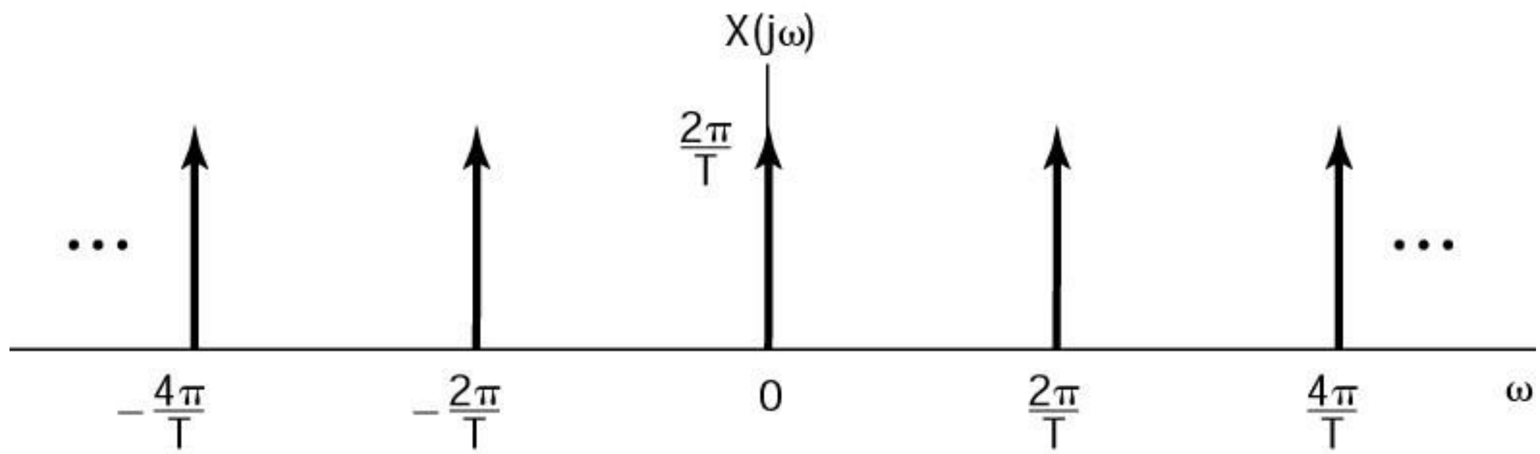
$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}$$

$$X(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$$

周期为T的冲激串，其傅里叶变换仍然是冲激串，周期为2π/T，即ω_0 。



(a)



(b)

作业

- **4.1 (a)**
- **4.3 (b)**周期信号的傅里叶变换
- **4.4 (b)**