第五章 插值法与最小二乘法

王志明

wangzhiming@ies.ustb.edu.cn

本 章 内 容

- 5.1 插值法概述
- 5.2 拉格朗日插值法
- 5.3 分段插值法
- 5.4 牛顿插值法
- 5.5 埃尔米特(Hermite)插值
- 5.6 样条函数与样条插值
- 5.7 数据拟合的最小二乘法

§ 5.1 插值法概述

§ 5.1.1 插值问题

年份	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口(百万)	1.23	1.32	1.51	1.80	2.03	2.27	2.52

- 用简单函数逼近复杂或未知函数。
- 已知函数在一些节点上的函数值:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

寻找一个多项式，在这些节点上与函数值相等，在其他点上近似函数值。

§5.1.2 插值多项式存在的唯一性

设$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$有$n+1$个待定系数

可求解下列方程组得到：

$$
\begin{cases}
P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\
P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\
\dots\dots \\
P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n)
\end{cases}
$$

系数(*Vandermonde*)行列式：

$$
V_n(x_0 x_1 \dots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & & \cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \neq 0
$$

唯一解存在！

定理5.1 满足$P_n(x_i) = y_i (i = 0,1,2,\dots,n)$的插值多项式是唯一存在的。

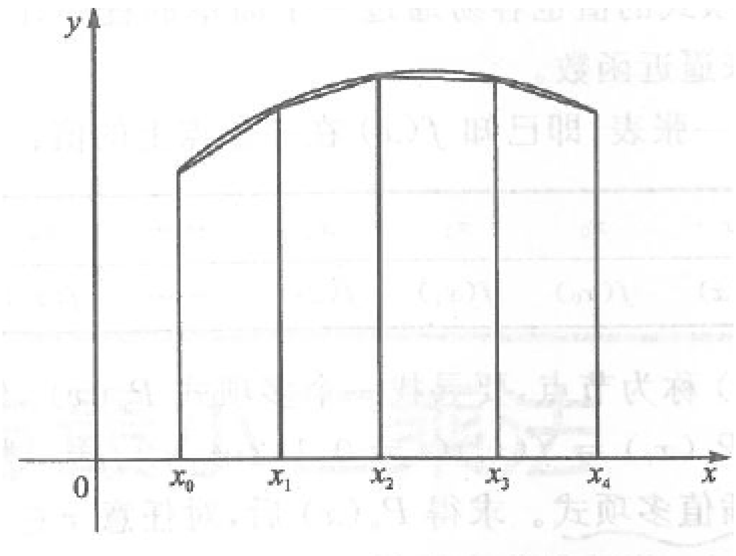

图 5-1　用直线近似代替 $y=f(x)$

线性方程：

$$P_1(x_i) = \mathrm{f}(x_i), P_1(x_{i+1}) = \mathrm{f}(x_{i+1})$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_i = y_i \\ a_0 + a_1 x_{i+1} = y_{i+1} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, a_0 = \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{x_i - x_{i+1}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_i - x_{i+1}} x_i + y_i$$

$$\boxed{P_1(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}}$$

二次插值：

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$P_2(x_j) = y_j, (j = i, i+1, i+2)$$

求解下列线性方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 = y_i \\ a_0 + a_1 x_{i+1} + a_2 x_{i+1}^2 = y_{i+1} \\ a_0 + a_1 x_{i+2} + a_2 x_{i+2}^2 = y_{i+2} \end{cases}$$

可解方程求解，也可采用如下技巧：

$$P_2(x) = P_1(x) + z(x), \quad z(x) = C(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$P_2(x_{i+2}) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+2} - x_i) + C(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1}) = y_{i+2}$$

解得：$\mathrm{C} = \left(\frac{y_{i+2} - y_i}{x_{i+2} - x_i} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right) / (x_{i+2} - x_{i+1})$

$$\boxed{\begin{aligned} P_2(x) = {} & \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} y_i + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} y_{i+1} \\ & + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} y_{i+2} \end{aligned}}$$

当i=0时(第一段)：

$$\boxed{P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}P_2(x)=&\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\end{aligned}}$$