

根据这个方程式, 我们推导出下式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u_1(\tau)d\tau = -g'(0) \quad (\text{P3.39-2})$$

- (a) 通过证明式 (P3.39-2) 就意味着 (P3.39-1), 证明式 (P3.39-2) 是 $u_1(t)$ 的等效表征

提示: 固定 t , 并定义信号 $g(\tau) = x(t-\tau)$ 。

这样, 我们已经看到, 在表征单位冲激或单位偶时用它在卷积下的如何表现来描述, 是与它在乘以任意信号 $g(t)$ 后在积分下的表现来描述是等效的。实际上, 如同在 3.7 节中指出的, 这些运算定义的等效性适合于所有的信号, 特别是适合于所有的奇异函数。

- (b) 设 $f(t)$ 为一已知信号, 试证明:

$$f(t)u_1(t) = f(0)u_1(t) - f'(0)\delta(t)$$

可通过证明式两边有相同的运算定义来证明。

- (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u_2(\tau)d\tau$ 的值是什么?

- (d) 类似在 (b) 中对 $f(t)u_2(t)$ 考虑, 求出 $f(t)u_2(t)$ 的表示式。

3.40. 通过归纳法试证明:

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t) \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

3.41. 从连续时间奇异函数来推论, 我们可定义一组离散时间信号。具体说, 令

$$\begin{aligned} u_{-1}[n] &= u[n], \\ u_0[n] &= \delta[n], \\ u_1[n] &= \delta[n] - \delta[n-1], \end{aligned}$$

并定义

$$\begin{aligned} u_k[n] &= \underbrace{u_{-1}[n] * u_{-1}[n] * \dots * u_{-1}[n]}_{k \text{ 次}} \quad (k > 0), \\ u_k[n] &= \underbrace{u_{-1}[n] * u_{-1}[n] * \dots * u_{-1}[n]}_{|k| \text{ 次}} \quad (k < 0). \end{aligned}$$

www.blogoil.com

注意

$$\begin{aligned} x[n] * \delta[n] &= x[n], \\ x[n] * u[n] &= \sum_{m=-\infty}^n x[m], \\ x[n] * u_1[n] &= x[n] - x[n-1]. \end{aligned}$$

它们是课文中式 (3.143)、(3.156) 和 (3.149) 分别给出的 $\delta(t)$ 、 $u(t)$ 和 $u_1(t)$ 的相应运算定义。

- (a) $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]u_1[m]$ 是什么?

- (b) 试证明:

$$\begin{aligned} x[n]u_1[n] &= x_0[n]u_1[n] - \{x[1] - x[0]\}\delta[n-1] \\ &= x[1]u_1[n] - \{x[1] - x[0]\}\delta[n] \end{aligned}$$

- (c) 画出信号 $u_2[n]$ 和 $u_3[n]$ 。

- (d) 画出 $u_{-2}[n]$ 和 $u_{-3}[n]$ 。

- (e) 试证明, 通常在 $k > 0$ 时,

$$u_k[n] = \frac{(-1)^k k!}{n!(k-n)!} \{u[n] - u[n-k-1]\}. \quad (\text{P3.41-1})$$

提示: 利用归纳法, 根据 (c) 在 $k=2$ 和 3 时, 应有 $u_k[n]$ 满足式 (P3.41-1)。然后, 假设 $u_k[n]$ 是正确的, 根据 $u_k[n]$ 写出 $u_{k+1}[n]$, 并且证明 $u_{k+1}[n]$ 也是正确的。

(f) 一般情况下 $k > 0$ 时, 试证明:

$$u_{-k}[n] = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} u[n] \quad (\text{P3.41-2})$$

提示: 再次利用归纳法, 注意

$$u_{-(k+1)}[n] - u_{-(k+1)}[n-1] = u_{-k}[n] \quad (\text{P3.41-3})$$

假设式 (P3.41-2) 对 $u_{-k}[n]$ 是有效的, 再利用式 (P3.41-3) 证明它对 $u_{-(k+1)}[n]$ 同样有效。

3.42. 在本章中, 我们已经利用了几个便于 LTI 系统分析的性质和概念, 本题中将对其中两个性质和概念稍作仔细研究。如同我们将看到的, 在某些很特殊的情况下, 利用这些性质时必须仔细, 因为这些性质不是无条件成立的。

(a) 卷积的最基本和最重要的性质之一(在连续时间和离散时间两种情况)是结合律, 即, 若 $x(t)$, $h(t)$ 和 $g(t)$ 是三个信号, 则

$$\begin{aligned} x(t) * [g(t) * h(t)] &= [x(t) * g(t)] * h(t) \\ &= [x(t) * h(t)] * g(t) \end{aligned} \quad (\text{P3.42-1})$$

通常, 只要式 (P3.42-1) 中所有三个表示式有意义, 而且是有限的, 则这个式子是正确的。因为实际上这是常有的情况, 故一般在利用结合律时不必再加以说明。然而, 在某些情况下并非如此。例如, 假设如图 P3.42 所示的系统有 $h(t) = u_1(t)$ 和 $g(t) = u(t)$ 。计算该系统对输入

$$x(t) = 1 \quad (\text{对所有的 } t)$$

的响应。根据式 (P3.42-1) 和图, 试用三种不同的方法完成计算:

- i) 首先卷积两个冲激响应, 然后卷积其结果和 $x(t)$;
- ii) 首先卷积 $x(t)$ 和 $u_1(t)$, 然后卷积其结果和 $u(t)$;
- iii) 首先卷积 $x(t)$ 和 $u(t)$, 然后卷积其结果和 $u_1(t)$ 。

(b) 对下式重复(a),

和

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} \\ h(t) &= e^{-t} u(t), \\ g(t) &= u_1(t) + \delta(t). \end{aligned}$$



图 P3.12

(c) 对下式重复(a):

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$g[n] = \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1].$$

因此,通常仅当式(P3.42—1)中三个表示式有重要意义时,卷积的结合律成立(即,它们用LTI系统来解释是有意义的)。例如,在(a)中先微分一个常数再积分便有意义,但是先对常数从 $t=-\infty$ 积分,然后再进行微分的过程则无意义,也只有在这种情况下,结合律失效。

与上述的讨论密切有关的问题是涉及逆系统的问题。具体说,假设LTI系统有冲激响应 $h(t)=u(t)$,如同我们在(a)中看到过的,存在某些输入,具体说, $x(t)=\text{非零常数}$,对于这种输入,该系统的输出是无限的。因此,考虑由这样的输出求逆去恢复输入的问题是无意义的。然而,若我们限制输入,使其产生有限的输出,即满足

$$\left| \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right| < \infty \quad (\text{P3.42—2})$$

则系统是可逆的,并且具有冲激响应 $u_1(t)$ 的LTI系统是它的逆系统。

(d) 试证明:冲激响应为 $u_1(t)$ 的LTI系统是不可逆的。

提示:找出两个不同的输入,两者在全部时间内产生零输出。

然而,若我们限于满足式(P3.42—2)的输入,试证明系统是可逆的。

提示:在题2.30中我们证明了,若除了 $x(t)=0$ 以外没有别的输入,系统在全部时间内产生的输出都为零,则该LTI系统是可逆的。那末是否有两个输入 $x(t)$,能满足式(P3.42—2),且和 $u_1(t)$ 卷积时同样地产生零响应?

本题中,我们所要说明的为以下各点:

- (1) 若 $x(t)$, $h(t)$, $g(t)$ 是三个信号,并且若 $x(t)*g(t)$, $x(t)*h(t)$ 和 $h(t)*g(t)$ 都是有意义和有限的,则(P3.42—1)的结合律成立。
- (2) 设 $h(t)$ 是一个LTI系统的冲激响应,并假设第二个系统的冲激响应 $g(t)$ 有特性

$$h(t)*g(t)=\delta(t) \quad (\text{P3.42—3})$$

则从(1)我们知道,对于所有的输入 $x(t)$,相应的 $x(t)*h(t)$ 和 $x(t)*g(t)$ 是很好定义的且是有限的,则图P3.42所示系统的两种级联,都起恒等系统的作用,因此,这两个系统都可被认为是另一个系统的逆系统。例如,若 $h(t)=u(t)$ 和 $g(t)=u_1(t)$,则只要我们限制输入满足式(P3.42—2),我们就可以认为这两个系统互为逆系统。

因此,我们看到,只要所含的全部卷积是有限的,式(P3.42—1)的结合律和如式(P3.42—3)给定的LTI逆系统的定义都是正确的。因为在任何的实际问题中,这是必然的情况,一般我们在利用这些性质时不加以说明或解释。注意,虽然大多数讨论是用连续时间信号和系统来表示的,但同样的论点也适用于离散时间信号和系统中〔从(c)中可以更明显地看出〕。

第四章 连续时间信号与系统的傅里叶分析

4.0 引言

第3章中,我们研究卷积和的出发点是:把离散时间 LTI 系统的输入表达为时移单位冲激的加权和。类似地,我们把连续时间 LTI 系统的输入表达为时移冲激的加权积分,可以导出卷积积分。离散和连续时间 LTI 系统的这些表示法说明:系统对任意输入的响应是怎样由该系统对基本输入的响应(即它对时移单位冲激的响应)所构成。因此,假设我们知道系统对单位冲激的响应,则卷积和与卷积积分不仅提供了计算 LTI 系统响应的便利方法,而且也表明 LTI 系统的特性完全由其单位冲激响应决定。由于这一事实,我们能相当详细地分析 LTI 系统的许多特性,并使这些特性与系统冲激响应的等价特性联系。

在本章和下一章中,我们研究信号和 LTI 系统另外一种表示方法。本章着重于连续时间信号与系统,下一章则描述离散时间的情况。正如在第3章中那样,我们讨论的出发点是研究把信号表示为一基本信号集的加权和与加权积分。在第3章,我们用时移单位冲激作为基本信号。而在本章和下一章,我们把用复指数作为基本信号得出的表达式称为连续时间和离散时间傅里叶级数和傅里叶变换。我们将看到,利用这些表达式可构成各种类型的有用信号。

一旦有了这些表达式,就又能像在第3章中所进行的那样,即,由于迭加性,LTI 系统对任何由基本信号的线性组合所组成输入的响应,是对这些基本信号中的每一个单独响应的线性组合。在第3章,这些响应都是单位冲激响应的时移形式。正是由于这一点,它给了我们非常有用的 LTI 系统的表达式。在本章和下一章我们将发现, LTI 系统对复指数的响应也有一个特别简单的形式。它将给我们提供对 LTI 系统的另一个方便的表示法,从而提供用来分析这些系统和深刻认识系统性质的另一种方法。本章和下一章所建立的这种傅里叶分析的方法,在信号与系统的研究中起着极其重要的作用。在本书以后的章节中,我们将广泛采用这种方法。

傅里叶分析法的发展经历了很长的历史,它涉及许多人,涉及对大量不同物理现象的研究^①。利用“三角函数和”,即利用调和相关的正弦、余弦或周期复指数之和以描述周期现象,至少可追溯到远至巴比伦人,他们利用这种概念以预测天文现象^②。这一学科的现代历

①本章的历史资料摘自以下几本参考书: I. Grattan-Guinness, *Joseph Fourier 1768—1830* (Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1972); G.F. Simmons, *Differential Equations: With Applications and Historical Notes* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1972); C. Lanczos, *Discourse on Fourier Series* (London: Oliver and Boyd, 1966); R.E. Edwards, *Fourier Series: A Modern Introduction* (New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1967); and A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, and M.A. Lavrent'ev, *Mathematics, Its Content, Methods, and Meaning*, trans. S.H. Gould, Vol. I; trans. K. Hirsch, Vol. II (Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1963). 特别是,对傅里叶生活和贡献更全面的估价可在 Grattan-Guinness 的书中找到,而其他专门参考书在这一章的另几处引用。

② H. Dym and H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals* (New York: Academic Press, 1972); G.F. Simmons, *Differential Equations: With Applications and Historical Notes* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1972)。这两本教科书也包括振动弦问题及其在傅里叶分析法研究中所起作用的讨论。

史在1748年由欧拉开创，他考察了振动弦的运动。在图4.1中，我们画出了这种振动弦的前面几个标准波形。如果考察在时间 t 和沿弦距离 x 处弦的垂直偏移为 $f_t(x)$ ，则在任何指定的瞬间 t ，这些标准波形是 x 的调和相关的正弦函数。欧拉注意到，如果振动弦在时间中某一时刻的图形是这些标准波形的线性组合，那么在随后任何时间里，它的图形也是这些波形的线性组合。欧拉进一步表明，可用很简便的方式，由较前面时间的线性组合系数来计算后期的系数。在进行这项工作，欧拉已经完成了如同我们在下一节推导三角级数和的一种性质时要进行的同一类计算。这些性质使得三角级数和对 LTI 系统的分析很有用。特别是，如果 LTI 系统的输入用周期复指数或正弦函数的线性组合表示，则输出也可以用这种形式表示，输出系数可用输入系数方便地表达。我们将会看到，这大大方便了 LTI 系统的分析。

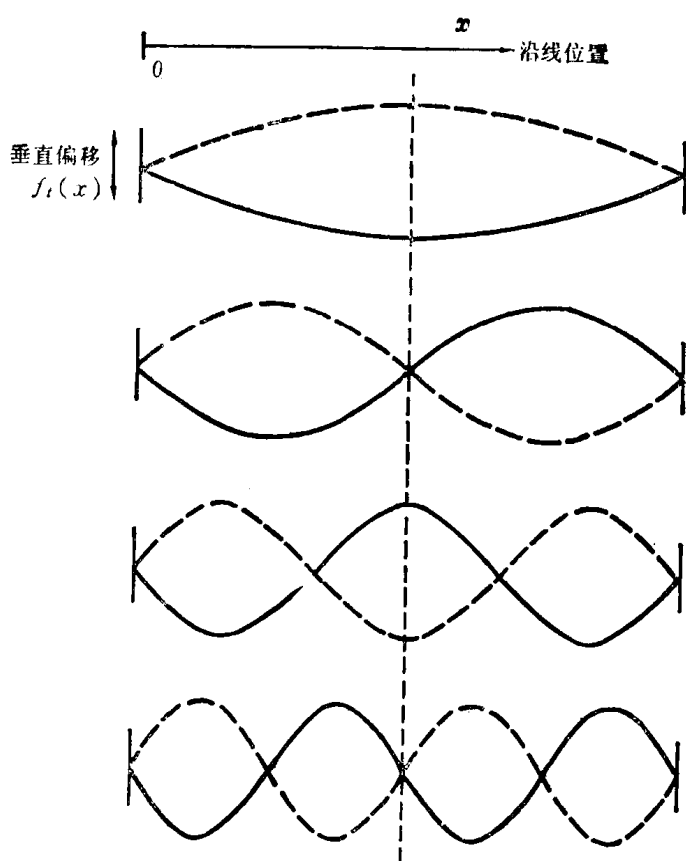


图4.1 振动弦的标准波形（实线表示每个标准波形在某个固定时刻 t 的图形）

www.blogoil.com



图4.2 J.B.J.傅里叶

除非确实能通过复指数的线性组合来表示大量感兴趣的函数，否则前节所描述的特性就不会特别有用。在18世纪中叶，这一点是热烈争辩的课题。1753年，D. 伯努利对弦的所有物理运动能用标准波形的线性组合来表示的物理依据进行了论证，但没有从数学上继续努力，因而他的思想未被广泛接受。事实上，欧拉自己也抛弃了三角级数。1759年 J.L. 拉格朗日强烈批评了三角级数在振动弦试验中的应用。他的批评建立在他自己信念基础上的，他认为利用三角级数表示带角的（即斜率不连续）信号是不可能的。因为上述图形是由拉一根弦而产生的（即把弦拉紧再放开），所以拉格朗日认为，三角级

数的用途是很有限的。

就是在这种多少有点敌对和怀疑的环境里,傅里叶(图4.2)在半个世纪以后提出了自己的思想。傅里叶于1768年3月21日出生于法国的奥克塞。在他进入有关三角级数的争论前,他已经有了丰富的经验。他的许多贡献,特别是那些涉及以他的名字命名的级数及变换,在当时给人以深刻的印象。他的创见,虽然在他生前没有得到完全的评价,但后来在数学的发展上有着重要的影响,在极其广泛的科学和工程的研究领域中,已经并且仍将发挥非常重要的作用。

推动傅里叶研究工作物理上的动力,是热传播和热扩散现象。在先前的多数数学物理研究中涉及的是理论力学和天体力学的情况下,这本身就是一个进步。到了1807年,傅里叶已经完成了他在热扩散方面的大部分工作。那年的12月21日,他把研究结果递交法兰西研究院。在研究工作中傅里叶已经发现,调和相关的正弦级数可用于表达物体的温度分布。此外,他主张“任何”周期信号都可用这种级数表达。虽然他对这个课题的处理是有意义的,但这个课题的许多基本概念已由他人发现。并且,傅里叶的数学论证也还是不严密的,直到1829年,才由P.L.狄利克雷提出用傅里叶级数表达周期信号的严格条件^①。因此,傅里叶对傅里叶级数的数学理论没有实际贡献。然而,他确实清楚地看到这种级数表示法的潜力。在很大程度上,正是他的工作和主张促进了有关傅里叶级数以后的大部分研究工作。此外,傅里叶使这种表示法取得比他任何前辈远大得多的进展。特别,他获得对非周期信号的表达式——不是作为有谐波关系的正弦波的加权和——而是作为非全部调和相关正弦波的加权积分。正如傅里叶级数一样,傅里叶积分或变换仍是分析LTI系统的一种最有效的方法。

四位著名的数学家和科学家被指定审查傅里叶1807年的论文。其中三人,S.F.拉克鲁瓦、G.蒙日和P.S.拉普拉斯,赞成出版这篇论文,但第四个人,J.L.拉格朗日强硬地保持着他五十年前就表示的对三角级数的排斥态度。由于拉格朗日的强烈反对,傅里叶的论文一直未能发表。为了使他的著作被法兰西研究院接受和出版,傅里叶在作了其他几番努力后,着手改写了另一本书,以教科书《热的分析理论》^②出现。这本书于1822年,即傅里叶第一次向法兰西研究院递交成果十五年后获得出版。

傅里叶暮年时,得到了应有的公认,不过对他最有意义的,还是他的著作对数学、科学、工程领域如此多学科的巨大影响。积分理论、点集拓扑学、特征函数展开式仅是起源于傅里叶级数和傅里叶积分分析的数学学科中的几个例子。与振动和热扩散最初的研究几乎一样,在科学和工程中有大量包含正弦信号的问题,因而,傅里叶级数和变换起了重要的作用。例如,在描述地球气候的周期性质时,正弦信号就自然地出现。交流电源产生正弦电压和电流,可以看到,傅里叶分析法使我们能分析一个LTI系统(例如一个电路)对这种正弦信号输入的响应。又如图4.3所示,海洋里的波是由不同空间周期(或波长)的正弦波线性组合构成;无线电台和电视台发射的信号,在本质上也是正弦的。翻阅任何有关傅里叶分析的课本都将发现,正弦信号的出现和傅里叶分析法的使用,其范围远远超过了这里所举的几个例子。

本章我们研究一些连续时间傅里叶分析的基本方法,这和欧拉、伯努利、拉格朗日、傅里叶、狄利克雷以及他们之后的那些人所用的方法大致一样。当我们介绍和描述这些方法时,将开始领会傅里叶分析和信号与系统的频域表示(即傅里叶级数和变换)的功用。虽然

^①虽然S.D.Poisson和A.L.Cauchy两人在1829年前已获得有关傅里叶级数收敛的结果,但狄利克雷的工作对他们的结果作出了重要的发展,以致他常常被认为是第一个以严格的形式考虑傅里叶级数收敛的人。

^②见英译本:J.B.J. Fourier, The Analytical Theory of Heat, 译者: A. Freeman (Cambridge, 1878)。

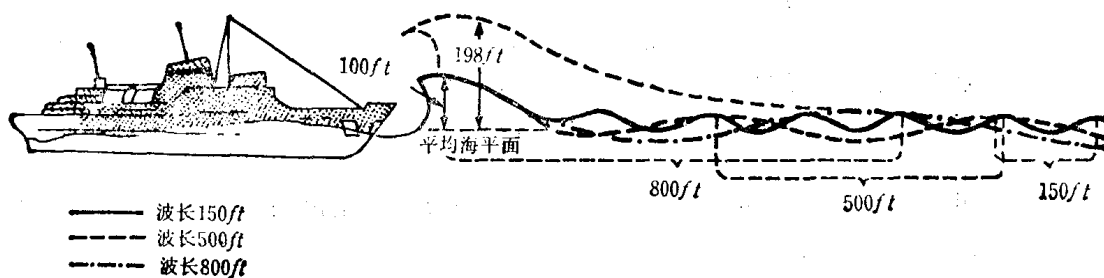


图4.3 船只遭到三个波串迭加的冲击，每个波有不同的空间周期。当这些波互相加强时，就能导致一个巨大的波。在更险峻的海洋环境中，有可能产生用虚线表示的巨波。无论这样的加强出现在什么位置，都取决于迭加成分有关的相位（见4.10节）

傅里叶及其同代人的工作只和连续时间现象有关，但傅里叶分析的基本思想移植到离散时间，并为我们提供了对离散时间 LTI 系统分析极为有用的方法。离散时间傅里叶分析的研究，是第 5 章的主题。掌握了连续和离散时间两种频域方法，我们就可运用这些方法到一些很重要的实际课题上去。在第 6 章，我们要研究滤波器（即设计对不同频率的正弦波有特定响应性能的系统）。第 7 章谈到调制，那一章我们特别研究调幅（AM）通讯系统工作的基本概念。在第 8 章，当我们研究连续时间信号的抽样和使用离散时间系统处理已抽样信号时，我们同时利用连续和离散时间傅里叶分析法。

4.1 连续时间 LTI 系统对复指数的响应

我们在上一节指出，在研究 LTI 系统时，把信号表示为基本信号的线性组合是方便的，这些基本信号具有以下两个性质：

1. 基本信号集可以用来构成广泛而有用的各类信号。
2. LTI 系统对每个基本信号响应的结构应当是相当简单的，使我们能方便地表示系统对这些基本信号线性组合而成的任何信号的响应。

对连续时间 LTI 系统， e^{st} 形的复指数集提供了这两方面的有利条件。这里 S 是一般的复数。在 4.2~4.5 节中，我们将详细地考虑上述第一个性质；而在本节，我们考虑第二个性质，并以此推动在 LTI 系统分析中使用傅里叶级数和变换。

在 LTI 系统的研究中，复指数的重要性源于下述情况：LTI 系统对复指数输入的响应仍是复指数，只在幅度上变化。即

$$e^{st} \rightarrow H(s)e^{st} \quad (4.1)$$

这里复数幅度系数 $H(s)$ 通常是复变量 S 的函数。对某种信号，系统的输出恰好是输入的（也许是复数的）常数倍，这种信号称为系统的特征函数，而幅度系数称为特征值。

为了说明复指数确实是 LTI 系统的特征函数，我们考虑具有冲激响应 $h(t)$ 的 LTI 系统。对输入 $x(t)$ ，我们可以用卷积积分来确定输出。因而如果 $x(t)=e^{st}$ ，由式(3.29)就有

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \end{aligned} \quad (4.2)$$

把 $e^{s(t-\tau)}$ 表示为 $e^{st}e^{-s\tau}$ ，且 e^{st} 可以移到积分之外，式(4.2)成为

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (4.3)$$

因此, 对 e^{st} 响应的表达式为

$$y(t) = H(s)e^{st} \quad (4.4)$$

式中 $H(s)$ 是复系数, 其值取决于 S , 且 $H(s)$ 和系统冲激响应有关, 可表示为

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (4.5)$$

这样, 我们证明了任一复指数都是 LTI 系统的特征函数。对指定的 S 值, 系数 $H(s)$ 就是和特征函数 e^{st} 有关的特征值。

用特征函数来分解更一般信号, 对 LTI 系统的分析的效用可从一个例子看出。设 $x(t)$ 相当于三个复指数的线性组合, 即

$$x(t) = a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} + a_3e^{s_3t} \quad (4.6)$$

对每个信号的响应分别是

$$\begin{aligned} a_1e^{s_1t} &\rightarrow a_1H(s_1)e^{s_1t} \\ a_2e^{s_2t} &\rightarrow a_2H(s_2)e^{s_2t} \\ a_3e^{s_3t} &\rightarrow a_3H(s_3)e^{s_3t} \end{aligned}$$

根据式(3.1)和(3.2)给出的迭加特性, 对各信号和的响应等于各响应之和, 因此

$$y(t) = a_1H(s_1)e^{s_1t} + a_2H(s_2)e^{s_2t} + a_3H(s_3)e^{s_3t} \quad (4.7)$$

更一般地

$$\sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t} \quad (4.8)$$

这样, 对一个 LTI 系统, 如果我们知道了特征值 $H(s_k)$, 就可用简单的方式构成对复指数线性组合的响应。

欧拉从振动弦问题中发现的正是这个事实, 这个观察结果促使傅里叶考虑到一个问题: 能用复指数线性组合表达的一类信号有多么广泛。在4.2和4.3节中, 当我们考虑用复指数表达周期信号和这些表达式的性质时, 采用了非常类似于傅里叶所采用过的方法。在4.4节, 正是用傅里叶用过的方法, 把这些结果推广到较一般的非周期信号中。虽然变量 S 通常是 $\sigma + j\omega$ 的复数型, 但在整个这一章中, 限定它为纯虚数, 因此, $s = j\omega$ 。因而, 我们考虑的只是 $e^{j\omega t}$ 形式的复指数。在第9章, 当我们研究以傅里叶1807年论文的审查人之一 P.S. 拉普拉斯命名的变换时, 考虑 s 为复数的更一般的情况。

4.2 周期信号的表示法——连续时间傅里叶级数

4.2.1 谐波复指数的线性组合

回顾在第2章中, 如果 T 取某个正的非零值, 则

$$x(t) = x(t+T), \text{ 对所有的 } t \quad (4.9)$$

信号是周期性的。 $x(t)$ 的基本周期 T_0 是满足式(4.9)的 T 的最小非零正值。值 $2\pi/T_0$ 称为基本频率。

第2章还介绍了两个基本周期信号, 正弦信号

$$x(t) = \cos \omega_0 t \quad (4.10)$$

和周期复指数

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (4.11)$$

这两个信号都是周期性的, 具有基本频率 ω_0 与基本周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 。与式(4.11)这个信

号有联系的是有谐波关系的复指数集合

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.12)$$

我们在 2.3 节中讨论过, 这些信号中的每一个的基本频率都有一个为 ω_0 的倍数。因此, 每一个信号都具有周期为 T_0 的周期性 (尽管 $|K| \geq 2$ 时, $\phi_k(t)$ 的基本周期是 T_0 的分数)。因此, 有谐波关系复指数的线性组合也具有周期为 T_0 的周期性, 可表示为:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.13)$$

在式 (4.13) 中, $k=0$ 这一项是直流项, 即常数项。 $k=+1$ 和 $k=-1$ 两项都有等于 T_0 的基本周期, 并且一起称为基波分量, 即一次谐波分量。 $k=+2$ 和 $k=-2$ 两项的周期为基波分量的一半周期 (即等于两倍的基波频率), 称为二次谐波分量。更一般地, $k=+N$ 和 $k=-N$ 的分量称为 N 次谐波分量。

用式 (4.13) 形式表示的周期信号表达式, 称为傅里叶级数表达式。在研究这种表达式性质之前, 先看一个例子。

例 4.1 考虑一个周期信号 $x(t)$, 基频为 2π , 用式 (4.13) 形式表示为

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t} \quad (4.14)$$

式中

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

重写式 (4.14), 把每一对谐波分量写在一起, 就得到

$$\begin{aligned} x(t) = & 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) \\ & + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

利用欧拉公式, 可以把 $x(t)$ 写成

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t \quad (4.16)$$

在图 4.4 中, 我们画出了此例中信号 $x(t)$ 是怎样由其谐波分量组成的。

式 (4.16) 是实周期信号傅里叶级数另一形式的一例。特别是, 例如 $x(t)$ 是实函数并能用式 (4.13) 的形式表示。那么, 由于 $x^*(t) = x(t)$, 因此得到

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

在和式中, 用 $-k$ 代替 k , 同样有

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

与式 (4.13) 比较, 这里必须 $a_k = a_{-k}^*$ 或者等价地

$$a_k^* = a_{-k} \quad (4.17)$$

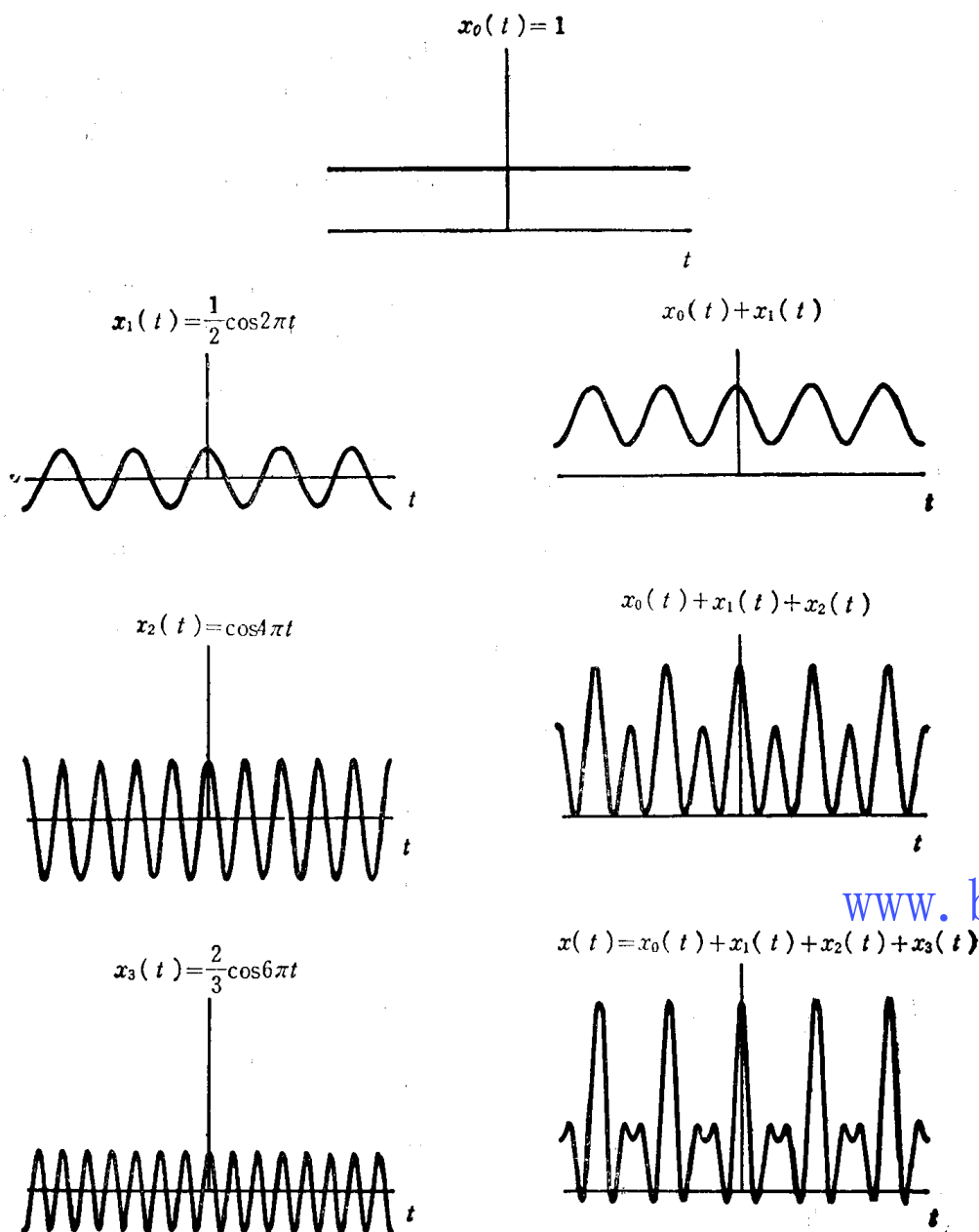


图4.4 例4.1中信号 $x(t)$ 由调和和相关正弦信号线性组合而成的示意图

注意，这是例4.1中的情况，那里 a_k 实际上是实数，且 $a_k = a_{-k}$ 。

为了导出傅里叶级数的其他形式，首先重排式 (4.13) 的和式为

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}]$$

利用式 (4.17)，此式成为

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}]$$

既然和式内的两项是共轭复数，于是可以表达为

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\{a_k e^{jk\omega_0 t}\} \quad (4.18)$$

如果 a_k 用极坐标形式表示^①,

$$a_k = A_k e^{j\theta_k}$$

则式(4.18)成为

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\}$$

即

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (4.19)$$

式(4.19)是连续时间实周期信号的傅里叶级数通常遇到的一种形式。为得到另一形式的表达式,用直角坐标把 a_k 写成

$$a_k = B_k + jC_k$$

式中 B_k 和 C_k 都是实数。利用 a_k 的这个表达式,式(4.18)取以下形式

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t] \quad (4.20)$$

在例4.1中, a_k 都是实数,因此式(4.19)和式(4.20)两种表达式归并成同一形式,即式(4.16)。

这样,我们看到,对于实周期函数,按照式(4.13)所给的复指数傅里叶级数,在数学上等效于用三角函数表达的式(4.19)或(4.20),虽然后两式是傅里叶级数的通用公式^②,但是式(4.13)的复指数形式对我们来说极其方便,因此我们几乎只使用这种形式。

式(4.17)是傅里叶级数和变换所具有的许多性质之一的例子。这些性质在加深理解和进行计算方面常常是很有用的。我们对大多数性质的讨论推迟到4.6节。在那一节,我们在更广的傅里叶变换范围内研究这些性质。不过,这些性质中最重要的一个我们已基本上作了研究。设 $x(t)$ 是由式(4.13)给出的傅里叶级数所表达的周期信号,并假定我们把这个信号作为输入加在具有冲激响应 $h(t)$ 的 LTI 系统上。通常,如果 LTI 系统的输入是具有周期 T 的周期信号,则输出也是具有相同周期的周期信号,根据输入的傅里叶级数系数计算输出的傅里叶级数系数,就能直接证明这一点。利用式(4.13)中每个复指数都是系统的特征函数这一点,由式(4.8)可以推断输出 $y(t)$ 为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (4.21)$$

由式(4.5),上式中特征值 $H(k\omega_0)$ 为^③

$$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \quad (4.22)$$

即,如果 $\{a_k\}$ 是输入 $x(t)$ 的傅里叶级数系数集,那么 $\{a_k H(k\omega_0)\}$ 就是输出 $y(t)$ 的系数集。

例4.2 考虑例4.1讨论过的周期信号 $x(t)$,并设这个信号是具有以下冲激响应的 LTI 系统的输入

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

为了计算输出 $y(t)$,首先计算 $H(k\omega_0)$,

①如果 z 是复数,则它的极坐标形式是 $z = re^{j\theta}$,这里 r 和 θ 是实数。 r 是正的,称为 z 的幅值,通常写作 $|z|$ 。并且 θ 称为 z 的角或相位,用 $\angle z$ 来表示。要更多地了解有关复数极坐标和直角坐标形式的计算,可看第2章后面的习题。

②事实上,傅里叶在原来的著作中,使用式(4.20)给出的傅里叶级数的正弦—余弦形式。

③当 $S = jk\omega_0$ 时,式(4.22)正是式(4.5)的特殊情况。注意,根据式(4.5)的符号,在式(4.22)中应当写成 $H(jk\omega_0)$ 。然而,本章将只涉及 $S = j\omega$ 的值。因此为了简化符号,将省略 j 写成 $H(\omega)$,而不写 $H(j\omega)$ 。

$$\begin{aligned}
 H(k\omega_0) &= \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-jk\omega_0\tau} d\tau \\
 &= -\frac{1}{1+jk\omega_0} e^{-\tau} e^{-jk\omega_0\tau} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{1+jk\omega_0}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

因此, 利用式(4.14)、(4.21)和(4.23)及本例中 $\omega_0=2\pi$, 得到

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} b_k e^{jk2\pi t} \tag{4.24}$$

当 $b_k = a_k H(k2\pi)$,

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 1 \\
 b_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+j2\pi} \right), \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-j2\pi} \right) \\
 b_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j4\pi} \right), \quad b_{-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j4\pi} \right) \\
 b_3 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+j6\pi} \right), \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-j6\pi} \right)
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

注意, $y(t)$ 必须是实函数信号, 因为它是实函数 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积。这可以通过分析式(4.25)和观察 $b_k^* = b_{-k}$ 来检验。因此, $y(t)$ 也可用式(4.19)和(4.20)所给的任一形式来表示:

$$y(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^3 D_k \cos(2\pi kt + \theta_k) \tag{4.26}$$

$$y(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^3 [E_k \cos 2\pi kt - F_k \sin 2\pi kt] \tag{4.27}$$

这里,

$$b_k = D_k e^{j\theta_k} = E_k + jF_k, \quad k=1, 2, 3 \tag{4.28}$$

这些系数可直接由式(4.25)求得。例如

$$D_1 = |b_1| = \frac{1}{4\sqrt{1+4\pi^2}}, \quad \theta_1 = \angle b_1 = -\text{tg}^{-1}(2\pi)$$

$$E_1 = \text{Re}\{b_1\} = \frac{1}{4(1+4\pi^2)}, \quad F_1 = \text{Im}\{b_1\} = -\frac{\pi}{2(1+4\pi^2)}$$

在图4.5中, 画出了 $y(t)$ 和由式(4.26)给出的傅里叶级数表达式中的每一项。把它和图4.4比较, 可以看到, 每一项都是作为 $x(t)$ 对应项相同频率的正弦曲线, 只是幅度和相位不同而已。

4.2.2 周期信号傅里叶级数表达式的确定

假设给定的周期信号能用式(4.13)的级数来表示, 这就必须知道怎样确定系数 a_k 。用 $e^{-jn\omega_0 t}$ 乘式(4.13)的两边, 得到

$$x(t) e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} \tag{4.29}$$

对两边从0到 $T_0=2\pi/\omega_0$ 积分, 得到

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

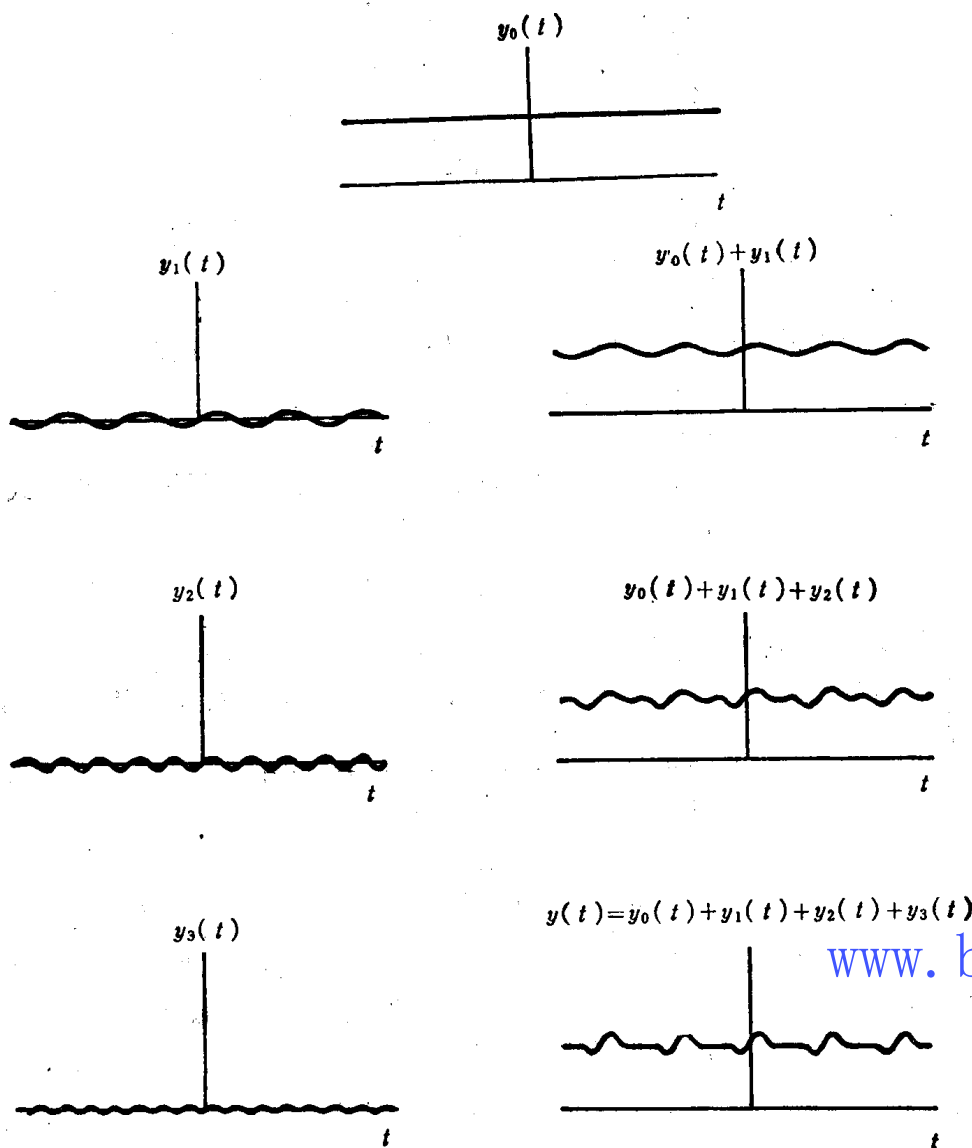


图4.5 例4.2的信号 $y(t)$ ，是由把例4.1中的 $x(t)$ (见图4.4.) 作为具有冲激响应 $h(t)=e^{-t}u(t)$ 的LTI系统的输入而得。参考图4.4， $y_0(t)$ 是 $x_0(t)$ 的响应， $y_1(t)$ 是 $x_1(t)$ 的响应等等。这里 T_0 是 $x(t)$ 的基本周期，因此是在一个周期上积分。互换积分与求和的次序，得到

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right] \quad (4.30)$$

括号里的积分计算是简单的。利用欧拉公式，重写这个积分，得到

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt &= \int_0^{T_0} \cos(k-n)\omega_0 t dt \\ &\quad + j \int_0^{T_0} \sin(k-n)\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (4.31)$$

对 $k \neq n$ 来说， $\cos(k-n)\omega_0 t$ 和 $\sin(k-n)\omega_0 t$ 是具有基本周期 $T_0/|k-n|$ 的周期正弦波。因此，式(4.31)是在一个区间 (T_0 长度) 上积分，这个区间是这些信号周期的整数倍。因为积分可以看作是在一个区间上这些函数曲线下方的整个面积的度量，所以我们看到，对 $k \neq n$ ，式(4.31)右边的两个积分都是0。对于 $k=n$ ，式(4.31)左边被积函数等于1，因此积分为 T_0 。总起来说

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k=n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

从而式(4.30)的右边简化为 $T_0 a_n$ 。因此

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (4.32)$$

这就是为确定系数所需的公式。此外注意,在计算式(4.31)时,用到关于积分区间的唯一事实是:我们是在长度为 T_0 的区间上积分,这个区间是 $\cos(k-n)\omega_0 t$ 和 $\sin(k-n)\omega_0 t$ 周期的整数倍。因此,如果用 \int_{T_0} 表示在长度 T_0 的任何区间上积分,就有

$$\int_{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k=n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

从而,如果在长度为 T_0 的任何区间上对式(4.29)积分,其推导步骤就与我们从式(4.30)到式(4.32)所进行的完全一样。这个结果表示为

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (4.33)$$

总之,如果 $x(t)$ 有傅里叶级数表示式〔即如果它能表示为式(4.13)那种形式的谐波相关复指数的线性组合〕,那么其系数就由式(4.33)给出。这一对方程定义了周期信号的傅里叶级数,重写如下

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}} \quad (4.34)$$

式(4.34)常称为综合方程,而式(4.35)常称分析方程。系数 $\{a_k\}$ 常叫作傅里叶级数系数或 $x(t)$ 的频谱系数,这些复系数可衡量信号 $x(t)$ 的各次谐波成分。系数 a_0 是 $x(t)$ 的直流,即常数分量,由式(4.35)在 $k=0$ 时给出

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (4.36)$$

这仅是 $x(t)$ 在一个周期上的平均值。我们注意到,术语“频谱系数”是从分光镜把光分解成谱线(即分解成不同频率的基本分量)这样的问题中得来的。在这种分解中,任何一条谱线的强度是指在该线对应频率上占有总光能部分的直接量度。

在18世纪中叶,欧拉和拉格朗日都已经知道式(4.34)和(4.35)。然而,他们放弃了这方面的研究,没有检验一下这种形式的表达式实际上能表示多大一类周期信号的问题。下一节我们将转到这个问题,在此之前,先用几个例子来说明傅里叶级数。

例4.3 考虑信号

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

决定此例傅里叶级数系数的方法之一是利用式(4.35)。不过,对这种简单情况,把正弦函数换成复指数的线性组合,并通过观察来辨认傅里叶级数的系数更为容易。明确地说,可以把 $\sin \omega_0 t$ 表示为

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

这样

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_k = 0, \quad k \neq +1 \text{ 或 } -1$$

例4.4

设

$$x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos \left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

和例4.3一样，我们又可以用复指数直接展开 $x(t)$ ，于是

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} [e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}]$$

合并同类项，得到

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{j(\pi/4)}\right) e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)}\right) e^{-j2\omega_0 t}$$

因此，本例中傅里叶级数系数是

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j$$

$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{2} e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j)$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - j)$$

$$a_k = 0, \quad |k| > 2$$

在图4.5中，我们用线条图画出 a_k 的幅度和相位，

www.blogoil.com

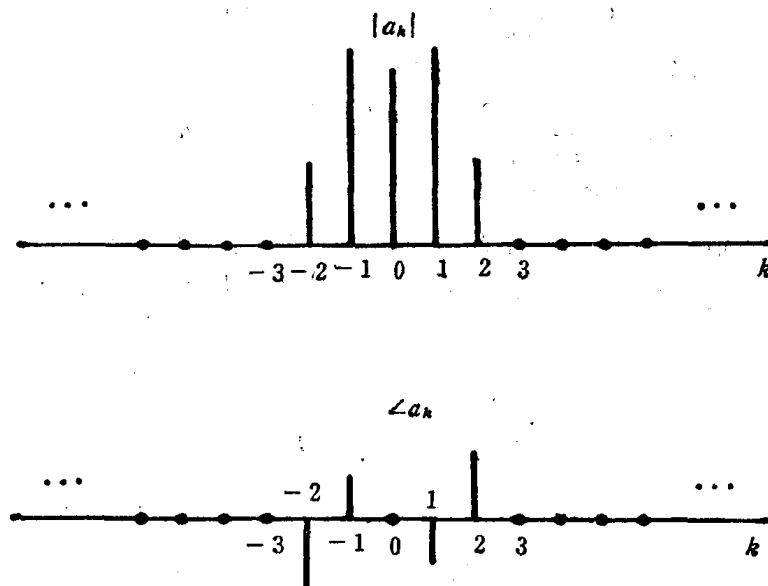


图4.6 例4.4中信号的傅里叶级数系数的幅度和相位图

图中每条线表示 $x(t)$ 相应谐波分量的幅度或者相位。

例4.5 图4.7所示的周期矩形波，在一个周期上定义为

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (4.37)$$

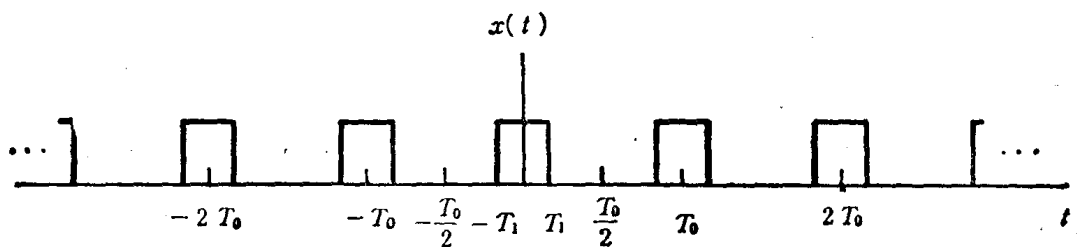


图4.7 周期矩形波

我们将在几种场合遇到这种信号。这是具有基本周期 T_0 和基本频率 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 的周期信号。

为了确定 $x(t)$ 的傅里叶级数系数，我们将利用式 (4.35)。虽然积分在 T_0 长度的任何区间上是同样地正确，因而将得出同样结果，但由于 $x(t)$ 关于 $t=0$ 对称，所以选择在 $-T_0/2 \leq t < T_0/2$ 的区间上积分是最方便的。利用这个积分限，且用式 (4.37) 的 $x(t)$ 代入，首先对 $k=0$ 就有

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T_0} \quad (4.38)$$

如前所述， a_0 是 $x(t)$ 的平均值，在现在的情况下，它等于 $x(t)=1$ 期间占每个周期的百分比。对于 $k \neq 0$ 得到

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

我们可以重写此式为

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T_0} \left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] \quad (4.39)$$

注意括号里的项是 $\sin k\omega_0 T_1$ ，系数 a_k 可表示为

$$a_k = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}, \quad k \neq 0 \quad (4.40)$$

这里我们利用了 $\omega_0 T_0 = 2\pi$ 的关系。

本例把 T_1 为固定值和 T_0 的几个不同值的傅里叶级数系数的图形表示于图4.8中。对于 $T_0 = 4T_1$ ， $x(t)$ 是对称矩形波（即半个周期是1，半个周期是零）。在这种情况下， $\omega_0 T_1 = \pi/2$ ，从式(4.40)得

$$a_k = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k\pi} \quad (k \neq 0) \quad (4.41)$$

而从式(4.38)得

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

由式(4.41)，很清楚， k 为偶数， $a_k = 0$ 。并且对相继的 k 的奇数值， $\sin(\pi k/2)$ 在 ± 1 间交变。因此，

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi}$$

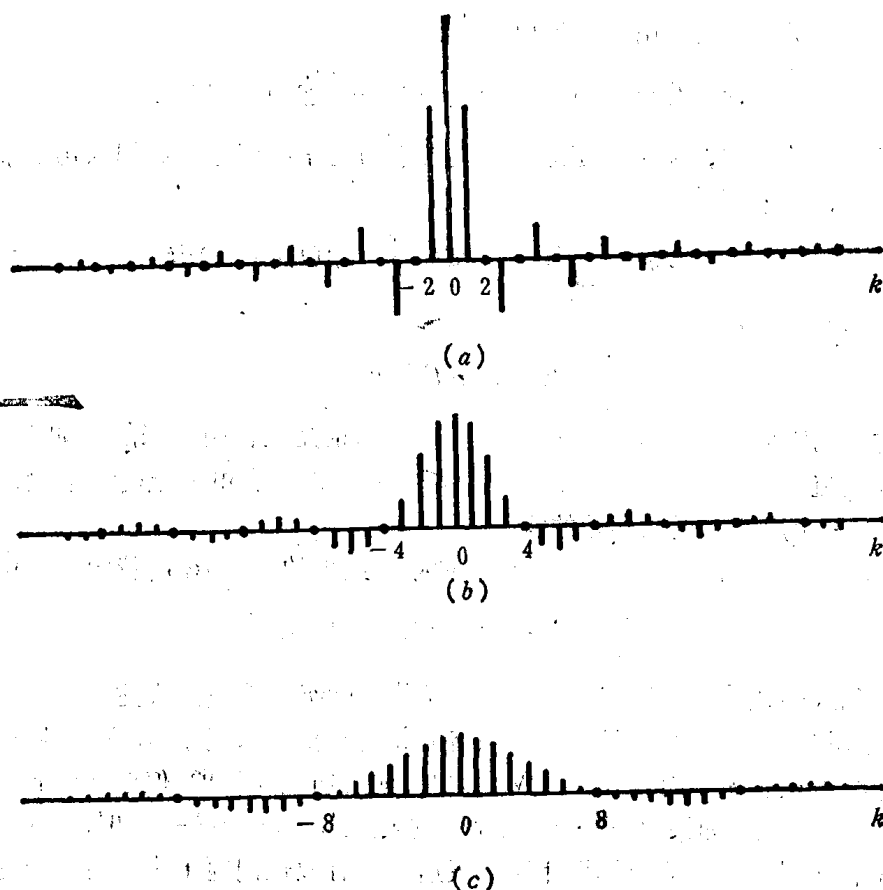


图4.8 周期矩形波的傅里叶级数系数: (a) $T_0=4T_1$; (b) $T_0=8T_1$; (c) $T_0=16T_1$

$$a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$a_5 = a_{-5} = \frac{1}{5\pi}$$

...

在这个特例中, 傅里叶级数系数是实数, 因此它们可以只用一张图表示。当然, 傅里叶级数系数一般是复数, 因此每个系数用两张图表示, 分别对应实部和虚部, 或者幅度和相位。

4.3 用傅里叶级数近似周期信号、傅里叶级数的收敛

虽然欧拉和拉格朗日那时已对例 4.3 和例 4.4 的结果感到满意, 但是他们会因 $x(t)$ 是不连续而每个谐波分量是连续的而反对例 4.5。相反, 傅里叶考虑了同一例子, 却坚持矩形波的傅里叶级数表达式是有效的。傅里叶实际上主张任何周期信号都可用傅里叶级数表示。虽然这不完全正确, 但傅里叶级数确能用来表示绝大多数周期信号, 包括矩形波和本书中将涉及的所有其他信号。

为取得对矩形波例子的理解, 以及更一般的对傅里叶级数表达式有效性问题的理解, 我们首先考虑这样的问题: 用有限个有谐波关系复指数的线性组合, 即通过级数的有限项和形式来近似给定的周期信号 $x(t)$

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.42)$$

设 $e_N(t)$ 表示近似误差, 误差由下式给出

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.43)$$

为了决定近似性能的优劣, 需要规定近似误差大小的定量的度量。我们采用的准则是在一个周期上总的平方误差幅度

$$E_N = \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \int_{T_0} e_N(t) e_N^*(t) dt \quad (4.44)$$

一般, 对任何信号 $z(t)$,

$$E = \int_a^b |z(t)|^2 dt$$

常称 E 为在时间间隔 $a \leq t \leq b$ 上 $z(t)$ 的能量。这个术语是这样引出来的: 如果 $z(t)$ 对应流经 1Ω 电阻的电流, 那么 E 就是在时间间隔 $a \leq t \leq b$ 上消耗在电阻上的总能量, 就式(4.44)而论, E_N 表示一个周期上近似误差的能量。

如习题4.8所示, 在式(4.42)中, 使误差能量减至最小的系数 a_k 的特定选择由下式给出:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.45)$$

比较式(4.45)和式(4.35), 可见式(4.45)和确定傅里叶级数系数的表达式是相同的。因而, 如果 $x(t)$ 有傅里叶级数表达式, 只用有限项谐波相关复指数来表示 $x(t)$ 时, 则最佳近似可通过截取傅里叶级数至所需项而获得。当 N 增大时, 就要加上新的项, 但前面的各项保持不变, 于是, E_N 减小。事实上, 如果 $x(t)$ 有傅里叶级数表达式, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, E_N 的极限为零。

现在让我们转到对周期信号傅里叶级数表达式的有效性问题上来。对任何这样的信号, 我们可以利用式(4.35)设法得到一系列傅里叶系数。然而, 在某些情况下, 式(4.35)的积分可能发散, 即对某个 a_k 所得的值可能是无穷大。此外, 即使从式(4.35)得到的所有系数都是有限的, 当这些系数代入综合方程(4.34)时, 所得的无穷级数也可能不收敛到原始信号 $x(t)$ 。

然而正巧, 如果 $x(t)$ 是连续的, 就不会发生收敛困难。即每个连续周期信号都有傅里叶级数表达式, 因而当 N 趋向 ∞ 时, 近似误差的能量 E_N 趋近于 0。这一点对许多不连续信号也是正确的。我们将发现, 不连续信号如例4.5的矩形波是很有用的, 所以有必要稍详细地研究收敛性问题。为了保证周期信号能用傅里叶级数表示, 信号要满足两个稍微不同的条件。在讨论这些问题时, 我们打算提供全部数学论证, 更严格地处理在有关傅里叶分析的教科书里可以找到^①。

能用傅里叶级数表达的一类周期信号是包括在一个周期上平方可积的信号, 即这类信号中的任何信号 $x(t)$ 在单个周期上具有有限的能量

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (4.46)$$

当满足这个条件时, 可保证从式(4.35)得到的系数 a_k 是有限的。此外, 设 $x_N(t)$ 是 $|k| \leq N$ 时利用这些系数得到的 $x(t)$ 的近似值,

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.47)$$

^①例如看 R.V.Churchill, Fourier Series and Boundary Value Problems, 2nd ed. (New York: McGraw-Hill Book Company, 1963); W.Kaplan, Operational Methods for Linear Systems (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1962); 并参看本书 P.124 上介绍的 Dym 和 McKean 的书。

则可保证 $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$ (E_N 由式(4.44)所定义), 即如果定义

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.48)$$

则

$$\int_{T_0} |e(t)|^2 dt = 0 \quad (4.49)$$

我们将在本节之末的例子中看到, 式(4.49)并不表示信号 $x(t)$ 与其傅里叶级数表达式

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.50)$$

在每个 t 值上是相等的, 它仅表示两者没有能量上的差别。

当 $x(t)$ 是平方可积时, 这种收敛性得以保证通常是有用的。事实上, 我们所考虑的多数周期信号在一个周期上确有有限的能量, 从而确有傅里叶级数表达式。然而, 由狄利克雷研究的另外一系列条件, 基本上所有我们将涉及的信号也能满足, 除了 $x(t)$ 是不连续处的孤立 t 值时以外, 可保证 $x(t)$ 实际上等于 $\underline{x}(t)$ 。在不连续的 t 值上, 式(4.50)的无穷级数收敛于不连续点的“平均”值(即不连续点两侧值的一半)。

狄利克雷条件如下:

条件 1 在任何周期上 $x(t)$ 必须绝对可积, 即

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (4.51)$$

与平方可积性一样, 这可保证每个系数 a_k 将是有限的, 因为

$$|a_k| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t) e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt$$

如果

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

则

$$|a_k| < \infty$$

违背狄利克雷第一个条件的周期信号是

$$x(t) = \frac{1}{t} \quad (0 < t \leq 1)$$

这里 $x(t)$ 是具有周期为 1 的周期信号。这个信号在图 4.9(a) 示出。

条件 2 在任何有限的时间间隔, $x(t)$ 的变化是有界的, 即在任何一个信号单周期里, 最大值和最小值的数目为有限个。

满足条件 1 但不满足条件 2 的时间函数的例子是:

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad (0 < t \leq 1) \quad (4.52)$$

如图 4.9(b) 所示。这个函数(周期 $T_0=1$) 满足

$$\int_0^1 |x(t)| dt < 1$$

然而, 在这个区间里, 它有无限个最大和最小值。

条件 3 在任何有限的时间间隔里, 只有有限个不连续点, 而且每个不连续点的值必须是有限的。

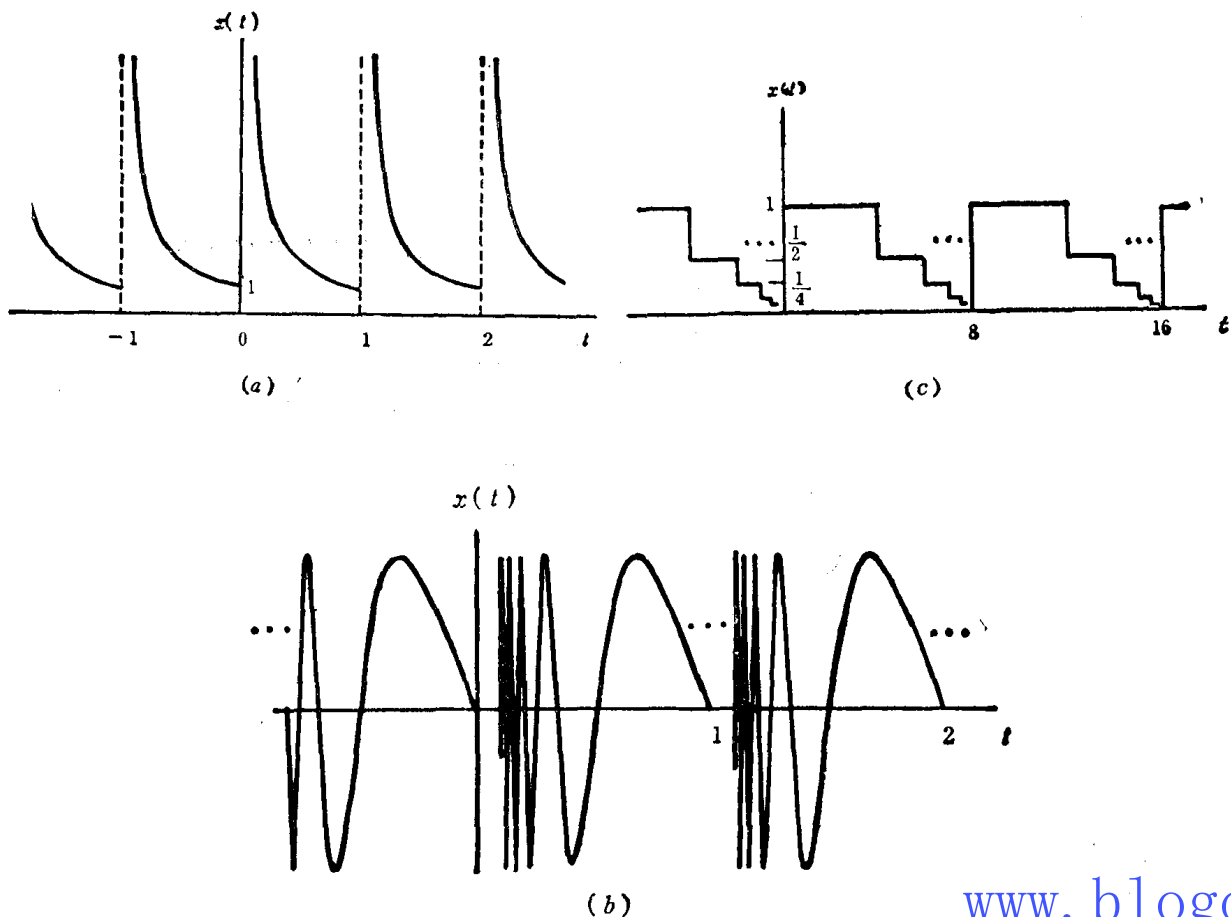


图4.9 违背狄利克雷条件的信号:

(a) 信号 $x(t)$, 周期为 1, 对于 $0 < t \leq 1$, $x(t) = \frac{1}{t}$ (这个信号违背了狄利克雷第一个条件);
 (b) 式 (4.52) 的周期信号, 违背狄利克雷第二个条件; (c) 周期为 8 的周期信号, 违背狄利克雷第三个条件 [对 $0 \leq t < 8$, 当 t 到 8 的间隔每减少 $\frac{1}{2}$ 时, $x(t)$ 的值降低 $\frac{1}{2}$; 即 $0 \leq t < 4$, $x(t) = 1$; $4 \leq t < 6$, $x(t) = \frac{1}{2}$; $6 \leq t < 7$, $x(t) = \frac{1}{4}$; $7 \leq t < 7.5$, $x(t) = \frac{1}{8}$, 等等]

违背条件 3 的时间函数的例子在图 4.9 (c) 中示出。信号 $x(t)$ (周期 $T = 8$) 是由无穷多段组成, 每一段的高和宽都是前一段的一半, 这样, 函数在一个周期下的面积显然小于 8。然而, 它有无无穷个值为有限的不连续点, 因而违背了条件 3。

从图 4.9 所给的例子中可以看到, 不满足狄利克雷条件的信号实际上一一般是病态的, 因此这种信号在信号与系统研究中不是特别重要的。由于这一原因, 傅里叶级数收敛的问题在本书其余部分不起特别显著的作用。对于连续变化的周期信号, 我们知道其傅里叶级数表达式收敛并与原信号在每一个 t 值上相等。对于不连续的周期信号, 傅里叶级数的表达式除了在不连续的孤立点之外, 都等于原信号, 在这些不连续点上, 级数收敛于不连续点两侧信号的平均值。在这种情况下, 原信号及其傅里叶级数表达式的差不包含能量, 因此, 可以认为两种信号对所有实际用途来说是相同的。特别是, 因为信号只在孤立点不同, 所以两个信号在任何区间上的积分是相同的。由于这个原因, 两个信号在卷积下具有相同的性质, 从而由 LTI 系统分析的观点来看它们是相同的。

这样，具有几个不连续点的周期信号的傅里叶级数，确实提供了原信号有用的表达式。为了明确傅里叶级数对这样的信号如何收敛，我们回到矩形波的例子。

例4.6① 1898年，美国物理学家阿伯特·米切尔森制造了谐波分析器，这种装置对任何周期信号 $x(t)$ 可计算式 (4.47) 的截断傅里叶级数近似值， N 值可一直取到80。米切尔森用许多函数试验了这个装置，期望得到 $x_N(t)$ 与 $x(t)$ 非常接近的结果。然而，当他尝试矩形波时，得到了一个使他非常惊奇的重要结果。米切尔森很重视观察到的情况，认为也许装置有缺陷。他就这个问题写信给著名的数学物理学家吉布斯，吉布斯研究这个问题并于1899年报告了他的见解。

米切尔森所观察到的图形如图4.10所示。

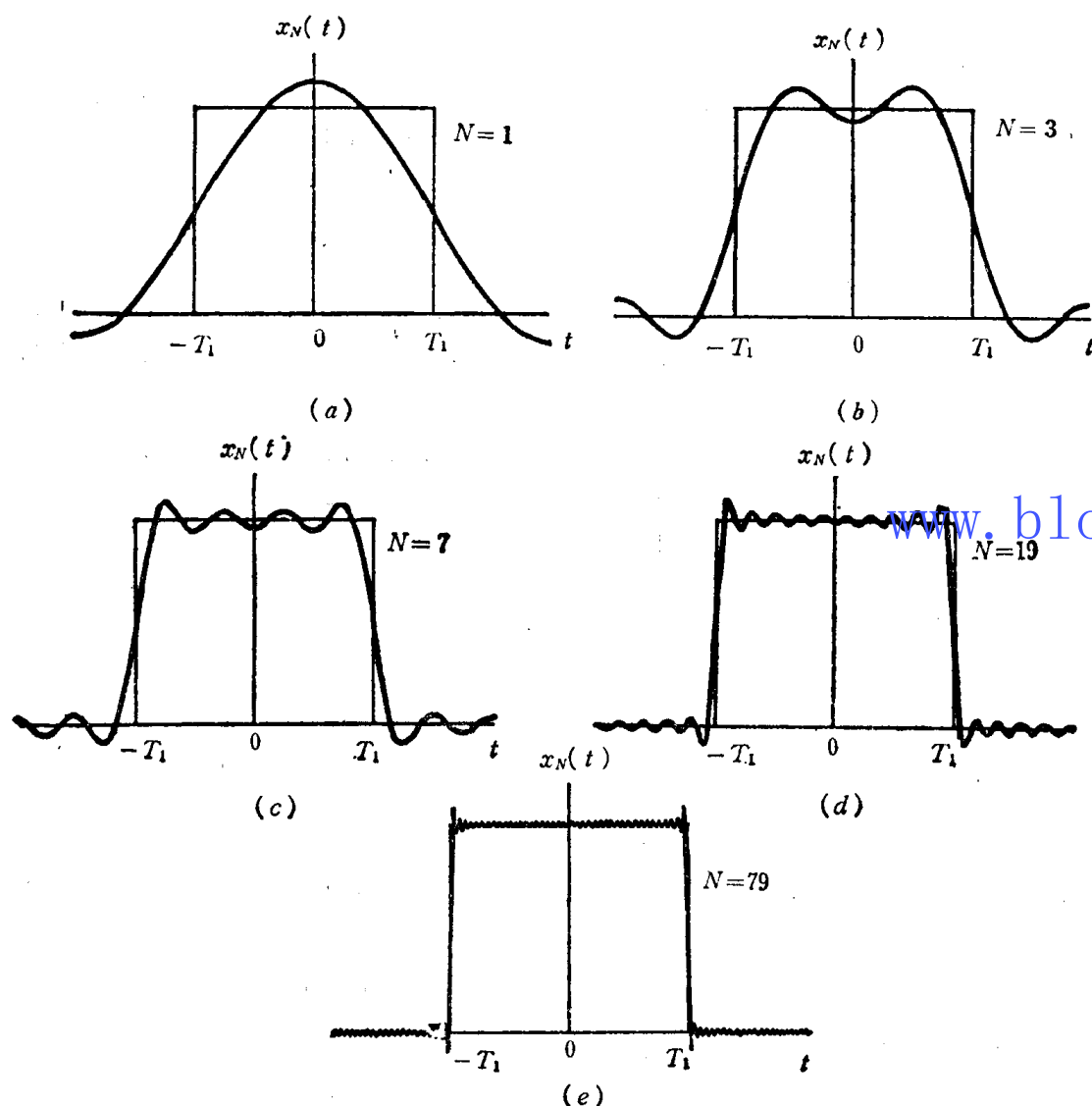


图4.10 矩形波的傅里叶级数表达式的收敛性：吉布斯现象的说明。这里画出了对于几个 N 值的

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \text{ 的有限级数近似值}$$

①本例所用历史资料取自 Lanczos 的书，见本书 P.124。

这里我们显示了对称矩形波 ($T_0=4T_1$) $x(t)$ 选取几个不同 N 值时的 $x_N(t)$ 。在每种情况中, 部分和都是在原来矩形波上的迭加。因为矩形波满足狄利克雷的条件, 所以当 $N \rightarrow \infty$ 时, $x_N(t)$ 在不连续点的极限应是不连续点的平均值。这与我们在图 4.10 上看到的实际情况相符, 对于任何 N , 在不连续点上 $x_N(t)$ 确实是该点的平均值。此外, 对任何其他的 t 值, 比如说 $t=t_1$, 可以保证

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t_1) = x(t_1)$$

因此, 如式(4.49)一样, 矩形波傅里叶级数表达式的平方误差面积也为零。

对这个例子, 米切尔森观察到感兴趣的结果是级数的部分和在接近不连续点附近显示了脉动波形, 这些脉动的峰值似乎并不随着 N 增大而减小。吉布斯证明了确是这一情况, 对于单位高度的不连续点, 无论 N 变得多大, 部分和的最大值为 1.09 (即不连续点有高度 9% 的过冲)。必须仔细正确地解释这一点, 如前所述, 对于任何固定的 t 值, 比如说 $t=t_1$, 部分和将收敛到精确值, 在不连续点, 将收敛到不连续点两侧信号值和的一半。然而, 越把 t_1 选得接近不连续点, 为了使误差低于规定值, 则 N 必须越大。于是, 随着 N 增加, 部分和中的脉动朝着不连续点压缩, 但是对于任何有限的 N 值, 脉动的峰值保持恒定。这个性质称为吉布斯现象。这个现象的含意是, 不连续信号 $x(t)$ 的截断傅里叶级数近似值 $x_N(t)$ 在不连续点附近一般将显示高频脉动和过冲。如果把这样一种近似用于实际中, 应当选择足够大的 N 值, 以保证这些脉动的总能量微小, 可忽略不计。当然, 我们知道, 在 N 取极限的情况下, 近似误差的能量消失, 而且, 象矩形波那样的不连续信号的傅里叶级数表达式是收敛的。

4.4 非周期信号的表示法: 连续时间傅里叶变换

www.blogoil.com

4.4.1 非周期信号傅里叶变换表达式的研究

在前两节中, 我们看到周期信号怎样表示为有谐波关系的复指数的线性组合。实际上, 这些结果可以推广到把非周期信号表示为复指数的线性组合的研究上去。这个表达式的引入是傅里叶最重要的贡献之一。我们对傅里叶变换的研究, 是严格地按照傅里叶在原著中所使用的方法。

再考虑一下例 4.5 中讨论过的周期矩形波, 傅里叶级数的系数由式(4.40)给出为

$$a_k = \frac{2 \sin k \omega_0 T_1}{k \omega_0 T_0} \quad (4.53)$$

式中 T_0 是周期, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 。在图 4.8 中, 画出了对于固定的 T_1 值和几个选定的 T_0 值的傅里叶级数系数。在图 4.11 中, 重画了这张图, 并作了几处修改。具体说, 我们画的是 $T_0 a_k$ 而不是 a_k , 我们还修改了每一张图中水平间隔。通过分析式(4.53), 可以看出这些修改的重要性。用 T_0 乘以 a_k , 得到

$$T_0 a_k = \frac{2 \sin k \omega_0 T_1}{k \omega_0} = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} \Big|_{\omega = k \omega_0} \quad (4.54)$$

这样, 当 ω 被看作是连续变量时, 函数 $\frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$ 代表 $T_0 a_k$ 的包络, 这些系数不过是这个包络的等间隔抽样。对于固定的 T_1 , $T_0 a_k$ 的包络与 T_0 是无关的。然而, 从图 4.11 可见, 随着 T_0 增加 (即 ω_0 等价地减少), 包络被越来越密的间隔抽样。当 T_0 变得任意大时, 原来的周期矩形波趋向于一个矩形脉冲 (即所有在时域中留下来的是一个非周期信号, 相当于周期矩形波的一个周期)。同时, 乘以 T_0 的傅里叶级数系数成为越来越密的包络间隔抽样。因

此在某种意义上（我们不久将规定），当 $T_0 \rightarrow \infty$ ，傅里叶级数系数集趋向于包络函数。

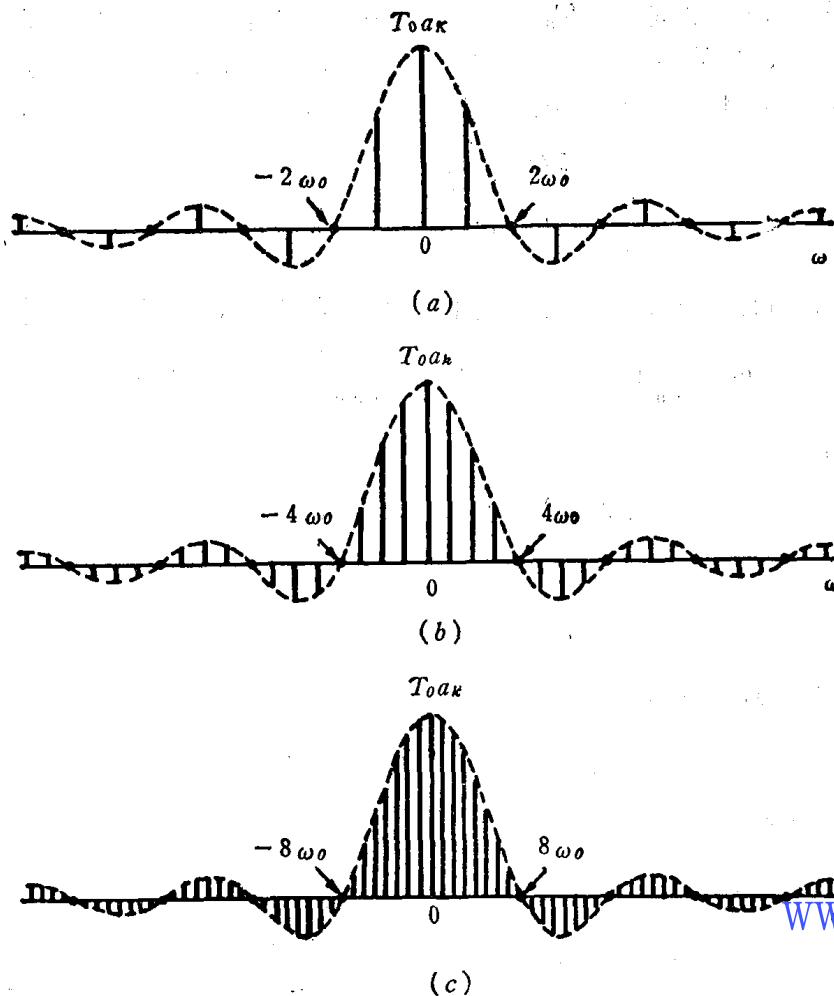


图4.11 周期矩形波的傅里叶系数和包络：(a) $T_0 = 4T_1$ ；(b) $T_0 = 8T_1$ ；(c) $T_0 = 16T_1$

这个例子描述了傅里叶对非周期信号表达式研究的基本概念。明确地说，我们把非周期信号看作是周期信号的周期变为任意大时的极限，同时分析了对这个信号的傅里叶级数表达式的极限状况。下面考虑一个具有有限时宽的一般的非周期信号 $x(t)$ ，即对某个 T_1 ，如果 $|t| > T_1$ ， $x(t) = 0$ 。这样的信号如图4.12(a)所示。由这个非周期信号，可以构成一个周期

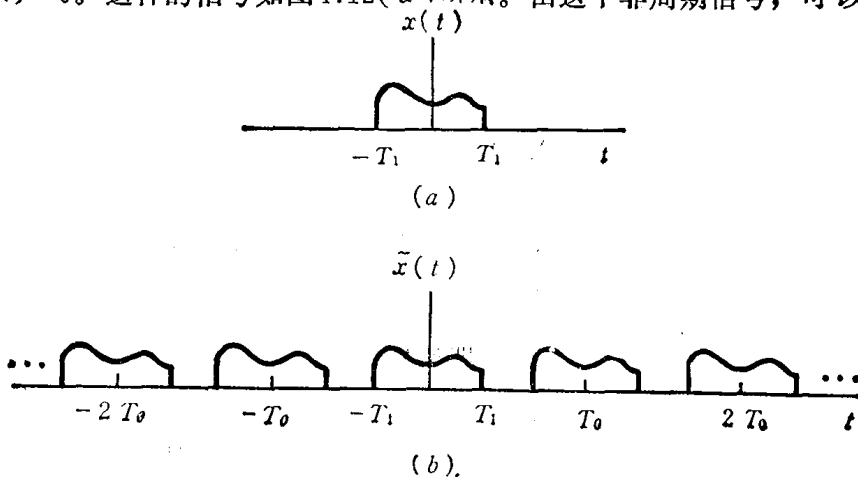


图4.12 (a) 非周期信号 $x(t)$ ；(b) 以 $x(t)$ 为一个周期构成的周期信号 $\tilde{x}(t)$

信号 $\tilde{x}(t)$, 如图4.12 (b) 所示, $x(t)$ 是 $\tilde{x}(t)$ 的一个周期。当我们选择较大的 T_0 时, $\tilde{x}(t)$ 在一个较长间隔上与 $x(t)$ 相同。当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, 对任何有限的 t 值, $\tilde{x}(t)$ 与 $x(t)$ 相等。

现在, 分析一下这对 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数表达式的作用。为了方便起见, 这里重写式(4.34)和(4.35), 当式(4.35)中的积分是在 $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$ 的区间上进行时, 就有

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.55)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.56)$$

因为 $|t| < T_0/2$ 时, $\tilde{x}(t) = x(t)$, 又因在这个区间之外 $x(t) = 0$, 所以式(4.56)可重写成,

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

因此, 定义 $T_0 a_k$ 的包络 $X(\omega)$ 为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.57)$$

系数 a_k 可表示为

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \quad (4.58)$$

联立式(4.58)和(4.55), $\tilde{x}(t)$ 可用 $X(\omega)$ 表达为:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

因为 $2\pi/T_0 = \omega_0$, 等价地

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (4.59)$$

当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{x}(t)$ 接近于 $x(t)$, 因此式(4.59)成了 $x(t)$ 的表达式, 而且当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, $\omega_0 \rightarrow 0$, 式(4.59)的右边转为积分。这可由式(4.59)的图解(见图4.13)看出。式(4.59)右边和式的每一项是以 $X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$ 为高、以 ω_0 为宽的矩形的面积(这里 t 被认为是固定的)。当 $\omega_0 \rightarrow 0$ 时, 根据定义, 式(4.59)的和式收敛于 $X(\omega) e^{j\omega t}$ 的积分。由于 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$, 因此式(4.59)和式(4.57)成为:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega} \quad (4.60)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.61)$$

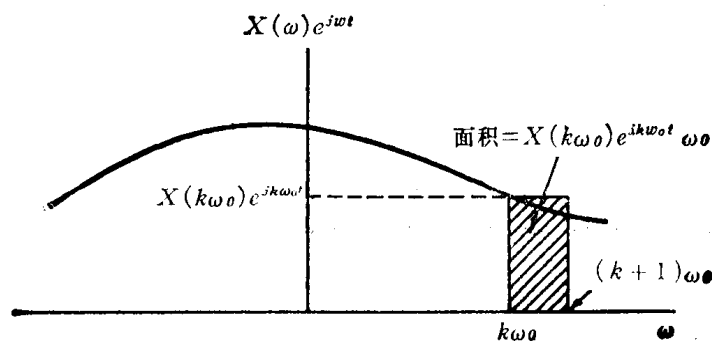


图4.13 式(4.59)的图解

式(4.60)和(4.61)称为傅里叶变换对，式(4.61)给出的函数 $X(\omega)$ 称为 $x(t)$ 的傅里叶变换或傅里叶积分，而式(4.60)称为傅里叶逆变换方程。综合方程(4.60)对非周期信号的作用类似于式(4.34)对周期信号的作用，因为两者都相当于把信号分解成复指数的线性组合。对于周期信号，这些复指数具有式(4.35)给出的振幅 $\{a_k\}$ ，并出现在一系列离散的有谐波关系的频率 $k\omega_0$ 处， $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，对于非周期信号，这些复指数出现在连续频率域，根据综合方程(4.60)，复指数的“振幅”为 $X(\omega)(d\omega/2\pi)$ 。与周期信号傅里叶级数中所用的术语类似，非周期信号 $x(t)$ 的变换 $X(\omega)$ 通常也称作 $x(t)$ 的频谱，因为它提供有关 $x(t)$ 是怎样由不同频率的正弦信号组成的信息。

4.4.2 傅里叶变换的收敛

虽然我们在导出傅里叶变换对时所用的论证中，假设 $x(t)$ 是任意且有限时宽的，但是式(4.60)和(4.61)对极广泛的一类无限时宽信号还是有效的。实际上，傅里叶变换推导中所提出的，像傅里叶级数收敛所需要的同样的一组条件，在这里也适用。可以证明，情况确实如此^①。明确地说，考虑 $X(\omega)$ 按照式(4.61)求得，并设 $\hat{x}(t)$ 是指在式(4.60)右边应用 $X(\omega)$ 而获得的信号，即

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

需要知道的是，式(4.60)何时有效〔即 $\hat{x}(t)$ 何时为原信号 $x(t)$ 的有效表示〕。如果 $x(t)$ 平方可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (4.62)$$

那么就保证 $X(\omega)$ 是有限的〔即式(4.61)收敛〕，而且 $e(t)$ 代表 $\hat{x}(t)$ 和 $x(t)$ 之间的误差〔即 $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ 〕，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt = 0 \quad (4.63)$$

式(4.62)和(4.63)是关于周期信号的式(4.46)和(4.49)对应的非周期信号的公式。这样，就象周期信号一样，如果 $x(t)$ 平方可积，则虽然 $x(t)$ 及其傅里叶表达式 $\hat{x}(t)$ 在 t 的个别值上可能有明显不同，但是它们没有能量的差异。

与周期信号的情况一样，非周期信号有另外一系列的条件足以保证 $\hat{x}(t)$ 对任何 t ，除不连续点之外，都等于 $x(t)$ ，而在不连续点等于该点的平均值。这些条件也称为狄利克雷条件，它们要求：

1. $x(t)$ 是绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.64)$$

2. $x(t)$ 在任何有限区间内有有限个最大值和最小值。

3. $x(t)$ 在任何有限区间内有有限个不连续点。而且，每个不连续点的值必须是有限的。因此，连续的或有几个不连续点的绝对可积信号具有傅里叶变换。

虽然给出的两组可供选择的条件足以保证信号有傅里叶变换，但在下一节我们将看到，在一个无限的区间上既不是绝对可积也不是平方可积的周期信号，如果在变换中允许冲激函

^①傅里叶变换及其性质与应用的严格数学讨论，见R. Bracewell, The Fourier Transform and Its Applications (New York: McGraw-Hill Book Company, 1965); A. Papoulis, The Fourier Integral and Its Applications (New York: McGraw-Hill Book Company, 1962); E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals (Oxford: Clarendon Press, 1948); 并参看 P. 124 Dym 和 McKean 写的书。

数存在, 可以认为这些周期信号有傅里叶变换。这样做的优点是傅里叶级数和傅里叶变换可以在通用的格式下结合起来, 我们将发现这在以后的几章里是非常方便的。在下一节进一步验证这一点以前, 先考虑傅里叶变换的几个例子。

4.4.3 连续时间傅里叶变换的例子

例4.7 考虑信号

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

如果 $a < 0$, 则 $x(t)$ 不是绝对可积的, 因此 $X(\omega)$ 不存在; 对 $a > 0$, $X(\omega)$ 由式(4.61)得

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

即

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \quad (a > 0)$$

因为这个特定的傅里叶变换有实部、虚部两部分, 所以为了把 $X(\omega)$ 画成 ω 的函数, 我们用它的幅度和相位来表示:

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\angle X(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

图4.14 分别画出了这两个部分。注意, 如果 a 是复数而不是实数, 只要 $\operatorname{Re}\{a\} > 0$, 则

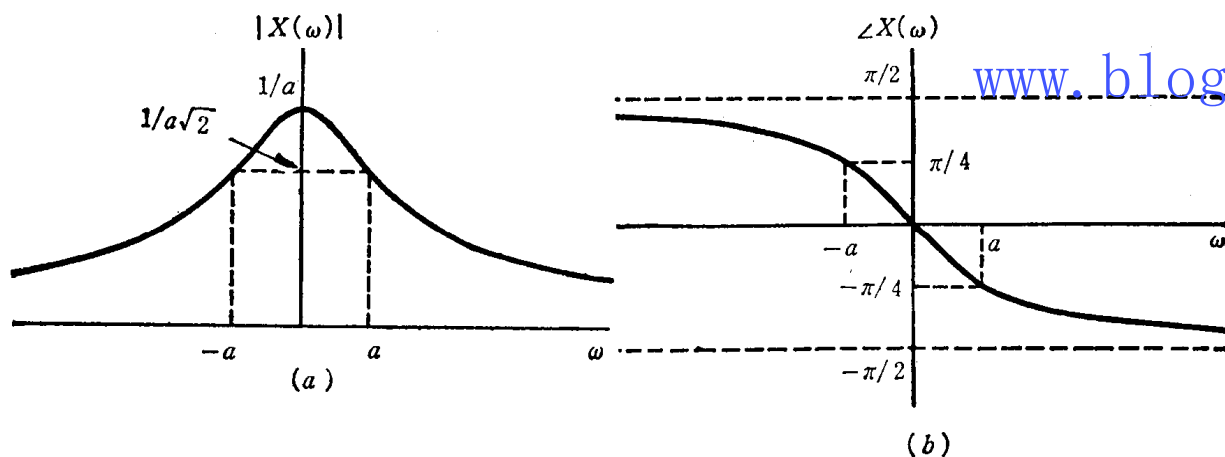


图4.14 例4.7中所考虑的信号 $x(t) = e^{-at}u(t)$, 在 $a > 0$ 时的傅里叶变换

$x(t)$ 是绝对可积的, 在这种情况下, 上述计算对 $X(\omega)$ 得出相同的形式, 即

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$(\operatorname{Re}\{a\} > 0)$$

例4.8 设

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

式中 $a > 0$ 。在图4.15画出这个信号。它的频谱是

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \\
 &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

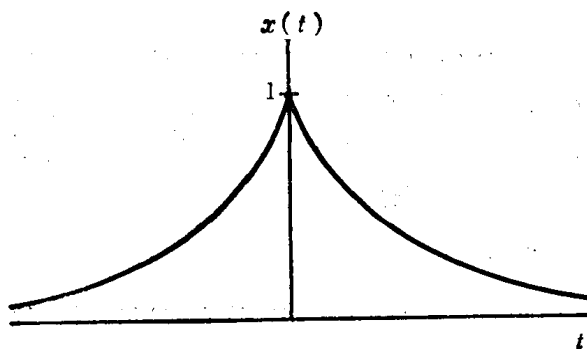


图4.15 例4.8的信号 $x(t)=e^{-a|t|}$

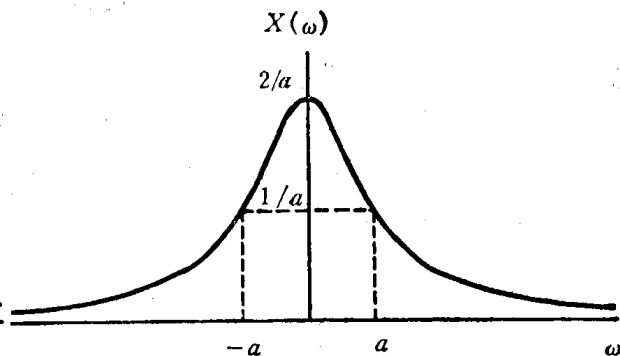


图4.16 例4.8中所考虑并在图4.15中画出的信号的傅里叶变换

在这种情况下, $X(\omega)$ 是实函数, 并作于图4.16。

例4.9 现在让我们确定以下单位冲激的频谱

$$x(t) = \delta(t) \quad (4.65)$$

代入式(4.61), 可看到

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (4.66)$$

即单位冲激具有在所有的频率上由相同成分组成的傅里叶变换表达式。

例4.10 考虑矩形脉冲信号

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad (4.67)$$

如图4.17(a)所示。应用式(4.61), 求出这个信号的傅里叶变换是

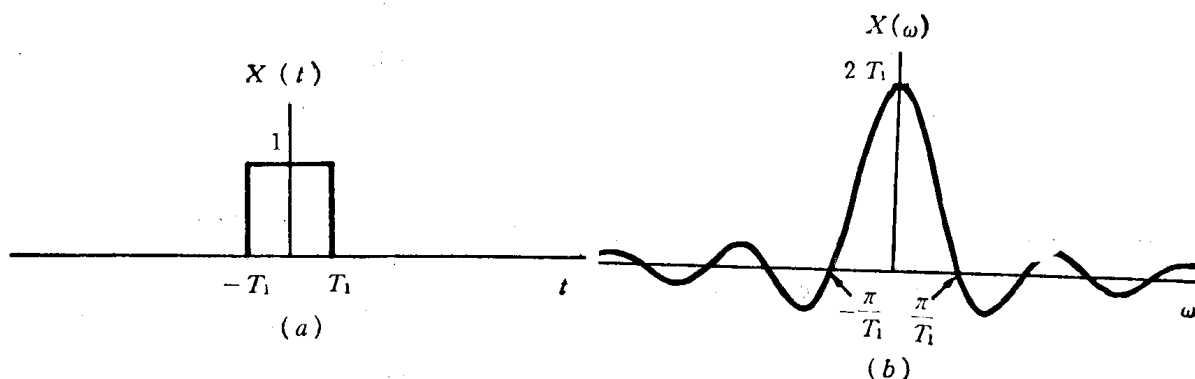


图4.17 例4.9的矩形脉冲信号及其傅里叶变换

$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} \quad (4.68)$$

如图4.16(b)所示。

正如本节开头所讨论的, 式(4.67)给出的信号, 可认为是周期变得任意大时周期矩形波

的极限形式, 因而可认为这种信号综合方程的收敛性类似于矩形波(见例4.6)中观察到的方式。事实上也是如此。尤其是考虑下面矩形脉冲信号的傅里叶逆变换表达式:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

因为 $x(t)$ 平方可积, 所以可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt = 0$$

而且, 由于 $x(t)$ 满足狄利克雷条件, 可知除了不连续点 $t = \pm T_1$ 外, $\hat{x}(t) = x(t)$, 在不连续点, $\hat{x}(t)$ 收敛于 $1/2$, 此值是不连续点两侧 $x(t)$ 的平均值。此外, $\hat{x}(t)$ 收敛于 $x(t)$ 的过程中显示了很像图4.10中所示周期矩形波的吉布斯现象。明确地说, 类似于傅里叶级数有限项和的近似式(4.42), 在有限长度的频率间隔上考虑以下的积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

当 $W \rightarrow \infty$ 时, 这个信号除了在不连续点之外处处都收敛于 $x(t)$, 而在不连续点附近显示了脉动的特性。这些脉动的峰值不随 W 增加而减小, 不过脉动确实朝不连续点压缩, 并且脉动的能量收敛于零。

例4.11 考虑信号 $x(t)$, 它的傅里叶变换由下式给出

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad (4.69)$$

这个变换如图4.18(b)所示。利用综合方程(4.60), 我们能够确定

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad (4.70)$$

如图4.18(a)所描绘。

www.blogoil.com

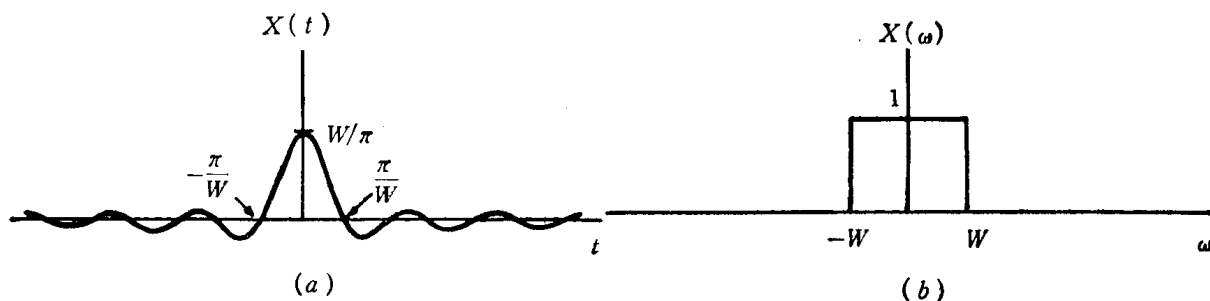


图4.18 例4.11的傅里叶变换对

比较图4.17和图4.18, 或等价地比较式(4.67)、(4.68)与式(4.69)、(4.70), 我们看到一个感兴趣的关系。在每种情况中, 傅里叶变换对都由 $(\sin x)/x$ 函数和矩形脉冲组成。然而, 在例4.10中, 信号 $x(t)$ 是脉冲; 而在例4.11中, 变换 $X(\omega)$ 是脉冲。这里出现的特定的关系是傅里叶变换对偶性质的直接结果。在4.6.6节将详细讨论。

式(4.68)和(4.70)所给的函数和其他与此类似的一般形式的函数, 在傅里叶分析和 LTI 系统的研究中起着非常重要的作用。由于这个原因, 已经给这种函数一个专门名称, 叫 sinc 函数 (抽样函数), 定义为

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (4.71)$$

如图4.19所绘。式(4.68)和(4.70)的信号都能用 sinc 函数表达:

$$\frac{2\sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T_1}{\pi} \right)$$

$$\frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{Wt}{\pi} \right)$$

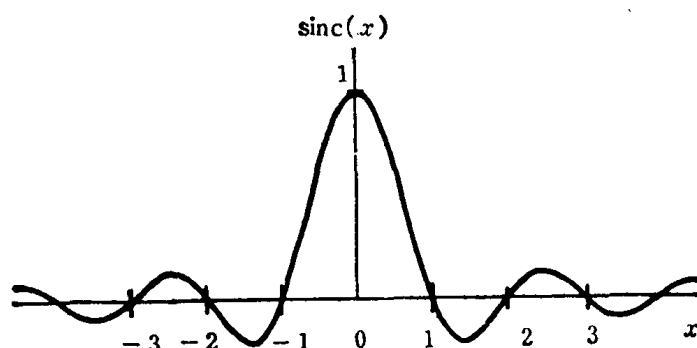


图4.19 sinc (抽样) 函数

最后需指出, 通过分析图4.18 (对几个不同的 W 值, 重新画于图4.20), 我们可从中得

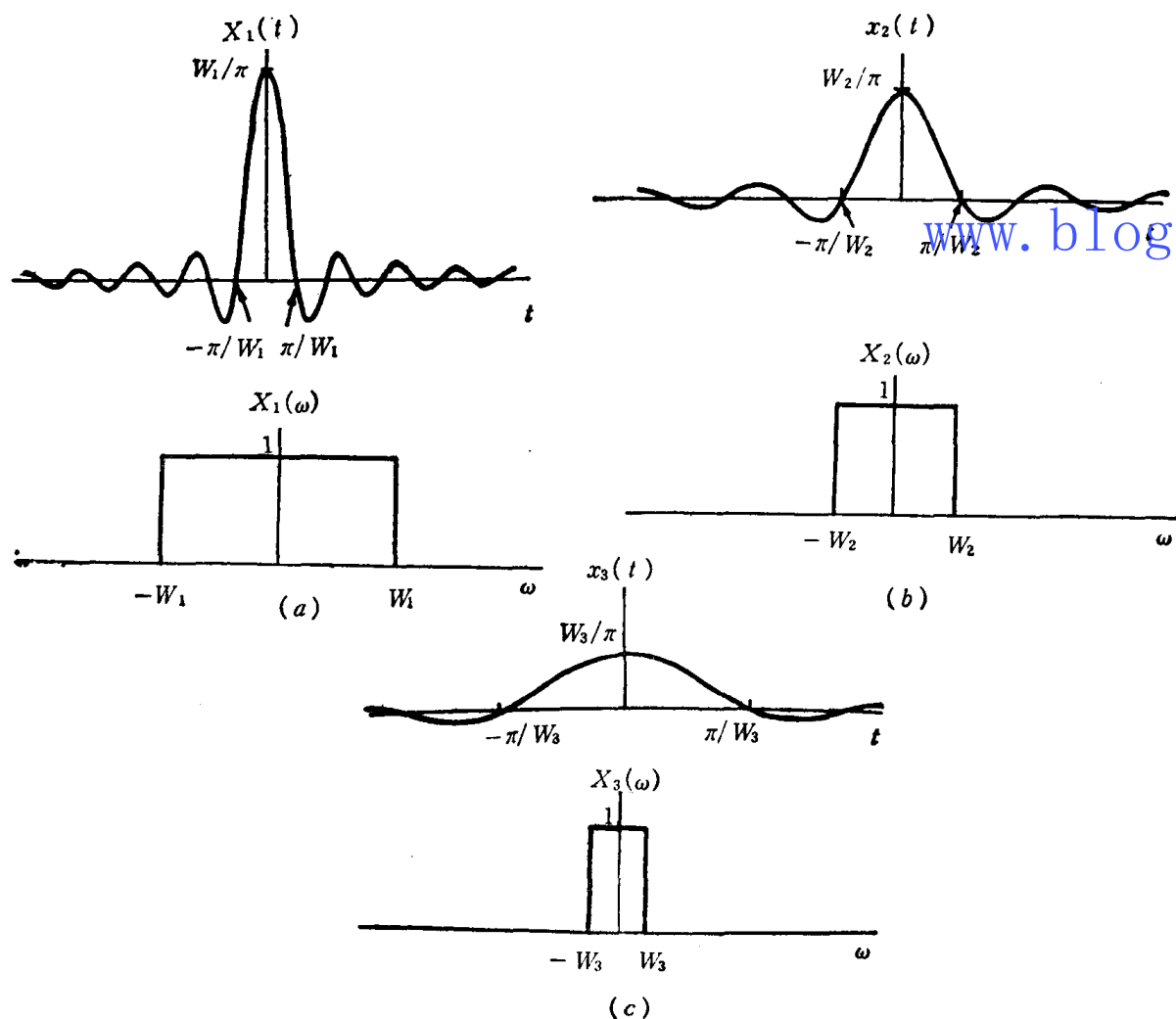


图4.20 对几个不同的 W 值, 图4.18的傅里叶变换对

到关于傅里叶变换另一特性的深刻认识。从图4.20中可见,随着 W 增加, $X(\omega)$ 变得更宽,而 $x(t)$ 在 $t=0$ 处的主峰变得更高,信号的第一个半周(即对 $|t| < \frac{\pi}{W}$ 部分)的宽度变得更窄。事实上,对于所有的 W ,当 $W \rightarrow \infty$ 时, $X(\omega)=1$ 。因此,由例4.9可看到,当 $W \rightarrow \infty$ 时,式(4.70)中的 $x(t)$ 收敛于一个冲激。图4.20描绘的性质是时域和频域之间存在倒数关系的一例。在图4.17中,我们可看到类似的结果。那里 T_1 增加, $x(t)$ 加宽,但却使 $X(\omega)$ 更窄。在4.6.5节中,我们在傅里叶变换的比例尺改变性质中,解释这个特性。

4.5 周期信号和连续时间傅里叶变换

上一节,通过设想周期信号的傅里叶级数在周期任意长时的性质,导出了非周期信号的傅里叶变换。正如这个结果所表明,傅里叶级数和傅里叶变换表达式是紧密相关的。在这一节,我们进一步研究这个关系,并导出周期信号的傅里叶变换表达式。

4.5.1 傅里叶级数系数作为一个周期的傅里叶变换的抽样

首先,回顾傅里叶变换的推导,我们所作的重要的观察是,周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶系数能从一个包络的抽样得到,我们发现这个包络等于非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换, $x(t)$ 与 $\tilde{x}(t)$ 的一个周期相等。明确地说,设 $\tilde{x}(t)$ 有基本周期 T_0 ,如图4.21所示。如我们在上节看到的,如果 $x(t)$ 取为

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & t < -\frac{T_0}{2} \text{ 或 } t > \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (4.72)$$

www.blogoil.com

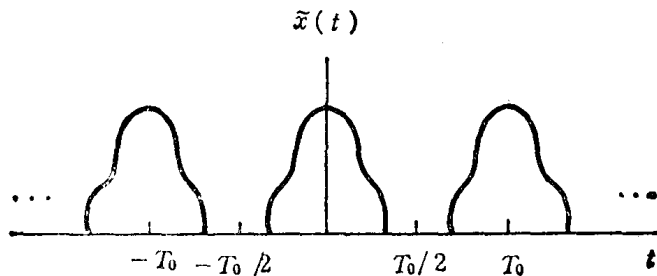


图4.21 周期信号

则 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶系数 a_k 能用 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$ 的抽样来表示:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \end{aligned} \quad (4.73)$$

然而,因为傅里叶系数 a_k 可以在长度为 T_0 的任何区间上积分获得[见式(4.35)],所以实际上,我们能得到比式(4.73)所给出的更一般的陈述。明确地说,设 s 是时间轴上任意点,定义信号 $x(t)$ 在 $s \leq t \leq s+T_0$ 的区间上与 $\tilde{x}(t)$ 相等,在其他处为零。即

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & s \leq t \leq s+T_0 \\ 0, & t < s \text{ 或 } t > s+T_0 \end{cases} \quad (4.74)$$

则, $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数系数由下式给出:

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \quad (4.75)$$

这里 $X(\omega)$ 是式(4.74)中定义的 $x(t)$ 的傅里叶变换。注意, 式(4.75)对任意选择的 s 均有效, 而不只是式(4.72)和(4.73)中采用的 $s = -T_0/2$ 。然而, 这并不表示对所有的 s 值变换 $X(\omega)$ 是相同的。不过它确实意味着 $X(k\omega_0)$ 的一系列抽样是与 s 无关的。

对式(4.75)的有效性, 我们不作一般地证明, 而是用下面的例子来描述。

例4.12 设 $\tilde{x}(t)$ 是具有周期 T_0 的周期矩形波, 如图 4.22(a) 所描绘。又设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 如图 4.22(b) 和(c) 所示。这些信号各在长度 T_0 的不同区间上等于 $\tilde{x}(t)$ 。正如我们在例4.10中看到的, $x_1(t)$ 的傅里叶变换由下式给出:

$$X_1(\omega) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} \quad (4.76)$$

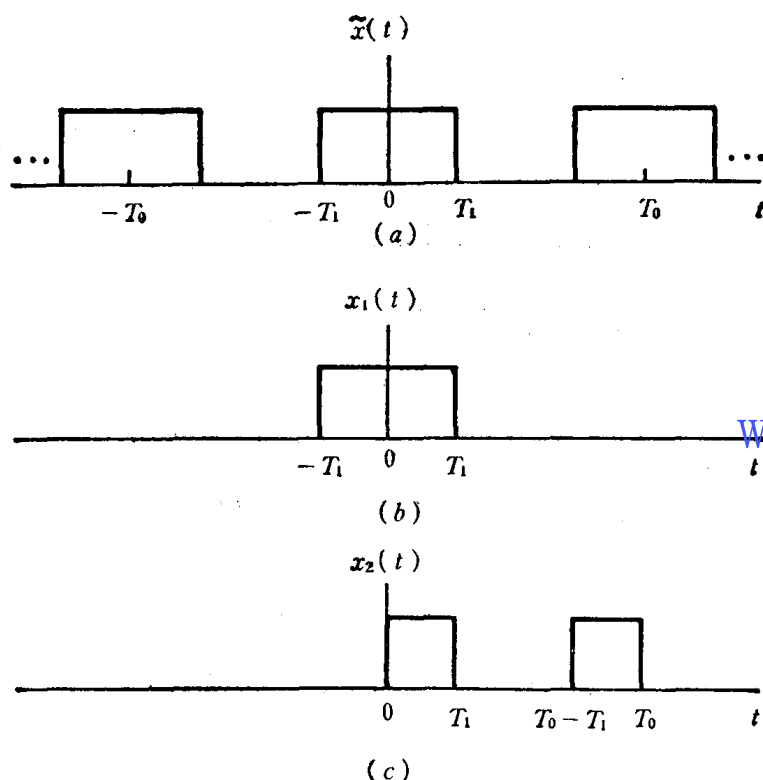


图4.22 (a)周期矩形波 $\tilde{x}(t)$; (b、c)在长度 T_0 的不同区间上等于 $\tilde{x}(t)$ 的两个非周期信号 $x_2(t)$ 的傅里叶变换可由式(4.61)计算:

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{T_1} e^{-j\omega t} dt + \int_{T_0-T_1}^{T_0} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{j\omega} [1 - e^{-j\omega T_1}] + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T_0} [e^{j\omega T_1} - 1] \\ &= \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T_1/2} [e^{j\omega T_1/2} - e^{-j\omega T_1/2}] + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega(T_0-T_1/2)} [e^{j\omega T_1/2} - e^{-j\omega T_1/2}] \\ &= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T_1}{2}\right) [e^{-j\omega T_1/2} + e^{-j\omega(T_0-T_1/2)}] \end{aligned} \quad (4.77)$$

变换 $X_1(\omega)$ 与 $X_2(\omega)$ 肯定不等。事实上, $X_1(\omega)$ 对所有 ω 值是实数, 而 $X_2(\omega)$ 则不是这样。然而, 对 $\omega = k\omega_0$, 式(4.77)变为

$$X_2(k\omega_0) = \frac{2}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) [e^{-jk\omega_0 T_1/2} + e^{-jk\omega_0 T_0} e^{jk\omega_0 T_1/2}]$$

因为 $\omega_0 T_0 = 2\pi$, 这简化为

$$\begin{aligned} X_2(k\omega_0) &= \frac{2}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) [e^{-jk\omega_0 T_1/2} + e^{jk\omega_0 T_1/2}] \\ &= \frac{4}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \end{aligned}$$

然后利用三角恒等式 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, 得到

$$X_2(k\omega_0) = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0} = X_1(k\omega_0)$$

这就证实了式(4.75)表示的结果: 周期信号的傅里叶系数能够由非周期信号傅里叶变换的抽样得到。这个非周期信号在长度为 T_0 的任何任意区间上都等于原周期信号, 但在区间之外为零。

4.5.2 周期信号的傅里叶变换

现在考虑周期信号的傅里叶变换。我们将看到, 可以直接用傅里叶级数表达式来构成周期信号的傅里叶变换。对周期信号所得的傅里叶变换, 是由频域中的冲激串组成, 冲激的面积与傅里叶级数系数成正比。这将得出一个非常重要的表达式, 它将便于我们应用傅里叶分析方法处理调制和抽样的问题。

为了得出一般的结果, 考虑具有傅里叶变换 $X(\omega)$ 的信号 $x(t)$ 。在 $\omega = \omega_0$ 处, $X(\omega)$ 为面积 2π 的单个冲激, 即

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (4.78)$$

为了确定这个傅里叶变换的信号 $x(t)$, 可用式(4.60)的逆变换关系, 得到

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

更一般地, 如果 $X(\omega)$ 具有在频域上等间隔冲激的线性组合的形式, 即

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4.79)$$

则利用式(4.60), 得到

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.80)$$

我们看到, 式(4.80)完全对应于式(4.34)规定的周期信号的傅里叶级数表达式。因此, 对具有傅里叶级数系数 $\{a_k\}$ 的周期信号, 其傅里叶变换可以解释为出现在谐波频率上的冲激串。在第 k 次谐波频率 $k\omega_0$ 上, 冲激的面积是第 k 次傅里叶级数系数 a_k 的 2π 倍。

例4.13 再次考虑图4.22(a)描绘的矩形波。这个信号的傅里叶级数系数是

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k}$$

它的傅里叶变换是

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

对 $T_0 = 4T_1$, $X(\omega)$ 如图4.23所描绘。与图4.8比较, 唯一的不同是 $X(\omega)$ 有 2π 的比例系数

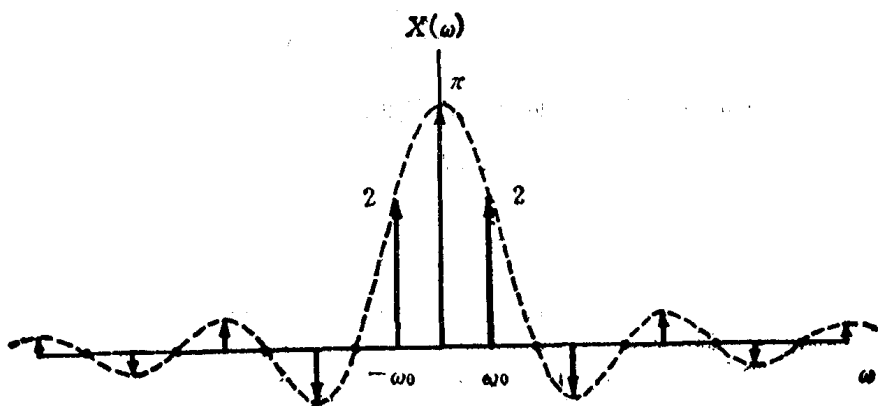


图4.23 对称周期矩形波的傅里叶变换

和使用冲激图而不用线条图。

例4.14 设

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

此例傅里叶级数的系数是

$$a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_k = 0, (k \neq 1 \text{ 或 } -1)$$

于是，傅里叶变换如图4.24(a)所示。类似地，对于

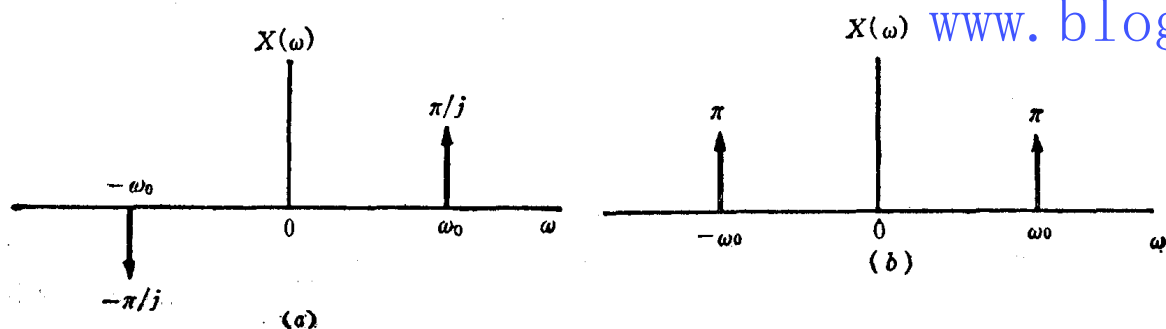


图4.24 (a) $x(t) = \sin \omega_0 t$ 的傅里叶变换; (b) $x(t) = \cos \omega_0 t$ 的傅里叶变换

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

傅里叶级数系数是

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0, (k \neq 1 \text{ 或 } -1)$$

这个信号的傅里叶变换在图4.24(b)中绘出。在第7章分析调制系统时，这两个变换是很重要的。

例4.15 在第8章抽样系统分析中，将发现一种极其有用的信号，就是周期冲激串，可表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

并绘于图4.25(a)。这是具有基本周期为T的周期信号。

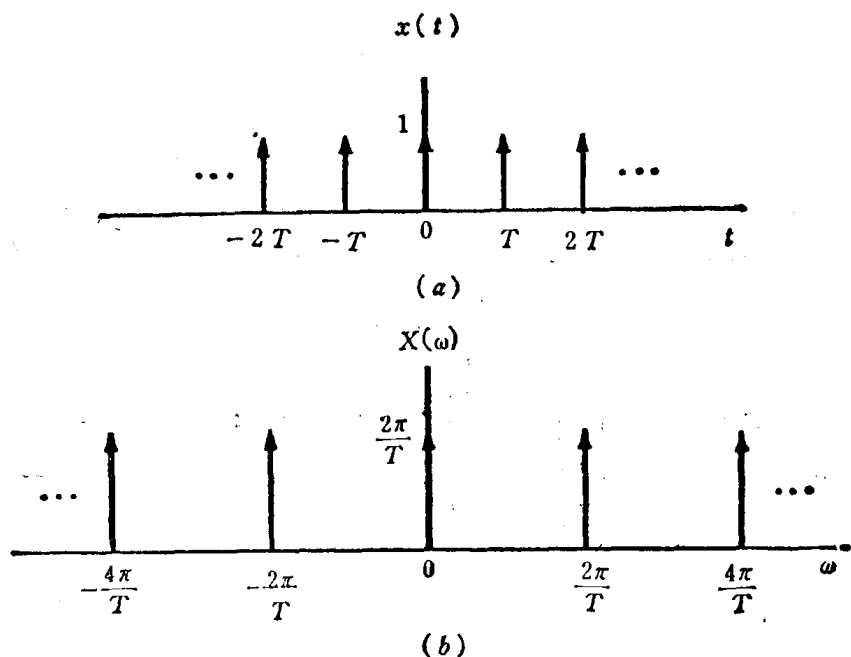


图4.25 (a)周期冲激串；(b)周期冲激序列的傅里叶变换

为了确定这个信号的傅里叶变换，先计算它的傅里叶级数系数

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega} dt = \frac{1}{T}$$

代入式(4.79)得

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

这样，时间轴上冲激串的变换，就是一个频率轴上的冲激串，如图4.25(b)所示。这里，我们又一次看到时域和频域之间关系的描述。当时间轴上冲激间的间隔(即周期)增大时，频率轴上冲激间的间隔(基频)减小。

4.6 连续时间傅里叶变换的性质

在本节和下两节中，考虑傅里叶变换的一些性质。我们将看到，这些性质使我们能深刻认识变换以及信号的时域和频域描述之间的关系，而且其中的许多性质有助于减少傅里叶变换和逆变换计算的复杂性。此外，如前节所述，周期信号傅里叶级数和傅里叶变换表达式之间有着密切的关系。利用这个关系，可以把为傅里叶变换导出的许多性质转为傅里叶级数的相应性质。由于这个原因，我们省略了这些傅里叶级数性质的推导。有几个省略的推导在习题4.9中考虑。在4.9节中，总结了级数和变换的所有性质，此外，还提供某些基本信号的级数和变换表达式的表格，这些基本信号是我们已经遇到过的，或在本章的其余部分和其他章节中要遇到的。

在整个讨论中，将经常涉及时间函数及其傅里叶变换。我们将发现，用一种速记符号可

方便地表示信号及其变换间的关系。回顾信号 $x(t)$ 及其傅里叶变换 $X(\omega)$ ，它们是通过傅里叶变换综合方程和分析方程联系的。

$$[\text{式(4.60)}] \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.81)$$

$$[\text{式(4.61)}] \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.82)$$

我们有时用符号 $F\{x(t)\}$ 表示 $X(\omega)$ ，用符号 $F^{-1}\{X(\omega)\}$ 表示 $x(t)$ ，也用符号

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

表示作为傅里叶变换对的 $x(t)$ 和 $X(\omega)$ 。

因此，例4.7又可写成

$$\frac{1}{a+j\omega} = F\{e^{-at}u(t)\}$$

$$e^{-at}u(t) = F^{-1}\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\}$$

和

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega}$$

4.6.1 傅里叶变换的线性

如果

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$$

和
则

$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{F} aX_1(\omega) + bX_2(\omega) \quad (4.83)$$

总之，两个信号线性组合的傅里叶变换与各个分量变换的线性组合是相同的。这个线性性质很容易推广到任意个分量的线性组合。式(4.83)的证明可由式(4.82)直接导出。

4.6.2 傅里叶变换的对称性质

如果 $x(t)$ 是一个实值时间函数，则

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \quad [x(t) \text{ 为实函数}] \quad (4.84)$$

式中 $*$ 表示复共轭。上式称为共轭对称。傅里叶变换的共轭对称通过式(4.82)的复共轭计算得出：

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt \end{aligned}$$

利用 $x(t)$ 是实函数，因此 $x^*(t) = x(t)$ ，我们就有：

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X(-\omega)$$

这里第二个等式是由式(4.82)在 $-\omega$ 时计算得出。

参照例4.7, 当 $x(t)=e^{-at}u(t)$ 时,

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$X(-\omega) = \frac{1}{a-j\omega} = X^*(\omega)$$

4.2节也讨论过傅里叶级数类似的这个性质。具体说, 如果 $x(t)$ 是周期性的实函数, 则由式(4.17)

$$a_k = a_{-k}^*$$

例4.2描述了这个性质。

作为式(4.84)的结果, 如果用直角坐标的形式把 $X(\omega)$ 表达为

$$X(\omega) = \text{Re}\{X(\omega)\} + j \text{Im}\{X(\omega)\}$$

则如 $x(t)$ 是实函数时,

$$\text{Re}\{X(\omega)\} = \text{Re}\{X(-\omega)\}$$

$$\text{Im}\{X(\omega)\} = -\text{Im}\{X(-\omega)\}$$

即实部是频率的偶函数, 虚部是频率的奇函数。同样, 如果用极坐标的形式把 $X(\omega)$ 表达为

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

则由式(4.84)可得: $|X(\omega)|$ 是 ω 的偶函数, $\theta(\omega)$ 是 ω 的奇函数。因此, 当计算或图示一个实值时间函数的傅里叶变换时, 只需对正频率求出或图示变换的实部与虚部或幅度与相位。至于负频率时的值, 则可利用刚导出的关系, 根据 $\omega > 0$ 的值来直接确定。

作为式(4.84)进一步的结果, 若 $x(t)$ 既是实函数又是偶函数, 则 $X(\omega)$ 也既是实函数又是偶函数。为此可写成

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

或者用变量 $\tau = -t$ 代替

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

因为 $x(-\tau) = x(\tau)$, 就有

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = X(\omega)$$

于是, $X(\omega)$ 是一个偶函数。这个结果(与式(4.84)一起)也需要 $X^*(\omega) = X(\omega)$ (即 $X(\omega)$ 是实函数)。例4.8描述了实偶信号 $e^{-a|t|}$ 的这个性质。用类似的方式可以说明, 如果 $x(t)$ 是一个奇时间函数, $x(t) = -x(-t)$, 则 $X(\omega)$ 是纯虚奇函数。

对于傅里叶级数, 类似的性质是, 一个周期性的实偶信号 $x(t)$, 具有实偶傅里叶系数(即 $a_k = a_{-k}$); 如果 $x(t)$ 是奇函数, 则系数是纯虚奇函数。这两种情况中的第一种, 已在关于周期矩形波的例4.5中描述过。

最后, 如第2章所讨论过的, 一个实函数 $x(t)$ 总能用偶函数 $x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$ 和奇函数 $x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$ 之和来表达, 即

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

由傅里叶变换的线性性质

$$F\{x(t)\} = F\{x_e(t)\} + F\{x_o(t)\}$$

根据以上的讨论, $F\{x_e(t)\}$ 是实函数, $F\{x_o(t)\}$ 是纯虚函数。于是, 我们可得出结论: 对

于实函数 $x(t)$,

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{F} X(\omega) \\ \text{Ev}\{x(t)\} &\xleftrightarrow{F} \text{Re}\{X(\omega)\} \\ \text{Od}\{x(t)\} &\xleftrightarrow{F} j\text{Im}\{X(\omega)\} \end{aligned}$$

4.6.3 时间移位

如果

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

则

$$\boxed{x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(\omega)} \quad (4.85)$$

为了证实这个性质, 考虑

$$F\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt \quad (4.86)$$

设在式(4.86)中, $\sigma = t - t_0$, 则有

$$F\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\sigma) e^{-j\omega(\sigma+t_0)} d\sigma = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

这个性质的结论是在时间上平移的信号, 其傅里叶变换的幅度不变。即如果用极坐标的形式把 $X(\omega)$ 表达为

$$F\{x(t)\} = X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

则

$$F\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(\omega) = |X(\omega)| e^{j[\theta(\omega) - \omega t_0]}$$

这样, 信号的时移结果是在其变换中导致了相移, 它是 ω 的线性函数。

4.6.4 微分和积分

设 $x(t)$ 是具有傅里叶变换 $X(\omega)$ 的信号, 通过对傅里叶变换综合方程(4.81)的两边微分, 得到

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

因此,

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)} \quad (4.87)$$

这是个非常重要的性质, 因为它通过在频域中乘以 $j\omega$ 的运算代替了时域中的微分运算。我们将发现, 在4.11节对由微分方程描述的 LTI 系统分析使用傅里叶变换的讨论中, 它是极其有用的。

因为在时域中微分对应于在频域中乘以 $j\omega$, 所以可以推断, 在时域中积分应当对应于在频域中除以 $j\omega$ 。情况确实如此, 但这只想对了一部分, 准确的关系是

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega) \quad (4.88)$$

式(4.88)右边的冲激项反映了由积分而产生的直流值或平均值。

为了理解这个性质,考虑单位阶跃信号 $u(t)$ 。在图4.26中,我们描绘了 $u(t)$ 的偶部—奇部分解, $u(t)$ 可写为

$$u(t) = \frac{1}{2} + \left[u(t) - \frac{1}{2} \right] \quad (4.89)$$

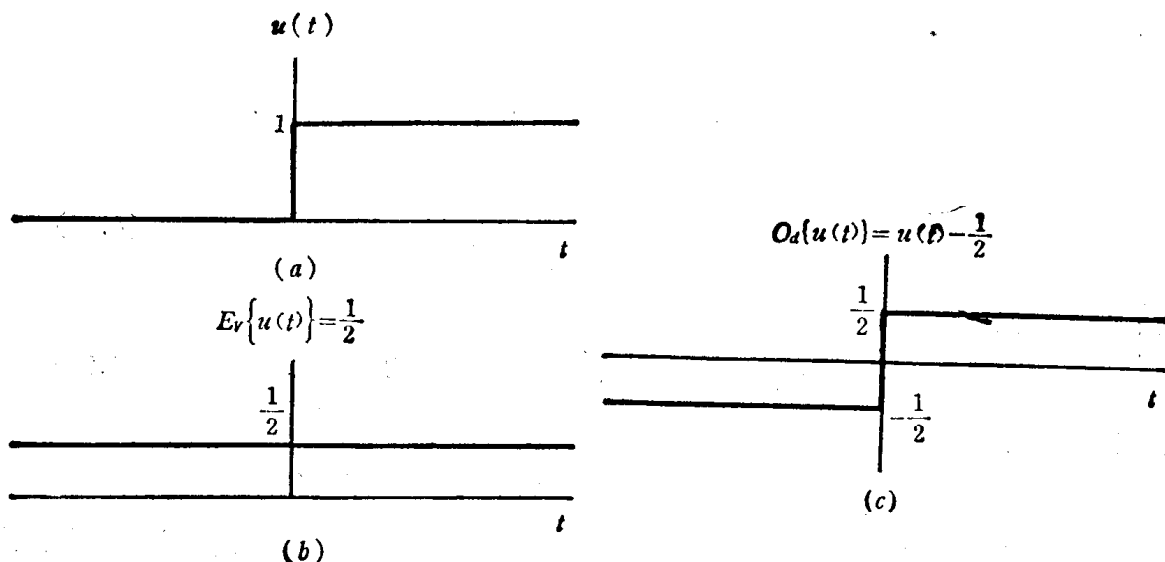


图4.26 连续时间单位阶跃的偶部—奇部分解

首先考虑奇部 $v(t) = u(t) - \frac{1}{2}$ 。因为 $v'(t) = u'(t) = \delta(t)$, 根据微分性质就有

$$F\{\delta(t)\} = F\left\{\frac{dv(t)}{dt}\right\} = j\omega V(\omega) \quad (4.90)$$

因为单位冲激的傅里叶变换是1, 所以可推断出

$$V(\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad (4.91)$$

注意, 由于 $v(t)$ 是实奇的, 因此 $V(\omega)$ 一定是纯虚数和奇函数。这由式(4.91)很易证明。

其次考虑 $u(t)$ 的偶部, 它是常数信号 $\frac{1}{2}$, 即 $Ev\{u(t)\}$ 是零频率的周期信号, 因此其傅里叶变换是在 $\omega=0$ 处的冲激。明确地说, 利用式(4.79)可得到

$$F\left\{\frac{1}{2}\right\} = \pi\delta(\omega) \quad (4.92)$$

把 $u(t)$ 的偶部和奇部的变换结合起来, 我们求出

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (4.93)$$

这个结果与式(4.88)的积分性质是一致的, 即当 $x(t) = \delta(t)$ 时, 就有 $X(\omega) = 1$, 且 $x(t)$ 的积分是 $u(t)$ 。利用这些替换式(4.88)成为式(4.93)。而且我们已经看到, 式(4.93)中的冲激项直接来自 $u(t)$ 的非零直流值。

最后, 还可应用式 (4.87) 的微分性质来恢复冲激信号的变换, 即,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right]$$

由于 $\omega \delta(\omega) = 0$, 所以表达式右边简化为 1。于是,

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$

4.6.5 时间和频率的比例尺改变

如果

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

则

$$\boxed{x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)} \quad (4.94)$$

式中 a 是实常数。这个性质可由傅里叶变换的定义直接导出。具体说,

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

用变量 $\tau = at$ 代换可得

$$F\{x(at)\} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

它与关系式 (4.94) 对应。这样, 除了幅度系数 $1/|a|$ 之外, 时域中乘以系数 a 的线性比例尺改变, 对应于频域中乘以 $1/a$ 的线性比例尺改变, 反之亦然。关系式 (4.94) 的一个常见例证是, 当音频磁带以一种速度录音, 而以别的速度放音时, 在频率含量上产生的影响。如果放音速度高于录音速度, 对应于时间的压缩 (即 $a > 1$), 于是在频域中频谱扩展 (即听觉效果是放音频率较高)。反之, 如果放音速度低于录音速度 ($a < 1$), 放音信号将包含较低的频率分量。例如, 如果以放慢的速度放一个小钟响声的录音, 结果听起来像一个声音深沉的大钟的声音。

比例尺改变性质是时间和频率相逆关系的另一个例子, 我们已在几个场合中碰到过。例如, 当增加正弦信号的周期时, 就减少了它的频率。在例 4.11 (见图 4.20) 中, 我们也看到, 如果考虑变换

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

则增加 W 时, $X(\omega)$ 的逆变换图形变窄变高, 当 $W \rightarrow \infty$ 时, $X(\omega)$ 的逆变换趋向于一个冲激。最后, 在例 4.15 中可见, 在周期冲激串的傅里叶变换中, 冲激间的频率间隔与时间中的间隔成反比。

在本书其余部分的一些地方, 我们将碰到时域和频域间反比关系的结果。此外, 读者也许会在理科和工科的大量其他课题中想起这个性质的含义。物理学中测不准原理是一个例子, 习题 4.35 描述了另一个例子。

4.6.6 对偶性

通过比较变换和逆变换的关系式 (4.81) 和 (4.82), 观察到它们存在一定的对称性

(即这些公式是相似的,但在形式上不完全一样)。实际上,这种对称性导致了称为对偶性的傅里叶变换性质。在例4.11中,当我们注意到存在于例4.10和4.11的傅里叶变换对之间的明显关系时,提到过这个性质。从例4.10中,得到了傅里叶变换对

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T_1}{\pi} \right) \quad (4.95)$$

而在例4.11中,我们考虑了变换对

$$x_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{Wt}{\pi} \right) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad (4.96)$$

这两个傅里叶变换对和它们之间的关系表示在图4.27中。

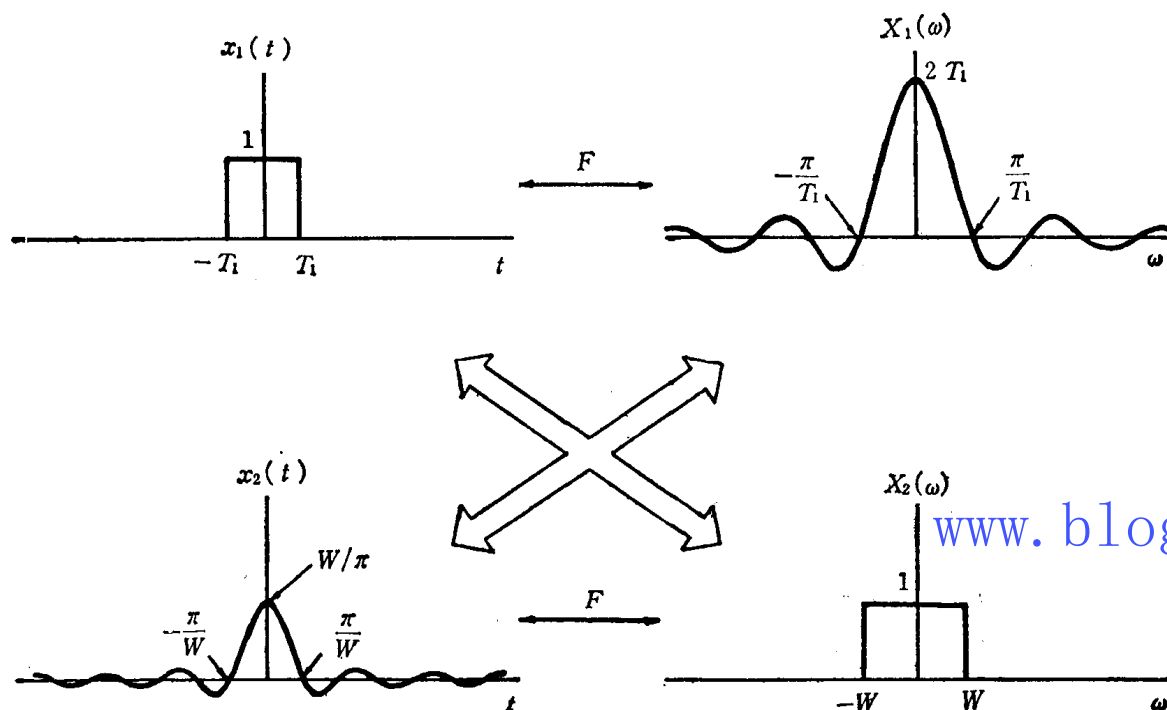


图4.27 式(4.95)和(4.96)傅里叶变换对之间的关系

由以上两例显示的对称性,可推广到一般的傅里叶变换中去。特别是,考虑通过下列积分表达式联系的两个函数

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-j\omega v} dv \quad (4.97)$$

把式(4.97)与傅里叶综合方程和分析方程式(4.81)、(4.82)比较,我们看到,当 $u=\omega$ 和 $v=t$ 时,

$$f(\omega) = F\{g(t)\} \quad (4.98)$$

而当 $u=t$ 和 $v=\omega$ 时,

$$g(-\omega) = \frac{1}{2\pi} F\{f(t)\} \quad (4.99)$$

即如果给出时间函数 $g(t)$ 的傅里叶变换对

$$g(t) \xleftrightarrow{F} f(\omega) \quad (4.100)$$

然后考虑时间函数 $f(t)$, 它的傅里叶变换对是

$$f(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi g(-\omega) \quad (4.101)$$

这两个方程的含义

的。例如, 假设

$$g(v) = \begin{cases} 1, & |v| < M \\ 0, & |v| > M \end{cases} \quad (4.102)$$

于是, 由式 (4.97)

$$f(u) = \frac{2 \sin uM}{u} = 2M \operatorname{sinc}\left(\frac{uM}{\pi}\right) \quad (4.103)$$

这个结果与式 (4.98) 一起, 或等价地与式 (4.100) 一起, 在 $M=T_1$ 时, 得出式 (4.95) 的变换对。而如果利用式 (4.99) 或 (4.101), 使 $M=W$, 则获得式 (4.96) 的变换对。因此, 对偶性质允许我们由式 (4.97) 的一个计算式获得这两个对偶变换对, 这对减少傅里叶变换和逆变换计算的复杂性常常是有用的。为了说明对偶性的用途, 我们考虑以下例子。

例4.16 假设要计算下例信号的傅里叶变换

$$x(t) = \frac{2}{t^2 + 1} \quad (4.104)$$

设

$$f(u) = \frac{2}{u^2 + 1}$$

于是由式 (4.100), 我们有傅里叶变换对

$$g(t) \xleftrightarrow{F} f(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1}$$

由例4.8得

$$g(t) = e^{-|t|}$$

www.blogoil.com

而且, 利用式 (4.101) 给出的变换对, 我们推断因 $f(t) = x(t)$, 所以

$$X(\omega) = F\{f(t)\} = 2\pi g(-\omega) = 2\pi e^{-|\omega|} \quad (4.105)$$

对偶性质也能用来确定或提示傅里叶变换的其他性质。特别是, 如果时间函数的一些特点有傅里叶变换方面的推论, 则同样的一些特点与频率函数联系时, 在时域中将有对偶的推论。例如, 我们知道周期时间函数具有加权的、等间隔冲激串的傅里叶变换, 由于对偶性, 加权的、等间隔冲激串的时间函数将在频域上有周期性的傅里叶变换。这是式 (4.98) 和 (4.99) 的结果, 且可由式 (4.81) 和式 (4.82) 直接证明。同样, 在 4.6.2 至 4.6.5 节中考虑的傅里叶变换的性质也包含了对偶性质。例如, 在 4.6.4 节中我们看到, 在时域中微分对应于在频域中乘以 $j\omega$ 。根据上面的讨论, 于是我们可以推测, 在时域中乘以 jt 大致对应于在频域中微分。为了确定这一对偶性质的准确公式, 可用完全类似 4.6.4 节中所使用的方法来处理。明确地说, 若把分析方程 (4.82) 对 ω 微分, 则得

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.106)$$

$$\boxed{-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(\omega)}{d\omega}} \quad (4.107)$$

同样, 我们能够得到式 (4.85) 和 (4.88) 的对偶性质。它们是

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)} \quad (4.108)$$

和

$$\boxed{-\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0) \delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta) d\eta} \quad (4.109)$$

4.6.7 帕斯维尔关系

如果 $x(t)$ 和 $X(\omega)$ 是傅里叶变换对, 则

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega} \quad (4.110)$$

此式称为帕斯维尔关系表达式, 可直接应用傅里叶变换得出。具体为,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \end{aligned}$$

改变积分次序, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega$$

但是括号项仅是 $x(t)$ 的傅里叶变换, 因此,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

www.blogoil.com

式 (4.110) 左边的量是信号 $x(t)$ 的总能量。帕斯维尔关系式 (4.110) 表明, 这个总能量可通过计算单位时间能量 $|x(t)|^2$ 并在所有时间上积分来确定, 或者通过计算单位频率的能量 $|X(\omega)|^2/2\pi$ 并在所有频率上积分来确定。由于这个原因, 常称 $|X(\omega)|^2$ 为信号 $x(t)$ 的能量密度谱 (见习题6.6)。

周期信号的能量是无限的, 因而式 (4.110) 对这类信号没有用。然而, 如习题4.14所考虑的, 对周期信号来说, 存在着一个类似的关系, 具体为

$$\boxed{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2} \quad (4.111)$$

这里 a_k 是 $x(t)$ 的傅里叶级数系数, T_0 是其周期。因此, 在周期信号的情况下, 帕斯维尔关系表示了时间函数在一个周期中的能量与傅里叶级数系数中能量的关系。而且, $|a_k|^2$ 可解释为每个周期由第 k 次谐波提供的那部分能量。

除了已经讨论的那些性质外, 傅里叶变换对还有许多其他的性质。在下两节中, 我们要介绍两个特殊的性质, 它们在 LTI 系统的研究和应用中起着特别重要作用。4.7 节要讨论第一个性质, 称为卷积性质, 它构成第6章滤波讨论的基础。4.8 节讨论第二个性, 称为调制性质, 它是第7章调制讨论和第8章抽样讨论的基础。在4.9 节中总结傅里叶变换的性质。

4.7 卷积性质

傅里叶变换用于处理 LTI 系统的最重要性质之一，是它在卷积运算上的作用。为了得到这个关系，考虑一个具有冲激响应 $h(t)$ 、输出 $y(t)$ 、输入 $x(t)$ 的 LTI 系统，使得

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4.112)$$

我们所要的 $Y(\omega)$ 为

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= F\{y(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x(\tau)h(t-\tau)d\tau] e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (4.113)$$

交换积分次序并注意 $x(\tau)$ 与 t 无关，得到

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \quad (4.114)$$

由时移性质 (4.85)，括号内的项只是 $e^{-j\omega\tau}H(\omega)$ 。把它代入式 (4.114)，得

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(\omega)d\tau \\ &= H(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \end{aligned} \quad (4.115)$$

积分为 $F\{x(t)\}$ ，因此，

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

即，

$$y(t) = h(t) * x(t) \xrightarrow{F} Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (4.116)$$

www.blogoil.com

这个性质实质上是因复指数为 LTI 系统的特征函数的结果。这个性质的推导，也可通过回顾把傅里叶变换综合方程解释成是复指数线性组合所得的 $x(t)$ 表达式来进行。参考式 (4.59)，具体说，可以把 $x(t)$ 表达为和的极限，即

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \end{aligned} \quad (4.117)$$

具有冲激响应 $h(t)$ 的线性系统对复指数 $e^{jk\omega_0 t}$ 的响应，由式 (4.4) 可知为 $H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ ，这里

$$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \quad (4.118)$$

由迭加 (见式 (4.8)) 则有

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0)H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

这样，由式 (4.117) 可见，线性系统对 $x(t)$ 的响应是

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0)H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{aligned} \quad (4.119)$$

因为 $y(t)$ 及其傅里叶变换 $Y(\omega)$ 是由下式所联系

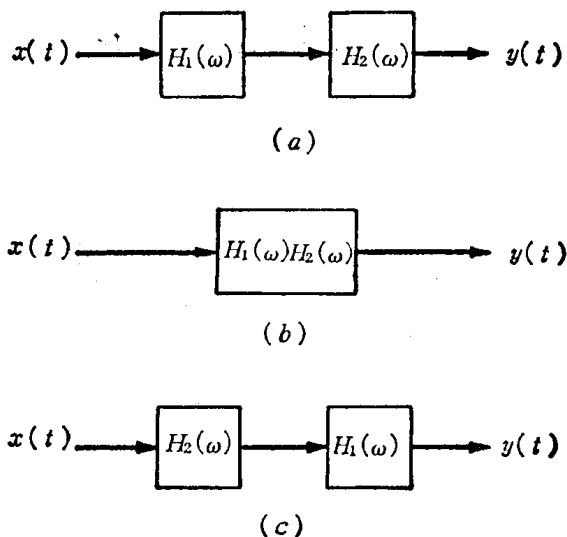
$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.120)$$

我们能从式 (4.119) 辨认出 $Y(\omega)$, 得

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (4.121)$$

这正如我们前面所导出的。

傅里叶变换这一重要性质的第二种推导, 再次强调系统冲激响应的傅里叶变换 $H(\omega)$ 仅是频率为 ω 的复指数通过线性时不变系统时复数振幅的变化。函数 $H(\omega)$ 一般称为系统的频率响应。 $H(\omega)$ 就像它的逆变换——单位冲激响应一样, 在 LTI 系统的分析中起着重要的作用。首先, 因为 $h(t)$ 完全表征了 LTI 系统, 所以 $H(\omega)$ 也必定如此。此外, LTI 系统的许多性质能用 $H(\omega)$ 方便地解释。例如, 在 3.3 节中, 我们看到, 两个 LTI 系统级联的冲激响应是各个系统冲激响应的卷积, 整个响应不取决级联系统的次序。利用式 (4.116), 我们可以用频率响应的术语再来阐明这一点。如图 4.28 所示, 两个系统级联的总频率响应仅是各个系统频率响应的乘积, 由此清楚可见, 总响应与级联次序无关。



www.blogoil.com

图 4.28 三个等价的 LTI 系统。这里, 每个方框表示一个具有所标频率响应的 LTI 系统

同样重要的是, 要注意不是对每个 LTI 系统均能确定频率响应。无论如何, 若 LTI 系统是稳定的, 则如在 3.4 节和习题 3.21 中所看到的, 它的冲激响应是绝对可积的, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (4.122)$$

式 (4.122) 是共同保证 $h(t)$ 的傅里叶变换 $H(\omega)$ 存在的狄利克雷三个条件之一。于是, 假设 $h(t)$ 满足其他两个条件, 实际上所有物理的或实际的重要信号均能满足这样的条件, 所以我们看到一个稳定的 LTI 系统具有频率响应 $H(\omega)$ 。然而, 如果 LTI 系统是不稳定的, 即如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \infty$$

则傅里叶变换不可能存在。在这种情况下, 系统对正弦输入的响应是无穷大 (见习题 5.27 在离散时间 LTI 系统范围中关于这一点的描绘和解释)。

因此,在利用傅里叶分析研究 LTI 系统时,我们将始终局限于具有傅里叶变换的冲激响应系统。为了采用变换法去研究那些没有有限值频率响应的不稳定 LTI 系统,必须考虑连续时间傅里叶变换的推广——拉普拉斯变换。这个问题在第 9 章讨论,在那以前,我们将仅考虑可用傅里叶变换分析的许多问题和实际应用。

为了进一步描述卷积性质,考虑几个例子。

例4.17 考虑一个具有以下冲激响应的连续时间 LTI 系统

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (4.123)$$

这个系统的频率响应由下式给出

$$H(\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad (4.124)$$

于是,对于具有傅里叶变换 $X(\omega)$ 的任何输入 $x(t)$,输出的傅里叶变换是

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = e^{-j\omega t_0}X(\omega) \quad (4.125)$$

事实上,这个结果与 4.6.3 节的时移性质是一致的。特别如第 3 章所讨论(见例 3.5),冲激响应是 $\delta(t - t_0)$ 的系统会对输入施加时移 t_0 ,即

$$y(t) = x(t - t_0)$$

因此,由式(4.85)时移性质也可得出式(4.125)。注意,或者由 4.6.3 节的讨论,或者直接从式(4.124),我们看到,纯时移系统的频率响应在所有频率上有单位幅度,且相位特性为 ω 的线性函数。

例4.18 第二个例子,我们分析一个微分器,即一个输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下式联系的 LTI 系统

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

由 4.6.4 节的微分性质

$$Y(\omega) = j\omega X(\omega) \quad (4.126)$$

从而,由式(4.116)得出微分器的频率响应 $H(\omega)$ 是

$$H(\omega) = j\omega \quad (4.127)$$

例4.19 假设现在有一个积分器,即一个由下式规定的 LTI 系统

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

这个系统的冲激响应是单位阶跃 $u(t)$,因此由式(4.93),这个系统的频率响应是

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

于是,利用式(4.116)我们有

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(\omega)\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \end{aligned}$$

这正是式(4.88)的积分性质。

例4.20 考虑具有以下冲激响应的 LTI 系统

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

对下面输入信号的响应

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0$$

由例4.7, $x(t)$ 和 $h(t)$ 的傅里叶变换分别为