

(d) $[a^n \sin \Omega_0 n] u[n]$, $|a| < 1$,

(e) $|a|^n \sin \Omega_0 n$, $|a| < 1$,

(f) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n+3] - u[n-2]\}$,

(g) $n\{u[n+N] - u[n-N-1]\}$,

(h) $\cos \frac{18\pi n}{7} + \sin 2n$,

(i) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta[n-3k]$,

(j) $x[n]$ 如图 P 5.14(b) 所示

(k) $\delta[4-2n]$,

(l) $x[n] = \begin{cases} \cos \frac{\pi n}{3}, & -4 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(m) $n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$,

(n) $\left[\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}\right] \left[\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\right]$,

(o) $x[n]$ 如图 P 5.14(c) 所示。

5.15. 下列各式为离散时间信号的傅里叶变换, 试求相应于每一个变换的信号:

(a) $X(\Omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| \leq W, \\ 1, & W < |\Omega| \leq \pi; \end{cases}$

(b) $X(\Omega) = 1 - 2e^{-j3\Omega} + 4e^{j2\Omega} + 3e^{-j6\Omega}$,

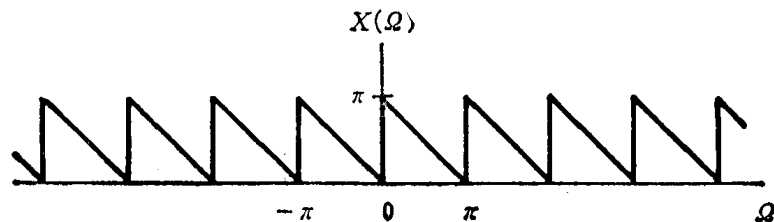
(c) $X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta\left(\Omega - \frac{\pi k}{2}\right)$;

(d) $X(\Omega) = \cos^2 \Omega$;

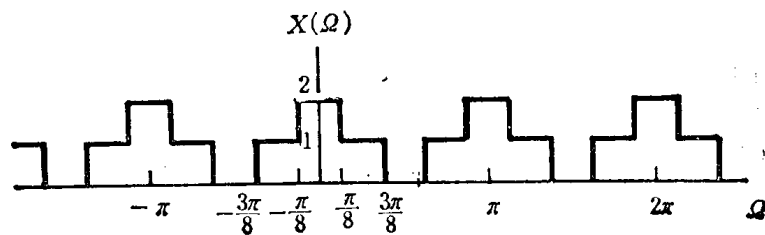
(e) $X(\Omega) = \cos \frac{\Omega}{2} + j \sin \Omega$, $-\pi \leq \Omega \leq \pi$;

(f) $X(\Omega)$ 如图 P 5.15(a) 所示;

(g) $X(\Omega)$ 如图 P 5.15(b) 所示;



(a)



(b)

图 P 5.15

$$(h) |X(\Omega)| = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \frac{\pi}{3} < |\Omega| \leq \frac{2\pi}{3}, \\ 0, & \frac{2\pi}{3} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\angle X(\Omega) = 2\Omega,$$

$$(i) X(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\Omega}}.$$

5.16. 在本章中, 我们证明了 $|a| < 1$ 时,

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

和

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$$

利用傅里叶变换性质, 通过归纳推理证明

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^r}$$

的傅里叶逆变换为

$$x[n] = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n]$$

5.17. (a) 令 $X(\Omega)$ 是 $x[n]$ 的傅里叶变换。试推导以 $X(\Omega)$ 表示的下列信号的傅里叶变换表达式(不假定 $x[n]$ 是实数):

(i) $\text{Re}\{x[n]\}$;

(ii) $x^*[-n]$;

(iii) $\text{Ev}\{x[n]\}$ 。

(b) 令 $X(\Omega)$ 是实数信号 $x[n]$ 的傅里叶变换。通过求出以 $X(\Omega)$ 表示 $B(\Omega)$ 和 $C(\Omega)$ 的表达式, 证明 $x[n]$ 可以写成

$$x[n] = \int_0^\pi \{B(\Omega)\cos\Omega n + C(\Omega)\sin\Omega n\} d\Omega \textcircled{1}$$

(c) 假定 $x[n] = 0$ (除非 n 是给定整数 M 的倍数), 试用 $X(\Omega) = F\{x[n]\}$ 表达 $y[n] = x[nM]$ 的傅里叶变换。

(d) 令 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 是 LTI 因果系统的冲激响应, 并且令 $H_1(\Omega)$ 和 $H_2(\Omega)$ 是相应的频率响应。在这些条件下, 下列等式一般是否正确? 证实之。

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_1(\Omega) d\Omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_2(\Omega) d\Omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_1(\Omega) H_2(\Omega) d\Omega$$

(e) 一般说来, 下列叙述是否正确? 证实之。如果 $X(\Omega) = F\{x[n]\}$ 属纯虚数, 则 $x[n]$ 的奇数部分是实数。

(f) 导出下列卷积性质

$$x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} X(\Omega)H(\Omega)$$

(g) 令 $x[n]$ 和 $h[n]$ 为两个信号, 同时设 $y[n] = x[n] * h[n]$ 。写出 $y[0]$ 的两种表达式: 一种(直接利用卷积和)用 $x[n]$ 和 $h[n]$ 表示; 另一种(利用傅里叶变换的卷积性质)用 $X(\Omega)$ 和 $H(\Omega)$ 表示。然后, 通过 $h[n]$ 的合理选择, 利用以上两种表达式求证帕斯维尔关系式, 即,

①此式中的三角函数原版中误为 $\cos \Omega$ 和 $\sin \Omega$ 。——译者注

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

按照类似的方式, 导出下列一般化的帕斯维尔关系式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) Z^*(\Omega) d\Omega$$

(h) 令 $x[n]$ 是一离散时间信号, 其傅里叶变换具有一相位函数为

$$\angle X(\Omega) = \alpha\Omega, \quad |\Omega| < \pi$$

试分析该信号的移位形式, 即, 对于一整数 n_0 该信号所具有的 $x[n-n_0]$ 形式。试问当 $\alpha=2$

时, 这些信号中哪些是偶函数? 如果 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时, 又如何?

(i) 令 $x[n]$ 是一非周期信号, 其傅里叶变换为 $X(\Omega)$, 并且令 $y[n]$ 为

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN]$$

它是周期性的, 周期为 N 。试证明其傅里叶级数的系数为

$$a_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

5.18. 令 $X(\Omega)$ 表示图 P 5.18 所示信号 $x[n]$ 的傅里叶变换, 试不经过估算 $X(\Omega)$ 而进行下列计算。

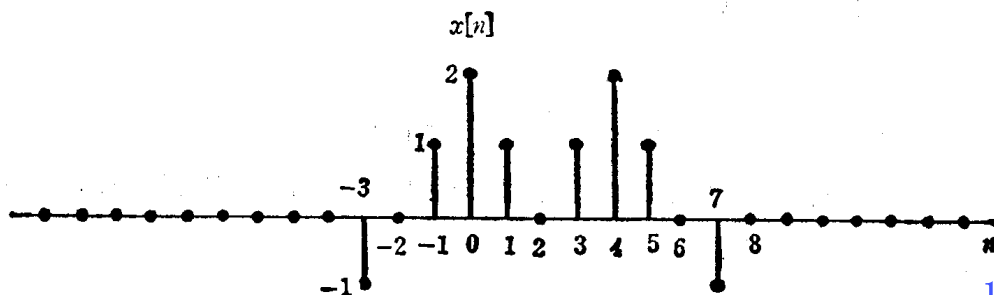


图 P 5.18

(a) 计算 $X(0)$;

(b) 求 $\angle X(\Omega)$;

(c) 计算

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega;$$

(d) 求 $X(\pi)$;

(e) 确定并画出傅里叶变换为 $\text{Re}\{X(\Omega)\}$ 的信号;

(f) 计算:

$$(i) \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega;$$

$$(ii) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \right|^2 d\Omega.$$

5.19. 确定下面列出的各信号 $x[n]$ 中哪一个 (如果有的话) 所具有的傅里叶变换能满足如下各个条件。

(i) $\text{Re}\{X(\Omega)\} = 0$;

(ii) $\text{Im}\{X(\Omega)\} = 0$;

(iii) 存在一实数 α , 这样以致

$$e^{j\alpha\Omega} X(\Omega) \text{ 是实数};$$

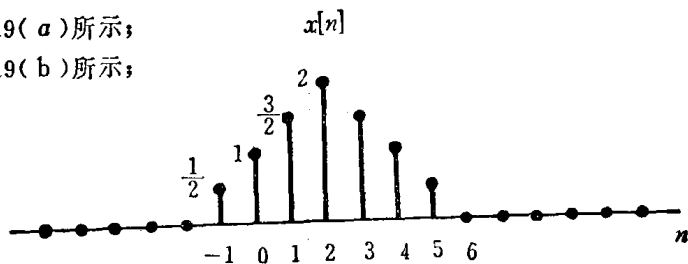
$$(iv) \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega = 0;$$

(v) $X(\Omega)$ 是周期性的;

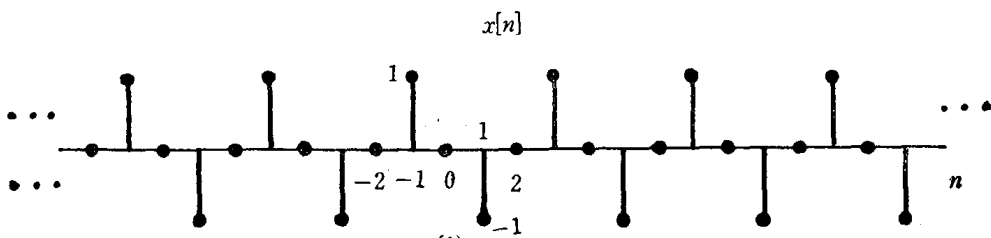
(vi) $X(0)=0$ 。

(a) $x[n]$ 如图 P 5.19 (a) 所示;

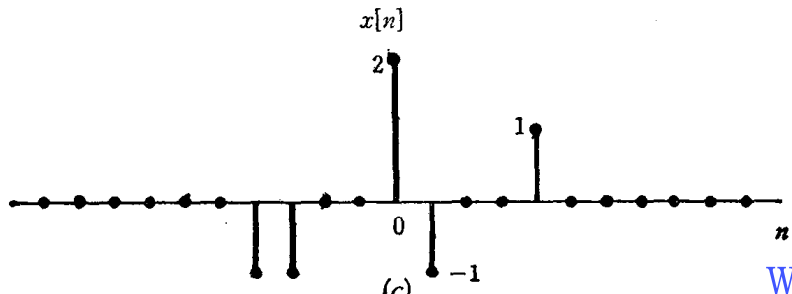
(b) $x[n]$ 如图 P 5.19 (b) 所示;



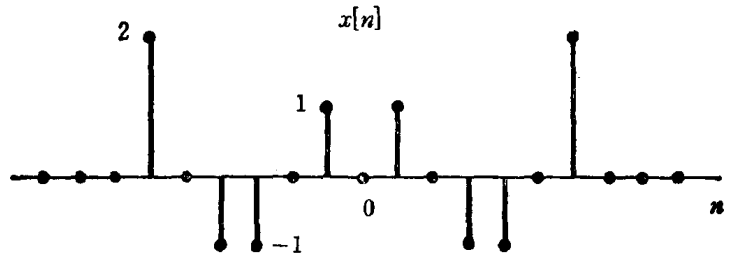
(a)



(b)



(c)



(d)

图 P 5.19

(c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$;

(d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$;

(e) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+2]$;

(f) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+3]$;

(g) $x[n]$ 如图 P 5.19 (c) 所示;

(h) $x[n]$ 如图 P 5.19 (d) 所示;

(i) $x[n] = \delta[n-1] - \delta[n+1]$ 。

5.20. 研究图 P 5.20 所示的信号, 设该信号的傅里叶变换可按矩形形式写为

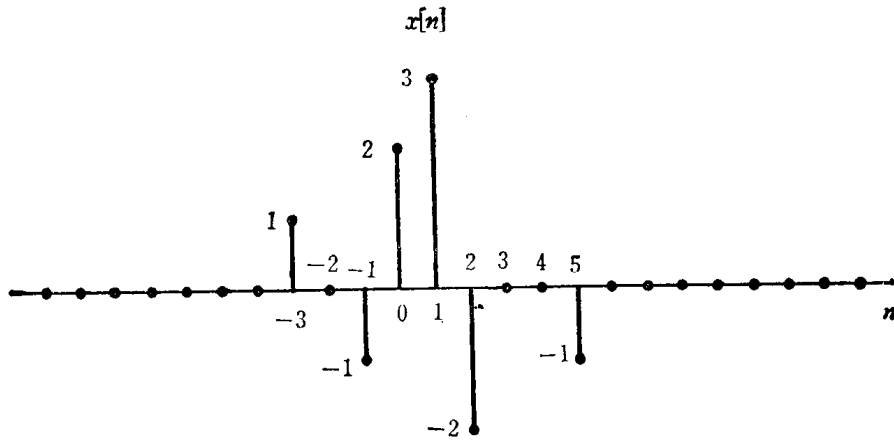


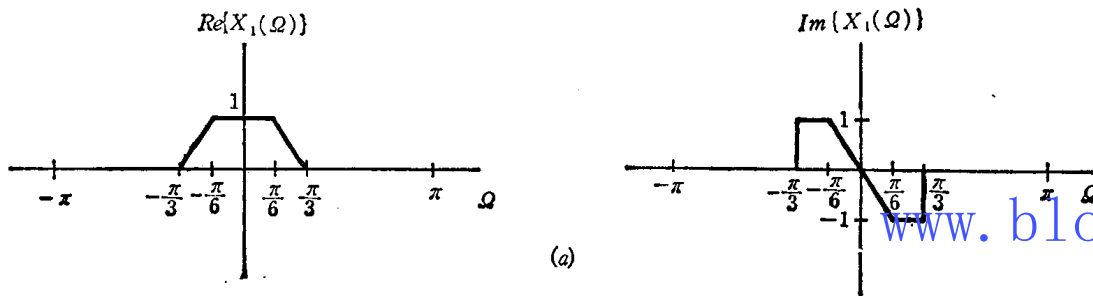
图 P 5.20

$$X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega)$$

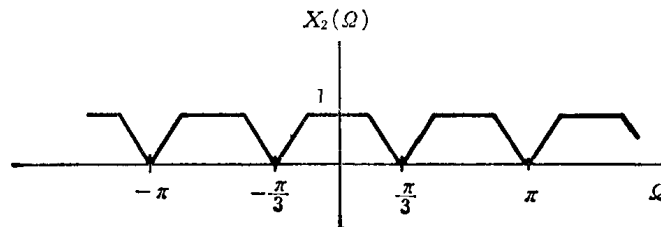
画出相应于下列变换的时间函数的略图

$$Y(\Omega) = [B(\Omega) + A(\Omega)e^{j\Omega}]$$

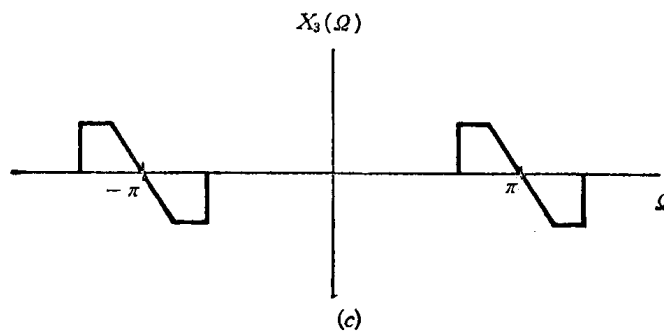
5.21. 令 $x_1[n]$ 是离散时间信号, 在图 P 5.21(a) 中描绘了其傅里叶变换 $X_1(\Omega)$ 。



(a)



(b)



(c)

图 P 5.21

(a) 研究信号 $x_2[n]$, 其傅里叶变换 $X_2(\Omega)$ 如图 P5.21(b) 所示。试用 $x_1[n]$ 表示 $x_2[n]$ 。

提示: 首先用 $X_1(\Omega)$ 表示 $X_2(\Omega)$, 然后利用傅里叶变换的性质。

(b) 对于 $x_3[n]$, 其傅里叶变换 $X_3(\Omega)$ 如图 P5.21(c) 所示, 重复(a)

(c) 令

$$\alpha = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x_1[n]}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]}$$

这个参数通常称为信号 $x_1[n]$ 的延迟时间, 它代表信号 $x_1[n]$ 的重心, 试求 α (即使先不求 $x_1[n]$, 也可以求出 α)。

(d) 分析信号 $x_4[n] = x_1[n] * h[n]$, 其中

$$h[n] = \frac{\sin \frac{\pi n}{6}}{\pi n}$$

试画出 $X_4(\Omega)$ 。

5.22. 在本题中, 我们要推导单位阶跃信号 $u[n]$ 的傅里叶变换。

(a) 利用

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

导出

$$F\{u[n]\} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + g(\Omega)$$

式中 $g(\Omega)$ 等于零 (除 $\Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 之外)。

(b) 令 $y[n] = O_d\{u[n]\}$, 证明 $y[n]$ 具有如下形式

$$y[n] = u[n] + a + b\delta[n]$$

式中 a 和 b 是待确定的常数。

(c) 利用 $F\{y[n]\}$ 必须是纯虚数这一事实, 导出

$$g(\Omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

(d) 利用(a)~(c)所推导出的结果, 连同卷积性质, 证明

$$F\left\{\sum_{m=-\infty}^n x[m]\right\} = \frac{X(\Omega)}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

5.23. (a) 设 $x_1[n]$ 为

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

并且令 $X_1(\Omega)$ 表示其傅里叶变换。连同具有下列傅里叶变换的信号一起, 画出上述信号。

(i) $X_2(\Omega) = X_1(\Omega)e^{j\Omega}, |\Omega| < \pi,$

(ii) $X_3(\Omega) = X_1(\Omega)e^{-j3\Omega/2}, |\Omega| < \pi.$

(b) 令 $z(t)$ 是连续时间信号

$$z(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{3T}\right) + \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$$

请注意, $x_1[n]$ 可视为 $z(t)$ 的均匀间隔抽样的序列。具体说,

$$x_1[n] = z(nT)$$

试证明 $x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 也可视为 $z(t)$ 的均匀间隔抽样序列。

5.24. 设 $x[m, n]$ 是取决于两个独立离散变量 m 和 n 的信号, 类似于一维的和习题4.26中所论述的连续时间情况, 可以把 $x[m, n]$ 的二维傅里叶变换定义为

$$X(\Omega_1, \Omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[m, n] e^{-j(\Omega_1 m + \Omega_2 n)} \quad (\text{P5.24-1})$$

(a) 试证明式 (P5.24-1) 可作为两个相继的一维傅里叶变换来计算, 先对 m 作一维变换, 把 n 视为固定不变; 然后对 n 进行一维变换。利用这一结果确定以 $X(\Omega_1, \Omega_2)$ 表示的 $x[m, n]$ 表达式。

(b) 假定 $x[m, n] = a[m]b[n]$,

式中 $a[m]$ 和 $b[n]$ 各为仅有一个独立变量的函数。设 $A(\Omega)$ 和 $B(\Omega)$ 分别表示 $a[m]$ 和 $b[n]$ 的傅里叶变换, 试用 $A(\Omega)$ 和 $B(\Omega)$ 表达 $X(\Omega_1, \Omega_2)$ 。

(c) 试求下列各信号的二维傅里叶变换:

(i) $x[m, n] = \delta[m-1]\delta[n+4]$;

(ii) $x[m, n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u[n-2]u[-m]$;

(iii) $x[m, n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos \frac{2\pi m}{3} u[n]$;

(iv) $x[m, n] = \begin{cases} 1, & -2 < m < 2 \text{ 和 } -4 < n < 4, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$

(v) $x[m, n] = \begin{cases} 1, & -2+n < m < 2+n \text{ 和 } -4 < n < 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(vi) $x[m, n] = \sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{2\pi m}{5}\right)$ 。

(d) 试求信号 $x[m, n]$, 其傅里叶变换为

$$X(\Omega_1, \Omega_2) = \begin{cases} 1, & 0 < |\Omega_1| < \frac{\pi}{4} \text{ 和 } 0 < |\Omega_2| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\Omega_1| < \pi \text{ 或 } \frac{\pi}{2} < |\Omega_2| < \pi. \end{cases}$$

(e) 设 $x[m, n]$ 和 $h[m, n]$ 是两个信号, 它们的二维傅里叶变换分别用 $X(\Omega_1, \Omega_2)$ 和 $H(\Omega_1, \Omega_2)$ 表示。试确定下列各信号的傅里叶变换(用 $X(\Omega_1, \Omega_2)$ 和 $H(\Omega_1, \Omega_2)$ 表示)。

(i) $x[m, n]e^{jW_1 m}e^{jW_2 n}$;

(ii) $y[m, n] = \begin{cases} x[k, r], & m=2k \text{ 和 } n=3r, \\ 0, & m \text{ 不是 } 2 \text{ 的倍数或 } n \text{ 不是 } 3 \text{ 的倍数,} \end{cases}$

(iii) $y[m, n] = x[m, n]h[m, n]$ 。

5.25. (a) 研究一离散时间 LTI 系统, 其冲激响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

利用傅里叶变换确定下列每个输入信号的响应:

(i) $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$;

(ii) $x[n] = (n+1) \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$;

(iii) $x[n] = (-1)^n$ 。

(b) 假定

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos \frac{\pi n}{2}\right] u[n]$$

利用傅里叶变换的方法求下列各输入信号的响应:

(i) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$;

(ii) $x[n] = \cos \frac{\pi n}{2}$ 。

(c) 令 $x[n]$ 和 $h[n]$ 是具有下列傅里叶变换的信号:

$$X(\Omega) = 2e^{j\Omega} + 1 - e^{-j\Omega} + 2e^{-j3\Omega}$$

$$H(\Omega) = -e^{j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} + e^{j4\Omega}$$

试求 $y[n] = x[n] * h[n]$ 。

5.26. 设 $x[n]$ 和 $y[n]$ 都是实数信号, 它们的傅里叶变换为 $X(\Omega)$ 和 $Y(\Omega)$ 。它们的相关函数 $\phi_{xy}[n]$ 为

$$\phi_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k+n]y[k]$$

按同样方式可以定义 $\phi_{yx}[n]$, $\phi_{xx}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 。令 $\Phi_{xy}(\Omega)$, $\Phi_{yx}(\Omega)$, $\Phi_{xx}(\Omega)$ 和 $\Phi_{yy}(\Omega)$ 分别表示 $\phi_{xy}[n]$, $\phi_{yx}[n]$, $\phi_{xx}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 的傅里叶变换,

(a) 试求用 $X(\Omega)$ 和 $Y(\Omega)$ 表示 $\Phi_{xy}(\Omega)$ 的表达式。

(b) 试证明对每一个 Ω , $\Phi_{xx}(\Omega)$ 是实数, 并且都是正的。

(c) 假定 $x[n]$ 是 LTI 系统的输入, 该系统的实数冲激响应为 $h[n]$, 相应的频率响应为 $H(\Omega)$, 同时假定 $y[n]$ 是其输出。试求用 $\Phi_{xx}(\Omega)$ 和 $H(\Omega)$ 表示 $\Phi_{xy}(\Omega)$ 和 $\Phi_{yy}(\Omega)$ 的表达式。

(d) 令 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, 同时令 LTI 系统的冲激响应为 $h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ 。利用本题以上各点提供的结果计算 $\Phi_{xx}(\Omega)$, $\Phi_{xy}(\Omega)$ 和 $\Phi_{yy}(\Omega)$ 。

(e) $x[n] = 2^n u[-n]$ 和 $h[n] = 4^n u[-n]$ 时, 重复(d)点计算。

(f) 如果 $x[n]$ 和 $h[n]$ 如图 P5.26 所示, 重复(d)的计算。

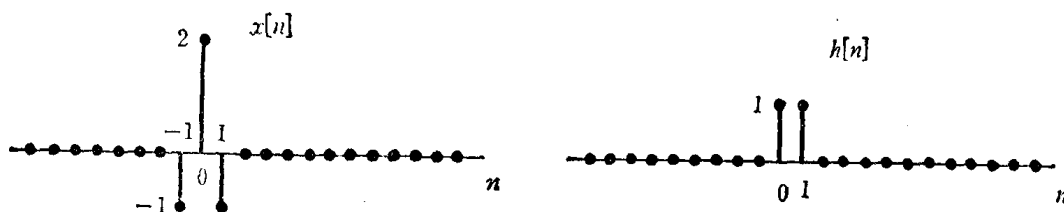


图 P5.26

www.blogoil.com

5.27. 在连续时间和离散时间 LTI 系统的频率响应讨论中, 我们曾指出, 不是所有的 LTI 系统对于复指数输入都具有有限值的响应。在本题中, 我们对这个问题提供较为深入的了解。

(a) 研究 LTI 系统, 其单位抽样响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

试计算该系统对输入

$$x_1[n] = (-1)^n$$

的响应 $y_1[n]$ 。

(b) 当输入为

$$x_2[n] = (-1)^n u[n]$$

时, 利用卷积和求输出 $y_2[n]$ 。

并证明

$$y_2[n] = y_1[n] + y_T[n]$$

其中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_T[n] = 0$$

通常 $y_T[n]$ 称为 LTI 系统的瞬态响应, 而 $y_1[n]$ 称为稳态响应。即, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对于 $x_2[n]$ 的系统响应将接近于在所有时间加入正弦信号 $(-1)^n$ 的响应, 因此, 瞬态响应是由于信号 $x_2[n]$ 起始于 $n=0$ 的缘故, 并且这种起始突然发生的影响随着 $n \rightarrow \infty$ 而渐近地衰减。这种结果十分广泛地推广到任何稳定的 LTI 系统响应中去。具体说, 如果 $x_3[n]$ 是一周期输入, 那么稳定的 LTI 系统对于 $x_4[n] = x_3[n]u[n]$ 的响应将收敛于 $x_3[n]$ 的稳态响应。另一方面

面,如课文中所论述的那样,一个非稳定的 LTI 系统,对于正弦输入可以具有无限的响应。为了对此获得某些理解,让我们来研究将(b)中的输入施加到一个非稳定的 LTI 系统的情况。

(c) 研究 LTI 系统,其冲激响应为

$$h[n] = 2^n u[n]$$

试计算该系统对 $x_2[n]$ 的响应。当 $n \rightarrow \infty$ 时,这个响应趋近稳态吗?

5.28. 在第4章,我们曾指出,具有如下冲激响应的连续时间 LTI 系统

$$h(t) = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc} \frac{Wt}{\pi} = \frac{\sin Wt}{\pi t},$$

在 LTI 系统分析中起着非常重要的作用。对于具有如下冲激响应的离散时间 LTI 系统,这一结论同样是正确的。

$$h[n] = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc} \frac{Wn}{\pi} = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

在本题中,我们要说明该系统以及与它密切相关的其他一些系统的某些性质。

(a) 分析信号

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

假定该信号是具有下面给出的冲激响应的各 LTI 系统的输入,试求每种情况的输出。

$$(i) h[n] = \frac{\sin \frac{\pi n}{6}}{\pi n},$$

$$(ii) h[n] = \frac{\sin \frac{\pi n}{6}}{\pi n} + \frac{\sin \frac{\pi n}{3}}{\pi n},$$

$$(iii) \frac{\sin \frac{\pi n}{6} \sin \frac{\pi n}{3}}{\pi^2 n^2},$$

$$(iv) \frac{\sin \frac{\pi n}{6} \sin \frac{\pi n}{3}}{\pi n}.$$

(b) 研究一 LTI 系统,其单位抽样响应为

$$h[n] = \frac{\sin \frac{\pi n}{3}}{\pi n}$$

试求下面列出的每一个输入时的输出。

(i) $x[n]$ 为图 P 5.28 中所描述的矩形波;

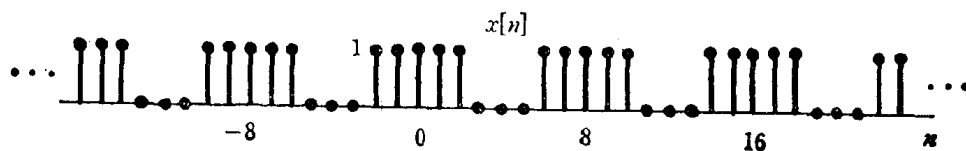


图 P 5.28

$$(ii) x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-8k],$$

$$(iii) x[n] = (-1)^n \text{ 乘以图 P 5.28 中的矩形波,}$$

$$(iv) x[n] = \delta[n+1] + \delta[n-1].$$

5.29. (a) 令 $h[n]$ 和 $g[n]$ 是两个稳定的离散时间 LTI 互逆系统的冲激响应, 试问这两个系统的频率响应之间存在什么关系?

(b) 研究由下列差分方程描述的 LTI 因果系统, 试确定每种情况下逆系统的冲激响应和表征逆系统的差分方程:

(i) $y[n] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1];$

(ii) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n];$

(iii) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1];$

(iv) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2];$

(v) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1];$

(vi) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n].$

(c) 研究稳定的 LTI 互逆系统。假定这些系统都是因果系统, 其中之一具有如图 P 5.29—1 所示的级联结构形式 (图中 ρ_i 是已知的系数)。试求该系统的逆系统之级联结构 (包括结构中每一个系数值的说明)。

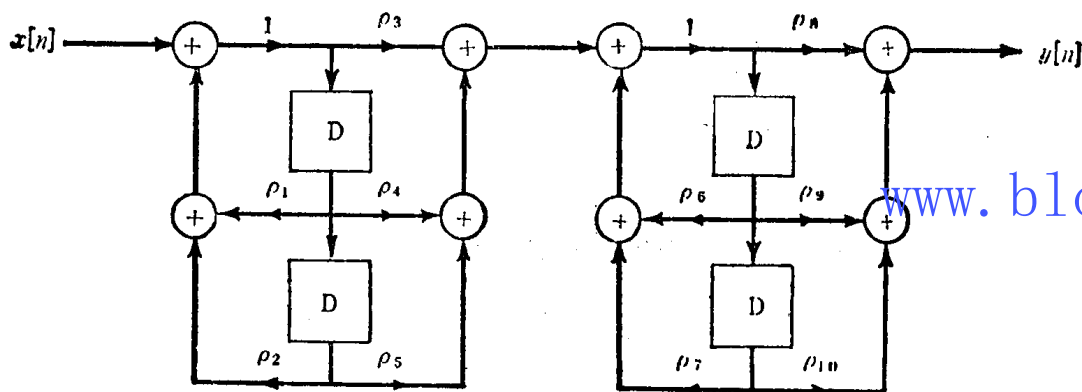


图 P 5.29—1

(d) 研究由下列差分方程描述的离散时间 LTI 因果系统

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2] \quad (\text{P 5.29-1})$$

试问该系统的逆系统是什么? 并证明这个逆系统是非因果的。求另一个 LTI 因果系统, 它是一个由式 (P 5.29—1) 所描述的系统的“延迟逆系统”。具体说, 求一个 LTI 因果系统, 以便使图 P 5.29—2 的输出 $w[n]$ 等于 $x[n-1]$ 。

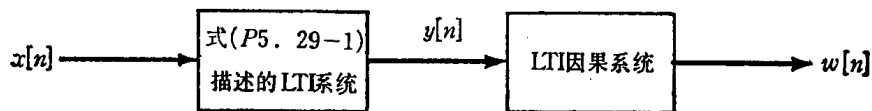


图 P 5.29—2

5.30. (a) 令 $h[n]$ 是实数离散时间 LTI 因果系统的冲激响应。试证明该系统可以完全由其频率响应的实部所确定 (提示: 证明如何从 $\text{Ev}\{h[n]\}$ 恢复 $h[n]$ 。 $\text{Ev}\{h[n]\}$ 的傅里叶变换是什么?)。这是习题 4.32 中所研究的连续时间 LTI 因果系统的实部充分性特性的离散时间对应特性。

(b) 设 $h[n]$ 是实数和因果的, 如果

$$\operatorname{Re}\{H(\Omega)\} = 1 + \alpha \cos 2\Omega, \quad (\alpha \text{ 为实数})$$

试确定 $h[n]$ 和 $H(\Omega)$ 。

(c) 试证明 $h[n]$ 可以完全由已知的 $\operatorname{Im}\{H(\Omega)\}$ 和 $h[0]$ 得到恢复。

(d) 试求两个实数 LTI 因果系统，它们频率响应的虚部等于 $\sin \Omega$ 。

5.31. (a) 设 $x[n]$ 是一离散时间序列，其傅里叶变换 $X(\Omega)$ 如图 P 5.31 所示。对于下列每一个 $p[n]$,

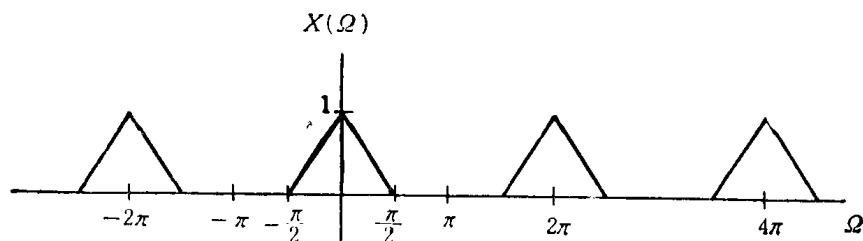


图 P 5.31

信号试画出

$$z[n] = x[n]p[n]$$

的傅里叶变换略图。

(i) $p[n] = \cos \pi n$;

(ii) $p[n] = \cos \frac{\pi n}{2}$;

(iii) $p[n] = \sin \frac{\pi n}{2}$;

(iv) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$;

(v) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4k]$.

(b) 假定 (a) 中的信号 $z[n]$ 作为具有如下单位冲激响应的 LTI 系统的输入

$$h[n] = \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\pi n}$$

试求对应于 (a) 中的每一个 $p[n]$ 的输出 $y[n]$ 。

5.32. 在本习题中，我们要介绍开窗的概念，在 LTI 系统设计和信号的频谱分析中，它都是非常重要的。所谓开窗，就是用一个有限时宽的窗信号 $w[n]$ 与所取信号 $x[n]$ 相乘的运算。即，

$$z[n] = x[n]w[n]$$

因为 $z[n]$ 也是有限时宽的。

频谱分析中开窗的重要意义，是由于在许多应用中人们希望计算所测量信号的傅里叶变换。

因为在实际应用中，我们只能测量一个有限时间间隔（时窗）的信号 $x[n]$ ，设供频谱分析的实际信号为

$$z[n] = \begin{cases} x[n], & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中 $-M \leq n \leq M$ 即是时窗，因此，

$$z[n] = x[n]w[n]$$

这里 $w[n]$ 是矩形窗

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \quad (\text{P 5.32-1})$$

开窗在 LTI 系统的设计中也起重要的作用。具体说，由于各种各样的原因（例如 FFT 算法的可能的应用——参阅习题 5.11），设计一个具有有限时宽冲激响应的系统，以便实现某些所需要的

信号处理任务,往往是有利的。也就是说,我们常常从所需要的频率响应 $H(\Omega)$ 着手,而其逆变换 $h[n]$ 是无限时宽(或至少相当长度)的冲激响应。于是,所要求的是构成一个其傅里叶变换 $G(\Omega)$ 非常接近 $H(\Omega)$ 的有限时宽的冲激响应 $g[n]$ 。选择 $g[n]$ 的一般的方法是寻找一个窗函数 $w[n]$,以使 $h[n]w[n]$ 的傅里叶变换符合所要求的 $G(\Omega)$ 的技术条件。

显然,信号开窗对形成频谱具有影响。在本题中,我们将说明这种影响。

(a) 为了对开窗的影响有所理解,利用式(P5.32-1)给出的矩形窗信号,研究下列信号的开窗

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-k]$$

(i) $X(\Omega)$ 等于什么?

(ii) 当 $M=1$ 时,画出 $z[n]=x[n]w[n]$ 的变换;

(iii) $M=10$ 时,重复(ii)。

(b) 其次研究一信号 $x[n]$, 下式描述了它的傅里叶变换

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\Omega| \leq \pi. \end{cases}$$

令 $z[n]=x[n]w[n]$, 式中 $w[n]$ 是式(P5.32-1)中的矩形窗。大致画出 $M=4, 8, 16$ 时的 $Z(\Omega)$ 。

使用矩形窗所带来的一个问题是,在变换中它引入了波纹(事实上,这直接与吉布斯现象有关)。由于这个原因,所以已发展了各式各样的其他窗信号。这些窗信号是接近锥形的,即与矩形窗的急剧变化相比,它们从0到1的变化是相当缓慢的。这样做的目的是通过进一步平滑 $X(\Omega)$, 以增加少量失真为代价来减少 $Z(\Omega)$ 中的波纹。

(c) 为了说明以上所述的论点,研究(b)中已描述的信号 $x[n]$, 并假定 $z[n]=x[n]w[n]$, 式中 $w[n]$ 是三角形或巴特利特(Bartlett)窗:

$$w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{M+1}, & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

粗略画出 $M=4, 8, 16$ 时, $z[n]=x[n]w[n]$ 的傅里叶变换。

提示: 注意三角形信号可从矩形信号的自身卷积得到。这一事实导致 $W(\Omega)$ 的一个方便表达式。

(d) 令 $z[n]=x[n]w[n]$, 式中 $w[n]$ 是称为汉宁(Hanning)窗的升余弦信号:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi n}{M} \right\}, & -M \leq n \leq M, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

粗略画出 $M=4, 8, 16$ 时的 $Z(\Omega)$ 。

5.33. (a) 研究图P5.33-1(a)所示的互连系统, 图中

$$h_1[n] = \delta[n] - \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\pi n}$$

$H_2(\Omega)$ 和 $H_3(\Omega)$ 如图P5.33-2所示。如果输入信号具有图P5.33-3所示的傅里叶变换, 试求其输出 $y[n]$ 。

(b) 对于图P5.33-1(b)的互连系统, 图中

$$h_4[n] = \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\pi n}$$

利用和(a)中一样的输入信号, 重复(a)。

www.blogoil.com

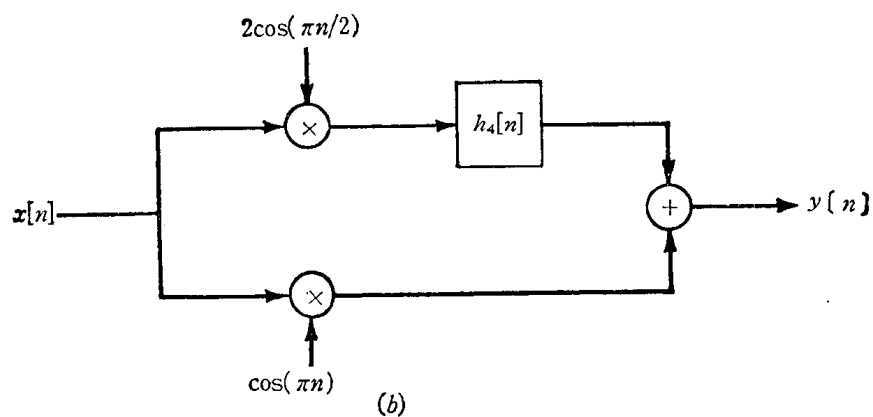
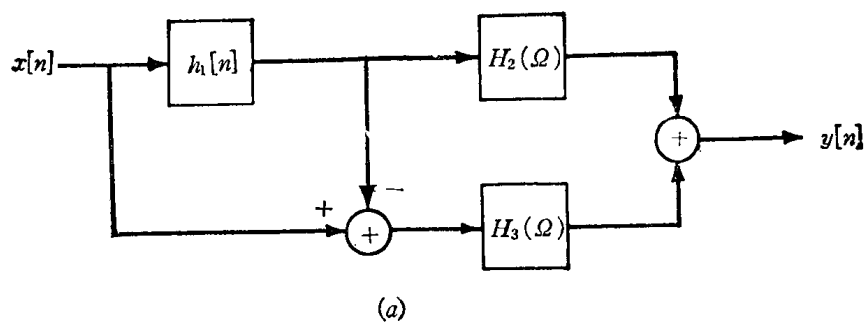


图 P 5.33—1

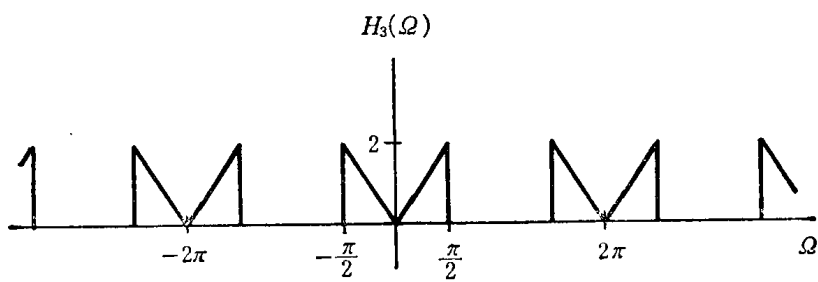
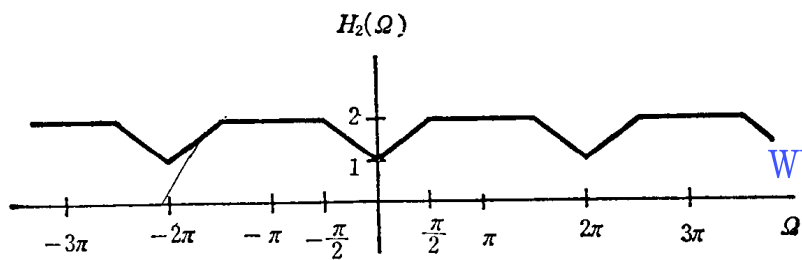


图 P 5.33—2

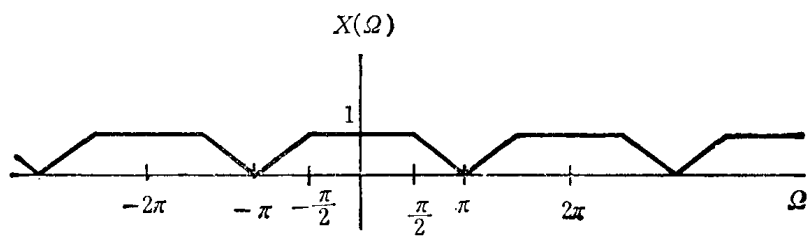


图 P 5.33—3

5.34. 分析一离散时间信号 $x[n]$, 其傅里叶变换如图 P 5.34 所示。请提供下列连续时间信号的标明有坐标刻度的略图。

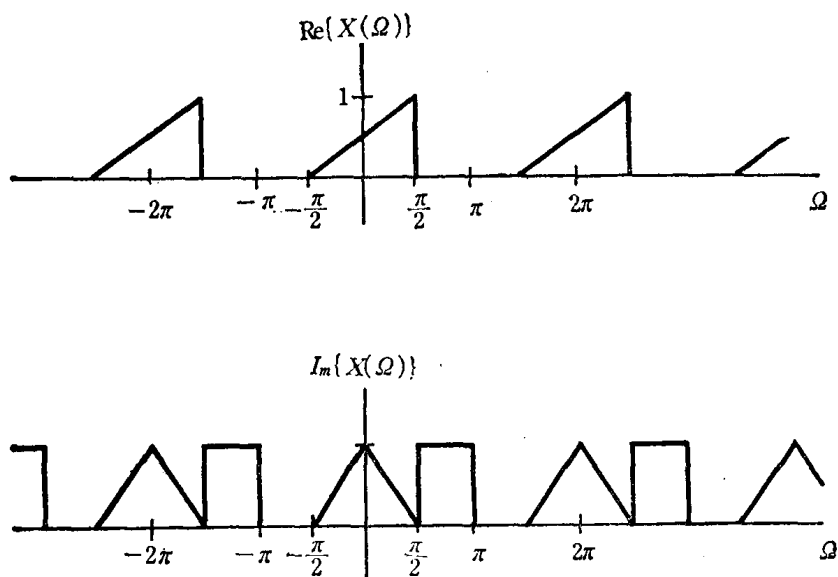


图 P 5.34

- (a) $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j(2\pi/10)nt}$;
 (b) $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{j(2\pi/10)nt}$;
 (c) $x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Re}\{x[n]\}e^{j(2\pi/8)nt}$;
 (d) $x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Re}\{x[n]\}e^{j(2\pi/6)nt}$.

www.blogoil.com

5.35. (a) 一特定的离散时间系统, 其输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$ 。由下列等式建立了这些信号的傅里叶变换之间的联系,

$$Y(\Omega) = 2X(\Omega) + e^{-j\Omega}X(\Omega) - \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

- (i) 这个系统是线性的吗? 请作出明确的回答。
 (ii) 这个系统是时不变的吗? 请给出明确的答案。
 (iii) 如果 $x[n] = \delta[n]$, 那么 $y[n]$ 应等于什么?
 (b) 研究一离散时间系统, 其输出的变换 $Y(\Omega)$ 与输入的变换 $X(\Omega)$ 通过下列关系式相联系

$$Y(\Omega) = \int_{\Omega-\pi/4}^{\Omega+\pi/4} X(\Omega) d\Omega$$

试求用 $x[n]$ 表示 $y[n]$ 的表示式。

5.36. (a) 希望设计一离散时间 LTI 系统, 它具有如下性质: 如果输入为

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

则输出为

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

- (i) 求具有这种性质的离散时间 LTI 系统的冲激响应和频率响应;
 (ii) 求表征这个系统的涉及 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的差分方程;
 (iii) 采用加法器、系数乘法器和单位延迟, 试确定该系统的一种构造, 并尽可能少用单位延迟。

- (b) 假定一系统, 对输入 $(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ 具有响应 $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ 。如果该系统的输出为 $\delta[n] - \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, 那么其输入是什么?

5.37. (a) 研究一离散时间 LTI 系统, 其单位抽样响应

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

试确定联系系统输入和输出的线性常系数差分方程。并且利用加法器、系数乘法器和延迟单元, 实现一个一阶的级联系统。

(b) 图 P 5.37 描述了一个 LTI 因果系统的方框图。

- (i) 求这一系统的涉及 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的差分方程;
(ii) 这个系统的频率响应是什么?
(iii) 确定该系统的单位抽样响应。

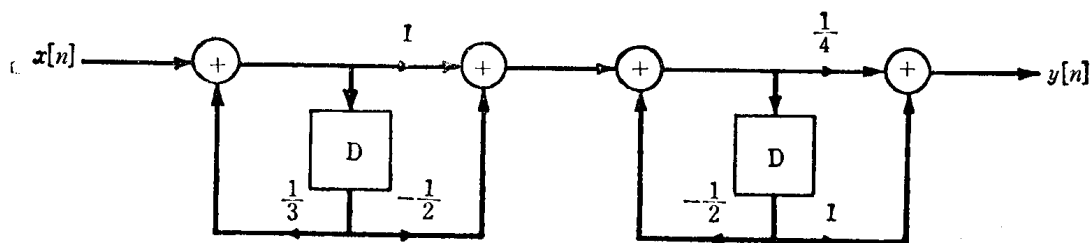


图 P 5.37

5.38. 已知一离散时间 LTI 因果系统, $x[n]$ 表示其输入, $y[n]$ 表示输出。该系统由一个包括中间信号 $w[n]$ 的一对差分方程所确定。

$$y[n] + \frac{1}{4} y[n-1] + w[n] + \frac{1}{2} w[n-1] = \frac{2}{3} x[n]$$

$$y[n] - \frac{5}{4} y[n-1] + 2w[n] - 2w[n-1] = -\frac{5}{3} x[n]$$

- (a) 求该系统的频率响应和单位抽样响应。
(b) 求该系统的涉及 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的差分方程。
(c) 采用加法器、系数乘法器和单位延迟确定该系统的一种构造, 并尽可能地少用单位延迟。

5.39. 研究一个由下列差分方程描述的 LTI 因果系统

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$$

- (a) 试确定该系统的频率响应 $H(\Omega)$ 。
(b) 对下列各输入信号, 该系统的响应是什么?

(i) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$;

(ii) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$;

(iii) $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1]$;

(iv) $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1]$ 。

- (c) 对具有下列傅里叶变换的各输入信号, 求相应的响应。

$$(i) X(\Omega) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$(ii) X(\Omega) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$(iii) X(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}$$

$$(iv) X(\Omega) = 1 + 2e^{-j\Omega}$$

5.40. 分析一个初始为静止状态并由下列差分方程描述的 LTI 系统

$$y[n] - \frac{1}{9}y[n-2] = x[n]$$

(a) 试求该系统的冲激响应。

(b) 对于下列每一输入，系统的响应是什么？

$$(i) x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n],$$

$$(ii) x[n] = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n],$$

$$(iii) x[n] = (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

(c) 对于该系统，试确定下列形式的实现。

(i) 直接形式 I；

(ii) 一阶级联系统；

(iii) 一阶并联互连系统。

5.41. 画出下列每种频率响应的对数幅度和相位略图。

$$(a) 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega},$$

$$(b) 1 + 2e^{-j\Omega},$$

$$(c) 1 - 2e^{-j\Omega},$$

$$(d) 1 + 2e^{-j2\Omega},$$

$$(e) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^3},$$

$$(f) \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}},$$

$$(g) \frac{1 + 2e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}},$$

$$(h) \frac{1 - 2e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}},$$

$$(i) \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}\right)},$$

$$(j) \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1 + \frac{3}{4}e^{-j\Omega}\right)},$$

$$(k) \frac{1 + 2e^{-j2\Omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^2}.$$

5.42. 一个 LTI 因果系统，由下列差分方程表示

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n] + x[n-1]$$

式中 a 是实数, 且数值小于 1。

(a) 求 b 值, 以便使系统的响应满足

$$|H(\Omega)|=1, \text{ 对所有的 } \Omega.$$

由于这个系统对任何 Ω 值的输入 $e^{j\Omega n}$ 不衰减, 所以把这样一种系统称为全通系统。本题的余下部分都利用这个 b 值。

(b) 当 $a=1/2$ 时, 画出 $0 \leq \Omega \leq \pi$ 时的 $\angle H(\Omega)$ 的略图。

(c) 当 $a=-\frac{1}{2}$ 时, 画出 $0 \leq \Omega \leq \pi$ 时的 $\angle H(\Omega)$ 的略图。

(d) 当输入为

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

求出 $a=-\frac{1}{2}$ 时, 该系统的输出, 并画出它的略图。

从这个例子可以看出, 相位的非线性变化与由线性相位变化所引起的时间移位相比, 对信号具有显著不同的结果。

5.43. 由下列差分方程描述的特定 LTI 因果系统

$$y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2} y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

(a) 试求该系统的冲激响应。

(b) 画出系统频率响应的对数幅度和相位略图。

5.44. 由下列差分方程表征的 LTI 因果系统

$$y[n] - \frac{1}{4} y[n-1] - \frac{1}{8} y[n-2] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-4]$$

(a) 绘出该系统的直接形式 II 结构。

(b) 绘出由两个二阶系统串联连接而成的级联形式(用单位延迟、加法器和系数乘法器)。需要指出的是, 其中一个二阶系统是 FIR 系统。

(c) 绘制一个由四个一阶系统(其中有两个是 FIR 系统)组成的级联结构。

(d) 利用附录中所描述的部分分式展开式的方法, 将系统的频率响应 $H(\Omega)$ 写成如下形式

$$H(\Omega) = C_0 + C_1 e^{-j\Omega} + C_2 e^{-j2\Omega} + \frac{a_0 + a_1 e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega} - \frac{1}{8} e^{-j2\Omega}}$$

式中 C_0, C_1, C_2, a_0 和 a_1 是待定系数。

利用这个表达式有助于:

(i) 确定系统的单位抽样响应;

(ii) 绘制由一个递归二阶系统和一个 FIR 系统并联连接而成的系统结构。

5.45. (a) 研究具有下列频率响应的两个 LTI 系统

$$H_1(\Omega) = \frac{1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{4} e^{-j\Omega}}$$

$$H_2(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{4} e^{-j\Omega}}$$

试证明这两个频率响应具有同样的幅度函数(即, $|H_1(\Omega)| = |H_2(\Omega)|$), 但 $H_2(\Omega)$ 的相位比 $H_1(\Omega)$ 的相位大。

- (b) 确定并画出这两个系统的冲激响应和阶跃响应。
 (c) 证明

$$H_2(\Omega) = G(\Omega)H_1(\Omega)$$

式中 $G(\Omega)$ 是一全通系统 (即, 对所有 Ω , $|G(\Omega)|=1$, 参看习题 5.42)。

频率响应为 $H_1(\Omega)$ 的系统, 通常称为最小相位系统, 其单位抽样响应称做最小相位信号; 频率响应为 $H_2(\Omega)$ 的系统, 称为非最小相位系统, 形成这种术语的原因可从 (a) 的结果中知道。这些系统及其高阶的一般化形式, 是习题 4.45 中介绍的那些系统的离散时间对应系统。

5.46. 分析一个系统, 它是由具有下列频率响应的两个 LTI 系统级联组成的。

$$H_1(\Omega) = \frac{2 - e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$H_2(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$$

- (a) 求描述整个系统的差分方程。
 (b) 求整个系统的实现, 这个系统是由一阶和二阶系统级联组成的, 其中一阶系统具有频率响应

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

- (c) 确定整个系统的冲激响应。
 (d) 利用单位延迟、加法器和系数乘法器, 求整个系统的实现, 这个系统是由一阶和二阶系统的并联连接组成的。

5.47. 在 5.11 节讨论级联结构时, 曾含蓄地假定 $b_0 \neq 0$ [参看式 (5.150)]。在课文中这样做是为了简化讨论, 并且如我们在本习题中就要看到的那样, 对于 $b_0 = 0$ 的系统可以方便地构成级联结构。

- (a) 绘出具有下列频率响应的 LTI 因果系统的直接形式 I 的结构。

$$H(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\Omega}}$$

- (b) 分析 LTI 因果系统, 其频率响应为

$$H(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega} + 2e^{-j3\Omega}}{\left(1 - \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\Omega}\right)\left(1 - e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}\right)}$$

绘制该系统的结构, 它应由两个二阶系统级联组成。

- (c) 令

$$H(\Omega) = \frac{e^{-j4\Omega}}{\left(1 - \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\Omega}\right)}$$

绘制由两个二阶系统 (其中一个是 FIR 系统) 级联组成的结构。

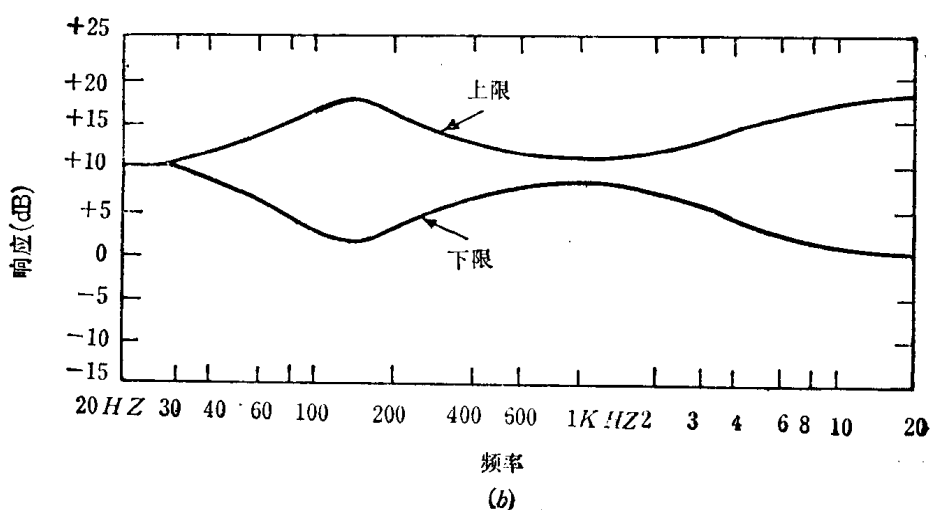
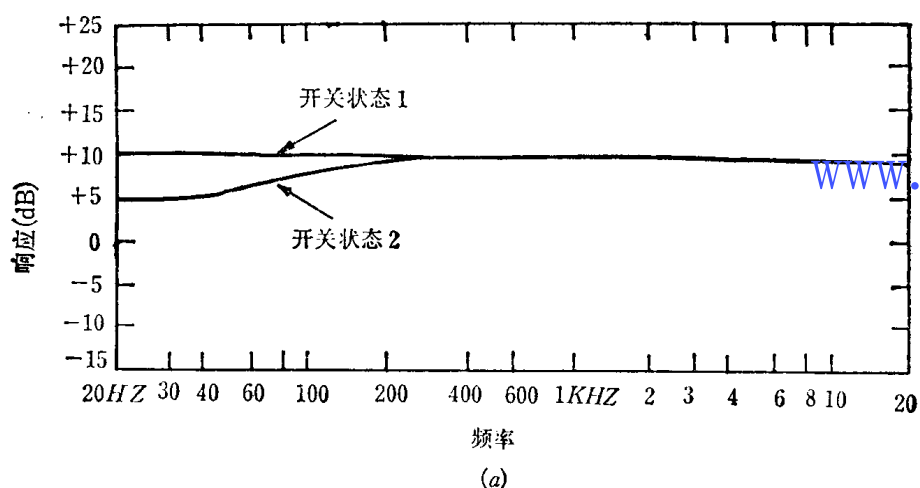
- (d) 研究 (c) 的频率响应。利用附录中介绍的部分分式展开法, 绘制一个由递归二阶系统和非递归二阶系统并联连接而成的结构。

第六章 滤 波

6.0 引 言

在各种各样的重要应用中,令人感兴趣的是改变信号中各频率分量的相对幅度或完全抑制某些频率分量的所谓滤波过程。对线性时不变系统来说,其输出信号的频谱等于输入信号频谱乘以系统的频率响应,因此,采用经过适当选定频率响应的线性时不变系统,就可方便地实现滤波。这说明了线性时不变系统的一个非常重要的应用。

音响系统可作为线性时不变滤波的一个例子。在这种系统中,通常包含一个滤波器,以便使收听者能够调整低频能量(低音)和高频能量(高音)的相对大小。这个滤波器相当于一个线性时不变系统,它的频率响应可通过操作音调控制来改变。此外,在高保真音频系统中,其前置放大器通常也包含一个滤波器,以便补偿扬声器的频率响应。图6.1中所示的例子,是一种特殊系列扬声器所用的均衡电路的频率响应。为了补偿扬声器和试听室的频率响应,设计了各种均衡电路,它们是由两级级联组成的:一个控制级和一个均衡级。均衡器具有图6.1(c)所示的固定频率响应。控制级由两级滤波器级联组成,其频率响应如图6.1(a)和(b)



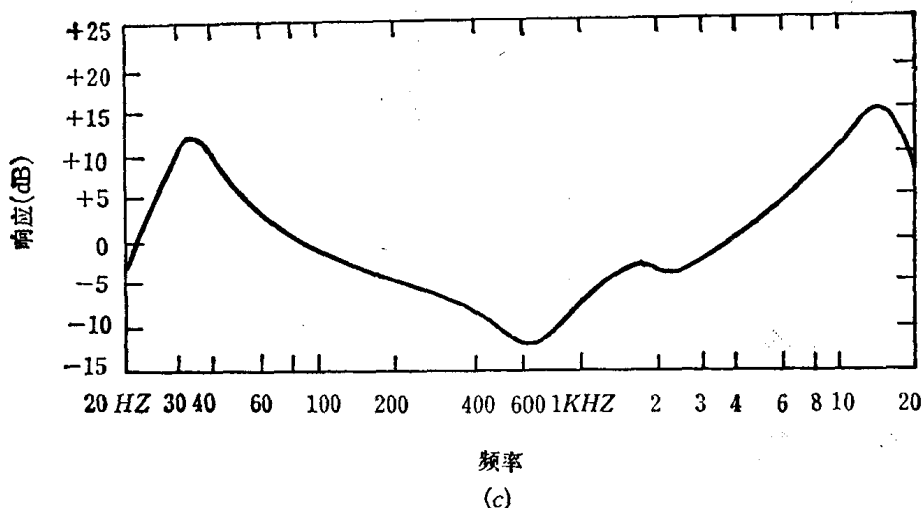


图6.1 一种特殊系列扬声器均衡电路的频率响应：(a)由双位开关控制的低频滤波器；
(b)连续可调成形滤波器的频率上限和下限；(c)均衡级的固定频率响应

所示。第一级滤波器是用双位开关控制的低通滤波器，可以提供图6.1(a)所示两种频率响应中的一个。控制级中的第二级滤波器具有两个连续可调的滑动开关，用来改变图6.1(b)所示范围内的频率响应。

另一类常用的线性时不变滤波器，它的输出近似地等于输入的导数。根据第4章和第5章中讨论的傅里叶变换微分性质，可以得出一个微分滤波器的频率响应，它具有 $H(\omega) = j\omega$ 形式（即，幅度随频率线性变化）。图6.2表示微分滤波器的频率响应特性。微分滤波器能有效地加强信号的快速跃变，它经常应用于图像处理中的边缘增强。图6.3说明了微分滤波器对一幅图像的影响。图6.3(a)表示两幅原始图像，图6.3(b)表示用具有线性频率响应的滤波器处理的图像。由于图像边缘处的导数比亮度变化缓慢区域的导数大，所以微分滤波器的效果是增强边缘。

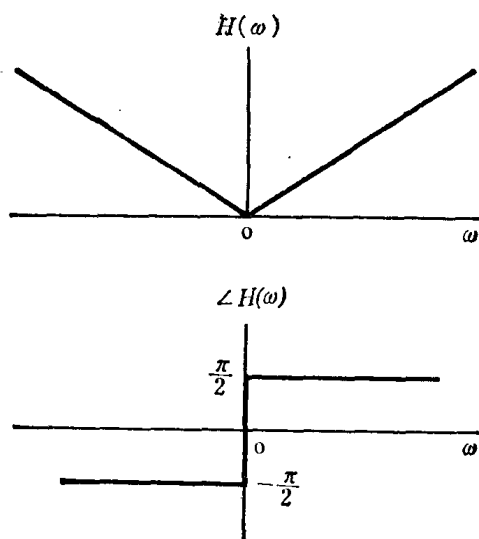
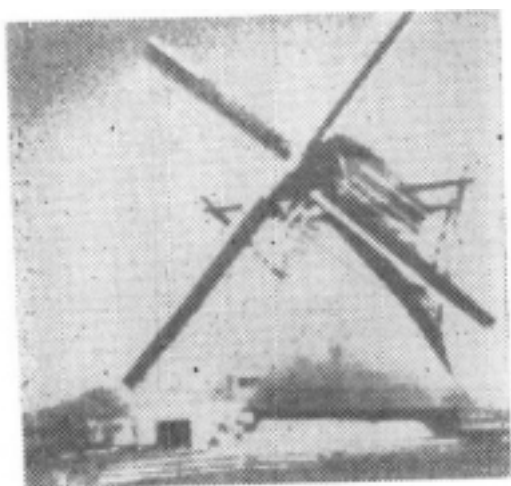
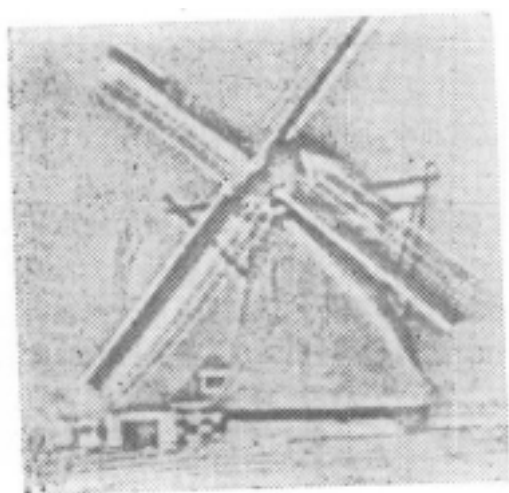


图6.2 微分滤波器（其输出为输入的导数）的频率响应特性

频率选择滤波器是另一类重要的LTI滤波器，在一个或一组频带中，它可以不失真地让信号通过，并衰减或全部抑制其余频带中信号。频率选择滤波器用在各式各样的场合中。例



(a)



(b)

图6.3 微分滤波器在图像处理中的作用：(a)两幅原始图像；(b)经微分滤波器处理过的图像

如，若一个音频录音带中表面噪声所处频段比录音带上的音乐和语言的频段高时，就可通过频率选择滤波器来消除之。频率选择滤波器的另一类重要应用是在通信系统中。如第7章中将要详细讨论的，调幅(AM)系统的基本原理，是将来自各个信道的信息置于分开的频段中，以便传输同时来自许多不同信号源的信息，而在接受端用频率选择滤波器取出各个信道或频带。用于分开信道的频率选择滤波器和用于调节音质的频率成形滤波器，构成了任何家庭无线电和电视接收机的主要部件。

类似于证券行情平均值的经济数据序列分析，一般采用离散时间滤波器。通常，长期变化(相当于低频)与短期变化(相当于高频)相比具有不同的意义，分别分析这些分量是有益的。这些分量的分离，一般可用离散时间频率选择滤波器来完成。经济数据序列的滤波还用来消除迭加在有用数据上的随机波动(这种波动一般属于高频)，以使数据平滑。

以上介绍的仅仅是线性时不变系统用于滤波的许多应用中的一小部分，在本章及以后几章中，我们还会看到连续时间和离散时间滤波器的其他一些例子。详细地说，滤波的课题包含着许多问题，例如，设计和实现等问题。对特殊用途来说，恰当的滤波器选择常常变为大量的工艺选择问题。本章的主要目的是介绍滤波的基本概念，而不准备包括课题的细节。我们将

会看到, 这些概念直接起源于第4章、第5章中所研究的傅里叶变换的概念和性质。因此, 除了介绍重要应用领域之外, 进一步理解傅里叶变换的性质及其重要性, 将作为本章讨论的重点。

6.1 理想频率选择滤波器

6.1.1 理想频率选择滤波器的频域特性

LTI系统滤波的数学基础实际上就是, 系统输出的傅里叶变换等于输入的傅里叶变换乘以系统的频率响应。理想频率选择滤波器是这样一种滤波器, 它在一组频率上能完整地通过复指数信号, 而完全抑制其余频率范围的复指数信号。连续时间滤波器的频率响应 $H(\omega)$ 如图6.4

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (6.1)$$

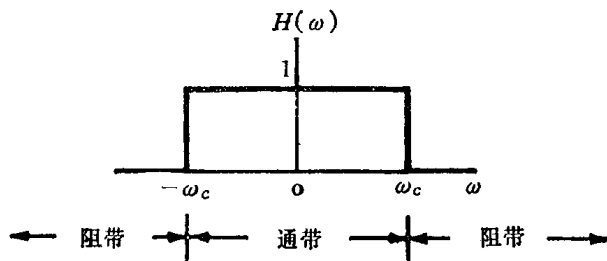


图6.4 理想低通滤波器的频率响应

所示, 在 $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ 范围内, 它能通过复指数信号 $e^{j\omega t}$, 在所有其他频率范围, 复指数信号则不能通过。具有这种频率响应的滤波器, 因其通频带以 $\omega = 0$ 为中心, 所以称为理想低通滤波器。滤波器的传递频带称为通带, 而抑制的频带称为滤波器的阻带。频率 ω_c 称为截止频率。图6.5表示了另外两个连续时间理想频率选择滤波器。根据各类滤波器所选择的频率范围看, 图6.5(a)相当于一个高通滤波器, 而图6.5(b)则相当于一个带通滤波器。

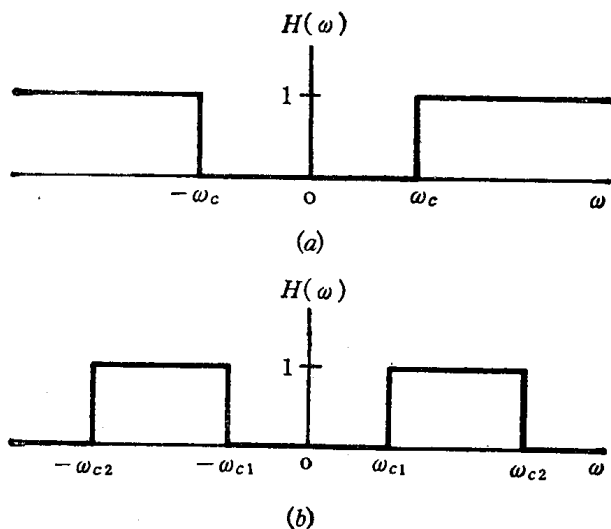


图6.5 (a)理想高通滤波器的频率响应; (b)理想带通滤波器的频率响应

图6.6表示几个离散时间理想滤波器的频率响应，其中图6.6(a)相当于一个低通滤波器，图6.6(b)相当于一个高通滤波器，而图6.6(c)相当于一个带通滤波器。连续时间和离散时间理想滤波器频率响应特性的差别在于，离散时间滤波器的频率响应 $H(\Omega)$ 必须具有周期性，其周期为 2π 。如第2章中所讨论的那样，靠近 π 偶数倍 ($\Omega=0, \Omega=\pm 2\pi$ 等) 的频率被理解为低频，而那些靠近 π 奇数倍 ($\Omega=\pm\pi, \pm 3\pi$, 等) 的频率被理解为高频。

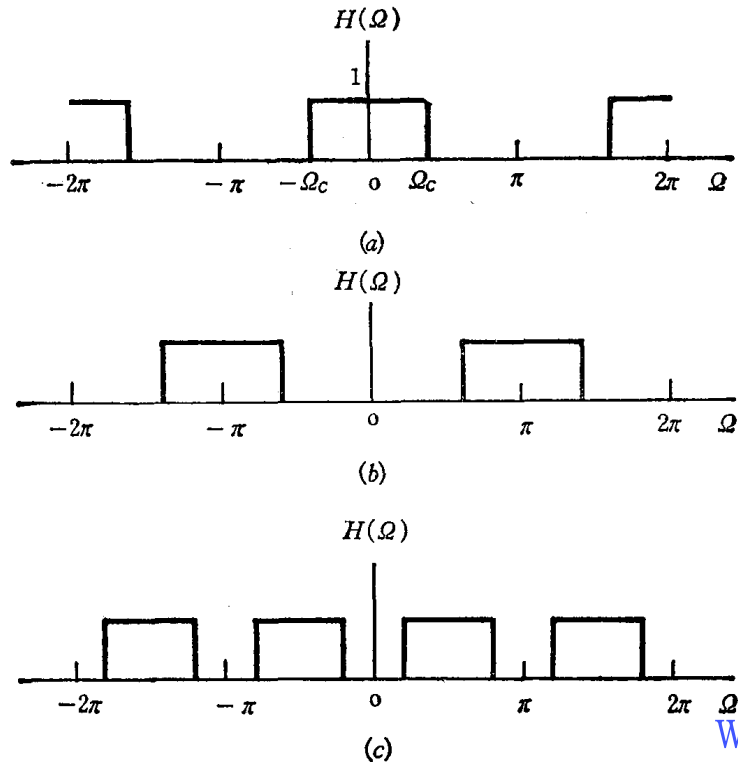


图6.6 离散时间理想频率选择滤波器：(a)低通；(b)高通；(c)带通

图6.4、图6.5和图6.6中每一个理想滤波器都有正实数的频率响应，换句话说，它们都具有零相位特性。这种相位特性，来源于频率分量全部处于滤波器通带内的任何信号应不失真传递的需要。在第4章和第5章的许多例子中，我们已经看到，即使频谱的幅度保持不变，相位的改变也会导致信号形状的严重失真。有一种特殊情况，其非零相位特性往往产生一种可允许的“失真”，即图6.7所示的连续时间理想低通滤波器的线性相位。如性质4.6.3的结果(即式(4.85))那样，线性相位特性引进一个时间移位。类似的叙述，也可以应用到连续时间和离散时间的其他理想滤波器上。

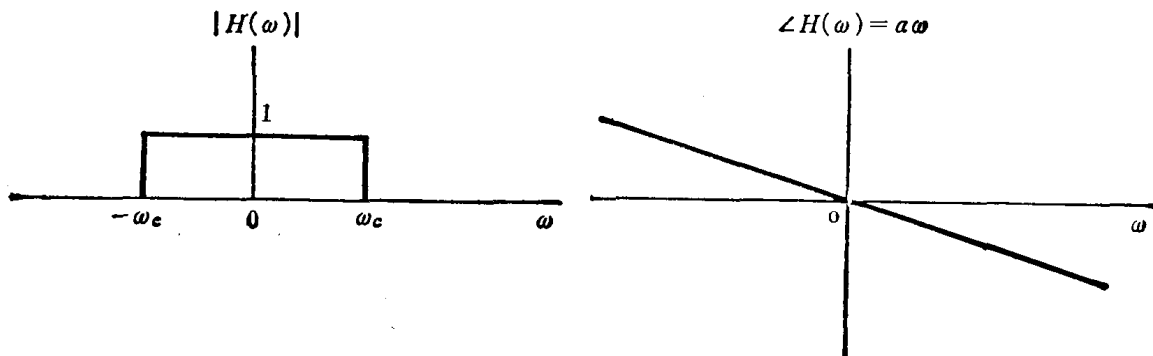


图6.7 相位与 ω 成正比的理想低通滤波器

6.1.2 理想频率选择滤波器的时域特性

至此，讨论集中于理想频率选择滤波器的频域特性。通常在设计 and 应用滤波器时，注意到时域特性也是很重要的，如冲激响应和阶跃响应等。在后面的讨论中，我们集中于连续时间和离散时间的理想低通滤波器。

理想低通滤波器的冲激响应，相当于图6.4 频率响应的傅里叶逆变换，并且如例4.11中所讨论的那样，是

$$h_{lp}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \quad (6.2)$$

图6.8 画出了这一冲激响应。这里滤波器的通带宽度与 ω_c 成正比，并且冲激响应的主瓣宽度与 $1/\omega_c$ 成正比。随着滤波器带宽的增加，冲激响应就变得越窄，反之亦然。当然，这与4.6.5节中讨论的傅里叶变换的比例尺变换性质相符合。对相应于图6.7的线性相位理想低通滤波器，其冲激响应仅仅滞后一个 α 角，如图6.9所示。

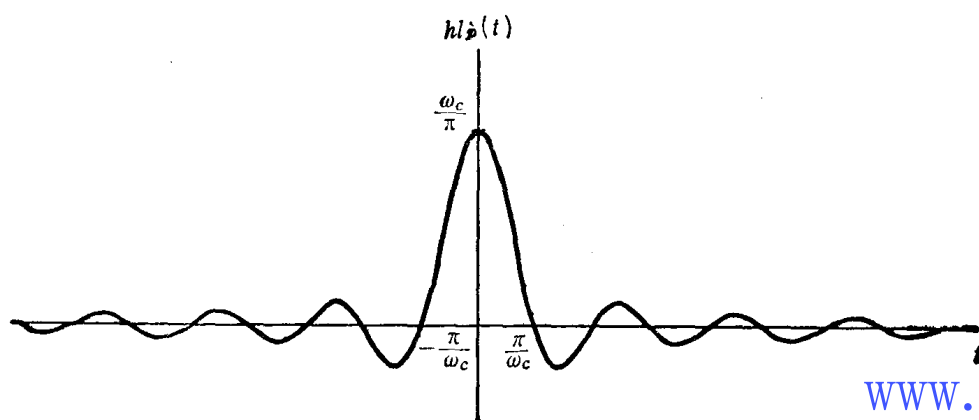


图6.8 理想低通滤波器的冲激响应

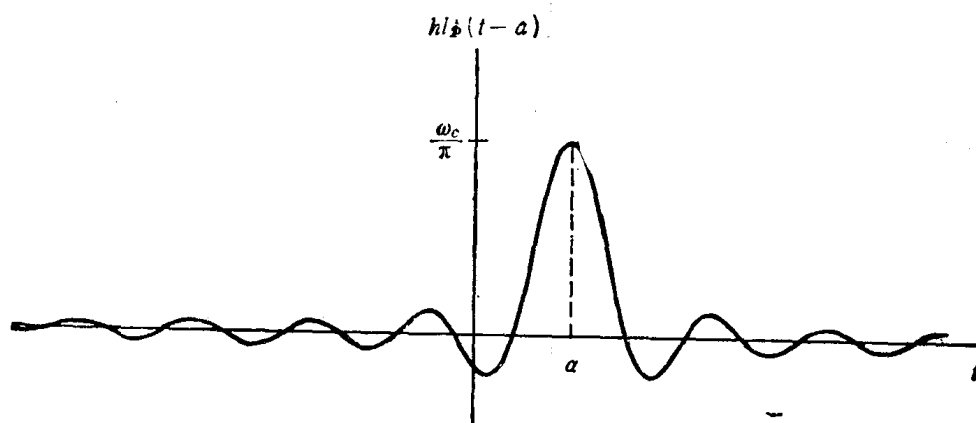


图6.9 图6.7所示滤波器的冲激响应

对于离散时间理想低通滤波器，其冲激响应可以根据例5.16得出

$$h_{lp}[n] = \frac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_c n}{\pi}\right) \quad (6.3)$$

图6.10中画出了 $\Omega_c = \pi/4$ 时的这一冲激响应。

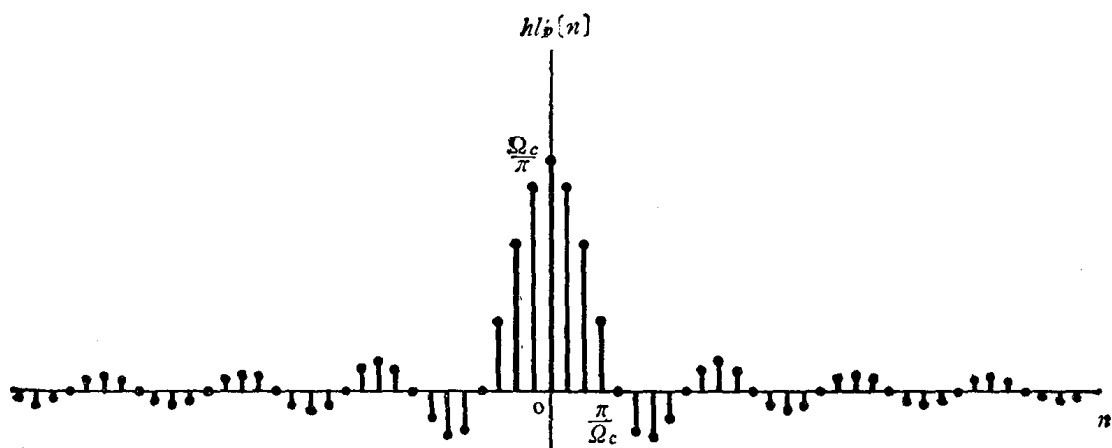


图6.10 离散时间理想低通滤波器的冲激响应 ($\Omega_c = \pi/4$)

图6.11表示连续时间和离散时间的理想低通滤波器的阶跃响应。由这两种情况可看出，在时域中，理想低通滤波器的响应呈现过冲量和振铃现象，这很像4.12节连续时间和5.12节离散时间情况下所讨论的欠阻尼二阶系统。在某种意义上，并不希望有这种时域特性。如在下一节分析的那样，由于种种原因，通常感兴趣的是设计一个由通带到阻带具有平缓变化的滤波器。

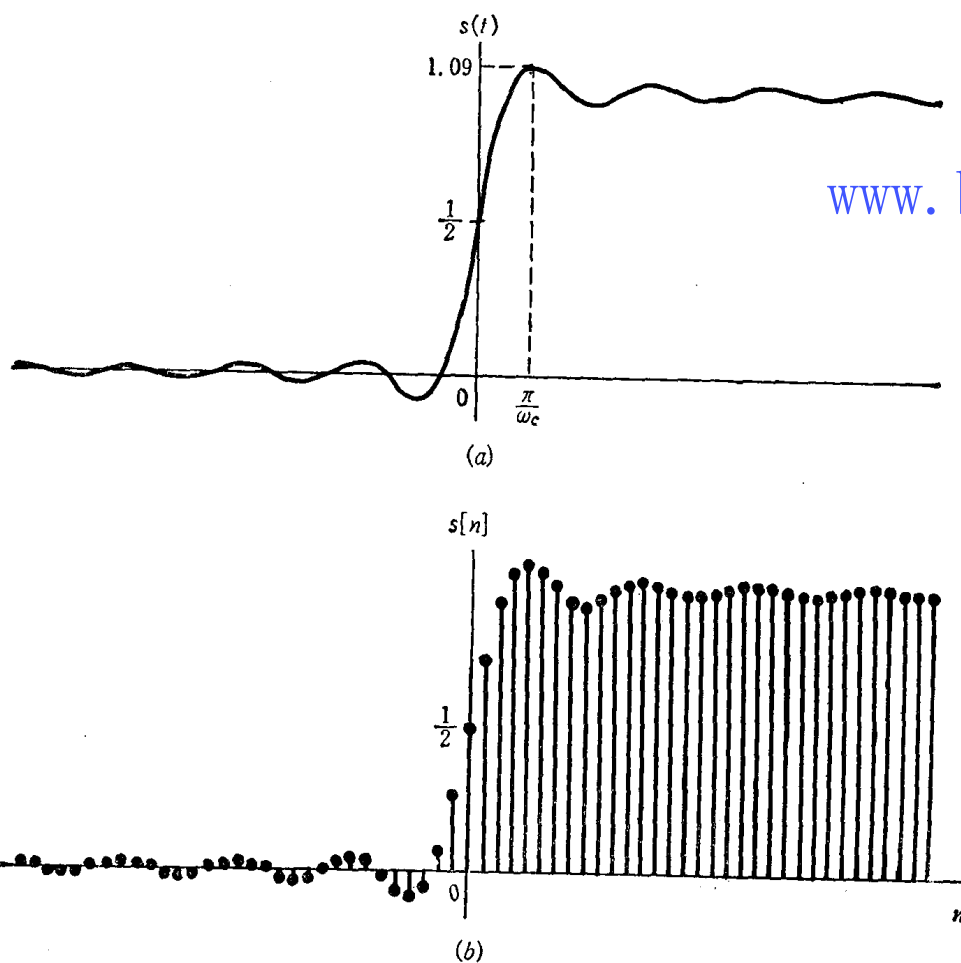


图6.11 (a)连续时间理想低通滤波器的阶跃响应， (b)离散时间理想低通滤波器的阶跃响应

6.2 非理想频率选择滤波器

上一节所讨论的滤波器通常称为理想滤波器，因为它们恰好能通过一组频率，而完全抑制其他频率。然而，这未必合乎需要。例如，在许多滤波情况下，要分离的信号不是处在完全分开的频带中。典型情况如图6.12所描绘，其中两个信号的频谱稍有重叠。当滤去重叠频谱信号之和的部分时，一种从通带到阻带具有逐渐变化的滤波器通常是较为可取的。

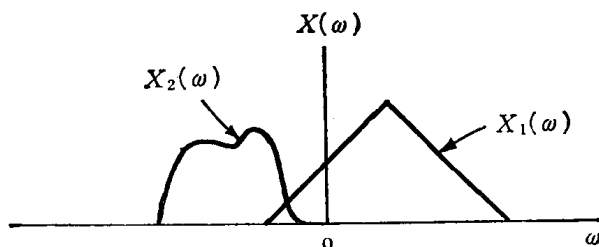


图6.12 稍有重叠的两个频谱

如6.1.2节所指出的，通过对图6.11所示的理想低通滤波器阶跃响应的研究，提出了另一种见解，对于连续和离散时间两种情况，离开不连续点足够远的地方，阶跃响应近似地等于阶跃值。然而，在不连续点的附近，阶跃响应超出阶跃值，并且出现振铃现象。在某些场合，上述时域特性可能是不希望有的。因为在许多情况下，并不需要这种“理想”的频率选择滤波器特性，而是与“理想”滤波器的急剧变化特性相反，通常希望在滤波器的通带和阻带的特性方面能有某些灵活性，像允许在通带与阻带之间有更缓慢的转变。例如，在连续时间低通滤波器中，除了允许通带边缘和阻带边缘之间有过渡带的技术要求之外，还允许在通带内可偏离单位增益，在阻带内可偏离零增益。因此，低通滤波器的技术指标常常要求滤波器的频率响应的幅度位于图6.13所示的非阴影区内。在该图中，通带内的频率响应允许对1

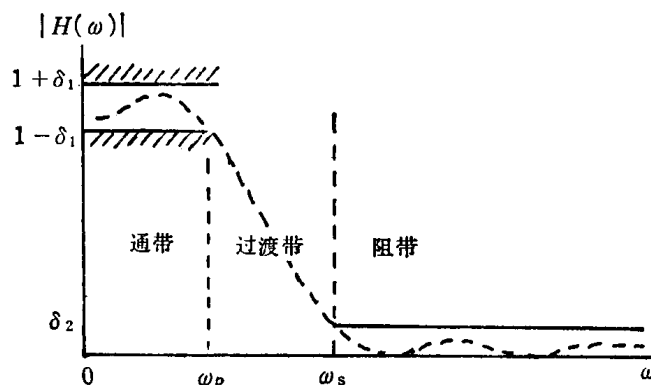


图6.13 低通滤波器容限：可允许的通带波纹为 $\pm\delta_1$ ，可允许的阻带波纹为 δ_2 。虚线表示保持在容限范围之内一条可能的频率响应曲线

的偏离为 $\pm\delta_1$ ，阻带内则允许偏离于零 $\pm\delta_2$ 。通带内频率响应与1相差的量称为通带波纹，而阻带内频率响应偏离零的量称为阻带波纹。频率 ω_p 称为通带边界频率，而 ω_s 称为阻带边界频率，从 ω_p 到 ω_s 的频率范围提供了从通带到阻带的过渡，并称之为过渡带。上述类似的定义除了适用于其他连续和离散时间频率选择滤波器之外，也适用于离散时间低通滤波器。

即使理想频率选择特性是所需要的，但这种特性也许是无法得到的。例如，由式(6.2)和(6.3)显然可知，理想低通滤波器是非因果系统，因此，为了实时滤波，必须采用因果系统

来近似它们。同样，可说明理想的高通和带通滤波器也是非因果的。当要实现实时滤波时，因果性是一个必需的约束，因此，需要对理想特性进行因果近似。进一步的考虑是实现的简易性，这就推动我们在滤波器特性方面进行某些灵活性的研究。总之，不管在连续时间情况下利用电阻、电容和运算放大器之类的元件，还是在离散时间情况下利用存储器、乘法器和加法器之类的元件，当我们越想准确地近似或实现一个理想频率选择滤波器，其实现就变得越复杂或者越昂贵。在许多情况下，或许不一定需要精确的滤波特性，而只要一个简单的滤波器就可满足要求。

综合以上所述的某些论点，可将汽车悬置系统理解为低通滤波器。图6.14给出了由弹簧和缓冲器（冲击减震器）组成的简单悬置系统的图解表示。路面可看成是由路面凹凸不平的小幅度的快速变化（高频）和一般地势所造成高度逐渐变化（低频）两者的迭加。汽车悬置系统一般是用来滤去在汽车行驶中由路面凹凸不平所引起的快速变化，即，起着—个低通滤波器的作用。

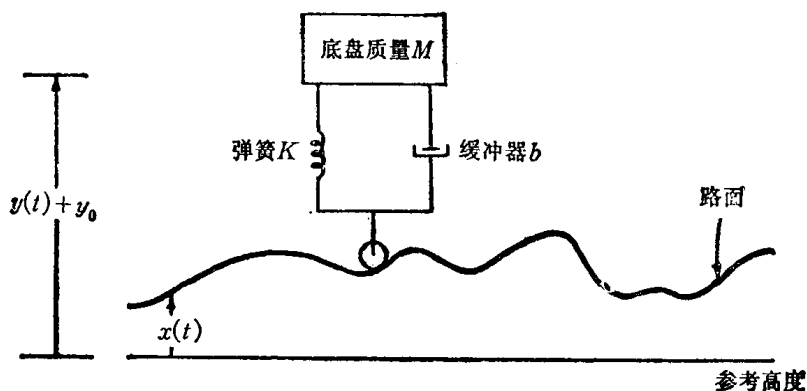


图6.14 汽车悬置系统的图解表示。 y_0 表示汽车静止时底盘和路面之间的距离， $y(t) + y_0$ 是底盘在参考高度以上的位置， $x(t)$ 是道路高于参考高度的标高

由悬置系统代表的低通滤波器，其基本目的是提供平稳的行驶，而在可通过和要抑制的频率之间，不存在明显的固有分界。因此，合理的要求是低通滤波器应具有从通带到阻带的逐渐过渡。此外，系统的时域特性也相当重要。如果悬置系统的冲激响应或者阶跃响应出现振铃现象，那末在道路上出现大的颠簸（模拟为冲激输入）或障碍物（模拟为阶跃输入）时，将导致不舒适的振荡响应。事实上，悬置系统的常见试验就是用压下底盘然后放开底盘的方法引入激励，如果响应出现振铃，则表明需要更换减震器。

实现的代价和难易程度在汽车悬置系统的设计中也起着重要的作用。从乘客舒适的观点出发，已进行了许多关于解决最合适悬置系统频率响应的研究。在成本许可的情况下，例如，对于铁路运输车厢，可以使用复杂、昂贵的悬置系统。对于汽车制造业来说，成本是一个重要的因素，因而一般都使用简单、低廉的悬置系统。典型的汽车悬置系统，只由弹簧和阻尼器把底盘与轮子连接在一起而构成。

6.3 由微分方程描述的连续时间频率选择滤波器的例子

汽车悬置系统是用频率选择滤波器作近似的—个例子，这个滤波器利用由线性常系数微分方程描述的元件构成的。更—般来说，在各种各样电的、机械的和数字的范围内，由线性常系数微分方程或差分方程描述的系统，可提供—个实现非理想滤波器的特别简便的方法。

在本节和下一节中，我们要研究若干个例子，它们说明了用微分和差分方程来达到连续时间和离散时间频率选择滤波器的实现(包括汽车悬置系统)。

6.3.1. RC低通和高通滤波器

作为一个简单的连续时间低通滤波器的例子，我们分析图6.15中的一阶RC电路。电容器上的电压视为系统的输出，电压源是系统的输入。输出电压与输入电压通过下列线性常系数微分方程相联系

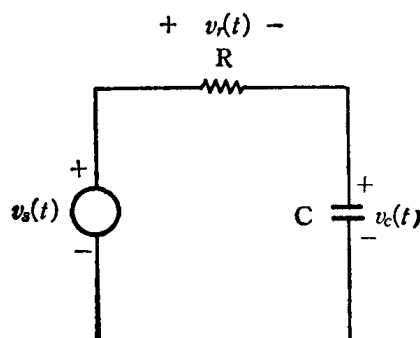


图6.15 一阶RC滤波器

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t) \quad (6.4)$$

因此，这相当于4.12节所研究的一阶系统的形式，其时间常数 τ 等于 RC 。图4.39已说明了该系统的冲激响应和阶跃响应，现重绘于图6.16中。图4.40表示了频率响应波特图，并把它复制在图6.17中。从图6.17可看出，滤波器起着近似于理想低通滤波器的作用。作为一种替换，可选用电阻器的端电压作为输出，以代替电容器上的电压输出。在此情况下，输入和输出关系的微分方程为

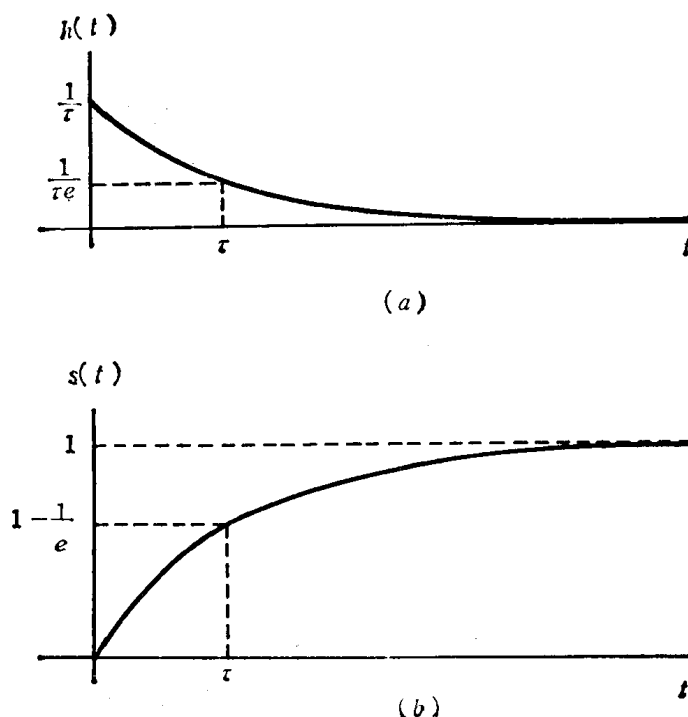


图6.16 (a) RC 低通滤波器的冲激响应 ($\tau=RC$)，(b) RC 低通滤波器的阶跃响应 ($\tau=RC$)

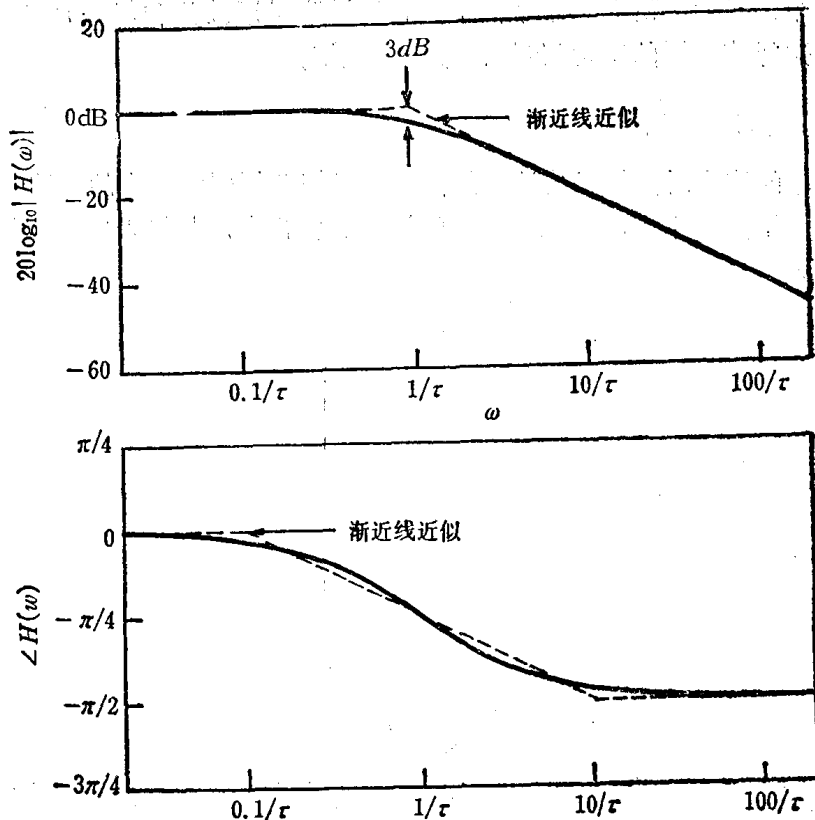


图6.17 一阶 RC 低通滤波器的波特图 ($\tau=RC$)

$$RC \frac{dv_R(t)}{dt} + v_R(t) = RC \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (6.5)$$

其频率响应 $G(\omega)$ 为

$$G(\omega) = \frac{v_R(\omega)}{v_s(\omega)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (6.6)$$

此时，阶跃响应如图6.18所示，频率响应的波特图如图6.19所示。图6.19指出，用电阻器上的电压作输出时， RC 电路的特性近似于高通滤波器。

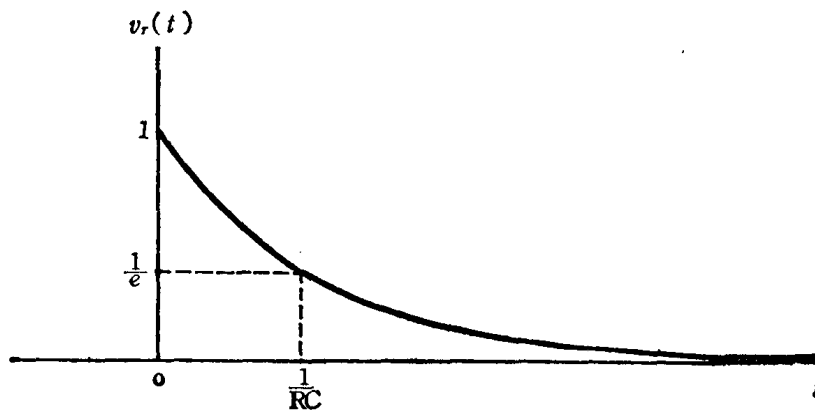


图6.18 输出为 $v_r(t)$ 的 RC 电路的阶跃响应

由以上例子看出，简单的 RC 电路可以起到高通或低通滤波器的作用，这取决于实际输出变量的选择。这些滤波器从通带到阻带没有陡峭的变化。如果需要的话，具有陡峭变化的更

复杂的滤波器，可以通过使用更多的能量存储元件（电气滤波器中的电容与电感和机械滤波器中的弹簧与质量）来实现，这将导致高阶微分方程。前面已介绍并在下面作进一步研究的汽车悬置系统，就是这样的一个例子。

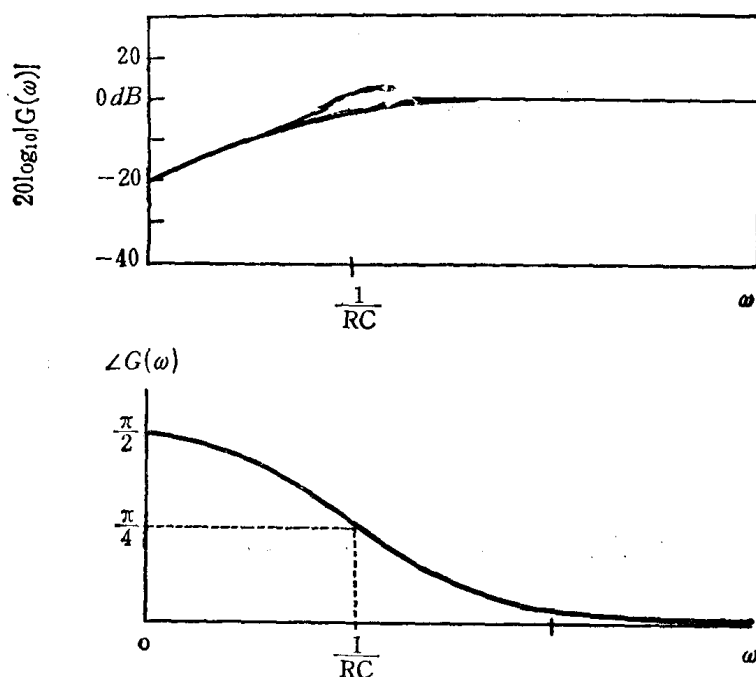


图6.19 输出为 $v_r(t)$ 的 RC 电路的频率响应波特图

6.3.2 作为低频滤波器的汽车悬置系统

如前所述，汽车悬置系统可以看作一个低通滤波器。在图6.14的图解表示中， y_0 表示当汽车静止时底盘和路面之间的距离， $y(t) + y_0$ 为底盘高于参考高度的位置，而 $x(t)$ 为道路高于参考高度的标高，则控制底盘运动的微分方程为

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + k y(t) = k x(t) + b \frac{dx(t)}{dt} \quad (6.7)$$

式中 M 是底盘的质量， k 和 b 是弹簧和减震器常数。系统频率响应是

$$H(\omega) = \frac{k + bj\omega}{(j\omega)^2 M + b(j\omega) + k}$$

或者

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (6.8)$$

式中

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ 和 } 2\zeta\omega_n = \frac{b}{M}$$

请注意式中分母和4.12节所讨论的二阶系统是相同的，其中 ω_n 表示固有频率， ζ 表示阻尼系数。图6.20画出了在几个不同阻尼值时频率响应幅度的波特图。图6.21表示几个不同阻尼系数时的阶跃响应。

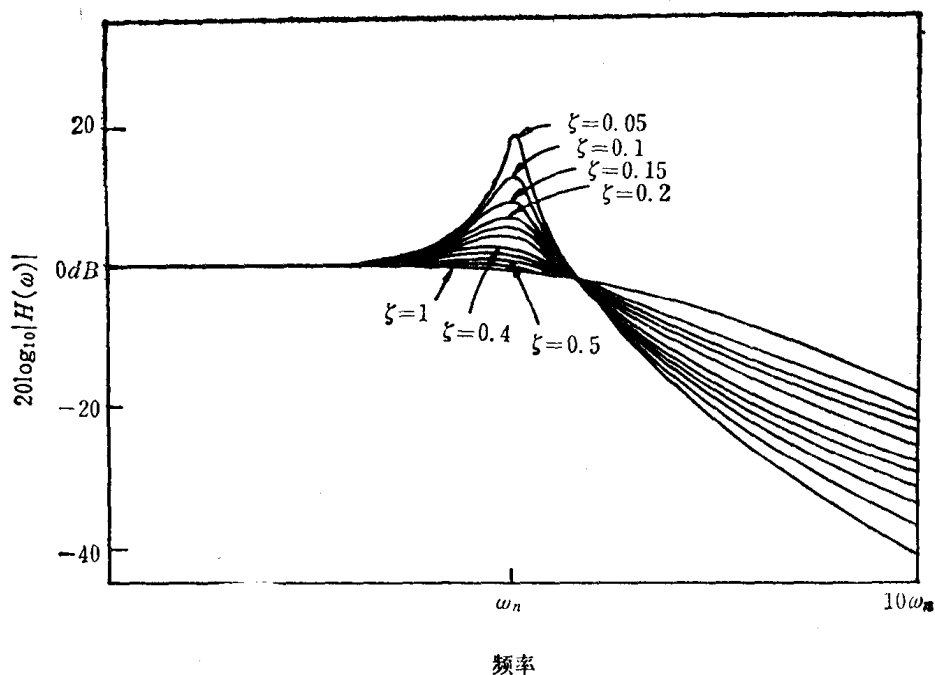


图6.20 汽车悬置系统频率响应的对数幅度

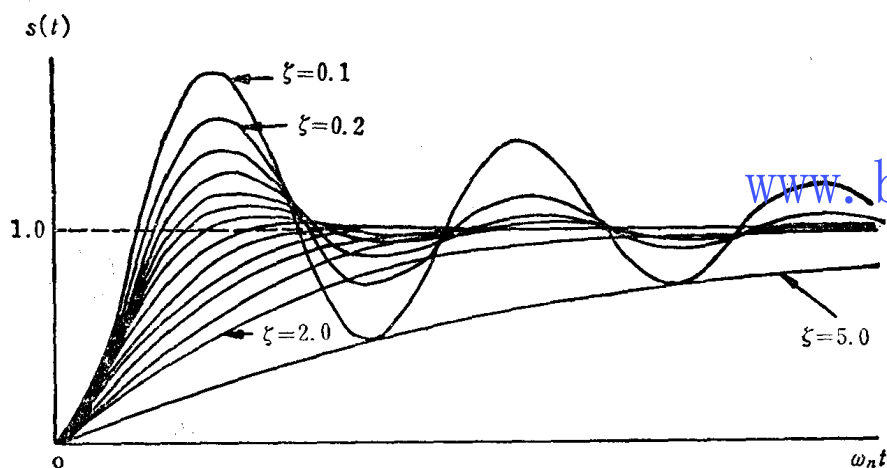


图6.21 对应不同的阻尼系数 ($\zeta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.5, 2.0, 5.0$), 汽车悬置系统的阶跃响应

滤波器的截止频率主要通过 ω_n 来控制, 或者相当于对一定的底盘质量来说, 是通过弹簧常数 k 的适当选择来调节。对于给定的 ω_n , 阻尼系数 ζ 则通过与减震器有关的阻尼因子 b 来调节。当降低固有频率 ω_n 时, 悬置系统将趋于滤去地势高度的缓慢变化, 因此, 提供了较平稳的行驶条件。另一方面, 从图6.21可看出, 系统的上升时间增加, 因此系统好像反应更缓慢。一方面希望保持较小的 ω_n , 以便改善低通滤波, 另一方面, 为了加速时间响应要求较大的 ω_n 。当然, 这些是互相矛盾的要求, 同时也再次说明了在时域和频域特性之间需要折衷考虑。一般, 具有低 ω_n 值的悬置系统, 使得上升时间延长, 称为“软性”系统, 而高 ω_n 值的悬置系统, 使得上升时间缩短, 称为“硬性”系统。由图6.20和6.21还可看出, 当阻尼系数减小时, 系统的频率响应更迅速地截止, 但其阶跃响应的过冲量和振铃现象却趋于增大, 这是时域和频域之间的另一种折衷。一般说来, 选择减震器的阻尼使得有一个快速的

上升时间,而又避免过冲和振铃现象,这种选取相当于4.12节所讨论的临界阻尼情况。如前所述,对减震器的一般测试是通过压下和放开底盘,以对悬置系统施加一个阶跃激励,并观察是否出现振铃现象。如果出现这种现象,说明代表减震器磨损程度的阻尼常数已减小,因而系统已变成欠阻尼系统。

6.4 由差分方程描述的离散时间频率选择滤波器的例子

如第5章所见,利用常数乘法器、存储器或延时寄存器和加法器,可以方便地实现由线性常系数差分方程表征的离散时间系统。因此,由差分方程表征的滤波器具有特别的重要性。第3章已经介绍了两种基本的差分方程:有限冲激响应的非递归差分方程和无限冲激响应的递归差分方程。递归和非递归滤波器各有优缺点。例如,通常要求滤波器具有零或线性相位特性,这样,相位对输出信号形状的影响至多在时间上有一个延迟。如习题6.7所分析的那样,如果滤波器是因果的,并且具有严格的线性相位,那末它必然是有限冲激响应,因此差分方程必定是非递归的。另一方面,一般来说,与采用递归差分方程相比,当采用非递归差分方程来实现滤波器的同一技术指标时,需要较高阶的方程和更多的系数和延迟。在以下讨论中,我们将分别研究这两种类型的离散时间滤波器。

6.4.1 离散时间非递归滤波器

如在一些讨论中所强调的那样,低通滤波可以视为一种平滑运算。对于离散时间序列,一般的平滑运算称为滑动平均,对于任何一个 n ,比如说 n_0 ,平滑值 $y[n]$ 即是 n_0 附近的 $x[n]$ 平均值。基本想法是这样,通过局部求平均值,使从点到点的快速变化被平均掉,而慢速变化将被保留,这相当于平滑了或者低通过滤了原始的序列。作为一个例子,输入序列 $x[n]$ 的三点滑动平均值具有如下形式:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1]) \quad (6.9)$$

所以每一个输出 $y[n]$ 是三个连续输入值的平均值。式(6.9)是一个非递归线性常系数差分方程,并且利用5.11节所研究的方法,滤波器传输函数是

$$H(\Omega) = \frac{1}{3}\{1 + 2\cos \Omega\} \quad (6.10)$$

图6.22中画出了 $H(\Omega)$ 的幅度和相位。可以看出,如同简单的 RC 电路一样,虽然它具有低通滤波器的一般特性,但是,从通带到阻带,它没有陡峭的过渡带。

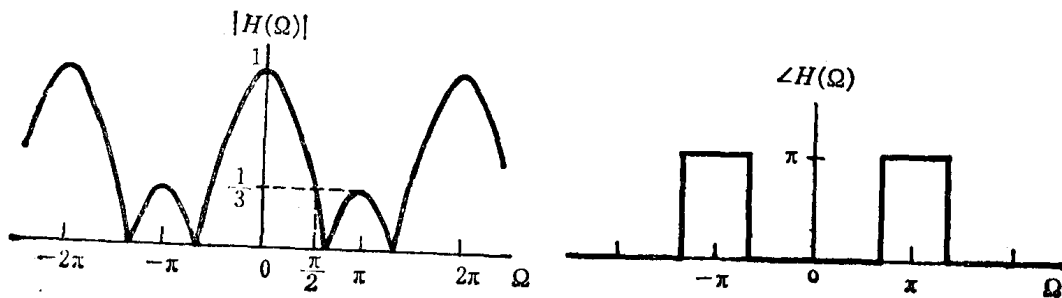


图6.22 三点滑动平均低通滤波器的频率响应

除了低通滤波器之外，还可以使用类似的方法来近似表示高通滤波器。为了说明这点，再举一简单例子来研究下列差分方程

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2} \quad (6.11)$$

对于近似于常数的输入信号， $y[n]$ 值接近于零。对于样值与样值间变化很大的输入信号，可预料到 $y[n]$ 值也具有大的数值。因此，我们预期，这个方程式可近似于高通滤波器，因为相邻序列之间的大变化反映了高频分量。与式 (6.11) 有关的频率响应是

$$H(\Omega) = \frac{1}{2}[1 - e^{-j\Omega}] = je^{-j\Omega/2} \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (6.12)$$

图6.23表示了它的幅度。

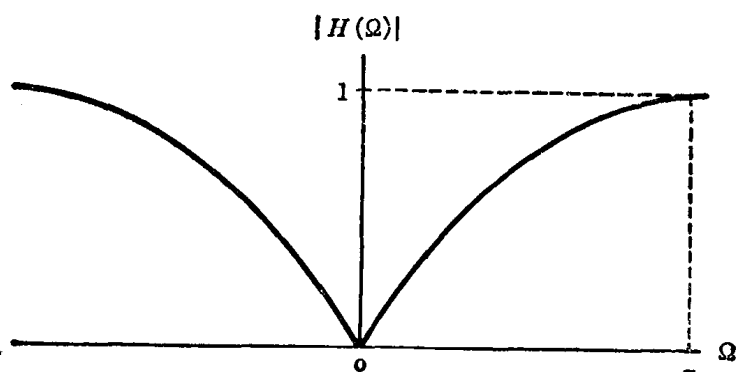


图6.23 二点滑动平均高通滤波器的频率响应

式 (6.9) 的三点滑动平均滤波器没有可改变的参数来调节实际的截止频率。作为以上滑动平均滤波器的推广，我们可以在 $N+M+1$ 的相邻点上求平均值，即，利用如下形式的差分方程

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^M x[n-k] \quad (6.13)$$

相应的冲激响应是一个矩形脉冲。如果 $N=0$ 或为负值，式 (6.13) 的滑动平均滤波器是因果的，其频率响应是

$$H(\Omega) = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^M e^{-j\Omega k} \quad (6.14)$$

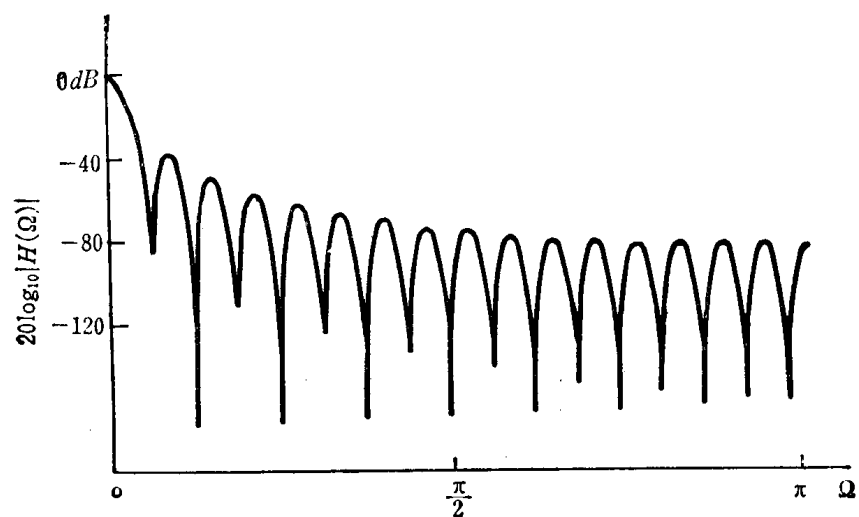
或者，

$$H(\Omega) = \frac{1}{N+M+1} e^{j\Omega(N-M)/2} \frac{\sin\left[\Omega\left(\frac{M+N+1}{2}\right)\right]}{\sin\frac{\Omega}{2}} \quad (6.15)$$

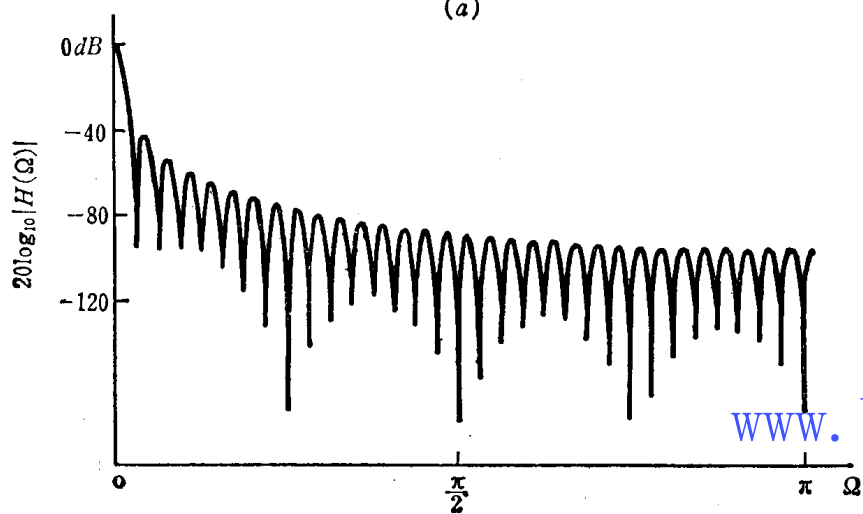
图6.24表示了 $M+N+1=33$ 和 $M+N+1=65$ 时 $H(\Omega)$ 的对数幅值。

通常，把滑动平均滤波器应用于许多经济指示图表中，以减小与长期发展趋向连在一起的短期起伏现象。图6.25说明了式 (6.13) 所示的滑动平均滤波器按每周计算的 Dow Jones 证券行情指数（十年^①为一周期）的应用例子。图6.25(b)是对图6.25(a)中的按周计算 Dow Jones 指数按51天的滑动平均（即， $N=M=25$ ），又图6.25(c)是图(a)按201天的滑动平均（即， $N=M=100$ ）。以上两个平均值都是有用的，其中51天的平均值跟踪了发生在一年过程内的周期性趋势，而201天的平均值主要强调较长时间范围内的趋势。

注① 原文中误为7年。——译者注

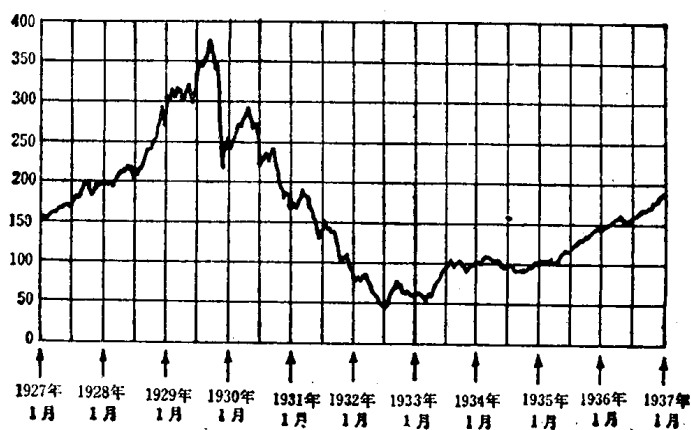


(a)

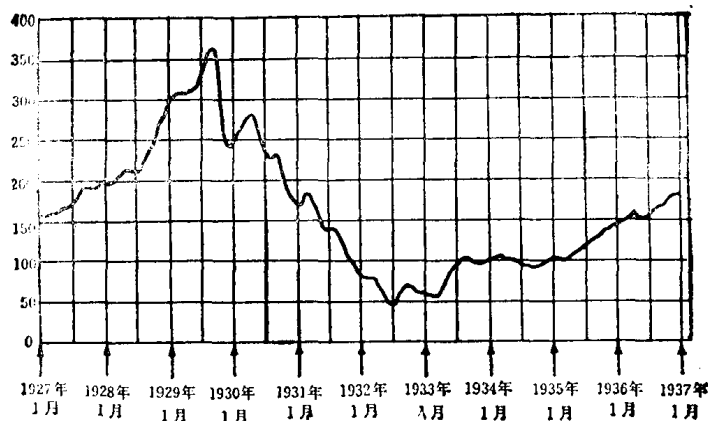


(b)

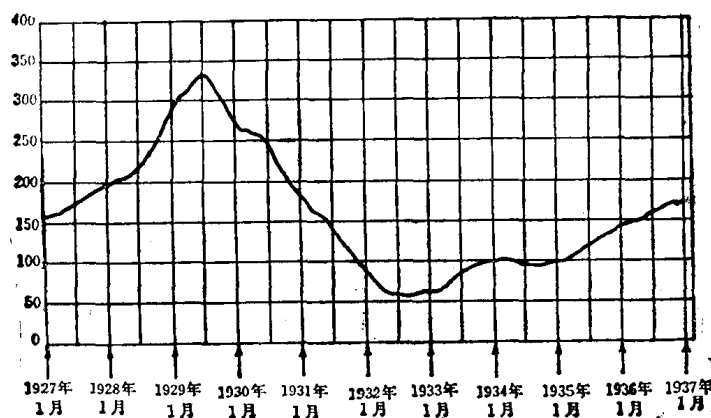
图6.24 式(6.13)滑动平均低通滤波器频率响应的对数幅度
(a) $M=N=16$; (b) $M+N=32$



(a)



(b)



(c)

图6.25 在10年周期内对 Dow Jones 每周证券行情指数低通滤波后的效果; (a)周指数; (b)对(a)取51天滑动平均值; (c)对(a)取201天滑动平均值。周证券行情指数和两个滑动平均值都是离散时间序列, 但为明显起见, 在图解中, 三个序列的各个序列值间用直线相连形成连续曲线

用 $N+M+1$ 个相邻点的加权平均值, 可以实现滑动平均滤波器的进一步推广。即, 通过利用下列形式的差分方程

$$y[n] = \sum_{k=-N}^M b_k x[n-k] \quad (6.16)$$

这里可以选择系数 b_k , 以实现所规定的滤波器特性, 式(6.16)为一般的非递归差分方程形式。

为满足滤波器的某些技术指标, 可用种种方法来选择式(6.16)中的系数。在许多教科书^①中已详细介绍了这些方法, 虽然在这里我们不讨论这些方法, 但值得强调的是, 它们紧紧依据迄今本书所讨论过的基本概念和方法。为了说明这些系数的调整如何影响滤波器的响应, 让我们研究式(6.16)形式的滤波器, 设 $N=M=16$, 滤波系数选为

①请参阅: R.W.Hamming, Digital Filters (Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1977); A. V. Oppenheim and R.W.Schafer, Digital Signal Processing (Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc., 1975); and L.R.Rabiner and B.Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing (Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1975)。

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{33} \sin c\left(\frac{2k}{33}\right), & |k| \leq 32 \\ 0, & |k| > 32 \end{cases} \quad (6.17)$$

该滤波器的冲激响应是

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{33} \sin c\left(\frac{2n}{33}\right), & |n| \leq 32 \\ 0, & |n| > 32 \end{cases} \quad (6.18)$$

与式(6.3)相比可知, 上式相当于 $|n| > 32$ 的截尾理想低通滤波器的冲激响应, 这个理想低通滤波器的截止频率 $\Omega_c = 2\pi/33$ 。

通常可以调整系数 b_k , 使截止频率处于所需频率上。对于图6.26的例子, 我们选择其截止频率与图6.24中 $N=M=16$ 的截止频率近似匹配。图6.26(a)表示它的冲激响应, 图6.26(b)表示其频率响应的对数幅度。将这一频率响应与图6.24比较, 即可看出, 滤波器的

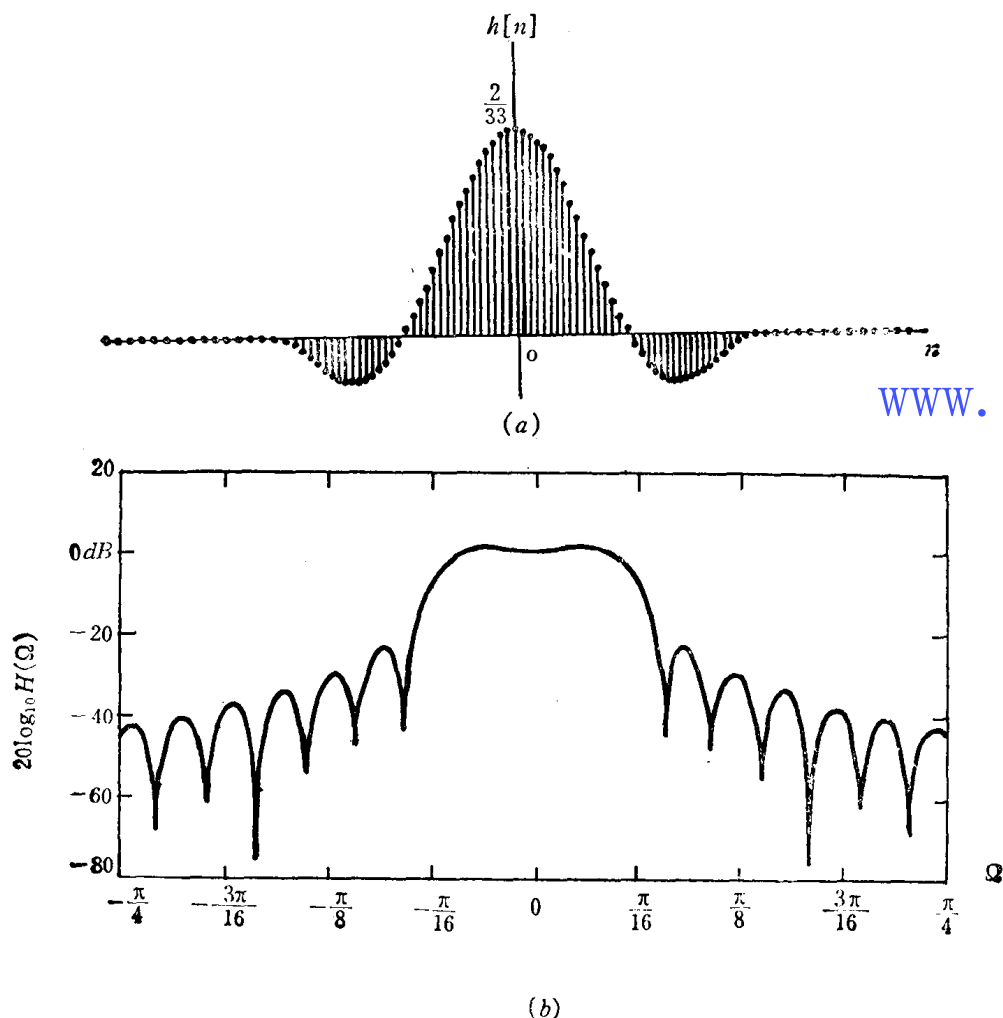


图6.26 (a)式(6.18)非递归滤波器的冲激响应; (b)频率响应的对数幅度

通带宽度大致一样, 但过渡带比较陡峭。在图6.27(a)和(b)中, 表示了两个滤波器的幅度 (在线性的垂直刻度上), 以作比较。显然, 从这两个例子的比较可知, 通过适当选择加权系数, 可使过渡带变得更陡峭。图6.28表示了一个高阶低通滤波器 ($N=M=125$) 的例

子。为了获得可能的最锐截止的频率响应，滤波器的系数通过一种称为帕克斯—麦克莱伦 (Parks-McClellan) 的数值算法^① 来确定。

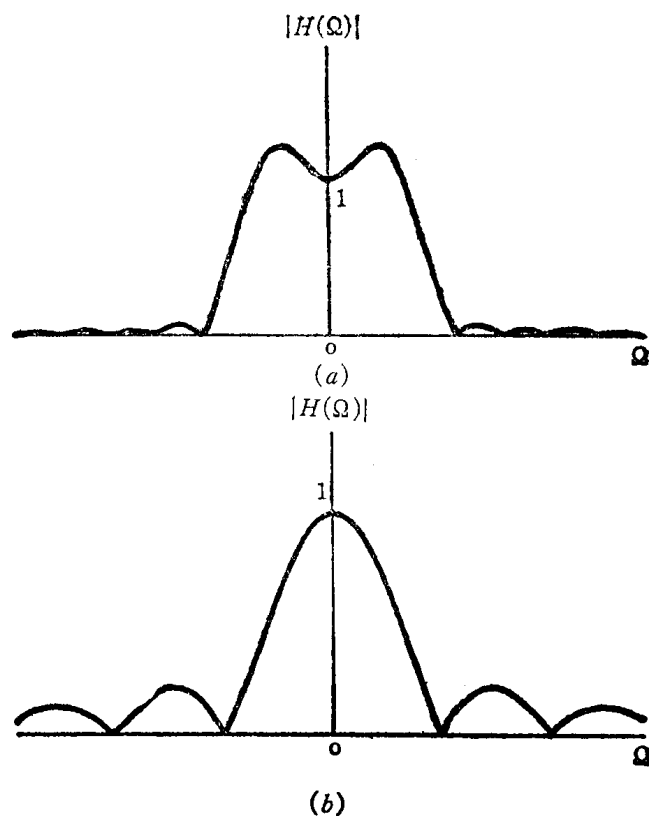


图6.27 在线性幅度刻度上两个频率响应比较：(a)对应图6.26；(b)对应图6.24(a)

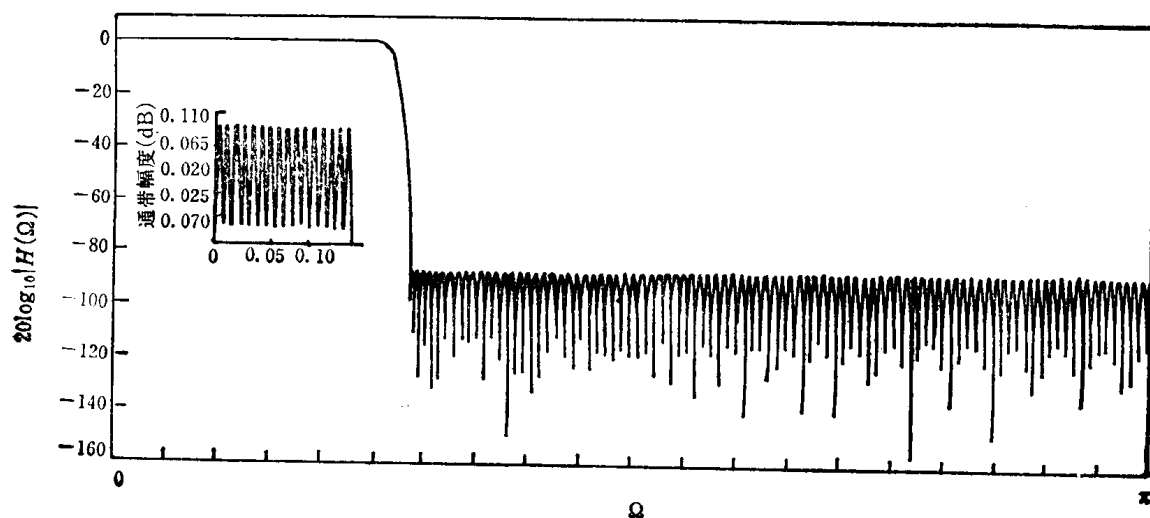


图6.28 具有251个的系数最锐截止频率的低通非递归滤波器

^① A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, Digital Signal Processing (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975), chap. 5.

6.4.2 离散时间递归滤波器

6.4.1 节中, 我们研究了滑动平均或非递归滤波器。另一种重要的离散时间滤波器是由递归差分方程描述的滤波器。为了从这种形式的差分方程中得出频率响应, 我们可以利用 5.11 节所讨论的离散时间傅里叶变换。作为一个简单的实例, 为了说明上述差分方程如何能起低通或高通滤波器的作用, 我们来研究由下列差分方程描述的离散时间系统。

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (6.19)$$

相应的频率响应是

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad (6.20)$$

图 6.29(a) 和图 6.29(b) 分别表示了 $a=0.6$ 和 $a=-0.6$ 时的 $H(\Omega)$ 的幅度和相位。可以看出, 系数 a 为正值时, 差分方程 (6.19) 相当于低通滤波器, 而 a 为负值时, 它相当于高通滤波器。正如用微分方程时一样, 高阶递归差分方程可以提供比较陡峭的滤波器特性, 以及在补偿时域和频域的约束条件中提供更多的灵活性。还有许多专门类型的连续时间和离散时间滤波器, 对于这些滤波器, 已研究了确定有关微分方程或差分方程系数的标准方法。下一节, 我们将介绍一种这样类型的滤波器, 称作巴特沃兹滤波器。

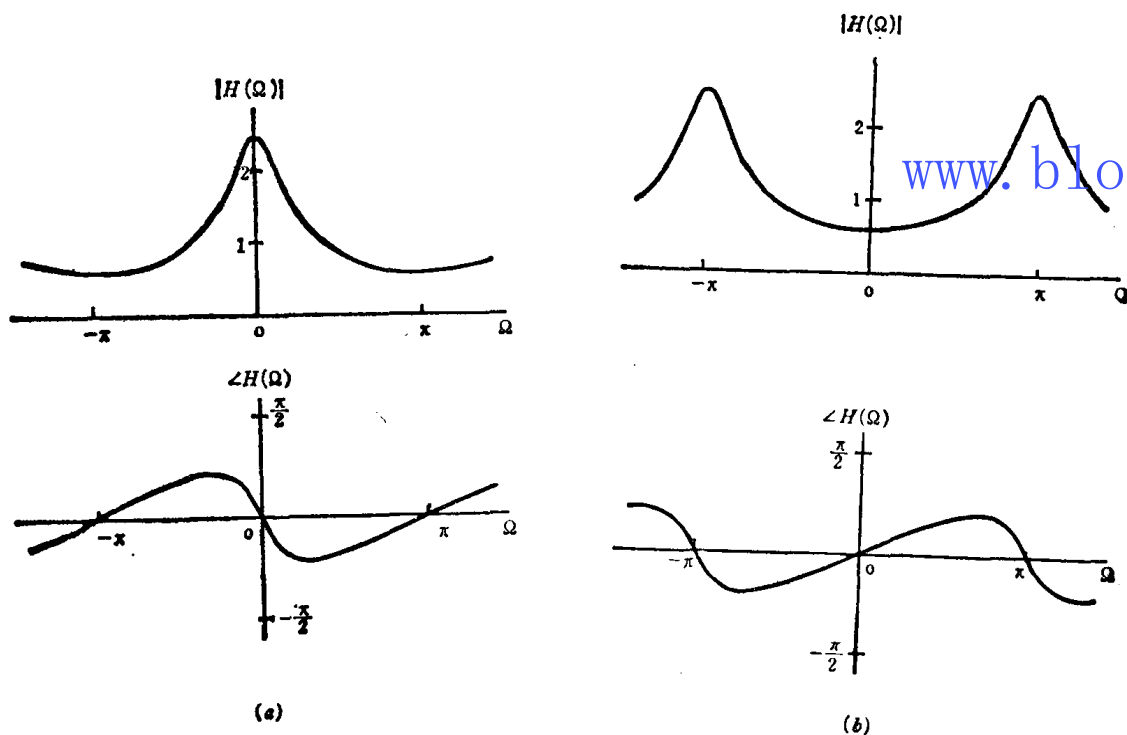


图 6.29 离散时间一阶递归滤波器的频率响应: (a) 系数 $a=0.6$; (b) 系数 $a=-0.6$

6.5 巴特沃兹频率选择滤波器

如 6.4 节所见, 实用的滤波器在连续时间情况下可用微分方程, 在离散时间情况下可用差分方程来实现。当方程的阶数允许增加时, 就可形成更接近于理想的滤波器。通常, 滤波器

的设计方法有好几种, 并且关于这一课题有丰富和详细的文献^①。在本节中, 我们介绍其中的一种, 即巴特沃兹滤波器的设计, 以便说明所包括的某些论点和折衷选择。在这一讨论中, 我们仅集中讨论这些滤波器频率响应的幅度特性。

为了介绍连续时间巴特沃兹滤波器, 我们回到6.3.1节所讨论的 RC 低通滤波器。如已讨论过的那样, 它具有4.12节中所研究的一阶系统的形式, 其频率响应为

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \quad \tau = RC \quad (6.21)$$

$|H(\omega)|$ 的波特图表示在图4.40和图6.17中。低频渐近线是一常数, 高频渐近线具有 -1 的斜率。高频渐近线的斜率由分母中 ω 的幂次所控制, 如果 ω 增加到较高的整数幂, 则高频渐近线将更急剧地下降, 因而阻带衰减将增大。实际上, 这就是巴特沃兹滤波器频率响应的调节方法。具体说, 巴特沃兹滤波器的频率响应 $B(\omega)$ 的幅度平方具有下列形式

$$|B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}} \quad (6.22)$$

参数 N 称为滤波器的阶数。在第9章中, 我们将会看到, 如何得到实现式(6.22)传输函数的微分方程, 特别是会看到, 参数 N 相当于微分方程的阶数。参数 ω_c 是 $|B(\omega)|$ 等于 $\frac{1}{\sqrt{2}}|B(0)|$ 处的频率, 在波特图上, 等效于增益从 $\omega=0$ 时的最大值 $|B(0)|$ 下降到 -3dB 处的频率。

图6.30表示 $N=1, 2, 4$ 和 8 时, 巴特沃兹滤波器增益的波特图, 而图6.31表示线性刻度的 $|B(\omega)|$ 。从式(6.22)也明显看出, 在 $\omega=\omega_c$ 处, 增益等于 $1/\sqrt{2}$, 与滤波器的阶数无关。而阶数越高, 从通带到阻带的过渡带越陡。6.3.1节的简单 RC 电路, 表示具有 $RC=1/\omega_c$ 的一阶巴特沃兹滤波器的实现。图6.32中表示实现二阶和三阶巴特沃兹滤波器的典型电路。图6.33表示二阶和三阶巴特沃兹滤波器的冲激响应和阶跃响应。

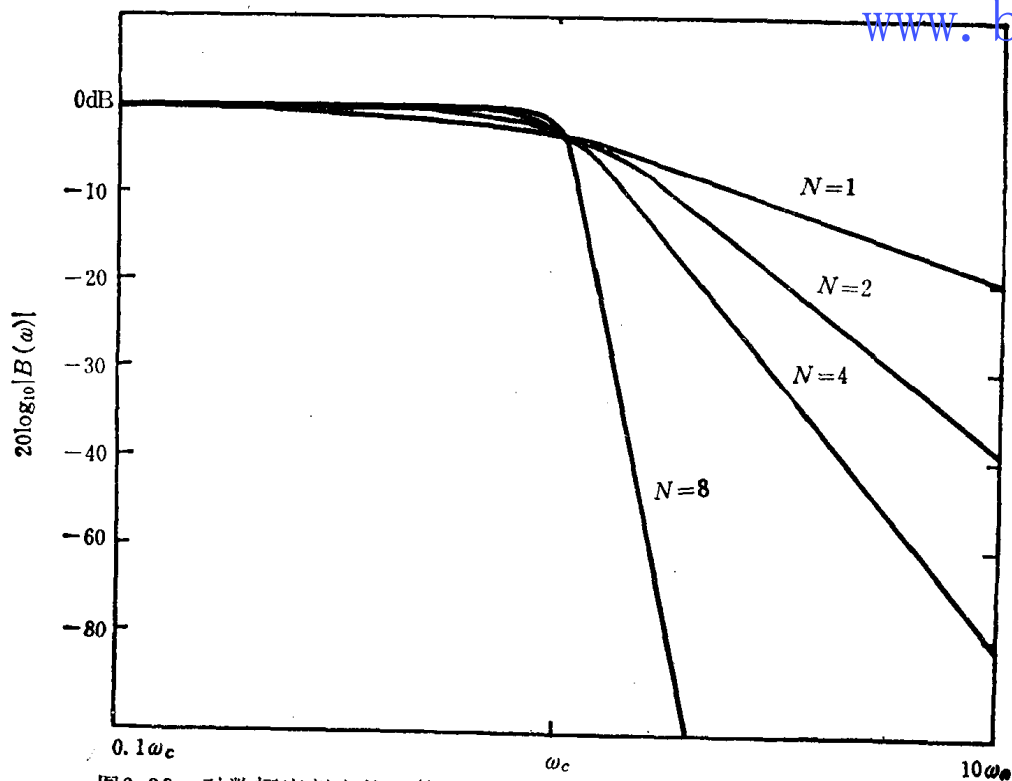


图6.30 对数幅度刻度的巴特沃兹滤波器增益曲线 ($N=1, 2, 4$ 和 8)

^① 请参看337页的参考文献。

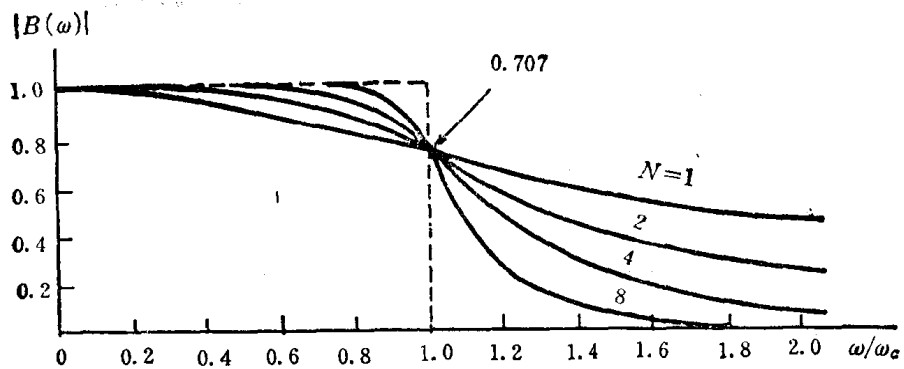


图6.31 线性幅度刻度的巴特沃兹滤波器增益曲线 ($N=1, 2, 4$ 和 8)

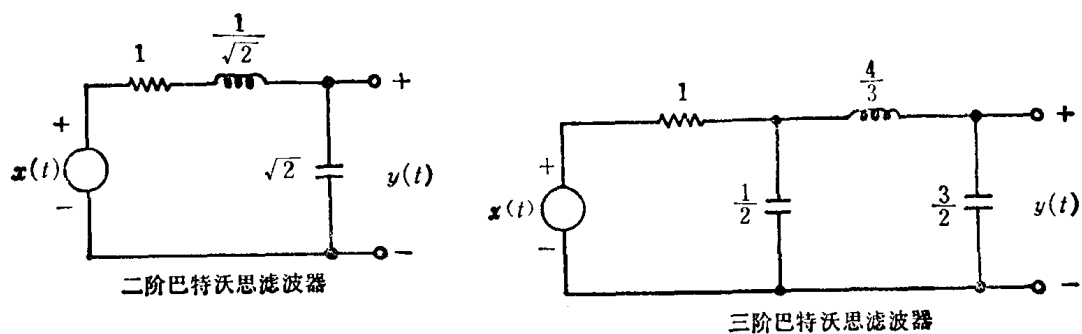


图6.32 实现二阶和三阶巴特沃兹滤波器的典型电路

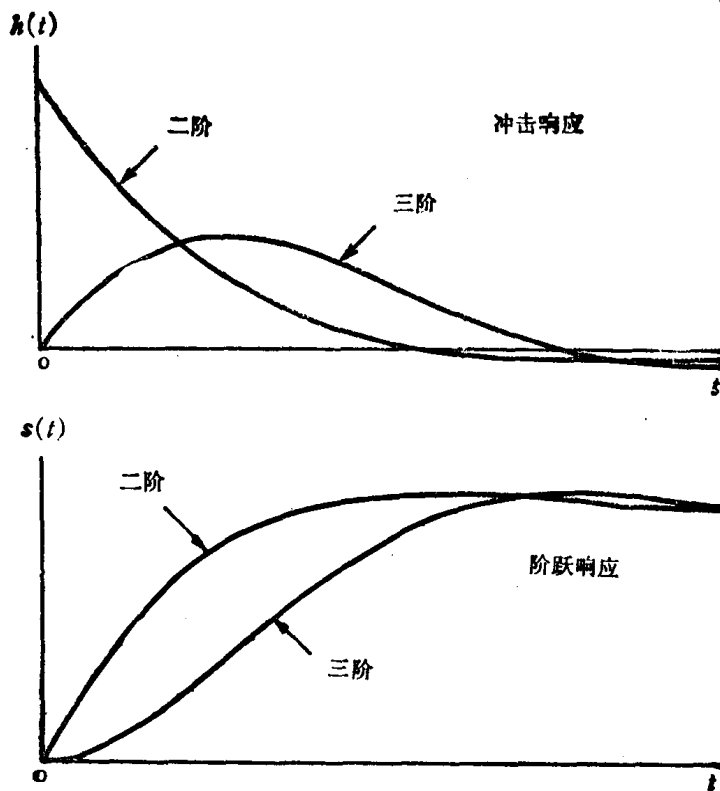


图6.33 二阶和三阶巴特沃兹滤波器的冲激响应和阶跃响应

巴特沃兹滤波器是一类很通用的滤波器，实现满足规定通带、阻带和过渡带特性的这类滤波器的参数和电路，已被大量的制成表格并很易得到。由图 6.30 和图 6.31 可看出，巴特沃兹滤波器的特点是通带和阻带区的幅度曲线形状是单调的。巴特沃兹滤波器也被认为具有最大平坦条件的频率响应。在习题 6.26 中，定义和研究了这个特性。还有其他类型的通用滤波器，这种滤波器在通带、阻带或在两者中都具有一种称之为等波纹特性。如图 6.34 所示，在一个频带中的等波纹特性，相当于在频带中的最大和最小值之间的振荡特性。图 6.34 (a) 相当于通带中的等波纹特性和单调的阻带特性，图 6.34 (b) 相当于阻带中等波纹特性和通带中的单

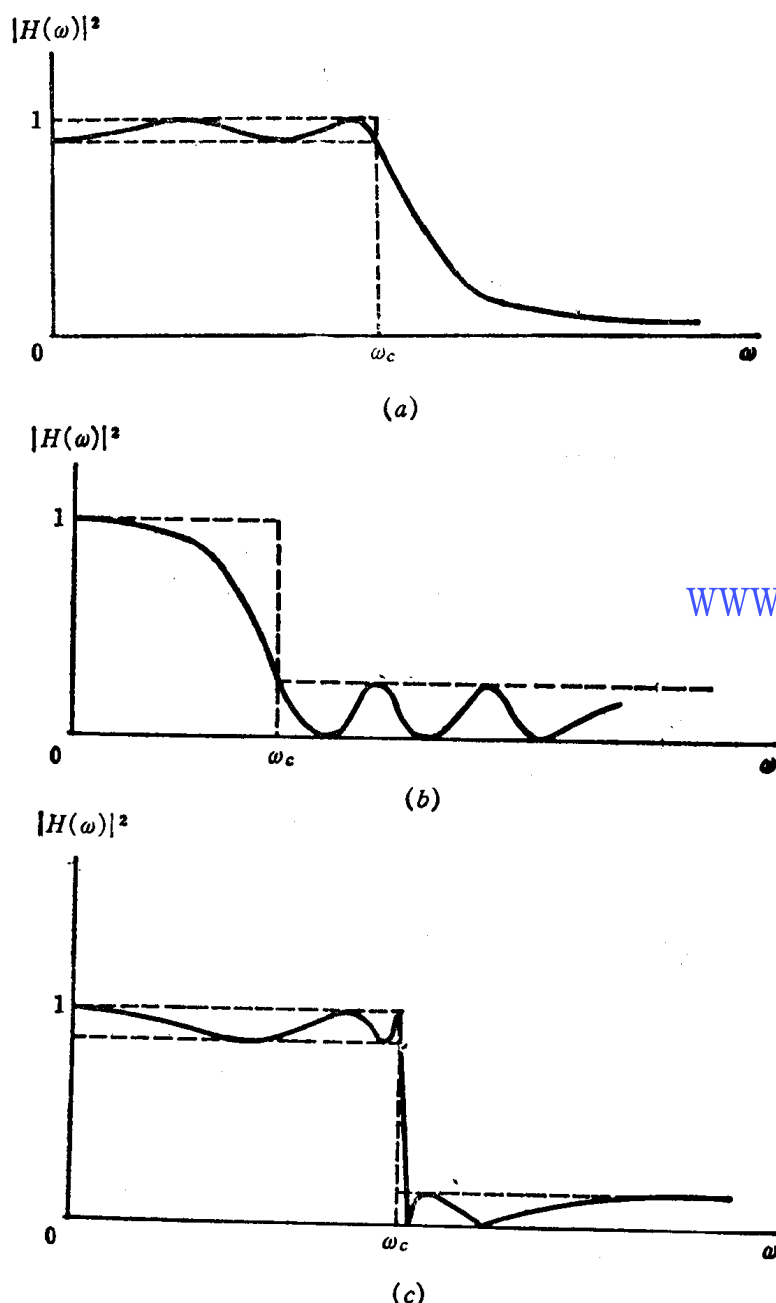


图 6.34 切比雪夫和椭圆滤波器：(a) 具有等波纹通带和单调阻带特性的切比雪夫滤波器；(b) 具有单调通带和等波纹阻带特性的切比雪夫滤波器；(c) 在通带和阻带中具有等波纹特性的椭圆滤波器

调特性，而图6.34(c)表示在两种频带中的等波纹特性。提供图6.34(a)和图6.34(b)所示特性的滤波器称为切比雪夫滤波器。而提供图6.34(c)所示特性的滤波器称为椭圆滤波器。正如巴特沃兹滤波器一样，实现切比雪夫和椭圆滤波器的参数和电路，可从现成表格中得到^①。虽然以上的讨论是用连续时间低通滤波器来阐述，但也有高通和通带滤波器的相应设计方法。

上述每种连续时间滤波器同样具有与其直接对应的离散时间滤波器。离散时间巴特沃兹滤波器具有频率响应 $B(\Omega)$ ，其幅度平方具有如下形式

$$|B(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan(\Omega/2)}{\tan(\Omega_c/2)} \right)^{2N}} \quad (6.23)$$

式中， N 同样称为滤波器的阶数。图6.35中表示出对应于几个 N 值在线性刻度上的 $|B(\Omega)|$ ，可见，离散时间巴特沃兹滤波器具有类似于连续时间的特性，即，在通带和阻带中都是单调的频率响应。在 $\Omega = \Omega_c$ 处， $|B(\Omega)|$ 等于 $1/\sqrt{2} |B(0)|$ ，而不取决于巴特沃兹滤波器的阶数（即不取决于 N ）。习题6.28中，分析了一阶巴特沃兹滤波器的差分方程。在第10章中，我们要讨论，实现 N 阶连续时间巴特沃兹滤波器的微分方程如何变换为实现 N 阶离散时间巴特沃兹滤波器的差分方程。

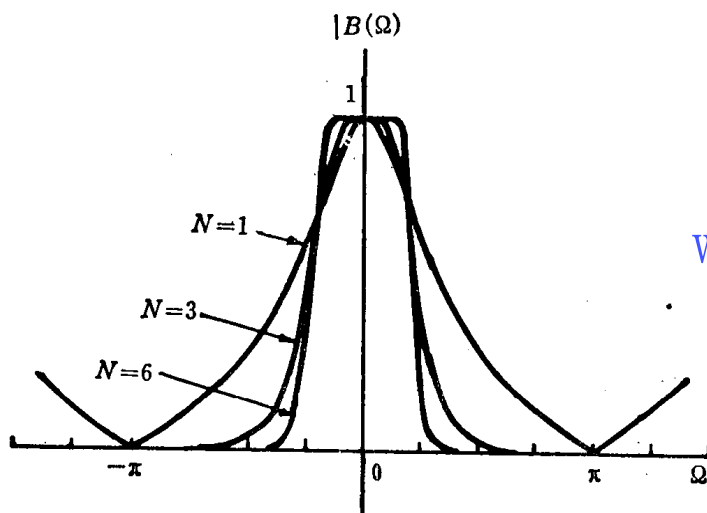


图6.35 对应几个 N 值的离散时间巴特沃兹滤波器在线性幅度刻度上的增益

6.6 小 结

本章，我们讨论了线性时不变连续和离散时间系统在滤波方面的应用。不过对这个相当重要的课题来说，这些讨论只是初步介绍，其基本概念直接来源于第4章和第5章的讨论。

^①关于巴特沃兹、切比雪夫和椭圆滤波器的参数和电路表格，可从下列参考文献中获得：Erich Christian and Egon Eisenmann, *Filter Design Tables and Graphs* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1966); Anatol I. Zverev, *Handbook of Filter Synthesis* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1967); and D.E. Johnson, J. R. Johnson, and H.P. Moore, *A Handbook of Active Filters* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1980)。对这类滤波器的更完整的介绍可从下列参考书中得到：Richard W. Daniels, *Approximation Methods for Electronic Filter Design* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1974); David E. Johnson, *Introduction to Filter Theory* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1976); and L.P. Huelsman and P.E. Allen, *Introduction to the Theory and Design of Active Filter* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1980)。

对于频率选择滤波器，我们首先介绍了理想滤波器的概念，即能完全通过某些频带而使其他频带全部衰减的滤波器。其次，一方面是因时域和频域中一些折衷问题的考虑所推动，另一方面由于因果性及简化实现方面考虑的推动，因此，引入了具有过渡带以及在通带和阻带中具有公差容限的频率选择滤波器的概念。在汽车悬置系统和连续时间简单 RC 滤波器，以及离散时间的滑动平均和递归滤波器方面，我们探索和研究了各种各样的问题。本章以巴特沃兹低通滤波器的介绍作为结束。

习 题

6.1. 一个 LIT 因果滤波器具有如图 P 6.1 所示的频率响应 $H(\omega)$ 。对应于下列每一输入信号，试确定滤波器的输出信号 $y(t)$ ：

(a) $x(t) = e^{jt}$;

(b) $x(t) = (\sin \omega_0 t)u(t)$;

(c) $X(\omega) = \frac{1}{(j\omega)(6+j\omega)}$;

(d) $X(\omega) = -\frac{1}{2+j\omega}$ 。

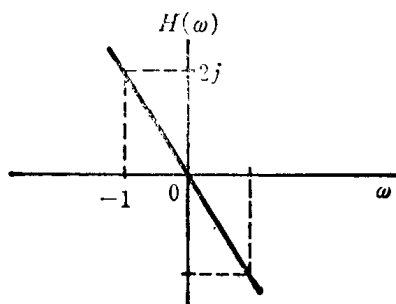


图 P 6.1

6.2. 图 P 6.2—1 所示的是一个连续时间滤波器（称作低通微分器）的频率响应 $H(\omega)$ 。对于下列每一输入信号 $x(t)$ ，试求滤波器的输出信号 $y(t)$ 。

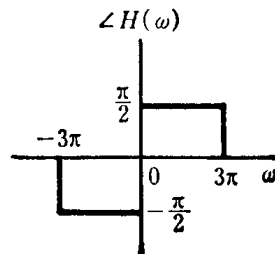
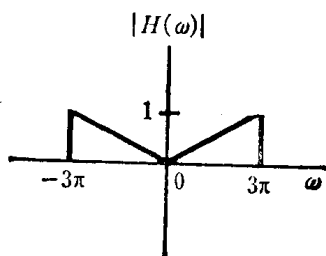


图 P 6.2—1

(a) $x(t) = \cos(2\pi t + \theta)$;

(b) $x(t) = \cos(4\pi t + \theta)$;

(c) 如图 P 6.2—2 所示， $x(t)$ 是一个周期等于 1 的半波整流的正弦波。

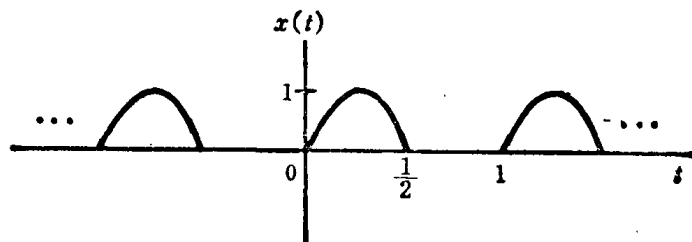


图 P 6.2—2

$$x(t) = \begin{cases} \sin 2\pi t, & m \leq t \leq (m + \frac{1}{2}), \\ 0, & (m + \frac{1}{2}) \leq t \leq m, \quad m \text{ 为任何整数。} \end{cases}$$

6.3. 图 P 6.3 所示的是一离散时间微分器的频率响应, 如果输入信号 $x[n]$ 是

$$x[n] = \cos[\Omega_0 n + \theta]$$

试确定作为 Ω_0 函数的输出信号 $y[n]$ 。

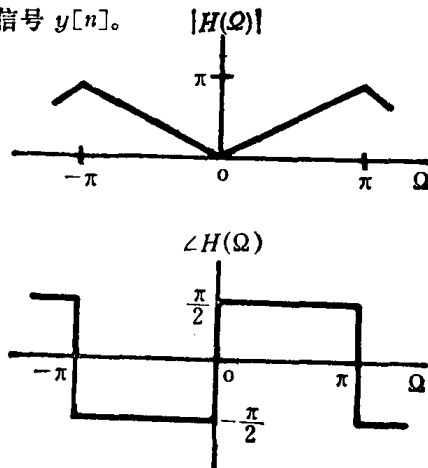


图 P 6.3

6.4. 图 P 6.4 所示的是一低通滤波器的 $|H(\omega)|$, 对于下列每一相位特性, 试确定并画出滤波器的冲激响应:

(a) $\angle H(\omega) = 0$;

(b) $\angle H(\omega) = \omega T$, 式中 T 为常数;

(c) $\angle H(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega < 0. \end{cases}$

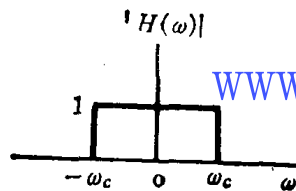


图 P 6.4

6.5. 假设有一个冲激响应为 $h[n]$ 的离散时间理想低通滤波器, 图 P 6.5 示出了它的频率响应 $H[\Omega]$. 考虑有一个冲激响应 $h_1[n]$ 如下式所示和频率响应为 $H_1(\Omega)$ 的新滤波器。

$$h_1[n] = \begin{cases} h(n/2), & n \text{ 为偶数,} \\ 0, & n \text{ 为奇数。} \end{cases}$$

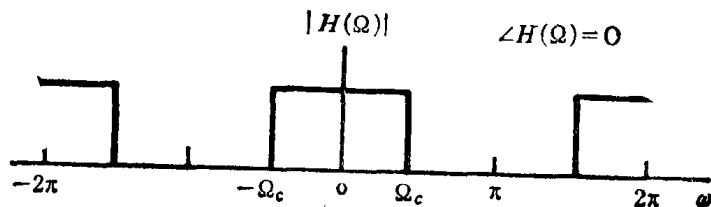


图 P 6.5

这相当于在 $h[n]$ 的每一序列值之间插入一个零序列值。试确定和画出 $H_1(\Omega)$, 并说明它是属于哪一种类型的理想滤波器 (即, 低通、高通、带通、多频带等)。

6.6. 在4.6.7节的有关连续时间信号帕斯维尔定理的讨论中, 我们已经知道

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

这说明信号的总能量可以通过对 $|X(\omega)|^2$ 在所有频率范围内积分而得到。现在研究一个由图 P 6.6 所示理想带通滤波器 $H(\omega)$ 处理过的实值信号 $x(t)$ 。

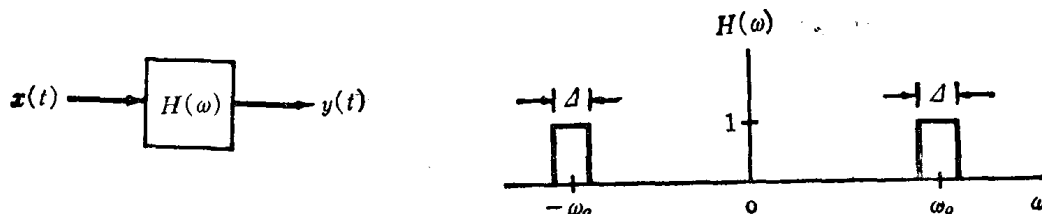


图 P 6.6

- (a) 把输出信号 $y(t)$ 中的能量表示成 $|X(\omega)|^2$ 频率范围内积分。对足够小的 Δ , 以致 $X(\omega)$ 在宽度为 Δ 的频率间隔内近似为常数时, 试证明带通滤波器的输出 $y(t)$ 的能量近似与 $\Delta |X(\omega_0)|^2$ 成正比例。

根据以上结果, $\Delta |X(\omega_0)|^2$ 与 ω_0 附近的带宽 Δ 内的信号能量成正比。由于这个原因, $|X(\omega)|^2$ 通常称为信号 $x(t)$ 的能量密度谱。

- (b) 推导离散时间信号的相应结果。具体说, 假如一个实数离散时间信号 $x[n]$ 用一个具有中心频率 Ω_0 和带宽 Δ 的理想带通滤波器滤波, 如果 Δ 足够小, 使得 $|X(\Omega)|$ 在宽度 Δ 的频率间隔内近似为常数, 试证明带通滤波器的输出能量近似与 $\Delta |X(\Omega_0)|^2$ 成正比例。

6.7. 6.4节中已说明, 对于一个因果的和线性相位的离散时间滤波器, 它的冲激响应必须具有有限长度, 因此, 其差分方程必须是非递归的。为了集中注意力来理解这种叙述的含义, 我们研究一种具有相位斜率为整数的线性相位特性时的特殊情况。为此, 假定频率响应具有如下形式

$$H(\Omega) = H_r(\Omega) e^{-jM\Omega}, \quad -\pi < \Omega < \pi, \quad (\text{P 6.7-1})$$

式中 $H_r(\Omega)$ 为实偶数。

设 $h[n]$ 表示频率响应为 $H(\Omega)$ 的滤波器的冲激响应, $h_r[n]$ 表示频率响应为 $H_r(\Omega)$ 的滤波器的冲激响应。

- (a) 试用表 5.1 中适当的性质, 证明:

1. $h_r[n] = h_r[-n]$ (即, $h_r[n]$ 对称于 $n=0$);
2. $h[n] = h_r[n-M]$ 。

- (b) 试用 (a) 的结果, 证明当 $H(\Omega)$ 具有式 (P 6.7-1) 所示形式时, $h[n]$ 对称于 $n=M$, 即,

$$h[M+n] = h[M-n] \quad (\text{P 6.7-2})$$

- (c) 按照 (b) 的结果, 式 (P 6.7-1) 中的线性相位特性使得冲激响应具有对称性。证明如果 $h[n]$ 是因果的, 并且具有式 (P 6.7-2) 的对称性, 则

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \text{ 和 } n > 2M$$

即, $h[n]$ 必须是有限长度。

6.8. 令 $h[n]$ 为 FIR 滤波器的单位抽样响应, 因此 $n < 0$, $n \geq N$ 时, $h[n] = 0$ 。假定 $h[n]$ 是实数, 通过对滤波器的单位抽样响应 $h[n]$ 加以某些对称条件, 就可保证该滤波器具有线性相位。

这种滤波器的频率响应可以用下式表示

$$H(\Omega) = \hat{H}(\Omega) e^{j\phi(\Omega)}$$

式中 $\hat{H}(\Omega)$ 为实数。

- (a) 当 $h[n]$ 满足条件

①原书上误为 ω_0 。——译者注

$$h[n] = h[N-1-n]$$

时, 求 $\theta(\Omega)$ ($0 \leq \Omega \leq \pi$)。

(b) 求 $\theta(\Omega)$ ($0 \leq \Omega \leq \pi$), 当满足

$$h[n] = -h[N-1-n]$$

请注意: 可能需要分别论述 N 为偶数和 N 为奇数的情况。

6.9. 在模拟或数字滤波器设计中, 我们通常是逼近一个规定的幅度特性, 而不特别关心相位。例如, 低通和带通滤波器的标准设计技术一般仅仅根据幅度特性的考虑得出。

在多数滤波问题中, 人们理想地希望相位特性为零或是线性的。对因果滤波器而言, 要有零相位是不可能的。然而, 在许多数字滤波应用方面, 如果不是实时实现处理, 当 $n < 0$ 时, 不要求滤波器的单位抽样响应等于零。

当被滤波的数据具有有限时宽, 并被存储在例如磁盘或磁带上时, 数字滤波中的一种通用方法, 使数据先正向再反向地通过同样的滤波器的方法来处理数据。

令 $h[n]$ 是具有任意相位特性的因果滤波器的单位抽样响应。假设 $h[n]$ 是实数, 并用 $H(\Omega)$ 表示它的傅里叶变换。设 $x[n]$ 是需要进行滤波的数据, 滤波运算像下面这样进行:

(a) 方法 A: 处理 $x[n]$ 以便得到如图 P 6.9—1 所示的 $s[n]$ 。

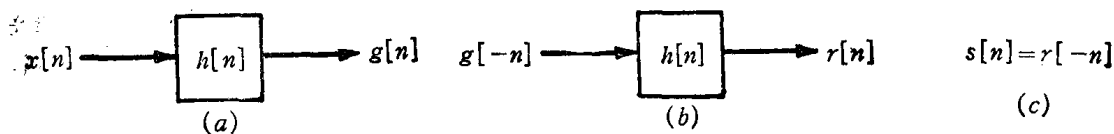


图 P 6.9—1

1. 求联系 $x[n]$ 和 $s[n]$ 的总的单位抽样响应 $h_1[n]$, 并证明它具有零相位特性;

2. 试确定 $|H_1(\Omega)|$, 并用 $|H(\Omega)|$ 和 $\angle H(\Omega)$ 表示它。

(b) 方法 B: 通过滤波器 $h[n]$ 处理 $x[n]$ 以得到 $g[n]$ (图 P 6.9—2)。同样也通过 $h[n]$ 反向处



图 P 6.9—2

理 $x[n]$ 以得到 $r[n]$ 。这样, 输出 $y[n]$ 取为 $g[n]$ 和 $r[-n]$ 之和。这种组合运算系统可以用一个其输入为 $x[n]$ 、输出为 $y[n]$ 和单位抽样响应为 $h_2[n]$ 的滤波器来表示。

1. 证明组合滤波器 $h_2[n]$ 具有零相位特性;

2. 试确定 $|H_2(\Omega)|$, 并用 $|H(\Omega)|$ 和 $\angle H(\Omega)$ 来表示。

(c) 设有一个有限时宽序列, 我们希望对这个序列进行带通、零相位滤波运算。此外, 设已有带通滤波器 $h[n]$, 其频率响应如图 P 6.9—3 所规定。它具有我们需要的幅度特性, 但具有线性相位。为了获得零相位, 我们可以使用方法 A 或方法 B。试确定并画出 $|H_1(\Omega)|$ 和 $|H_2(\Omega)|$ 。根据这些结果, 你将使用哪种方法获得需要的带通滤波运算? 说明理由。更一般地说, 如果 $h[n]$ 具有所要求的数值, 但具有非线性相位特性, 为了获得零相位特性, 哪种方法比较可取。

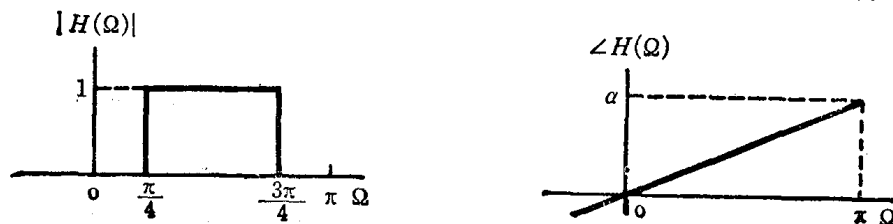


图 P 6.9—3

6.10. 图 P 6.10 表示一个系统, 通常利用它可从低通滤波器来获得高通滤波器, 反之亦然。

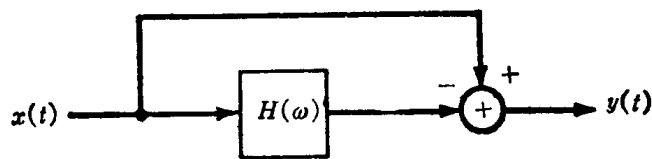


图 P 6.10

- (a) 如果 $H(\omega)$ 是一个具有截止频率 ω_{lp} 的理想低通滤波器, 试证明整个系统相当于一个理想高通滤波器。确定它的截止频率, 并画出它的冲激响应。
 - (b) 如果 $H(\omega)$ 是具有截止频率 ω_{hp} 的理想高通滤波器, 试证明整个系统相当于一个理想低通滤波器, 并确定它的截止频率。
 - (c) 现在假定 $H(\omega)$ 相当于 6.3.1 节中讨论的 RC 低通滤波器, 试确定并画出由图 P 6.10 得到的高通滤波器的频率响应。
 - (d) 试确定如何获得 (b) 中的高通滤波器, 并与 6.3.1 节中讨论的 RC 高通滤波器相比较。
 - (e) 如果图 P 6.10 的互连系统, 被用于一个离散时间理想低通滤波器, 所得到的系统可以是离散时间理想高通滤波器吗?
- 6.11. 在习题 6.10 中, 我们研究了一个系统 (图 P 6.10), 通常利用它可从低通滤波器中获得高通滤波器, 反之亦然。本习题中, 我们进一步研究该系统, 并特别分析一种当不适当选择 $H(\omega)$ 相位时, 可能出现的困难情况。

(a) 参照图 P 6.10, 首先假定 $H(\omega)$ 是实数, 并如图 P 6.11 所示, 详细地说, 为

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 < H(\omega) < 1 + \delta_1, & 0 \leq \omega \leq \omega_1 \\ -\delta_2 < H(\omega) < +\delta_2, & \omega_2 < \omega \end{aligned}$$

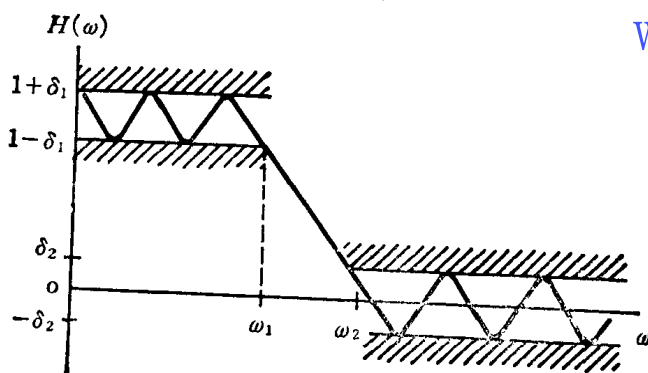


图 P 6.11

试确定并画出图 P 6.10 整个系统所产生的频率响应。所得到的系统近似一个高通滤波器吗? 现在令图 P 6.10 的 $H(\omega)$ 具有形式

$$H(\omega) = H_1(\omega) e^{j\theta(\omega)} \quad (\text{P 6.11})$$

式中 $H_1(\omega)$ 等于图 P 6.11 的 $H(\omega)$, 而 $\theta(\omega)$ 是一个未规定的相位特性。

- (b) 如果 $H(\omega)$ 是式 (P 6.11) 的更一般形式, 它仍是一个低通滤波器的近似吗?
 - (c) 对 $\theta(\omega)$ 不作任何假定, 试确定并画出图 P 6.10 总系统频率响应的幅度容限。
 - (d) 如果图 P 6.10 中的 $H(\omega)$ 近似于一个具有未规定相位特性的低通滤波器, 图 P 6.10 的整个系统必然近似一个高通滤波器吗?
 - (e) 在图 6.10 的连接用于离散时间滤波器时, 由本题所得的同样结论是否适用?
- 6.12. 假定 $h_a[n]$ 表示一个所需要的理想系统的单位样值响应, 其频率响应为 $H(\Omega)$ 。令 $h[n]$ 表示长度

为 N 的 FIR 系统的单位抽样响应, 且频率响应为 $H(\Omega)$ 。本题中, 我们要证明对 $h_d[n]$ 加一个长度为 N 个样值的矩形窗, 将产生一个单位抽样响应 $h[n]$, 使得均方误差

$$e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(\Omega) - H(\Omega)|^2 d\Omega$$

达极小值。

(a) 误差函数 $E(\Omega) = H_d(\Omega) - H(\Omega)$ 可以表示为幂级数

$$E(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] e^{-j\Omega n}$$

试求用 $h_d[n]$ 和 $h[n]$ 表示的系数 $e[n]$ 。

(b) 试用5.5.8节所叙述的帕斯维尔关系式, 以系数 $e[n]$ 表示均方误差 e^2 。

(c) 对于长度为 N 个抽样的单位抽样响应 $h[n]$, 证明当

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

时, e^2 为极小值。即对一个固定的 N 值来说, 简单的截尾给出所需频率响应的最佳均方近似。

6.13. 如6.2节所指出的那样, 频率选择滤波器的概念常用于分离两个加在一起的信号, 如果两个信号的频谱不重叠, 理想的频率选择滤波器是合乎需要的。然而, 如果频谱重叠, 通常较好的是设计一个具有从通带到阻带逐渐过渡的滤波器。本题中, 我们来研究一种确定滤波器频率响应的方法, 这种滤波器用于近似地分离有频谱交迭的信号。假定 $x(t)$ 表示由两个信号 $s(t) + w(t)$ 之和组成的连续时间信号。如图P 6.13—1所示, 我们希望设计一个 LTI 滤波器, 以便从 $x(t)$ 中恢复 $s(t)$ 。选择该滤波器的频率响应 $H(\omega)$, 使得在某种意义上, $y(t)$ 是 $s(t)$ 的一个“好”的近似。



图 P 6.13—1

www.blogoil.com

定义 $y(t)$ 和 $s(t)$ 之间在每一频率 ω 处的误差量为

$$e(\omega) \triangleq |S(\omega) - Y(\omega)|^2$$

式中 $S(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 分别是 $s(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶变换。

(a) 用 $S(\omega)$ 、 $H(\omega)$ 和 $W(\omega)$ 表示 $e(\omega)$, 其中 $W(\omega)$ 是 $w(t)$ 的傅里叶变换。

(b) 设 $H(\omega)$ 限于实函数, 因而 $H(\omega) = H^*(\omega)$ 。通过置 $e(\omega)$ 对 $H(\omega)$ 的导数为零, 试确定 $H(\omega)$, 以使误差 $e(\omega)$ 最小。

(c) 如果 $S(\omega)$ 和 $W(\omega)$ 的频谱是非交迭的, 试证明(b)的结果简化为理想的频率选择滤波器。

(d) 根据(b)的结果, 如果 $S(\omega)$ 和 $W(\omega)$ 如图P 6.13—2所示, 试确定并画出 $H(\omega)$ 。

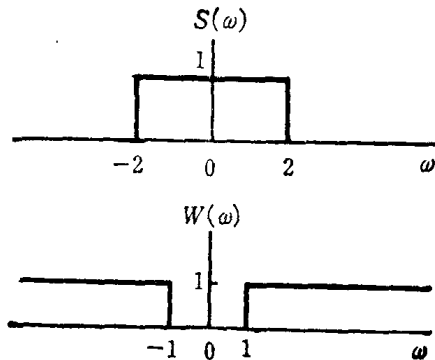


图 P 6.13—2

- 6.14. 在习题6.13中, 我们研究了一种专门的准则, 当两个信号的频谱在频率上重叠时, 为从两个信号之和恢复一个信号, 该准则可用来确定连续时间滤波器的频率响应。试推导离散时间情况下, 对应于习题6.13 (b) 中获得的结果。
- 6.15. 如6.2节定义的那样, 理想带通滤波器是一种仅在一定频率范围内通过信号, 而无任何幅度和相位改变的滤波器。如图 P 6.15—1 所示, 设通带是

$$\omega_0 - \frac{W}{2} \leq |\omega| \leq \omega_0 + \frac{W}{2},$$

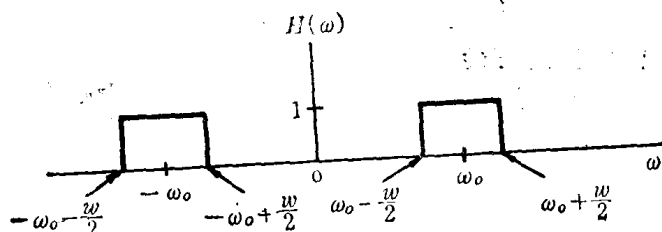
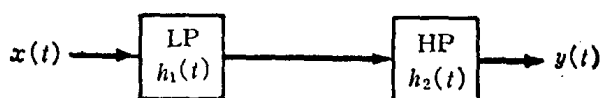


图 P 6.15—1

- (a) 这种滤波器的冲激响应 $h(t)$ 是什么?
- (b) 我们可用图 P 6.15—2 所示的一个一阶低通和一个一阶高通的级联来近似一个理想带通滤波器。试画出两个滤波器 $H_1(\omega)$ 和 $H_2(\omega)$ 的各自的波特图。



$$H_1(\omega) = \frac{10^3}{10^3 + j\omega} \quad H_2(\omega) = \frac{j\omega}{100 + j\omega}$$

图 P 6.15—2

- (c) 试用 (b) 的结果确定整个带通滤波器的波特图。

- 6.16. 在许多情况下, 我们有适用于模拟或数字滤波器的基本单元, 例如基本硬件或计算机子程序。通过重复使用它们或者通过相同基本单元的组合, 就有可能实现一种新的具有改善通带或阻带特性的滤波器。本题和下一题, 我们来研究实现上述目的两种方法。虽然讨论是通过离散时间滤波器来阐述的, 但其中许多讨论同样可直接用到连续时间滤波器上。

研究一个具有频率响应 $H(\Omega)$ 的低通滤波器, 它的 $|H(\Omega)|$ 落在图 P 6.11 所示的容限范围内, 即,

$$1 - \delta_1 \leq |H(\Omega)| \leq 1 + \delta_1, \quad 0 \leq \Omega \leq \Omega_1,$$

$$0 \leq |H(\Omega)| \leq \delta_2, \quad \Omega_2 \leq \Omega \leq \pi,$$

用两个相同滤波器 [它们的频率响应都是 $H(\omega)$] 的级联组成一个频率响应为 $G(\Omega)$ 的新滤波器。

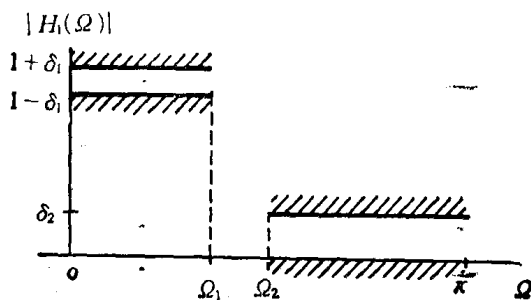


图 P 6.16

(a) 试确定 $|G(\Omega)|$ 的容限。

(b) 假设 $H(\Omega)$ 是某一低通滤波器的一个良好近似, 因此 $\delta_1 \ll 1$ 和 $\delta_2 \ll 1$, 试确定 $G(\Omega)$ 的通带波纹是大于还是小于 $H(\Omega)$ 的通带波纹。同时, 确定 $G(\Omega)$ 的阻带波纹是大于还是小于 $H(\Omega)$ 的阻带波纹。

(c) 如果由 N 个频率响应为 $H(\Omega)$ 的相同滤波器级联获得一个新的频率响应 $G(\Omega)$, 并再次假定 $\delta_1 \ll 1$ 和 $\delta_2 \ll 1$, 试确定 $|G(\Omega)|$ 的近似容限范围。

6.17. 在习题6.16中, 我们研究了重复使用基本滤波器微型组件来实现一个新的具有改进特性的滤波器的方法。本题中, 研究有关文献^①提出的另一种方法。图P6.17-1中以方框图形式表示了这一方法。

(a) 假设 $H(\Omega)$ 是实数, 并有 $\pm\delta_1$ 的通带波纹及 $\pm\delta_2$ 的阻带波纹 (即, 它落在图P6.17-2表示的容限范围之内)。图P6.17-1中整个系统的频率响应 $G(\Omega)$ 落在图P6.17-3所示的容限范围内。试确定用 δ_1 和 δ_2 表示的 A, B, C 和 D 。

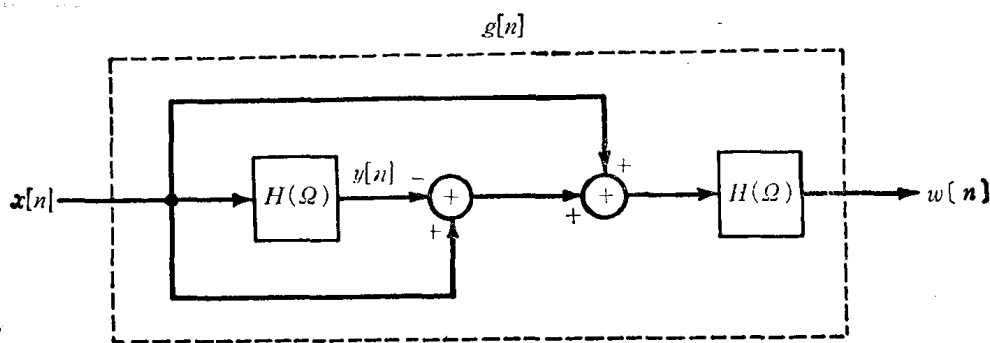


图 P 6.17-1

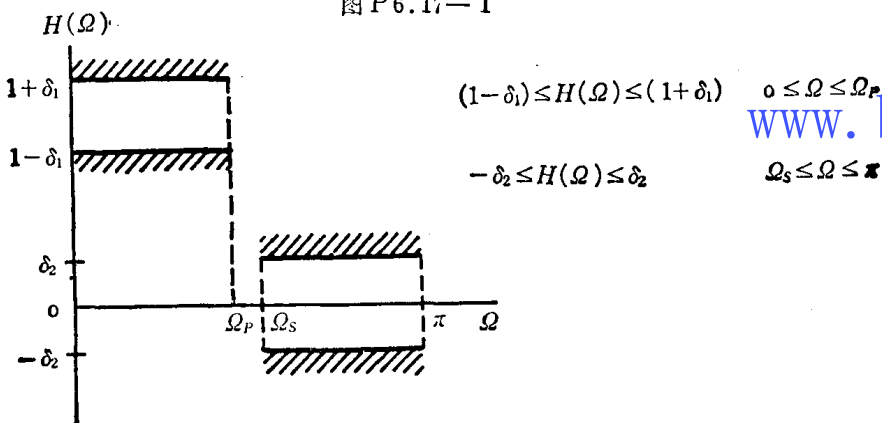


图 P 6.17-2

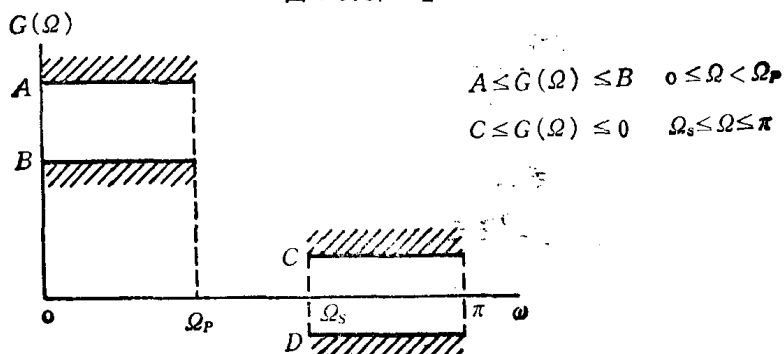


图 P 6.17-3

① J.W.Tukey, Exploratory Data Analysis (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1976).