课程背景

复数是十六世纪人们在解代数方程时引进的。为使负数开方有意义，需要再一次扩大数系，使实数域扩大到复数域。但在十八世纪以前，由于对复数的概念及性质了解得不清楚，用它们进行计算又得到一些矛盾，所以，在历史上长时期人们把复数看作不能接受的“虚数”。直到十八世纪，J.D’Alembert(1717-1783) 与 L.Euler(1707-1783) 等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，澄清了复数的概念，并且应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题。复数才被人们广泛承认接受，复变函数论才能顺利建立和发展。

复变函数的理论基础是十九世纪奠定的。A.L.Cauchy （ 1789-1866) 和 K.Weierstrass(1815-1897) 分别应用积分和级数研究复变函数，G.F.B.Riemann (1826-1866) 研究复变函数的映照性质。他们是这一时期的三位代表人物。经过他们的巨大努力，复变函数形成了非常系统的理论，且渗透到了数学的许多分支，同时，它在热力学，流体力学和电学等方面也得到了很多的应用。

二十世纪以来，复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论和信号处理等方面，与数学中其它分支的联系也日益密切。

研究对象 复变函数（自变量为复数的函数）

主要任务 研究复变数之间的相互依赖关系，

具体地就是复数域上的微积分。

主要内容 复数与复变函数、解析函数、

复变函数的积分、级数、留数、

积分变换（应用）等。

学习方法

复变函数中许多概念、理论、和方法是实变函数在复数域内的推广和发展，它们之间有许多相似之处。但又有不同之处，在学习中要善于比较、区别、特别要注意复数域上特有的那些性质与结果。“存同求异”

教学要求

成绩＝考试（ 70% ）＋平时（ 20 分）＋课堂测验（ 10 分）

缺交作业一次、无故旷课一次、迟到或早退累计两次从平时成绩中扣除 3 分；作业得分为 A 或 B ，全部得 A ，得 20 分；有一个 B ，扣 1 分。

课后答疑 （教学楼 103 ）

第 13-17 周，周三晚 6:30-8:30

第一章　复数与复变函数

§1 复数及其运算

- 1. 复数的概念
- 2. 代数运算
- 3. 共轭复数

1. 复数的概念

定义 对任意两实数 x 、 y , 称 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 为复数。$i^2=-1$， i称为虚单位。

•复数 z 的实部 $\mathrm{Re}(z)=x$; 虚部 $\mathrm{Im}(z)=y$.

(real part) (imaginary part)

• 复数的模 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 0

• 判断复数相等

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2,\text{其中}z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$$

$$z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=0$$

一般，任意两个复数不能比较大小。

2. 代数运算

- **四则运算**

定义 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的和、差、积和商为：

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$$

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{|z_2|^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{|z_2|^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

•<u>运算规律</u>

复数的运算满足交换律、结合律、分配律。（与实数相同）即，

$$z_1+z_2=z_2+z_1\;；$$

$$z_1z_2=z_2z_1\;；$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)\;；$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3\;；$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3\,.$$

3. 共轭复数

定义 若 $z=x+iy$，称 $\bar{z}=x-iy$ 为 z 的共轭复数.

(conjugate)

• **共轭复数的性质**

(1) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(2) $\bar{\bar{z}} = z$

(4) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

$z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

(3) $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

例 1 将下列复数表示为 $x+iy$ 的形式.

(1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^7$; (2) $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}$.

解 (1) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{(1-i)^2}{2}=-i,$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=(-i)^7=i.$$

(2) $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}=\dfrac{i^2+(1-i)^2}{(1-i)i}=\dfrac{-1-2i}{1+i}$

$$=\frac{(-1-2i)(1-i)}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i.$$

例 2 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$, 求 $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ 与 $z\cdot\bar{z}$.

解 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i\cdot i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$

$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2},\ \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2},$

$z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$

§2 复数的表示方法

- 1. 点的表示
- 2. 向量表示法
- 3. 三角表示法
- 4. 指数表示法
- 5. 复球面

1. 点的表示

易见，$z = x + iy \leftrightarrow$ 一对有序实数(x, y),

在平面上取定直角坐标系，则

任意点$P(x, y) \leftrightarrow$ 一对有序实数(x, y)

$\Rightarrow z = x + iy \leftrightarrow$ 平面上的点$P(x, y)$

$\therefore$ 复数$z = x + iy$可用平面上坐标为(x, y)的点P表示.

此时，x轴 — 实轴　y轴 — 虚轴

平面 — 复平面或z平面

点的表示：$z = x + iy \leftrightarrow$ 复平面上的点$P(x, y)$

数 z 与点 z 同义.

2. 向量表示法

$\because z$ $P(x\ ,\ y) \leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \{x, y\}$

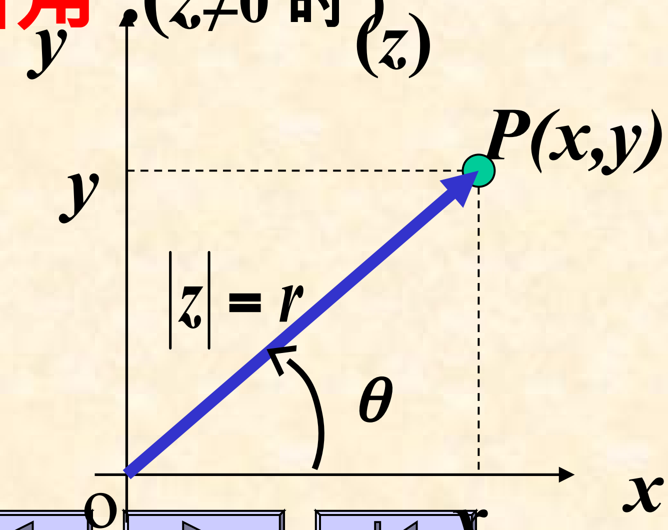
$\therefore$ 可用向量$\overrightarrow{OP}$表示$z = x + iy$.

称向量的长度为复数 $z=x+iy$ 的**模**或**绝对值**；以正实轴 为始边，以向量$\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 称为复数 $z=x+iy$ 的**辐角** .($z\neq0$ 时)

模 :$|z| = |\overrightarrow{OP}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

辐角 : $\theta \overset{\text{记作}}{=} \mathrm{Arg}z$

$$z = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = 0$$



$z \neq 0$时 ,$\tan(\mathrm{Arg}z) = y / x$

辐角无穷多： $\mathrm{Arg}\, z=\theta=\theta_0+2k\pi$ ， $k\in Z$ ，

把其中满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$的 θ_0 称为辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记作 $\theta_0=\arg z$ 。

z=0 时，辐角不确定。

计算 $\arg z(z\neq 0)$ 的公式

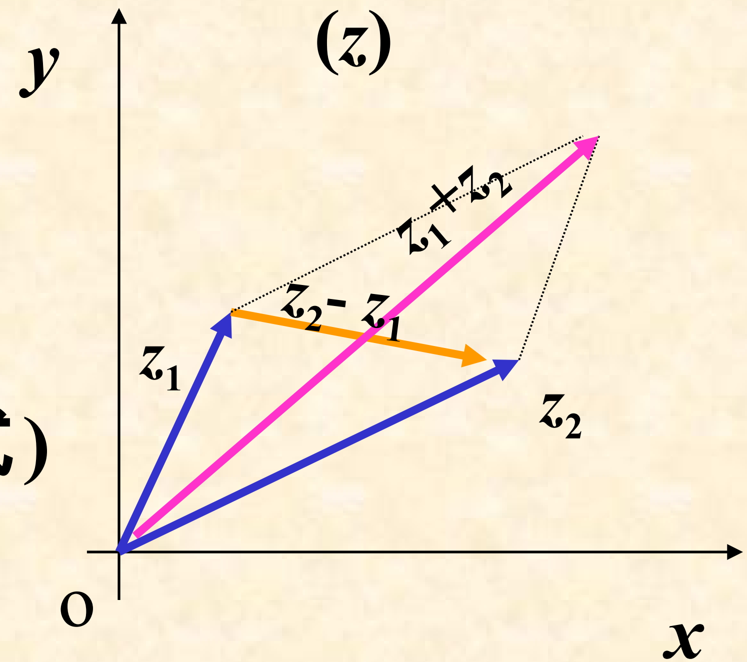
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & x > 0, y \in R \\ \pm \dfrac{\pi}{2} & x = 0, y \gtrless 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi & x < 0, y \gtrless 0 \\ \pi & x < 0, y = 0 \end{cases}$$

- 当 z 落于一，四象限时，不变。
  - 当 z 落于第二象限时，加 π。
  - 当 z 落于第三象限时，减 π。

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$$

由向量表示法知

$|z_2 - z_1|$ —点z_1与z_2之间的距离



由此得：

$|z_2 + z_1| \le |z_2| + |z_1|$ （三角不等式）

$|z_2 - z_1| \quad ||z_2| - |z_1||$

3. 三角表示法

由 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 得

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

4. 指数表示法

由$Euler$公式：

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 得

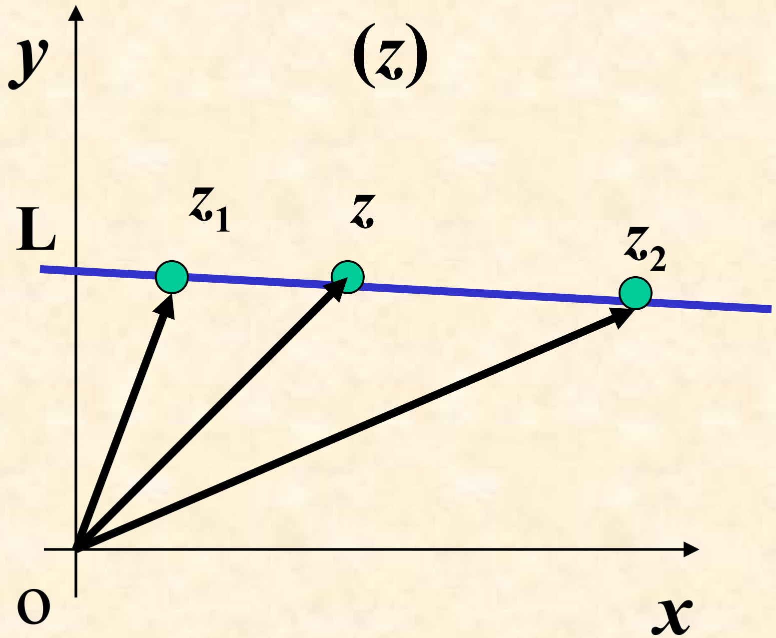
$$z = re^{i\theta}$$

引进复数的几何表示，可将平面图形用复数方程（或不等式）表示；反之，也可由给定的复数方程（或不等式）来确定它所表示的平面图形。

例 1 用复数方程表示

过两点 $z_j=x_j+iy_j\ (j=1,2)$

的直线；



解 通过两点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 的直线的方程

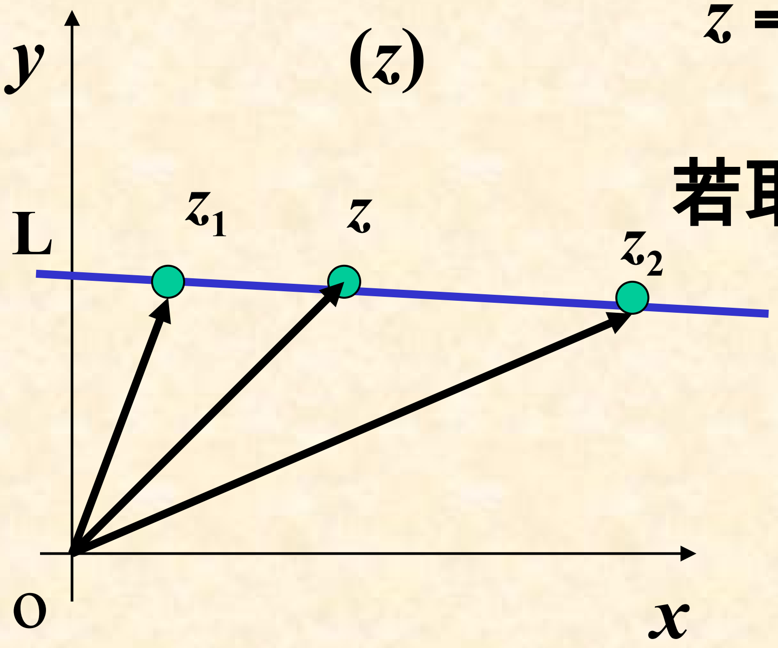
$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$ 参数 $t \in (-\infty, +\infty)$,

所以它的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$ 参数 $t \in (-\infty, +\infty)$,

由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \le t \le 1)$$



若取 $t = \dfrac{1}{2}$, 得线段 $\overline{z_1 z_2}$ 的中点坐标为

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

例 2 求下列方程所表示的曲线：

(1) $|z+i|=2;$ (2) $|z-2i|=|z+2|;$

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$ (4) $\operatorname{Re}(i\overline{z})=3$

解 (1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为2的点的轨迹.

即表示中心为 $-i$, 半径为 2 的圆.

设 $z=x+iy$, $|x+(y+1)i|=2$,

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$, 圆方程 $x^2+(y+1)^2=4$.

(2) $|z-2i|=|z+2|$

表示所有与点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹.

故方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线.　　设 $z=x+iy$,

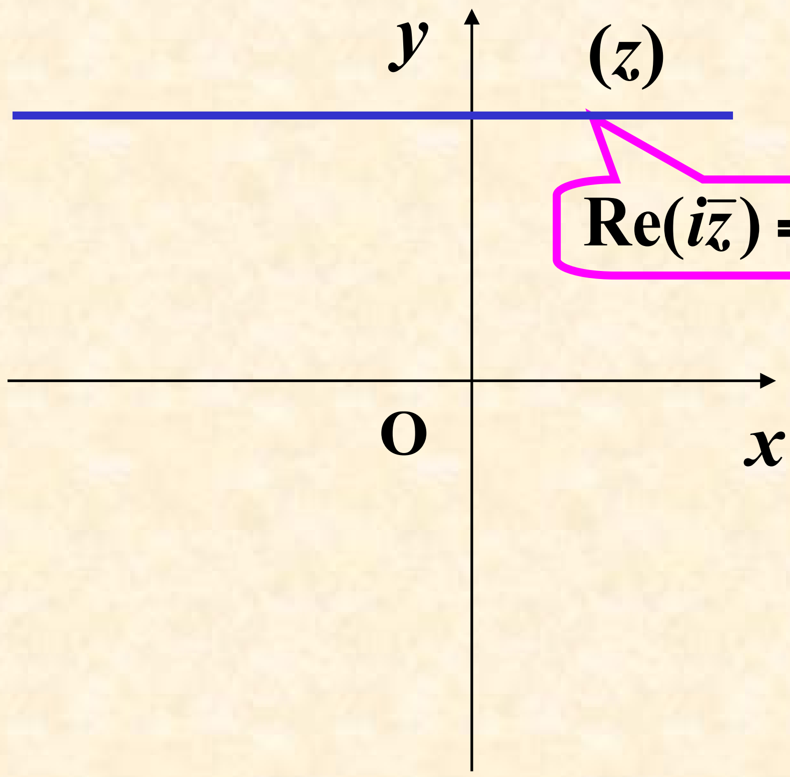
$|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得　$y=-x.$

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$　　　设 $z=x+iy$,

$i+\bar{z}=x+(1-y)i$,　$\mathrm{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$,

所求曲线方程为 $y=-3.$

(4) $\operatorname{Re}(i\overline{z}) = 3$



解 设 $z = x + iy$

$\because\ i\overline{z} = i(x - iy)$

$= y + ix$

$\therefore \operatorname{Re}(i\overline{z}) = y$

$\Rightarrow\ y = 3$

故 $\operatorname{Re}(i\overline{z}) = 3$ 图形为平行于实轴的直线

例 3 将下列复数化为三角表示式与指数表示式：

(1) $z = -\sqrt{12} - 2i$; (2) $z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$;

(3) $z = \dfrac{(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^3}$.

解 (1) $r = |z| = \sqrt{12+4} = 4$, 因为 z 在第三象限,

所以 $\theta = \arctan\left(\dfrac{-2}{-\sqrt{12}}\right) - \pi = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \pi = -\dfrac{5}{6}\pi$,

故三角表示式为 $z = 4\left[\cos\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)\right]$,

指数表示式为 $z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$.

(2) $z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$　　显然 $r = |z| = 1$,

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10},$$

故三角表示式为 $z = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}$,

指数表示式为 $z = e^{\frac{3}{10}\pi i}$.

(3) $z=\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}$.

因为 $\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi=e^{5\varphi i}$,

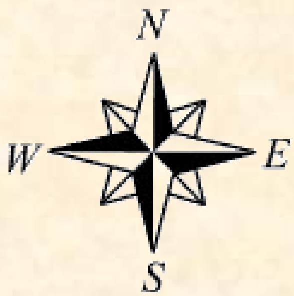
$\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi=\cos(-3\varphi)+i\sin(-3\varphi)=e^{-3\varphi i}$,

所以 $\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}=\dfrac{(e^{5\varphi i})^2}{(e^{-3\varphi i})^3}=e^{19\varphi i}$,

故三角表示式为 $z=\cos 19\varphi+i\sin 19\varphi$,

指数表示式为 $z=e^{19\varphi i}$.

5. 复球面



1. 南极、北极的定义

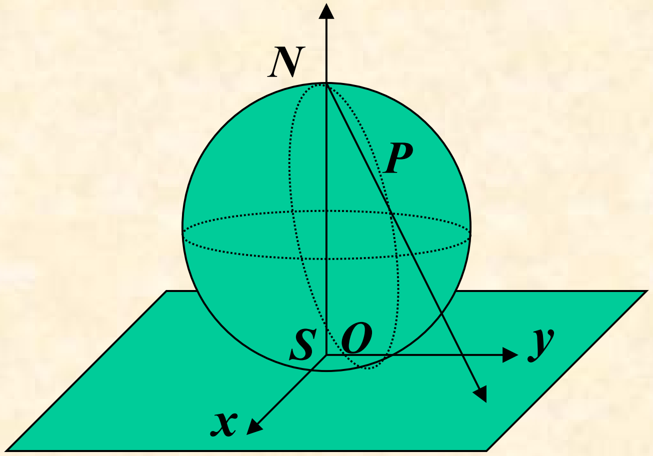
取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面，

球面上一点 S 与原点重合，

通过 S 作垂直于复平面的

直线与球面相交于另一点 N，

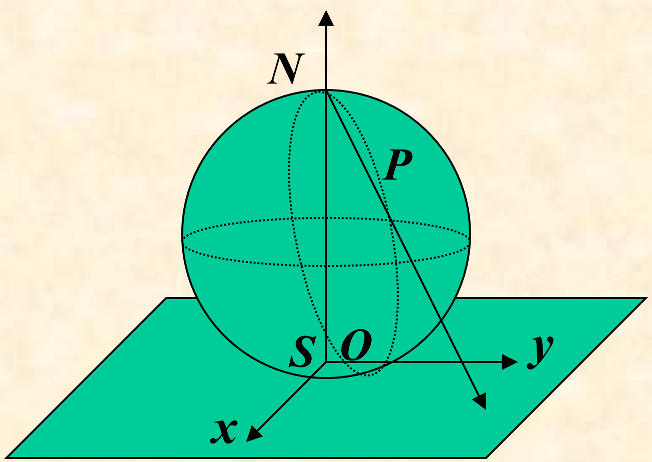
我们称 N 为北极，S 为南极.



2. 复球面的定义

球面上的点，除去北极 N 外，与复平面内的点之间存在着一一对应的关系．我们可以用球面上的点来表示复数．

我们规定：复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应，记作∞．北极 N 就是复数无穷大∞ 的几何表示．



球面上的每一个点都有唯一的复数与之对应，这样的球面称为复球面．

3. 扩充复平面的定义

包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面 C_∞.

不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面，或简称复平面， 记作 C.

对于复数∞来说，实部，虚部，辐角等概念均无意义，它的模规定为正无穷大 .

复球面的优越处：

能将扩充复平面的无穷远点明显地表示出来 .

关于∞的四则运算规定如下：

(1) 加法： $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty, \quad (\alpha \neq \infty)$

(2) 减法： $\alpha - \infty = \infty - \alpha = \infty, \quad (\alpha \neq \infty)$

(3) 乘法： $\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty, \quad (\alpha \neq 0)$

(4) 除法： $\dfrac{\alpha}{\infty} = 0, \quad \dfrac{\infty}{\alpha} = \infty, (\alpha \neq \infty), \quad \dfrac{\alpha}{0} = \infty, (\alpha \neq 0)$

§3. 复数的乘幂与方根

- 1. 复数的乘积与商
- 2. 复数的乘幂
- 3. 复数的方根

1. 乘积与商

定理 1　两个复数乘积的模等于它们的模相乘，两个复数乘积的辐角等于它们的辐角相加。

证明　设　$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1}$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}$$

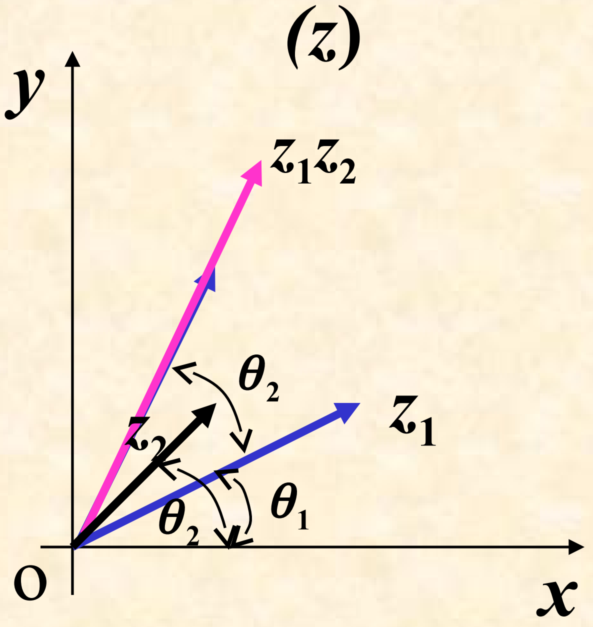
则　$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

因此　$|z_1z_2|=r_1r_2$，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$

几何意义 将复数 z_1 按逆时针方向旋转一个角度 $\operatorname{Arg} z_2$，再将其伸缩到 $|z_2|$ 倍。



 定理 1 可推广到 n 个复数的乘积。

例1.设$z_1=-1, z_2=i$,则 $z_1z_2=-i$

$$Argz_1=\pi+2m\pi \qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$Argz_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$Arg(z_1z_2)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

代入上式 $\frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

要使上式成立，必须且只需 k=m+n+1.

定理 2　两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差。

证明　设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}, z_2=r_2e^{i\theta_2}$

由复数除法的定义 $z=z_2/z_1$ ，即 $z_1z=z_2$

$\because |z||z_1|=|z_2|$ 及 $\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}\,z_2$ （ $z_1\neq0$ ）

$\therefore \mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}z_2-\mathrm{Arg}z_1$　即：

$$z=\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}$$

2. 复数的乘幂

定义　n 个相同的复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂，记作 z^n，即 $z^n=z\cdot z\cdots z$（共 n 个）。

设 $z=re^{i\theta}$，由复数的乘法定理和数学归纳法可证明　$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^n e^{in\theta}$。

特别：当 $|z|=1$ 时，即：$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$，则有

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$$

——棣模佛 (De Moivre) 公式。

定义　$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}.$　由定义得　$z^{-n}=r^{-n}e^{-in\theta}$

3. 复数的方根(开方)——乘方的逆运算

问题 给定复数 $z=re^{i\theta}$，求所有的满足 $\omega^n=z$ 的复数 ω。

当 $z\neq 0$ 时，有 n 个不同的 ω 值与 $\sqrt[n]{z}$ 相对应，每一个这样的 ω 值都称为 z 的 n 次方根，记 $\omega=\sqrt[n]{z}$

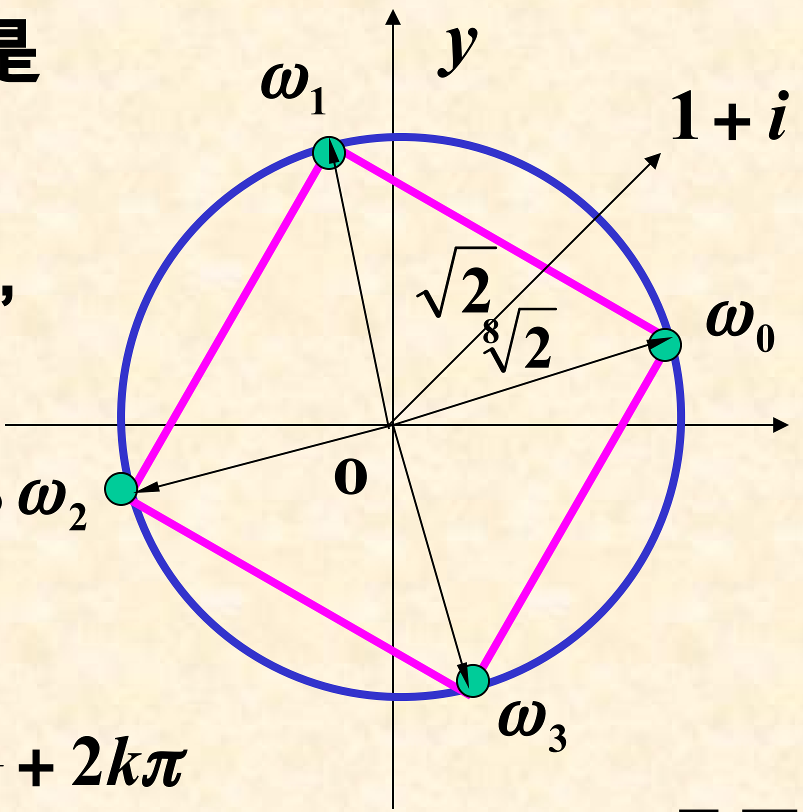
设 $\omega=\rho e^{i\varphi}$，由 $\omega^n=z$，有 $\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta}$

$$\Rightarrow \rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi \quad (k\in Z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\omega&=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)\\ &=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\end{aligned}}$$

- 当 k=0 ，1 ，… ，n-1 时，可得 n 个不同的根，而 k 取其它整数时，这些根又会重复出现。

几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上 n 个等分点，即它们是内接于该圆周的正 n 边形的 n 个顶点。



如 $\omega_k = \sqrt[4]{1+i}$

$$= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right) \quad (k=0,1,2,3)$$（见图）

例2：求 $\sqrt[3]{1}$

解： $\because\ 1 = \left(\cos 0 + i \sin 0\right)$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}, (k = 0,1,2).$$

$$\text{即}\ \omega_0 = 1, \omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

§4. 区 域

- 1. 区域的概念
- 2. 简单曲线（或 Jordan 曲线）
- 3. 单连通域与多连通域

1. 区域的概念

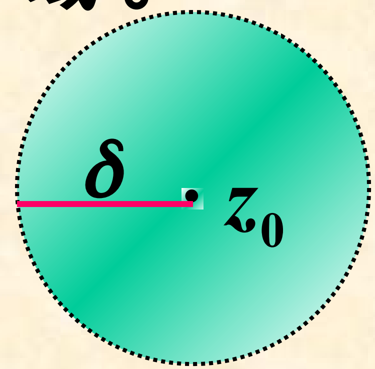
•邻域

复平面上以 z_0 为中心，任意 $\delta>0$ 为半径的圆 $|z-z_0|<\delta$（或 $0<|z-z_0|<\delta$）内部的点的集合称为点 z_0 的 δ（去心）~~邻域~~。

记为 $U(z_0,\delta)$ $(U^\circ(z_0,\delta))$ 即，

$$U(z_0,\delta)=\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$$

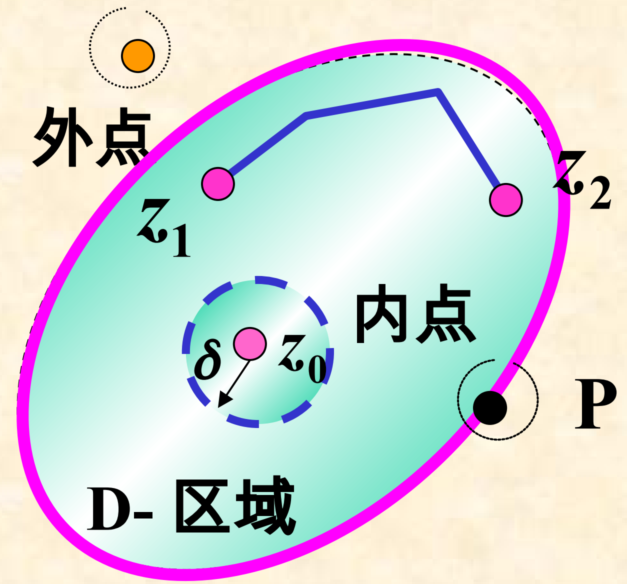
$$(U^\circ(z_0,\delta)=\{z \mid 0<|z-z_0|<\delta\})$$



设 G 是一平面上点集

内点 对任意 z_0 属于 G，若存在 $U(z_0,\delta)$，使该邻域内的所有点都属于 G，则称 z_0 是 G 的内

开集　若 G 内的每一点都是内点，则称 G 是开集。



•**区域**　设 D 是一个开集，且 D 是连通的，称 D 是一个区域。

连通是指 D 中任意两点均可用完全属于 D 的折线连接.

边界与边界点　已知点 P 不属于 D，若点 P 的任何邻域中都包含 D 中的点及不属于 D 的点，则称 P 是 D 的边界点；D 的所有边界点组成 D 的边界。

•**闭区域**　区域 D 与它的边界一起构成闭区域，记为 $\overline{D}$.

有界区域与无界区域

若存在 $R>0$, 对任意 $z\in$D, 均有

$z\in G=\{z \mid |z|<R\}$ ，则 D 是有界区域；否则无界。

$$|z-z_0|<r$$

表示以 z_0 为圆点,以 r 为半径的圆内所有的点.

$\operatorname{Re} z = \alpha, \operatorname{Im} z = \beta$表示分别平行于y轴和x轴的直线.

$\operatorname{Re} z > 0$表示右半复平面,

$\operatorname{Im} z < 0$表示下半复平面.

$r_1 < |z - z_0| < r_2$　表示一个圆环,而且是有界的.

它的边界由两个圆周$|z - z_0| = r_2, |z - z_0| = r_1$组成,

如果在其中去掉一个或几个点,它仍然是区域,

只是边界增加了一个或几个点.

2. 简单曲线 (或 Jardan 曲线)

平面上一条连续曲线可 表示为：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \le t \le b),$$ 实变函数 $x(t)$、$y(t) \in C[a,b]$

令 $z(t)=x(t)+iy(t) \quad a \le t \le b$；

则曲线方程可记为：$z=z(t)$ ， $a \le t \le b$

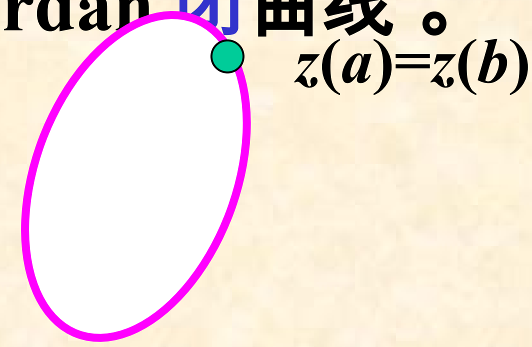
若 $x'(t)$、$y'(t) \in C[a,b]$ 且 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$

则称该曲线为光滑的.

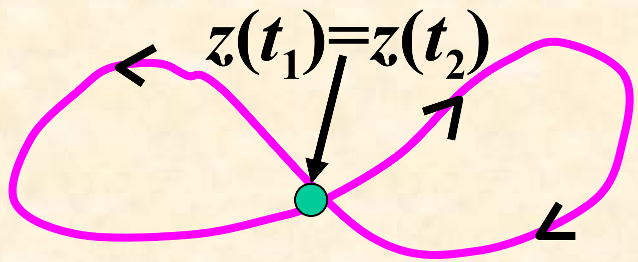
有限条光滑曲线相连接构成一条分段光滑曲线。

重点　设连续曲线 C ：$z=z(t)$ ，$a\le t\le b$ ，对于 $t_1\in(a，b)$, $t_2\in[a, b]$, 当 $t_1\ne t_2$ 时，若 $z(t_1)=z(t_2)$ ，称 $z(t_1)$ 为曲线 C 的重点。

定义　称没有重点的连续曲线 C 为简单曲线或 Jardan 曲线；若简单曲线 C 满足 $z(a)=z(b)$ 时，则称此曲线 C 是简单闭曲线或 Jordan 闭曲线 。



简单闭曲线

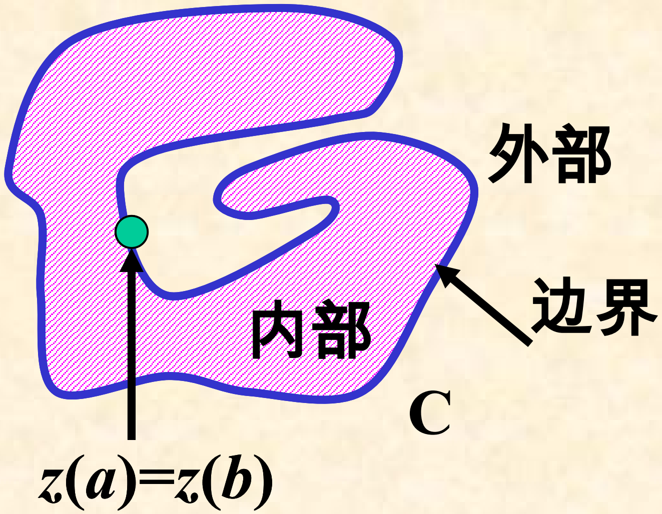


不是简单闭曲线

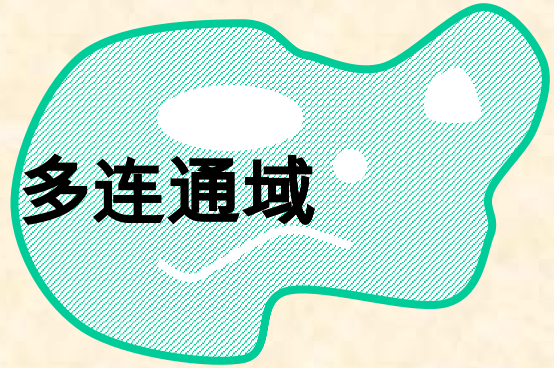
简单闭曲线的性质

任一条简单闭曲线 C：$z=z(t)$，$t\in[a, b]$，把复平面唯一地分成三个互不相交的部分：一个是有界区域，称为 C 的内部；一个是无界区域，称为 C 的外部；还有一个是它们的公共边界。

3. 单连通域与多连通域

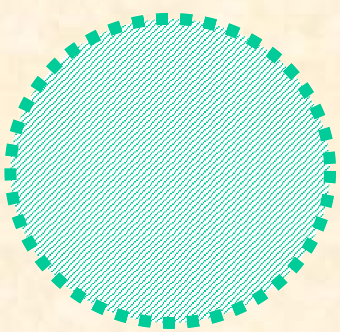


定义 复平面上的一个区域 B，如果 B 内的任何简单闭曲线的内部总在 B 内，就称 B 为单连通域；非单连通域称为多连通域。



例如 $|z|<R$（ $R>0$ ）是单连通的；

$0\le r<|z|\le R$ 是多连通的。



单连通域

多连通域

作业　习题一

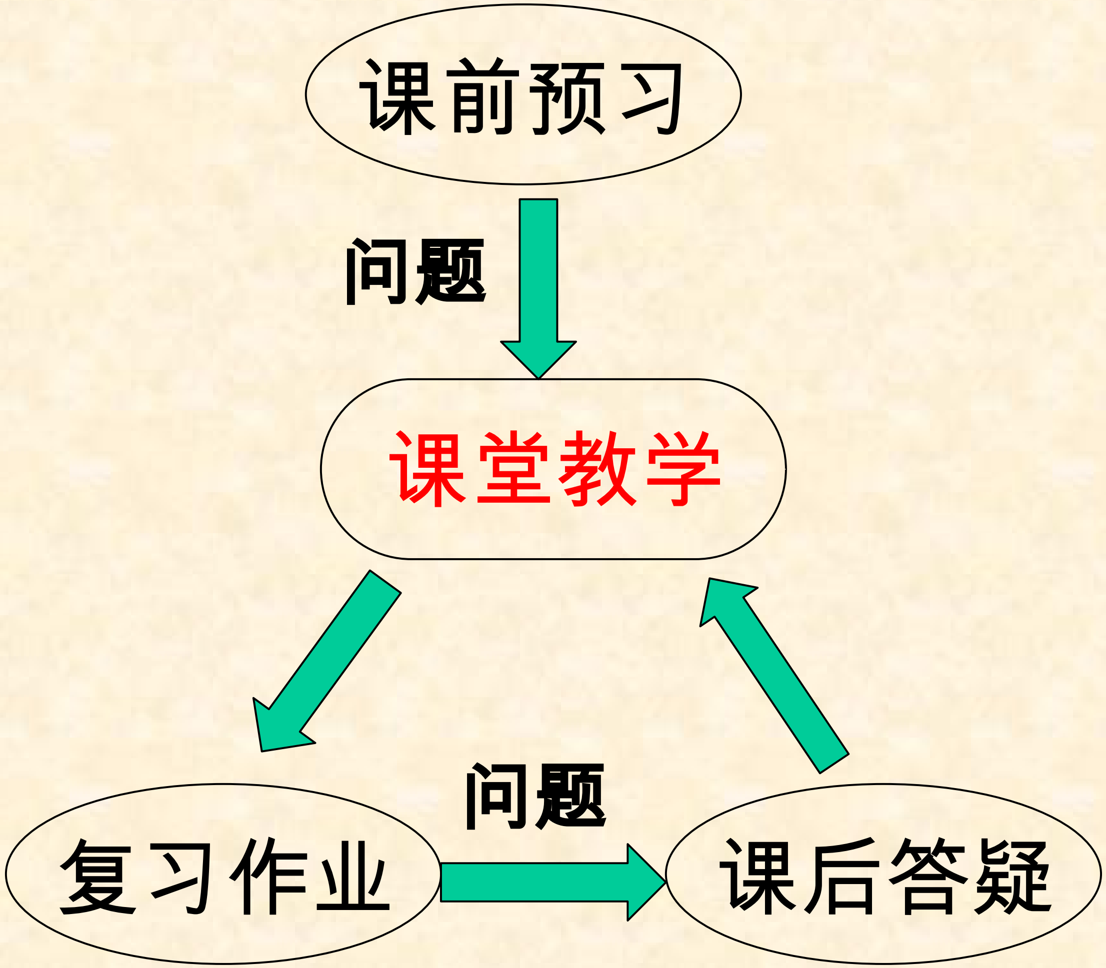
P21　　2

3（1、2、3、4）

4（1、3、5、7）

9（1、3、4）

10（1、3、5）


课前预习
问题
课堂教学
复习作业
问题
课后答疑