Chapter 3-1. 周期信号的傅立叶级数表示——连续时间信号的傅立叶级数表示

- **LTI**系统对复指数信号的响应
- 成谐波关系的复指数信号的组合
- 连续周期时间信号的傅立叶级数系数的确定

LTI系统对复指数信号的响应

特征函数与特征值 若系统对某个信号x(t)/x[n]的响应仅是一个常数H(s)/H(z)乘以输入x(t)/x[n]，则称x(t)/x[n]为系统的特征函数，幅度因子H(s)/H(z)为系统的特征值。

$$y(t) = H(s)x(t) \qquad y[n] = H[z]x[n]$$

LTI系统对连续复指数函数的响应 e^{st} 　 s为任意复数

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \overset{x(t)=e^{st}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$$

假设收敛

复振幅因子

记 $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \longrightarrow y(t) = \underbrace{H(s)}_{特征值}\,\underbrace{e^{st}}_{特征函数}$

例3.1 已知LTI系统输入输出的关系为 $y(t) = x(t-3)$，计算系统的特征值

$$y(t) = x(t-3) \Rightarrow h(t) = \delta(t-3) \longrightarrow H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3)e^{-s\tau}d\tau = e^{-3s}$$

若 $x(t) = e^{j2t}$ $(s = j2)$

$$y(t) = H(s)e^{j2t} = e^{-j6}e^{j2t} \qquad H(j2) = e^{-j6}$$

$$y(t) = x(t-3) = e^{2j(t-3)} = e^{-j6}e^{j2t}$$

LTI系统对复指数信号的响应

特征函数与特征值 若系统对某个信号**x(t)/x[n]**的响应仅是一个常数***H*****(s)/*****H*****(z)**乘以输入**x(t)/x[n]**，则称**x(t)/x[n]**为系统的特征函数，幅度因子***H*****(s)/*****H*****(z)**为系统的特征值。

$$y(t)=H(s)x(t)$$

$$y[n]=H[z]x[n]$$

LTI系统对离散复指数函数的响应 z^n z为任意复数

复振幅因子

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{n-k}=z^n\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{-k}}_{\text{假设收敛}}=\underbrace{H(z)}_{\text{特征值}}\underbrace{z^n}_{\text{特征函数}}$$

记 $H(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{-k}$

LTI系统对复指数信号的响应

LTI系统对复指数信号响应的叠加性

若一个LTI系统的输入能表示成若干复指数信号的线性组合，则其输出必然也能够表示成复指数信号的响应的线性组合。

$$e^{s_k t} \longrightarrow y_k(t) = H(s_k)\, e^{s_k t} \Rightarrow x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$z_k{}^n \longrightarrow y_k[n] = H(z_k)\, z_k{}^n \Rightarrow x[n] = \sum_k a_k z_k{}^n \Rightarrow y(t) = \sum_k a_k H(z_k) z_k{}^n$$

频率响应

s和z可以是任意复数，但是傅里叶级数仅仅分析其特殊形式：

$s = j\omega \qquad z = e^{j\omega}$ 此时的H(s)或H(z)也称为频率响应。

LTI系统对复指数信号的响应

LTI系统对复指数信号响应的叠加性

若一个LTI系统的输入能表示成若干复指数信号的线性组合，则其输出必然也能够表示成复指数信号的响应的线性组合。

$$e^{s_k t} \longrightarrow y_k(t) = H(s_k)\, e^{s_k t} \Rightarrow x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$z_k{}^n \longrightarrow y_k[n] = H(z_k)\, z_k{}^n \Rightarrow x[n] = \sum_k a_k z_k{}^n \Rightarrow y(t) = \sum_k a_k H(z_k) z_k{}^n$$

例3.1

已知**LTI**系统：

$$y(t) = x(t-3)$$

当输入为：

$$x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$$

计算系统输出。

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{j7t} + \frac{1}{2}e^{-j7t}$$

$$H(s) = e^{-3s} \rightarrow H(s = j4) = e^{-j12}, H(s = j7) = e^{-j21}$$

$$H(s = -j4) = e^{j12}, H(s = -j7) = e^{j21}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-j12}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j12}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{-j21}e^{j7t} + \frac{1}{2}e^{j21}e^{-j7t}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j4(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-j4(t-3)} + + \frac{1}{2}e^{j7(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-j7(t-3)}$$

$$= \cos(4(t-3)) + \cos(7(t-3))$$

连续时间周期信号的傅立叶级数表示

基波、谐波与谐波族

$\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ 均是以 $\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ 为周期的周期信号,它们被称为一族谐波复指数信号，其中 $e^{j\omega_0 \pm t}$ 是基波分量或者一次谐波分量， $e^{j\omega_0 \pm kt}$ 是第K次谐波。

$T_0=\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ 称为基波周期。

连续时间周期信号的傅立叶级数

一个连续周期信号表示成一组谐波信号的形式，就称该谐波族信号的表示形式为该信号的傅立叶级数表示形式。

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

或

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k e^{jk(2\pi/T)t}+a_{-k}e^{-jk(2\pi/T)t}\right)$$

连续时间周期信号的傅立叶级数表示

连续实周期信号的傅立叶级数

系数特点

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t)=x^*(t)$$

$$x(t)=x^*(t)=\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\right)^*=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^*\left(e^{jk\omega_0 t}\right)^*$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

变量替换，-k=k

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k^*=a_{-k}$$

三角函数表达形式

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k e^{jk\omega_0 t}+a_{-k}e^{-jk\omega_0 t})=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k e^{jk\omega_0 t}+a_k^* e^{-jk\omega_0 t})$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t}\right\}$$

若$\mathbf{a_k}$以极坐标形式给出 $a_k=A_k e^{j\theta_k}$

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{A_k e^{j\theta_k}e^{j\omega_0 kt}\right\}=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{A_k e^{j(\theta_k+k\omega_0 t)}\right\}=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

若$\mathbf{a_k}$以直角坐标形式给出 $a_k=B_k+jC_k$

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t}\right\}\longrightarrow x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}\left[B_k\cos(k\omega_0 t)-C_k\sin(k\omega_0 t)\right]$$

连续时间周期信号的傅立叶级数表示

- **连续周期信号的傅立叶级数** $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

- **傅立叶级数系数的确定** $a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow e^{-jn\omega_0 t}x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}$$

两边在一个周期内积分

$$\int_0^T e^{-jn\omega_0 t}x(t)dt=\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$\int_0^T e^{-jn\omega_0 t}x(t)dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(a_k\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right)$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=\begin{cases} T & k=n \\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

$$\int_0^T e^{-jn\omega_0 t}x(t)dt=Ta_n$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt=\frac{\text{周期面积}}{T}$$

连续时间周期信号的傅立叶级数表示

傅立叶级数综合与分析公式

综合公式 $$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

分析公式 $$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

$$x(t)\overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow}a_k \qquad a_k \xrightarrow{FS^{-1}} x(t)$$

几个常用概念

a_k **：x(t)的傅立叶级数或者频谱系数。**

$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt$ **：x(t)的直流分量/常数分量**

连续时间周期信号的傅立叶级数表示

傅立叶级数综合与分析公式

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t} \qquad a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

例子 例3.3/3.4 求出下列信号的傅立叶系数表达式

直接计算法

(1) $x(t)=\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}]$ $\qquad a_1=\frac{1}{2j}, a_{-1}=-\frac{1}{2j}, a_k=0, k\neq\pm 1$

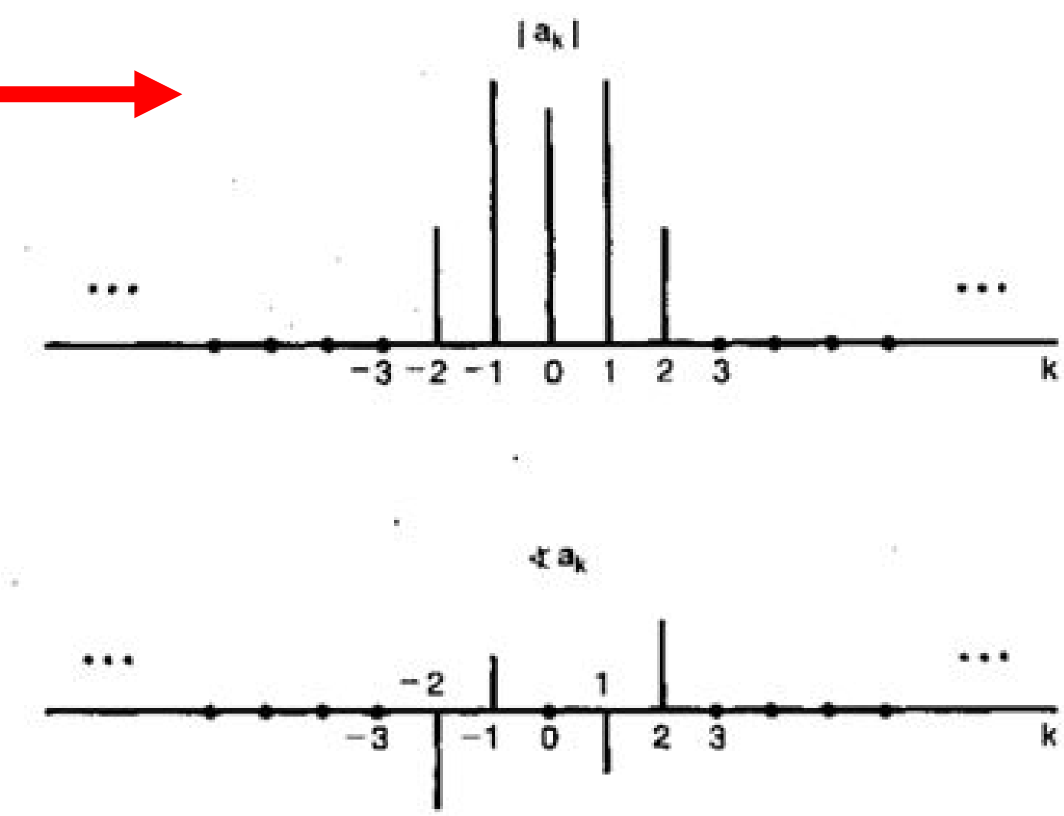
(2) $x(t)=2+2\sin\omega_0 t+\cos\omega_0 t+\cos(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4})$

$$=2+\frac{1}{j}[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}]+\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}]$$

$$+\frac{1}{2}[e^{j(2\omega_0 t+\pi/4)}+e^{-j(2\omega_0 t+\pi/4)}]$$

$$a_0=2, a_1=\frac{1}{2}-j, a_{-1}=\frac{1}{2}+j, a_2=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+j),$$

$$a_{-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-j), a_k=0, |k|>2$$



连续时间周期信号的傅立叶级数表示

傅立叶级数综合与分析公式

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t} \qquad a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

基本题3.3

$$x(t)=2+\cos\frac{2\pi}{3}t+4\sin\frac{5\pi}{3}t=2+\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{3}t}+e^{-j\frac{2\pi}{3}t}\right)+\frac{4}{2j}\left(e^{j\frac{5\pi}{3}t}-e^{j\frac{5\pi}{3}t}\right)$$

$$T_1=3,T_2=\frac{6}{5}\longrightarrow T_0=6,\ \omega_0=\frac{\pi}{3}$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(e^{j\bullet 2\bullet\frac{\pi}{3}t}+e^{-j\bullet 2\bullet\frac{\pi}{3}t}\right)+\frac{4}{2j}\left(e^{j\bullet 5\bullet\frac{\pi}{3}t}-e^{j\bullet 5\bullet\frac{\pi}{3}t}\right)$$

$$a_0=2,a_2=a_{-2}=\frac{1}{2},a_5=-2j,a_{-5}=2j$$

连续时间周期信号的傅立叶级数表示

傅立叶级数综合与分析公式

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

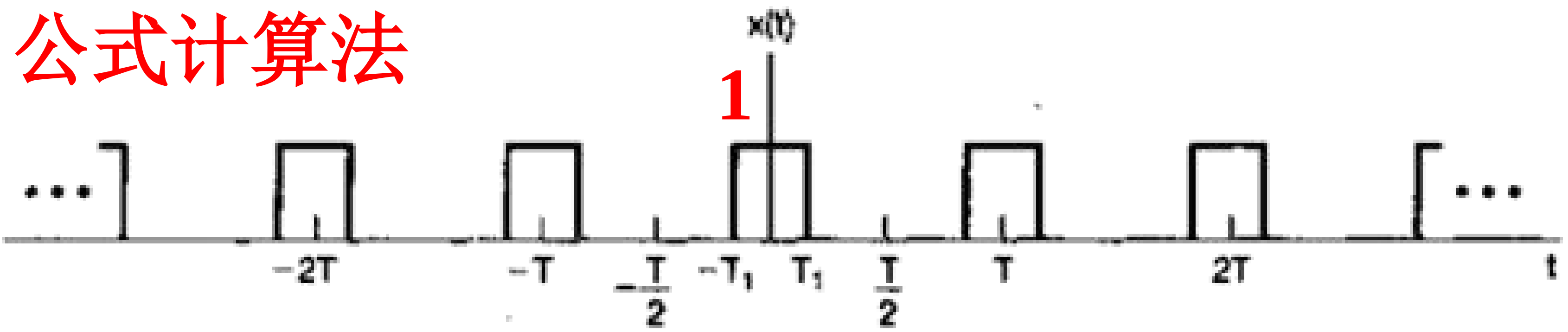
$$Ta_k=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}$$

设 $f(\omega)=\dfrac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$

例3. 5 求周期方波的傅立叶系数表达式

$$Ta_k=f(\omega)=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

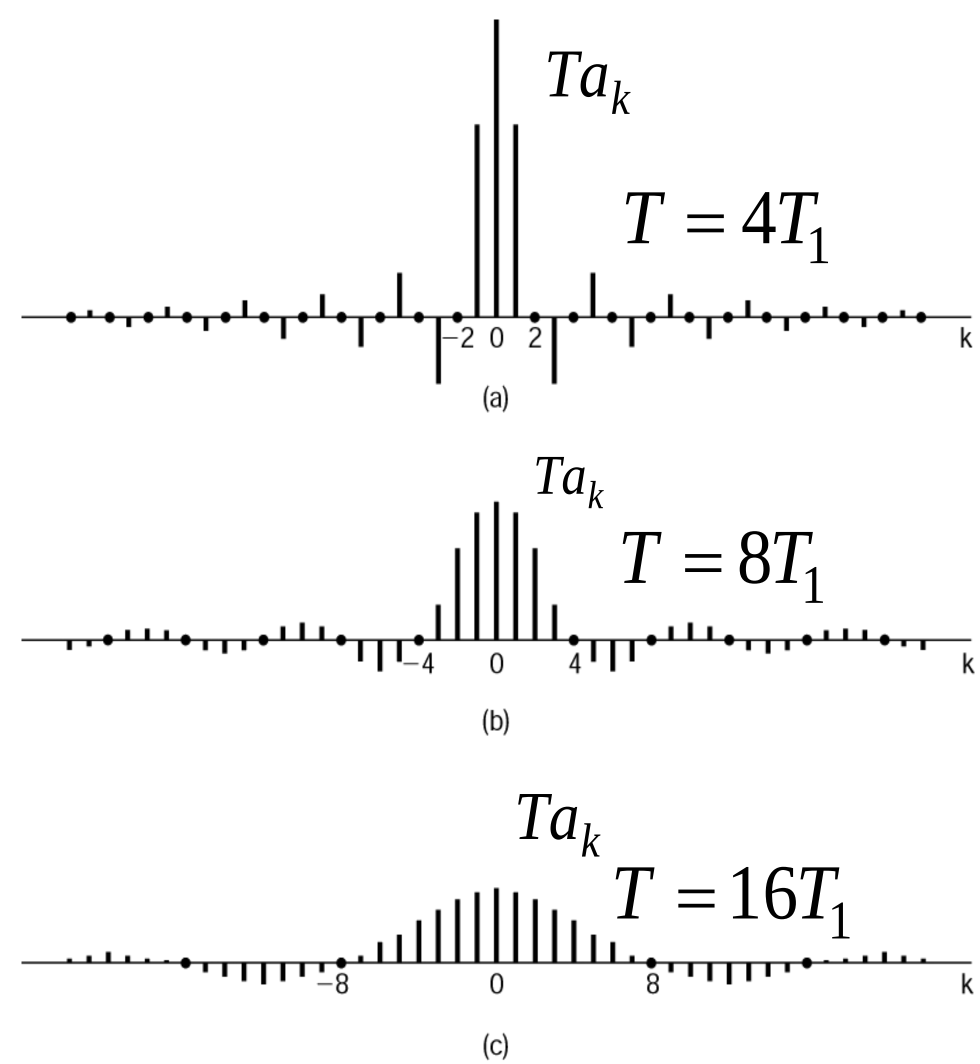
公式计算法



$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}dt=\frac{2T_1}{T}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{-jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi},k\neq 0$$



连续时间周期信号的傅立叶级数表示

傅立叶级数的收敛性

注意

一般而言，不满足Dirichlet条件的信号在自然界中都是属于比较反常的信号，在实际场合难以出现。

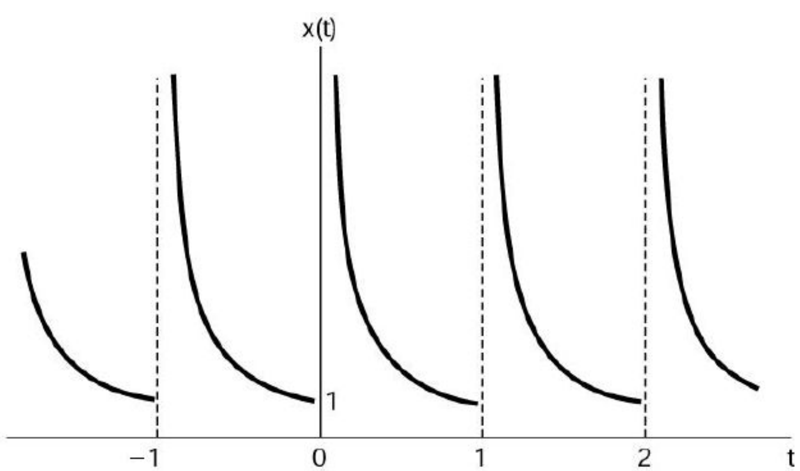
平方可积条件 $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$

Dirichlet条件

条件1：在任何周期内，x(t)必须绝对可积，即$\int_T |x(t)| dt < \infty$

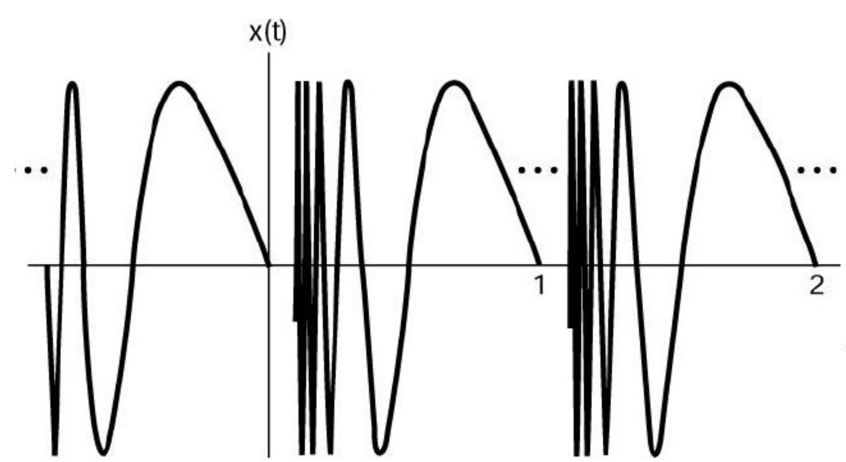
条件2：在任意周期内，x(t)具有有限个最大值和最小值。

条件3：在任意周期内，只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上，函数值有限。



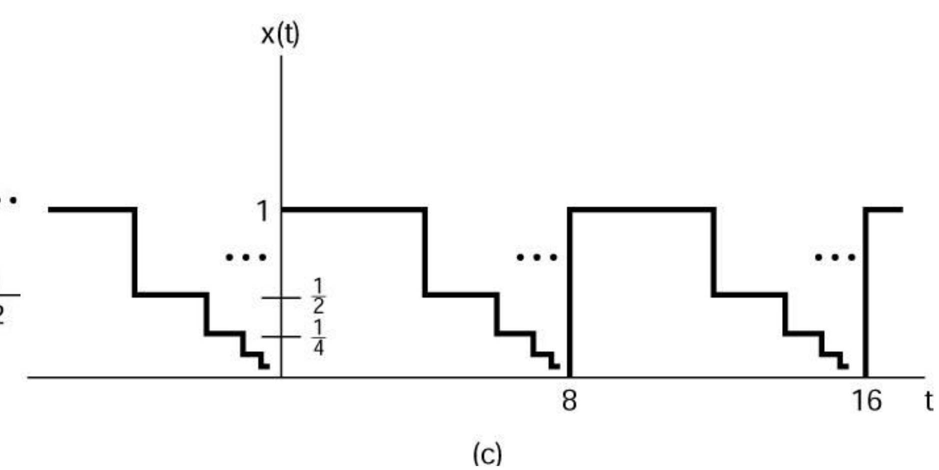
$x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \le 1$

不满足条件1



$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \le 1$

不满足条件2



在一个周期内，距离减半，值减半

不满足条件3

连续时间周期信号的傅立叶级数表示

不连续点与吉伯斯现象

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t} \qquad x_N(t)=\sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jkw_0 t}$$

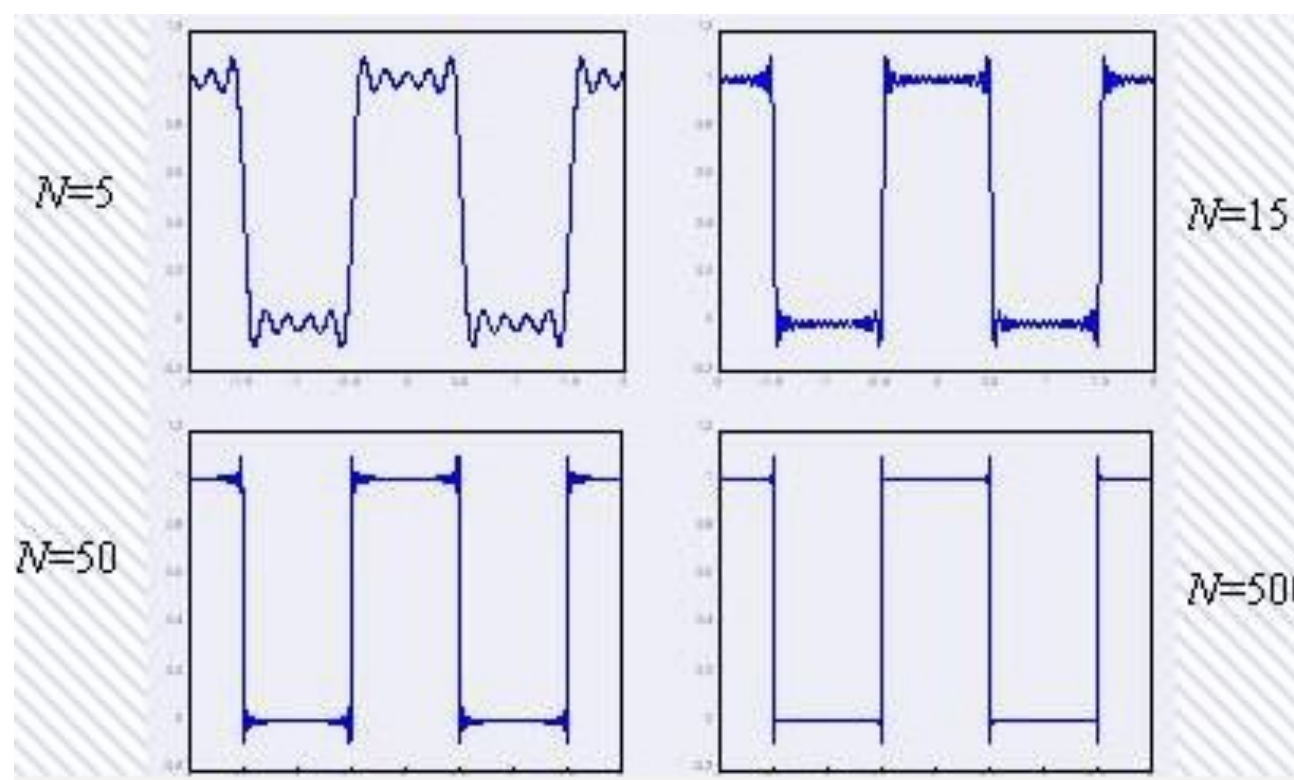
误差

$$e_N(t)=x(t)-x_N(t)$$

若收敛，则　$N\uparrow,\ E_N\downarrow;\quad N\to\infty, E_N\to 0$

用有限项谐波逼近原始周期信号时，在**不连续点**附近，存在**吉伯斯(Gibbs)现象**：不**连续点附近**出现高频**起伏和超量**，且起伏大小**不随着谐波项数N的增加而下降**，且起伏部分所呈现的峰值是不连续点值的**1.09**倍，即有**9%**的超调。

产生原因：时间信号存在跳变破坏了信号的收敛性，使得在间断点傅里叶级数出现非一致收敛。



作业

基本题：

3.1或3.2选做一题

3.4