一、 给出了总体、个体、样本和统计量的概念，要会求样本的分布：

1. $(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数为：

$$F^*(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

2、若设 X 的概率密度为 f(x)，则 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度为：

$$f^*(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

3、若 X 的分布律为 $P\{X=x\}=p(x)$，则 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合分布律为：

$$p\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)$$

返回主目录

二、 掌握样本均值和样本方差的计算及基本性质。

样本均值： $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-n\overline{X}^2]$

设 $X_1,\cdots X_n$为来自总体 X 的一个样本，$EX=\mu,DX=\sigma^2,$

则 $E\overline{X}=\mu,D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n},ES^2=\sigma^2.$

返回主目录

三、掌握三个分布： χ^2分布、t 分布、F 分布的定义及性质，会查表计算。

(1) χ^2 – 分布

设$(X_1,\cdots X_n)$为来自于正态总体$N(0,1)$的样本，

则称统计量：

$$\chi^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

所服从的分布为自由度是n的χ^2分布。

记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

返回主目录

χ^2分布的性质：

1^0. $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 且$\chi_1^2$，$\chi_2^2$独立，则有

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

2^0. $E\chi^2 = n, \quad D\chi^2 = 2n$

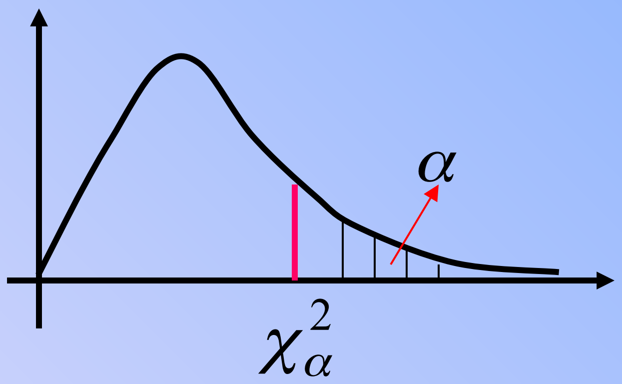
证2^0：

$$E\chi^2 = E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2$$

$$EX_i = 0, \quad DX_i = 1, \quad X_i \sim N(0,1)$$

$$EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = 1,$$

所以 $E\chi^2 = n.$



对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，**称满足条件：**

$$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$$

的点 $\chi_\alpha^2(n)$ **为** $\chi^2(n)$ **分布的上** α **分位点。**

$$\chi_{0.1}^2(25)=34.382\quad,\quad\chi_{0.05}^2(35)=49.802\ .$$

当 n **充分大时，** $\chi_\alpha^2(n)\approx\dfrac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$

z_α **是标准正态分布的上** α **分位点。**

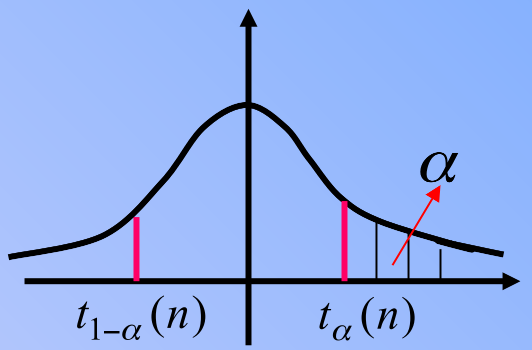
返回主目录

(2) $t-$分布

$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n), X,Y$独立，则称随机变量

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$所服从的分布为自由度是n的 $t-$分布

或称学生氏（$Student$）分布，记作$t \sim t(n)$.



返回主目录

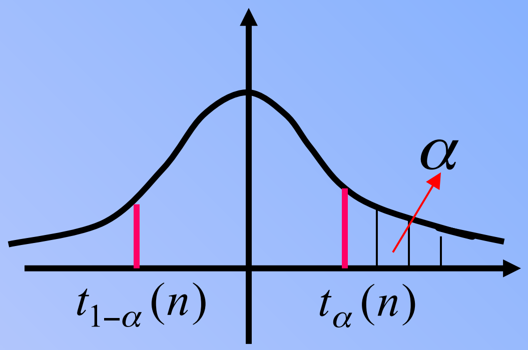
可证
$$\lim_{n\to\infty} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

当n很大时，$t-$分布 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$.

对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件：

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$$

的点$t_\alpha(n)$为t分布的上α分位点。



由概率密度的对称性知：$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

当$n > 45$时，$t_\alpha(n) \approx z_\alpha$.

返回主目录

(3) F – 分布

若 $X\sim\chi^2(n_1), Y\sim\chi^2(n_2)$, X,Y 独立， 则称随机变量

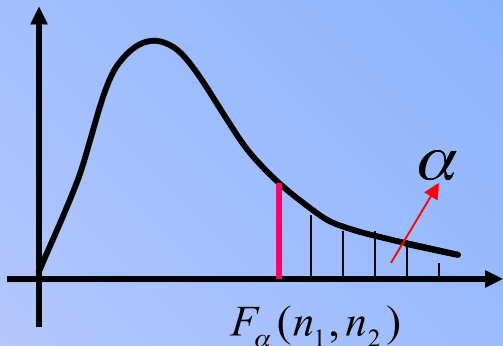
$$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

所服从的分布为自由度是 n_1,n_2 的 F – 分布，记作 $F\sim F(n_1,n_2)$.

若 $F\sim F(n_1,n_2)$,则 $1/F\sim F(n_2,n_1)$.

对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件：

$$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha$$



的点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 F 分布的上 α 分位点。

结论： $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=1/F_\alpha(n_2,n_1)$

返回主目录

四、掌握正态总体的样本均值与样本方差的分布：

定理 1. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X}$是样本均值，则有：

$$\bar{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}).$$

定理 2. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X},S^2$分别是样本均值与样本方差，则有：

(1). $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 即 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

(2). $\bar{X}$与S^2独立。

返回主目录

定理 3. $$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

证明： $$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

且它们独立。 则由 t- 分布的定义：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}} \sim t(n-1)$$

即： $$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

定理 4. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$ 与 $(Y_1, Y_2, \cdots Y_{n_2})$ 分别是具有两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且它们独立。

$$设\ \bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i \quad , \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j$$

分别是两个样本的均值 。

$$S_1{}^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2, \quad S_2{}^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \bar{Y})^2$$

分别是两个样本的方差 ;

则有：1) $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

证：1) $\because \dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1), \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1),$

且它们独立，

则 $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \frac{(n_1-1)S_1^2/(n_1-1)\sigma_1^2}{(n_2-1)S_2^2/(n_2-1)\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

返回主目录

2) $$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

证 : $\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma^2}{n_1}+\dfrac{\sigma^2}{n_2})$

所以 $$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim N(0,1)$$

$\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1)$, $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$, 且它们独立。

则 $$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2).$$

返回主目录

由$t-$分布的定义：

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\Bigg/\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}/(n_1+n_2-2)}$$

$$\sim t(n_1+n_2-2)$$

即：$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

返回主目录

例 2 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,\cdots,X_{16})$为来自总体 X 的一个样本，S^2为样本方差，

求：(1) $P\{S^2/\sigma^2 \le 2.04\}$，　(2) $D(S^2)$.

解：(1) 由定理 2 知

$$\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15),$$

$$\therefore P\{S^2/\sigma^2 \le 2.04\} = P\{15S^2/\sigma^2 \le 15\times 2.04\}$$

$$= 1 - P\{15S^2/\sigma^2 > 30.615\}$$

$$\approx 1 - 0.01 = 0.99$$

(2) $$D(S^2) = D\left(\frac{\sigma^2}{15}\chi^2(15)\right) = \frac{2\sigma^4}{15}$$

返回主目录

例 3设总体 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,1)$，$(X_1,\cdots,X_9)$为来自总体 X 的一个样本，$Y_1,\cdots,Y_9$ 为来自总体 Y 的一个样本，则统计量

$$U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$$

服从 $(A)\ \chi^2(9)$， $(B)\ \chi^2(8)$， $(C)\ t(9)$， $(D)\ t(8)$.

:解：

$$\overline{X}=\frac{1}{9}(X_1+\cdots+X_9)\sim N(0,\frac{1}{9})$$

$$\frac{\overline{X}-0}{1/3}=3\overline{X}\sim N(0,1)$$

返回主目录

$$Y_1^2+\cdots+Y_9^2 \sim \chi^2(9)$$

$\overline{X}$与$Y_1^2+\cdots+Y_9^2$ 相互独立，

$$U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}=\frac{3\overline{X}}{\sqrt{(Y_1^2+\cdots+Y_9^2)/9}}\sim t(9)$$

返回主目录

例 4 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,\cdots,X_{10})$为来自总体X的一个样本，$\bar{X}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i$，$S^2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(X_i-\bar{X})^2$

证明统计量 $t=\frac{X_{10}-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{9}{10}} \sim t(8)$

解：$\bar{X}=\frac{1}{9}(X_1+\cdots+X_9) \sim N(0,\frac{\sigma^2}{9})$，$X_{10} \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\frac{X_{10}-\bar{X}}{\sqrt{\sigma^2+\frac{\sigma^2}{9}}}=\frac{X_{10}-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{\frac{9}{10}} \sim N(0,1)$$

返回主目录

$$\frac{8S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(8)$$

$$S^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(X_i - \overline{X})^2$$

$X_{10} - \overline{X}$与S^2相互独立

$$t = \frac{X_{10} - \overline{X}}{S}\sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{(X_{10} - \overline{X})/\sigma}{\sqrt{S^2/\sigma^2}}\sqrt{\frac{9}{10}} \sim t(8)$$

返回主目录

1 给出了点估计的概念，要掌握矩估计法、极大似然估计法。

矩估计法的具体做法如下：

1^0 求出总体X的l阶原点矩 $\mu_l = EX^l \quad (l = 1,2,\cdots,k)$

设：$\mu_1 = \mu_1(\theta_1,\cdots,\theta_k),$

$$\vdots$$

$$\mu_k = \mu_k(\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

2^0 以A_l分别代替上式中的μ_l($l = 1,2,\cdots,k$)，

$$A_1 = \mu_1(\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

$$\vdots$$

$$A_k = \mu_k(\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

返回主目录

2^0 解上方程组得：

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(A_1, \cdots, A_k) = \hat{\theta}_1(X_1, \cdots, X_n)$$
$$\vdots$$
$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(A_1, \cdots, A_k) = \hat{\theta}_k(X_1, \cdots, X_n)$$

分别为θ_1 ;$\cdots$ ，θ_k的矩估计量.

$$\hat{\theta}_l = \hat{\theta}_l(x_1, \cdots, x_n), l = 1, 2, \cdots, k,$$

分别为θ_1 ;$\cdots$ ，θ_k的矩估计值.

返回主目录

极大似然估计 法的具体做法如下：

1^0 **写出似然函数：**

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\},$$

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

2^0 **求似然函数$L(\theta)$的最大值点：**

令 $\dfrac{dL(\theta)}{d\theta}=0.$ 或 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0.$

解之得θ的极大似然估计值$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n).$

返回主目录

若母体的分布中包含多个参数$\theta_1,\cdots,\theta_k$，

则样本的似然函数为：

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

即可令 $\dfrac{\partial L}{\partial\theta_i}=0, i=1,\cdots,k.$ 或 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}=0, i=1,\cdots,k.$

解k个方程组求得$\theta_1,\cdots,\theta_k$的极大似然估计值。

例1. 设总体 X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0<x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中$\theta>0$未知, $X_1,\cdots,X_n$是一个样本.

求：θ的矩估计量。

解：$\mu_1=EX=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$

令 $\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=A_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$

解得 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\sqrt{\overline{X}}}{1-\sqrt{\overline{X}}}\right)^2$ 为θ的矩估计量.

返回主目录

例 2 ．设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\theta>0$ 是未知参数，$(X_1, \cdots, X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本．

(1). **求未知参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ ；**

(2). **求 $D(\hat{\theta})$ ．**

例 2

解：(1). $\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{\theta}{2}$

令 $\frac{\theta}{2} = \overline{X}$ 得未知参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$

(2). $D(\hat{\theta}) = D(2\overline{X}) = 4D(\overline{X}) = \frac{4}{n}D(X)$

而 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \int_0^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x)dx - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{20}$$

所以 $D(\hat{\theta}) = \frac{4}{n}D(X) = \frac{4}{n} \times \frac{\theta^2}{20} = \frac{\theta^2}{5n}$

返回主目录

例3. 设总体 X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0<x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中$\theta>0$未知,$X_1,\cdots,X_n$是一个样本,$x_1,\cdots,x_n$是一组样本观察值. 求θ的极大似然估计。

解：似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

$$=\begin{cases}\theta^{\frac{n}{2}}(x_1,\cdots,x_n)^{\sqrt{\theta}-1} & 0<x_1,\cdots,x_n\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

返回主目录

例 3（续）

当$0 < x_1,\cdots,x_n \le 1$时，$L(\theta) = \theta^{\frac{n}{2}}(x_1,\cdots,x_n)^{\sqrt{\theta}-1}$

$$\ln L(\theta) = \frac{n}{2}\ln\theta + (\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

解之得θ的极大似然估计值

$$\hat{\theta} = \frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}$$

例4. 设总体 X的概率密度为

$$f(x;\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-c}{\theta}} & x \quad c\\ 0 & 其他\end{cases}$$

其中$c,\theta(\theta>0)$是未知参数,$X_1,\cdots,X_n$是一个样本,

$x_1\le\cdots\le x_n$是一组样本观察值.

求θ,c的极大似然估计。

解：似然函数为

$$L(\theta,c)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-c)} & c\le x_1\le\cdots\le x_n\\ 0 & 其他\end{cases}$$

返回主目录

例 4（续）

当$c \le x_1 \le \cdots \le x_n$时，$L(\theta) = \dfrac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)}$

$$\ln L(\theta, c) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)$$

$$\because \quad \frac{\partial}{\partial c} \ln L(\theta, c) = \frac{n}{\theta} > 0$$

可见 $L(\theta, c)$是c的单增函数,

$\therefore c$的极大似然估计值 $\hat{c} = x_1$;

令 $$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta, c) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - c) = 0$$

例 4（续）

解之得θ的极大似然估计值

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{c})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_1)=\bar{x}-x_1$$

例 5．设总体 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $0<\theta<1$ 是未知参数，$(X_1, \cdots, X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本．求当样本观察值为 $x_1=1, x_2=2, x_3=1$ 时，参数θ的最大似然估计值。

解： 似然函数为

$$L(\theta)=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=1\}$$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$$

返回主目录

例 5（续）

$$L'(\theta) = 2\theta^4(5 - 6\theta)$$

令 $L'(\theta) = 0$，即 $2\theta^4(5 - 6\theta) = 0$

解之得θ的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = \dfrac{5}{6}.$

例 6 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本，设$EX=\mu, DX=\sigma^2$

(1)确定常数c，使$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计；

(2)确定常数c使$(\overline{X})^2-cS^2$是μ^2的无偏估计（$\overline{X}$，S^2是样本均值和样本方差。

解：（ 1 ）$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=c\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}\{D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2\}$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}[DX_{i+1}+DX_i]=2(n-1)c\cdot\sigma^2$$

要使

$$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=2(n-1)c\cdot\sigma^2=\sigma^2$$

应取

$$c=\frac{1}{2(n-1)}.$$

（2）要使

$$E\left[(\overline{X})^2-cS^2\right]=E(\overline{X})^2-cES^2$$

$$=\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)-c\sigma^2=\mu^2$$

应取

$$c=\frac{1}{n}$$

例 7 设X_1, X_2, X_3, X_4是来自均值为θ的指数分布总体的样本，其中θ未知，设有估计量

$$T_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4)$$

$$T_2 = (X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4)/5$$

$$T_3 = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$$

(1)指出T_1, T_2, T_3中哪几个是θ的无偏估计量；

(2)在上述θ的无偏估计中指出哪一个较为有效。

解：已知对于均值为θ的指数分布X，有$EX = \theta$，$DX = \theta^2$。

因为

$$ET_1 = \frac{1}{6}[EX_1 + EX_2] + \frac{1}{3}[EX_3 + EX_4] = \frac{\theta}{3} + \frac{2\theta}{3} = \theta$$

$$ET_2 = \frac{1}{5}[EX_1 + 2EX_2 + 3EX_3 + 4EX_4] = \frac{1}{5}[\theta + 2\theta + 3\theta + 4\theta] = 2\theta$$

$$ET_3 = \frac{1}{4}[EX_1 + EX_2 + EX_3 + EX_4] = \frac{1}{4}[\theta + \theta + \theta + \theta] = \theta$$

所以T_1, T_3都是θ的无偏估计量，但T_2不是θ的无偏估计量。

又

$$DT_1 = D[\frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4)]$$

$$= \frac{1}{36}[DX_1 + DX_2] + \frac{1}{9}[DX_3 + DX_4]$$

$$= \frac{2\theta^2}{36} + \frac{2\theta^2}{9} = \frac{5}{18}\theta^2$$

$$DT_3 = D[\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)]$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{4} DX_i = \frac{1}{4}\theta^2 < DT_1$$

故统计量T_3较T_1有效。

例 8 (1)设$\hat{\theta}$是参数θ的无偏估计，且有$D\hat{\theta} > 0$，试证

$\hat{\theta}^2 = (\hat{\theta})^2$不是$\theta^2$的无偏估计。

(2) 试证明均值分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x \le \theta \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

中未知参数θ的最大似然估计量不是无偏的。

证明(1)由$D\hat{\theta} > 0$及$E\hat{\theta} = \theta$，得知$\hat{\theta}^2$的数学期望为

$$E\hat{\theta}^2 = D\hat{\theta} + (E\hat{\theta})^2 = D\hat{\theta} + \theta^2 > \theta^2$$

故$\hat{\theta}^2$不是θ^2的无偏估计量。

（ 2 ）似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0 < x_1, x_2, \cdots, x_n \le \theta \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

记$x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，由于$x_1, x_2, \cdots, x_n \le \theta$相当于$x_{(n)} \le \theta$，因此上式相当于

$$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & x_{(n)} \le \theta \\ 0, & x_{(n)} > \theta\end{cases}$$

当$\theta \quad x_{(n)}$时，$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}$。

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta^{n+1}} < 0,$$

故$L(\theta)$关于θ是严格单调递减的，则θ的极大似然估计值为

$$\hat{\theta} = x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

θ的极大似然估计量为

$$\hat{\theta} = X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

总体 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$$

由此$\hat{\theta}=X_{(n)}$的概率密度函数为

$$f_n(z)=n[F(z)]^{n-1}\cdot f(z)$$

$$=\begin{cases}n\left(\dfrac{z}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{\theta}, & 0\le z\le\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因为

$$E\hat{\theta} = \int_0^{\theta} z \cdot \frac{n}{\theta}\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} dz = \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta$$

所以$\hat{\theta}$不是θ的无偏估计量。

例 9 设从均值为μ，方差为$\sigma^2>0$的总体中，分布抽取容量为n_1,n_2的两独立样本，$\overline{X}_1,\overline{X}_2$分别是两样本的均值。试证：对于任意常数$a,b(a+b=1),Y=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$都是μ的无偏估计，并确定常数$a,b$使$DY$达到最大。

证明：由于

$$E\overline{X}_1=\mu,\ E\overline{X}_2=\mu,\ D\overline{X}_1=\frac{\sigma^2}{n_1},\ D\overline{X}_2=\frac{\sigma^2}{n_2}$$

则

$$EY=E[a\overline{X}_1+b\overline{X}_2]=aE\overline{X}_1+bE\overline{X}_2=a\mu+b\mu=(a+b)\mu=\mu$$

即Y是μ的无偏估计量。

$$DY = D[a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2] = a^2 D\overline{X}_1 + b^2 D\overline{X}_2$$

$$= a^2 \frac{\sigma^2}{n_1} + b^2 \frac{\sigma^2}{n_2} = \left(\frac{a^2}{n_1} + \frac{b^2}{n_2}\right)\sigma^2 = \left(\frac{a^2}{n_1} + \frac{(1-a)^2}{n_2}\right)\sigma^2$$

令

$$\frac{\partial DY}{\partial a} = \left[\frac{2a}{n_1} - \frac{2(1-a)}{n_2}\right]\sigma^2 = 0$$

得

当$a = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$， $b = \dfrac{n_2}{n_1 + n_2}$时，

DY达到最小。

例 10 设有k台仪器，已知用第i台仪器测量时，测定值总体的标准差为$\sigma_i (i = 1,2,\cdots,k)$。用这些仪器独立地对某一物理量$\theta$各观测一次，分别得到$X_1, X_2, \cdots, X_n$。设仪器都没有系统误差，即$EX_i = \theta (i = 1,2,\cdots,k)$问$a_1, a_2, \cdots, a_k$取何值，方能使使用$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i$估计$\theta$时，$\hat{\theta}$是无偏的，并且$D\hat{\theta}$最小？

解： 要使$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，则必须

$$\theta = E\hat{\theta} = E[a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n]$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\theta$$

则必须$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$

$$D\hat{\theta} = D[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} D(a_iX_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 DX_i = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_k^2\sigma_k^2$$

为求$D\hat{\theta}$在条件$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$下的最小值，用拉格朗日乘数法，作函数

$$g(a_1, a_2, \cdots, a_k, \lambda)$$

$$= a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_k^2\sigma_k^2 + \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_k - 1)$$

令 $$\frac{\partial g}{\partial a_1}=2a_1\sigma_1^2+\lambda=0,\quad \frac{\partial g}{\partial a_2}=2a_2\sigma_2^2+\lambda=0,\cdots,$$

$$\frac{\partial g}{\partial a_k}=2a_k\sigma_k^2+\lambda=0,\quad \frac{\partial g}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{k}a_i-1=0$$

解上面的方程组可得

$$a_1=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2},a_2=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2},\cdots,a_k=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_k^2}$$

其中 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sigma_i^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}$。

即当 $a_i=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2},i=1,2,\cdots,k$ 时，$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量且其方差最小。