第三章 作业

1. 用二分法求方程 $f(x)=x^2+x-1=0$ 在区间[0,1]内的根，要求误差不过 10^{-4} ，需要二分多少次？

$$k+1\ge[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]/\ln 2=[\ln 1-\ln 10^{-4}]/\ln 2=4/\ln 2=13.2877$$

$$k=13$$

3. 使用二分法求方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间[2,3]内的根，要求 $|x^{(k)}-x^*|$ $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$ 。

只估计迭代次数

$$k+1\ge[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]/\ln 2=[\lg 1-\lg(0.5*10^{-5})]/\lg 2=17.6096$$

$$k=17$$

x = 2.0945549

4. 用二分法求方程 $x^2-x-1=0$ 的正根，要求近似根的误差限不大于 0.0

f(1)=-1, f(2)=1，所以[1,2]中有根

$$k+1\ge[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]/\ln 2=[\lg 1-\lg(0.05)]/\lg 2=4.32$$

$$k=4$$

x=1.59375

迭代次数	a(fa)	c=(a+b)/2,(fc)	b(fb)
0	1(-1)	1.5(-0.25)	2(+1)
1	1.5(-0.25)	1.75(+0.313)	2(+1)
2	1.5(-0.25)	1.625(+0.0156)	1.75(+0.31)
3	1.5(-0.25)	1. 5625 (-0.1211)	1.625(+0.0156)
4	1. 5625 (-0.1211)		1.625(+0.0156)

x = (1. 5625+1.625)/2=1.5938

5. 设 $f(x)$ 可微，求方程 $x = f(x)$ 根的牛顿迭代格式是什么？

g(x)=f(x)-x=0

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k) - x_k}{f'(x_k) - 1}$$

6. 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式：

(1) $x=1+\frac{1}{x^2}$，迭代公式 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$；(2) $x^3=1+x^2$，迭代公式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$；

(3) $x^3=\frac{1}{x-1}$，迭代公式 $x_{k+1}=1/\sqrt{x^k-1}$

试分析每种迭代公式的收敛性，并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根。

$$f'(x)=-2x^{-3},\left|f'(1.5)\right|\approx 0.5926<1$$

$$f'(x)=\frac{2x}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}},\left|f'(1.5)\right|\approx 0.4588<1$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}},\left|f'(1.5)\right|\approx 1.4142>1$$

1	1.444	1.481	1.414
2	1.480	1.473	1.554
3	1.457	1.469	1.344
4	1.471	1.467	1.705
5	1.462	1.466	1.191
6	1.468	1.466	2.288

8. 给定函数 $f(x)$，设对一切 x，$f'(x)$ 存在且 $0<m\leqslant f'(x)\leqslant M$，证明：对范围 $0<\lambda<2/M$ 内的任意定数 λ，迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛 $f(x)=0$ 的根 x^*。

迭代函数为：　$\varphi(x)=x-\lambda f(x)$

只需要明　$|\varphi'(x)|<1$

$$\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)\geq 1-\lambda M>1-\frac{2}{M}M>-1$$

$$\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)\leq 1-\lambda m<1$$

计算过程及结果精确到小数点后两位

13. 用弦截法求下列方程的根

(2) $x^3-3x^2-x+9=0$，取 $x_0=-2$，$x_1=-1.5$。

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

1	-1.52
2	-1.53
3	-1.53

基本要求

- 二分法计算及其迭代次数估计；
- 简单迭代法及其收敛性判断；
- 牛顿法计算；
- 简化牛顿法、弦截法、牛顿法下山法。