第四章 信道及其信道容量

- 4.1　信道分类及信道通用模型
- 4.2　离散单符号信道及其信道容量
- 4.3　离散多符号信道及其信道容量
- 4.4　组合信道及其信道容量

4.1 信道分类及信道通用模型

- **1、直观认识上的分类**
- 2、从研究角度给出的信道分类
- **3、信道模型**

4.2 离散单符号信道及其信道容量

1. 离散单符号信道的数学模型
2. 信道容量的概念
3. BSC 信道、三种特殊信道的信道容量
4. 离散对称信道的信道容量、准对称信道容量
5. 一般离散信道的信道容量
6. 信道容量定理

1 信道容量的概念

- 对于固定的信道，总存在一种信源（某种输入概率分布），使信道平均传输一个符号接收端获得的信息量最大，也就是说对于每个固定信道都有一个最大的信息传输率，这个最大的信息传输率即为**信道容量**，而相应的输入概率分布称为**最佳输入分布**。

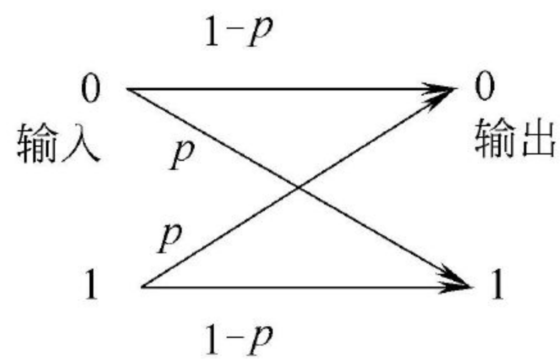
$$C \overset{def}{=} \max_{p(x)}\left\{I(X;Y)\right\}$$

- (信道容量为平均互信息对于输入概率分布的最大值)
- 信道容量是信道传送信息的最大能力的度量。

2 BSC 信道和三种特殊信道的信道容量

二进制对称信道，简称为 BSC 信道

输入概率分布 $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega & \bar{\omega} \end{bmatrix}$

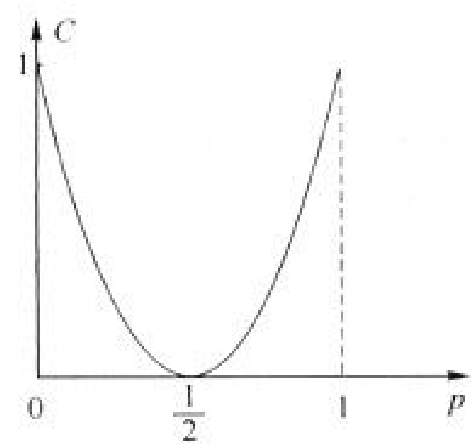


二元对称信道的平均互信息

$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=H(\omega\bar{p}+\bar{\omega}p)-H(p)$

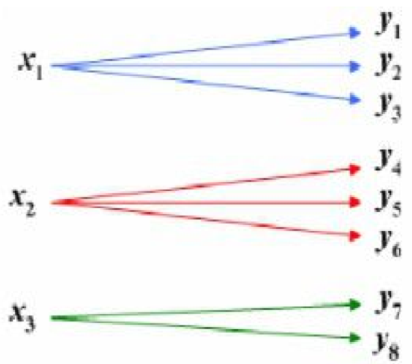
当 $\omega=\bar{\omega}=\frac{1}{2}$ 时，$H(\omega\bar{p}+\bar{\omega}p)=H(\frac{1}{2})=1$

二元对称信道的信道容量 $C=1-H(p)$ 比特/符号

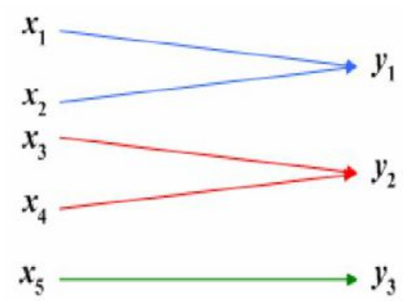


BSC 的信道容量

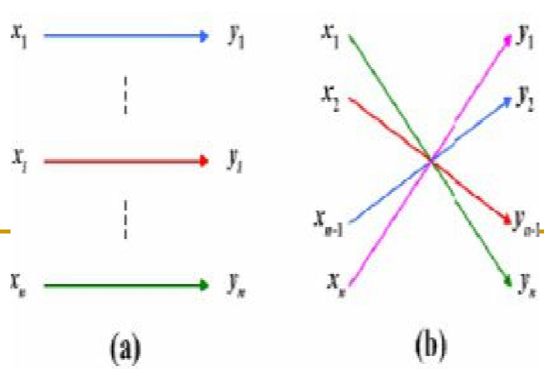
3 三种特殊信道的信道容量



$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)} H(X) = \log_2 n$$



$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)} H(Y) = \log_2 m$$



$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)} H(X) = \log_2 n$$

4 离散对称（准对称）信道的信道容量

- **定理 4.1** 对于对称及准对称信道，当输入分布为等概分布时，输出分布必能达到等概分布。
- **定理 4.2** 若一个离散对称信道具有 r 个输入符号，s 个输出符号，则当输入为等概分布时达到信道容量，且

$$C = \log s - H(p_1', p_2', \cdots, p_s')$$

- 均匀信道的信道容量为

$$C = \log r - p\log(r-1) - H(p)$$

- 准对称信道的信道容量

$$C = \log_2 r - \sum_{k=1}^{n} N_k \log_2 M_k - H(p_1', p_2', \cdots, p_s')$$

其中，N_k 是 n 个子矩阵中第 k 个子矩阵中行元素之和，

M_k 是第 k 个子矩阵中列元素之 和

5 信道容量定理

- **定理 4.3** 设有一般离散信道，它有 r 个输入信号，s 个输出信号。当且仅当存在常数 C 使输入分布 $p(x_i)$ 满足：

$$\begin{cases}(1) I\left(x_i;Y\right) = C \text{时} p(x_i) \neq 0 \\ (1) I\left(x_i;Y\right) \leq C \text{时} p(x_i) \neq 0\end{cases}$$ 时，$I(X;Y)$ 达到最大值

- 其中，$I\left(x_i;Y\right) = \sum_j p(y_j \mid x_i) \log \frac{p(y_j \mid x_i)}{p(y_j)}$
-
- 它表示信道输入 x_i 时，所给出关于输出 Y 的信息量。常数 C 即为所求的信道容量。

4.4 组合信道及其信道容量

-
- 实际应用中常常会遇到两个或更多个信道组合在一起使用的情况。
- 在研究较复杂信道时，为使问题简化，往往可以将它们分解成几个简单的信道的组合。（并联信道、级联信道）

级联信道

- 级联信道是信道最基本的组合形式，许多实际信道都可以看成是其组成信道的级联。图 4.11 是由两个单符号信道组成的最简单的级联信道。

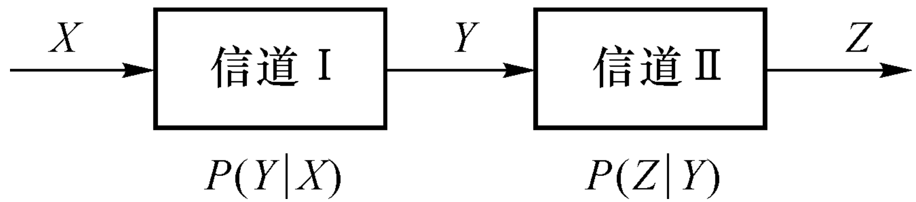


图 4.11 级联信道

- $X \to Y \to Z$ 组成一个马尔可夫链。根据马尔可夫链的性质，级联信道的总的信道矩阵等于这两个串接信道的信道矩阵的乘积。求得级联信道的总的信道矩阵后，级联信道的信道容量就可以用求离散单符号信道的信道容量的方法计算。

练习：

- 对称信道的信道容量计算及最佳输入
- 一般信道的信道容量计算
- 根据信道容量分析信道特点
- 组合信道的信道容量计算
- 准对称信道信道容量计算

- 习题重点：课堂练习题

第五章 无失真信源编码

1 编码的相关概念及分类

2 定长码及定长码编码方法 编码效率

3 变长码及变长码编码方法 判别准则

4 变长编码：香农编码、费诺编码、霍夫曼编码

5 实用的无失真信源编码方法：
游程编码、算术编码、 LZW 编码

第一节 信源编码的相关概念

1 信源编码器及其数学描述

2 码的分类

3 码树图

码的分类

- **码**
  - 非分组码
  - 分组码
    - 奇异码
    - 非奇异码
      - 非唯一可译码
      - 唯一可译码
        - 非即时码
        - 即时码（非延长码）

◆奇异码和非奇异码：若信源符号和码字是一一对应的，则该码为非奇异码。反之为奇异码。

◆唯一可译码：任意有限长的码元序列，只能被唯一地分割成一个个的码字，便称为唯一可译码。

◆非即时码和即时码：如果接收端收到一个完整的码字后，不能立即译码，还需等下一个码开始接收后才能判断是否可以译码，这样的码叫做非即时码。

第二节、定长码及定长编码定理

1 唯一可译定长码存在的条件

2 定长信源编码定理

3 编码效率

1、唯一可译定长码存在的条件

- 若对一个有 q 个信源符号的信源 S 进行定长编码，那么信源 S 存在唯一可译定长码的条件是
  - $$q \le r^l \qquad (5.1)$$
  - 其中，r 是码符号集中的码元数，l 是定长码的码长。
-

对于定长唯一可译码，平均每个原始信源符号至少需要 $\log_r q$ 个码符号来表示.

2、定长编码定理

- 定长编码的信息传输效率是很低的。提高信息传输效率的方法有：
  - 方法 1　考虑符号之间的依赖关系，对信源 S 的扩展信源进行编码。
  - 方法 2□ 对于概率等于 0 或非常小的符号序列不予编码。这样可能会造成一定的误差，但是当 N 足够大时，这种误差概率可以任意小，即可做到几乎无失真编码。
  -

- 定理 5.2　离散无记忆信源的熵为 $H(S)$ ，若对信源长为 N 的序列进行定长编码，码符号集 X 中有 r 个码符号，码长为 l ，则对于任意 $\varepsilon>0$ ，只要满足
- $$\frac{l}{N} \quad \frac{H(S)+\varepsilon}{\log r}$$
- 则当 N 足够大时，可实现几乎无失真编码，即译码错误概率 δ 任意小；
- 反之，如果 $$\frac{l}{N} \leq \frac{H(S)-2\varepsilon}{\log r}$$
- 则不可能实现几乎无失真编码，即当 N 足够大时，译码错误概率为 1 。

3、编码效率

定义 5.7　定义 $\eta=\frac{H(S)}{R'}=\frac{H(S)}{\frac{l}{N}\log_2 r}$ 为$\boxed{编码效率}$.

- 由定理 5.2 可得最佳编码效率为 $\eta=\frac{H(S)}{H(S)+\varepsilon},\varepsilon>0$ ，所以 $\varepsilon=\frac{1-\eta}{\eta}H(S)$
-
- 在已知方差和信源熵的条件下，信源符号序列长度 N 与最佳编码效率 η 和允许错误概率 P_E 的关系为：

$$N \quad \frac{D[I(s_i)]}{\varepsilon^2\delta}=\frac{D[I(s_i)]}{H^2(S)}\frac{\eta^2}{(1-\eta)^2\delta}$$

- 当允许错误概率越小，编码效率又要高，那么信源符号序列长度 N 必须越长．在实际情况下，要实现几乎无失真的定长编码，N 需要的长度将会大到难以实现。

第三节 、变长码及变长编码定理

1. 克劳夫特不等式、麦克米伦不等式
2. 平均码长及信息传输率
3. 香农第一编码定理
（无失真变长编码定理）
4. 最佳编码

1、 Kraft 不等式和 McMillan 不等式

- 什么条件才可以构成即时码和唯一可译码

定理 5.3 设信源符号集为 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}$，码符号集为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$，对信源进行编码，得到的码为 $C=\{w_1,w_2,\cdots,w_q\}$，码长分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_q$. 即时码存在的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} \leqslant 1 \tag{5.11}$$

这称为 **Kraft 不等式**.

McMillan 证明对于唯一可译码的码长也必须满足此不等式. 在码长的选择上唯一可译码并不比即时码有更宽松的条件. 对于唯一可译码，该不等式又称为 **McMillan 不等式**.

定理 指出了唯一可译码中 r、q、l_i 之间的关系，如果满足这个不等式的条件，则一定能够构成至少一种唯一可译码，否则，无法构成唯一可译码. 它给出了唯一可译变长码的存在性.

2、平均码长及信息传输率

定义 5.8 设有信源

$$\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_q \\ p(s_1) & p(s_2) & \cdots & p(s_q) \end{bmatrix}$$

编码后的码字分别为 $w_1, w_2, \cdots, w_q$，各码字相应的码长分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_q$. 因为是唯一可译码，信源符号 s_i 和码字 w_i 一一对应，则定义此码的平均码长为

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{q} p(s_i) l_i \text{ 码符号/信源符号} \tag{5.20}$$

其中，$\overline{L}$ 表示每个信源符号平均需用的码元数.

定理 5.6 若一个离散无记忆信源 S，熵为 $H(S)$，用拥有 r 个码符号的码符号集 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 对 S 进行无失真编码，则总可以找到一种唯一可译码，其平均码长满足

$$\frac{H(S)}{\log_2 r} \leqslant \overline{L} < 1 + \frac{H(S)}{\log_2 r} \tag{5.23}$$

3、 香农第一编码定理

与无失真定长信源编码定理一样,无失真变长信源编码定理(香农第一定理)也是一个极限定理,是一个存在性定理.极限和定长编码的极限是一样的.

定理 5.7 设离散无记忆信源 S 的信源熵 $H(S)$,它的 N 次扩展信源 $S^N=\{s_1,s_2,\cdots,s_{q^N}\}$,其熵 $H(S^N)$.并用码符号 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$ 对信源 S^N 进行编码,总可以找到一种唯一可译码,使信源 S 中每个信源符号所需的平均码长满足

$$\frac{H(S)}{\log_2 r}\leqslant\frac{\overline{L}_N}{N}<\frac{H(S)}{\log_2 r}+\frac{1}{N} \tag{5.34}$$

或者写成

$$H_r(S)\leqslant\frac{\overline{L}_N}{N}<H_r(S)+\frac{1}{N} \tag{5.35}$$

定理 5.7 是香农信息论的主要定理之一.定理指出,要做到无失真信源编码,每个信源符号平均所需最少的 r 元码元数就是信源的熵值(以 r 进制单位为信息量单位).若编码的平均码长小于信源的熵值,则唯一可译码不存在,在译码或反变换时必然要带来失真或差错,同时定理还指出,通过对扩展信源进行变长编码,当 $N\to\infty$ 时,平均码长 $\overline{L}$(这时它等于$\frac{\overline{L}_N}{N}$)可达到这个极限值.可见,信源的信息熵 $H(S)$是无失真信源编码码长的极限值,也可以认为信源的信息熵($H(S)$或 H_∞)是表示每个信源符号平均所需最少的二元码符号数.

无失真信源编码定理通常又称为**无噪信道编码定理**,此定理可以表述为:总能对信源的输出进行适当的编码,使得在无噪无损信道上能无差错地以最大信息传输率 C 传输信息,但要使信道的信息传输率 R 大于 C 而无差错地传输则是不可能的.

为了衡量各种编码是否已达到极限情况,我们定义变长码的编码效率.

定义 5.12 设对信源 S 进行无失真编码所得到的平均码长为 $\overline{L}$,则 $\overline{L} \geqslant H_r(S)$,定义

$$\eta = \frac{H_r(S)}{\overline{L}} \tag{5.44}$$

为**编码效率**,$\eta \leqslant 1$.

对同一信源来说,码的平均码长 $\overline{L}$ 越短,越接近极限 $H_r(S)$,信道的信息传输率越高,越接近无噪无损信道的信道容量,这时 η 也越接近于 1,所以用码的编码效率 η 来衡量各种编码的优劣.

4、最佳编码

(1) 最佳码定义是什么？

凡是能载荷一定的信息量，且码字的平均长度最短，可分离的变长码的码字集合都可称为最佳码。

(2) 最佳编码思想是什么？

将概率大的信息符号编以短的码字，概率小的符号编以长的码字，使得平均码字长度最短。

(3) 最佳码的编码主要方法有哪些？

香农（ Shannon ）、费诺（ Fano ）、哈夫曼（ Huffman ）编码等。

第四节 变长码的编码方法

- 香农编码
- 费诺编码方法
- 霍（哈）夫曼编码方法
- r 元霍夫曼编码

r 元霍夫曼编码

二进制霍夫曼码的编码方法很容易推广到 r 进制的情况，只是编码过程中构成缩减信源时，每次都是将 r 个概率最小的信源符号合并

为了充分利用短码，使霍夫曼码的平均码长最短，必须使最后一个缩减信源恰好有 r 个信源符号．因此对于 r 元霍夫曼编码，信源 S 符号个数 q 必须满足 $q=(r-1)\theta+r$．$\boxed{\theta}$ 表示信源缩减次数．如果不满足上式，则可以在最后增补一些概率为 0 的信源符号

- 习题重点：例题和课堂练习题