

此信号是在 $t_1$ 方向周期为 $T_1$ ,在 $t_2$ 方向周期为 $T_2$ 的周期信号。这样一种信号有以下形式的级数表达式,

$$x(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{mn} e^{j(m\omega_1 t_1 + n\omega_2 t_2)}$$

这里,

$$\omega_1 = 2\pi/T_1, \quad \omega_2 = 2\pi/T_2,$$

求用 $x(t_1, t_2)$ 表示 $a_{mn}$ 的表达式。

(g) 求以下信号的傅里叶级数系数 $a_{mn}$ :

(1)  $\cos(2\pi t_1 + 2t_2)$ ;

(2) 图 P 4.26—2 所示的信号。

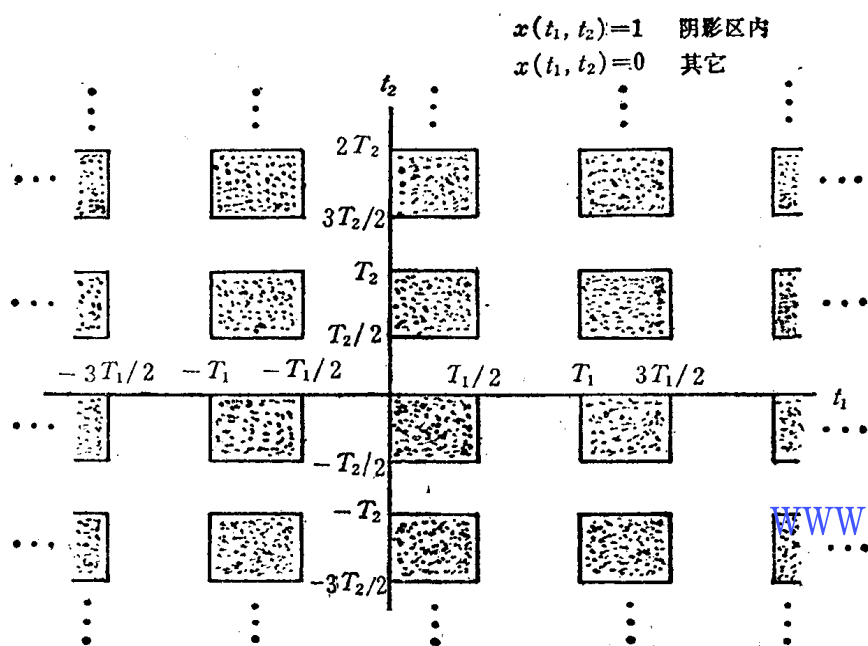


图 P 4.26—2

4.27. (a) 通过计算 $X(\omega)$ 和 $H(\omega)$ ,利用卷积性质和逆变换,计算以下每对信号 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积:

(i)  $x(t) = te^{-2t}u(t)$ ,  $h(t) = e^{-4t}u(t)$ ;

(ii)  $x(t) = te^{-2t}u(t)$ ,  $h(t) = te^{-4t}u(t)$ ;

(iii)  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ,  $h(t) = e^t u(-t)$ .

(b) 假设 $x(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ ,  $h(t)$ 如图 P 4.27所示。通过证明 $y(t) = x(t) * h(t)$ 的傅里叶变换等于 $H(\omega)X(\omega)$ ,证明这对信号的卷积性质。

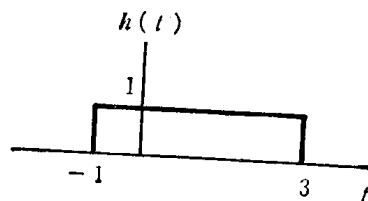


图 P 4.27

4.28. 如在第3章中指出的,连续时间 LTI 系统的卷积积分表达式强调了一个 LTI 系统完全由它对 $\delta(t)$ 的响应所规定。如习题3.17和3.18所描述的,连续时间或离散时间 LTI 系统也完全由它们对

其他特定输入的响应所规定,这一点也是正确的。另一方面,对有一些输入并不是这样,即许多不同的 LTI 系统对这些输入之一有相同的响应。

(a) 为了说明这一点,试证明:具有以下冲激响应

$$\begin{aligned}h_1(t) &= u(t), \\h_2(t) &= -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t), \\h_3(t) &= 2te^{-t}u(t)\end{aligned}$$

的三个 LTI 系统对  $x(t) = \cos t$  都有相同的响应。

(b) 求出对  $\cos t$  具有相同响应的另一个 LTI 系统的冲激响应。

4.29. 在习题 2.23 和 3.28 中,我们定义和研究了相关函数的几个性质和应用,本题研究这些函数在频域中的性质。设  $x(t)$  和  $y(t)$  是两个实信号,互相关函数  $\phi_{xy}$  定义为

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

类似地,可以定义  $\phi_{yx}(t)$ ,  $\phi_{xx}(t)$  和  $\phi_{yy}(t)$  [后面两个分别称为信号  $x(t)$  和  $y(t)$  的自相关函数]。设  $\Phi_{xy}(\omega)$ ,  $\Phi_{yx}(\omega)$ ,  $\Phi_{xx}(\omega)$  和  $\Phi_{yy}(\omega)$  分别表示  $\phi_{xy}(t)$ ,  $\phi_{yx}(t)$ ,  $\phi_{xx}(t)$  和  $\phi_{yy}(t)$  的傅里叶变换。

(a)  $\Phi_{xy}(\omega)$  和  $\Phi_{yx}(\omega)$  之间是什么关系?

(b) 求用  $X(\omega)$  和  $Y(\omega)$  表示  $\Phi_{xy}(\omega)$  的表达式。

(c) 证明:对每个  $\omega$ ,  $\Phi_{xx}(\omega)$  是实的且为非负的。

(d) 现在假设  $x(t)$  是具有实值冲激响应和频率响应  $H(\omega)$  的 LTI 系统的输入,  $y(t)$  是输出。求用  $\Phi_{xx}(\omega)$  和  $H(\omega)$  表示  $\Phi_{xy}(\omega)$  和  $\Phi_{yy}(\omega)$  的表达式。

(e) 设  $x(t)$  如图 P 4.29 所示。设 LTI 系统冲激响应  $h(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ 。试利用本题前面部分的结果计算  $\Phi_{xx}(\omega)$ ,  $\Phi_{xy}(\omega)$  和  $\Phi_{yy}(\omega)$ 。

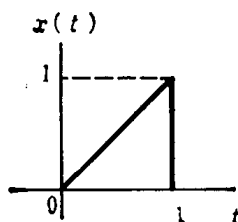


图 P 4.29

假如函数  $\phi(t)$  的傅里叶变换如下,

$$\Phi(\omega) = \frac{\omega^2 + 100}{\omega^2 + 25}$$

求出自相关函数都等于  $\phi(t)$  的两个因果、稳定的 LTI 系统的冲激响应。其中哪一个有稳定的、因果的逆系统?

4.30. 如本章指出的,具有一般形式的 sinc 函数冲激响应的 LTI 系统,在 LTI 系统分析中起着重要的作用。在第 6 到第 8 章讨论滤波、调制和抽样的问题时,对其重要的原因将会更清楚。本题和以下几题对此类系统的特殊性质作一些说明。

(a) 考虑信号

$$x(t) = \cos 2\pi t + \sin 6\pi t$$

假设此信号是具有以下所给冲激响应的每个 LTI 系统的输入,试确定每种情况的输出:

$$(i) h(t) = \frac{\sin 4\pi t}{\pi t},$$

$$(ii) h(t) = \frac{\sin 4\pi t \sin 8\pi t}{\pi t^2},$$

$$(iii) h(t) = \frac{\sin 4\pi t \cos 8\pi t}{\pi t}.$$

(b) 考虑具有以下冲激响应的 LTI 系统

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

对以下输入波形  $x_i(t)$ , 试确定输出波形  $y_i(t)$ 。

(i)  $x_1(t)$  如图 P 4.30(a) 所示的对称矩形波;

(ii)  $x_2(t)$  如图 P 4.30(b) 所示的对称矩形波;

(iii)  $x_3(t) = x_1(t) \cos 5\pi t$ ;

(iv)  $x_4(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{10k}{3}\right)$ ;

(v)  $x_5(t)$  是个实的信号, 其频率响应对正的频率分量具有  $\frac{\pi}{2}$  的恒定相位角, 在  $\omega > 0$  时, 其幅度如图 P 4.30(c) 所示;

(vi)  $x_6(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 。

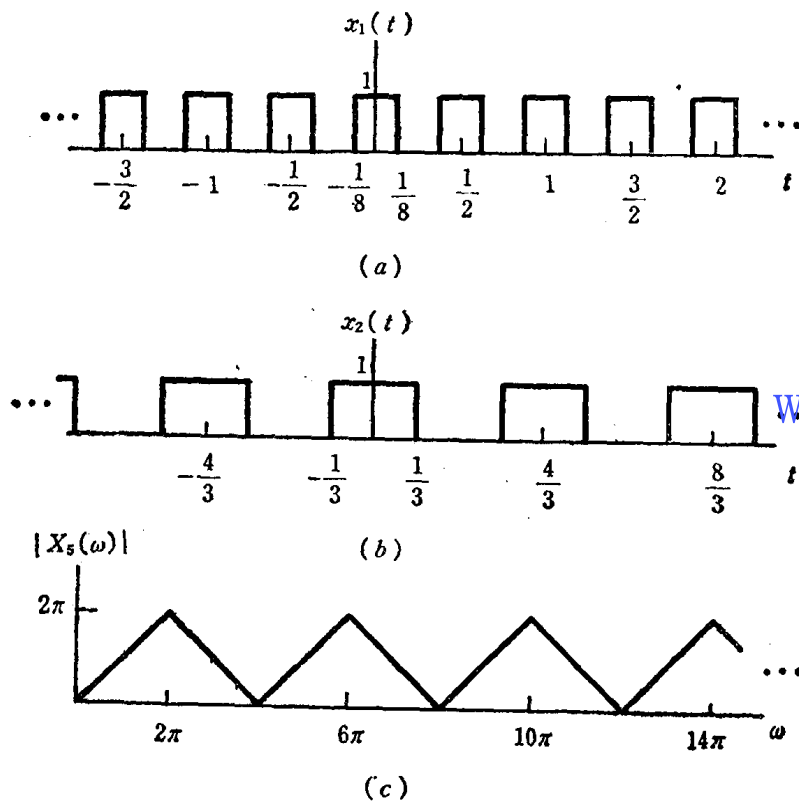


图 P 4.30

4.31. 考虑图 P 4.31 所示的四个 LTI 系统的互连。

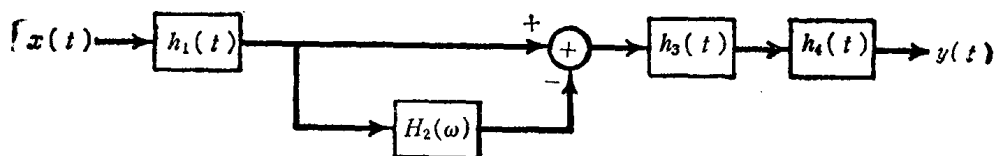


图 P 4.31

这里

$$h_1(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\sin \omega_0 t}{2\pi t} \right]$$

$$H_2(\omega) = e^{-j2\pi\omega/\omega_c},$$

$$h_3(t) = \frac{\sin 3\omega_c t}{\pi t},$$

$$h_4(t) = u(t).$$

- (a) 确定并画出  $H_1(\omega)$ 。  
 (b) 整个系统的冲激响应  $h(t)$  是什么?  
 (c) 当输入为:

$$x(t) = \sin 2\omega_c t + \cos \frac{\omega_c t}{2},$$

输出  $y(t)$  是什么?

- 4.32. 具有实的、因果的冲激响应  $h(t)$  的连续时间 LTI 系统的频率响应  $H(\omega)$  的一个重要性质是:  $H(\omega)$  完全由其实部  $\text{Re}\{H(\omega)\}$  所确定。本题涉及导出和研究这个性质的某些结论, 这个性质一般称为实部充分性。

- (a) 通过研究信号  $h(t)$  的偶部  $h_e(t)$ , 证明实部充分性的性质。 $h_e(t)$  的傅里叶变换是什么? 指出  $h(t)$  怎样从  $h_e(t)$  中恢复。  
 (b) 如果一个因果系统频率响应的实部是

$$\text{Re}\{H(\omega)\} = \cos \omega$$

则  $h(t)$  是什么?

- (c) 证明: 对每个  $t$  (除  $t=0$ ),  $h(t)$  都可从奇部  $h_o(t)$  恢复。注意: 如果在  $t=0$  处,  $h(t)$  不包含任何奇异点 [ $\delta(t)$ ,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  等], 如果使  $h(t)$  在  $t=0$  具有某个任意有限值, 则以下频率响应将不变,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

试证明: 在这种情况下,  $H(\omega)$  也完全由它的虚部确定。

- (d) 现假设在  $t=0$  处,  $h(t)$  没有任何奇异点。在 (a) 和 (c) 中我们已经看到:  $H(\omega)$  完全由其实部或虚部确定。这里将导出在这些条件下,  $H(\omega)$  的实部  $H_R(\omega)$  和虚部  $H_I(\omega)$  之间的明显关系。首先注意, 由于  $h(t)$  是因果的, 也许除了在  $t=0$  之外

$$h(t) = h(t)u(t) \quad (\text{P4.32-1})$$

因为在  $t=0$  处,  $h(t)$  不包含奇异点, 所以式 (P4.32-1) 两边的傅里叶变换必定是一致的。利用此关系和调制性质, 证明:

$$H(\omega) = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(\eta)}{\omega - \eta} d\eta \quad (\text{P4.32-2})$$

利用式 (P4.32-2) 来求用  $H_I(\omega)$  表示  $H_R(\omega)$  的表达式以及用  $H_R(\omega)$  表示  $H_I(\omega)$  的表达式。

- (e) 以下运算

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (\text{P4.32-3})$$

称为希尔伯特变换。刚才我们已看到: 对一个实的、因果的冲激响应  $h(t)$ , 其变换的实部和虚部可利用希尔伯特变换确定。

现在考虑式 (P4.32-3), 把  $y(t)$  看作是输入为  $x(t)$  的 LTI 系统的输出, 试证明此系统的频率响应是

$$H(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0, \\ j, & \omega < 0. \end{cases}$$

- (f) 信号  $x(t) = \cos 3t$  的希尔伯特变换是什么?

- 4.33. (a) 设  $x(t)$  的傅里叶变换为  $X(\omega)$ , 又设  $p(t)$  为具有基本频率  $\omega_0$  的周期信号, 其傅里叶级数的表达式为

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}$$

问:

$$y(t) = x(t)p(t) \quad (\text{P4.33-1})$$

的傅里叶变换是什么?

(b) 设  $X(\omega)$  如图 P4.33—1 所示, 对以下的每个  $p(t)$ , 画出式 (P4.33-1) 中  $y(t)$  的频谱:

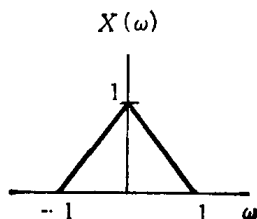


图 P4.33—1

(i)  $p(t) = \cos \frac{t}{2}$

(ii)  $p(t) = \cos t$

(iii)  $p(t) = \cos 2t$

(iv)  $p(t) = \sin t \sin 2t$

(v)  $p(t) = \cos 2t - \cos t$

(vi)  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \pi n)$

(vii)  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n)$

(viii)  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 4\pi n)$

(ix)  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \pi n)$

(x)  $p(t)$  为如图 P4.33—2 所示的周期矩形波。

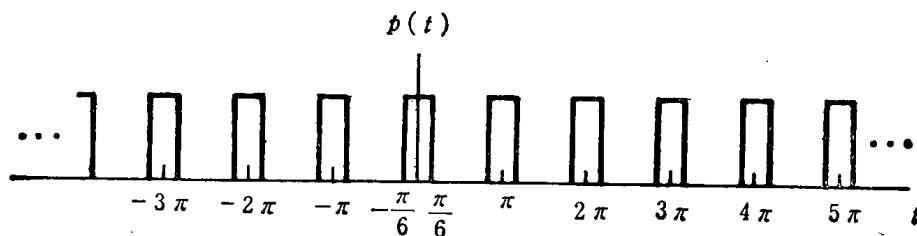


图 P4.33—2

4.34. (a) 考虑图 P4.34 所示的系统。这里

$$x(t) = \frac{\sin(3Wt/2)}{\pi t}$$

$$p(t) = \cos 2Wt + 4\cos 8Wt$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

试求  $y(t)$  的傅里叶级数表达式。

(b) 设  $x(t)$  是实函数, 由下式给出

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$p(t) = \cos Wt$$

www.blogoil.com

$$h(t) = \frac{\sin(Wt/2)}{\pi t}$$

问:  $y(t)$  是什么?

(c) 如果  $x(t)$  和  $h(t)$  与 (b) 一样, 而

$$p(t) = \sin Wt$$

问:  $y(t)$  是什么?

(d) 再考虑(b)的  $x(t)$  和  $h(t)$ , 如果要确定  $x(t)$  任何特定的傅里叶系数的实部, 应当怎样选择图 P 4.34 系统中的  $p(t)$ ? 如果要确定  $x(t)$  任何特定的傅里叶系数的虚部, 又应当怎样选择  $p(t)$ ?

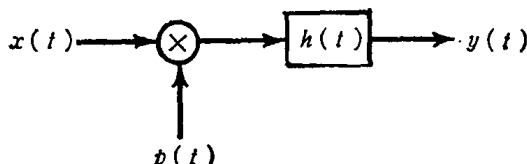


图 P 4.34

4.35. 课本中几处指出, 时间和频率之间存在着相逆关系, 本题较详细地研究这种相逆关系结论方面的一个特殊例子。在研究中要介绍一些定性的概念, 这些概念在信号与系统的分析中是很重要的。

设  $H(\omega)$  是连续时间 LTI 系统的频率响应, 又假设  $H(\omega)$  是实偶的和正的, 并且,

$$\max_{\omega} \{H(\omega)\} = H(0)$$

(a) 证明:

(i) 冲激响应  $h(t)$  是实的;

(ii)  $\max\{|h(t)|\} = h(0)$ 。

提示: 如果  $f(t, \omega)$  是两个变量的复函数, 则

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \omega) d\omega \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t, \omega)| d\omega$$

在系统分析中一个重要的概念是 LTI 系统的频带。定义频带有许多不同的数学方法, 但都与定性的和直观的概念有关, 即一个具有频率响应  $G(\omega)$  的系统, 在  $|G(\omega)|$  为零或很小的  $\omega$  值处<sup>①</sup>, 基本上“阻止”, 在  $|G(\omega)|$  较大的  $\omega$  值处, “通过”频带内的复指数信号。这个区域宽度就是带宽。这些概念在第 6 章滤波器的讨论中将更清楚。但现在, 对频率响应具有前面对  $H(\omega)$  规定一些性质的系统, 来考虑带宽的一个特殊定义。具体说, 这种系统的带宽  $B_w$  的一种定义是高度为  $H(0)$  的矩形的宽度, 此矩形的面积等于  $H(\omega)$  下面的面积, 如图 P 4.35—1 所示。注意, 因为  $H(0) = \max_{\omega} H(\omega)$ , 所以图中所示带内的频率分量就是  $H(\omega)$

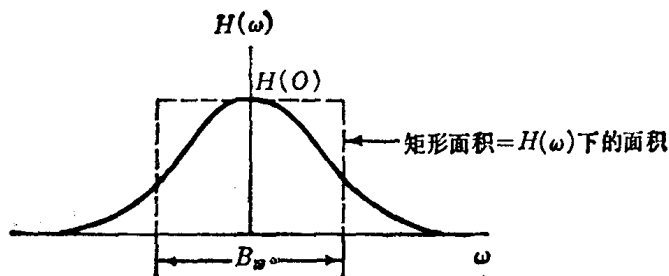


图 P 4.35—1

<sup>①</sup>原文为  $G(\omega)$ 。

为最大的那些频率分量。当然，图 P 4.35—1 中宽度的正确选择是有点任意的，但我们已选择的这种定义，可使我们去比较不同的系统，并使一个非常重要的时间—频率关系得以明确。

(b) 具有以下频率响应的系统，其带宽是什么？

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W, \\ 0, & |\omega| > W. \end{cases}$$

(c) 求出用  $H(\omega)$  表示的带宽  $B_w$  的表达式。

设  $s(t)$  表示系统的阶跃响应，对系统响应速度的一个重要度量是上升时间，它也有一个定性的定义，导致了許多可能的数学表示，我们将使用其中一个。直观地说，系统的上升时间用于度量阶跃响应从零上升到以下终值的速度

$$s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$$

因此，上升时间越短，系统的响应就越快。对本系统，定义上升时间  $t_r$  为

$$t_r = \frac{s(\infty)}{h(0)}$$

因为

$$s'(t) = h(t)$$

也因为  $h(0) = \max_t h(t)$  的性质，可以看出， $t_r$  可解释为：保持  $s(t)$  的最大变化率时，从零到  $s(\infty)$  所需的时间，如图 P 4.35—2 所示。

(d) 求出用  $H(\omega)$  表示  $t_r$  的表达式。

(e) 结合(c)、(d)两部分的结果，证明：

$$B_w t_r = 2\pi \quad (\text{P 4.35-1})$$

因此，我们不能任意地规定本系统的上升时间和带宽。例如如果需要一个响应快的系统 ( $t_r$  小)，则式 (P 4.35-1) 表明此系统一定具有大的带宽。这在系统设计的许多问题中是一种很重要的基本权衡问题。

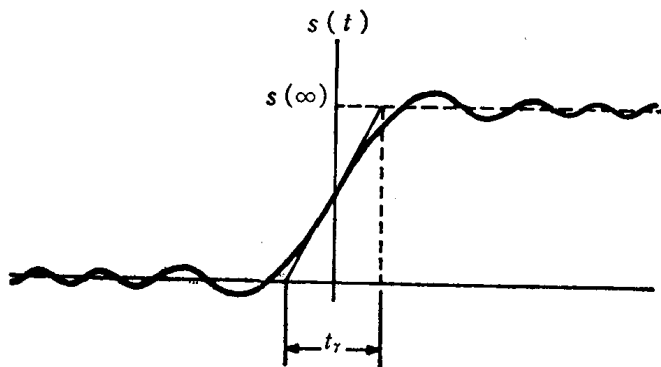


图 P 4.35—2

4.36. (a) 考虑冲激响应分别为  $h(t)$  和  $g(t)$  的两个 LTI 系统，并假设这两个系统具有互逆关系，它们的频率响应分别用  $H(\omega)$  和  $G(\omega)$  表示。问： $H(\omega)$  和  $G(\omega)$  之间有什么关系？

(b) 考虑具有以下频率响应的连续时间 LTI 系统

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & 2 < |\omega| < 3, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

(i) 能否找到一个  $x(t)$  作为此系统的输入，而使系统的输出像图 P 4.29 所描绘那样。如果可能，试求出  $x(t)$ ；如果不可能，试解释原因。

(ii) 此系统是可逆的吗？为什么？

(c) 考虑会堂有回声的问题。如习题 3.25 讨论过的，可以把会堂的音响效果模拟成其冲激响应为冲激序列的 LTI 系统，序列中第  $k$  次冲激对应第  $k$  次回声。设在这特定的情况下，冲激响

应由下式给出

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} \delta(t - kT)$$

这里系数  $e^{-kT}$  代表第  $k$  次回声的衰减。

为了对舞台进行高质量录音，通过把录音设备录下的声音作一些处理，以消除回声的影响。习题3.25利用卷积方法考虑了这种处理器（对一个不同的回声模型）的一个设计例子。本题将使用频域方法。具体说，设  $G(\omega)$  表示为处理录下的声信号所用 LTI 系统的频率响应。试选择  $G(\omega)$ ，使回声完全除去，产生的信号是原舞台声音的忠实复现。

(d) 求具有以下冲激响应系统的逆系统的微分方程

$$h(t) = 2\delta(t) + u_1(t)$$

(e) 考虑初始静止的 LTI 系统，它由以下微分方程描述：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 3 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

此系统的逆系统也是初始静止的，并有微分方程描述。求描述逆系统的微分方程，也要求出原系统和它的逆系统的冲激响应  $h(t)$  和  $g(t)$ 。

4.37. 一个实值连续时间函数  $x(t)$  具有傅里叶变换  $X(\omega)$ ， $X(\omega)$  的幅度和相位如图 P4.37—1 所示。

函数  $x_a(t)$ ,  $x_b(t)$ ,  $x_c(t)$  和  $x_d(t)$  都有傅里叶变换，变换的幅度与上述  $X(\omega)$  一样，但相位函数不同，如图 P4.37—2 所示。相位函数  $\angle X_a(\omega)$  和  $\angle X_b(\omega)$  是由线性相位与  $\angle X(\omega)$  相加

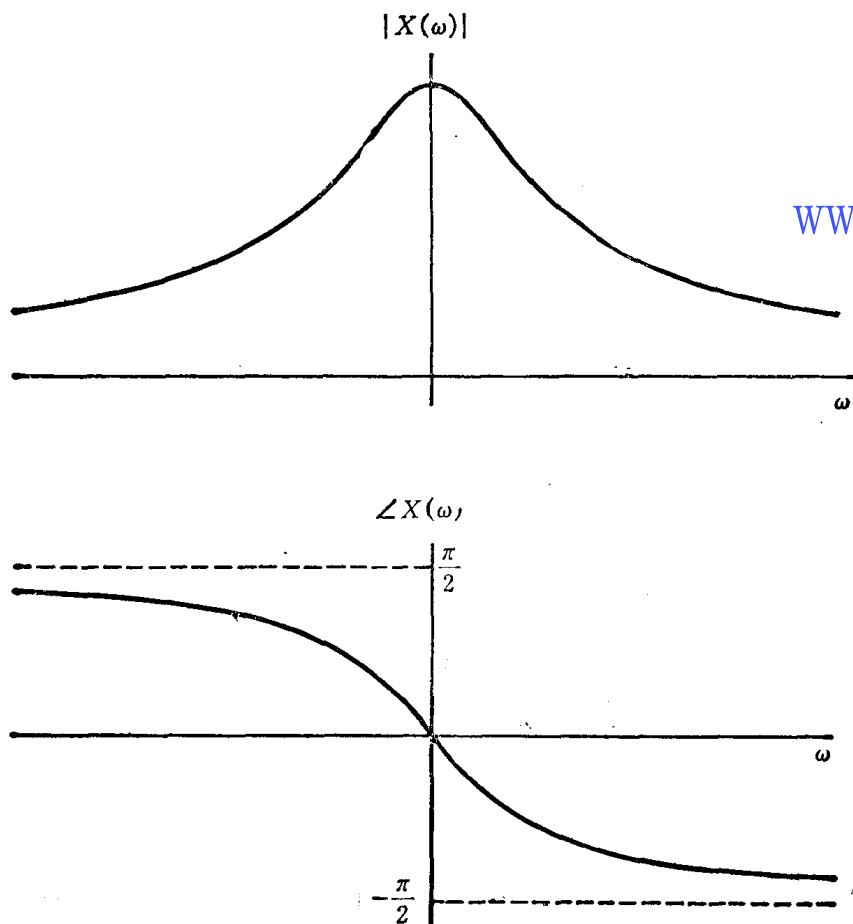


图 P4.37—1



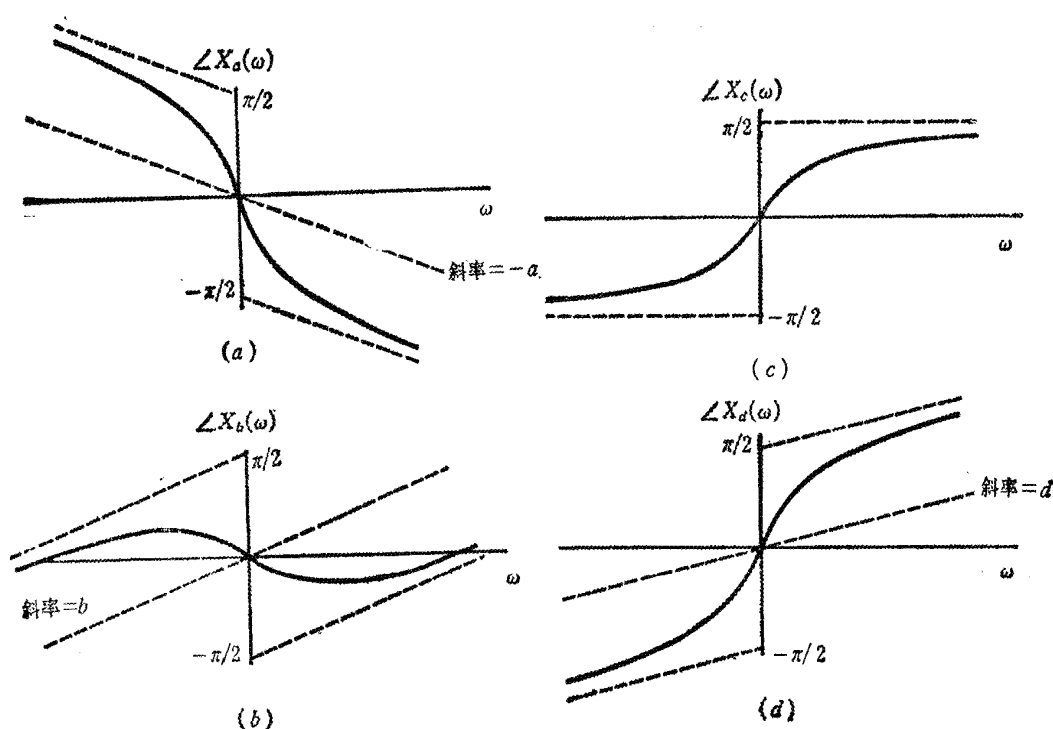


图 P4.37—2

而形成的；函数  $\angle X_c(\omega)$  是从  $\angle X(\omega)$  对  $\omega=0$  的轴反射而得；而  $\angle X_d(\omega)$  是通过反射和附加线性相位组合而得。试利用傅里叶变换的性质，求用  $x(t)$  表示  $x_c(t)$ 、 $x_b(t)$ 、 $x_c(t)$  和  $x_d(t)$  的表达式。

4.38. 本题提供相位非线性变化影响的另外几例。

(a) 考虑一个具有以下频率响应的连续时间 LTI 系统

$$H(\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}$$

式中  $a > 0$ 。问： $H(\omega)$  的幅度是什么？ $\angle H(\omega)$  是什么？此系统的冲激响应是什么？

(b) 设(a)中系统的输入是

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0,$$

当  $b \neq a$  时，输出  $y(t)$  是什么？当  $b = a$  时，输出  $y(t)$  是什么？

(c) 设  $b = 2$ ，当  $a$  取以下各值时，试画出(b)的  $y(t)$ 。

(i)  $a = 1$ ;

(ii)  $a = 2$ ;

(iii)  $a = 4$ 。

(d) 当输入为

$$\cos \frac{t}{\sqrt{3}} + \cos t + \cos \sqrt{3}t$$

试求  $a = 1$  时(a)中系统的输出，并大致画出输入和输出波形。

4.39. 在含有测量装置不完善的一些问题中，常常应用逆系统。例如，考虑一个测量液体温度的装置。把这种装置模拟成 LTI 系统通常是合理的。由于测量元素的响应特性（例如，温度计中的水银），测量装置对温度的变化不立刻响应。特别是，假设这个装置对温度单位阶跃的响应为

$$s(t) = (1 - e^{-t/2})u(t) \quad (\text{P4.39-1})$$

- (a) 试设计一个补偿系统, 当提供测量装置的输出时, 此补偿系统产生的输出等于液体瞬时温度。
- (b) 在利用逆系统作为测量装置补偿器时, 经常出现的一个问题是: 如果测量装置由于微小的不规则现象的影响, 实际输出含有误差, 则所指示的温度也许会出现严重的误差。因为在实际的系统中, 总有这样的误差源, 必须加以考虑。为了描述这一点, 考虑一个测量装置, 该装置的整个输出可被模拟为式(P 4.39-1) 所表征的测量装置的响应与干扰“噪声”信号  $n(t)$  之和, 这如图 P 4.39(a) 所示。图中也包括(a)部分的逆系统, 现在逆系统的输入是测量装置的总输出。假设  $n(t) = \sin \omega t$ , 问:  $n(t)$  对逆系统输出的影响是什么? 当  $\omega$  增加时输出怎样变化?

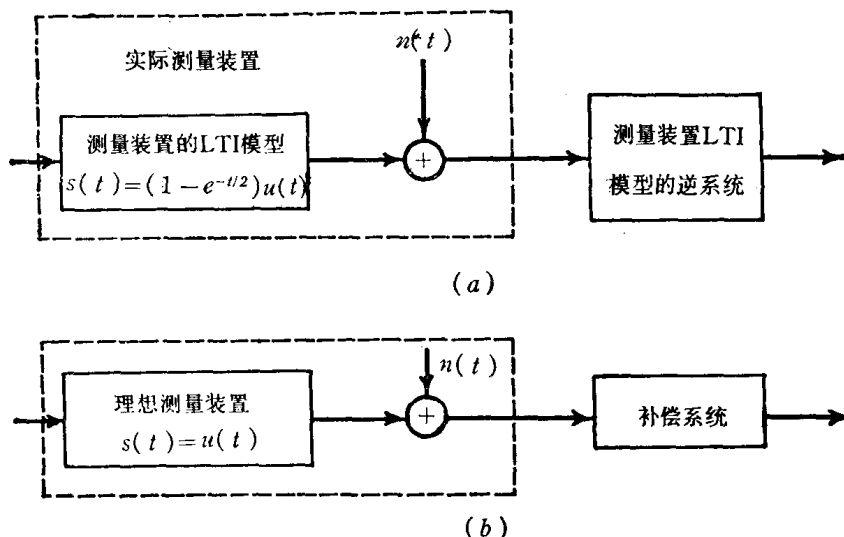


图 P 4.39

www.blogoil.com

- (c) (b)中提出的问题是 LTI 系统分析许多应用中的一个重要问题。特别是, 我们面临着系统响应速度和系统衰减高频干扰能力之间的基本折衷问题。

在(b)中我们看到, 这种折衷意味着由试图加速测量装置的响应(用逆系统)所得到的系统, 也会放大掺杂的正弦信号。为了进一步描述这个概念, 考虑这样一个测量装置, 该装置对温度的变化能立刻响应, 但响应也被噪声恶化。这样一个系统的响应, 可以被模拟为如图 P 4.39(b) 所示的完善测量装置的响应和恶化信号  $n(t)$  之和。设如图 P 4.39(b) 所示, 要设计一个补偿系统, 它使对实际温度变化的响应变慢, 但也衰减了噪声  $n(t)$ 。

设补偿系统的冲激响应为

$$h(t) = ae^{-at}u(t)$$

试选择  $a$ , 使图 P 4.39(b) 的整个系统对温度阶跃变化的反应尽可能快, 同时使由于噪声  $n(t) = \sin 6t$  所引起输出电压的幅度不大于  $1/4$ 。

- 4.40. 考虑一个 LTI 系统, 它对输入

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t)$$

的响应是

$$y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t)$$

- (a) 求此系统的频率响应。
- (b) 求此系统的冲激响应。
- (c) 求表示输入与输出关系的微分方程, 并利用积分器、加法器和系数乘法器构成此系统的实现方框图。

- 4.41. 因果 LTI 系统的输出  $y(t)$ , 通过以下方程与输入  $x(t)$  联系:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau - x(t)$$

这里  $z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$ 。

(a) 求此系统的频率响应  $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ ，并描出幅度和相位的波特图。

(b) 求此系统的冲激响应。

4.42. 因果 LTI 系统的输出  $y(t)$ ，通过以下微分方程与输入  $x(t)$  联系。

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

(a) 求此系统的频率响应

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

并描绘波特图。

(b) 如果  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ，求输出的傅里叶变换  $Y(\omega)$ 。

(c) 利用部分分式展开的方法，对 (b) 中的输入  $x(t)$ ，求输出  $y(t)$ 。

(d) 如果输入分别具有以下 (i)、(ii) 和 (iii) 的傅里叶变换，重复 (b)、(c)。

$$(i) X(\omega) = \frac{1+j\omega}{2+j\omega},$$

$$(ii) X(\omega) = \frac{2+j\omega}{1+j\omega},$$

$$(iii) X(\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)(1+j\omega)}.$$

4.43. 因果 LTI 系统的输入和输出由以下微分方程联系

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

(a) 求此系统的冲激响应。

(b) 如果  $x(t) = te^{-2t}u(t)$ ，则此系统的响应是什么？

(c) 对由以下微分方程所描述的因果 LTI 系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$$

重复 (a)。

4.44. 4.12 节介绍了一阶系统时间常数的概念。正如我们所看到的，时间常数就是度量一阶系统对输入反应的快慢。度量系统响应速度的概念对高阶系统也是重要的，本题研究把时间常数的概念推广到高阶系统。

(a) 回顾具有冲激响应

$$h(t) = ae^{-at}u(t), a > 0,$$

一阶系统的时间常数是  $1/a$ ，这是系统阶跃响应  $s(t)$  从  $t=0$  到稳定于终值 [即  $s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$ ]  $1/e$  以内所需的时间。利用这相同的定量定义，为了确定由以下微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 9x(t) \quad (P4.44-1)$$

所描述的因果 LTI 系统的时间常数，试求必须被解的方程。

(b) 如由 (a) 可看到的，如果使用 (a) 中所给出时间常数的严格定义，可获得一阶系统时间常数简单的表达式，但对式 (P4.44-1) 的系统，计算无疑很复杂。然而，试证明式 (P4.44-1) 的系统可看作是两个一阶系统的并联连接。因此，通常可认为式 (P4.44-1) 的系统具有两个时间常数，分别对应两个一阶部分。试问：此例中两个时间常数是什么？

(c) (b) 中给出的讨论，可以直接推广到其冲激响应为衰减指数线性组合的所有系统。对这种类型的任何系统，可找出系统的主要时间常数，它们就是最大的时间常数，而且代表了系统

响应最慢的部分，因此它们对整个系统反应的速度起主要的作用。问：式(P 4.44-1)系统主要的时间常数是什么？把以上时间常数代到(a)中所确定的方程，可看到数值不是准确地满足方程，但相差无几。这表明它非常接近(a)中所定义的时间常数。因此，在(b)和(c)中略述的方法对深入研究LTI系统的响应速度是很有价值的，它不需过多的计算。

- (d) 主要时间常数概念的一个重要用途是在减少LTI系统的阶次中。这对有些问题具有很大的实际意义，其中包括具有几个主要时间常数和其他一些非常小的时间常数的复系统的分析问题。为了减少被分析系统模型的复杂性，常常可以简化系统快的几部分。即，假设把复系统看作一阶和二阶系统的并联互连。设这些子系统之一具有的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应

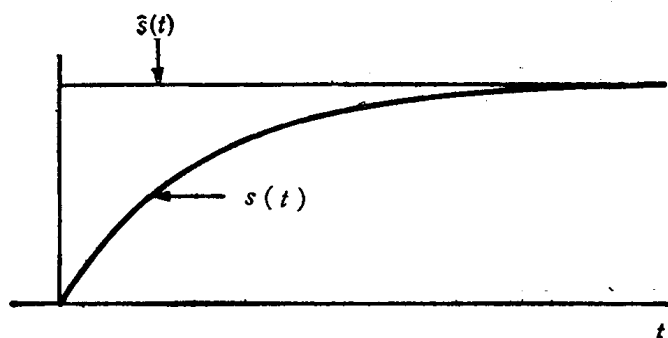


图 P 4.44

$s(t)$  是快的。即， $s(t)$  稳定到其终值  $s(\infty)$  很快。于是在这种情况中，可用立即稳定到同一终值的子系统近似这个子系统。即，如果  $\hat{s}(t)$  是近似子系统的阶跃响应，则

$$\hat{s}(t) = s(\infty)u(t)$$

这如图 P 4.44 所描绘。注意：近似系统的冲激响应是

$$\hat{h}(t) = s(\infty)\delta(t)$$

这表示近似系统是无记忆的。

再考虑式(P 4.44-1)描述的因果LTI系统。特别是，它的表达式为(b)中确定的两个一阶系统的并联互连。利用上述的方法，用无记忆系统代替两个最快的子系统。则所得整个系统的微分方程是什么？系统的频率响应是什么？画出原系统和近似系统 $|H(\omega)|$  (不是 $|g|H(\omega)|$ )的幅度和 $\angle H(\omega)$ 。在什么频率范围上，两个频率响应几乎相等？画出两系统的阶跃响应。在什么时间范围上，阶跃响应几乎相等？由这些图，可看到原系统和近似系统之间的某些类似之处和不同的地方。像以上这种近似的使用取决于具体的应用。特别是，必须既考虑不同的时间常数相差多少也要考虑输入的特性。你将在这部分问题的回答中看到：在低频时，近似系统的频率响应与原系统的频率响应，本质上是相同的。即当系统快的部分与输入变动速度相比足够快时，近似系统就成为一个有用的系统。

- 4.45. (a) 画出以下频率响应的波特图，

(i)  $1 + \frac{j\omega}{10}$ ,

(ii)  $1 - \frac{j\omega}{10}$ ,

(iii)  $\frac{16}{(j\omega + 2)^4}$ ,

(iv)  $\frac{1 - \frac{j\omega}{10}}{1 + j\omega}$ .

$$\begin{aligned}
(\text{v}) & \frac{\frac{j\omega}{10} - 1}{1 + j\omega}, \\
(\text{vi}) & \frac{1 + \frac{j\omega}{10}}{1 + j\omega}, \\
(\text{vii}) & \frac{1 - \frac{j\omega}{10}}{(j\omega)^2 + j\omega + 1}, \\
(\text{viii}) & \frac{10 + 5j\omega + 10(j\omega)^2}{1 + \frac{j\omega}{10}}, \\
(\text{ix}) & 1 + j\omega + (j\omega)^2, \\
(\text{x}) & 1 - j\omega + (j\omega)^2, \\
(\text{xi}) & \frac{(j\omega + 10)(10j\omega + 1)}{\left[\left(\frac{j\omega}{100}\right) + 1\right][(j\omega)^2 + j\omega + 1]}.
\end{aligned}$$

(b) 试求出并画出具有 (iv) 所给频率响应的系统的冲激响应和阶跃响应。对 (vi) 所给频率响应的系统也这样做。

由 (iv) 给定的系统常称为非最小相位系统，而由 (vi) 给定的系统称为最小相位系统。对应 (iv) 和 (vi) 的冲激响应分别称为非最小相位信号和最小相位信号。比较这两个频率响应的波特图可看到：它们的幅度是一样的；然而，(iv) 系统的相位数值大于 (vi) 系统。

我们也可注意到这两个系统在时域中的不同。例如，最小相位系统的冲激响应在  $t=0$  附近集中的能量比非最小相位系统多。此外，(iv) 的阶跃响应最初与  $t \rightarrow \infty$  时的渐近值符号相反，而 (vi) 系统不是这样。

最小和非最小相位系统的这个重要概念，可以推广到比我们这里已经研究过的简单一阶系统更一般的 LTI 系统。区分这些系统的特征可比我们已描述过的作更深入地描述。在随后几章的习题中，我们将会碰到这样的系统。

4.46. 设  $x(t)$  的波特图如图 4.44(c) 所示，试画出  $10x(10t)$  的波特图。

4.47. 回顾积分器，其频率响应为

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

这里在  $\omega=0$  处的冲激是由于常数输入从  $t=-\infty$  的积分导致了一项无穷大输出的结果。因此，如果避免为常数的输入，或者等价地，只讨论  $\omega>0$  时的  $H(\omega)$ ，则可看到：

$$20\lg|H(\omega)| = -20\lg(\omega),$$

$$\angle H(\omega) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{对 } \omega > 0.$$

换句话说，如图 P 4.47 所描绘积分器的波特图包括两条直线图。这些图反映了积分器的主要特性：在所有的正频率上相移负  $90^\circ$ ，并放大低频分量。

(a) 电动机有用而简单的模型是作为一个 LTI 系统，其输入等于所加的电压，输出由电动机的转轴角度给定。可以把这个系统看作是一个稳定的 LTI 系统（电压作为输入，轴角速度作为输出）和一个积分器（表示角速度的积分）的级联。级联的第一部分常用一阶系统的模型。例如，设一阶系统的时间常数为 0.1 秒，则可得到整个电动机的频率响应

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)} + \pi\delta(\omega)$$

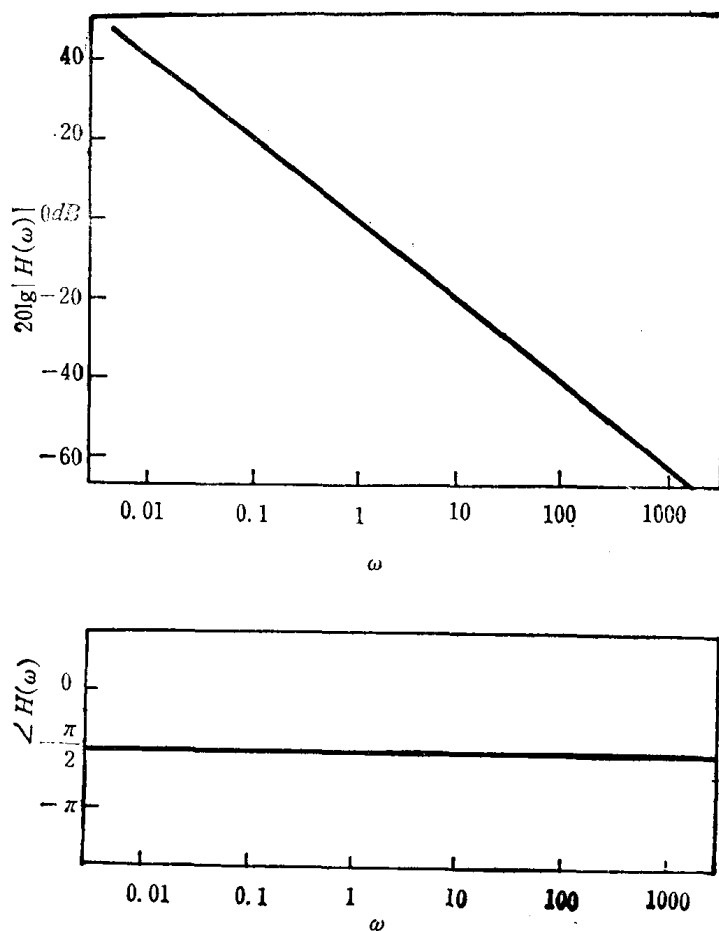


图 P 4.47

www.blogoil.com

试画出  $\omega > 0.001$  此系统的波特图。

(b) 画出微分器的波特图。

(c) 对具有以下频率响应的两个系统同上：

$$(i) H(\omega) = \frac{j\omega}{1 + \frac{j\omega}{100}}$$

$$(ii) H(\omega) = \frac{j\omega}{1 + \frac{j\omega}{10} + \frac{(j\omega)^2}{100}}$$

4.48. 如果  $\angle H(\omega_0) > 0$ , 则可以说一个 LTI 系统在特定的频率  $\omega = \omega_0$  处有 相位超前。这个术语来源于这样的事实：如果  $e^{j\omega_0 t}$  是这个系统的输入，则输出的相位将超过（即超前）输入的相位。类似地，如果  $\angle H(\omega_0) < 0$ , 就说此系统在这个频率处，有 相位滞后。注意，对具有以下频率响应的系统

$$\frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

对所有  $\omega > 0$ , 有相位滞后。而对于具有

$$1 + j\omega\tau$$

频率响应的系统，对所有  $\omega > 0$ , 有相位超前。

(a) 试作出以下两个系统的波特图。哪个有相位超前？哪个有相位滞后？哪一个在一定频率上放大了信号？

$$(i) \frac{1 + \frac{j\omega}{100}}{1 + 10j\omega};$$

$$(ii) \frac{1 + 10j\omega}{1 + \frac{j\omega}{10}}.$$

(b) 对以下三个频率响应, 重复(a):

$$(i) \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)^2}{(1 + 10j\omega)^3};$$

$$(ii) \frac{1 + \frac{j\omega}{10}}{100(j\omega)^2 + 10j\omega + 1};$$

$$(iii) \frac{1 + 10j\omega}{0.01(j\omega)^2 + 0.2j\omega + 1}.$$

4.49. 考虑图 P 4.49 所示的系统。“补偿器”方框内是连续时间 LTI 系统。

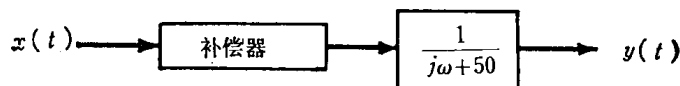


图 P 4.49

(a) 假设需要选择补偿器的频率响应, 使得级联后整个频率响应  $H(\omega)$  满足以下两个条件:

(1)  $H(\omega)$  的对数幅度在  $\omega=1000$  以外, 具有  $-40dB/10$  倍频的斜率;

(2) 对  $0 < \omega < 1000$  的所有频率,  $H(\omega)$  的对数幅度在  $\pm 10dB$  之间。

试设计一个合适的补偿器。即, 确定满足这个需要的补偿器的频率响应, 并画出所得  $H(\omega)$  的波特图。

(b) 如果对  $H(\omega)$  的对数幅度规定是:

(1) 对  $0 < \omega < 10$ , 有  $+20dB/10$  倍频的斜率。

(2) 对  $10 < \omega < 100$ , 在  $+10dB$  到  $+30dB$  之间。

(3) 对  $100 < \omega < 1000$ , 有  $-20dB/10$  倍频的斜率。

(4) 对  $\omega > 1000$ , 有  $-40dB/10$  倍频的斜率。重复(a)。

4.50. 考虑具有以下频率响应的因果 LTI 系统

$$H(\omega) = \frac{5(j\omega) + 7}{(j\omega + 4)[(j\omega)^2 + (j\omega) + 1]}$$

(a) 试求此系统的冲激响应。

(b) 对此系统, 试求由一阶和二阶系统级联组成的级联结构(利用加法器, 积分器和系数乘法器)。

(c) 试求由一阶和二阶系统并联互连组成的并联型结构。

4.51. (a) 考虑具有以下频率响应的 LTI 系统

$$H(\omega) = \frac{1}{(j\omega + 2)^3}$$

试构成用三个一阶系统级联组成此系统的实现方案。问: 此系统有否由三个一阶系统并联连接所组成的实现方案吗? 为什么?

(b) 对以下频率响应

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 2)^2(j\omega + 1)}$$

重复(a)。并求由一个二阶系统和一个一阶系统并联连接组成的实现方案。

(c) 考虑频率响应

$$H(\omega) = \frac{1}{(j\omega + 2)^3(j\omega + 1)}$$

试求由一个三阶系统和一个一阶系统并联连接组成的实现方案。能构成由两个二阶系统组成的并联实现方案吗？能构成由一个二阶系统和两个一阶系统组成的并联实现方案吗？为什么？

(d) 试用(b)的频率响应，构成4种不同的串联实现方案。每一种这样的实现方案应由不同的二阶和一阶系统级联组成。

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)



## 第五章 离散时间信号与系统的傅里叶分析

### 5.0 引言

第4章讨论的连续时间傅里叶分析技术,在分析与理解连续时间信号与系统的性质时具有重要的价值。事实上,该技术连同离散时间傅里叶分析技术,形成了以后滤波、调制和抽样等各章讨论的基础。本章,我们着手讨论离散时间傅里叶分析的课题,采用完全类似于连续时间的分析方法,并且所得到的基本结论也与连续时间情况一样。因此,离散时间傅里叶分析技术在离散时间信号与系统的研究中也是非常有用的。

虽然,连续时间傅里叶分析,可以追溯到18世纪初叶数学物理问题的研究,但是,离散时间信号与系统的各种分析方法,却具有其自身特有的历史渊源。特别是,离散时间的概念和方法,对于数值分析的学科具有重大的意义。早在17世纪初叶牛顿所处的年代,就已经研究了建立内插、积分和微分的数值逼近算法方面的离散数据处理的有关公式。此外,预测天体运动课题所给出的观测结果,也推动了18和19世纪时间级数的研究,并由此形成了第二个发展阶段,在这一阶段中,大量的早期工作是在离散时间信号与系统上完成的。根据它们各自的起因,连续时间和离散时间信号与系统的研究采用了独立而并行的方法。物理学及以后的电路研究大大推动了连续时间情况的研究,而在离散时间方面,留下的重点问题是关于数值分析和把时间级数分析技术用于各式各样的实际问题,包括经济信息的预报,人口统计数据的分析和利用观测数据作出有关特殊物理现象的性质的推论等等。

在本世纪的40和50年代,离散时间技术的研究,特别是离散时间傅里叶分析方法的应用,取得了较大的进展。其原因是数字计算机的功能和应用的不断增长及抽样数据系统(即处理抽样连续时间信号的离散时间系统)设计方法的发展。随着计算机越来越广泛的应用,离散时间和连续时间技术的应用领域日益相交叉,这就形成了迄今已基本上独立发展起来的两种方法之间的自然联系。此外,数字计算的极大适应性推动了日臻完善的离散时间系统设计方面的试验,而这种系统在模拟装置中至今还没有类似的实际实现。多数离散时间系统需要进行大量的傅里叶变换的计算,这在时间上似乎是一种沉重的负担。然而,数字计算机开发的可能性,仍然足以吸引人们着手从事诸如数字声码器,数字频谱分析和其他全数字化系统的研究工作,并可望这些系统最后会付诸实用。本世纪60年代中期,发展了一种现在通称为快速傅里叶变换(FFT)的算法。这种算法被证实完全适用于高效数字计算的实现,它可以把变换所需的计算时间减少几个数量级。这种算法使许多感兴趣的但以前不能实现的设想突然变为实际可行,这样,使离散时间信号与系统分析技术的研究加速向前发展。

上述长期历史形成了离散时间信号与系统的严密分析方法,以及一个非常广阔的目前和潜在的应用领域。在本章,我们将描述这种方法中最重要和最基本的部分,而在随后几章中,还要初步介绍它的若干重要应用的。我们将会看到,离散时间傅里叶分析技术与连续时间傅里叶分析技术相应部分之间存在着许多类似。例如,用复指数表示信号的基本缘由在离散时间和连续时间情况下是相同的。特别是,如果把离散时间LTI系统的输入和输出表示为复指数的线性组合,那么,输出表达式中的系数就可按非常简单的方式用输入复指数的

线性组合系数来表示。而且，如同连续时间情况一样，许多有用信号都可以由这样线性组合来表示。

另一方面，虽然许多离散时间的傅里叶分析与连续时间情况很类似，但它们之间也存在着某些重要的差别。例如，在5.2节中会看到，与连续时间周期信号需要用无穷级数表达式的情况相反，离散时间周期信号的傅里叶级数表达式则是一个有限项的级数。事实上，FFT本质上正是依赖这种有限性，因此它本来就是属于离散时间的概念。在进行本章讨论时，我们要利用连续时间和离散时间的许多类似点，来加强对傅里叶分析的一些基本概念的理解，而这些基本概念对连续与离散时间两种情况都相当重要。同时，我们也要利用它们之间的若干差别，来加深对它们各自不同特性的理解。

## 5.1 离散时间 LTI 系统对复指数信号的响应

导出离散时间傅里叶表达式（即把一般序列表示为复指数的线性组合）的原由，与连续时间情况是一样的。具体说，复指数序列是离散时间 LTI 系统的特征函数。即假定具有冲激响应为  $h[n]$  的 LTI 系统，其输入信号为

$$x[n] = z^n \quad (5.1)$$

式中  $z$  是一个复数。系统的输出可以由卷积和确定为

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \end{aligned}$$

从这个表示式不难看出，如果输入  $x[n]$  是由式(5.1)所给的复指数，那么输出就等于同一复指数乘上一个取值与  $z$  有关的常数，即，

$$y[n] = H(z)z^n \quad (5.2)$$

式中

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \quad (5.3)$$

这里  $H(z)$  是与特征函数  $z^n$  有关的特征值。

更一般地，观察式(5.2)，同时考虑到迭加特性，可知用复指数表示信号将导致 LTI 系统响应的一种简便表达式。具体说，如果把一个离散时间 LTI 系统的输入表示为复指数的线性组合，即，如果

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \quad (5.4)$$

那么，输出  $y[n]$  将是

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n \quad (5.5)$$

这就是说，输出也同样可以表示为复指数信号的线性组合，而且输出表达式中的每一个系数等于相应的输入系数  $a_k$  与系统特征值  $H(z_k)$  的乘积，而该特征值与特征函数  $z_k^n$  有关。

类似于第4章的讨论，在本章我们要把复指数限定为  $e^{j\Omega n}$  的形式（即具有  $|z|=1$  的  $z^n$ ）。第10章，还要研究更一般的情况。在下一节，讨论周期信号的傅里叶级数表达式，而在5.3节，我们按照完全并行于4.4节的研究方式，导出一种作为傅里叶级数推广的离散时间傅里叶变换。并且，如前所述，将求出许多与连续时间情况类似的结果和若干重要的差别。

## 5.2 周期信号的表示法：离散时间傅里叶级数

### 5.2.1 谐波相关复指数信号的线性组合

如第2章所讨论的那样，若存在某一正数 $N$ ，使得

$$x[n] = x[n+N] \quad (5.6)$$

则离散时间信号 $x[n]$ 是周期性的。例如，在2.4.3节所看到的那样，复指数 $e^{j(2\pi/N)n}$ 就是一个周期为 $N$ 的周期信号。而且，一个具有周期为 $N$ 的离散时间周期复指数的集合为

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.7)$$

所有这些信号的频率都是同一基本频率 $2\pi/N$ 的整数倍，因此，它们是谐波相关的。

离散时间和连续时间的谐波相关信号集合之间的一个重要区别是，尽管式(4.12)中所有连续时间信号是不相同的，但式(5.7)给出的信号集合中却仅有 $N$ 个不同的信号。如2.4.3节所讨论的那样，其理由是相差 $2\pi$ 倍频率的离散时间复指数信号是恒等的，即

$$e^{j(\Omega+2\pi r)n} = e^{j\Omega n} e^{j2\pi rn} = e^{j\Omega n}$$

这一事实的直接结果，是 $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ ， $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$ ，更一般的情况是

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \quad (5.8)$$

这就是说，当 $k$ 按 $N$ 的任何整数倍变化时，就可得到恒等的序列。

现在希望通过式(5.7)中序列 $\phi_k[n]$ 的线性组合，来分析更一般的周期序列表示式。这种线性组合具有如下形式

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.9)$$

由于序列 $\phi_k[n]$ 仅在 $N$ 的范围以内取不同的 $k$ 的相继值，所以式(5.9)的求和仅需包括该范围内的各项。因此，因为 $k$ 是在 $N$ 个相继的整数范围内变化，式(5.9)就是在 $k$ 值上求和，为了方便起见，我们通常把求和范围写成 $k=\langle N \rangle$ ，即

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.10)$$

例如，可以在 $k=0, 1, \dots, N-1$ 或 $k=3, 4, \dots, N+2$ 上取值。在每种情况下，根据式(5.8)可知，出现在式(5.10)右边求和中的正是同样的复指数序列的集合。式(5.10)将被称为离散时间傅里叶级数，而系数 $a_k$ 称作傅里叶级数的系数。如本章引言中所提及的，在离散时间情况下，上述傅里叶级数是一个有限项级数，同时，如我们刚才所看到的那样，它是式(5.8)的一个直接结果。

### 5.2.2 周期信号傅里叶级数表达式的确定

假定有一个周期性序列 $x[n]$ ，其周期为 $N$ 。我们要确定 $x[n]$ 的表示式是否以式(5.10)的形式存在，如果存在的话，那么系数 $a_k$ 的值是什么。这个问题可以说成是要求一个线性方程组的解。具体说，若对 $n$ 的相继值来求解式(5.10)，则得

$$\begin{aligned} x[0] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \\ x[1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2\pi k/N} \\ &\dots \\ x[N-1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2\pi k(N-1)/N} \end{aligned} \quad (5.11)$$

由于式(5.10)的两边都具有周期性,其周期为 $N$ ,所以 $x[N]$ 恒等于式(5.11)给出的 $x[0]$ 。因此,当 $k$ 在一组 $N$ 个相继整数的范围之内时,式(5.11)就表示对应 $N$ 个未知系数 $a_k$ 的一组线性方程式。可以证明,这一组 $N$ 个方程式是线性独立的,因此,根据给定的一组 $x[n]$ 的值,即可求得系数 $a_k$ 。

在习题5.2中,我们分析一个例子,例中傅里叶级数的系数可通过直接求解式(5.11)给出的有 $N$ 个方程式的方程组而获得。然而,按照下列类似于连续时间情况所使用的那些步骤,有可能由序列值 $x[n]$ 得到系数 $a_k$ 的封闭形式表达式。为了确定这一关系,先证明下式是有帮助的,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.12)$$

式(5.12)说明,在一个周期内周期复指数之和等于零,除非复指数为一常数。即,上式只是下列方程在离散时间中的对应式

$$\int_0^T e^{jk(2\pi/T)t} dt = \begin{cases} T, & k=0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

为了导出式(5.12),首先应该注意式(5.12)左边是有限项几何级数之和,即,它具有如下形式

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n$$

式中 $\alpha = e^{jk(2\pi/N)}$ 。像习题2.8中讨论的那样,以上求和可按封闭形式表示为

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha=1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

同时我们知道,仅当 $k$ 是 $N$ 的倍数(即,当 $k=0, \pm N, \pm 2N, \dots$ )时,  $e^{jk(2\pi/N)} = 1$ 。因此,在 $\alpha = e^{jk(2\pi/N)}$ 时,应用式(5.13)即得

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{jk(2\pi/N)}}, & \text{其他} \end{cases}$$

因为 $e^{jk(2\pi/N)n} = e^{jk2\pi} = 1$ ,所以上式可简化为式(5.12)。

由于求和公式(5.12)中的每一个复指数具有周期性,其周期为 $N$ ,所以式(5.12)对于在长度为 $N$ 的任意区间上实现求和时,都将保持有效,即,

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.14)$$

图5.1提供了式(5.14)的图解说明,图中取 $N=6$ 。

这里复数用复平面(其横坐标为实轴,纵坐标为虚轴)上的矢量表示。因为周期复指数序列的每一个值是具有单位幅度的复数,因此图5.1中的所有矢量均具有单位长度。此外,根据每一个图的对称性,可以推断,除 $k=0, 6, 12$ 等之外,在一个周期内矢量 $e^{jk(2\pi/6)n}$ 之和将等于零。

现在,我们来研究式(5.10)的傅里叶级数表达式。在该等式的两边乘上 $e^{-jr(2\pi/N)n}$ ,并且在 $N$ 项范围内求和,即得

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \quad (5.15)$$

交换等式右边求和次序,则有

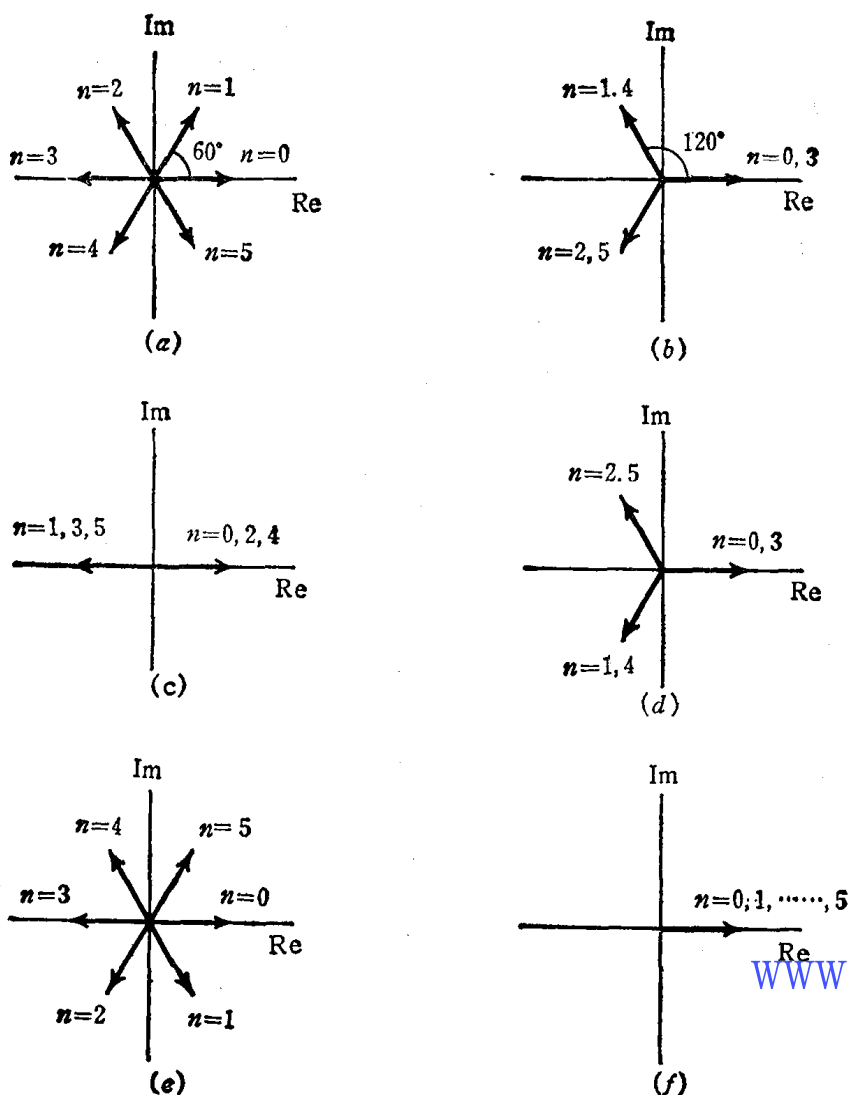


图5.1 一个周期内 (\$n=0, 1, \dots, 5\$), 不同 \$k\$ 值的复指数序列 \$\phi\_k[n] = e^{jk(2\pi/6)n}\$;  
(a) \$k=1\$; (b) \$k=2\$; (c) \$k=3\$; (d) \$k=4\$; (e) \$k=5\$; (f) \$k=6\$

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \quad (5.16)$$

根据等式(5.14), 除了 \$k-r\$ 等于零或等于 \$N\$ 的整数倍之外, 式(5.16)右边内侧对 \$n\$ 的求和等于零。因此, 如果以外侧求和中 \$k\$ 变化的同样范围来选择 \$r\$ 值, 那么, 当 \$k=r\$ 时, 式(5.16)右边的内侧求和就等于 \$N\$, 当 \$k \neq r\$ 时, 就等于零。因此, 等式(5.16)的右边可简化为 \$Na\_r\$, 从而有

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} \quad (5.17)$$

因此, 上式提供了一个求取傅里叶级数系数的封闭表达式, 因而我们得到概括于式(5.18)和(5.19)中的离散时间傅里叶级数对。

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.18)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} \quad (5.19)$$



这两个方程式对离散时间周期信号所起的作用，如同式(4.34)和(4.35)对连续时间周期信号所起的作用，式(5.18)是综合方程，而式(5.19)是分析方程。

傅里叶级数的系数  $a_k$  通常称做  $x[n]$  的频谱系数。这些系数把  $x[n]$  分解为  $N$  个谐波相关的复指数之和。参照式(5.10)可看出，如果  $k$  值取 0 到  $N-1$ ，则有

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n] \quad (5.20)$$

类似地，如果  $k$  值取 1 到  $N$ ，则得

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + \cdots + a_N\phi_N[n] \quad (5.21)$$

从式(5.8)已知， $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ ，因此，比较式(5.20)和(5.21)，必然得出  $a_0 = a_N$  的结论。类似地，令  $k$  取值于任意一个由  $N$  个连续整数组成的集合中，并且利用式(5.8)，就可得到

$$a_k = a_{k+N} \quad (5.22)$$

这就是说，如果设想的  $k$  大于  $N$  个序列值，那么  $a_k$  值将作周期性地重复，其重复周期为  $N$ 。仔细说明上述事实是很重要的。特别是，由于仅有  $N$  个不同的周期性复指数，其周期为  $N$ ，所以离散时间傅里叶级数表示式是一个仅有  $N$  项的级数。因此，如果规定在  $k$  的  $N$  个连续值范围内定义式(5.18)的傅里叶级数，那么就能从式(5.19)中得到正好  $N$  个傅里叶系数。另一方面，有时利用几组不同  $k$  的  $N$  个值将会很方便，因此，把式(5.18)看做任意一组  $k$  的  $N$  个连续值之和是有帮助的。由于这个理由，把  $a_k$  看成是对所有  $k$  值定义的序列往往是方便的，这里仅有  $N$  个相继的该序列元素被采用于傅里叶级数表达式中。此外，因为当我们改变  $k$  值〔式(5.8)〕时， $\phi_k[n]$  将以周期  $N$  进行周期性重复，所以， $a_k$  也必然如式(5.22)。

#### 例5.1 研究信号

$$x[n] = \sin \Omega_0 n \quad (5.23)$$

它是与例4.3对应的离散时间信号。根据  $2\pi/\Omega_0$  是否等于一个整数、一个整数的比例或一个无理数而有三种不同的情况。由第2章可知，在前两种情况下， $x[n]$  是周期性的。因此，上述信号的傅里叶级数表示式仅适用于前两种情况。当  $2\pi/\Omega_0$  等于一整数  $N$  时，即当

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

时， $x[n]$  是周期性的，其基本周期为  $N$ ，并可得到一个完全类似于连续时间情况的结果。将上述信号展开为两个复指数之和，即得到

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n} \quad (5.24)$$

比较式(5.24)和(5.18)，由观察可得

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad (5.25)$$

并且求和范围内的其余系数均等于零。如前所述，系数  $a_1$  和  $a_{-1}$  均按周期  $N$  进行重复，例如， $a_{N+1}$  也等于  $1/2j$  和  $a_{N-1}$  也等于  $-1/2j$ 。图5.2表示  $N=5$  时的傅里叶系数，这个例子表明它们具有周期性重复这一事实。然而，在综合方程(5.18)中却仅用了一个周期。

现在讨论  $2\pi/\Omega_0$  等于一个整数比例的情况，即当

$$\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$$

假定  $m$  和  $N$  没有任何公因子，由第2章可知， $x[n]$  具有一个基本周期  $N$ 。再次把  $x[n]$  展开为两个复指数之和，则有

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jm(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jm(2\pi/N)n}$$

据此观察即可确定,  $a_m=1/2j$ ,  $a_{-m}=-1/2j$ , 并且在长度为  $N$  的一个周期内的其余系数都等于零。图5.3描述了这个例子当  $m=3$ ,  $N=5$  时的傅里叶系数, 这就再次表明了这些系数的周期性。例如,  $N=5$  时, 本例中的系数  $a_3=a_{-3}$ , 并且都等于  $-1/2j$ 。然而, 值得注意的是, 在长度为 5 的任何周期内, 仅有两个非零的傅里叶系数, 因此, 在综合方程中也仅有两个非零项。

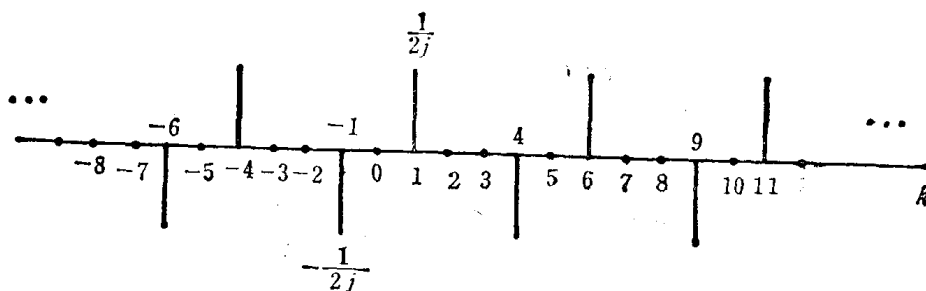


图5.2 信号  $x[n]=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)n$  的傅里叶系数

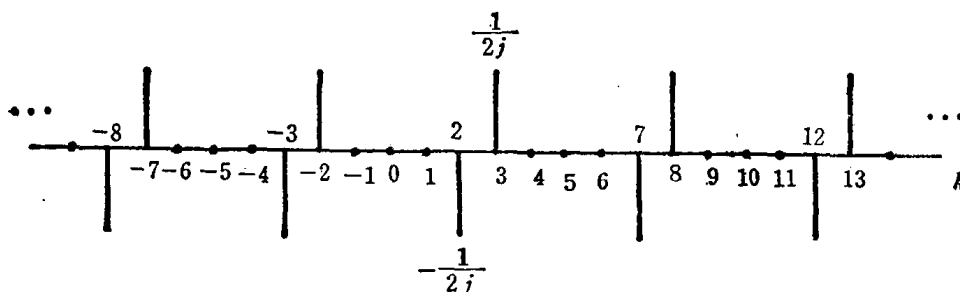


图5.3 信号  $x[n]=\sin 3\left(\frac{2\pi}{5}\right)n$  的傅里叶系数

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

例5.2 现在假定要分析的信号是

$$x[n]=1+\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)n+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)n+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)$$

该信号是周期性的, 周期为  $N$ 。并且, 如例5.1那样, 我们可以用复指数把  $x[n]$  直接展开为

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2j} [e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}] \\ &\quad + \frac{3}{2} [e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n}] \\ &\quad + \frac{1}{2} [e^{j(4\pi n/N + \pi/2)} + e^{-j(4\pi n/N + \pi/2)}] \end{aligned}$$

归纳有关项, 得出

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right) e^{-j(2\pi/N)n} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/2}\right) e^{j2(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/2}\right) e^{-j2(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

于是, 该例的傅里叶系数为

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j$$

$$a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{2}j$$

$$a_{-2} = -\frac{1}{2}j$$

在综合方程(5.18)中, 对应求和间隔内的其他  $k$  值, 均有  $a_k=0$ 。应当再次指出, 傅里叶系数是周期性的, 周期为  $N$ 。例如,  $a_N=1$ ,  $a_{3N-1}=3/2+1/2j$  及  $a_{2-N}=\frac{1}{2}j$ 。图5.4(a)中已画出了  $N=10$  时的这些系数的实部和虚部, 而图 5.4(b) 描述了这些系数的幅度和相位。

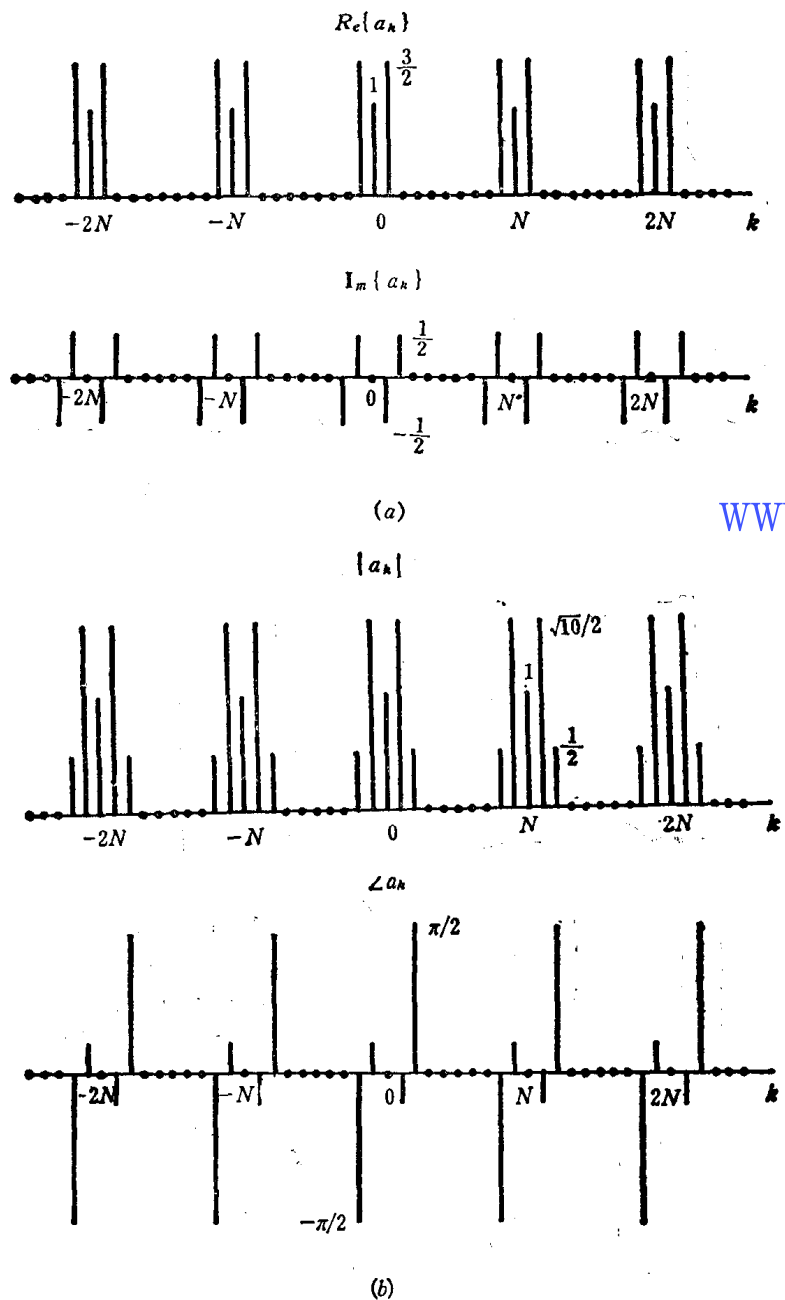


图5.4 (a) 例5.2中傅里叶系数的实部和虚部; (b) 同样系数的幅度和相位



请注意, 在这个例子中, 对于所有的  $k$  值,  $a_{-k} = a_k^*$ 。事实上, 当  $x[n]$  是实数, 这个等式总是成立的。这种性质与我们在 4.2 节所讨论的连续时间周期信号的性质是相同的, 并且如同连续时间情况那样, 这一事实的含意是, 实数周期序列的离散时间傅里叶级数具有两种可能的形式。这些形式类似于式 (4.19) 和 (4.20) 给出的连续时间傅里叶级数表达式, 并在习题 5.7 中对它们进行了研究。对我们来说, 式 (5.15) 给出的傅里叶级数的指数形式是特别方便的, 因而经常应用它。

离散时间傅里叶级数还具有许多其他有用的性质, 其中许多直接对应于连续时间傅里叶级数的性质。我们推迟到 5.5 节再讨论这些性质, 在那里, 按照更一般的离散时间傅里叶变换来讨论它们。

**例 5.3** 在这个例子中, 要研究图 5.5 所示的离散时间周期性矩形波信号, 我们可以利用式 (5.19) 计算傅里叶级数。由于这个序列对  $n=0$  对称, 所以选择一个对称间隔, 并在此间隔内实现式 (5.19) 的求和就特别方便。因而, 我们把式 (5.19) 表示为

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.26)$$



图 5.5 离散时间周期性矩形波

令  $m = n + N_1$ , 式 (5.26) 变成

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m} \end{aligned} \quad (5.27)$$

式 (5.27) 中的求和由几何级数最初的  $2N_1+1$  项之和组成, 它可利用式 (5.13) 计算求得

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left( \frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin [2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin (2\pi k/2N)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{aligned} \quad (5.28a)$$

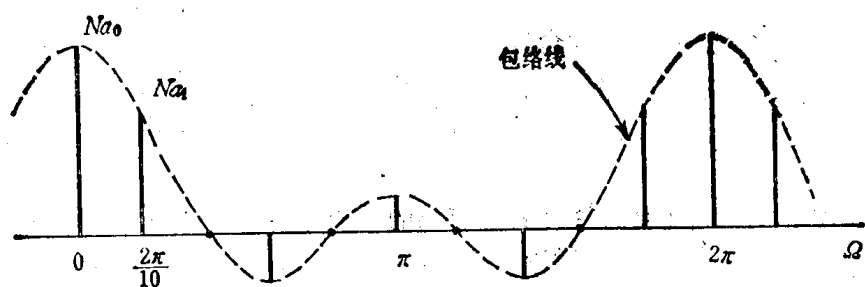
$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}, \quad k=0, \pm N, \pm 2N, \dots \quad (5.28b)$$

如果把傅里叶级数的系数表示为下列包络线的抽样值, 则该系数的表示式可以写得更紧凑,

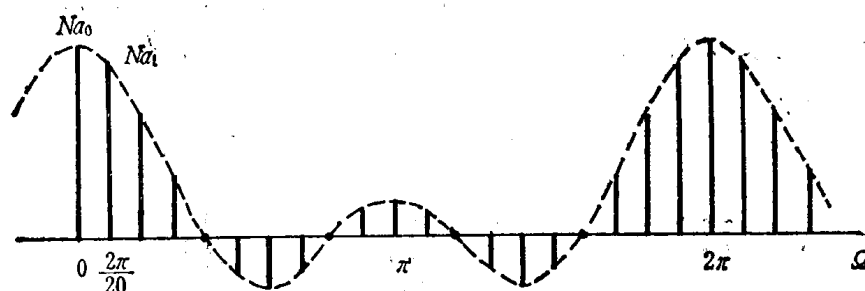
$$Na_k = \left. \frac{\sin[(2N_1+1)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)} \right|_{\Omega=2\pi k/N} \quad (5.29)$$

在图 5.6 中, 画出了  $2N_1+1=5$  时的系数  $Na_k$ , 而图 5.6(a)、(b) 和 (c) 分别对应于  $N=10, 20$  和  $40$  的情况。当  $N$  增加但  $N_1$  保持不变时,  $Na_k$  的包络线保持一样, 但所得的傅里叶系数的抽样间隔却变小了。

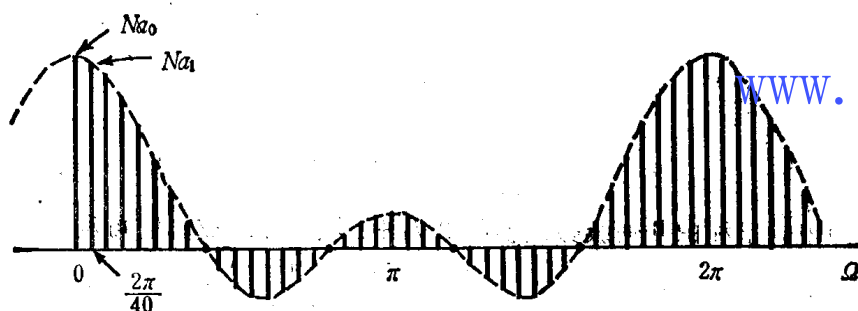
将这个例子与例 4.5 的连续时间矩形波比较是很有用的。在连续时间情况下, 参照例 4.5



(a)



(b)



(c)

图5.6 例5.3的周期性矩形波的傅里叶级数的系数， $2N_1+1=5$ 时， $N a_k$ 的曲线图：  
(a)  $N=10$ ；(b)  $N=20$ ；(c)  $N=40$

可看出，包络线具有  $\text{sinc}$  函数的形式。但是，由于离散时间傅里叶级数的系数（因此也是其包络线）必须是周期性的，所以，在离散时间情况下，不能形成同样的函数形式。实际上， $\text{sinc}$  函数的离散时间对应物具有  $\sin \beta x / \sin x$  的形式，像式(5.29)的情况那样。

在4.3节讨论连续时间傅里叶级数的收敛问题时，我们曾研究过对称矩形波的特殊例子，并且观察到当项数趋于无穷大时，式(4.47)中的有限求和怎样收敛于矩形波。特别是，我们观察了不连续点上的吉布斯现象，根据这一现象，当项数增加时，部分和的波动(图4.10)就朝着不连续点压挤，而波动峰值幅度保持恒定，不随部分和的项数改变。现在让我们研究离散时间矩形波部分和的类似序列，这里为了简化，假定周期  $N$  为奇数。图5.7中描绘了对应图5.5( $N=9$ ,  $2N_1+1=5$ )和几个不同  $M$  值的信号

$$x[n] = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.30a)$$

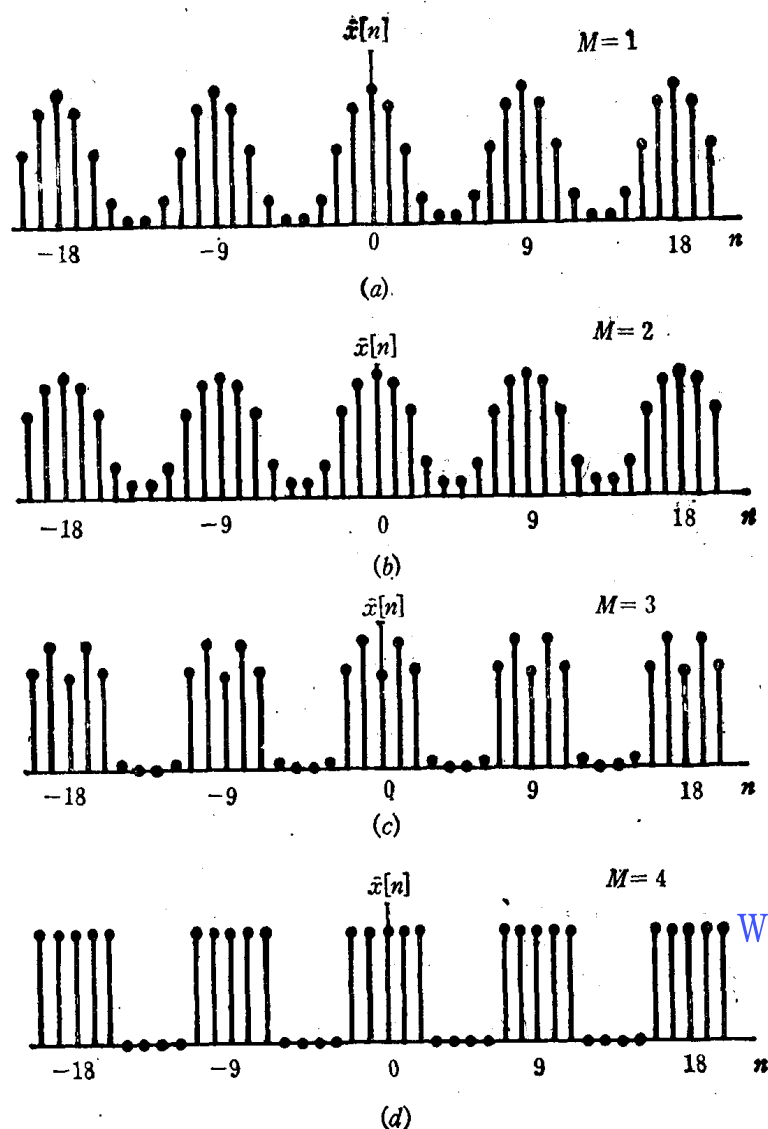


图5.7 式(5.30)的部分和[对应图5.5( $N=9$ ,  $2N_1+1=5$ )的周期矩形波];  
(a)  $M=1$ ; (b)  $M=2$ ; (c)  $M=3$ ; (d)  $M=4$

$M=4$ 时, 部分和完全等于  $x[n]$ 。即, 与连续时间情况相反, 没有收敛问题和吉布斯现象。事实上, 在离散时间傅里叶级数情况下, 一般没有收敛问题。其原因都出于任何离散时间周期序列  $x[n]$  完全由  $N$  个有限参数 (即在一个周期内的序列值) 所确定这一事实。傅里叶级数分析方程(5.19)仅仅把上述一组  $N$  个参数变换为一组等效的  $N$  个傅里叶系数值, 而综合方程(5.18)告诉我们如何用有限项级数来恢复原序列值。因此, 当我们在式(5.30 a)中取  $M=(N-1)/2$  时, 则上述求和恰好包括  $N$  项, 因此根据综合方程就可得出  $\hat{x}[n]=x[n]$ 。类似地, 如果  $N$  取偶数, 并假定

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.30b)$$

那么, 当  $M=N/2$  时, 上述求和就由  $N$  项组成, 并且可以再次由式(5.18)得出  $\hat{x}[n]=x[n]$  的结论。相反, 连续时间周期信号在一个信号周期内呈现为一连续值, 并且需要无穷多个傅里叶系数表示它。因此, 一般说来, 式(4.47)中有限的部分和根本不能得出  $x(t)$  的精确值, 并且随着项数趋于无穷大, 当我们考虑计算极限值时, 就出现了收敛问题。

离散时间傅里叶级数讨论至此, 我们已经看出, 在离散时间和连续时间情况之间有许多类似点和若干差别。这些类似最重要的起因之一, 在于复指数是连续时间和离散时间两类 LTI 系统的特征函数这一事实。由于这个原因, 如果离散时间 LTI 系统的输入  $x[n]$  是一周期为  $N$  的周期信号, 那么, 根据这一输入信号的傅里叶系数表示式, 就可得到输出  $y[n]$  的傅里叶系数的简单表示式。具体说, 若

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

并且假定  $h[n]$  是系统的冲激响应, 那么, 根据式(5.5),

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.31)$$

根据式(5.3)①, 上式中

$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.32)$$

在下面例子中, 说明了这种性质的应用。

例5.4 假定一个 LTI 系统, 其冲激响应  $h[n] = a^n u[n]$ ,  $-1 < a < 1$ , 作为系统的输入信号是

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad (5.33)$$

如例5.1那样,  $x[n]$  可以写成如下傅里叶级数的形式

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n}$$

同时, 根据式(5.32),

$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jk(2\pi/N)n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j2\pi k/N})^n \quad \text{www.blogoil.com}$$

这一几何级数可以利用习题2.8的结果计算得到

$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi k/N}}$$

利用式(5.31), 于是可得到输出的傅里叶级数

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} H\left(\frac{2\pi}{N}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H\left(-\frac{2\pi}{N}\right) e^{-j(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/N}} \right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - ae^{j2\pi/N}} \right) e^{-j(2\pi/N)n} \end{aligned} \quad (5.34)$$

如果我们写成

$$\frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/N}} = re^{j\theta}$$

那么, 式(5.34)可简化为

$$y[n] = r \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right) \quad (5.35)$$

①等式(5.32)表示一种符号的变换。利用式(5.3)的符号可以看出, 式(5.32)右边的参量是  $H(e^{j2\pi k/N})$ 。然而, 在本章中仅对  $|z|=1$  (即,  $z=e^{j\Omega}$ ) 计算  $H(z)$ , 所以我们用比较简单的符号  $H(\Omega)$ , 而不用  $H(e^{j\Omega})$ 。这实质上是第4章(4.2.1节中)曾经用过的同一符号形式的类似简化。

例如, 当  $N = 4$  时,

$$\frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/4}} = \frac{1}{1 + aj}$$

于是,

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cos\left[\frac{\pi n}{2} - \text{tg}^{-1}(a)\right]$$

### 5.3 非周期信号的表示法: 离散时间傅里叶变换

在例5.3 (式(5.29)和图5.6) 中, 我们曾经看到, 周期矩形波的傅里叶级数的系数可以看做包络函数的抽样, 并且随着序列周期的增加, 这些抽样值之间的间隔变得越来越细。在4.4节中, 对连续时间情况的类似观察, 提出了一个非周期信号  $x(t)$  的表示式, 这首先是通过在一个周期内构成一个等于  $x(t)$  的周期信号  $\tilde{x}(t)$  来确定的。随着这一周期趋于无穷大, 于是在越来越长的时间间隔内  $\tilde{x}(t)$  等于  $x(t)$ , 并且  $\tilde{x}(t)$  的傅里叶级数表达式也趋于  $x(t)$  的傅里叶变换表达式。在本节, 按照完全类似的方法来分析离散时间信号, 以便导出非周期序列的傅里叶变换表达式。

研究一个具有有限时宽的一般非周期序列  $x[n]$ 。即, 对于某一整数  $N_1$ , 当  $|n| > N_1$  时,  $x[n] = 0$ 。图 5.8(a) 表示这种形式的信号。根据这一非周期信号, 可以构成一个以  $x[n]$ ①为周期的周期性序列  $\tilde{x}[n]$ , 如图 5.8(b) 所示。当我们把周期  $N$  选择得比较大时, 则在一个较长的时间间隔内  $\tilde{x}[n]$ ②与  $x[n]$  是完全一样的, 并且当  $N \rightarrow \infty$  时, 对于任何有限的  $n$  值, 有  $\tilde{x}[n] = x[n]$ 。

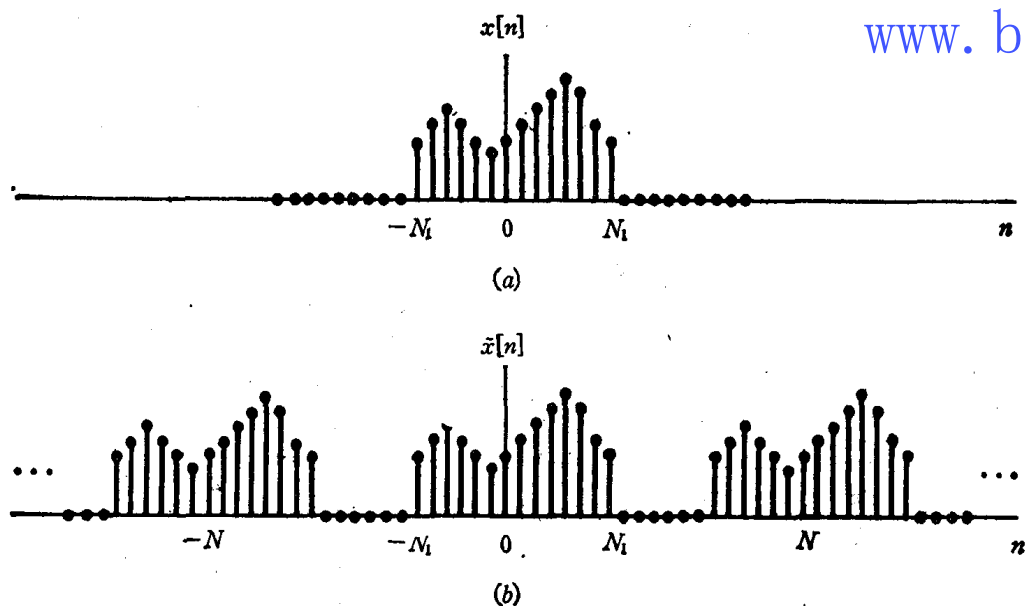


图5.8 (a)有限时宽信号  $x[n]$ ; (b)一个周期内等于  $x[n]$  的周期信号  $\tilde{x}[n]$

现在我们研究  $\tilde{x}[n]$  的傅里叶级数表达式。具体地, 重写式(5.18)和(5.19), 则有

①原著中误为  $\tilde{x}[n]$ 。——译者注

②原著中误为  $x[n]$ 。——译者注

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.36)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.37)$$

因为在一个周期 (包含间隔  $|n| \leq N_1$ ) 内,  $x[n] = \tilde{x}[n]$ , 所以把式(5.37)的求和范围选为这一周期是合适的, 以便在求和中可用  $x[n]$  代替  $\tilde{x}[n]$ 。因此,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.38)$$

式中, 利用了间隔  $|n| \leq N_1$  以外  $x[n]$  为零这一事实。定义  $Na_k$  的包络函数  $X(\Omega)$  为

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (5.39)$$

则得到的系数为

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \quad (5.40)$$

式中  $\Omega_0$  用来表示抽样间隔  $2\pi/N$ 。因此, 系数  $a_k$  是与这一包络函数的等间隔抽样值成正比例的。联立式(5.36)和(5.40), 得

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (5.41)$$

由于  $\Omega_0 = 2\pi/N$ , 或等效为  $1/N = \Omega_0/2\pi$ , 所以式(5.41)可重写为

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \quad (5.42)$$

正如式(4.59)的情况一样, 当  $N \rightarrow \infty$  时, 对于  $n$  的任何有限值,  $\tilde{x}[n]$  等于  $x[n]$ , 并且  $\Omega_0 \rightarrow 0$ 。因此, 式(5.42)转化为一个积分。为了更清楚地看出这一点, 让我们研究图5.9所画出的  $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ 。根据式(5.39),  $X(\Omega)$  可视为具有以  $\Omega$  表示的周期性, 其周期为  $2\pi$ ,  $e^{j\Omega n}$  也

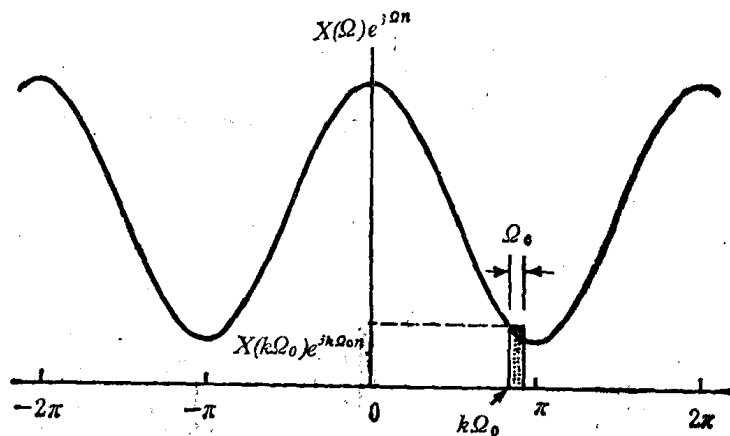


图5.9 式(5.42)的图解说明

是如此。于是, 乘积  $X(\Omega)e^{j\Omega n}$  也具有周期性。如图中所描述的, 式(5.42)中求和的每一项代表了一个长方形的面积, 这个长方形的高为  $X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$ , 宽为  $\Omega_0$ 。当  $\Omega_0 \rightarrow 0$  时, 就变为一个积分。此外, 由于式(5.42)的求和是在宽度为  $\Omega_0 (= 2\pi/N)$  的  $N$  个连续间隔内实现的, 所以总的积分区间始终是  $2\pi$ 。因此, 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\tilde{x}[n] = x[n]$ , 并且式(5.42)变为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

式中, 由于  $X(\Omega)e^{j\Omega n}$  具有  $2\pi$  的周期, 所以积分区间可以取长度为  $2\pi$  的任何区间。于是, 有如下对方程

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (5.43)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (5.44)$$

式(5.43)和(5.44)是式(4.60)和(4.61)在离散时间的对应公式。函数  $X(\Omega)$  称为离散时间傅里叶变换, 而上述一对方程称为傅里叶变换对。式(5.43)为综合方程, 而式(5.44)是分析方程。这些方程的推导表明, 一个非周期序列如何可以看做复指数的线性组合。特别是, 综合方程实际上就是把  $x[n]$  看成是频率无限接近而幅度为  $X(\Omega)(d\Omega/2\pi)$  时的复指数的线性组合的表达式。由于这个原因, 如同连续时间情况那样, 通常把变换  $X(\Omega)$  称为  $x[n]$  的频谱, 它为我们提供了关于  $x[n]$  如何由不同频率的复指数组成的知识。

虽然我们所用的论证中假定  $x[n]$  为任意的, 但它却是在有限时宽的条件下成立的, 然而式(5.43)和(5.44)对于非常广泛的无限时宽信号仍然有效。在这种情况下, 必须再次考虑式(5.44)中无限求和的收敛问题, 并且应保证  $x[n]$  的这种求和的收敛条件直接对应于连续时间傅里叶变换的收敛条件<sup>①</sup>。具体说, 如果  $x[n]$  是绝对可和的, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad (5.45)$$

或序列具有有限能量, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (5.46)$$

则式(5.44)都将是收敛的。

由此可见, 离散时间傅里叶变换与连续时间情况具有许多类似的地方, 而这两种情况之间的主要差别, 是离散时间变换  $X(\Omega)$  的周期性和综合方程中积分的有限区间。这两者皆起因于我们以前曾经多次指出的事实: 频率相差为  $2\pi$  倍数的离散时间复指数都是相等的。在5.2节我们已看到, 对于离散时间周期信号, 以上叙述的结论是, 傅里叶系数具有周期性, 傅里叶级数表达式是有限项之和。对于非周期信号, 类似的结论是,  $X(\Omega)$  的周期性和综合方程是仅在出现不同复指数的频率间隔 (即, 长度为  $2\pi$  的任何区间) 内的一个积分。在第2章, 我们曾指出作为  $\Omega$  函数的  $e^{j\Omega n}$  周期性的进一步结论。具体说, 因为  $\Omega=0$  和  $\Omega=2\pi$  时, 可得出同样的信号, 所以, 接近这些值或接近任何其他  $\pi$  的偶数倍频率的值就相当于低频。类似地, 离散时间中的高频是接近  $\pi$  的奇数倍的值。因此, 图5.10(a)所示的信号  $x_1[n]$  比图5.10(c)中的信号  $x_2[n]$  变化得更缓慢。图5.10(b)描述了  $x_1[n]$  的傅里叶变换, 而  $x_2[n]$  的傅里叶变换表示于图5.10(d)中。

为了说明傅里叶变换, 让我们讨论如下几个例子。

#### 例5.5 分析信号

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

在此情况下,

<sup>①</sup> 对于离散时间傅里叶变换的收敛问题的讨论, 请参阅 A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, Digital Signal Processing (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975) 和 J.A. Cadzow and H.R. Martens, Discrete-Time and Computer Control Systems (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970)。



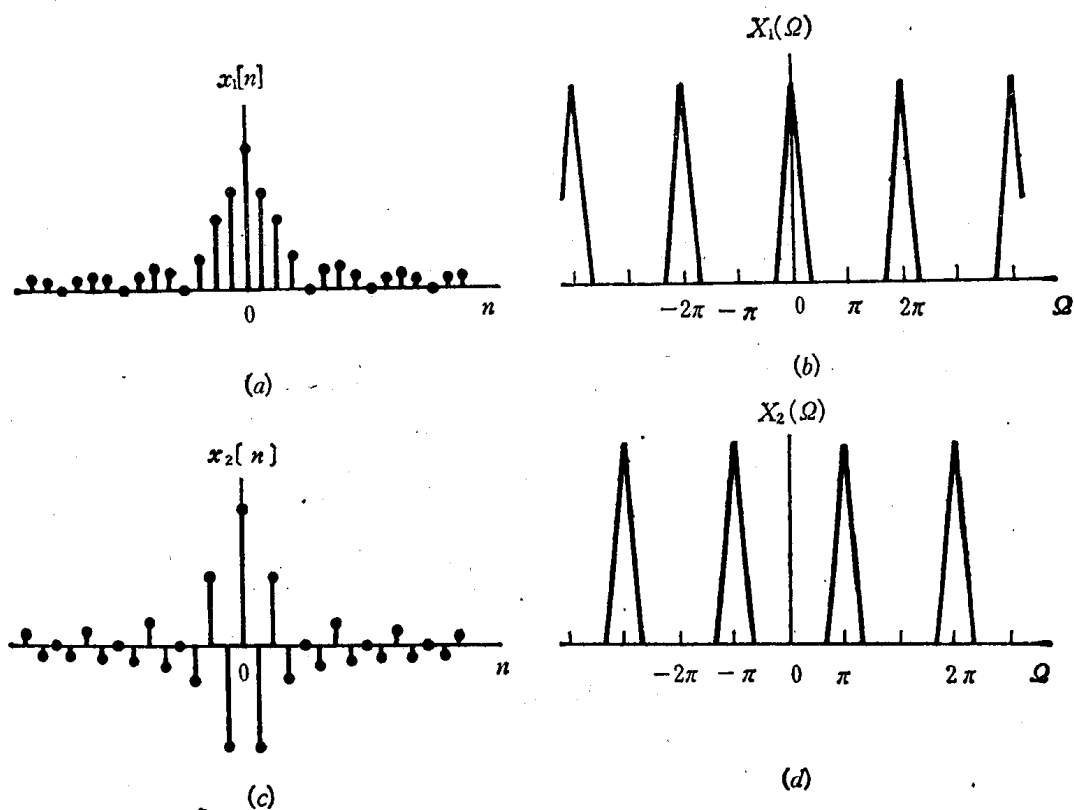
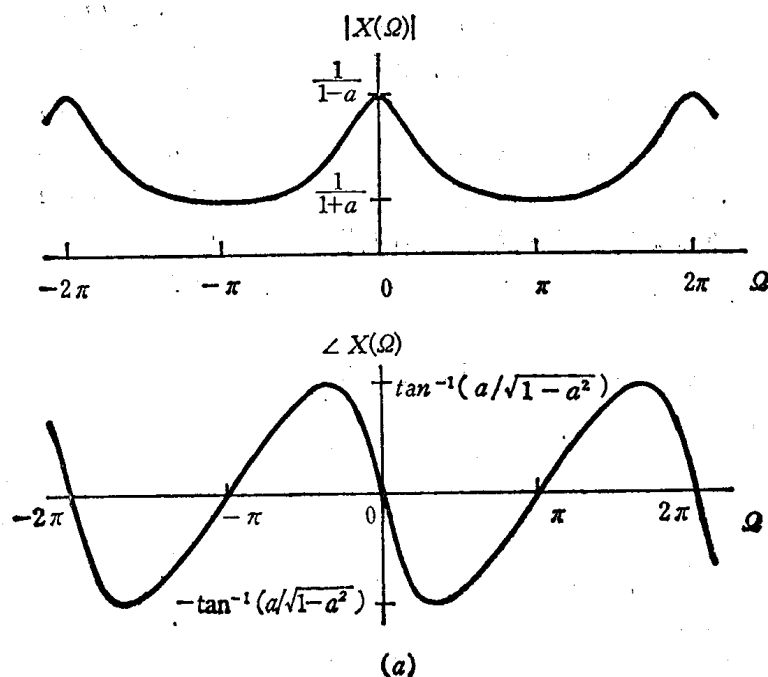


图5.10 (a)离散时间信号  $x_1[n]$ ; (b)集中于  $\Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  附近的  $x_1[n]$  的傅里叶变换  $X_1(\Omega)$ ; (c)离散时间信号  $x_2[n]$ ; (d)集中于  $\Omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$  附近的  $x_2[n]$  的傅里叶变换  $X_2(\Omega)$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{j\Omega}}$$

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

图5.11(a)画出了  $a > 0$  时的  $X(\Omega)$  的幅度和相位, 图5.11(b)是  $a < 0$  时的  $X(\Omega)$  的幅度和相位。注意, 所有这些函数都是周期性的, 其周期为  $2\pi$ 。





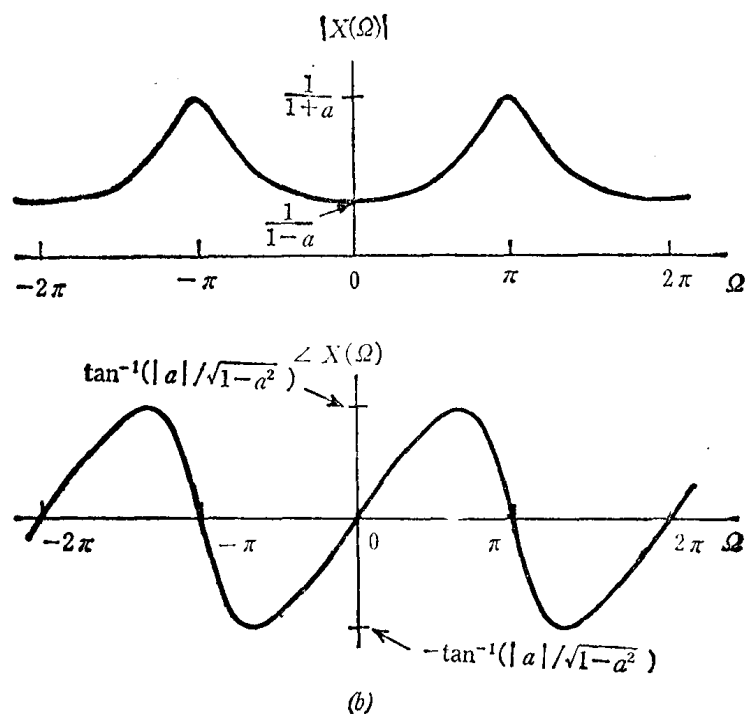


图5.11 例5.5的傅里叶变换的幅度和相位特性：(a)  $a > 0$ ；(b)  $a < 0$

例5.6 设

$$x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$$

图5.12(a)画出了  $0 < a < 1$  时的这一信号。它的傅里叶变换可由式(5.44)得到

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

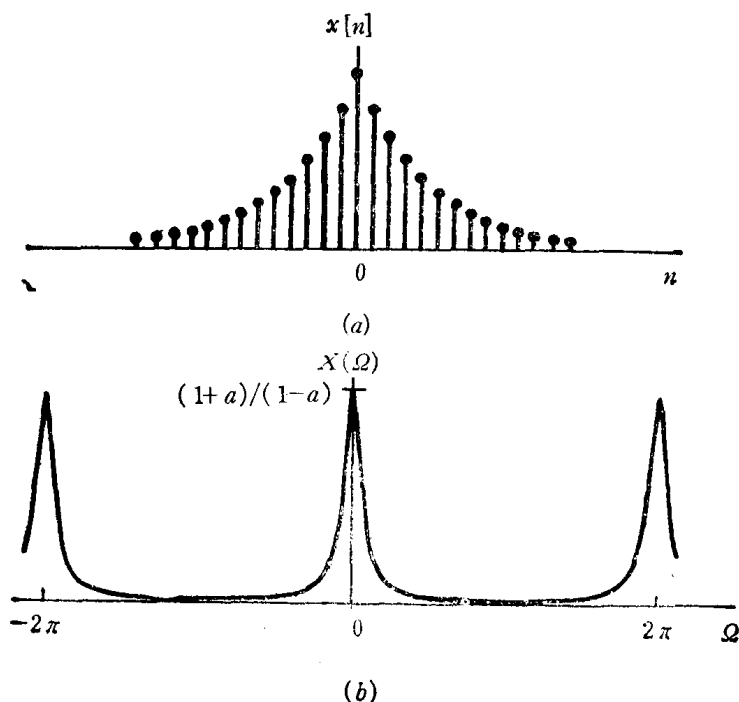


图5.12 例5.6中的信号  $x[n] = a^{|n|}$  及其傅里叶变换 ( $0 < a < 1$ )

在上式的第二项中进行变量替换, 令  $m = -n$ , 即可得到

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{j\Omega})^m$$

该式的第一项求和可认为是无穷几何级数; 第二项求和也是无穷几何级数, 但丢弃了级数的第一项。因此, 可见

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - ae^{j\Omega}} - 1 \\ &= \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\Omega + a^2} \end{aligned}$$

在此情况下,  $X(\Omega)$  为实数并在图5.12(b)中描绘了它(当  $0 < a < 1$ )。

#### 例5.7 研究矩形脉冲

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \quad (5.47)$$

图5.13(a)中绘出了  $N_1 = 2$  时的这一信号。在此情况下,

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} \quad (5.48)$$

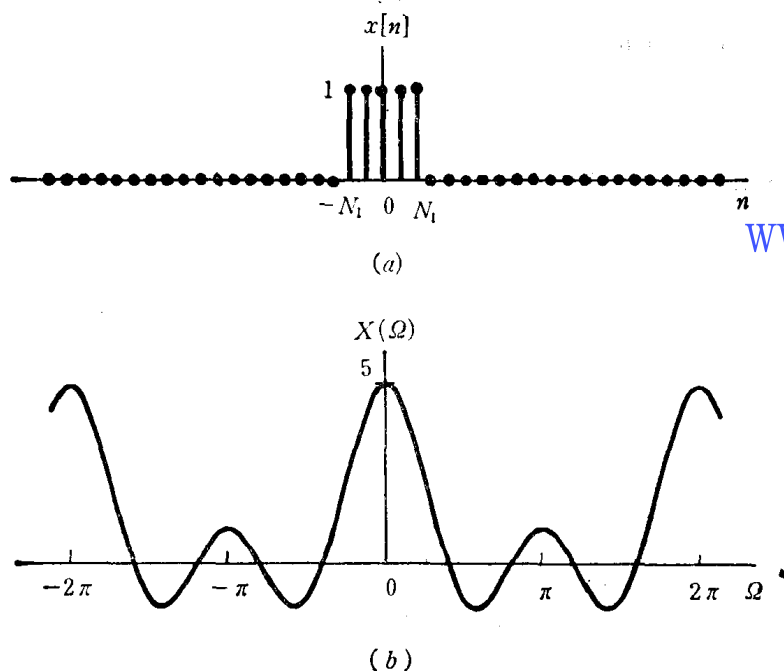


图5.13 (a)例5.7的矩形脉冲信号(当  $N_1 = 2$ ); (b)它的傅里叶变换

利用例5.3中用来获得式(5.28)的同样计算方法, 即可求得

$$X(\Omega) = \frac{\sin \Omega \left( N_1 + \frac{1}{2} \right)}{\sin(\Omega/2)} \quad (5.49)$$

图5.13(b)中描绘了  $N_1 = 2$  时的这一傅里叶变换。注意, 如上一节所提及的, 式(5.49)的函数是  $\sin c$  函数的离散时间对应形式, 它好像是连续时间矩形脉冲的傅里叶变换(参见例4.10)。这两种函数之间最重要的差别, 是式(5.49)中的函数像所有的离散时间傅里叶变换一样, 具有周期性, 其周期为  $2\pi$ 。

在上一节已看到, 对于周期序列的离散时间傅里叶级数表达式, 不存在收敛的问题, 因为综合方程(5.18)是有限项求和。类似地, 对于离散时间傅里叶变换综合方程(5.43), 由于其积分区间是有限的, 所以在这种情况下也不存在收敛的问题。这就是说, 如果用频率取在区间 $|\Omega| \leq W$  之内的复指数的积分

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (5.50)$$

来近似地表示一非周期信号  $x[n]$ , 那么,  $W = \pi$  时,  $\hat{x}[n] = x[n]$ 。因此, 与图5.7几乎一样, 我们认为不会出现像吉布斯现象那样的情况。这在下面的例子中加以说明。

**例5.8** 假定  $x[n]$  是一单位抽样

$$x[n] = \delta[n]$$

在此情况下, 利用分析方程式(5.44)很容易被求得

$$X(\Omega) = 1$$

这就正如连续时间情况一样, 单位冲激具有在所有频率上由相等分量组成的傅里叶变换表达式。因此, 当我们把式(5.50)应用于此例, 则得

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} \quad (5.51)$$

图5.14中画出了对应若干个 $W$ 值的此种信号。可以看出, 近似表示中的振荡频率随着 $W$ 增加而增加, 这就类似于在连续时间情况下所观察到的情形。另一方面, 与连续时间情况相反, 随着 $W$ 增加, 这些振荡幅度的减小与 $\hat{x}[0]$ 的大小有关, 而当 $W = \pi$ 时, 这些振荡就完全消失。

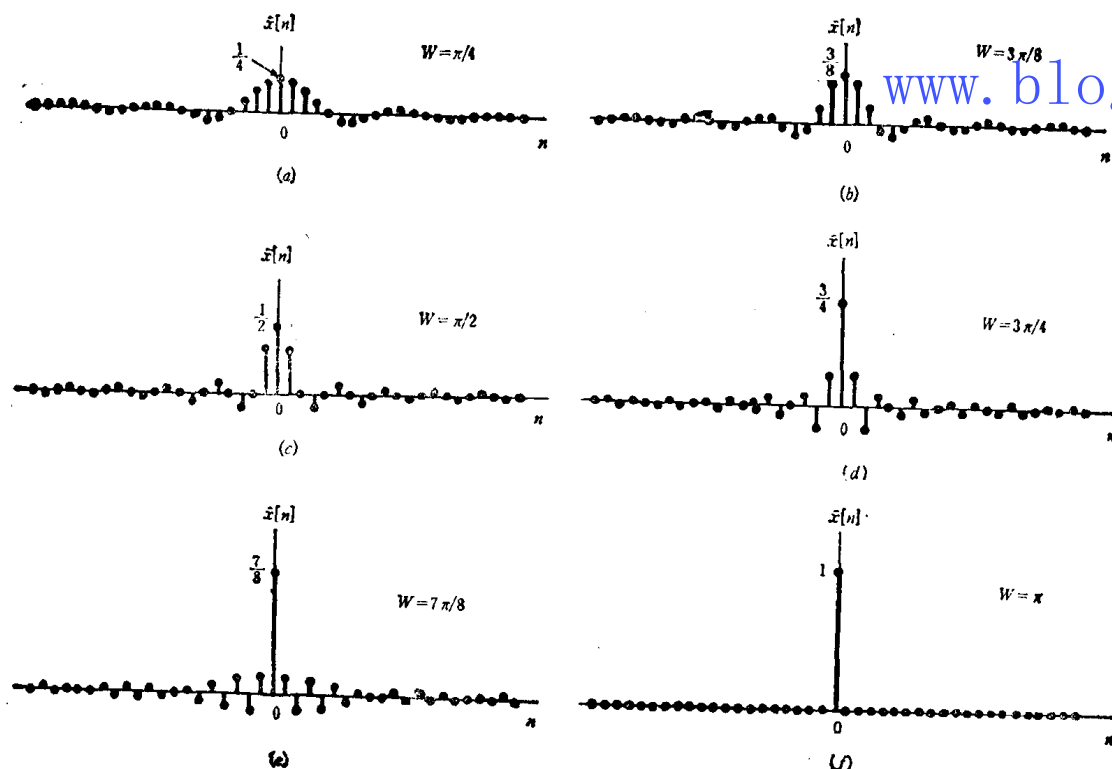


图5.14 近似于式(5.51)求得的单位抽样, 使用的复指数频率  $|\Omega| \leq W$ : (a)  $W = \pi/4$ ; (b)  $W = 3\pi/8$ ; (c)  $W = \pi/2$ ; (d)  $W = 3\pi/4$ ; (e)  $W = 7\pi/8$ ; (f)  $W = \pi$ 。注意:  $W = \pi$ 时,  $\hat{x}[n] = \delta[n]$

①原著中此式丢了  $d\Omega$ 。——译者注

## 5.4 周期信号和离散时间傅里叶变换

如同连续时间情况那样,周期信号的傅里叶级数表达式和非周期信号的傅里叶变换之间存在着一些非常重要的关系。在上一节,我们类似于4.4节的讨论,由周期为任意长的周期信号傅里叶级数特性的研究,导出了傅里叶变换。在本节中,按照4.5节的同样讨论方式,进一步导出两种表达式之间的关系。具体说,首先,讨论如何从周期序列一个周期的傅里叶变换,得到该序列的傅里叶级数的系数。其次,通过把周期信号的变换理解为频率中的一个冲激串,来证明如何能把周期信号的傅里叶级数表达式归并入傅里叶变换的范围之内。

### 5.4.1 傅里叶级数系数: 作为一个周期上傅里叶变换的抽样

假定  $\tilde{x}[n]$  是一周期为  $N$  的周期信号,同时假定  $x[n]$  表示  $\tilde{x}[n]$  的一个周期,即,

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & M \leq n \leq M+N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.52)$$

式中  $M$  是任意的。因此可通过直接计算证明

$$Na_k = X\left(k\frac{2\pi}{N}\right) \quad (5.53)$$

式中  $a_k$  是  $\tilde{x}[n]$  的傅里叶级数的系数,  $X(\Omega)$  是  $x[n]$  的傅里叶变换。因此,  $Na_k$  相当于一个周期的傅里叶变换的抽样值。应当注意,如同连续时间情况一样,无论对式(5.52)中的  $M$  进行什么样的选取,式(5.53)总是成立的。即,虽然可以料想  $x[n]$  会随着  $M$  的变化而显著地改变,并因此影响到  $X(\Omega)$ ,但是在抽样频率  $2\pi k/N$  上的  $X(\Omega)$  值却不取决于  $M$ 。

例5.9 对应例4.15中的周期冲激串的离散时间序列

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \quad (5.54)$$

如图5.15(a)所示。对于这个例子的傅里叶级数的系数,可直接根据式(5.19)计算:

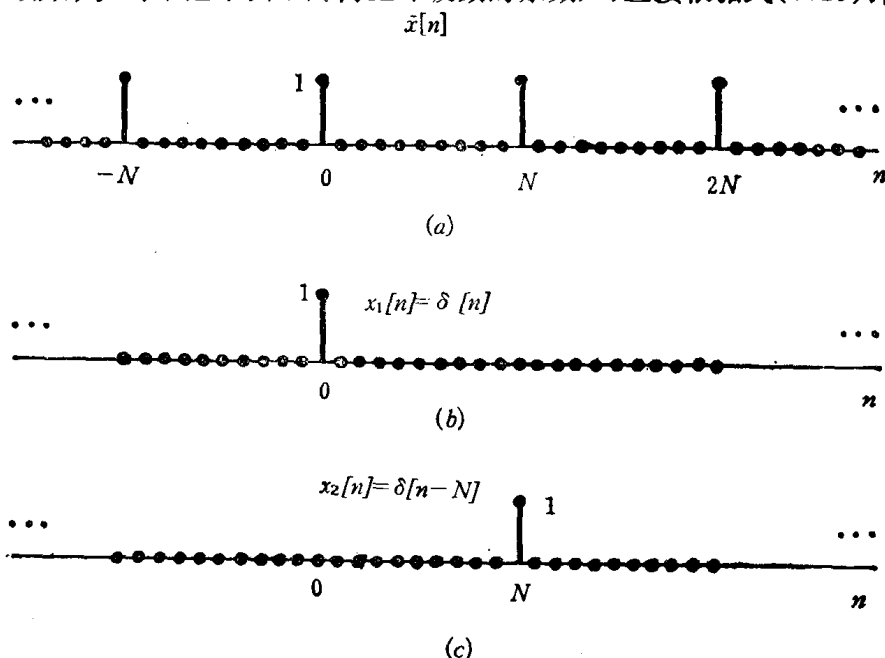


图5.15 (a)离散时间周期冲激串  $\tilde{x}[n]$ ; (b)、(c)两个非周期序列,在单一周期内它们都等于  $\tilde{x}[n]$

①原著式(5.54)中把  $\tilde{x}[n]$  误为  $x[n]$ 。——译者注

〔式(5.19)〕

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-(N)} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

选择求和区间为  $0 \leq n \leq N-1$ , 则有

$$a_k = \frac{1}{N} \quad (5.55)$$

如果我们把  $x_1[n]$  定义为式(5.52), 其中  $M=0$ , 那么, 有

$$x_1[n] = \delta[n]$$

它如图5.15(b)所示。该信号的傅里叶变换为

$$X_1(\Omega) = 1 \quad (5.56)$$

利用式(5.55)和(5.56), 即可看出式(5.53)是成立的。如果在式(5.52)中选择不同的  $M$  值, 比如说, 选取  $0 < M < N$ , 那么就可得到第二种信号

$$x_2[n] = \delta[n-N]$$

图5.15(c)描述了这一信号, 它的傅里叶变换为

$$X_2(\Omega) = e^{-j\Omega N} \quad (5.57)$$

它明显地不同于式(5.56)。然而, 在一组抽样频率 ( $\Omega = 2\pi k/N$ ) 上, 式(5.57)和(5.56)却是相同的, 这与我们以前的观察一致, 即式(5.53)是有效的, 不取决于  $M$  的选取。

#### 5.4.2 周期信号的傅里叶变换

现在我们转向周期信号的傅里叶变换表达式的分析。为了导出这一表达式, 研究信号

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \quad (5.58)$$

在连续时间情况下, 我们已知,  $e^{j\omega_0 t}$  的傅里叶变换是在  $\omega = \omega_0$  上的一个冲激。因此, 对于式(5.58)的离散时间信号的变换结果, 可以期望它具有与连续时间同样的变换形式。然而, 回顾离散时间傅里叶变换是  $\Omega$  的周期性函数, 其周期为  $2\pi$ , 并且它是下式的一个直接结果,

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n} \quad (5.59)$$

式中  $r$  是任一整数。因此, 以上的观察表明, 式(5.58)中  $x[n]$  的傅里叶变换必然在  $\Omega_0$ ,  $\Omega_0 \pm 2\pi$ ,  $\Omega_0 \pm 4\pi$  等点上具有冲激。事实上,  $x[n]$  的傅里叶变换具有如下冲激串

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) \quad (5.60)$$

图5.16描述了这个冲激串。为了验证这一表达式的有效性, 必须求式(5.60)的逆变换。将

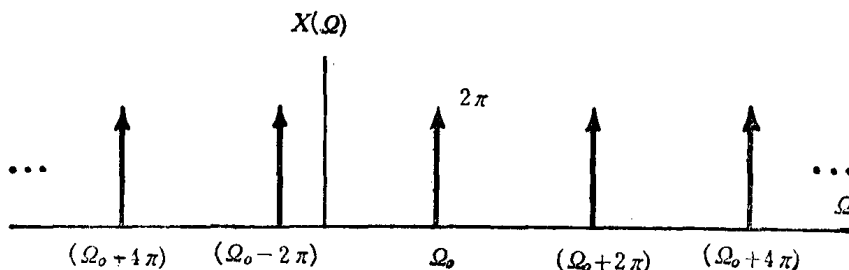


图5.16  $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$  ① 的傅里叶变换

式(5.60)代入综合方程(5.43), 则得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) e^{j\Omega n} d\Omega$$

①原著中误为  $e^{j\Omega_0 n}$ 。——译者注

注意, 在长度为  $2\pi$  的任何区间内正好包含求和公式(5.60)中的一个冲激。因此, 如果选择积分区间使其包含的冲激位于  $\Omega_0 + 2\pi r$  的点上, 那么就得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\Omega_0 n}$$

更一般地, 如果  $x[n]$  是任意的一组复指数之和, 即,

$$x[n] = b_1 e^{j\Omega_1 n} + b_2 e^{j\Omega_2 n} + \dots + b_M e^{j\Omega_M n} \quad (5.61)$$

那么它的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(\Omega) = & b_1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi l) + b_2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_2 - 2\pi l) \\ & + \dots + b_M \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_M - 2\pi l) \end{aligned} \quad (5.62)$$

即,  $X(\Omega)$  是一周期冲激串, 其所有冲激位于每个复指数的频率  $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_M$  上, 以及这些频率的  $2\pi$  倍的所有点上。因此, 任何长度为  $2\pi$  的区间内, 都确实包含着式(5.62)右边每一个求和式中的一个冲激。

应该指出, 式(5.60)是式(5.58)所给信号的傅里叶变换, 不管该信号是否具有周期性, 也就是说, 不管  $\Omega_0$  是否具有  $2\pi m/N$  的形式 ( $m$  和  $N$  是某些整数)。类似地, 式(5.61)中仅当所有的  $\Omega_i$  都具有这种形式 (对每一个  $\Omega_i$ , 可能具有不同的  $m$  值) 时,  $x[n]$  才是周期性的, 其周期为  $N$ 。尤其是, 假定  $x[n]$  是周期性的, 周期为  $N$ , 并且具有傅里叶级数表达式

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.63)$$

如果选择式(5.63)的求和区间为  $k=0, 1, \dots, N-1$ , 那么,

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j(2\pi/N)n} + a_2 e^{j2(2\pi/N)n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)(2\pi/N)n} \quad (5.64)$$

即  $x[n]$  具有式(5.61)所给出的形式, 其

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{2\pi}{N}, \quad \Omega_3 = 2\left(\frac{2\pi}{N}\right), \quad \dots, \quad \Omega_N = (N-1)\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

因此, 从式(5.62)可知, 式(5.63)中  $x[n]$  的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(\Omega) = & a_0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - 2\pi l) + a_1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi l\right) \\ & + \dots + a_{N-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta\left(\Omega - (N-1)\frac{2\pi}{N} - 2\pi l\right) \end{aligned} \quad (5.65)$$

图5.17说明了上述情况。图5.17(a)描述了式(5.65)右边第一个求和式, 图中应用了傅里叶级数的系数具有周期性这一事实, 记作  $2\pi a_0 = 2\pi a_N = 2\pi a_{-N}$ 。图5.17(b)说明了式(5.65)①的第二个求和式, 图5.17(c)描述了最末一个求和式。最后, 图5.17(d)描述了整个  $X(\Omega)$  表达式。注意, 由于  $a_k$  的周期性, 所以  $X(\Omega)$  可看做出现在基本频率  $2\pi/N$  的整倍数上的一组冲激串, 位于  $\Omega = 2\pi k/N$  上的冲激面积为  $2\pi a_k$ 。这就是说, 周期信号傅里叶变换的另一种更方便形式为

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (5.66)$$

①原著中误为式(5.63)。——译者注

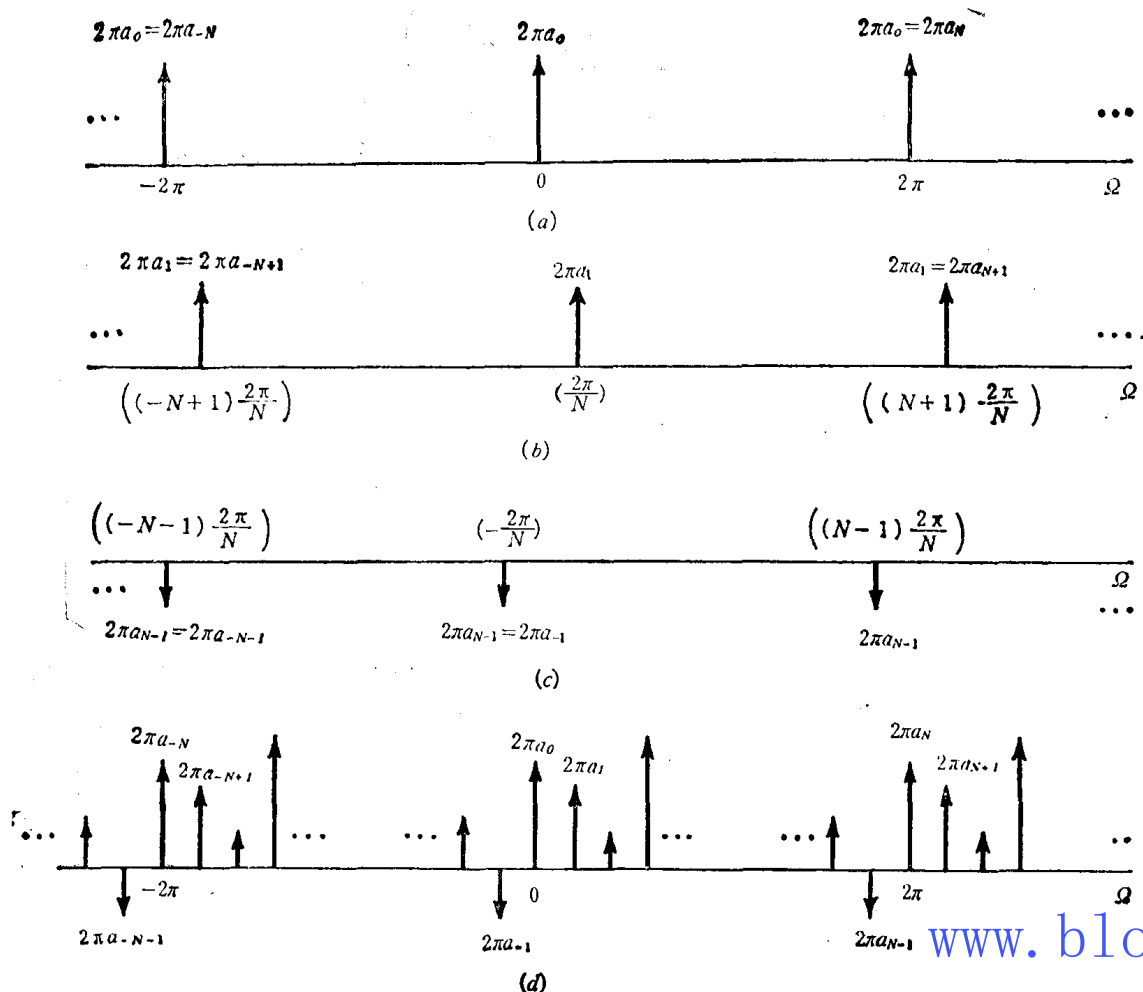


图5.17 离散时间周期信号的傅里叶变换<sup>①</sup>

### 例5.10 分析信号

$$x[n] = \cos \Omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n} \quad (5.67)$$

根据式(5.62)，可以立即写出

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \{ \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l) \} \quad (5.68)$$

如图5.18所示。这个例子在第7章讨论离散时间调制时将很有价值。

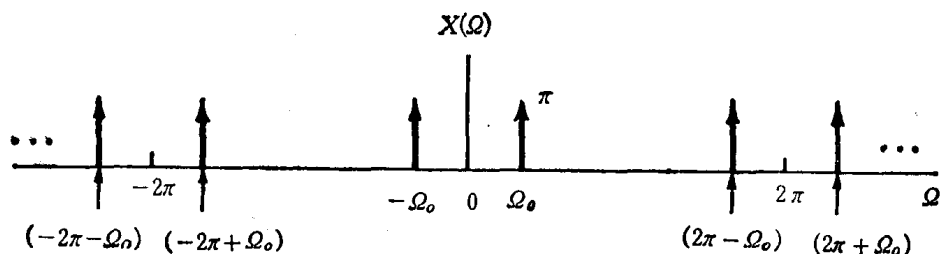


图5.18  $x[n] = \cos \Omega_0 n$  的离散时间傅里叶变换

例5.11 再次研究式(5.54)给出的周期冲激串。利用式(5.55)和(5.56)，可以算出该信号的傅里叶变换为

<sup>①</sup>原著中图5.17(c)中最左边一个冲激序列位置有误。——译者注

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (5.69)$$

它表示于图5.19中。比较图5.15和图5.19，可看到时域和频域之间相反关系的另一个例子。即当时域中冲激之间的间隔（即周期）变长时，频域（基本频率）中冲激之间的间隔就变小。

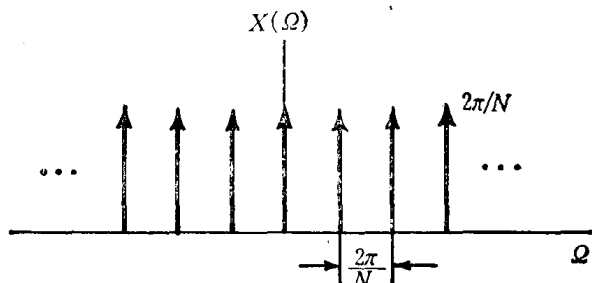


图5.19 离散时间周期冲激串的傅里叶变换

### 5.4.3 离散傅里叶变换 DFT

在本章引言中，我们曾经指出，在信号与系统的分析和综合中，离散时间方法的应用得到极大发展的原因之一，是由于实现离散时间序列傅里叶分析的高效算法的发展。这些方法的核心，是一种与我们在本节和前一节已经描述和使用过的那些概念密切有关的技术，并且该技术相当理想地适用于数字计算机或数字硬件实现。这种技术就是有限时宽信号的离散傅里叶变换(DFT)<sup>①</sup>。虽然在本书中不打算花费大量时间讨论或应用DFT，但它是足够重要的，并且根据我们已经谈及的某些基本论述，就可相当容易地把它推导出来。

假定  $x[n]$  是一个有限时宽信号，即，存在一个整数  $N_1$ ，使得

$$x[n] = 0, \text{ 在 } 0 \leq n \leq N_1 - 1 \text{ 间隔之外}$$

和我们在前一节讨论的几乎一样，可以构成一个周期信号  $\tilde{x}[n]$ ，它在一个周期内等于  $x[n]$ 。

具体说，给定整数  $N \geq N_1$ ，同时设  $\tilde{x}[n]$  是周期性的，其周期为  $N$ ，这样

$$\tilde{x}[n] = x[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5.70)$$

$\tilde{x}[n]$  的傅里叶级数的系数为

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

选取求和区间，使得在这个区间内， $\tilde{x}[n] = x[n]$ ，于是得到

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.71)$$

由式(5.71)<sup>②</sup>定义的一组系数构成了  $x[n]$  的DFT。具体说， $x[n]$  的DFT通常用  $\tilde{X}(k)$  表示，并定义为

$$\tilde{X}(k) = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (5.72a)$$

<sup>①</sup>不应把DFT与本书中已经并将进一步讨论的离散时间傅里叶变换相混淆。为了避免可能的混淆，在本节和5.6节的末尾，以及本章末尾的若干习题中，凡是讨论到离散傅里叶变换时，我们将只用其英文开头的第一个字母缩写，并称为DFT。

<sup>②</sup>原著中误为式(5.70)。——译者注



DFT 的重要性起因于如下几个事实。首先要注意的是,原始的有限时宽信号可以从它的 DFT 恢复得到。具体说,关于  $\tilde{x}[n]$  的傅里叶级数表达式的综合方程式(5.18)使我们能根据  $a_k$  计算  $\tilde{x}[n]$ 。因此,利用式(5.70)和(5.72a)就可得到

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (5.72b)$$

于是,有限时宽信号或者可以设想用它所假定的一组有限的非零值表示,或者用其 DFT 的一组  $\tilde{X}(k)$  有限值来表示。DFT 的第二个重要的特点是,对它的计算来说,有一种称做快速傅里叶变换(FFT)的相当快的算法(参看习题5.11中对于这种极重要算法的介绍)。此外,由于它与离散时间傅里叶级数和傅里叶变换的密切关系,DFT 保留了它们的某些重要性质<sup>①</sup>。如我们在5.6节中就要看到的,这些性质之一与 FFT 一起,提供了一种计算两个有限时宽序列的卷积的非常有效的算法。最后,要注意的是,只要  $N$  选择得比  $x[n]$  的时宽大,那么式(5.72)中的  $N$  的选择是可变的。由于这些原因,式(5.72a)中  $\tilde{X}(k)$  常常称为  $N$  点的 DFT,以明确式(5.72a)的求和长度。如习题5.11中所讨论的那样,计算效率可通过合理选择  $N$  得到,例如,通常把  $N$  选为 2 的幂。

## 5.5 离散时间傅里叶变换的性质

如同连续时间傅里叶变换情况一样,离散时间傅里叶变换也具有各种性质。它们不仅为变换提供了更深入地理解,而且在简化变换和逆变换计算的复杂性方面常常是有效的。在本节和以下各节中,要研究许多这方面的性质,如我们将要看到的那样,它们与连续时间情况有许多明显的类似点和若干差别。当一种性质的推导和解释与连续时间情况相同时,我们将只简单地陈述一下。如同4.6节中一样,我们把注意力主要集中于傅里叶变换。然而,由于傅里叶变换与傅里叶级数之间的密切关系,许多傅里叶变换的性质也会直接转换为傅里叶级数的性质。在5.8节,我们总结了傅里叶变换与傅里叶级数的性质,并且还提供了某些基本信号的傅里叶变换和傅里叶级数表达式的一览表,这些信号我们已经遇到并在以后章节中将会发现它们很有用。此外,在5.9节中,提供了连续时间和离散时间傅里叶变换和傅里叶级数对偶性质的概述,如我们将要看到的,在这些表达式之间有明显的对称性。在以下讨论中,采用类似于4.6节使用过的符号将是方便的,即,

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= F\{x[n]\} \\ x[n] &= F^{-1}\{X(\Omega)\} \\ x[n] &\xleftrightarrow{F} X(\Omega) \end{aligned}$$

### 5.5.1 离散时间傅里叶变换的周期性

如5.3节所讨论,傅里叶变换对于  $\Omega$  总是具有周期为  $2\pi$  的周期性。这正好与连续时间傅里叶变换相反。

### 5.5.2 傅里叶变换的线性

如果

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(\Omega)$$

<sup>①</sup>参阅书末参考书目中列出的有关数字信号处理教科书中的关于 DFT 及其性质以及 FFT 的详细讨论。

和

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(\Omega)$$

则

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{F} aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega) \quad (5.73)$$

### 5.5.3 傅里叶变换的对称性

如果  $x[n]$  是实数序列, 则

$$X(\Omega) = X^*(\Omega) \quad \{x[n] \text{ 实数}\} \quad (5.74)$$

由此可见,  $\text{Re}\{X(\Omega)\}$  是  $\Omega$  的偶函数,  $\text{Im}\{X(\Omega)\}$  是  $\Omega$  的奇函数。类似地,  $X(\Omega)$  的幅度是偶函数, 而  $X(\Omega)$  的相角是奇函数。此外,

$$\text{E}_v\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} \text{Re}\{X(\Omega)\}$$

和

$$\text{O}_d\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} j\text{Im}\{X(\Omega)\}$$

式中  $\text{E}_v$  和  $\text{O}_d$  分别表示  $x[n]$  的偶部和奇部。例如, 如果  $x[n]$  是实偶数, 那么它的傅里叶变换也是实偶数。例5.6以  $x[n] = a^{|n|}$  说明了这一情况。

### 5.5.4 时移和频移

如果

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$$

则

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \quad (5.75)$$

和

$$e^{j\Omega n_0} x[n] \xleftrightarrow{F} X(\Omega - \Omega_0) \quad (5.76)$$

式(5.75)可以通过把  $x[n - n_0]$  直接代入分析方程(5.44)得到, 而式(5.76)则可通过把  $X(\Omega - \Omega_0)$  代入综合方程(5.43)导出。

### 5.5.5 差分与求和

在这一小节, 我们研究积分的离散时间对应物, 即求和以及它的逆运算, 一阶差分。设  $x[n]$  是具有傅里叶变换  $X(\Omega)$  的信号, 那么根据线性和时间移位性质, 就可得到一阶差分信号  $x[n] - x[n-1]$  的傅里叶变换对为

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) \quad (5.77)$$

其次研究信号

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$$

由于  $y[n] - y[n-1] = x[n]$ , 可以断定,  $y[n]$  的变换可能与  $x[n]$  的变换除以  $(1 - e^{-j\Omega})$  有关。但这只是部分地正确, 如同式(4.88)给出的连续时间积分性质那样, 实际上, 它们之间存在着更复杂的关系。准确的关系应为

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \quad (5.78)$$

式(5.78)右边的冲激串, 表示由求和所引起的直流或平均分量。式(5.78)的一个重要例子是  $x[n] = \delta[n]$  时的情况。从例5.8已知  $X(\Omega) = 1$ , 从而式(5.78)得出

$$u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \quad (5.79)$$

式(5.78)和(5.79)的推导类似于4.6节中积分性质的推导, 在习题5.22中将导出这两个公式。

### 5.5.6 时间和频率尺度变换

由于离散时间信号时标的离散性, 所以时间和频率尺度变换会导致离散时间信号与其连续时间的对应信号具有稍微不同的形式。假定  $x[n]$  是一具有频谱  $X(\Omega)$  的信号。首先让我们研究  $y(n) = x[-x]$  的变换  $Y(\Omega)$ 。根据式(5.44),

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{-j\Omega n} \quad (5.80)$$

将  $m = -n$  代入式(5.80), 则得

$$Y(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{-j(-\Omega)m} = X(-\Omega) \quad (5.81)$$

即,

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(-\Omega) \quad (5.82)$$

www.blogoil.com

虽然式(5.82)类似于连续时间情况, 但是当我们试图变换时间和频率尺度而不是简单地反转时间轴时, 就出现了差别。具体说, 在4.6.5小节中, 我们曾导出过连续时间的变换性质为

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (5.83)$$

但是, 如果我们试图定义信号  $x[an]$ , 若  $a$  又不是一个整数时, 将会遇到困难。所以, 我们不能通过选择  $a < 1$  的办法来减慢信号的变化率。另一方面, 如果假定  $a$  是一整数, 例如, 假定信号为  $x[2n]$ , 那么也不能加快原来信号的变化率。即, 由于  $n$  只能具有整数, 所以信号  $x[2n]$  实际上仅由  $x[n]$  的偶数抽样值构成。

下面介绍一种完全类似于式(5.83)的结果。假定  $k$  是一正整数, 并且定义信号

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right], & n \text{ 是 } k \text{ 的倍数} \\ 0, & n \text{ 不是 } k \text{ 的倍数} \end{cases} \quad (5.84)$$

当  $k=3$  时, 如图5.20所示, 通过在原来信号连续值之间插入  $k-1$  个零值, 即可由  $x[n]$  获得  $x_{(k)}[n]$ 。直观地看, 可以把  $x_{(k)}[n]$  看做  $x[n]$  的降低变化率的形式, 如果要计算  $x_{(k)}[n]$  的傅里叶变换, 那么借助式(5.84)即可得到

$$\begin{aligned}
 X_{(k)}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\Omega rk} \\
 &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(k\Omega)r} = X(k\Omega)
 \end{aligned}$$

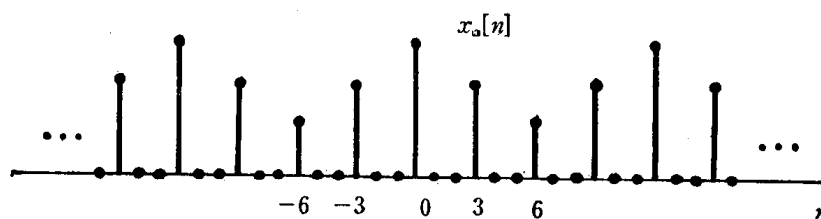
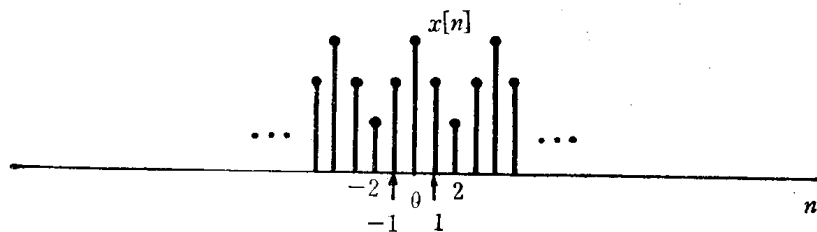


图5.20 通过在原来信号  $x[n]$  的连续值之间插入两个零获得的信号  $x_a[n]$

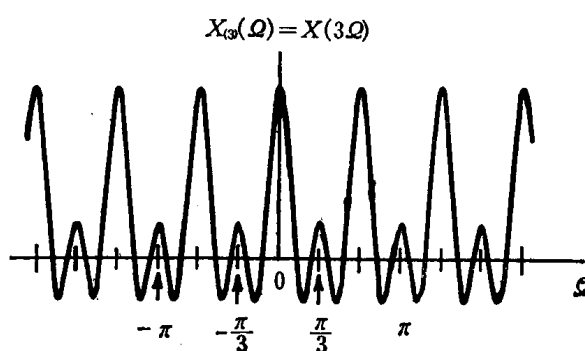
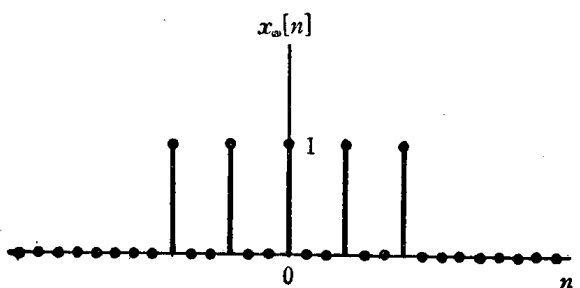
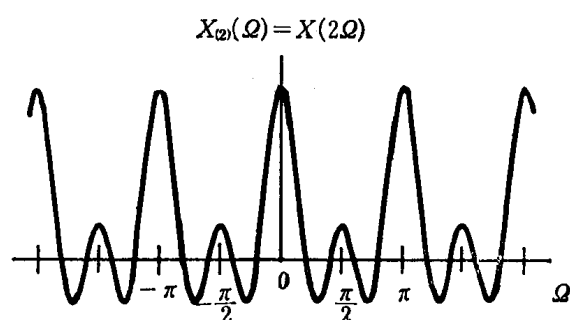
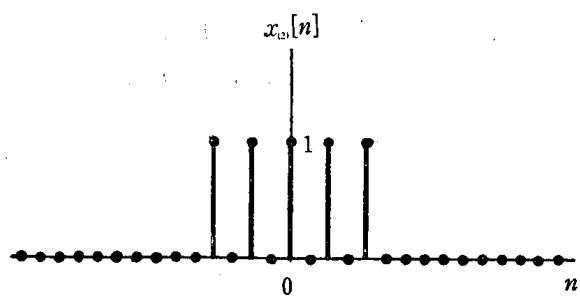
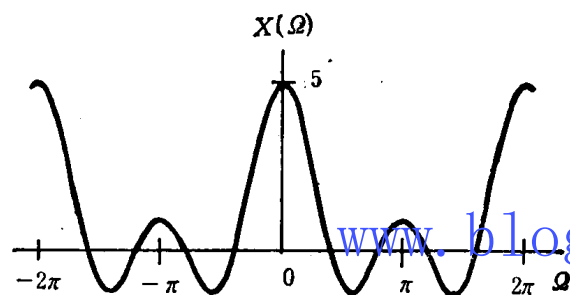
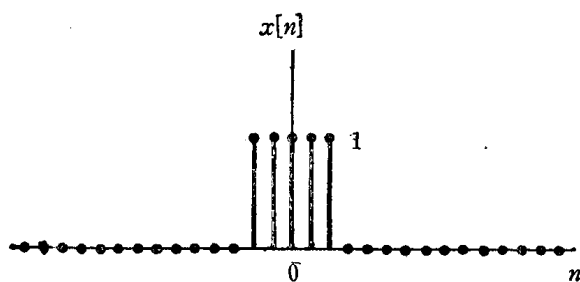


图5.21 时域和频域间的相反关系：随着  $k$  增加， $x_{(k)}[n]$  展开，而其傅里叶变换被压缩

即,

$$\boxed{x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{F} X(k\Omega)} \quad (5.85)$$

注意, 式(5.85)再一次指出了时间和频率间的相反关系。当通过取  $k>1$  使信号展开并在时间上降低变化率时, 其傅里叶变换受到压缩。例如, 因为信号  $X(\Omega)$  具有周期为  $2\pi$  的周期性, 所以  $X(k\Omega)$  具有周期为  $2\pi/|k|$  的周期性。在图5.21中, 用矩形脉冲的例子说明了这个性质。

### 5.5.7 频率微分

再次假定

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$$

如果利用分析方程(5.44)中  $X(\Omega)$  的定义, 并对两边进行微分, 即得

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jnx[n]e^{-j\Omega n}$$

这个方程的右边无非是  $-jnx[n]$  的傅里叶变换。因此, 方程两边乘以  $j$ , 即可看出

$$\boxed{nx[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}} \quad (5.86)$$

### 5.5.8 帕斯维尔关系式

如果  $x[n]$  和  $X(\Omega)$  是傅里叶变换对, 则

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega} \quad (5.87)$$

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

注意, 此式类似于式(4.110), 并可按类似方法进行推导。与连续时间情况相类似, 式(5.87)的左边称为  $x[n]$  的能量, 而  $|X(\Omega)|^2$  称为能量密度谱。因为周期序列的能量是无穷大的, 所以式(5.87)在这种情况下并不实用。对于周期信号, 可以导出一种类似于式(4.111)的帕斯维尔关系式, 它建立了一个周期内的序列能量与傅里叶级数系数能量之间的关系。具体为

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2} \quad (5.88)$$

在以下几节中, 还要研究另外几种性质, 其中头两个性质是卷积性质和调制性质, 它们类似于4.7节和4.8节所讨论的这些性质。第三种性质是5.9节中将要讨论的对偶性, 在那里不仅要研究离散时域的对偶性, 而且还要研究连续时域和离散时域之间存在的对偶性。

## 5.6 卷积性质

在4.7节中, 曾经讨论过傅里叶变换的重要意义, 论述了它在卷积运算中的作用以及在研究LTI系统时的应用。同样的结论也可用于离散时间情况, 由于这个原因, 我们会发现, 离散时间傅里叶变换在离散时间LTI系统的研究中同样具有重要的价值。具体说, 如果  $x[n]$ 、 $h[n]$  和  $y[n]$  分别为LTI系统的输入、冲激响应和输出, 则有