Chapter 2-2.
线性时不变(LTI)系统
——卷积的性质

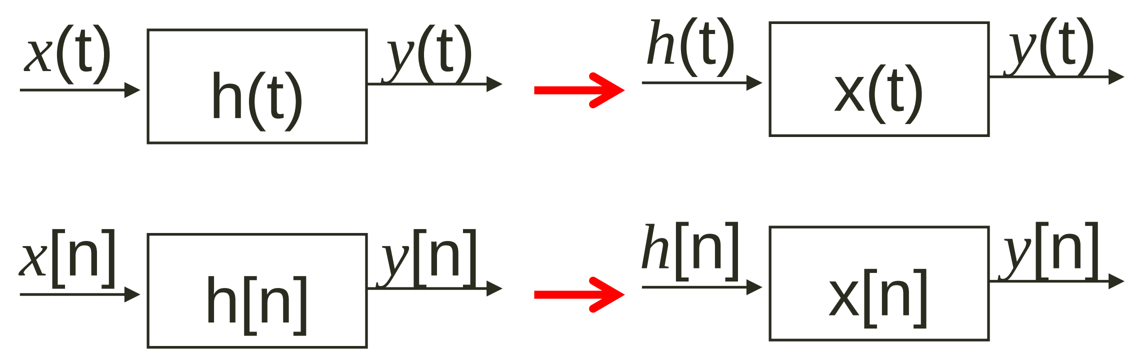
LTI系统的性质

交换律性质

在系统互联中的解释

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$



证明　　变量替代法

离散

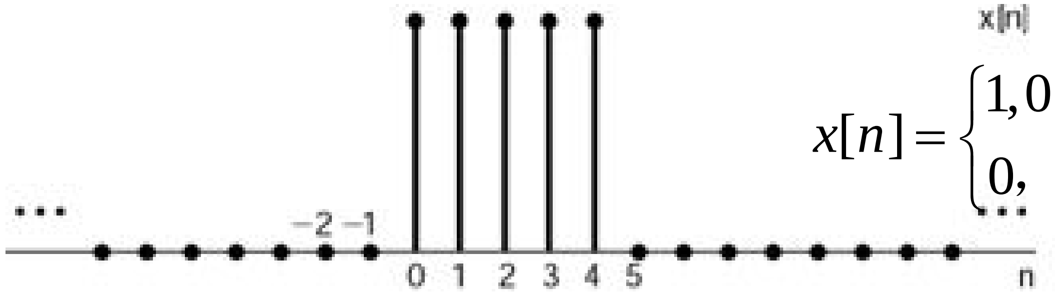
$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]\overset{令l=n-k}{=}\sum_{l=+\infty}^{-\infty}x[n-l]h[l]$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}x[n-l]h[l]=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}h[l]x[n-l]=h[n]*x[n]$$

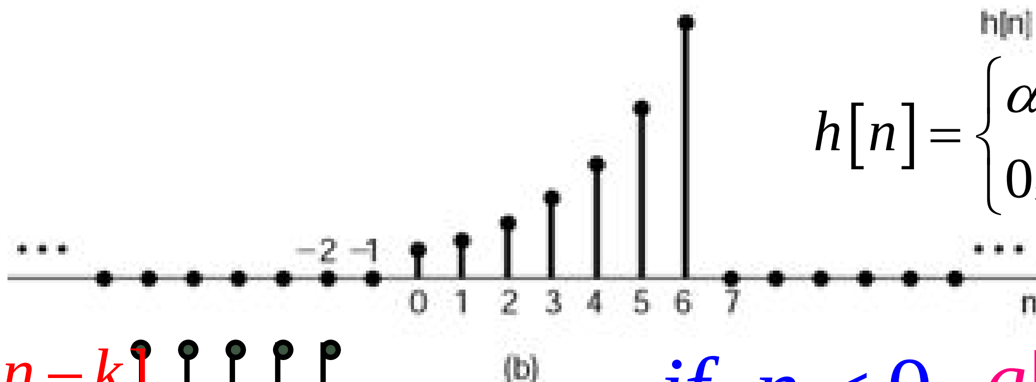
连续：原理一致，略。

LTI系统的性质

交换律性质 $x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

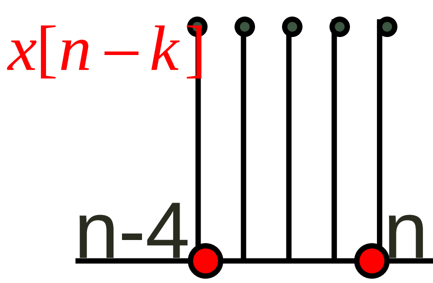


$$x[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le 4\\ 0, \quad otherwise\end{cases}$$



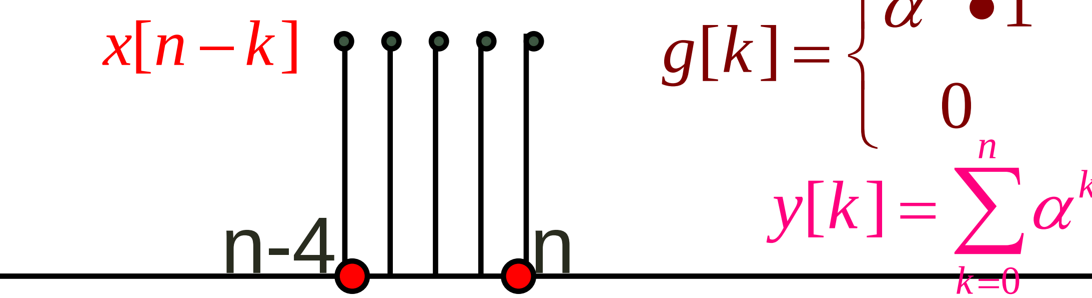
$$h[n]=\begin{cases}\alpha^n, \quad 0\le n<6\\ 0, \quad otherwise\end{cases}$$

$$y[n]=\begin{cases}0 & \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0\le n\le 4\\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 4<n\le 6\\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha} & 6<n\le 10\\ 0 & n>10\end{cases}$$



$if \quad n<0 \quad g[k]=0, y[k]=0$

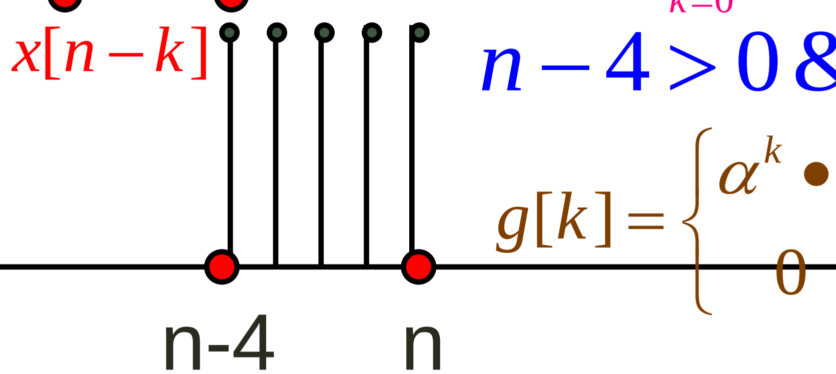
$if \quad n-4\le 0 \,\&\, n\ge 0$



$$g[k]=\begin{cases}\alpha^k \bullet 1 & 0\le k\le n\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$y[k]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k$$

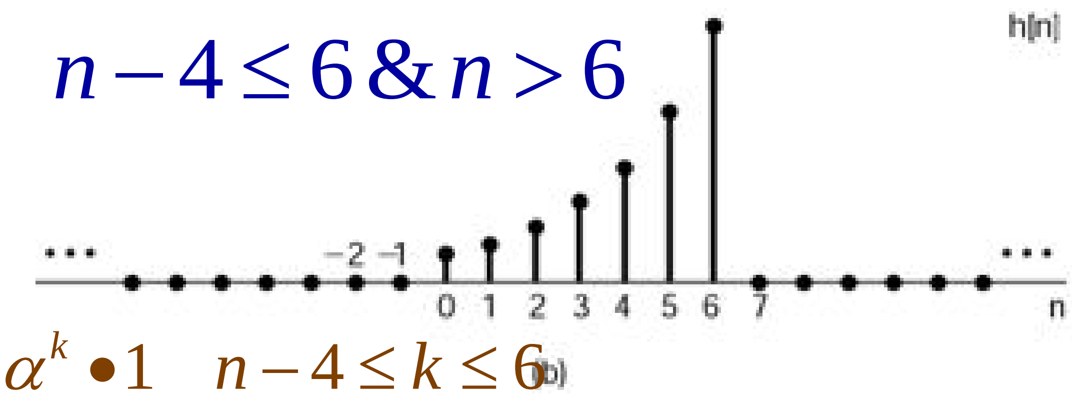
$n-4>0 \,\&\, n\le 6$



$$g[k]=\begin{cases}\alpha^k \bullet 1 & n-4\le k\le n\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

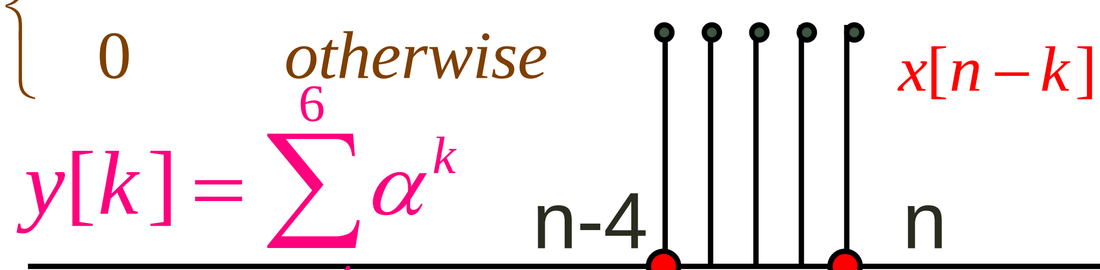
$$y[k]=\sum_{n-4}^{n}\alpha^k$$

$n-4\le 6 \,\&\, n>6$



$$g[k]=\begin{cases}\alpha^k \bullet 1 & n-4\le k\le 6\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$y[k]=\sum_{n-4}^{6}\alpha^k$$



LTI系统的性质

分配律性质

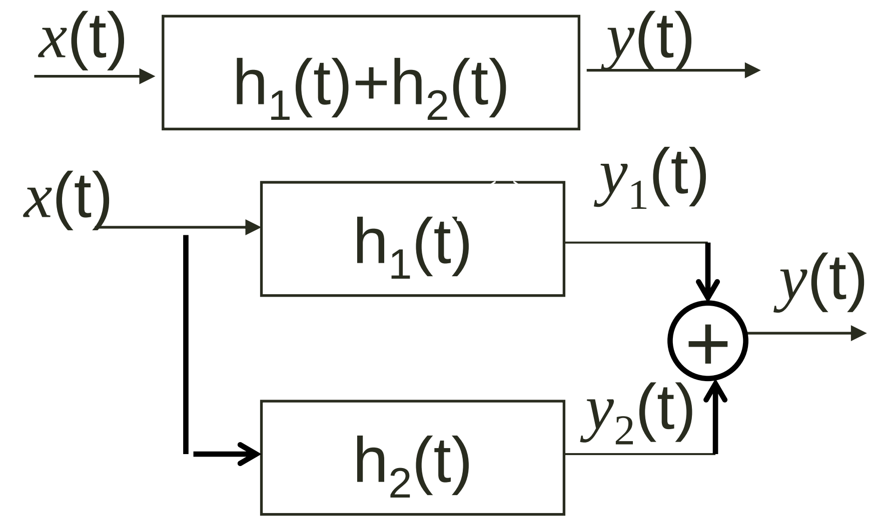
在系统互联中的解释

$$x(t)*(h_1(t)+h_2(t))=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

$$(x_1(t)+x_2(t))*h(t)=x_1(t)*h(t)+x_2(t)*h(t)$$

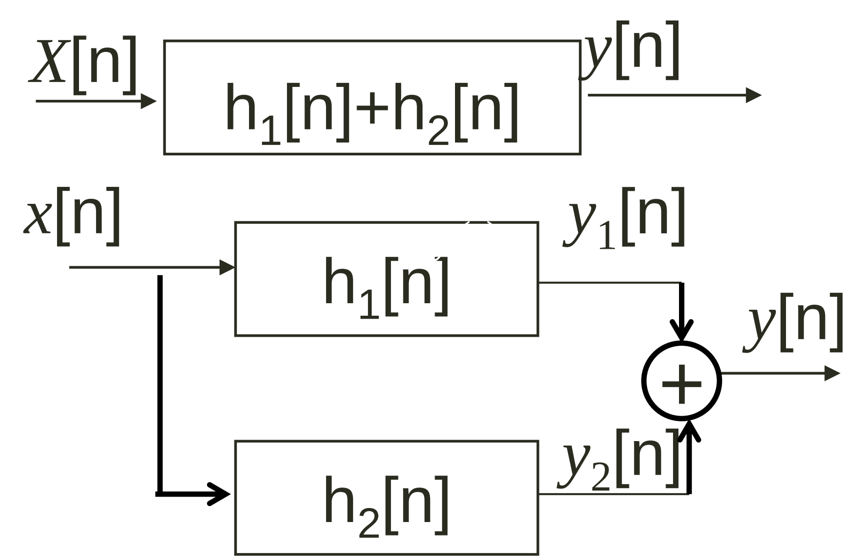
$$(x_1[n]+x_2[n])*h[n]=x_1[n]*h[n]+x_2[n]*h[n]$$



应用: 将复杂卷积分解成几个简单卷积之和。

$$y_1[n]=x_1[n]*h[n] \quad y_2[n]=x_2[n]*h[n]$$

$$y[n]=y_1[n]+y_2[n]$$



$$y_1[n]=x[n]*h_1[n] \quad y_2[n]=x[n]*h_2[n]$$

$$y[n]=y_1[n]+y_2[n]$$

LTI系统的并联可用一个单一的LTI系统代替，该系统的单位冲激/脉冲响应就是并联结构中各单位冲激/脉冲影响之和。

LTI系统的性质

分配律性质

$$x(t)*(h_1(t)+h_2(t))=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

应用：将复杂的卷积分解成几个简单的卷积之和。

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+2^n u[-n] \longrightarrow x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad x_2[n]=2^n u[-n]$$

$$h[n]=u[n]$$

$$y_1[n]=x_1[n]*h[n] \qquad y_2[n]=x_2[n]*h[n] \qquad y[n]=y_1[n]+y_2[n]$$

$x_1[n]=a^n u[n]$ ↓ 例2.3 ↓ 例2.5

$$y_1[n]=\begin{cases}\frac{1-a^{n+1}}{1-a} & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases} \qquad y_2[n]=\begin{cases}2^{n+1} & n\leq 0\\ 2 & n>0\end{cases}$$

↓ (a=1/2)

$$y_1[n]=\begin{cases}0 & n<\mathbf{0}\\ 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n & n\geq\mathbf{0}\end{cases} \qquad y[n]=\begin{cases}2^{n+1} & n<0\\ 4-\left(\frac{1}{2}\right)^n & n\geq 0\end{cases}$$

LTI系统的性质

结合律性质

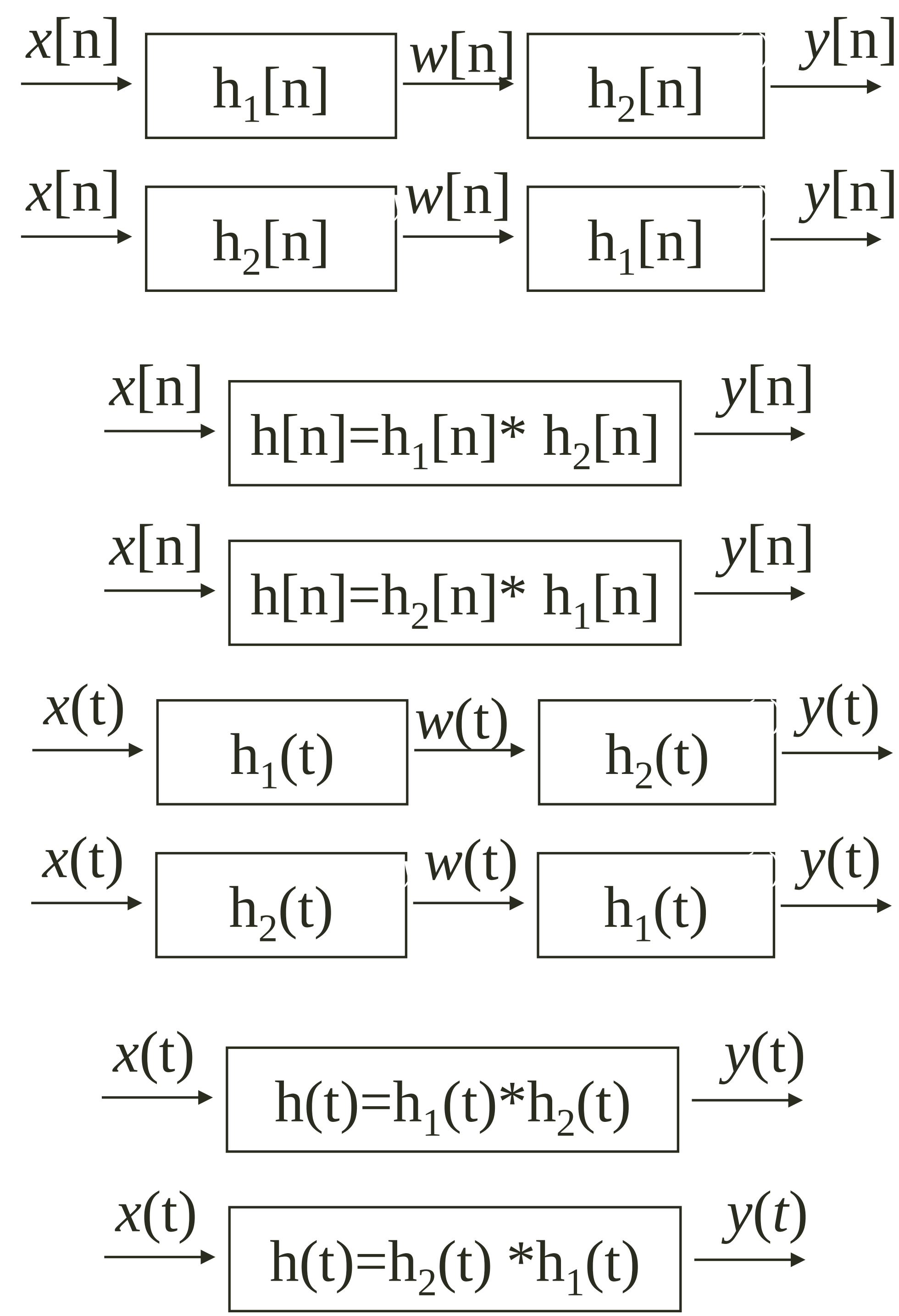
在系统互联中的解释

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$$

$$(x(t)*h_1(t))*h_2(t)=x(t)*(h_1(t)*h_2(t))$$

证明 按照交换求和/积分顺序以及变换替换进行证明，证明过程从略。

LTI系统级联后的单位冲激/脉冲响应是各个子系统响应的卷积，与级联次序无关，即级联次序可交换。



LTI系统的性质

与移位脉冲/冲激信号的卷积

对于LTI系统，信号与移位冲激或脉冲的卷积就是该信号的移位。

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$$

$$x[n]*\delta[n]=x[n]$$

证明

基本题2.7 (a)

$$x[n]*\delta[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-n_0-k] \overset{\text{仅当}k=n-n_0\text{时}\ \delta(n-n_0-k)\text{有值}}{=} x[n-n_0]$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau \overset{\text{仅当}h(\tau=t-t_0)\text{时}\ \mathrm{h}(t-t_0-\tau)\text{有值}}{=} x(t-t_0)$$

LTI系统的性质

级联系统的时移特性 对于LTI级联系统，其时移是累加的。

若$h_1(t)*h_2(t)=h(t)$，则$h_1(t-t_1)*h_1(t-t_2)=h(t-t_1-t_2)$

若$h_1[n]*h_2[n]=h[n]$，则$h_1[n-n_1]*h_2[n-n_2]=h[n-n_1-n_2]$

若$x(t)*h_1(t)*h_2(t)=y(t)$，则$x(t)*h_1(t-t_1)*h_1(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$

若$x[n]*h_1[n]*h_2[n]=y[n]$，则$x[n]*h_1[n-n_1]*h_2[n-n_2]=y[n-n_1-n_2]$

证明 离散为例 记$h[n]=h_1[n]*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_1[k]h_2[n-k]$

$$h_1[n-n_1]*h_2[n-n_2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_1[k-n_1]h_2[n-n_2-k]\overset{令k-n_1=m}{=}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h_1[m]h_2[n-n_2-n_1-m]$$

$$=h[n-n_1-n_2]$$

$$\because x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]\longrightarrow h[n-n_1-n_2]=h[n]*\delta[n-n_1-n_2]$$

$$\therefore x[n]*h[n-n_1-n_2]=x[n]*h[n]*\delta[n-n_1-n_2]=y[n]*\delta[n-n_1-n_2]=y[n-n_1-n_2]$$

2.16（b）

LTI系统的性质

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

有记忆和无记忆性

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

无记忆系统 系统输出只与当前时刻的输入信号有关，与其它时刻无关。

无记忆LTI系统 对于离散LTI系统，若当 $n\neq 0$时, $h[n]=0$，则该系统是无记忆的。

$$h[n]=K\delta[n] \longrightarrow y[n]=Kx[n]$$

对于一个连续LTI系统，若当$n\neq 0$时, $h(t)=0$ ，则该系统是无记忆的。

$$h(t)=K\delta(t) \longrightarrow y(t)=Kx(t)$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \xrightarrow{\text{无记忆}} y[n]=Kx[n]$$

$$\downarrow$$

$$h[n-k]=0, k\neq n, h[n-n]\neq 0, k=n$$

$$h[n]=K\delta[n] \longleftarrow h[n]=0, k\neq n, h[n]\neq 0, k=n$$

LTI系统的性质

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

有记忆和无记忆性

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

无记忆系统 系统输出只与当前时刻的输入信号有关，与其它时刻无关。

无记忆LTI系统 对于离散**LTI**系统，若当 $n\neq 0$时,$h[n]=0$，则该系统是无记忆的。

$$h[n]=K\delta[n]\longrightarrow y[n]=Kx[n]$$

对于一个连续**LTI**系统，若当$n\neq 0$时,$h(t)=0$，则该系统是无记忆的。

$$h(t)=K\delta(t)\longrightarrow y(t)=Kx(t)$$

当K=1时，输入等于输出

$$y[n]=x[n]*\delta[n]=x[n]$$

$$y(t)=x(t)*\delta(t)=x(t)$$

单位冲激/脉冲函数的筛选性质

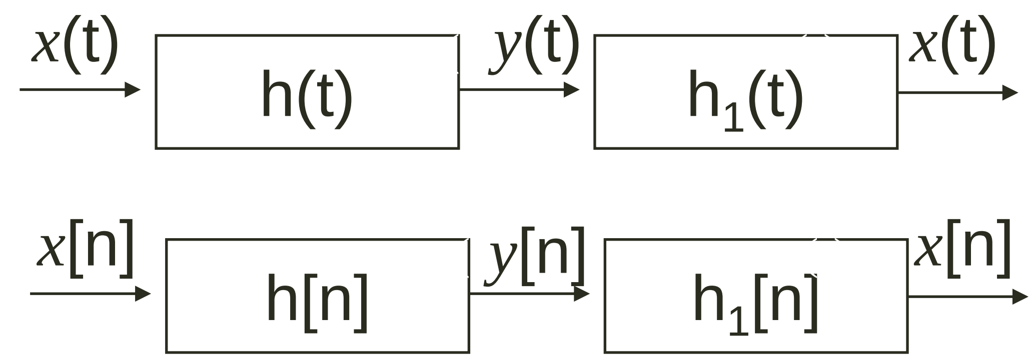
有记忆LTI系统

对于一个离散**LTI**系统若当$n\neq 0$时,$h[n]$不全为**0**，则该系统是有记忆的。

对于一个连续**LTI**系统若当 $t\neq 0$时,$h(t)$不全为**0**，则该系统是有记忆的。

LTI系统的性质

可逆性



可逆系统 一个系统是可逆的，那么就有一个可逆系统，与原系统级联后，其输出为系统原来的输入。

可逆LTI系统的定义

若一个LTI系统是可逆的，则需要满足如下条件 $\begin{cases} h(t) * h_1(t) = \delta(t) \\ h[n] * h_1[n] = \delta[n] \end{cases}$

其中**h(t), h_1(t)/ h[n], h_1[n]**分别是**LTI**与其逆系统的冲激/脉冲响应。

例2.11 **LTI**系统 $y(t) = x(t - t_0)$ 计算其**h(t)**与**h_1(t)**。

$$h(t) = \delta(t - t_0) \qquad h_1(t) = \delta(t + t_0)$$

LTI系统 $h[n] = u[n]$ 计算其逆系统的单位脉冲响应**h_1(t)**。

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

LTI系统的性质

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

因果性

因果系统 一个系统是因果系统，当且仅当系统当前时刻的输出只与当前时刻以及过去时间内的输入有关。

因果LTI系统 一个LTI系统是因果系统，当$t<0$或$n<0$， $h(t)=0$或$h[n]=0$。

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k] \xrightarrow{\text{因果性}} \begin{cases} y[n]=\sum_{k=-\infty}^{k}x[k]h[n-k] \\ k>n, x[k]h[n-k]=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$n<0, h[n]=0 \longleftarrow k>n, h[n-k]=0$$

因果信号 将n<0或t<0时其值为0的信号称为因果信号。LTI的h[n]为因果信号

因果LTI系统与初始松弛条件 一个LTI系统是因果性等效于初始松弛(initial rest)条件：若一个因果系统的输入在某时刻以前是0，则其输出在那个时刻以前也必须是0。

LTI系统的性质

因果性

因果系统 一个系统是因果系统，当且仅当系统当前时刻的输出只与当前时刻以及过去时间内的输入有关。

因果LTI系统 一个LTI系统是因果系统，当$t<0$或$n<0$， $h(t)=0$或$h[n]=0$。

因果信号 将n<0或t<0时其值为0的信号称为因果信号。LTI的h[n]为因果信号

因果LTI系统与初始松弛条件 一个LTI系统是因果性等效于初始松弛(initial rest)条件：若一个因果系统的输入在某时刻以前是0，则其输出在那个时刻以前也必须是0。

注意 (1)只有对线性系统，因果性与初始松弛条件等效。

(2)对因果LTI系统，卷积公式可以简化为

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]h[n-k]$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(t)h(t-\tau)d\tau$$

LTI系统的性质

因果性

因果系统 一个系统是因果系统，当且仅当系统当前时刻的输出只与当前时刻以及过去时间内的输入有关。

因果LTI系统 一个LTI系统是因果系统，当$t<0$或$n<0$， $h(t)=0$或$h[n]=0$。

例题

$$h(t)=u(t)$$ 因果

$$h[n]=\delta[n-n_0]$$ 取决于n0的值

$$h[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]+u[n-1]$$ 因果

LTI系统的性质

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

稳定性

任意系统的稳定性

如果对于任意有界的输入信号，系统均可以产生一个有界的输出信号，那么这个系统是稳定的，否则是不稳定的。

稳定LTI系统

如果一个LTI系统是稳定的，则该系统的单位脉冲/冲激响应应该是绝对可和/绝对可积的。即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty \qquad \sum_{k=-\infty}^{n}|h[k]|<\infty$$

假设$|x(t)|<A, |y(t)|<\infty$时，$h(t)$？

$$|y(t)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right|\le\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau$$

$$\downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|d\tau<\infty \leftarrow |y(t)|\le|A|\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|d\tau\le\infty \leftarrow |y(t)|\le\int_{-\infty}^{+\infty}|A||h(t)|d\tau\le\infty$$

例题

判断下面系统是否是稳定系统

基本题2.14(a) 2.15(a)

$h(t)=3e^{-t}u(t)$ 稳定

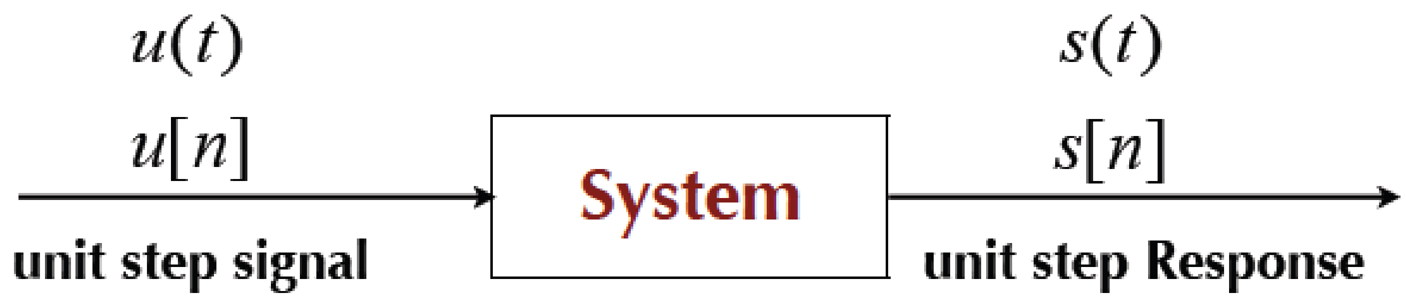
$h[n]=\delta[n-n_0]$ 稳定

$h[n]=u[n-1]$ 不稳定

$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 不稳定

LTI系统的单位阶跃响应

定义 一个LTI系统的单位阶跃响应指的是当输入信号为**单位阶跃信号**时LTI系统的输出。



单位阶跃响应与单位阶跃响应的关系

$$s(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \quad \text{or} \quad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

$$s[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[n-k]h[k]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k] \quad \text{or} \quad h[n]=s[n]-s[n-1]$$

一个DT LTI系统的**单位阶跃响应**是其**单位脉冲响应的求和函数**；
一个CT LTI系统的**单位阶跃响应**是其**单位冲激响应的积分函数**。

一个DT LTI系统的**单位脉冲响应**是其**单位阶跃响应**的**一次差分**；
一个CT LTI系统的**单位冲激响应**是其**单位阶跃响应**的**一次导数**。

作业

2.13

2.14 (b)

2.15 (b)