2.3 谓词公式间的关系

谓词公式间的关系：逻辑等价与逻辑蕴涵。

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

- 定义 2.15 设 A、 B 是谓词公式，E 是它们共同的个体域。若在个体域 E 中的任何解释下， A、 B 在都具有相同的真值，则称谓词公式 A 和 B 在 E 上逻辑等价。
- 定义 2.16 设 A、 B 是谓词公式，如果在任一个体域上 A 和 B 都逻辑等价，则称 A 和 B 是逻辑等价，记作 $A \Leftrightarrow B$ 。
- 等价置换（置换规则）

设 $\Phi(A)$ 是含合式公式 A 的合式公式， $\Phi(B)$ 是用合式公式 B 取代 $\Phi(A)$ 中所有的 A 之后的合式公式，若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

- 根据所给出的谓词公式的逻辑等价定义，就可以讨论谓词演算的一些基本逻辑等价式。
- 1 ）命题公式的推广
  - 由于命题逻辑中的重言式的代换实例都是一阶逻辑中的永真式，因而命题公式的基本逻辑等价式的代换实例都是一阶逻辑的逻辑等价式。
    - 例如：$\neg\neg\forall xF(x)\Leftrightarrow\forall xF(x)$

      $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)\Leftrightarrow\neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

❖ 2）量词否定逻辑等价式

❖ 定理 2.3 （1）$\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x))$

（2）$\neg\exists xP(x)\Leftrightarrow\forall x(\neg P(x))$

证：（1）若个体域 E 是有限的，设个体域为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ，则有

$\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\neg(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n))$

$\Leftrightarrow\neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\ldots\vee\neg P(a_n)$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x))$

若个体域 E 是无限的，设$\neg\forall xP(x)$ 的真值为 1 ，则$\forall xP(x)$ 的真值为 0 ，即存在着某个个体 $a_0\in E$ 使 $P(a_0)$ 的真值为 0 ，因此$\neg P(a_0)$ 的真值为 1 ，从而$\exists x(\neg P(x))$ 的真值为 1 。

因此当$\neg\forall xP(x)$ 的真值为 1 时，$\exists x(\neg P(x))$ 的真值也为 1 。

同理可证当$\neg\forall xP(x)$ 的真值为 0 时，$\exists x(\neg P(x))$ 的真值也为 0 。

故无论个体域 E 是有限的或是无限的都有

$\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x))$

（2）的证明与（1) 相似，不再详述。

证毕。

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

- 3 ）量词辖域的扩张与收缩
- 定理 2.4 （ 1 ）$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$

  （ 2 ）$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$

  （ 3 ）$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$

  （ 4 ）$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

其中，公式 B 中不出现约束变元 x 。

- 根据对量词及其辖域的理解，很容易证明此定理。该定理还可以扩充到谓词的变元与量词的指导变元不同的情形，如：
  - $\forall x(P(x)\vee Q(y))\Leftrightarrow\forall xP(x)\vee Q(y)$
  - $\forall x(\forall yP(x,y)\wedge Q(z))\Leftrightarrow\forall x\forall yP(x, y)\wedge Q(z)$
- 推论 2.1 （ 1 ）$\forall xA(x)\rightarrow B\Leftrightarrow\exists x(A(x)\rightarrow B)$

  （ 2 ）$\exists xA(x)\rightarrow B\Leftrightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B)$

  （ 3 ） $B\rightarrow\forall xA(x)\Leftrightarrow\forall x(B\rightarrow A(x))$

  （ 4 ） $B\rightarrow\exists xA(x)\Leftrightarrow\exists x(B\rightarrow A(x))$

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

- 4）量词分配逻辑等价式
- 定理 2.5 （1）$\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B(x))$

  （2）$\exists xA(x) \vee \exists xB(x) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$

证：（1）设 E 为任一个体域，若 $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ 的真值为 1，则 $\forall xA(x)$ 的真值为 1 且 $\forall xB(x)$ 的真值为 1，即 E 中的任一个体 a_0 都使得 $A(a_0)$ 和 $B(a_0)$ 的真值为 1，故 $A(a_0) \wedge B(a_0)$ 的真值为 1。

由于 a_0 是任一个体，从而 $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ 的真值为 1。

同理可证当 $\forall xA(x) \wedge (\forall x)B(x)$ 的真值为 0 时，$\forall x(A(x) \wedge B(x))$ 的真值也为 0。故

$$\forall xA(x) \to B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \to B)$$

（2）由（1）可知 $\forall x(\neg A(x) \wedge \neg B(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x)) \wedge \forall x(\neg B(x))$

又因为 $\neg\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x) \wedge \neg B(x))$

及 $\forall x(\neg A(x)) \wedge \forall x(\neg B(x))$

$\Leftrightarrow \neg\exists xA(x) \wedge \neg\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\exists xA(x) \vee \exists xB(x))$

因此 $\neg\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists xA(x) \vee \exists xB(x))$

故 $\exists xA(x) \vee \exists xB(x) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$

证毕。

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

❖ 5）具有两个量词的谓词公式间的逻辑等价关系

具有两个量词的二元谓词公式有以下的逻辑等价关系：

$\forall x\forall yA(x,y)\Leftrightarrow\forall y\forall xA(x,y)$

$\exists x\exists yA(x,y)\Leftrightarrow\exists y\exists xA(x,y)$

2.3.2 谓词公式间的逻辑蕴涵

- **定义 2.17** 设 A、 B 是谓词公式， E 是它们共同的个体域。若 $A \to B$ 在 E 上是逻辑有效的，则称在 E 上 A 逻辑蕴涵 B 。
- **定义 2.18** 设 A、 B 是谓词公式，若 $A \to B$ 是永真式，则称 A 逻辑蕴涵 B ，记作 $A \Rightarrow B$ 。
- 由命题逻辑中的基本逻辑蕴涵式的代换实例可以得到谓词逻辑的基本逻辑蕴涵式，
- 每组谓词公式的逻辑等价式，都可得到两组谓词演算逻辑蕴涵式。

2.3.2 谓词公式间的逻辑蕴涵

- 1）量词与联结词的逻辑蕴涵式
- **定理 2.6** （1）$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

  （2）$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

证：（1）设 E 为任一个体域，若$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$的真值 1，即 E 中的任意个体 a_0 都能使 $A(a_0)$ 的值为 1 或者使 $B(a_0)$ 的真值为 1，因此 $A(a_0)\vee B(a_0)$ 的真值为 1，由于 a_0 是任一个体，故$\forall x(A(x)\vee B(x))$ 在个体域 E 上为 1，即

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$$

2.3.2 谓词公式间的逻辑蕴涵

（2）由（1）可知 $\forall x(\neg A(x)) \vee \forall x(\neg B(x)) \Rightarrow \forall x(\neg A(x) \vee \neg B(x))$

又因为 $\forall x(\neg A(x)) \vee \forall x(\neg B(x))$

$\Leftrightarrow \neg\exists xA(x) \vee \neg\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\exists xA(x) \wedge \exists xB(x))$

$\forall x(\neg A(x) \vee \neg B(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \neg(A(x) \wedge B(x))$

$\Leftrightarrow \neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$

因此$\neg(\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)) \Rightarrow \neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$

故$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

证毕。

2.3.2 谓词公式间的逻辑蕴涵

- 2 ）具有两个量词的谓词公式间的逻辑蕴涵关系：

$$\forall x\forall yA(x,y)\Rightarrow\exists y\forall xA(x,y)$$

$$\forall y\forall xA(x,y)\Rightarrow\exists x\forall yA(x,y)$$

$$\exists y\forall xA(x,y)\Rightarrow\forall x\exists yA(x,y)$$

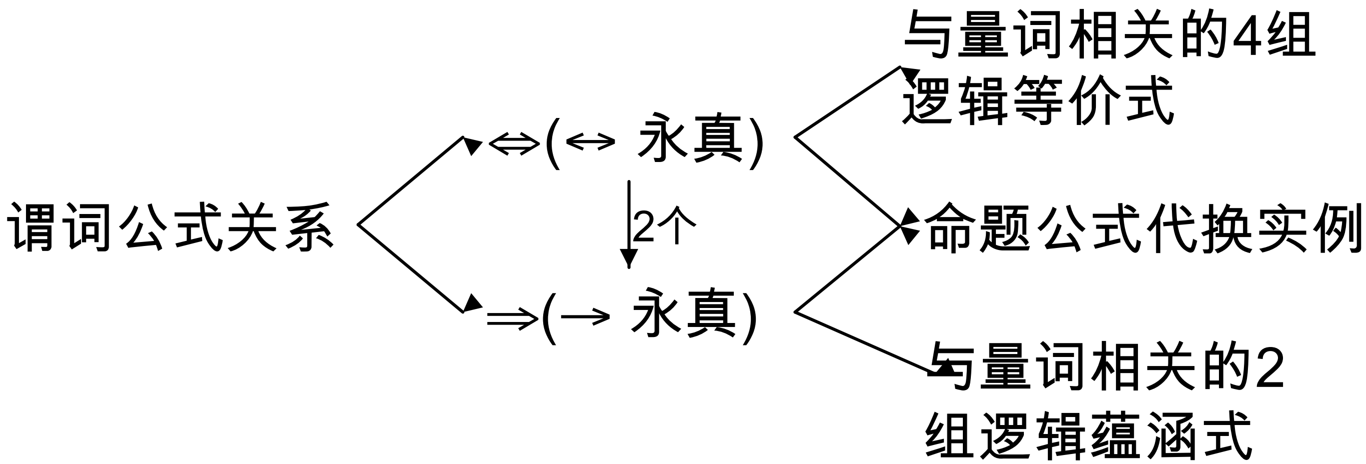
$$\exists x\forall yA(x,y)\Rightarrow\forall y\exists xA(x,y)$$

$$\forall x\exists yA(x,y)\Rightarrow\exists y\exists xA(x,y)$$

$$\forall y\exists xA(x,y)\Rightarrow\exists x\exists yA(x,y)$$

小结

- 命题逻辑中的基本逻辑等价公式和逻辑蕴涵公式都可推广到谓词逻辑中使用（通过代换实例）。
- 一些谓词逻辑特有的基本逻辑等价公式和逻辑蕴涵公式，主要是一些与量词相关的公式，需要特别记忆。
- 本小节的思维形式注记图：



作业

- 2.3 补充习题