第三篇 代数结构

Algebraic Structures

引言

- 代数结构也称为代数系统，是抽象代数的主要研究对象。
- 抽象代数是数学的一个分支，它用代数的方法从不同的研究对象中**概括出一般的数学模型**并研究其规律、性质和结构。
- 抽象代数学的研究对象是抽象的，它不是以某一具体对象为研究对象，而是以一大类具有某种共同性质的对象为研究对象，因此其**研究成果适用于这一类对象中的每个对象**，从而达到了事半功倍的效果。

引言（续）

- 抽象代数学的主要内容：
  - 研究各种各样的代数系统，它是在较高的观点上，把一些形式上很不相同的代数系统，撇开其个性，抽出其共性，用统一的方法描述、研究和推理，从而得到一些反映事物本质的结论，再把它们应用到那些系统中去，高度的抽象产生了广泛的应用。

引言（续）

- 构成一个抽象代数系统有三方面的要素：集合、集合上的运算以及说明运算性质或运算之间关系的公理。

整数集合 Z 和普通加法 + 构成了代数系统〈Z, +〉，n 阶实矩阵的集合 $M_n(R)$ 与矩阵加法 + 构成代数系统〈 $M_n(R)$, +〉。幂集 P(B) 与集合的对称差运算⊕也构成了代数系统 <P(B), ⊕ > 。

引言（续）

- 考察他们的共性，不难发现他们都含有一个集合，一个二元运算，并且这些运算都具有交换性和结合性等性质。为了概括这类代数系统的共性，我们可以定义一个抽象的代数系统 $<A, \circ>$ ，其中 A 是一个集合，$\circ$是 A 上的可交换、可结合的运算，这类代数系统实际上就是交换半群。

引言（续）

- 为了研究抽象的代数系统，我们需要先定义一元和二元代数运算以及二元运算的性质，并通过选择不同的运算性质来规定各种抽象代数系统的定义。在此基础上再深入研究这些抽象代数系统的内在特性和应用。

引言（续）

- 抽象代数在计算机中有着广泛的应用，例如自动机理论、编码理论、密码学、开关电路等等都要用到抽象代数的知识。

代数结构的知识体系

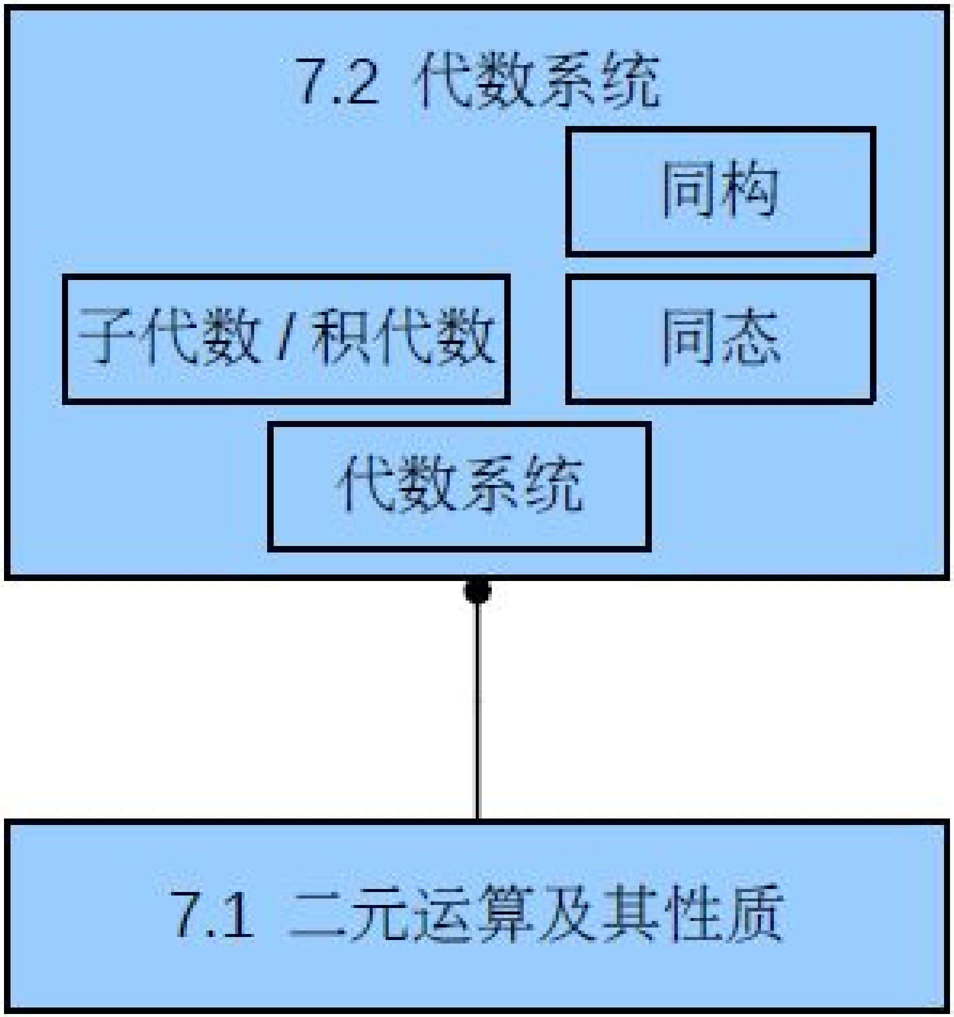
第7章 代数系统（一般的代数系统） → 特殊的代数系统

- 第8章 群论初步
  - 群（1个运算）
  - ↓ 扩展
  - 环 → 域（2个运算）
- 第9章 格与布尔代数（2个运算＋序）

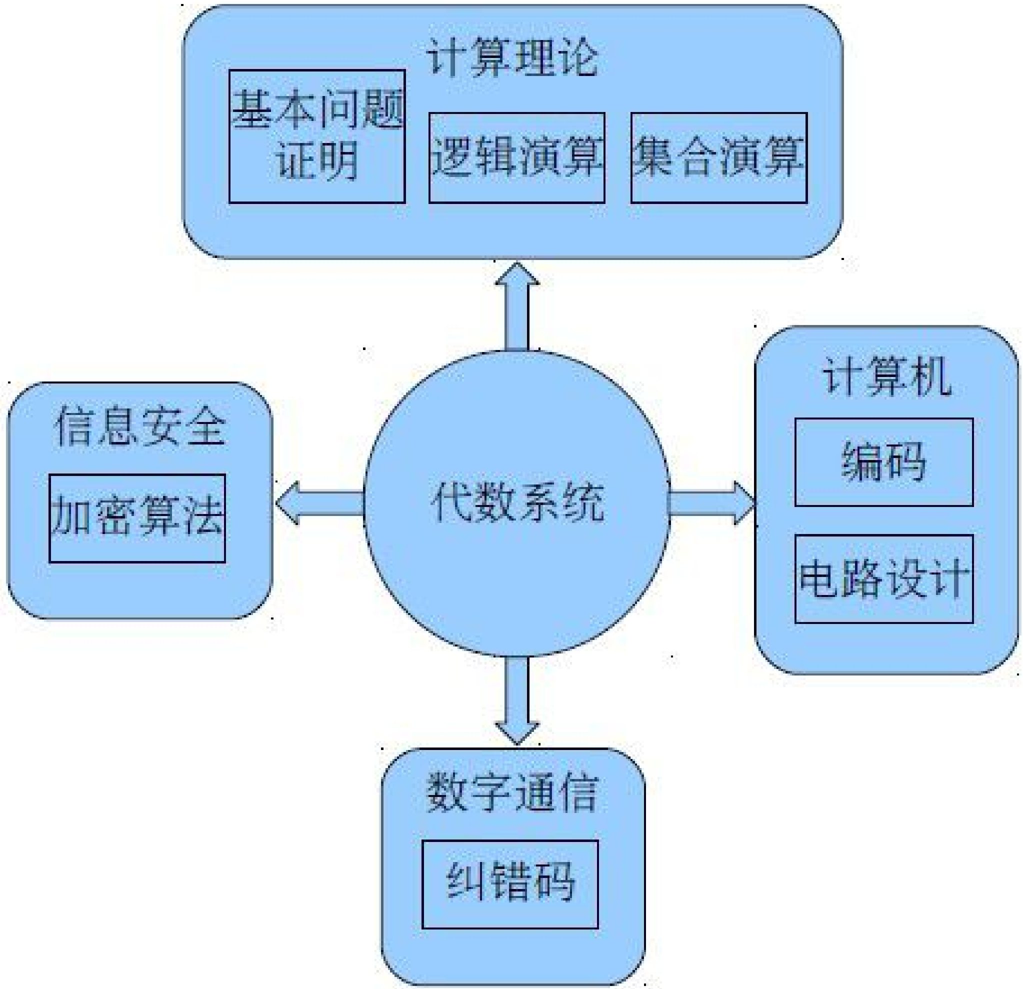
北京科技大学
University of Science and Technology Beijing

第七章代数系统

代数系统部分知识逻辑概图



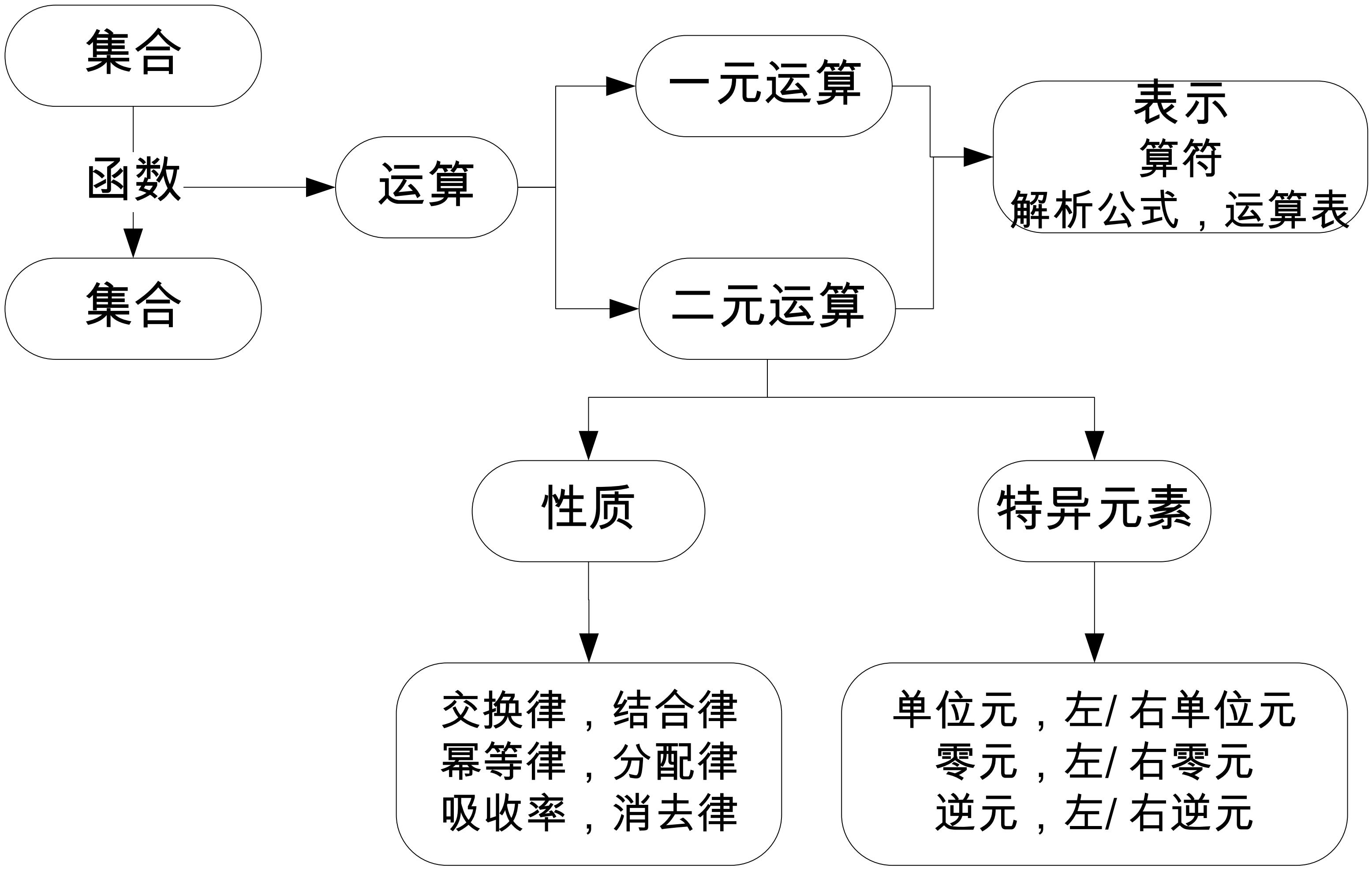
代数系统在计算机科学技术相关领域的应用概图



7.1 二元运算及其性质

二元运算：$S \times S$ 到 S 的函数。

7.1 二元运算及其性质


集合
函数
集合
运算
一元运算
二元运算
表示
算符
解析公式，运算表
性质
特异元素
交换律，结合律
幂等律，分配律
吸收率，消去律
单位元，左/右单位元
零元，左/右零元
逆元，左/右逆元

7.1 二元运算及其性质

- **定义 7.1** 设 S 是一非空集合，函数 f ： $S\times S\to S$ 称为集合 S 上的一个**二元运算**，简称**二元运算**.
- **验证一个运算是否为集合 S 上的二元运算主要考虑两点：**
  - (1)S 中任何两个元素都可以进行这种运算，且运算的**结果是唯一的。**
  - (2)S 中任何两个元素的运算结果都属于 S, 即 S 对该**运算是封闭的。**

7.1 二元运算及其性质

- **例** (1) 自然数集合 N 上的加法和乘法是 N 上的二元运算，但减法和除法不是。
- (2) 设 $M_n(R)$ 表示所有 n 阶 (n≥2) 实矩阵的集合，即

$$M_n(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbf{R}, 1 \le i, j \le n \right\}$$

则矩阵加法和乘法都是 $M_n(R)$ 上的二元运算。

7.1 二元运算及其性质

- (3) 整数集合 Z 上的加法、减法和乘法都是 Z 上的二元运算，而除法不是。
- (4) S 为任意集合，则$\cup$，$\cap$，$-$，$\oplus$ 为 S 的幂集 $P(S)$ 上的二元运算。
- (5) S 为集合，S^S为 S 上的所有函数的集合，则函数的复合运算 $\circ$ 为 S^S 上的二元运算。
- (6) 逻辑联结词合取$\wedge$、析取$\vee$、蕴涵$\rightarrow$、等价$\leftrightarrow$都是真值集合 $\{0, 1\}$ 上的二元代数运算。

7.1 二元运算及其性质

- 定义 7.2　设 S 为集合，函数 f ： S→S 称为集合 S 上的一个一元运算，简称一元运算 .
- 例： (1) 求一个数的相反数是整数集合 Z 、有理数集合 Q 和实数集合 R 上的一元运算。
- (2) 求一个数的倒数是非零有理数集合 Q* 、非零实数集合 R* 上的一元运算。
- (3) 求一个复数的共轭复数是复数集合 C 上的一元运算。
- (4) 在幂集 P(S) 上规定全集为 S ，则求绝对补运算 ~ 是 P(S) 上的一元运算。

7.1 二元运算及其性质

- 二元与一元运算的表示
  - （1）算符
    - 可以用 ∘, *, ·, □, ◊, □ ,⊕, ⊗ 等符号表示二元或一元运算，称为算符。对于二元运算 ∘, 如果 x 与 y 运算得到 z, 记做 $x \circ y=z$ ；对于一元运算 ∘， x 的运算结果记作 $\circ x$.

7.1 二元运算及其性质

- (2) 表示二元或一元运算的方法
  - 解析公式和运算表
  - 例 设 R 为实数集合 , 如下定义 R 上的二元运算 * ：

    $\forall x,y\in R,\ x*y=x.$

    计算 3*4, (-5)*0.2, 0*(1/2)

    解析公式法

  - 解： 3*4=3, (-5)*0.2=-5, 0*(1/2) =0

7.1 二元运算及其性质

运算表法

a_i	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
…	…
a_n	$\circ a_n$

表 1 一元运算表的一般形式

$\circ$	a_1	a_2	…	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	…	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	…	$a_2 \circ a_n$
…	…	…	…	…
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	…	$a_n \circ a_n$

表 2 二元运算表的一般形式

7.1 二元运算及其性质

例 设 $S=\{1,2\}$，给出 $P(S)$ 上的运算 ~ 和⊕的运算表，其中全集为 S.

解：所求的运算表如下表。

a_i	$\sim a_i$
$\varnothing$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\varnothing$

$\oplus$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\varnothing$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\varnothing$

7.1 二元运算及其性质

❖ 二元运算的性质

- **定义 7.3** 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算，如果对于任意的 $x, y \in S$，有 $x \circ y = y \circ x$，则称运算 $\circ$ 在 S 上满足**交换律**。
- **定义 7.4** 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算，如果对于任意的 $x, y, z \in S$ 有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$，则称运算 $\circ$ 在 S 上满足**结合律**。
- **定义 7.5** 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算，如果对于任意的 $x \in S$ 有 $x \circ x = x$，则称运算 $\circ$ 在 S 上满足**幂等律**。
  - 如果 S 中某些 x 满足 $x \circ x = x$，则称 x 为运算 $\circ$ 的**幂等元**。

实例：交换、结合、幂等律

- Z, Q, R 分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$ 为 n 阶实矩阵集合，n2 ；$P(B)$ 为幂集；A^A 为从 A 到 A 的函数集，$|A|$ 2

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z, Q, R	普通加法+	有	有	无
	普通乘法×	有	有	无
M(R)	矩阵加法+	有	有	无
	矩阵乘法×	无	有	无
P(B)	并∪	有	有	有
	交∩	有	有	有
	相对补−	无	无	无
	对称差⊕	有	有	无
A^A	函数复合∘	无	有	无

7.1 二元运算及其性质

- 二元运算的性质（续）
  - **定义 7.6** 设 $\circ$ 和 $*$ 为 S 上两个不同的二元运算，如果对于任意的 $x, y, z \in S$ 有 $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$（右分配律）和 $z\circ(x*y)=(z\circ x)*(z\circ y)$（左分配律），则称运算 $\circ$ 对运算 $*$ 满足分配律。
  - **定义 7.6** 如果 $\circ$ 和 $*$ 都可交换，并且对于任意的 $x, y \in S$ 有 $x\circ(x*y)=x$ 和 $x*(x\circ y)=x$，则称运算 $\circ$ 和运算 $*$ 满足吸收律。

实例：分配、吸收律

- Z, Q, R 分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$ 为 n 阶实矩阵集合，$n2$ ；$P(B)$ 为幂集

集合	运算	分配律	吸收律
Z, Q, R	普通加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
M(R)	矩阵加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
P(B)	并∪与交∩	∪对∩可分配 ∩对∪可分配	有
	交∩与对称差⊕	∩对⊕可分配	无

7.1 二元运算及其性质

例：N 是自然数集合，在 N 上定义运算“ *” ：

对于任意的 $m,n\in N$, $m*n = m+2n$.

(1) “*” 是可交换的吗？(2) “*” 适合结合律吗？

- 解：(1) 对于任意的 $m, n\in N$

  $m*n=m+2n$

  $n*m=n+2m$

  显然，当 $m\neq n$ 时 $m*n\neq n*m$

  所以” *” 是不可交换的。

7.1 二元运算及其性质

例：N 是自然数集合，在 N 上定义运算“ *”：

对于任意的 $m,n \in N$, $m*n = m+2n$.

(2) “*” 适合结合律吗？

(2) 对于任意的 $m, n, l \in N$

因为 $(m*n)*l=(m+2n)*l=(m+2n)+2l=m+2n+2l$

而 $m*(n*l)=m*(n+2l)=m+2(n+2l)=m+2n+4l$

由 l 的任意性知 $(m*n)*l \neq m*(n*l)$

7.1 二元运算及其性质

- 二元运算的特异元素：单位元、零元和逆元
- 定义 7.8 设 $\circ$为 S 上的二元运算，如果存在 e_l（或 e_r）$\in S$, 使得对任意 $x \in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \text{（或 } x \circ e_r = x \text{）}$$

  则称 e_l（或 e_r）是 S 中关于运算$\circ$的左（或右）单位元。若 $e \in S$ 关于运算$\circ$既是左单位元又是右单位元，则称 e 为 S 上关于运算$\circ$的单位元。单位元也叫做幺元。

- 定义 7.9 设 $\circ$为 S 上的二元运算，如果存在 θ_l（或 θ_r）$\in S$, 使得对任意 $x \in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \text{（或 } x \circ \theta_r = \theta_r \text{）}$$

  则称 θ_l（或 θ_r）是 S 中关于运算$\circ$的左（或右）零元。若 $\theta \in S$ 关于运算$\circ$既是左零元又是右零元，则称 θ 为 S 上关于运算$\circ$的零元。

7.1 二元运算及其性质

❖ 定义 7.10 设∘为 S 上的二元运算，e 为 S 中关于运算∘的单位元．对于 $x\in S$, 如果存在 y_l（或 y_r）$\in S$ 使得

$$y_l\circ x=e \text{（或 } x\circ y_r=e\text{）}$$

则称 y_l(或 y_r) 是 x 的左逆元（或右逆元）。若 $y\in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元，则称 y 为 x 的逆元。如果 x 的逆元存在，就称 x 是可逆的。

如果 b 是 a 的逆元，那么 a 也是 b 的逆元，简称 a 与 b 互为逆元。 x 的逆元记为 x^{-1} 。

一般，一个元素的左逆元不一定等于右逆元，而且一个元素可以只有左（右）逆元没有右（左）逆元，而且左（右）逆元不一定唯一．

7.1 二元运算及其性质

特异元素的实例

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	0 1	无 0	x 的逆元 $-x$ x 的逆元 x^{-1} ($x^{-1}\in$给定集合)
Mn(R)	矩阵加法+ 矩阵乘法×	全 0 矩阵 单位矩阵	无 全 0 矩阵	X 逆元 $-X$ X 的逆元 X^{-1} (X 是可逆矩阵)
P(B)	并∪ 交∩ 对称差⊕	∅ B ∅	B ∅ 无	∅的逆元为∅ B 的逆元为 B X 的逆元为 X

7.1 二元运算及其性质

- **定理 7.1** 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算，e_l 和 e_r 分别为 S 中关于运算 $\circ$ 的左单位元和右单位元，则

$$e_l = e_r = e$$

且 e 为 S 上关于运算 $\circ$ 的唯一的单位元。

证： $e_l = e_l \circ e_r$ □ (e_r 为右单位元)

□□□ $e_l \circ e_r = e_r$ □ (e_l 为左单位元)

所以 $e_l = e_r$，将这个单位元记作 e。

假设 e' 也是 S 中的单位元，则有

$$e' = e \circ e' = e。$$

唯一性得证。

7.1 二元运算及其性质

❖ **定理 7.2** 设∘为 S 上的二元运算，θ_l和 θ_r分别为 S 中关于运算∘的左零元和右零元，则

$$\theta_l=\theta_r=\theta$$

且 θ 为 S 上关于运算∘的唯一的零元。

证： $\theta_l= \theta_l \circ \theta_r$□($\theta_l$为左零元)

□□□ $\theta_l \circ \theta_r= \theta_r$□($\theta_r$为右零元)

所以 $\theta_l=\theta_r$，将这个零元记作 θ。

假设 θ' 也是 S 中的零元，则有

$$\theta'=\theta \circ \theta'=\theta$$

唯一性得证。

7.1 二元运算及其性质

❖ **定理 7.3** 设∘为 S 上的二元运算，e 和 θ 分别为 S 中关于运算∘的单位元和零元，如果 S 至少有两个元素，则 $e \neq \theta$.

证： 用反证法。假设 $e=\theta$，则对任意 $x \in S$ 有

□□□ $x=x\circ e=x\circ\theta=\theta$

与 S 至少有两个元素相矛盾。

注意：

- 当 $|S|\ 2$，单位元与零元是不同的；
- 当 $|S| = 1$ 时，这个元素既是单位元也是零元 .

7.1 二元运算及其性质

- **定理 7.4** 设∘为 S 上可结合的二元运算，e 为该运算的单位元，对于 $x \in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r，则有

$$y_l = y_r = y$$

且 y 是 x 的唯一的逆元。

证：由 $y_l \circ x = e$ 和 $x \circ y_r = e$ 得

$$y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$$

令 $y_l = y_r = y$，则 y 是 x 的逆元。

假若 $y' \in S$ 也是 x 的逆元，则

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

所以 y 是 x 唯一的逆元。

- 说明：对于可结合的二元运算，可逆元素 x 只有惟一的逆元，记作 x^{-1}

7.1 二元运算及其性质

❖ 定义 7.11 设$\circ$为 S 上的二元运算，如果对于任意的 $x,y,z\in S$, 满足以下条件：

（1）若 $x\circ y=x\circ z$ 且 $x\neq\theta$ ，则 $y=z$;

（2）若 $y\circ x=z\circ x$ 且 $x\neq\theta$ ，则 $y=z$;

则称运算 $\circ$满足消去律，（1）称作左消去律，（2）称作右消去律。

实例:

Z,Q,R，+，× 满足消去律

Mn(R), 矩阵+满足消去律，矩阵×不满足消去律

P(B), ⊕ 满足消去律，∪、∩、−不满足消去律

7.1 二元运算及其性质

例 1 设 A 为实数集，$\forall x,y\in A$, $x\circ y = x+y-2xy$，

(1) 说明 o 运算是否具有交换、结合、幂等、消去律

(2) 求单位元、零元、幂等元和所有可逆元素的逆元

解: (1) 容易验证交换律、结合律、消去律成立.

$1\circ 1 = 1+1-2 \neq 1$，幂等律不成立

(2) 设单位元、零元分别为 e、θ, 则$\forall x\in A$

$x+e-2xe = x\circ e = x \Rightarrow e(1-2x) = 0 \Rightarrow e = 0$

$x+\theta-2x\theta = x\circ\theta = \theta \Rightarrow x(1-2\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 1/2$

幂等元为 x，则

$x+x-2x^2 = x \Rightarrow x(1-2x) = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 $x = 1/2$

设 x 的逆元为 y，则当 $x\neq 1/2$ 有

$x+y-2xy = x\circ y = e = 0 \Rightarrow (2x-1)y = x \Rightarrow y = 1/(2x-1)$

结论：$e = 0, \theta = 1/2$, 幂等元为 0 和 1/2 ,$x^{-1} = 1/(2x-1)$ $(x \neq 1/2)$

7.1 二元运算及其性质

例 2 (1) 说明下面给定运算是否满足交换,结合,幂等,消去律

(2) 求每个运算的单位元,零元,幂等元,所有可逆元素的逆元

∘	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

交换, 结合, 消去

幺元 e=a

幂等元：a

逆元：$a^{-1}=a$

$b^{-1}=c$, $c^{-1}=b$

□	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

结合, 幂等

幂等元：a, b, c

•	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

交换, 结合, 消去

幺元 e=a,

零元 θ=c,

幂等元：a, c

逆元：$a^{-1}=a$

$b^{-1}=b$

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

交换, 结合

幺元 e=a

幂等元：a, b

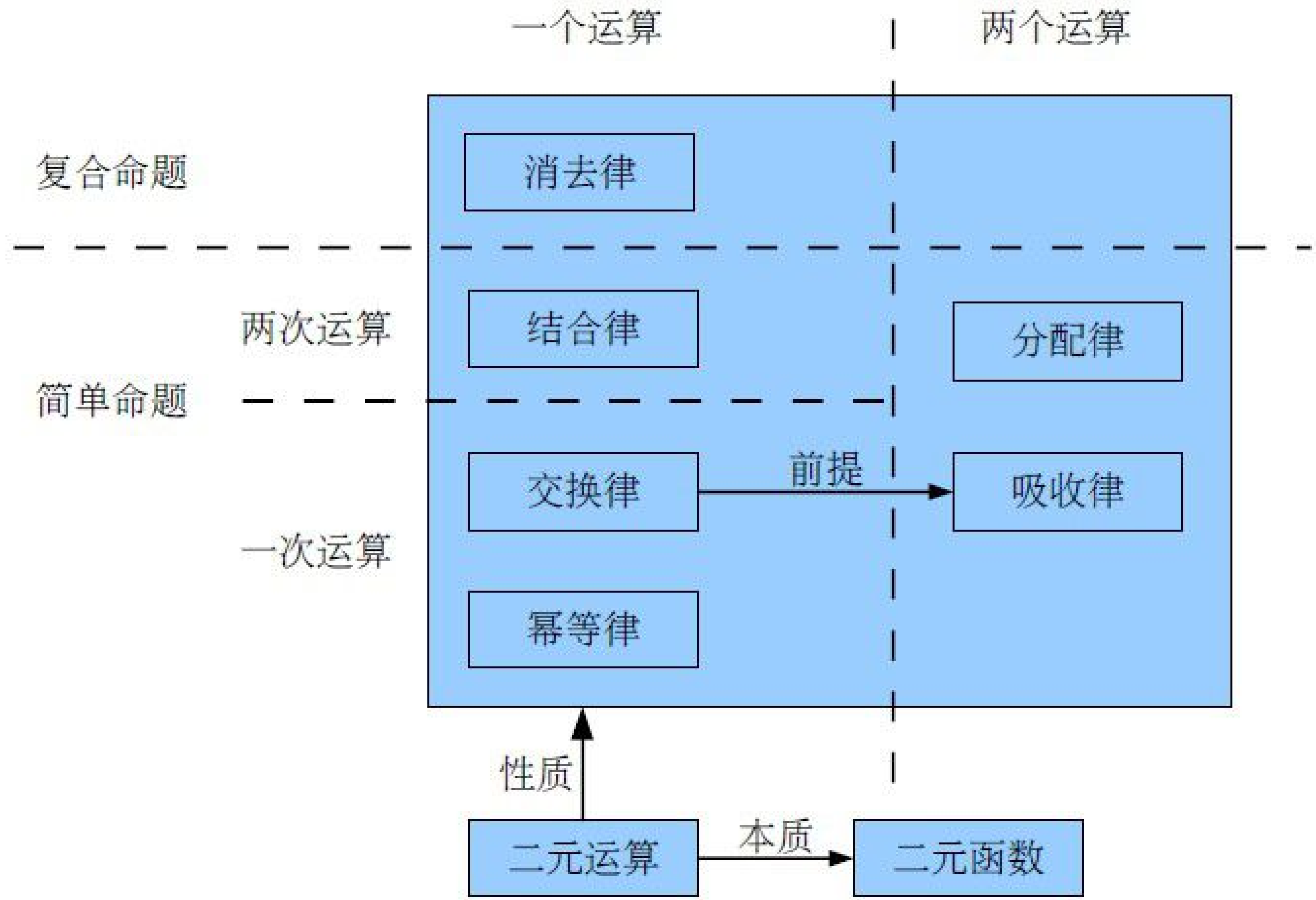
逆元；$a^{-1}=a$

通过运算表可以判断运算性质，也可以求运算的特异元素。

- 如果运算表的元素关于主对角线成对称分布，那么运算是可交换的。
- 如果主对角线元素的排列顺序与表头元素的排列顺序一样，那么运算是幂等的。
- 如果一个元素所在的行和列的元素排列顺序都与表头元素排列顺序一致，那么这个元素就是单位元。
- 如果一个元素的行和列的元素都是这个元素自身，那么这个元素是零元。
- 如果元素 x 在主对角线中排列的位置与表头中的位置一致，那么这个元素是幂等元。

小结

- 集合上的二元运算实质上是一个从该集合的笛卡尔积到该集合的函数，它的性质主要包括交换律、结合律、幂等律、分配律、吸收律和消去律。



作业

补充习题 7.1

1. 设 $A=\{0, 1\}$，$S=A^A$，

(1) 试列出 S 中的所有函数；

(2) 给出 S 上复合运算的运算表。

2. 判断下列集合对所给的二元运算是否封闭。

(1) 整数集合 Z 和普通减法运算；

(2) 正实数集合 R^+ 和 ∘ 运算，其中 ∘ 运算定义为 $\forall a, b \in R^+$，$a \circ b = ab - a - b$；

(3) A 和 ∘ 运算，其中 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$n \geq 2$，∘ 运算定义为 $\forall a, b \in A$，$a \circ b = b$；

3. 对于习题 2 种封闭的二元运算找出它的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。

4. 设 * 为 Z^+ 上的二元运算，$\forall x, y \in Z^+$，$x * y = \min(x, y)$，即 x，y 当中较小的数，

(1) 求 4*6，7*3；

(2) * 在 Z^+ 上是否满足交换律、结合律和幂等律？

(3) 求 * 运算的单位元、零元及 Z^+ 中所有可逆元素的逆元。