第二章 行列式

第二章 方阵的行列式

第一节 行列式的定义

- 二、三阶行列式
- 排列与逆序
- *n* 阶行列式

2.1.1 二、三阶行列式

二元一次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$(1)\times a_{22}$: $a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}$,

$(2)\times a_{12}$: $a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}$,

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$;

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$,

二元一次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22}$-$a_{12}a_{21} \neq 0$时，方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定.

这就是二元方程组的解的公式。但这个公式不不好记，为了便于记这个公式，于是引进二阶行列式的概念。

二阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

称为$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 所确定的二阶行列式。

元素

a_{ij}

所在的行数

所在的列数

二阶行列式的计算: 对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1, \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

由于行列式$|A|$中的元素就是二元方程组中未知量的系数，所以又称它为二元方程组的系数行列式.

第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \boxed{b_2}. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad |A| = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

如果将$|A|$中第一列的元素a_{11},a_{21} 换成常数项b_1,b_2 则可得到行列式$|A_1|$.

第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \boxed{b_2}. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

如果将$|A|$中第二列的元素a_{12}, a_{22} 换成常数项b_1, b_2 ，则可得到行列式$|A_2|$.

第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

三阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为由$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 确定的三阶行列式.

三阶行列式的计算: 对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}\ \underline{-a_{12}a_{21}a_{33}}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

说明:
1,三阶行列式是3！项的代数和。
2,每项都是位于不同行、不同列的三个元素的乘积。
3,三项为正、三项为负。

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为研究四阶及更高阶行列式，下面我们要介绍全排列的知识。

2.1.2 排列与逆序

定义2.1 由自然数1,2, …,n所构成的一个有序数组，称为这n个数的一个n级排列。

定义2.2 在排列$j_1\ldots j_n$中，
数j_1前面比j_1大的数字的个数，称为j_1的逆序
数j_2前面比j_2大的数字的个数，称为j_2的逆序，
…
所有这n个数的逆序之和称为该排列的逆序数，
记为$\tau(j_1,\cdots,j_n)$.

例1 求排列32514的逆序数.

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$t=0+1+0+3+1=5.$$

解 在排列32514中，
3排在首位,逆序数为0;
2的前面比2大的数只有一个3,故逆序数为1;
5的前面没有比5大的数,其逆序数为0;
1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;
4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1;
所以排列32514的逆序数为5。

排列的奇偶性
逆序数为奇数的排列称为奇排列
逆序数为偶数的排列称为偶排列

说明:
- 任何排列不是奇排列就是偶排列。
- 规定逆序数为零的排列为偶排列。

例如：排列32514的逆序数为5，排列为奇排列。
排列12345的逆序数为0，排列为偶排列。

对换的定义

定义2.3 在一个排列中，某两个数互换位置，其余的数不动，就得到一个新排列，这样的对换称为一个对换。若对换的两个数相邻，则称为相邻对换。

例如

$a_1\cdots a_l \quad b_1\cdots b_m \qquad a_1\cdots a_l \quad b_1\cdots b_m \quad c_1\cdots c_n$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$a_1\cdots a_l \quad b_1\cdots b_m \qquad a_1\cdots a_l \quad b_1\cdots b_m \quad c_1\cdots c_n$

对换与排列的奇偶性的关系：

定理2.1 对换改变排列的奇偶性。

证明 $a_1\cdots a_l\, ab\, b_1\cdots b_m \longrightarrow a_1\cdots a_l\, ba\, b_1\cdots b_m$

除a,b外，其它元素的逆序数不改变.

当$a<b$时，

经对换后a的逆序数增加1，b的逆序数不变；

当$a>b$时，

经对换后a的逆序数不变，b的逆序数减少1.

因此对换相邻两个元素，排列改变奇偶性.

设排列为 $a_1\cdots a_l\underline{a}b_1\cdots b_m\underline{b}c_1\cdots c_n$

对换相邻两个元素，排列改变奇偶性.

$a_1\cdots a_l\, a\, b_1\cdots b_m\, b\, c_1\cdots c_n$

$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1\cdots a_l\, ab\, b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$

$\xrightarrow{m+1\text{ 次相邻对换}} a_1\cdots a_l\, b\, b_1\cdots b_m\, a\, c_1\cdots c_n$

$\therefore\ a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n,$

$\xrightarrow{2m+1\text{次相邻对换}} a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n,$

定理2.1 对换改变排列的奇偶性。

推论2.1: 奇排列经过奇数次对换可变成自然排列；
偶排列经过偶数次对换可变成自然排列；

证明：对换改变排列的奇偶性，
对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，

自然排列是偶排列，

所以结论成立。

2.1.3 n阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\underset{(123)0}{a_{11}a_{22}a_{33}}+\underset{(231)\,2}{a_{12}a_{23}a_{31}}+\underset{(312)2}{a_{13}a_{21}a_{32}}\\-\underset{(321)3}{a_{13}a_{22}a_{31}}-\underset{(132)1}{a_{11}a_{23}a_{32}}-\underset{(213)1}{a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

说明：

1,三阶行列式共有6项，即3！项。

2,每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

3,三项为正、三项为负。

式的定义：

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

其中$P_1P_2P_3$为1，2，3三个数的某个排列。

t为的$P_1P_2P_3$逆序数。

类似地，我们引出n阶行列式的定义。

n阶行列式

定义2.4: 设n阶方阵$A=(a_{ij})$，称

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\det(a_{ij})$$

为方阵A的行列式，也称为n阶行列式。

n阶行列式是一个数，其值按如下代数式运算:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，和号是对所有的n级排列求和（共$n!$项）。

说明:

1，n阶行列式是$n!$项的代数和;

2，n阶行列式的每项都是位于不同行，不同列的n个元素的乘积。

3、每项的行标排列为标准排列，正负号都取决于列标排列的逆序数.

请问：一阶行列式$|a|$与绝对值$|a|$是否相等？

答：一阶行列式与绝对值记号含义不同;

一阶行列式：$|-5|=-5$

绝对值： $|-5|=5$

定理2. 2: n阶方阵A的行列式可定义为

$$|A|=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

其中t为行标排列的逆序数。

证明：n阶行列式的定义为

$$|A|=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

对于行列式的任意一项$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

将其元素做r次对换，化为

$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$

此时，列标排列由$j_1j_2\ldots j_n$变为自然排列;

同时行标排列由自然排列变为$i_1i_2\ldots i_n$。

由于列标排列$j_1j_2\ldots j_n$的逆序数与对换次数r有相同的奇偶性，行标排列$i_1i_2\ldots i_n$的逆序数与对换次数r有相同的奇偶性，于是

$$\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

$$=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

$$=(-1)^{r}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

$$=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

$$\therefore |A|=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

例2 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解： $|A|=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$

由于第一行除了a_{11}外其余都为零，故非零项的第一个数必为a_{11}，第二行只能选a_{22}，
类似地，第三行只能选a_{33}，第n行只能选a_{nn}。

因此，行列式只有一个非零项。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似可得下三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例3: 计算右下三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解： $|A|=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

由于第一行除了a_{1n}外其余都为零，故非零项的第一个数必为a_{1n}， 第二行只能选$a_{2,n-1}$，
类似地，第三行只能选$a_{3,n-2}$，第n行只能选a_{n1}。

因此，行列式只有一个非零项。

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

小结

n阶行列式

定义2.4: 设n阶方阵$A=(a_{ij})$，称

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\det(a_{ij})$$

为方阵A的行列式，也称为n阶行列式。

说明:

1、 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

2、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积;

3、每项的行标排列为标准排列，正负号都取决于列标排列的逆序数.

n阶行列式的另外一种表达方式:

定理2. 2: n阶方阵A的行列式可定义为

$$|A|=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$$

其中t为行标排列的逆序数。

作业：

习题2.1A：3, 5, 6
习题2.1B：1，3

预习行列式的性质

第二节 行列式的性质

- 行列式的性质
- 应用举例

对n阶行列式而言，三角形与对角形行列式的计算是容易的，这就提示我们，计算行列式的值时，将行列式化为以上类型的行列式是我们努力的方向。

2.2.1 行列式的性质

转置行列式的定义：

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |A^T|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式$|A^T|$称为行列式$|A|$的转置行列式。

性质1 设$A=(a_{ij})$为n阶行列式，则$|A|=|A^T|$。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

说明 行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

证明：设$A=(a_{ij})$, $A^T=(b_{ij})$，则$a_{ij}=b_{ji}$。

由行列式的定义：

$$|A^T|=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{j_11}\cdots a_{j_nn}$$

$$|A|=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{j_11}\cdots a_{j_nn}$$

所以$|A|=|A^T|$。

性质2 设$A=(a_{ij})$，若$A\underset{(c_i\leftrightarrow c_j)}{\overset{r_i\leftrightarrow r_j}{\longrightarrow}}B$, 则$|B|=-|A|$.

例如：

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

需添加负号！

证明： 设$A=(a_{ij})$，设$B=(b_{ij})$，

考虑对A做行变换，则

$$b_{pj}=\begin{cases}a_{pj}, p\neq i,k\\ a_{kj}, p=i\\ a_{ij}, p=k\end{cases}$$

不妨设$i<k$,根据行列式的定义，

$$|A|=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

$$|B|=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots b_{kj_k}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$$

因为

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}$$

所以

$$|B|=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=-\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=-|A|$$

推论 设$A=(a_{ij})$，若A中有两行（列）相同，则$|A|=0$。

证明

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\overset{r_i\leftrightarrow r_j}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

故$|A|=|-A|,\therefore\ |A|=0.$

性质3: 设$A=(a_{ij})$，若$A\underset{(kc_i)}{\overset{kr_i}{\longrightarrow}}B$ 则$|B|=k|A|$, k为常数。

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

证明： 设$A=(a_{ij})$, $A\overset{kr_i}{\longrightarrow}B$

根据行列式的定义，

$$|B|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots ka_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=k|A|$$

注意$|kA|$与$k|A|$不同！

$$D_n=\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}=\boxed{k^n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论1：若方阵A中有一个零行（列），则$|A|=0$。

推论2：若方阵A中有两行（列）成比例，则$|A|=0$

性质4 若方阵A的某一列（行）的元素都是两数之和

$$\text{则},|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A|=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots\left(a_{ij_i}+b_{ij_i}\right)\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

问题 下面的等式是正确的吗？

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix}$$

性质5 若 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\quad A\underset{(c_i+kc_j)}{\overset{r_i+kr_j}{\longrightarrow}}B$ 则 $|B|=|A|$

性质5告诉我们，矩阵A的行列式的某一行（列）元素，加上另一行（列）对应元素的k倍，行列式的值不变。

例1 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$

主对角线以下全部化为零。

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \times 3$

$$\xlongequal{r_2+3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \times(-2)$$

$$\xlongequal{r_2-2r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \quad (-4)\times,\ \times(-3)$$

$$\xlongequal[r_4-4r_1]{r_3-3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_2}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \times(-2)$$

$$\xlongequal{r_5-2r_3}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \times 4$$

$$\xlongequal{r_5+4r_4}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

评注　本题利用行列式的性质，采用“化零”的方法，逐步将所给行列式化为三角形行列式．化零时一般尽量选含有 1 的行（列）及含零较多的行（列）；若没有 1，则利用行列式性质将某行（列）中的某数化为1；若所给行列式中元素间具有某些特点，则应充分利用这些特点，应用行列式性质，以达到化为三角形行列式之目的．

例2: 证明

$$\begin{vmatrix} a+d & d+g & g \\ b+e & e+h & h \\ c+f & f+l & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$$

方法一:

$$\begin{vmatrix} a+d & d+g & g \\ b+e & e+h & h \\ c+f & f+l & l \end{vmatrix} \overset{c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} a-g & d+g & g \\ b-h & e+h & h \\ c-l & f+l & l \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+c_3 \\ c_2-c_3}}{=} \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$$

方法二:

$$\begin{vmatrix} a+d & d+g & g \\ b+e & e+h & h \\ c+f & f+l & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d+g & g \\ b & e+h & h \\ c & f+l & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d+g & g \\ e & e+h & h \\ f & f+l & l \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & g & g \\ e & h & h \\ f & l & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & g & g \\ b & h & h \\ c & l & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d & g \\ e & e & h \\ f & f & l \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$$

例3　计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解　将第 $2,3,\cdots,n$ 都加到第一列得

$$D \xlongequal{c_1+c_2+\dots+c_n} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

c_1+c_2
c_1+c_3
......
c_1+c_n

$$D = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$D = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ \vdots \\ r_n-r_1}}{=\!=} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

$$\text{若}D_n=\begin{vmatrix} x & b & \cdots & b \\ b & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & x \end{vmatrix}=0,\quad \Rightarrow x_1=(1-n)b;$$

$$x_2=x_3=\cdots=x_n=b;$$

例4:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2\ldots n)$, $|A|$称为对称行列式。

若$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2\ldots n)$, $|A|$称为反对称行列式。

证明：奇数阶反对称行列式等于零。

证明:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}\ (\text{其中}n\text{为奇数})$$

$$|A^T|=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A^T|=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n|A|$$

即$|A|=(-1)^n|A|$

所以$|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

例5 证明:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 4 & 14 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 14 \end{vmatrix}$$

证明:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 14 \end{vmatrix}=6$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 4 & 14 \end{vmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_1-2r_2}}{=}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 4 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3\leftrightarrow c_4}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&2&0&0&0\\1&2&1&2&5\\3&4&0&1&2\\5&6&4&8&14\end{vmatrix}\overset{\substack{c_4-2c_3\\c_5-5c_3\\c_5-2c_4}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&2&0&0&0\\-1&2&1&0&0\\3&4&0&1&0\\5&6&4&0&-6\end{vmatrix}=-12$$

$=D_1D_2$

说　明：

$$\text{设 } D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&&&\\\vdots&&\vdots&&0&\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&&&\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}\qquad \boxed{D=|A||B|}.$$

$$|A|=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix},|B|=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

例6：计算初等矩阵的行列式

解：初等矩阵有三种类型，分别是：

$$E(i,j),E(i(k)),E(i,j(k))$$

$$E\xrightarrow[(c_i\leftrightarrow c_j)]{r_i\leftrightarrow r_j}E(i,j);\ E\xrightarrow[(kc_i)]{kr_i}E(i(k));\ E\xrightarrow[(c_i+kc_j)]{r_i+kr_j}E(i,j(k));$$

$$E(i,j)=-|E|=-1$$

$$E(i(k))=k|E|=k$$

$$E(i,j(k))=|E|=1$$

定理2.3：设A,B均为n阶方阵，则$|AB|=|A||B|$.

证明：分两种情况：

1，A是初等矩阵

(1)$A=E(i,j)$，　此时$B\rightarrow E(i,j)B=AB$.

所以$|AB|=(-|B|)=|A||B|$.

(2)$A=E(i(k))$，此时$B\rightarrow E(i(k))B=AB$.

所以$|AB|=k|B|=|A||B|$.

(3)$A=E(i,j(k))$，此时$B\rightarrow E(i,j(k))B=AB$.

所以$|AB|=|B|=|A||B|$.

2，A为任意n阶矩阵。

此时，存在初等矩阵$P_i(i=1,\ldots t)$

使得$A=P_1P_2\ldots P_tR$，其中R为行简化阶梯阵。

$$\text{所以：}|AB|=|P_1P_2\cdots P_tRB|$$
$$=|P_1||P_2\cdots P_tRB|$$
$$=\cdots$$
$$=|P_1||P_2|\cdots|P_t||RB|$$

（1）当A为可逆矩阵时，其行简化阶梯阵$R=E$，

所以$RB=B$，

$$|AB|=|P_1||P_2|\cdots|P_t||RB|=|P_1||P_2|\cdots|P_t||B|$$

$$|A|=|P_1||P_2|\cdots|P_t|$$

所以$|AB|=|A||B|$.

（2）当A为不可逆矩阵时，其行简化阶梯阵R有零行，

所以RB有零行，故$|R|=|RB|=0$。

$$|AB| = |P_1||P_2|\cdots|P_t||RB| = 0$$

$$|A| = |P_1||P_2|\cdots|P_t||B| = 0$$

所以$|AB|=|A||B|$.

定理2.3：设A,B均为n阶方阵,则$|AB|=|A||B|$.

推论：若$A_i(i=1,2,\ldots s)$为n阶方阵，则有

$$|A_1A_2\cdots A_s| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$$

例7

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ -3 & -4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $|A|>0$，计算行列式A.

解：$A^TA=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ -3 & -4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

所以 $|A|^2 = |A^T||A| = |A^TA| = 30^4$

从而 $|A| = 900$

小结

行列式的5个性质(行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立).

计算行列式常用方法：(1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

行列式的一个重要性质：

定理：设A,B均为n阶方阵,则$|AB|=|A||B|$.

推论：若$A_i(i=1,2,\ldots s)$为n阶方阵，则有

$$|A_1A_2\cdots A_s|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$$

作业：

习题2.2A：1, 2(2)(3)
习题2.2B：1

预习行列式的展开定理

第三节　行列式的展开定理

- 行列式按一行（列）展开
- 伴随矩阵与矩阵求逆

2.3.1 行列式按一行（列）展开

定义2.5:

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，剩下的元素按原来的相对位置排列，形成的n-1阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, 叫做元素a_{ij}的代数余子式.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别对应着一个余子式和代数余子式。

引理2.1:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}$$

证明:当a_{ij}位于第一行第一列时,

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即有 $|A|=a_{11}M_{11}$.

又 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$,

从而 $|A|=a_{11}A_{11}$.

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

引理2.2: 若A的第i行除a_{ij}外，其余元素都为零，则$|A|=a_{ij}A_{ij}$.

例如 $$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把$|A|$的第i行依次与第i-1行，第i-2行…第1行对调，

$$|A| = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再把$|A|$的第j列依次与第j-1列，第j-2列…第1列对调，

$$|A| = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j-1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

所以$|A|=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}$

引理2.2: 一个n阶行列式，如果其中第i行所有元素除a_{ij}外都为零，那末这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积。

定理2.4: 设n阶矩阵$A=(a_{ij})$，则A的行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

$$(i、j = 1,2,\cdots,n)$$

证明:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0 & 0+a_{i2} & \cdots & 0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0+0 & a_{i2}+0 & \cdots & 0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots n)$$

同理可以证明列的情况。

推论　设n阶矩阵$A=(a_{ij})$，则A的行列式等于某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, i=j.\\ 0,\quad i\neq j.\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, i=j.\\ 0,\quad i\neq j.\end{cases}$$

证明：把行列式$|A|$按第j行展开，有

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn},$$

当$a_{jk}=a_{ik}(k=1,\ldots,n)$时，

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ \boxed{a_{i1} \quad a_{in}}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

当$i\neq j$时，

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,$$

同理可证明列的情况。

例1　计算行列式　$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0\end{vmatrix}$

解　$D=(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$\frac{r_2+(-2)r_1}{r_3+r_1}\ -10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{vmatrix}=-10\cdot(-2)\begin{vmatrix} -7 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}$$

$$=20(-42-12)=-1080.$$

评注　本题是利用行列式的性质将所给行列式的某行（列）化成只含有一个非零元素，然后按此行（列）展开，每展开一次，行列式的阶数可降低1阶，如此继续进行，直到行列式能直接计算出来为止（一般展开成二阶行列式）．这种方法对阶数不高的数字行列式比较适用．

例2　计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a-1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

解：按第一行展开，得

$$D_n=aD_{n-1}-(a-1)D_{n-2}$$

等号两端减D_{n-1}，得

$$D_n-D_{n-1}=(a-1)D_{n-1}-(a-1)D_{n-2}$$

这是一个关于D_n-D_{n-1}的递推公式，反复使用递推公式，得:

$$D_n-D_{n-1}=(a-1)(D_{n-1}-D_{n-2})$$
$$\cdots$$
$$=(a-1)^{n-2}(D_2-D_1)$$

因为　$D_2=\begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-a+1$

$$D_1=a,\quad D_2-D_1=(a-1)^2$$

$$\therefore\quad D_n-D_{n-1}=(a-1)^{n-2}(D_2-D_1)$$
$$=(a-1)^n$$

$$\therefore\quad D_n=D_{n-1}+(a-1)^n$$
$$=D_{n-2}+(a-1)^{n-1}+(a-1)^n\cdots$$
$$=a+(a-1)^2+\cdots+(a-1)^{n-1}+(a-1)^n$$

$$\therefore\quad D_n=D_{n-1}+(a-1)^n$$
$$=D_{n-2}+(a-1)^{n-1}+(a-1)^n\cdots$$
$$=a+(a-1)^2+\cdots+(a-1)^{n-1}+(a-1)^n$$

$$=\begin{cases} n+1 & a=2 \\ \dfrac{(a-1)^2-(a-1)^{n+1}}{2-a}+a & a\neq 2 \end{cases}$$

例

$$\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)\Leftrightarrow(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$
$$(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)$$
$$\cdots$$
$$(x_n-x_{n-1})$$

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j).\quad (1)$$

n阶范德蒙德行列式的特点:

1.每列(行)为某个数的不同方幂

2. 幂次从0递增到n-1

3. 结果为后列元素减去前列元素的乘积

证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$V_n(x_1,x_2,\cdots x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j).$$

证明: 用数学归纳法

$$\because\quad V_2(x_1,x_2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j),$$

$\therefore$　所以当n=2时等式成立。

假设等式对于n-1阶范德蒙行列式成立，往证n阶范德蒙行列式也成立。

将V_n降阶：从第n行开始，后行减去前行的x_1倍，则

$$V_n \xlongequal[\substack{\cdots \\ r_2 - x_1 r_1}]{r_n - x_1 r_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

将V_n按第一列展开，并把每列的公因子$(x_i$-$x_1)$提出来，

$$V_n = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

n-1阶范德蒙行列式

$$\therefore \quad V_n = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\ge i>j\ge 2}(x_i-x_j)$$
$$= \prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).$$

例4: 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad b \ne a_i,\ i=1, \dots, n.$$

解: 用加边法，构造阶行列式，

使得按第一行（列）展开后，等于原行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 & b & \cdots & b \\ 0 & b & a_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{c_1 + \frac{1}{a_i-b}c_{i+1}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b} & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+\frac{1}{a_i-b}c_{i+1}}{\underset{i=1,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b} & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_n-b)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b})$$

计算行列式常用方法:

1.利用定义
2.利用性质化为三角形行列式
3.行列式按行（列）展开原则
4.递推法
5.数学归纳法
6.每行和为常数，列相加，再提取公因子
7.相邻两行依次相减，化简行列式
8.利用已有的结论
9.加边法

2.3.2，伴随矩阵与矩阵求逆

伴随矩阵

（1）定义2.6

行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$\boxed{A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$

称为矩阵A的伴随矩阵.

（2）性质

$AA^*=A^*A=|A|E.$

$$A=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

证明 $A=(a_{ij})$, $A^*=(A_{ji})$, $B=AA^*=(b_{ij})$

则 $b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$

$A=(a_{ij})$, $AA^*=(b_{ij})$,

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} |A| & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

$$\text{故}\quad AA^*=(b_{ij})=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=|A|E$$

同理可得 $A^*A=|A|E.$

逆矩阵的求法

定理2.5 矩阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$, 且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,$$

其中A^*为矩阵A的伴随矩阵。

证明 $\overset{\text{必要性}}{\Rightarrow}$ 矩阵A可逆，则$|A|\neq 0$

若 A 可逆，即有B使$AB=E$。

所以$|AB|=|E|=1$，又$|AB|=|A||B|=1$

所以$|A|\neq 0$。

充分性

$\Leftarrow$ 若$|A|\neq 0$，则矩阵A可逆$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$,

$$AA^*=A^*A=|A|E$$

$$\because |A|\neq 0,$$

$$\frac{AA^*}{|A|}=\frac{A^*A}{|A|}=\frac{|A|E}{|A|}$$

即 $A\frac{A^*}{|A|}=\frac{A^*}{|A|}A=E,$

按逆矩阵的定义得 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}.$

说明

1.矩阵A可逆的充要条件: $|A|\neq 0$

2. A的逆矩阵的计算:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$$

伴随矩阵法

注意：方阵A的伴随矩阵A^*总是存在的，而A的逆阵却不一定存在。

例5: 判断下列矩阵是否可逆，若可逆，求其逆矩阵。

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&3&4\\-1&-5&-4\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

解：由于$|A|$=0; $|B|$=-2，故A不可逆，B可逆。

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{21}&B_{31}\\B_{12}&B_{22}&B_{32}\\B_{13}&B_{23}&B_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$$

例6 设n阶方阵B可逆，方阵A满足$A^2-A=B$，证明A可逆，并求其逆。

证明： 因为方阵B可逆，则

$$|A||A-E|=|B|\neq 0$$

所以矩阵A可逆。

$$A^{-1}=(A-E)B^{-1}$$

小结

一，代数余子式的重要性质

函数: $\delta_{ij}=\begin{cases}1，当i=j,\\0，当i\neq j,\end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D，当i=j,\\0，当i\neq j,\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D，当i=j,\\0，当i\neq j,\end{cases}$$

二，计算行列式常用方法:

1.利用定义
2.利用性质化为三角形行列式
3.行列式按行（列）展开原则
4.递推法
5.数学归纳法
6.每行和为常数，列相加，再提取公因子
7.相邻两行依次相减，化简行列式
8.利用已有的结论
9.加边法。

三，逆矩阵的求法

定理: 矩阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$, 且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,$$

其中A^*为矩阵A的伴随矩阵。

作业：
习题2.3A：
2，3
习题2.3B：
1(1)(2)(3), 2
预习克莱姆法则

第四节 克莱姆(Cramer)法则

定理2.6(克莱姆法则) 设有n元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$ (简记为$Ax=b$)

当系数行列式D不为零时，方程组有唯一解：

$$x_j=\frac{D_j}{D}, 1\le j\le n$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式.

证明：若$D=|A|\neq 0$,矩阵A可逆；

此时方程组有唯一解：

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{D}A^*b$$ 其中A^*为伴随矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x_j=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_{ij}b_i}{D}=\frac{D_j}{D}(1\le j\le n)$$

说　明

1. 用克莱姆法则解方程组的两个条件

(1) 方程个数等于未知量个数；

(2) 系数行列式不等于零.

2. 克莱姆法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系. 它主要适用于理论推导.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (1)$$

定理2.7 如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

例1 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3+x_4=3, \\ 3x_2+4x_4=4, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=11/6, \\ x_1-x_2-3x_3+2x_4=5/6. \end{cases}$$

解 $$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=67\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3&5&2&1\\4&3&0&4\\11/6&1&1&1\\5/6&-1&-3&2\end{vmatrix}=\frac{67}{3},\quad D_2=\begin{vmatrix}3&3&2&1\\0&4&0&4\\1&11/6&1&1\\1&5/6&-3&2\end{vmatrix}=0,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&5&3&1\\0&3&4&4\\1&1&11/6&1\\1&-1&5/6&2\end{vmatrix}=\frac{67}{2},\quad D_4=\begin{vmatrix}3&5&2&3\\0&3&0&4\\1&1&1&11/6\\1&-1&-3&5/6\end{vmatrix}=67,$$

$$\therefore x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{3},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=0,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{2},\quad x_4=\frac{D_4}{D}=1.$$

非齐次与齐次线性方程组的概念

设线性方程组
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

若常数项$b_1,\ldots,b_n$不全为零，则称此方程组为非齐次线性方程组;

若常数项$b_1,\ldots,b_n$全为零， 此时称方程组为齐次线性方程组.

齐次线性方程组的相关定理

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\qquad(2)$$

定理2.8 如果齐次线性方程组 (2) 的系数行列式 $D\neq 0$ 则齐次线性方程组 (2) 没有非零解.

定理2.9 如果齐次线性方程组(2)有非零解, 则它的系数行列式必为零.

例2 给定齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+a)x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1+a)x_3=0\end{cases}$$

当a取何值时，方程组有非零解?

解: 若齐次方程组有非零解，则它的系数行列式必为零

而方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+a&1&1\\1&1+a&1\\1&1&1+a\end{vmatrix}=(3+a)a^3$$

当a=3或$a=0$时，系数行列式D=0,
容易验证，此时方程组的确有非零解。

例3: 求通过平面上两个不同点(x_1,y_1),(x_2,y_2)的直线方程。

解: 直线方程为: $ax+by+c=0$

因为点(x_1,y_1),(x_2,y_2)在直线上，所以

$$ax_1+by_1+c=0$$

$$ax_2+by_2+c=0$$

将三个方程联立，则

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \end{cases}$$

由于方程有非零解，所以

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & a \end{vmatrix}=0$$

将行列式按第一行展开，有

$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-x_2y_1=0$$

由于给定两点是不同的，

所以y_1-y_2，x_1-x_2不全为零，

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & a \end{vmatrix}=0$$ 就是所求直线方程。

小结

一，克莱姆法则

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

当系数行列式不为零时，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式.

说　明

1. 用克莱姆法则解方程组的两个条件

(1) 方程个数等于未知量个数；

(2) 系数行列式不等于零.

2. 克莱姆法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系. 它主要适用于理论推导.

二， 重要定理

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (1)$$

定理1　如果线性方程组(1)的系数行列式 $D\neq 0$, 则 (1)一定有解, 且解是唯一的 .

定理2　如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

齐次线性方程组的相关定理

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

定理3　如果齐次线性方程组 (2) 的系数行列式 $D \neq 0$ 则齐次线性方程组 (2) 没有非零解.

定理4　如果齐次线性方程组 (2) 有非零解, 则它的系数行列式必为零.

作业：

习题2.4A：1(1), 2
2.4B：1

知识网络图

行列式
- 概念：不同行不同列元素乘积的代数和（共n!项）。
- 性质
  - 经转置行列式的值不变。
  - 某行有公因子，可将其提到行列式外。
  - 某行所有元素都有两个数的和，则可将其写成两个行列式的和。
  - 两行互换，行列式变号。
  - 某行的K倍加到另一行，行列式的值不变。
- 展开式
  - $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$（按i行展开）
  - $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$（按j列展开）
- 计算
  - 数字型：三角化法；公式法；递推法
  - 抽象型——用行列式性质
- 应用：克来姆法则（理论推导）