Chapter 2 (3) 线性时不变(LTI)系统
——微分与差分方程描述方法

- 线性常系数微分方程
- 线性常系数差分方程
- 系统框图表示法

线性常系数微分方程

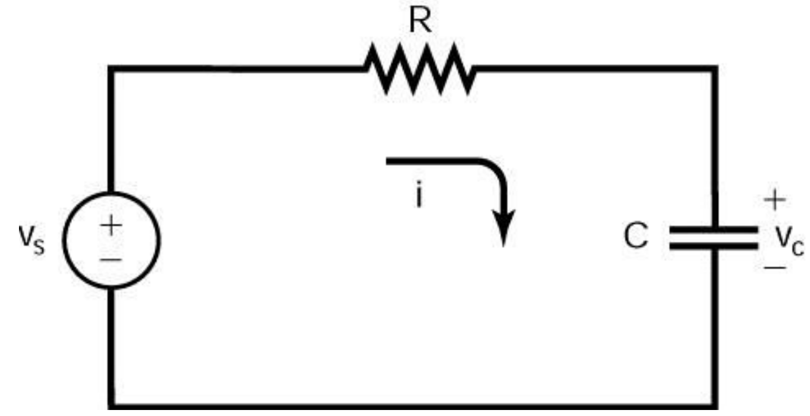
例子：用线性常系数微分方程表征连续时间系统

例1

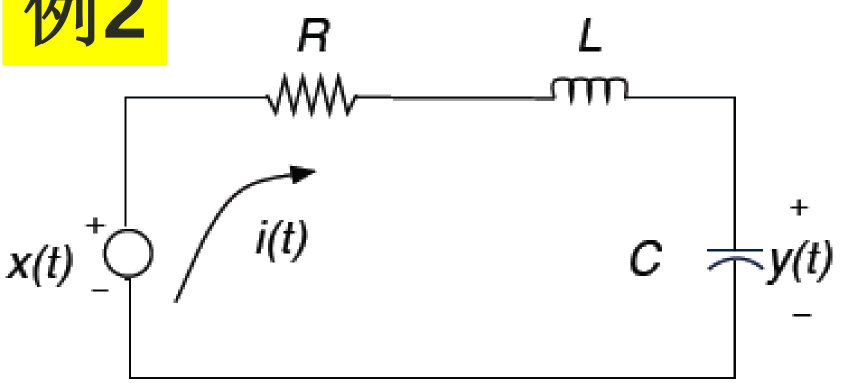
$$i(t)=\frac{v_s(t)-v_c(t)}{R}$$

$$i(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\longrightarrow\quad \frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_c(t)=\frac{1}{RC}v_s(t)$$



例2



$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

$$i(t)=C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\longrightarrow\quad Lc\frac{d^2y(t)}{dt^2}+RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

线性常系数微分方程的表达公式

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

如何得到输入输出之间的显式关系？

求解方法

- 经典时域分析法---微分方程求解法
- 现代系统分析法

线性常系数微分方程

微分方程求解法

解的组成

•微分方程的解由齐次解 (homogeneous solution)和特解(particular solution) 构成。

•齐次解又被称作自然响应 （Natural Response） $y_h(t)$

• 特解又被称作激励响应 （Forced Response）$y_p(t)$

•齐次解+特解=完全解

求解方法

激励响应的解：假设输出信号与输入信号具有相同的形式。

自然响应的解：零输入情况下微分方程的解。$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$

附加条件

对于因果LTI系统，一般使用初始松弛约束条件。

$$\forall t_0, x(t) = 0, t \le t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t \le t_0$$

线性常系数微分方程

微分方程求解法

齐次解求解方法

与系统输入无关，完全由系统自身以及t=0时的初始条件决定。

采用特征方程法求解，其形式由齐次方程的特征根确定。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \mathbf{0}$$

(1)列出特征方程 $\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$ (2)计算特征根 λ_i

(3)根据 λ_i 的具体情况写出齐次解的一般形式。

特征根	齐次解形式
特征根是单实根	$y_h(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{\lambda_k t}$
N重实根	$y_h(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + ...C_N t^N) e^{\lambda t}$
r重实根	$y_h(t) = ((C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + ...C_N t^N) e^{\lambda t} + \sum_{k=r+1}^{N} C_k e^{\lambda_k t}$
共轭复根 $\lambda_i = a_i \pm j\beta_i, m = n/2$ 或 $\lambda_i = \rho_i e^{j\Omega_i}$	$y_h(t) = e^{a_1 t}(C_1 \cos \beta_1 t + D_1 \sin \beta_1 t) + e^{a_2 t}(C_2 \cos \beta_2 t + D_2 \sin \beta_2 t) + \ldots$ $+ e^{a_m t}(C_m \cos \beta_m t + D_m \sin \beta_m t)$

C_k等为待定系数，可通过初始条件（初始松弛条件或者给定）进行求解

线性常系数微分方程

微分方程求解法

特解求解方法

将输入信号x(t)带入微分方程右端（带入后右端函数称为自由项），然后根据不同类型的自由项形式，选择特解的形式$y_p(t)$。再将x(t)和$y_p(t)$以及$y_p(t)$的各阶导数带入原微分方程，最后通过比较方程两端同次项的系数求出特解函数式中的待定系数，即得到微分方程的特解。

与输入型号的函数形式有关

几种典型的自由项及其对应的特解形式

自由项形式	特解形式
C（常数）	P（待定常数）
t^r	$\sum_{i=0}^{r} p_i t^i$
e^{at}	a等于特征根 $e^{at}(p_0 + p_1 t)$
	a不等于特征根 $p_0 e^{at}$
	a等于r重特征根 $\sum_{i=0}^{r} p_i t^i e^{at}$
$\cos(\omega t)$ 或 $\sin(\omega t)$	$p_1\cos(\omega t) + p_2\sin(\omega t)$ 或者 $p\cos(\omega t + \phi)$
$t^r e^{at}\cos(\omega t)$ 或 $t^r e^{at}\sin(\omega t)$	$\sum_{i=0}^{r} p_i t^i e^{at}\cos(\omega t) + \sum_{i=0}^{r} q_i t^i e^{at}\sin(\omega t)$

线性常系数微分方程

微分方程求解法

例2.14 已知某一阶线性时不变连续时间系统的微分方程，

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

输入信号为 $x(t)=Ke^{3t}u(t)$

求系统的完全解。

特解 $y_p(t)=Ae^{3t}u(t) \longrightarrow y_p'(t)=3Ae^{3t}u(t) \longrightarrow A=\frac{k}{5}$

齐次解 $\lambda+2=0 \rightarrow \lambda=-2 \longrightarrow y_h(t)=Ce^{-2t} \longrightarrow y(t)=(Ce^{-2t}+\frac{K}{5}e^{-3t})u(t)$

C的求解 初始松弛条件 $\longrightarrow y(0)=0 \longrightarrow C=-\frac{k}{5}$

答案： $y(t)=\frac{K}{5}\left[e^{3t}-e^{-2t}\right]u(t)$ （初始松弛条件）

线性常系数微分方程

微分方程求解法

例子 已知某二阶线LTI系统的微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=x(t),t>0$$

求系统的完全解。

初始条件为： $y(0)=1$

$y'(0)=2$

输入信号为：

$$x(t)=e^{-t}u(t)$$

特解 $y_p(t)=Ae^{-t}u(t)\to y_p'(t)=-Ae^{-t}u(t)$ $\longrightarrow$ $3Ae^{-t}u(t)=e^{-t}u(t)$

$y_p''(t)=Ae^{-t}u(t)$ $\qquad A=\dfrac{1}{3}$

齐次解 $\lambda^2+6\lambda+8=0\to\lambda_1=-2,\lambda_2=-4$ $\longrightarrow$ $y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-4t}$

$$y(t)=C_1e^{-2t}u(t)+C_2e^{-4t}u(t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

利用初始条件 $\longrightarrow$ $C_1+C_2+\dfrac{1}{3}=1$ $\qquad -2C_1-4C_2-\dfrac{1}{3}=2$

答案： $y(t)=\dfrac{5}{2}e^{-2t}-\dfrac{11}{6}e^{-4t}+\dfrac{1}{3}e^{-t}\qquad t\geq 0$

线性常系数差分方程

形式

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

求解方法

- 经典时域分析方法——差分方程求解
- 递归法
- 现代系统法

  系统完全响应 = 零输入响应+零状态响应

线性常系数差分方程

差分方程求解法 $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

与微分方程求解的原理相同。

解的组成

- 差分方程的解由齐次解和特解 构成:
- 齐次解又被称作自然响应 y_h [n]
- 特解又被称作激励响应 y_p [n]
- 齐次解+特解=完全解

求解方法

激励响应解的形式与输入信号相同。

自然响应是微分方程在零输入情况下的解。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

对于因果LTI系统，初始约束在求解的过程中起了非常重要的作用。

线性常系数差分方程

差分方程求解法

齐次解 采用特征方程法求解，其形式由齐次方程的特征根确定。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=0$$

(1)列出特征方程 **(2)**计算特征根 λ_i

(3)根据 λ_i 的具体情况写出齐次解的一般形式。

C_k为待定系数，可通过初始条件求解，比如初始松弛条件或者给定的初始条件。

特征根	齐次解形式
特征根是单实根	$y_h[n]=\sum_{k=1}^{N} C_k\lambda_k^{\,n}$
N重实根	$y_h[n]=(C_1+C_2n+C_3n^2+\ldots C_Nn^N)\lambda^n$
r重实根	$y_h[n]=((C_1+C_2n+C_3n^2+\ldots C_Nn^N)\lambda^n+\sum_{k=r+1}^{N} C_k\lambda_k^{\,n}$
共轭复根 $\lambda_i=a_i\pm j\beta_i, m=n/2$ 或者 $\lambda_i=\rho_i e^{j\Omega_i}$	$y_h[n]=\rho_1^{\,n}(C_1\cos\Omega_1 n+C_2\sin\Omega_1 n)+\rho_2^{\,n}(C_3\cos\Omega_2 n+C_4\sin\Omega_2 n)+\ldots$ $+\rho_m^{\,n}(C_{N-1}\cos\Omega_m n+C_N\sin\Omega_m n)$
一个共轭复根 $\lambda=a\pm j\beta$,或者 $\lambda=\rho e^{j\Omega}$	$y_h[n]=\rho^n(C_1\cos\Omega n+C_2\sin\Omega n)$

线性常系数差分方程

差分方程求解法

特解

与输入型号的函数形式有关。

将输入信号x[n]带入差分方程右端（带入后右端函数称为自由项），然后根据不同类型的自由项形式，选择特解的形式y[n]。再将x[n]和$y_p[n]$以及$y_p[n]$的各阶差分带入原差分方程，最后通过比较方程两端同次项的系数求出特解函数式中的待定系数，即得到差分方程的特解。

几种典型的自由项及其对应的特解形式

自由项形式	特解形式
a^n	$A\,a^n$（待定常数）（a不是特征根）
	$A_1 n a^n$ （a是特征单根）
	$a^r\sum_{i=0}^{r} A_{r-i} n^{r-i}$ 或 $a^n\sum_{i=r}^{0} A_i n^i$ （a是r重单根）
n^m	$\sum_{i=0}^{m} A_{m-i} n^{m-i}$ 所有特征根不等于1
	$n^r\sum_{i=0}^{m} A_{m-i} n^{m-i}$ r重特征根等于1
$a^n n^m$	$a^n\sum_{i=0}^{m} A_{m-i} n^{m-i}$
$\cos\Omega n$ 或 $\sin\Omega n$	$A_1\cos\Omega n + A_2\sin\Omega n$ 或者 $A\cos(\Omega n+\phi)$
$a^n\cos\Omega n$ 或 $a^n\sin\Omega n$	$a^n(A_1\cos\Omega n + A_2\sin\Omega n)$ 或 $a^n A\cos(\Omega n+\phi)$

线性常系数差分方程

例子

例子

$$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=x[n]$$

初始条件为：$y[0]=0, y[1]=-1$　输入信号为：$x[n]=2^n u[n]$

求系统的完全响应。

λ^2-5λ+6=0 $\rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=3 \longrightarrow y_h[n]=C_1 2^n+C_2 3^n$

$\downarrow$

$y_p(n)=A_1 n2^n \longrightarrow y[n]=C_1 2^n+C_2 3^n-n2^{n+1}$

$\downarrow$

$A_1 n2^n-5A_1(n-1)2^{n-1}+6A_1(n-2)2^{n-2}=2^n$　带入初始条件 $\downarrow$

$\downarrow$

$A_1=-2$　C_1=3, C_2=-3

答案：$y[n]=-3\bullet 2^n+3.3^n-n2^{n+1} \qquad n\geq 0$

线性常系数差分方程

迭代法/递归法

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad (1) \quad \rightarrow \quad y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\} \quad (2)$$

递归系统

recursive system

当N>0时，y[n]可以由以前的输入和输出值表示，该过程是一个递归过程。(1)(2)描述的系统称为递归系统。

非递归系统

当N=0时 $$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \quad (3)$$

nonrecursive system

当N=0时，y[n]由以前的输入和当前输入值表示，与前面计算出来的输出值无关，确定y[n]不需要初始条件，该过程是一个非递归过程。由(3)描述的系统称为非递归系统。

线性常系数差分方程

➡ 迭代法/递归法

有限脉冲响应　　当N=0时 $$y[n]=\sum_{k=0}^{M}\frac{b_k}{a_0}x[n-k] \qquad (3)$$

nonrecursive system

方程(3)的单位脉冲响应为 $$h[n]=\begin{cases}\dfrac{b_k}{a_0} & 0\le n\le M \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \qquad (4)$$

(4)的单位脉冲响应是有限长的，即在某个有限的时间间隔内是非0，因此(3)表征的系统往往称为有限脉冲响应(**FIR, Finite impulse response**)系统。

无限脉冲响应　　单位脉冲响应是无限长的系统称为无限脉冲响应。

infinite impulse response (IIR) system which has an impulse response of infinite duration.

线性常系数差分方程

迭代法/递归法 $y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$

例2.15 **1阶线性常系数差分方程 ,用迭代法求解差分方程。**

$y[n]-0.5y[n-1]=x[n],\quad y[-1]=0,$ 输入：$x[n]=\delta[n]$

求解

初始松弛条件

$$y[0]=1+\left(\frac{1}{2}\right).0=1$$

$$y[1]=x[1]+\frac{y[0]}{2}=\frac{1}{2}$$

$$y[2]=x[2]+\frac{y[1]}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

.....

$$y[n]=x[n]+\frac{y[n-1]}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\rightarrow \quad h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$\downarrow$

无限脉冲响应

线性常系数差分方程

例子 迭代法/递归法

$$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=x[n]$$

例子

初始条件为：$y[0]=0, y[1]=-1$ 输入信号为：$x[n]=2^n u[n]$

求系统的完全响应。

$$y[n]=5y[n-1]-6y[n-2]+2^n u[n]$$

$$y[2]=5y[1]-6y[0]+2^2=-1$$

$$y[3]=5y[2]-6y[1]+2^3=9$$

$$y[4]=5y[3]-6y[2]+2^4=67$$

$$\cdots \qquad y[n]=-3\bullet 2^n+3.3^n-n2^{n+1} \qquad n\geq 0$$

用微分和差分方程描述一阶系统的方框图表示

表达式

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n] \longrightarrow y[n] = -ay[n-1] + bx[n]$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \longrightarrow y(t) = -\frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t)$$

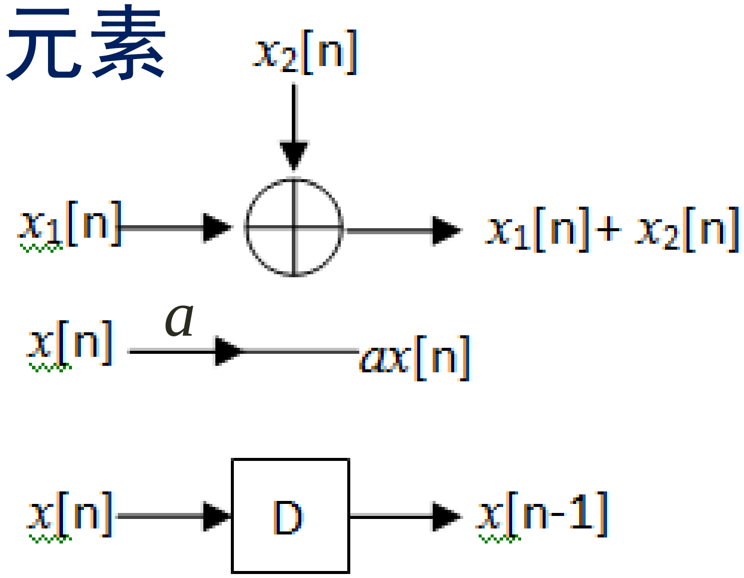
方框图元素

离散时间系统

加法

乘以系数

延迟

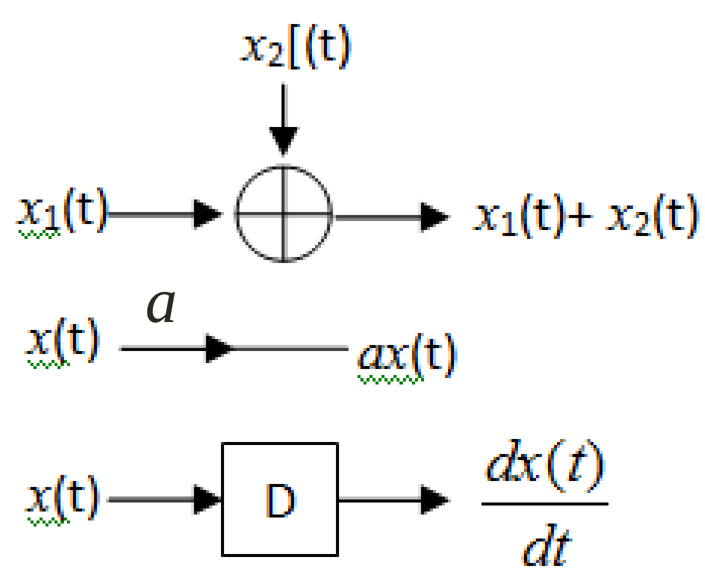


连续时间系统

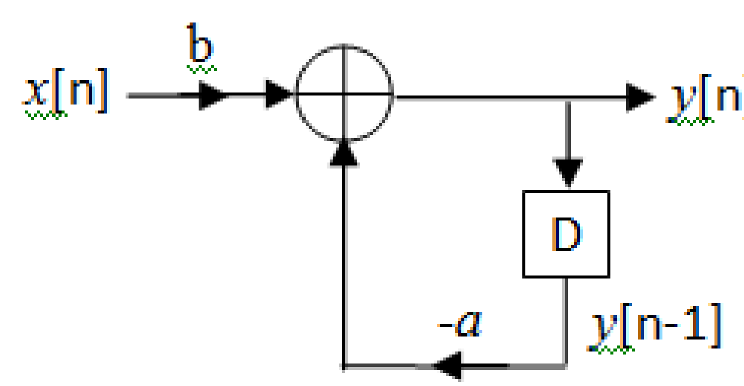
加法

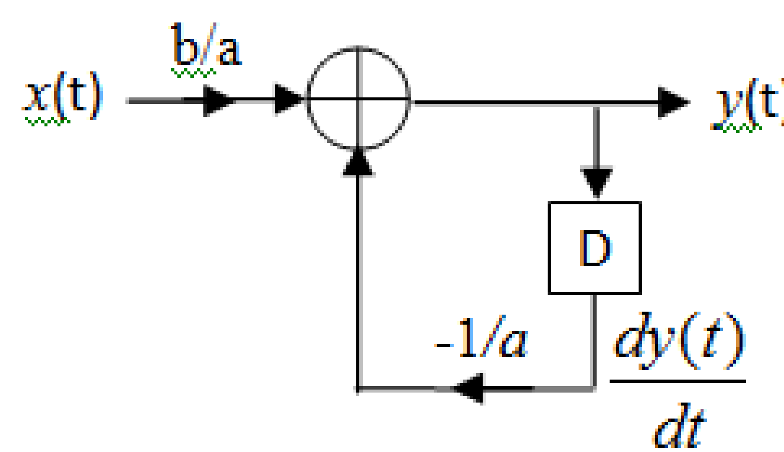
乘以系数

微分



系统方框图表示





用微分和差分方程描述一阶系统的方框图表示

连续系统的积分器方框图

微分器的缺点 实际中实现困难，且易受噪声影响又极为灵敏

解决方案 积分器取代微分器

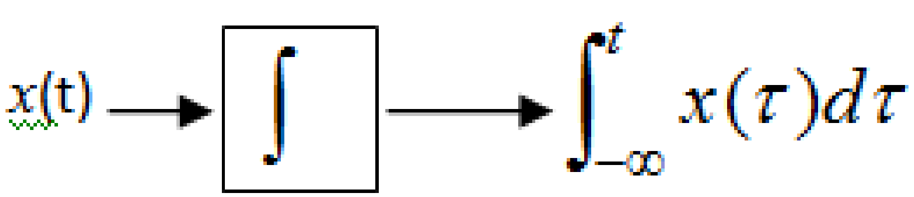
$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=bx(t)$$

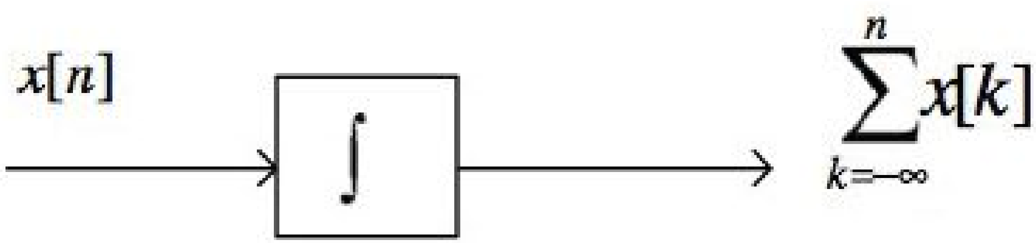
$$\downarrow$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}bx(\tau)-ay(\tau)d\tau \longleftarrow \frac{dy(t)}{dt}=bx(t)-ay(t)$$

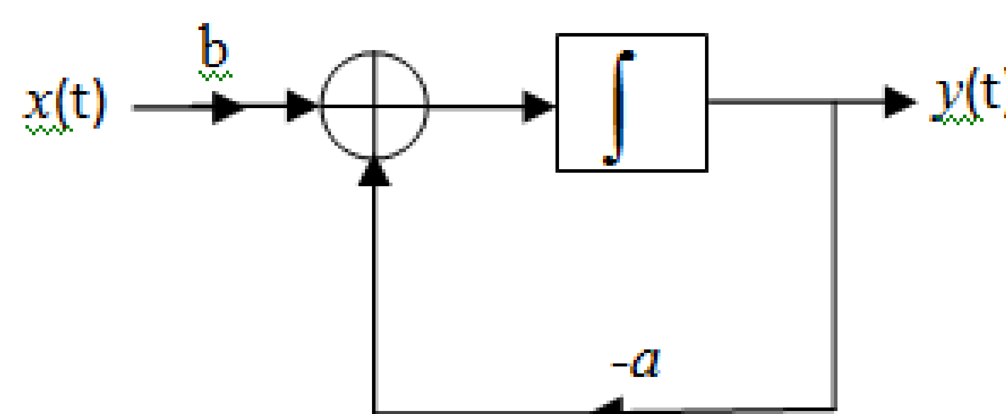
方框图元素定义

积分器





系统方框图

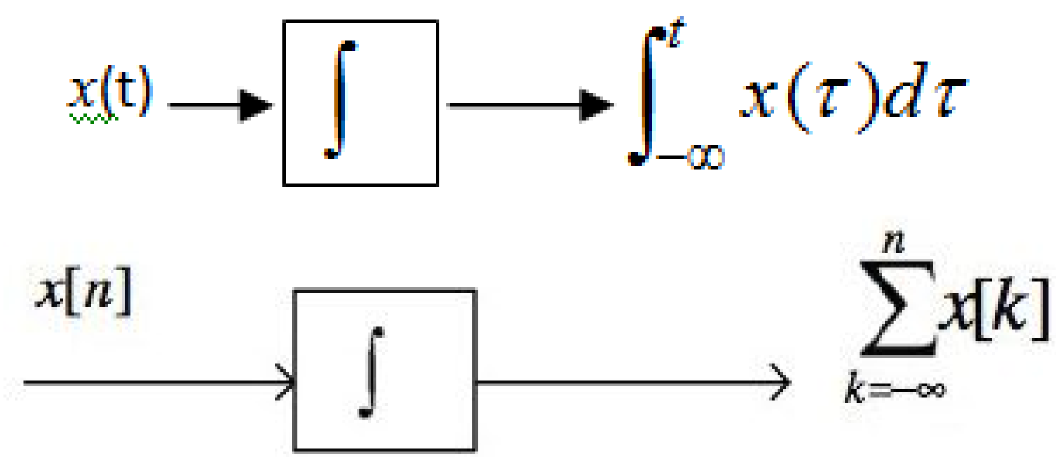


用微分和差分方程描述一阶系统的方框图表示

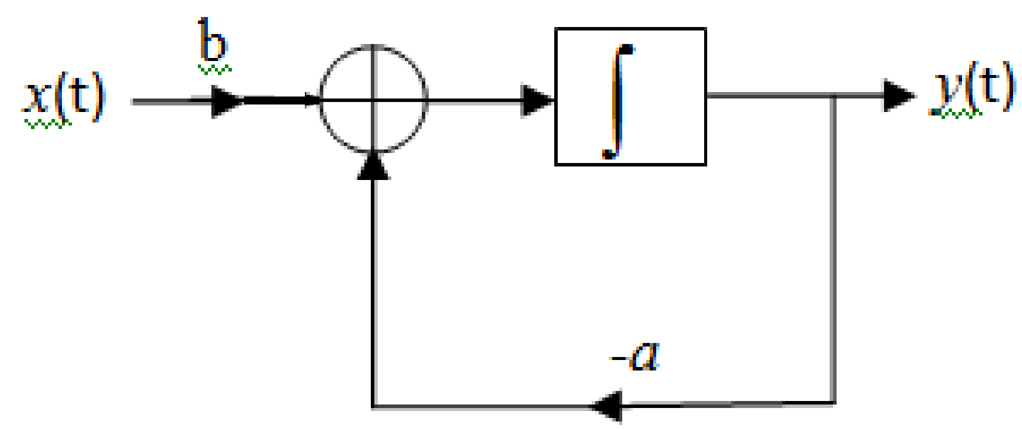
连续系统的积分器方框图

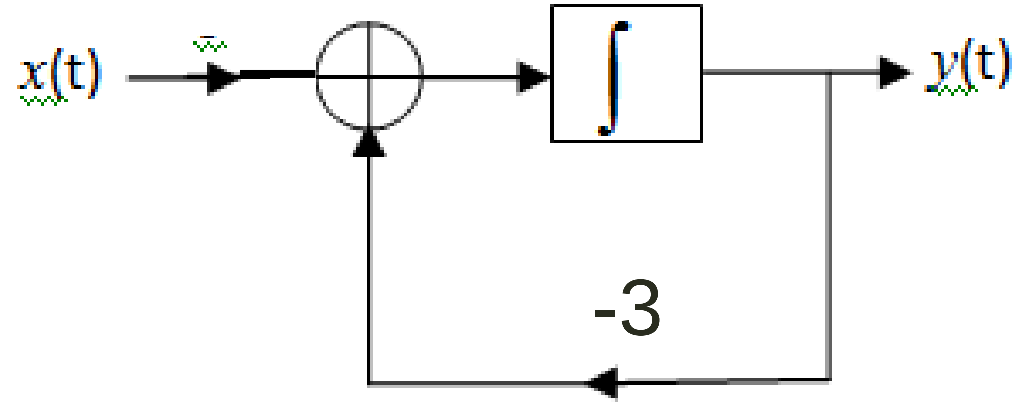
方框图元素定义

积分器



系统方框图





提高题2.39

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=x(t)-3y(t)$$

有用的一些公式

- 微分

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 积分

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C \quad a \neq 1 \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0 \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \quad (x) \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C \quad a \neq 1 \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \mathbf{x} \neq \frac{2n+1}{2}$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{ax-1}{a^2} e^x + C \qquad \int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C \qquad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

作业

2.17(a)

2.18