§3 条件分布

- 条件分布律
- 条件分布函数
- 条件概率密度

返回主目录

一、离散型随机变量的条件分布律

设（X ,Y）是二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad i,j=1,2,\cdots$$

(X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律分别为：

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j=1,2,\cdots$$

返回主目录

由条件概率公式自然地引出如下定义：

定义：设 (X ,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若 P{Y= y_j }>0, 则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, i=1,2,\cdots$$

为在 Y= y_j 条件下随机变量 X 的条件分布律。

条件分布律具有分布律的以下特性：

1^0 P{ X= x_i |Y= y_j }0 ；

$$2^0 \quad \sum_{i=1}^{\infty} P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}=\frac{1}{p_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}=\frac{p_{\bullet j}}{p_{\bullet j}}=1.$$

例 1 (X,Y)的联合分布律及边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}=p_{0\cdot}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}=p_{1\cdot}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}=p_{2\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}=p_{\cdot 0}$	$\frac{4}{9}=p_{\cdot 1}$	$\frac{1}{9}=p_{\cdot 2}$	

则在 Y= 0 条件下，随机变量 X 的条件分布律为：

$$P\{X=0\mid Y=0\}=\frac{p_{00}}{p_{\bullet 0}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{4}\qquad P\{X=1\mid Y=0\}=\frac{p_{10}}{p_{\bullet 0}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2}$$

$$P\{X=2\mid Y=0\}=\frac{p_{20}}{p_{\bullet 0}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{4}$$

返回主目录

同样对于固定的 i，若 P{X= x_i}>0，则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, j=1,2,\cdots$$

为在 X= x_i 条件下随机变量 Y 的条件分布律。

例 2

一射手进行射击，击中目标的概率为 p，射击到击中目标两次为止。设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数，试求 X 和 Y 的联合分布律以及条件分布律。

解：Y的取值是2，3，4，⋯；X的取值是1，2，⋯，

并且$X<Y$.

X,Y的联合分布律为

$$P\{X=m\ ,\ Y=n\}$$

$$=P\{第m\text{ 次射击时首次击中目标，且第}n\text{ 次射击时第二次命中目标}\}$$

由独立性，可得

$$P\{X=m\ ,\ Y=n\}=q^{m-1}\cdot p\cdot q^{n-m-1}\cdot p=q^{n-2}\cdot p^2$$

（其中$q=1-p$）　$(n=2,\ 3,\ \cdots;\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

X的边缘分布律为　$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}$

$$=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}\quad=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}q^{n-2}=p^2\bullet\frac{q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1},\quad m=1,2,\cdots$$

$$P\{X=m,Y=n\}=q^{n-2}\cdot p^2$$

Y的边缘分布律为

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},n=2,3,\cdots$$

在 Y=n 条件下随机变量 X 的条件分布律为

当 n=2,3,… 时，

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{p\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\quad m=1,2,\cdots,n-1;$$

返回主目录

在 X= m 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

当 m=1,2,3,… 时，

$$P\{Y=n \mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}, \qquad n=m+1,m+2,\cdots$$

$$P\{X=m,\quad Y=n\}=q^{n-2}\cdot p^2$$

$$(n=2,\ 3,\ \cdots;\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

$$P\{X=m\}=pq^{m-1},\quad m=1,2,\cdots$$

返回主目录

二、条件分布函数

条件分布

设（X ,Y）是二维连续型随机变量，由于

$P\{X=x_i\}=0,\ P\{Y=y_j\}=0,$

不能直接代入条件概率公式，我们利用极限的方法来引入条件分布函数的概念。给定 y，设对于任意固定的正数ε，

$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$，若对于任意实数 x，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{X\le x \mid y<Y\le y+\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X\le x,\ y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

存在，则称为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布函数，写成 $P\{X\le x \mid Y=y\}$，或记为 $F_{X|Y}(x\mid y)$

返回主目录

条件分布

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{P\{X \le x, y < Y \le y+\varepsilon\}}{P\{y < Y \le y+\varepsilon\}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x} du \int_{y}^{y+\varepsilon} f(u,v)\,dv}{\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(v)\,dv}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,v^*)\varepsilon\, du}{f_Y(v^0)\varepsilon} \qquad (y < v^* \le y+\varepsilon,\ y < v^0 \le y+\varepsilon)$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\,du,$$

可见，当$f_Y(y)>0$时，

在条件 Y= y 下 X 的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du,$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

称为随机变量X在$Y=y$的条件下的条件密度函数。

三、连续型随机变量的条件密度函数

§3 条件分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量，其联合密度函数为

$$f(x, y)$$

又随机变量X的边缘密度函数为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

随机变量Y的边缘密度函数为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

返回主目录

则当$f_Y(y)>0$时，可得随机变量X在$Y=y$的条件下的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

当$f_X(x)>0$时，可得随机变量Y在$X=x$的条件下的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

条件密度函数的性质

性质 1. 对任意的x，有 $f_{X|Y}(x|y) \quad 0$

性质 2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$$

简言之，$f_{X|Y}(x|y)$是密度函数．

对于条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$也有类似的性质．

返回主目录

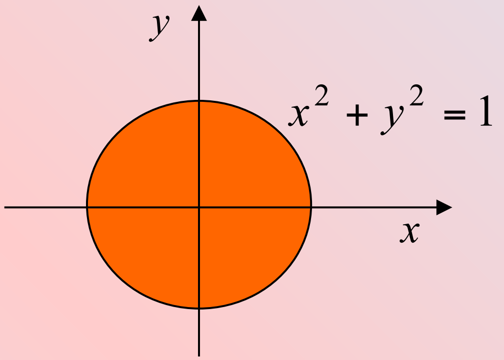
例 3

设二维随机变量(X, Y)服从圆域：$x^2+y^2\le 1$上的均匀分布，试求：

(1)条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$. (2) $P\{X>\frac{1}{2} \mid Y=\frac{1}{2}\}$.

解：(1) 二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



返回主目录

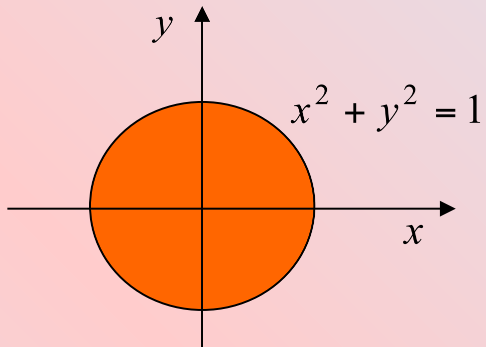
例 3（续）

由此得，当$-1 \le y \le 1$时，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$$

所以，随机变量 Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



由此得，当$-1 < y < 1$时， $f_Y(y) > 0$

返回主目录

例 3（续）

因此当 $-1 < y < 1$ 时，且 $-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$$

所以，

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

即当 $-1 < y < 1$ 时，X 在 $Y = y$ 下的条件分布是区间 $\left[-\sqrt{1-y^2}\quad \sqrt{1-y^2}\right]$ 上的均匀分布．

返回主目录

例 3（续）

所以

$$f_{X|Y}\left(x \middle| y=\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} & -\sqrt{1-\frac{1}{4}} \le x \le \sqrt{1-\frac{1}{4}} \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$(2)\ P\{X>\frac{1}{2} \mid Y=\frac{1}{2}\} = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y=\tfrac{1}{2})dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{3}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)$$

例 4

设二维随机变量 (X, Y) 服从二元正态分布：

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$$

则 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

例 4（续）

又随机变量 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (-\infty<y<+\infty)$$

因此，对任意的 y，$f_Y(y)>0$， 所以，对任意的 y，有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2(1-r^2)}}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-r^2)}\left[x-\left(\mu_1+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right]^2\right\} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

返回主目录

例 4（续）

这表明，二维正态分布的条件分布是一维正态分布：

$$N\left(\mu_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(y-\mu_2\right),\ \sigma_1^2\left(1-r^2\right)\right)$$

例 5

设随机变量 X 服从区间$(0，1)$上的均匀分布，当 $0<x<1$时，随机变量 Y 在 $X=x$的条件下服从区间$(x，1)$上的均匀分布．试求随 机变量Y的密度函数．

解： 随机变量X的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 5（续）

又由题设，知当$0<x<1$时，随机变量Y在条件$X=x$下的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

所以，由公式

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,\ y)}{f_X(x)}$$

返回主目录

例 5（续）

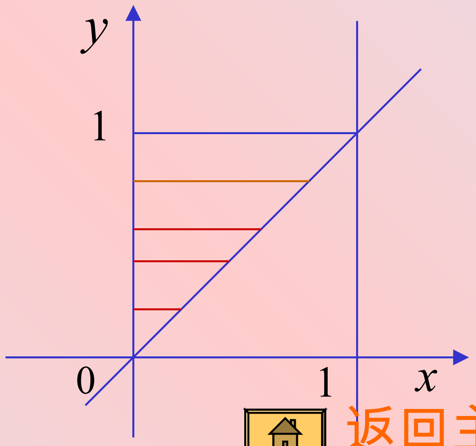
$$f(x, y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & 0<x<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

所以，当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)dx=\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y)$$

所以，随机变量Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln(1-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



返回主目录

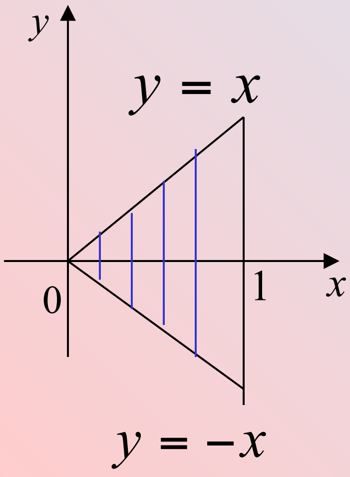
例 6

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求 (1) $f_X(x)$, $f_Y(y)$; (2) $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$;

(3) $P\{X>\frac{1}{2}\,|\,Y>0\}$.

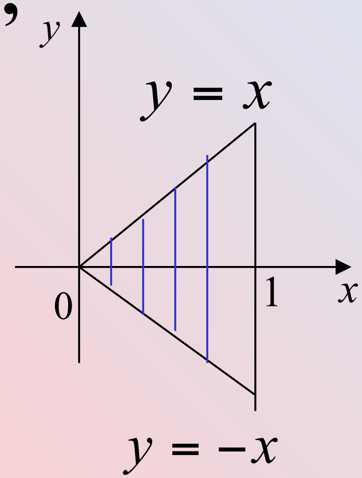


解：

$$(1)\quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}dy=2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

例 6（续）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 dx=1-y, & 0\le y<1,\\ \int_{-y}^1 dx=1+y, & -1\le y<0,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$



$$=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

(2) 当 $|y|<1$，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$

返回主目录

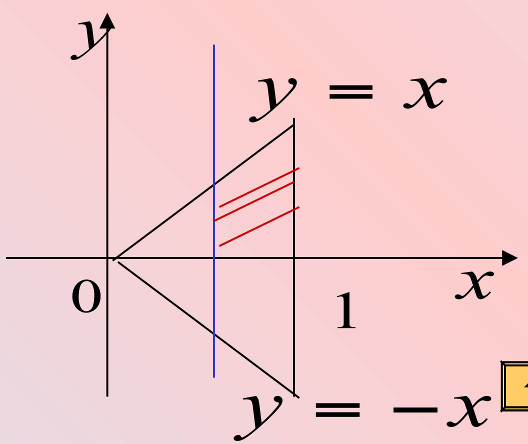
例 6（续）

当$0<x<1$, $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$

$$(3).\ P\{X>\frac{1}{2}\,|\,Y>0\}=\frac{P\{X>\frac{1}{2},Y>0\}}{P\{Y>0\}}$$

p_{85} 11,13,15

$$=\frac{(1+\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\div 2}{\frac{1}{2}\times 1\times 1}=\frac{3}{4}$$



返回主目录