§4.4 洛朗 (*Laurent*) 级数

- 1. 预备知识
- 2. 双边幂级数
- 3. 函数展开成双边幂级数
- 4. 展开式的唯一性

由 §4.3 知，$f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 总可以在 z_0 的某一个圆域 $|z-z_0|<R$ 内展开成 $z-z_0$ 的幂级数。

若 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，在 z_0 的邻域中就**不可能**展开成 $z-z_0$ 的幂级数，但如果在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，那么，$f(z)$ 能否用级数表示呢？

例如，$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0, z=1$ 都不解析, 但在

圆环域 : $0<|z|<1$ 及 $0<|z-1|<1$ 内处处解析.

当 $0<|z|<1$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\overset{\because |z|<1}{=}\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

当$0<|z-1|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}\left[\frac{1}{1-(1-z)}\right]$$

$$\boxed{\because |z-1|<1}$$

$$=\frac{1}{1-z}\left[1+(1-z)+(1-z)^2+\cdots+(1-z)^n+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{1-z}+1+(1-z)+\cdots+(1-z)^{n-1}+\cdots$$

由此推想，若$f(z)$ 在$R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，$f(z)$ 可以展开成级数，只是这个级数含有负幂次项，即

$$f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0$$

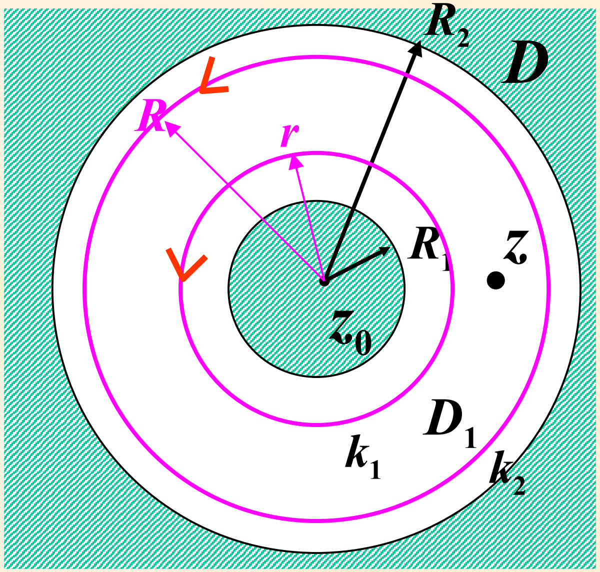
$$+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

本节将讨论在以 z_0 为中心的圆环域内解析的函数的级数表示法。它是后面将要研究的解析函数在孤立奇点邻域内的性质以及定义留数和计算留数的基础。

1. 预备知识

Cauchy 积分公式的推广到复连通域

--- 见第三章第 59 页 14 题



设$f(z)$在$D: R_1 \le |z - z_0| \le R_2$内

解析 .作圆周：$k_1: |z - z_0| = r$,

$k_2: |z - z_0| = R$, 且$r < R$,

k_1、$k_2 \subset D$, $D_1: r < |z - z_0| < R$，

对$\forall z \in D_1$有，

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{k_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\oint_{k_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}$$

2. 双边幂级数 --- 含有正负幂项的级数

定义 形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+ c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots \quad (1)$$

其中z_0及$c_n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$都是常数 --- 双边幂级数

正幂项(包括常数项)部分：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots \quad (2)$$

负幂项部分：

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots \quad (3)$$

级数 (2) 是一幂级数，设收敛半径为 R_2 ，则级数在 $|z-z_0|=R_2$ 内收敛，且和为 $s(z)_+$；在 $|z-z_0|=R_2$ 外发散。

对于级数(3), 若令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}=c_{-1}\zeta+c_{-2}\zeta^{2}+\cdots+c_{-n}\zeta^{n}+\cdots(4)$$

对变数ζ级数(4)为幂级数,设其收敛半径为R,

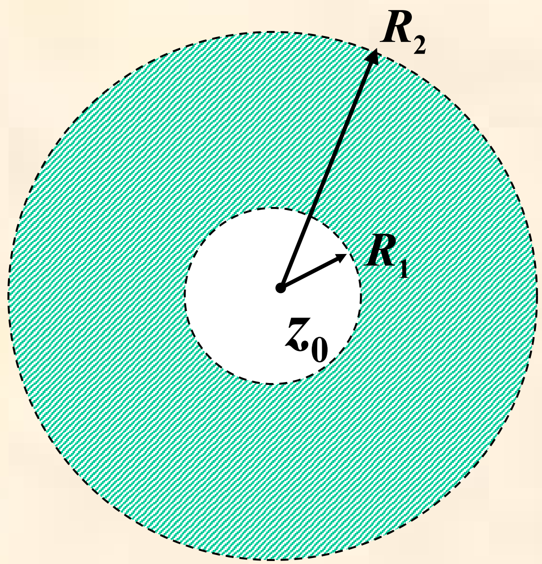
则当$|\zeta|<R$级数收敛,$|\zeta|>R$级数发散。

将$\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$代回得,$\left|\dfrac{1}{z-z_0}\right|<R\overset{令}{=}\dfrac{1}{R_1}$,则级数(4)

当$|z-z_0|>R_1$收敛,且和为$s(z)_-$;当$|z-z_0|<R_1$发散.

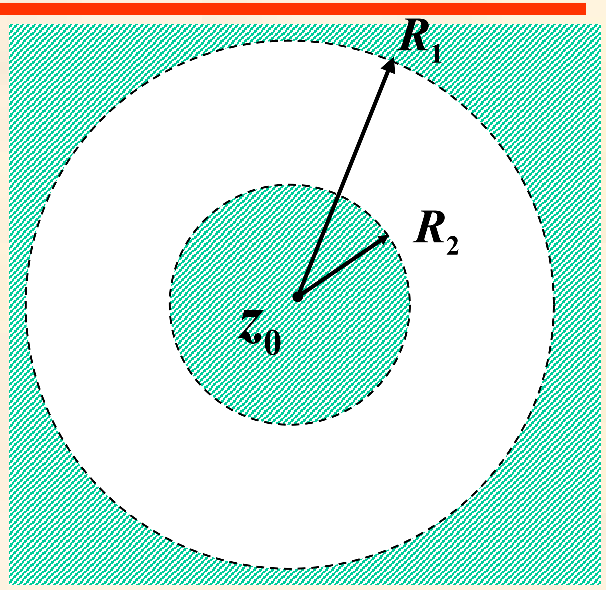
当且仅当$R_1 < R_2$时，级数(2)及(3)有公共收敛区域即圆环域：$R_1 < |z - z_0| < R_2$，此时，

称$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$收敛,且和$s(z) = s(z)_+ + s(z)_-$。



$R_1 < R_2$

有公共收敛域



$R_1 \quad R_2$

无公共收敛域

□ (1)当$R_1 > R_2$时，称$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$处处发散。

(2) 在圆环域的边界$|z-z_0|=R_1$, $|z-z_0|=R_2$ 上，

$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$可能有些点收敛，有些点发散。

(3)$R_1 \overset{\text{可以}}{=} 0 \quad R_2 \overset{\text{可以}}{=} \infty$，此时

收敛域为 $0 < |z-z_0| < \infty$

(4)级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$在$R_1 < |z-z_0| < R_2$内的

和函数是解析的而且可 以逐项求积和逐项求导 .

★3. 函数展开成双边幂级数

定理 设$f(z)$在$D: R_1 < |z - z_0| < R_2$内解析,则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (5)$$

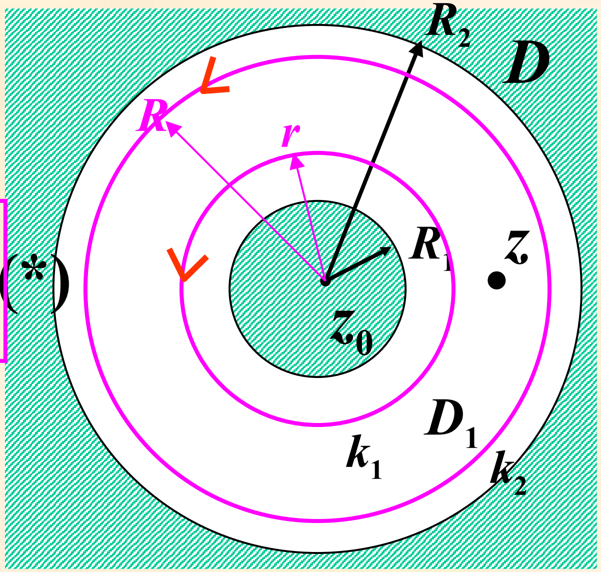
称为$f(z)$在$D: R_1 < |z - z_0| < R_2$内的*Laurent*级数

称为$f(z)$在$D: R_1 < |z - z_0| < R_2$内的*Laurent*展开式

其中: $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \quad (5')$

c是D内绕z_0的任何一条简单闭曲线 .

证明 由复连通域上的 *Cauchy* 积分公式：



$$f(z)=\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_{k_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi}-\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_{k_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi}\ (*)$$

记为 I_1 记为 I_2

$\because$ 当 $\xi\in k_2$ 时 $\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$，

重复§ 3的推导得：

$$I_1=\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{k_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right)}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{c_n}(z-z_0)^n\ (*1)$$

$\because$ 当 $\xi\in k_1$ 时 $\left|\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|\overset{\text{记为}}{=}q<1$，

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{z-z_0-(\zeta-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$

$$=\frac{1}{z-z_0}+\frac{\zeta-z_0}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}+\cdots$$

两边乘以$\dfrac{f(\zeta)}{2\pi i}$,并沿k_1逐项积分(见教材75页)得:

$$-I_2=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{k_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{(z-z_0)^{-1}}{2\pi i}\oint_{k_1}f(\zeta)d\zeta$$

$$+\frac{(z-z_0)^{-2}}{2\pi i}\oint_{k_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-1}}d\zeta+\cdots+(z-z_0)^{-n}\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_{k_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}d\zeta}$$

$$+\cdots=c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+\cdots+\boxed{c_{-n}}(z-z_0)^{-n}+\cdots\qquad(*2)$$

式 (*1),(*2) 中系数 c_n 的积分分别是在 k_2 ， k_1 上进行的，在 D 内取绕 z_0 的简单闭曲线 c ，由复合闭路定理可将 c_n 写成统一式子：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$ 证毕！

级数中正整次幂部分和负整次幂部分分别称为洛朗级数的解析部分 (正则部分) 和主要部分。

(1)当n 0时,系数c_n形式上与高阶导数公式

相同,但$c_n \neq \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$,$\because$ $f(z)$在c内不是处处

解析的.

(2) $n=-1, c_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$, i.e. $\oint_C f(z)dz = 2\pi i c_{-1}$

(3) 在许多实际应用中，经常遇到$f(z)$在奇点

z_0的邻域内解析，需要把$f(z)$展成级数，那

么

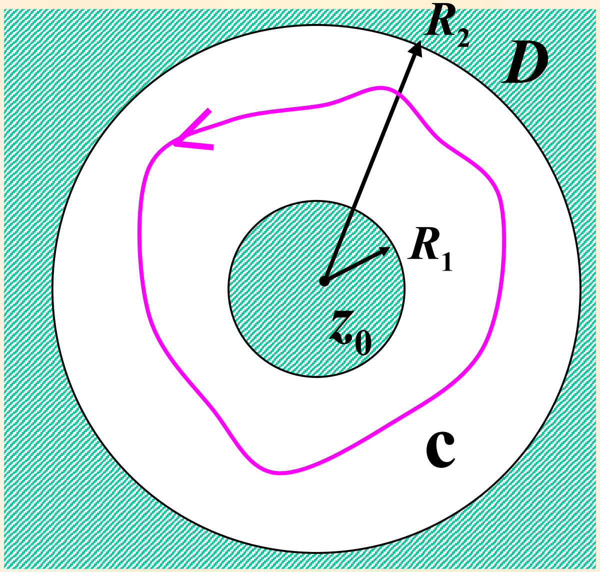
就利用洛朗（ *Laurent* ）级数来展开。

4. 展开式的唯一性

结论 一个在某一圆环域内解析的函数展开为含有正、负幂项的级数是唯一的，这个级数就是 $f(z)$ 的洛朗级数。

事实上 ,设 $f(z)$ 在 $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析，

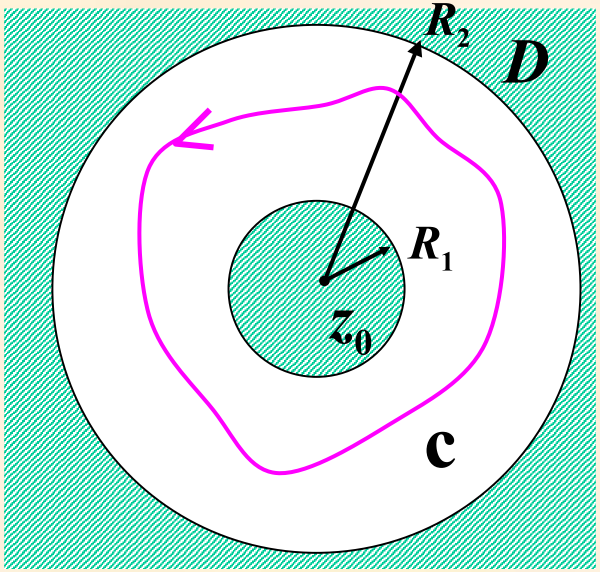
$$f(z) \overset{\text{可表示为}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (6)$$



设 c 为 D 内任何一条绕 z_0 的简单闭曲线，$\forall \xi \in c$

$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\xi - z_0)^n$$

$$f(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(\zeta-z_0)^n$$



将上式两边乘以 $\dfrac{1}{(\zeta-z_0)^{P+1}}$

(P为任一整数),

并沿c的正向积分得：

$$\oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{p+1}}d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\oint_c\frac{1}{(\zeta-z_0)^{p+1-n}}d\zeta=2\pi i a_p$$

解得：$a_p=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_c\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{p+1}}d\zeta$

由此可知,在圆环域内解析的函数展开成级数就是$Laurent$级数.

由唯一性，将函数展开成 *Laurent* 级数，可用间接法。在大多数情况下，均采用这一简便的方法求函数在指定圆环域内的 *Laurent* 展开式，只有在个别情况下，才直接采用公式 (5') 求 *Laurent* 系数的方法。

例 1 求 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 展开成洛朗级数。

解 $$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!!}\qquad 0<|z|<+\infty$$

$$=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots$$

例 2 将 $\dfrac{e^z}{z^3}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成 Laurent 级数.

解 $$\frac{e^z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{z^3}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!\,z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

例 3 将 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展成 Laurent 级数.

解 $\because$ 在复平面上，$e^t=1+t+\dfrac{1}{2!}t^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}t^n+\cdots$

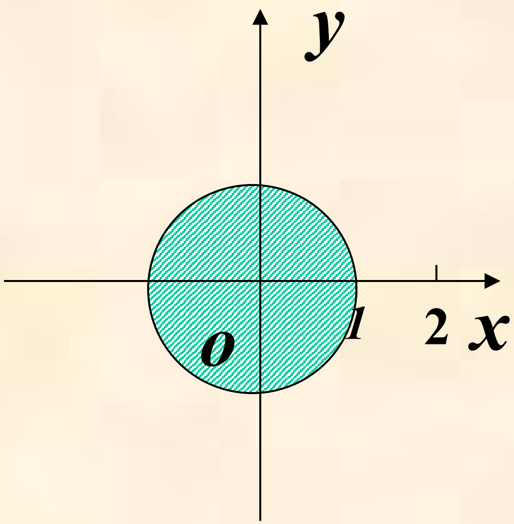
令 $t=\dfrac{1}{z}$, $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!\,z^2}+\cdots+\dfrac{1}{n!\,z^n}+\cdots$

$(0<|z|<+\infty)$

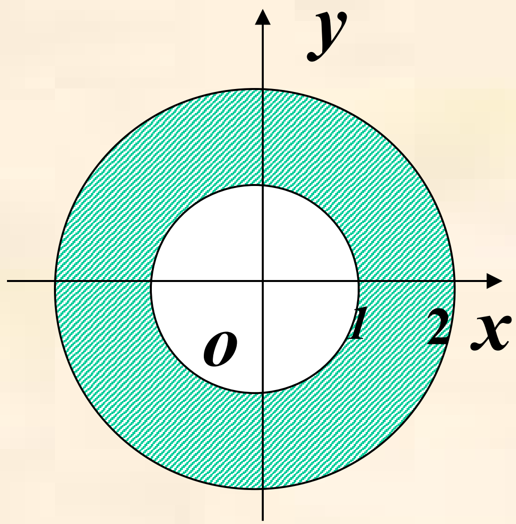
例 4 将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在以下圆环域

$(\,i\,)\ 0<|z|<1;\quad (ii)\ 1<|z|<2;\quad (iii)\ 2<|z|<+\infty$

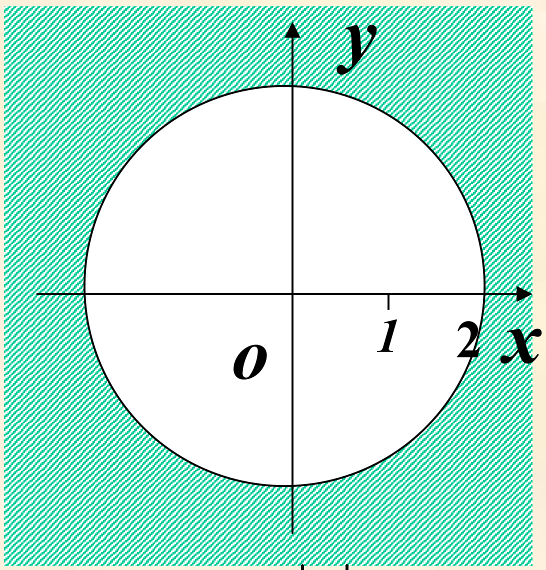
内展开成$z_0=0$的*Laurent*级数。



$(\,i\,)\ 0<|z|<1$



$(ii)\ 1<|z|<2$



$(iii)\ 2<|z|<+\infty$

解：$f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}$

$(i)\quad 0<|z|<1 \quad \because |z|<1 \quad \therefore \left|\dfrac{z}{2}\right|<1$

故 $\quad f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$

$=(1+z+z^2+\cdots z^n+\cdots)-\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}+\cdots)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}z+\dfrac{7}{8}z^2+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})z^n$

没有奇点

$(ii)1<|z|<2 \quad \because |z|>1 \quad \therefore \left|\frac{1}{z}\right|<1$ 又 $\because |z|<2 \quad \therefore \left|\frac{z}{2}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots)$$

$$=\cdots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\cdots$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$(iii)\ 2<|z|<+\infty \Rightarrow \because\ |z|>2 \quad \therefore \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$=\ -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots$$

注意首项

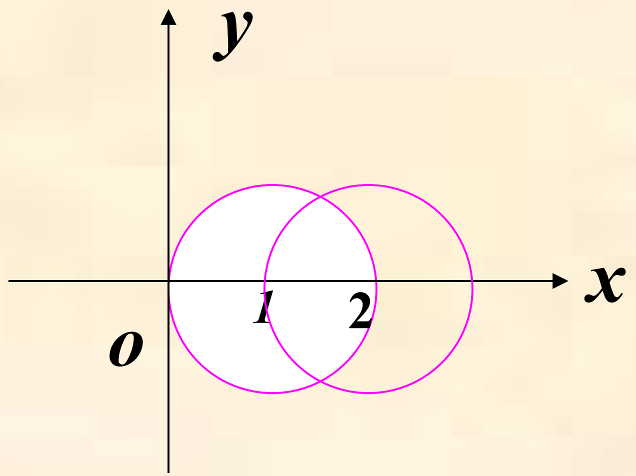
$$=\boxed{-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}$$

小结：把 $f(z)$ 展成洛朗 (*Laurent*) 级数的方法

(1) 对于无理函数及其它初等函数洛朗展开式，可以先利用已知基本初等函数的泰勒展开式，经过代换、逐次求导、逐次积分等计算来获得

(2) 对于有理函数的洛朗展开式，首先把有理函数分解成多项式与若干个最简分式之和，然后利用已知的几何级数，经计算展成需要的形式。

例 5★ 将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在以点$z=1, z=2$的去心邻域内展开成*Laurent*级数。



解 (1) 在(最大的)去心邻域 $0<|z-1|<1$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

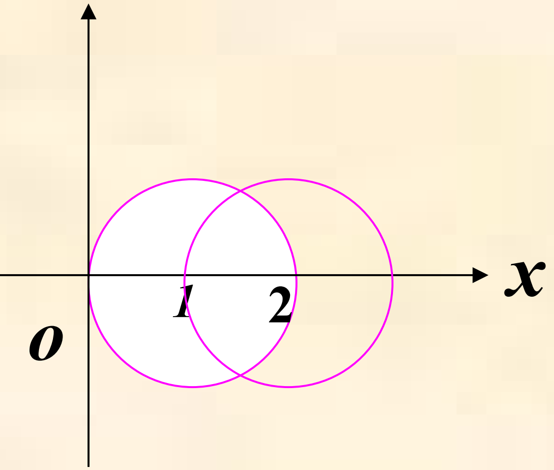
$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

$$=-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-2)^2-\cdots$$

(2) 在(最大的)去心邻域

$$0<|z-2|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$



$$=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

$$=\frac{1}{z-2}-1+(z-2)-(z-2)^2+\cdots$$

练习：将$f(z)=\frac{1}{1-z}e^z$在区域 (1) $|z|<1$,

(2) $0<|z-1|<+\infty$内展开成幂级数。

(1)由此可以看出同一个函数有许多种不同的级数展式，这因是在不同的区域上的展开式，这与唯一性并不矛盾。

(2) 根据区域判别级数方式：

在圆域内需要把 $f(z)$ 展成泰勒 (Taylor) 级数

，

在环域内需要把 $f(z)$ 展成洛朗 (*Laurent*) 级数

(3) *Laurent* 级数与 Taylor 级数的不同点：

- Taylor 级数先展开求 R, 找出收敛域。
- *Laurent* 级数先求 f(z) 的奇点，然后以 z_0 为中心，奇点为分隔点，找出 z_0 到无穷远点的所有使 f(z) 解析的环，在环域上展成级数

第五章 留数及其应用

- 第一节 函数的孤立奇点
- 第二节 留数
- 第三节 留数在定积分计算中的应用

§5.1 孤立奇点

- 1. 定义
- 2. 分类
- 3. 性质
- 4. 零点与极点的关系

1. 定义

定义 若$f(z)$在z_0处不解析,但在z_0的某个去心邻域$0<|z-z_0|<\delta$内解析,则称z_0为$f(z)$的孤立奇点.

例如 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ ----$z=0$ 为孤立奇点

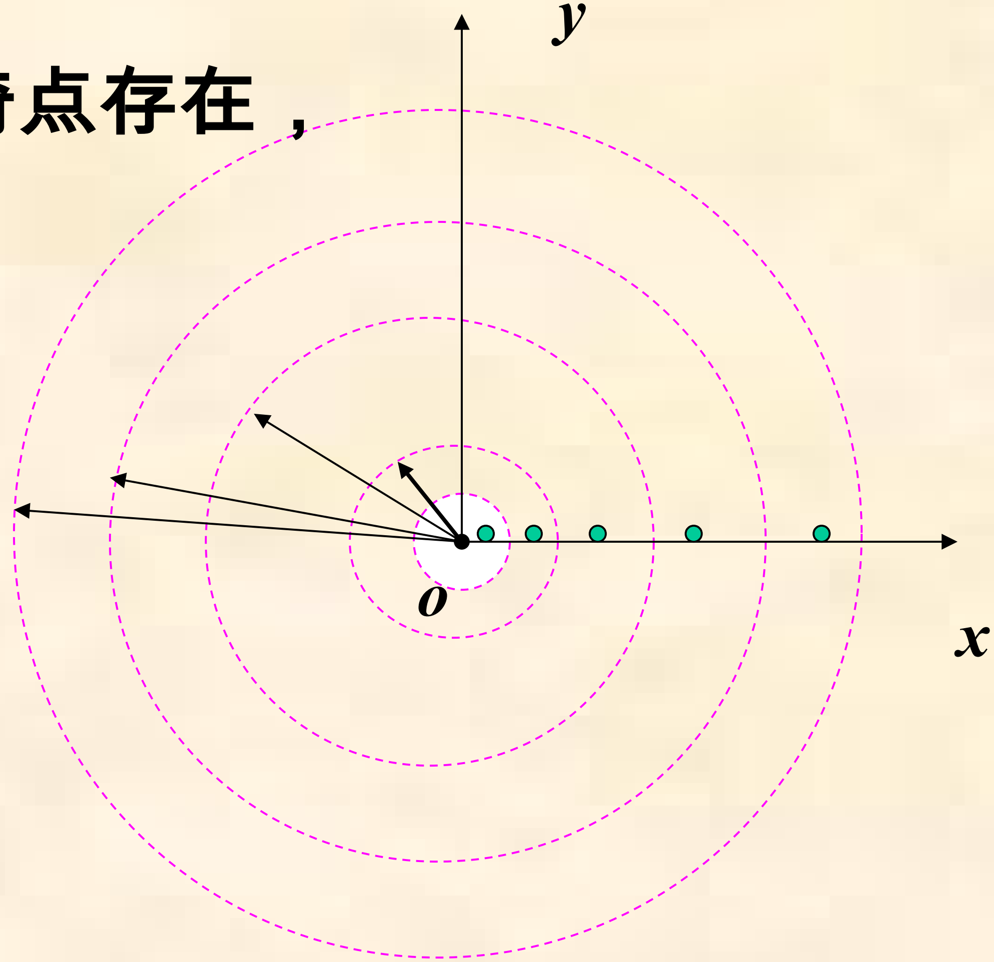
$f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ ----$z=1$ 为孤立奇点

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

----$z=0$ 及 $z=1/n\pi\ (n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是它的奇点

但 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\pi}=0$, $\therefore$ 在 $z=0$ 不论多么小的去心

邻域内,总有 $f(z)$ 的奇点存在，



故 $z=0$ 不是 $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$

的孤立奇点。

这说明奇点未

必是孤立的。

2. 分类

以下将 $f(z)$ 在孤立奇点的邻域内展成洛朗级数，根据展开式的不同情况，将孤立点进行分类。考察：

$$(1)\ \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

特点：没有负幂次项

$$(2)\ \frac{e^z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \cdots$$

特点：只有有限多个负幂次项

$$(3)\ e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{-n} + \cdots$$

特点：有无穷多个负幂次项

定义 设 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点，在 z_0 的去心邻域内，

若 $f(z)$ 的洛朗级数

$$(i)\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

没有负幂次项，称 $z=z_0$ 为可去奇点；

$$(ii)\ f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\,(c_{-m}\neq 0, m\quad 1)$$

只有有限多个负幂次项，称 $z=z_0$ 为 m 级极点；

$$(iii)\ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

有无穷多个负幂次项，称 $z=z_0$ 为本性奇点。

3. 性质

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$$

补充定义：$f(z_0)=c_0$ $\quad f(z)$在z_0解析.

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的 $m\ (m\quad 1)$ 级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \,(\, c_{-m}\neq 0, m\quad 1\,)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m} g(z)$$

其中：$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots,$

$g(z)$在$|z - z_0| < \delta$内是解析函数且$g(z_0) \neq 0.$

例如：$f(z) = \dfrac{z^2 - 3z + 2}{(z^2 + 1)(z - 1)^4}$

$z=1$ 为 $f(z)$ 的一个三级极点， $z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的一级极点。

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点

$\Leftrightarrow f(z)$的洛朗级数有无穷多项负幂次项

$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$不存在，也不为$\infty$

4. 零点与极点的关系

定义 不恒等于 0 的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

其中：$\varphi(z_0) \neq 0, \varphi(z)$在$z_0$点解析, $m \in N$

则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 级零点。

例如： $z = 0$与$z = 1$分别是$f(z) = z(z-1)^3$的一级与三级零点。

定理 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

$(\varphi(z_0)\neq 0,\varphi(z)$在$z_0$点解析$,m\in N)$

$\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0(n=0,1,2,\cdots,m-1)\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

事实上，$\because\ \varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\quad c_0=\varphi(z_0)\neq 0$

$$\therefore f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^{n+m}$$

由*Taylor*级数的系数公式有：

$f^{(n)}(z_0)=0\ \ (n=0,1,2,\cdots,m-1),$

而 $\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}=c_0\neq 0$ 必要性得证！

例如 $z=0$与$z=1$均为$f(z)=z(z-1)^3$的零点。

又$f'(z)=(z-1)^3+3z(z-1)^2$

$$f''(z)=6(z-1)^2+6z(z-1)$$

$$f'''(z)=12(z-1)+6(z-1)+6z$$

$\because\ f'(0)=(-1)^3\neq 0$

$\therefore z=0$为一级零点

$\because\ f'(1)=0 \quad f''(1)=0 \quad f'''(1)=6\neq 0$

$\therefore z=1$为三级零点

定理： 若z_0是$f(z)$的m级极点$\Leftrightarrow$ z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

证明 “$\Rightarrow$” 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)\ \left(g(z)\text{在}z_0\text{解析,且}g(z_0)\neq 0\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{g(z)}=(z-z_0)^m h(z)\quad (z\neq z_0)$$

$$\left(h(z)\text{在}z_0\text{解析,且 }h(z_0)\neq 0\right).$$

$\because \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0,\therefore$ 令 $\dfrac{1}{f(z_0)}=0$，则z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

$\Leftarrow$"若 z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点,则

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\varphi(z)\ \big(\,\varphi(z)\text{ 在}z_0\text{解析,且 }\varphi(z_0)\neq 0\,\big).$$

当$z\neq z_0$时，$f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\boxed{\dfrac{1}{\varphi(z)}}=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\boxed{\psi(z)}$

$$\big(\,\psi(z)\text{在 }z_0\text{ 解析,且}\,\psi(z_0)\neq 0\,\big).$$

$\therefore z_0$是$f(z)$的m级极点.

推论1 设 $g(z_0)\neq 0$, $g(z)$ 在 z_0 解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点或 m 级极点时，z_0 也是函数 $f(z)g(z)$ 的 m 级零点或 m 级极点；

推论2 若 z_0 是 $f_k(z)$ 的 m_k 级零点，则 z_0 是 $f_1(z)f_2(z)$ 的 m_1+m_2 级零点；且当 $m_1<m_2$ 时，z_0 为 $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ 的 m_2-m_1 级极点

例 求$f(z)=\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$的奇点，

如果是极点指出它的级。

解 显然，$z=\pm i$ 是 $(1+z^2)$ 的一级零点

$\because\ e^{\pi z}+1=0$, 即$e^{\pi z}=-1$

$\therefore \pi z=Ln(-1)=i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$

故奇点为：$z_k=(2k+1)i \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\because\ (1+e^{\pi z})'\Big|_{z=i(2k+1)}=\pi e^{\pi z}\Big|_{z=i(2k+1)}$

$=\pi[\cos\pi(2k+1)+i\sin\pi(2k+1)]=-\pi\neq0$

$\therefore z_k=i(2k+1) \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是$1+e^{\pi z}$的一级零点

综合 $z=\pm i$为$f(z)$的二级极点;

$z_k = i(2k+1) \quad (k=1,\pm 2,\cdots)$为$f(z)$的一级极点.

练习：考察下列函数的孤立奇点，奇点类型，如果是极点，指出它的级数。

$$(1)\ f(z)=\frac{1}{z^2(e^z-1)} \qquad (2)\ f(z)=\frac{\ln(1+z)}{z}$$

$$(3)\ f(z)=\frac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$$

$$(4)\ f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$$

$$(5)\ f(z)=\frac{1}{z^3-z^2-z+1}$$

$$(6)\ f(z)=\frac{1}{z-\sin z}$$

$$(7)\ f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$$

$$(8)\ f(z)=\frac{(z-1)^2(z-2)^2}{\left(\sin \pi z\right)^3}$$

本性奇点例子教材 85 页★

第六周周三作业

1、书面作业（下周一交）

习题五 (P108) 2(1, 3, 4, 7, 11)

2、课外作业

（1）总结计算复积分的有关方法

（2）预习第5章第2节