CAD/CAM 技术基础

航空宇航制造工程系

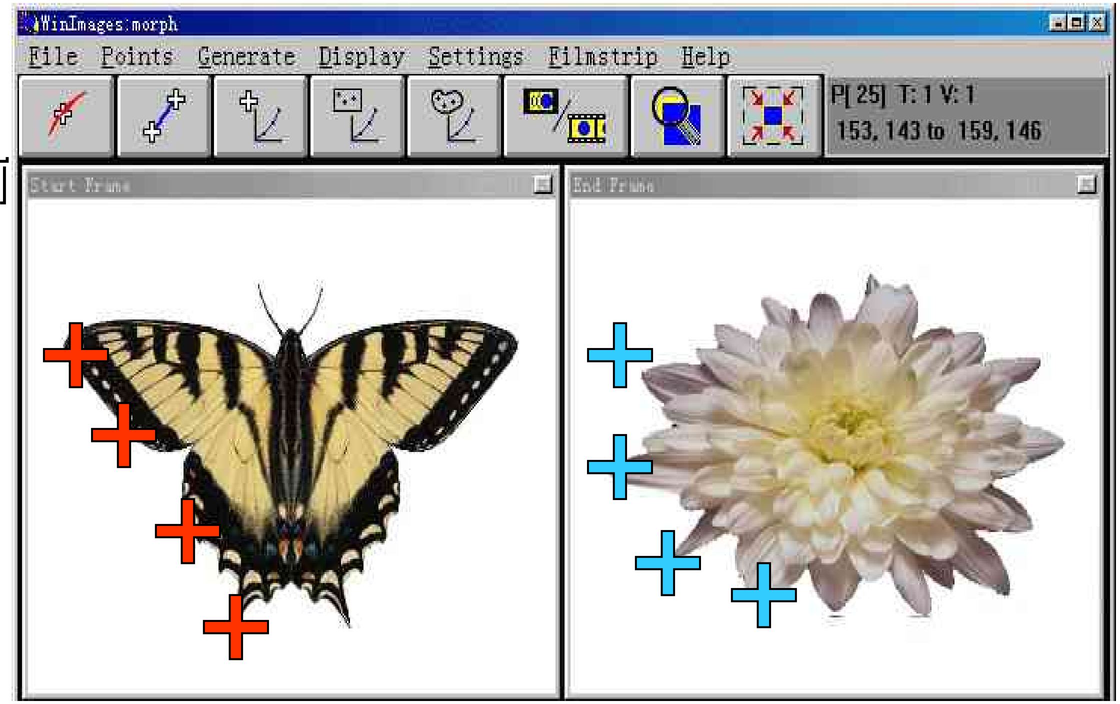
系统 页面 图表 分析 新闻 招商证券专栏 手机行情 交易 工具 帮助
博易大师-招商证券
日 周 月 季 × 1 3 5 15 30 60 Y
IF 0712(040012)<日线> [15:55:05] 最新:7922.0 -1.84% 今开:8500.0 最高:8509.0 最低:7601.0 昨收:8070.2
K MA(5,10,30,120,250) MA1:8148.9600 MA2:8245.6400 MA3:8431.4133 MA5:5278.2364
11523.6
1万
8000
6000
4000
4071.0
VOL(5,10) 146366 MA1:143468.4 MA2:146371.1
80万
AMOUNT 36522
6万
4万
2万
日线 200705 07 08 09 10 11
IF 0712(040012)
卖出 7930.0 119
买入 7922.0 6
最新 7922.0 均价 7939.5
涨跌 -148.2 昨结 8070.2
幅度 -1.84% 开盘 8500.0
总手 146366 最高 8509.0
现手 4 最低 7601.0
持仓 36522 仓差 -818
委比 -90.400% -113
外盘 70890 内盘 75476
北京 价格 现手 仓差 性质
15:14 7922.0 1 -1 双平
15:14 7929.0 2 -1 空平
15:14 7925.0 1 -1 双平
15:14 7929.0 4 +0 多换
15:14 7930.0 4 -1 空平
15:14 7922.4 6 -4 多平
15:14 7921.0 6 -5 多平
15:14 7925.0 1 -1 双平
15:14 7930.0 5 -3 空平
15:15 7922.0 1 +0 空换
15:15 7930.0 5 +2 多开
15:15 7921.0 2 +0 空换
15:15 7930.0 3 -2 空平
15:15 7921.0 2 -2 双平
15:15 7921.0 1 -1 双平
15:15 7930.0 5 +0 多换
15:15 7929.0 1 +0 空换
15:15 7930.0 1 -1 双平
15:15 7922.0 4 +3 空开
沪 5914.28 -40.48 1124.9亿 深 19144.62 -386.54 551.5亿
[粮油市场] 全球11月1日玉米气象预报
defalt pobo 16:02
开始 博易大师 16:02

8.5.6设定变形参考点

● [操作步骤]

(1) 鼠标左键单击首画面产生变形参考点 尾画面自动产生对应的

(2) 光标对准尾画面



用鼠标右键拖曳该点移动，调整位置

变形效果

● [规律]

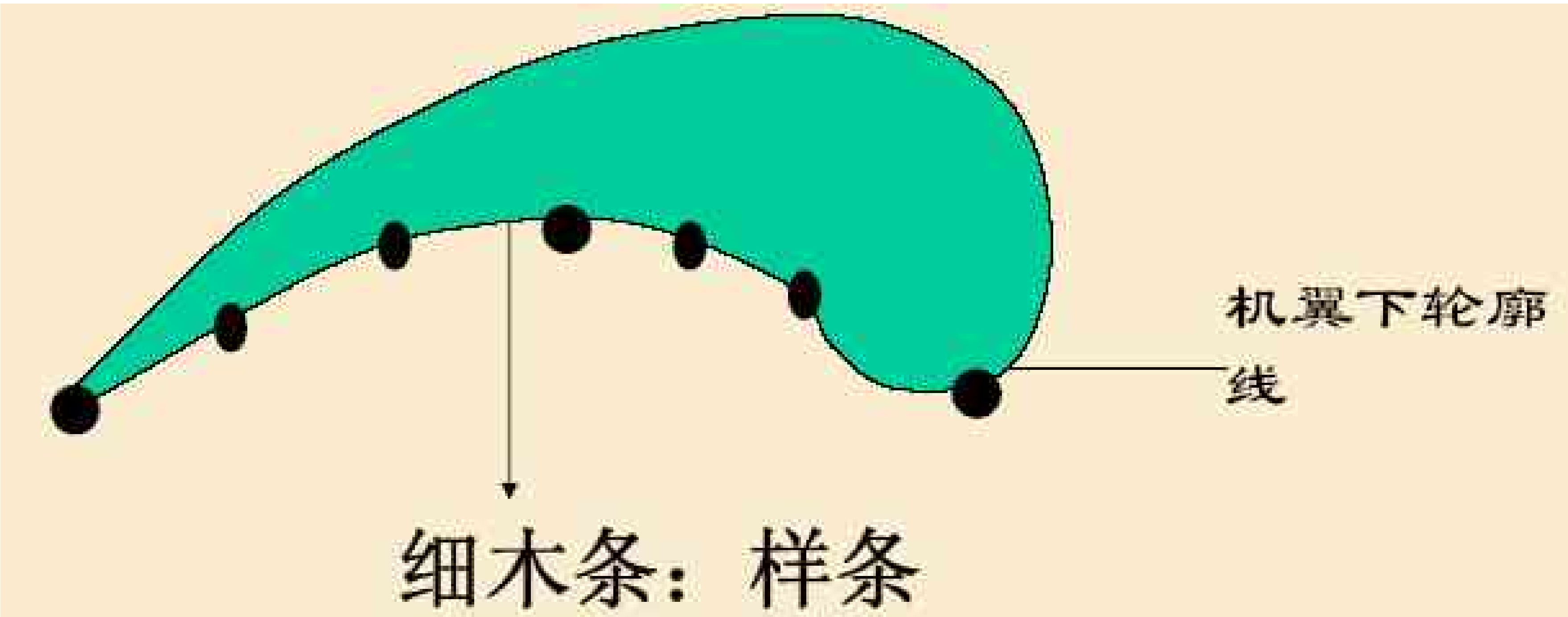
(1) 先沿图形边缘设定，再设定图形内部

(2) 变形参考点数量越多，变形越准确

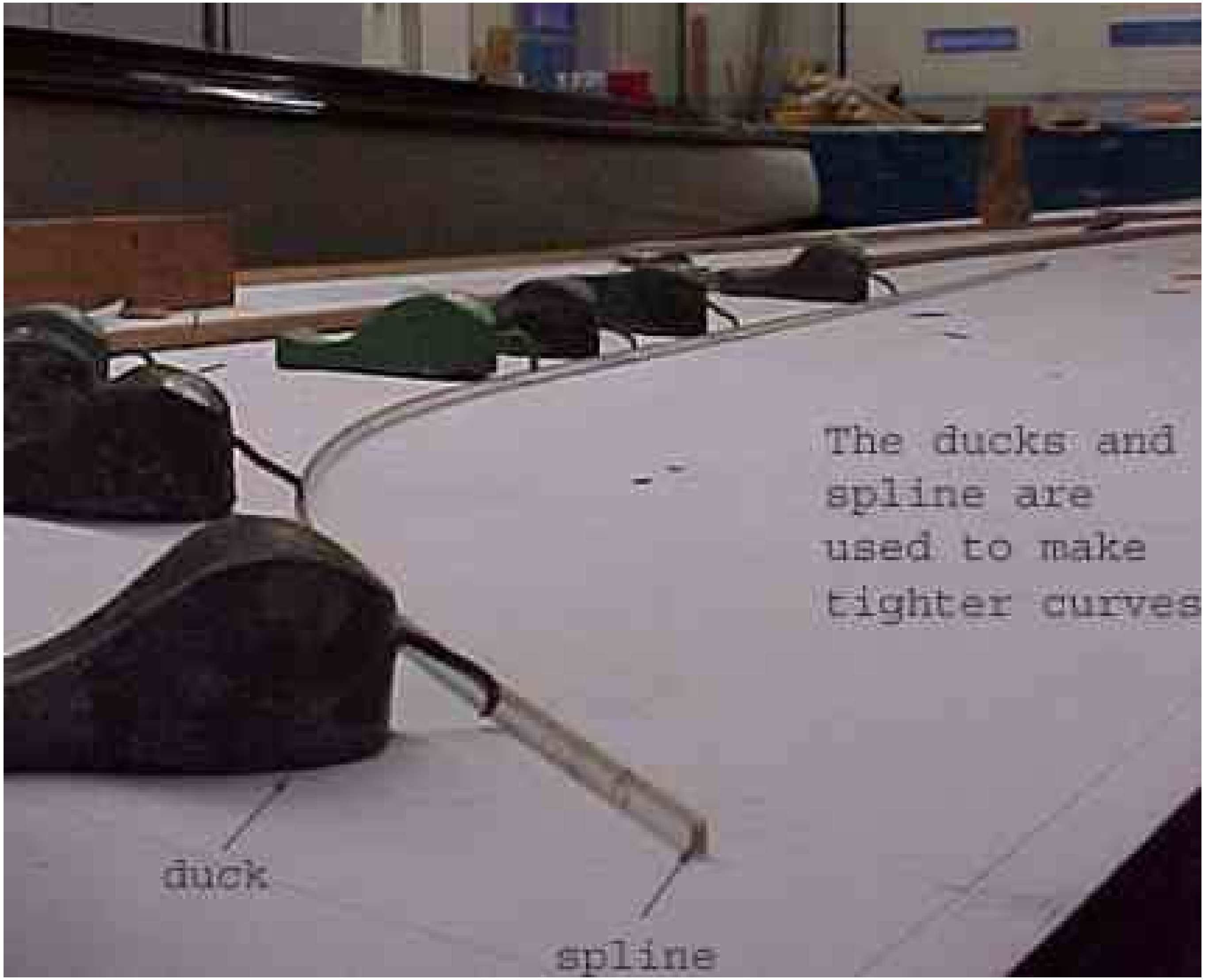
(3) 变形路径不得交叉，否则变形混乱

1.2 样 条 函 数 的 工程背景

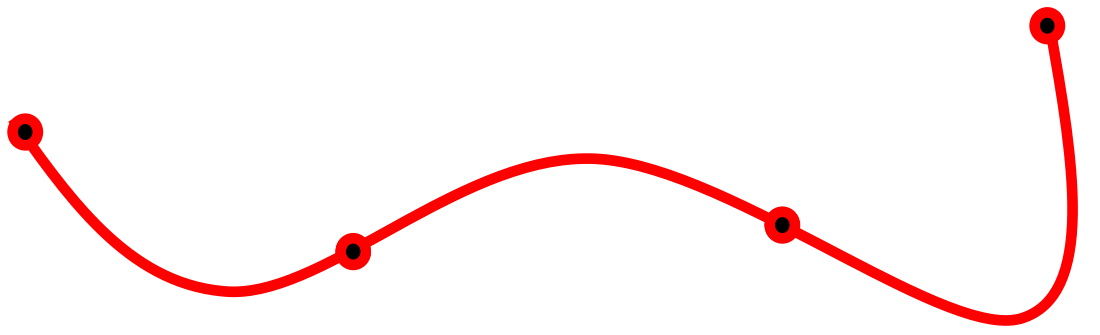
飞机、船体、汽车外形的放样（设计）



放 样 现 场


The ducks and spline are used to make tighter curves
duck
spline

三次样条曲线



主要内容

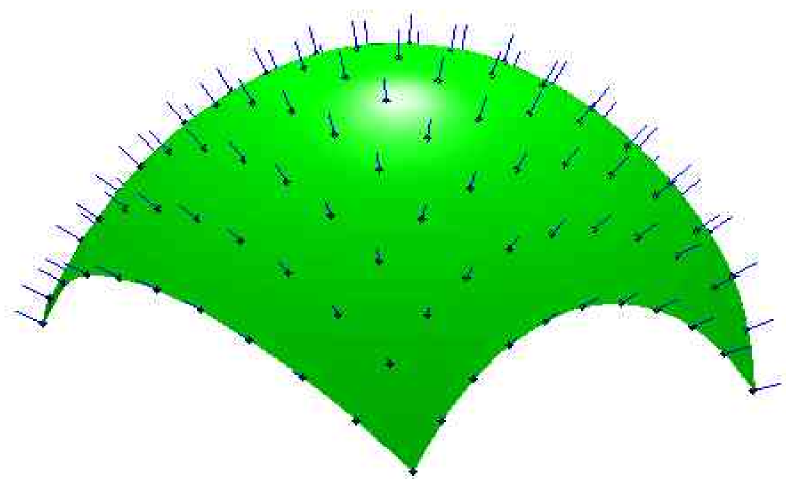
1. 插值问题和样条函数
2. 三次样条的理论基础

1. 插值问题和样条函数

1.1 插值问题

1.2 样条函数的工程背景

1.3 三次样条函数的数学定义



1.1 插值问题

- **插值**

给定一组有序的数据点 $(x_i, y_i, z_i), i=0,1,\ldots,n$ ，要求构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点进行插值（ interpolation ），所构造的曲线称为插值曲线。

- **逼近**

构造一条曲线使之在某种意义下最为接近给定的数据点，称为对这些数据点进行逼近（ approximation ），所构造的曲线称为逼近曲线。

- **拟合**

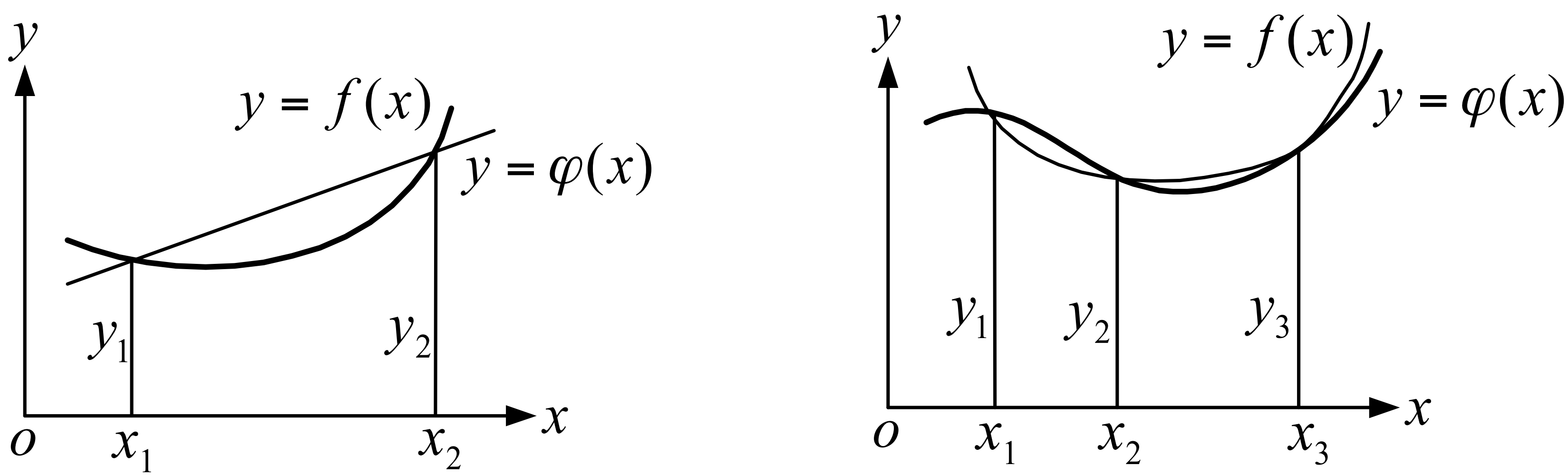
插值和逼近统称为拟合（ fitting ）。

– 线性插值：假设给定函数 $f(x)$ 在两个不同点 x_1 和 x_2 的值，用一个线性函数： y=ax+b ，近似代替，称为 $f(x)$ 的线性插值函数。

– 抛物线插值：已知在三个互异点 x_1, x_2, x_3 的函数值为 y_1, y_2, y_3，要求构造一个函数

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c$$

使抛物线 $\varphi(x)$ 在结点 $x_i\ (i = 1,2,3)$ 处与 $f(x)$ 在 x_i 处的值相等

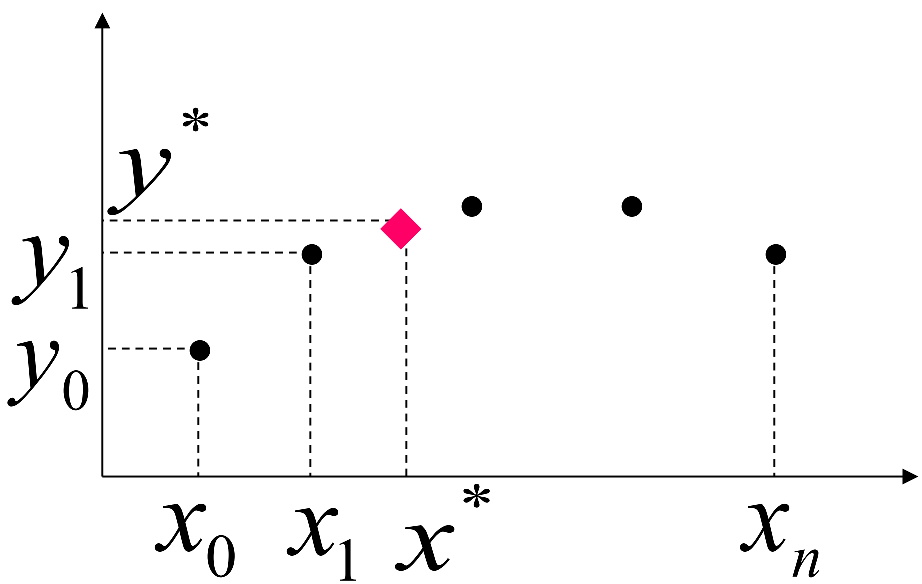


(a) (b)

线性插值与抛物线插值

1.1 插值问题

已知 n+1 个节点(x_j, y_j) $(j=0,1,\cdots n$,其中 x_j 互不相同，不妨设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$,求任一插值点 $x^*(\neq x_j)$处的插值 y^*.



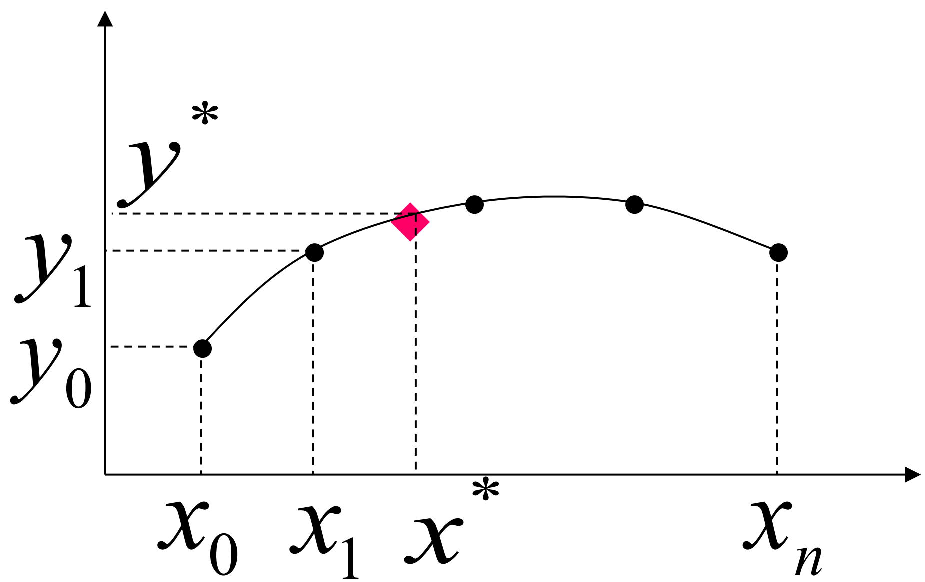
节点可视为由 $y = g(x)$产生，g表达式复杂，或无封闭形式或未知。

求 解 插 值 问 题 的 基 本 思 路

构造一个（相对简单的）函数 $y = f(x)$, **通过全部节点，即**

$$f(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots n)$$

再用 $f(x)$ **计算插值，即** $y^* = f(x^*)$.



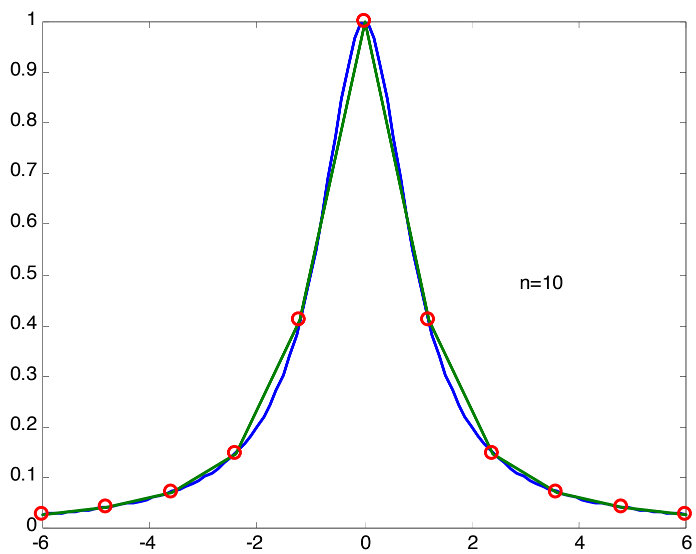
几 种 常 用 插 值 方 法

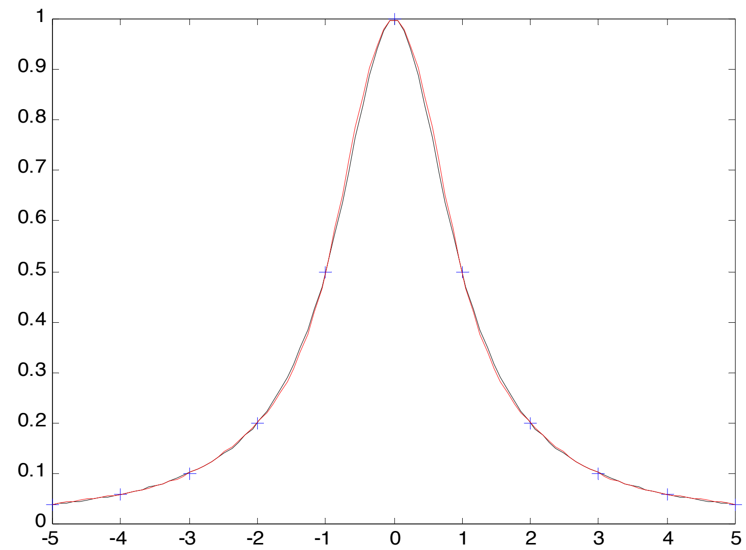
- 分段线性插值：
  - 收敛性良好
  - 只用两个节点，且线性，简单实用
  - 曲线不光滑

- 三次样条插值:(*)
  - 曲线 2 阶光滑，收敛性有保证
  - 实际中应用广泛
  - 误差估计较难

- B 样条插值：
  - 曲线光滑随 B 样条的次数增加而增加，收敛性有保证
  - 实际中应用广泛
  - 理论知识比较复杂，编程实现比较繁琐

两种插值方式的图例

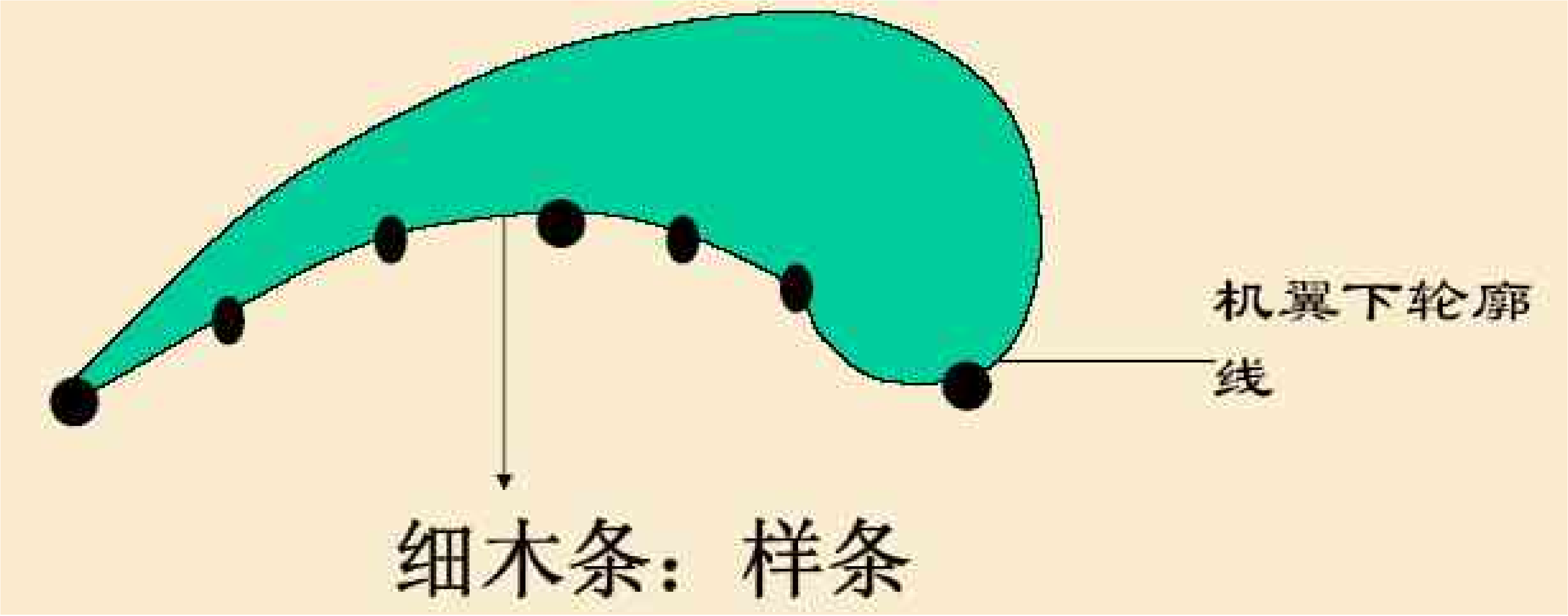




分段线性插值　　　　**三次样条插值**

1.2 样 条 函 数 的 工程背景

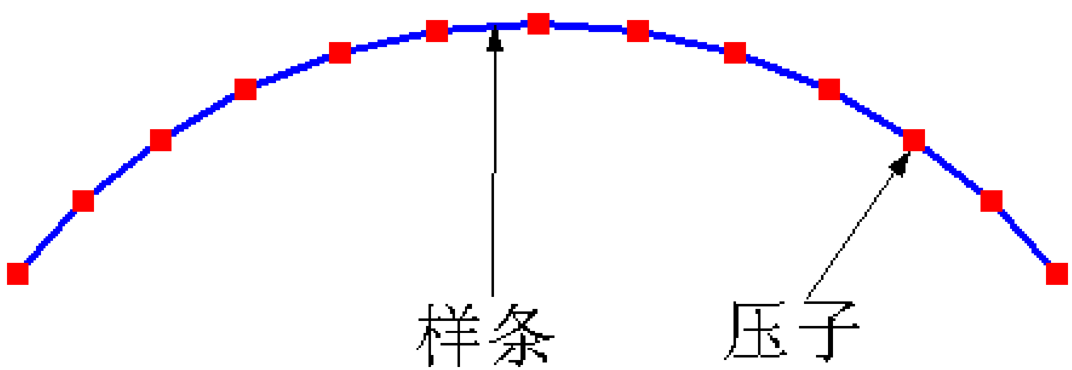
飞机、船体、汽车外形的放样（设计）



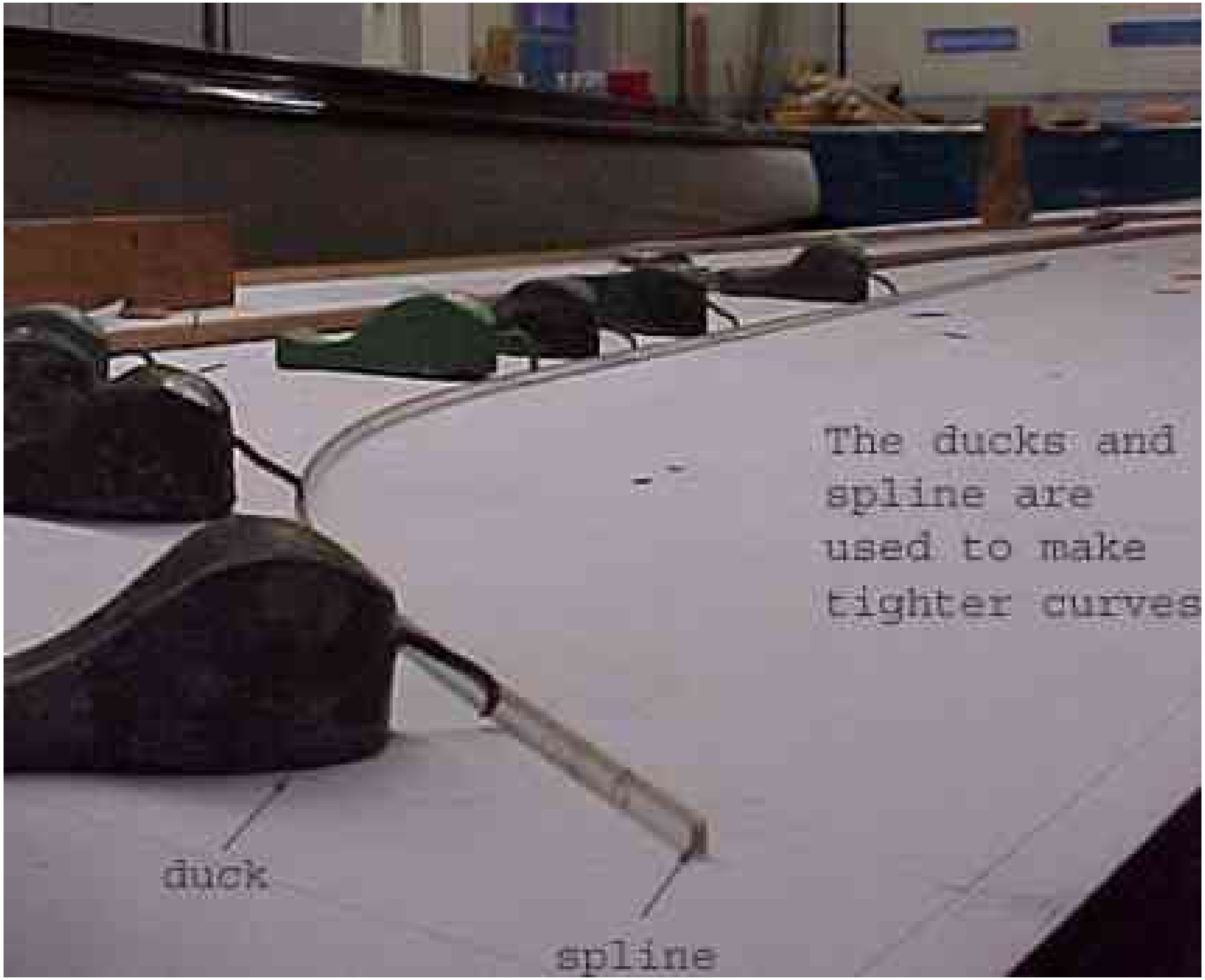
模线绘制的一般过程

- **打点：按给定的数据将型值点准确地点在图板上**

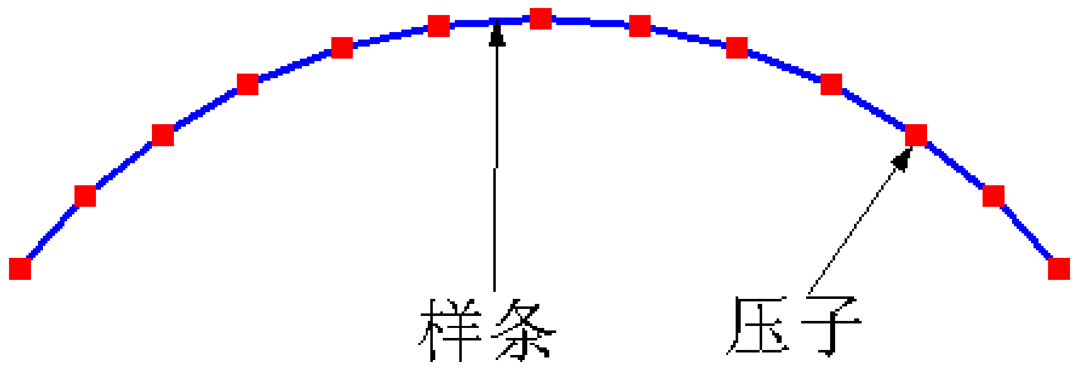
- **描线：用“压子”使“样条”通过型值点**



放样现场


The ducks and
spline are
used to make
tighter curves
duck
spline

模线的形状特征



- **分段**：两个"压子"之间可以认为是一段。数学本质是每两个"压子"之间曲线的表达式不同
- **光滑**：不象每两点之间连线那样有明显的棱角。数学本质是整条曲线具有连续的导函数

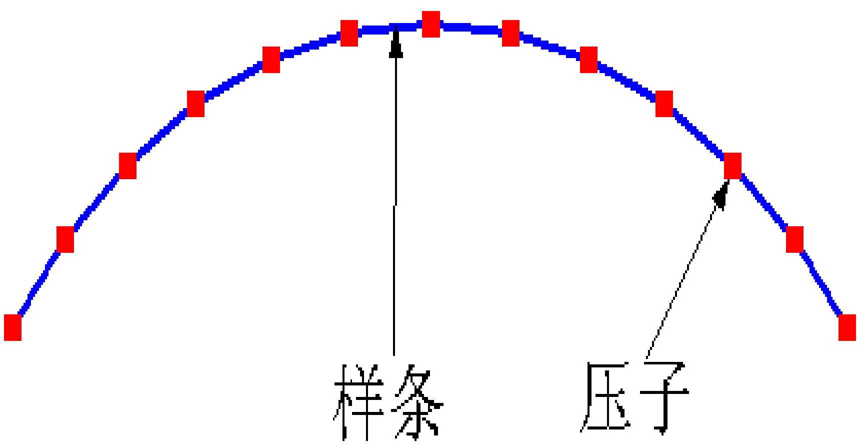
模线的力学实质

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EJ}$$ **欧拉公式**

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$ **平面曲线的曲率**

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EJ}$$

$$\because \ |y'| << 1, \therefore y'' \approx \frac{M(x)}{EJ}$$



由于 M(x) 是线性函数，所以 y(x) 是三次多项式。

1.3 三次样条函数的数学定义

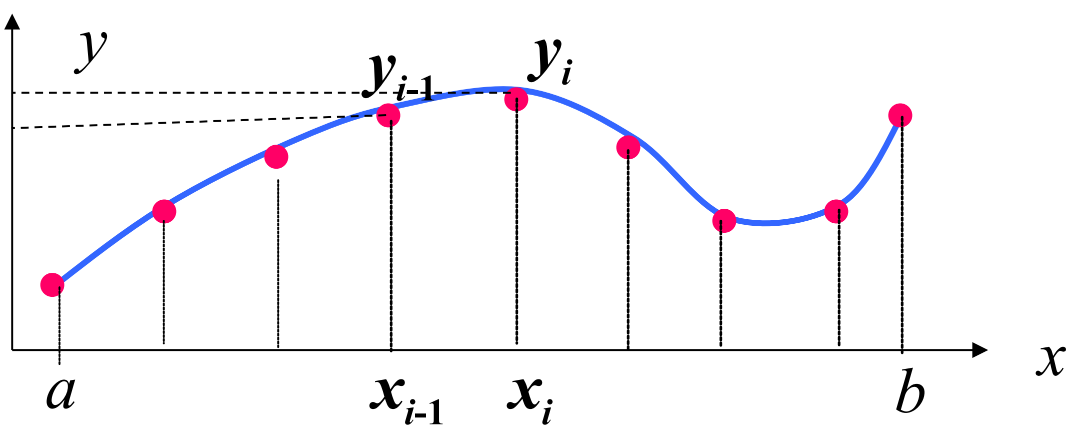
定义 给定 [a,b] 的分划： $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, 如果函数 $s(x)$ 在区间 [a,b] 上满足以下条件：□

（ 1 ）在每一个子区间（ x_i,x_{i+1} ） $(i=0,1,\ldots,n-1)$ 上 $s(x)$ 是三次多项式；

□ （ 2 ） $s(x)$ 在区间 [a,b] 上具有二阶连续导数；

（ 3 ） $s(x_i)=y_i(i=0,1,\ldots,n)$, $s'(x_0)=y'_0$, $s'(x_n)=y'_n$。

我们就称 $s(x)$ 为三次样条函数。



2. 三次样条的理论基础

2.1 Hermite 基 函 数

2.2 三切矢方程

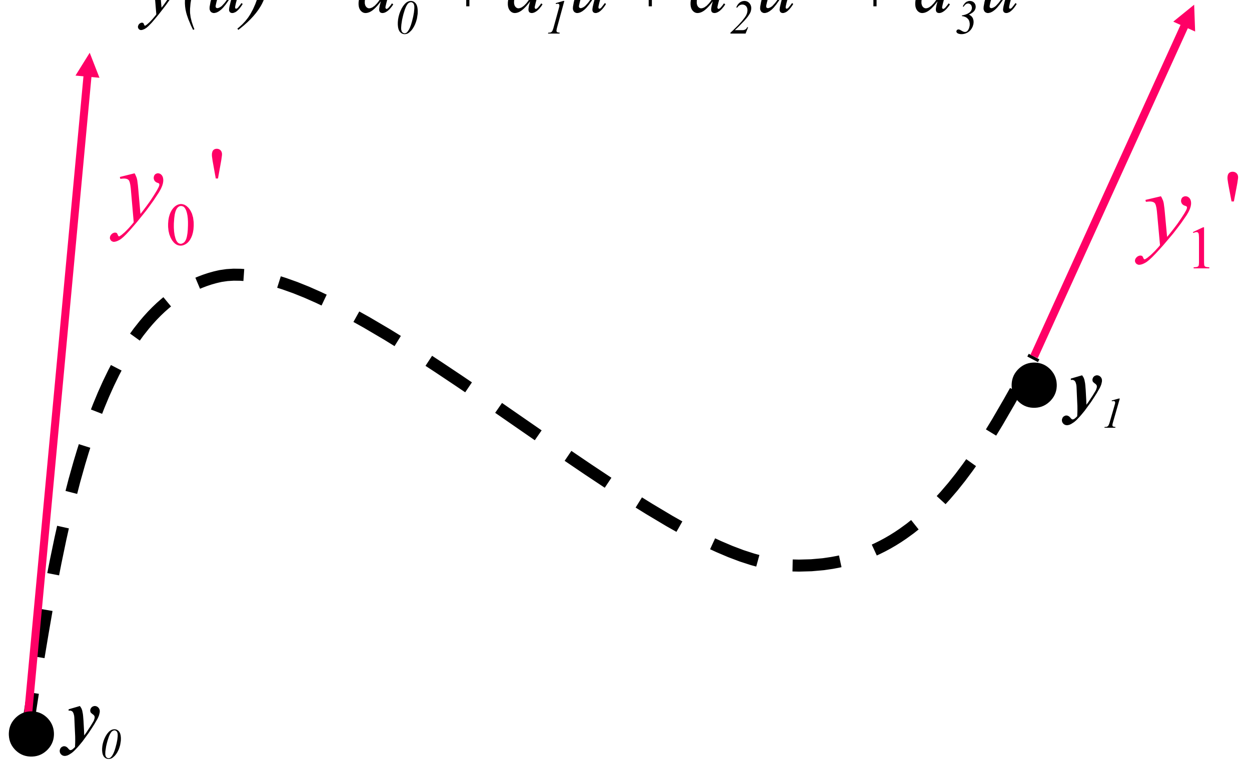
2.3 三次样条插值的局限性

- **Charles Hermite**（ 1822 - 1901 ）
- 法国洛林（ Lorraine ）
- 巴黎综合工科技术学院
- 曾任法兰西学院、巴黎高等师范学校、巴黎大学教授。法兰西科学院院士。
- 在函数论、高等代数、微分方程等方面都有重要发现。 1858 年利用椭圆函数首先得出五次方程的解。 1873 年证明了自然对数的底 e 的超越性。在现代数学各分支中以他姓氏命名的概念（表示某种对称性）很多，如“ Hermite 二次型”、“ Hermte 算子”等。

2.1 Hermite 基函数

问题：自变量为 u, 区间 $[0,1]$ 上两端点的 $y_0, y_1, y_0' y_1'$ **，构造三次曲线满足条件：**

$$y(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$$



$y(u)$ 中系数 a_i 的确定

$$y(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$$

系数

$$y(0) = y_0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = a_0$$

$$y(1) = y_0 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$y'(0) = y_0' = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0^2 \qquad = a_1$$

$$y'(1) = y_1' = a_1 \cdot 1 + 2a_2 \cdot 1 + 3a_3 \cdot 1^2 \qquad = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

$y(u)$ 中系数 a_i 的确定

$$y_0 = a_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$y'_0 = a_1$$

$$y'_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y'_0 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$y(u)$ 中系数 a_i 的确定

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y'_0 \\ y'_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y'_0 \\ y'_1 \end{bmatrix}$$

$$y(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$$

$$y(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y'_0 \\ y'_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} F_0(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ F_1(u) = -2u^3 + 3u^2 \\ G_0(u) = u^3 - 2u^2 + u \\ G_1(u) = u^3 - u^2 \end{cases}$$

$$y(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$$

$$\Downarrow$$

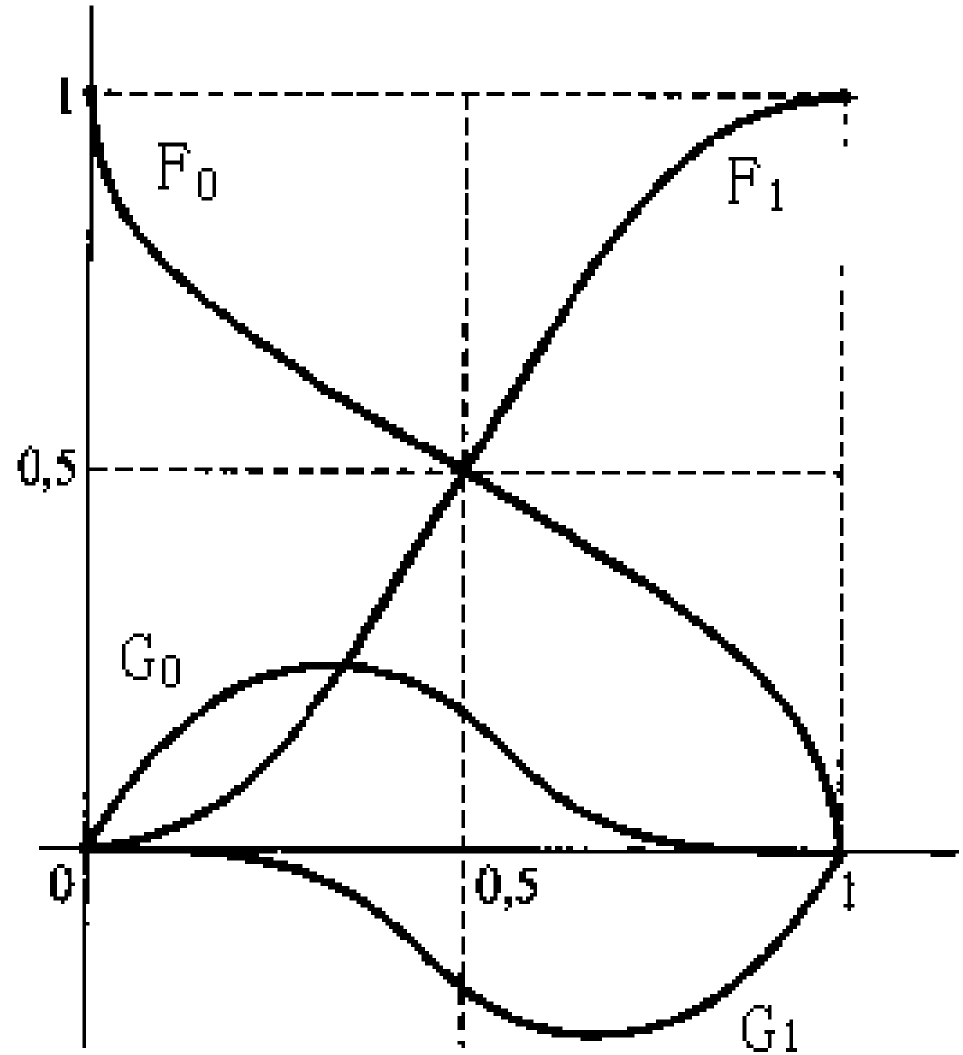
$$y(u) = y_0 F_0(u) + y_1 F_1(u) + y_0' G_0(u) + y_1' G_1(u)$$

Hermite 基函数的性质

$F_0(u), F_1(u), G_0(u),$
$G_1(u)$ 称为

埃尔米特基函数或三次混合函数，其中

$$F_0(u) + F_1(u) \equiv 1$$



例题

- 求过 0,1 两点构造一个三次插值多项式，满足条件：

$$f(0)=1,\ f'(0)=1/2,\ f(1)=2,\ f'(1)=1/2$$

解：

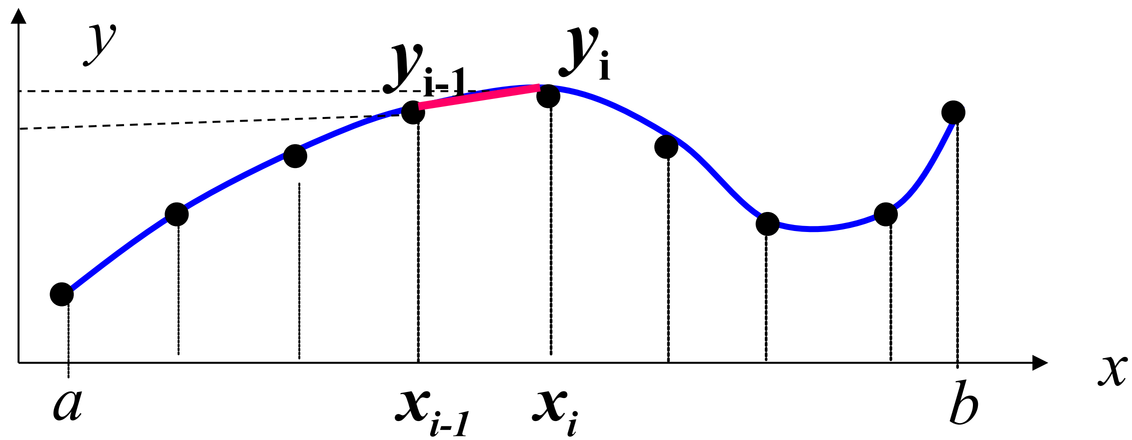
$$y(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 = a_0 \\ y'(0) = 1/2 = a_1 \\ y(1) = 2 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ y'(1) = 1/2 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1/2 \\ a_2 = 3/2 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

$$y(u) = 1 + u/2 + 3u^2/2 - u^3$$

2.2 三 切 矢 方 程



问题：设图中的 $y(x)$ 是三次样条曲线，区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 两端的函数值 y_{i-1},y_i, 和一阶导数 m_{i-1},m_i 已知，如何将该区间内的曲线用 Hermite 基函数表示？

自变量取 x ，取区间宽度 $h_i = x_i - x_{i-1}$, 则

$$u = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \backslash\ y'_u = y'_x \frac{dx}{du} = y'_x h_i$$

记 $y'_x\big|_{x=x_{i-1}} = m_{i-1},\ y'_x\big|_{x=x_i} = m_i$

$$\backslash\ y(x) = y_{i-1}F_0(u) + y_iF_1(u) + h_i[m_{i-1}G_0(u) + m_iG_1(u)]$$

矩阵表达式

$$y_i(x) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ h_i m_{i-1} \\ h_i m_i \end{bmatrix}$$

三切矢方程

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = C_i$$

其中,

$$(i = 1,2,\cdots,n-1)$$

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \mu_i = 1 - \lambda_i, C_i = 3(\lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \mu_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}})$$

三切矢方程的普通表达形式

$$\lambda_1 m_0 + 2m_1 + \mu_1 m_2 = C_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = C_i$$

......

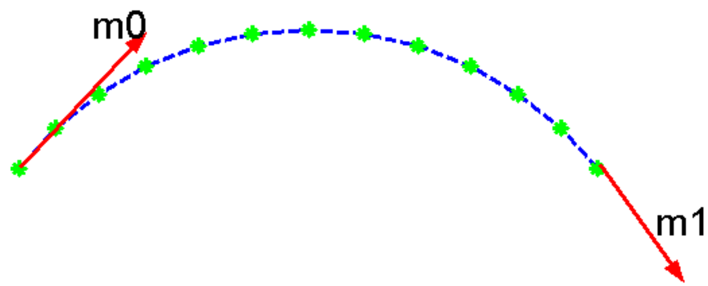
$$\cdots\cdots$$

$$\lambda_{n-1} m_{n-2} + 2m_{n-1} + \mu_{n-1} m_n = C_{n-1}$$

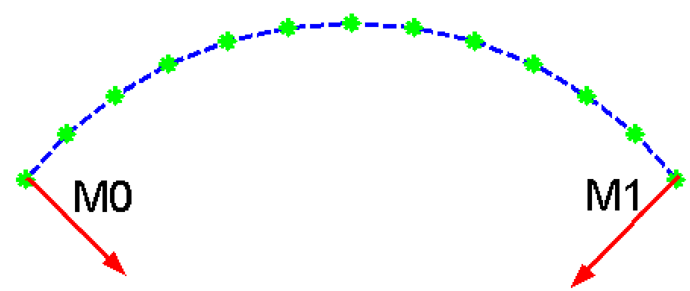
如何求解：（ n-1 ）个线性方程，内节点的 m_1、 m_2、…、 m_{n-1} 未知

三切矢方程的边界条件

① 已知 m_0 和 m_n

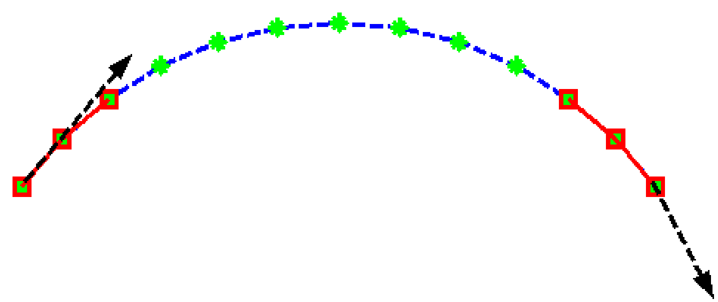


② 已知两端点处的二阶导数。



③ 未知①、②

相邻三个节点拟合抛物线，并数值微分求端点的一阶导数。



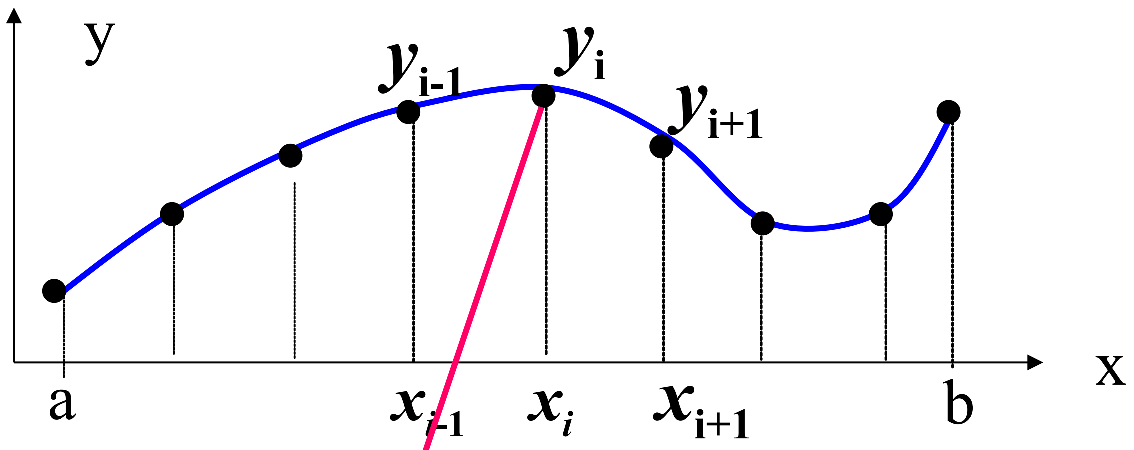
三切矢方程的求解

追赶法求解

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \mu_{n-2} & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

两个边界条件

二阶连续的条件



$$y''_{i-1}(x_i^-) = y''_i(x_i^+)$$

2.3 三次样条插值的局限性

- 不能解决大挠度问题。—— 参数样条解决
- 不具有局部可修改性。——B 样条

- 曲线中夹有直线段时拟合效果不好。
- 拟合二阶导数不连续曲线产生较大波动

曲线中夹有直线段时拟合效果不好

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \mu_{n-2} & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{P}_{i-1}\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)$ $\boldsymbol{P}_i\left(x_i, y_i\right)$ 两点间为直线，令

$$\lambda_{i-1} = \mu_{i-1} = \lambda_i = \mu_i = 0$$

$$c_{i-1} = c_i = 2\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)$$

$$
\begin{pmatrix}
2 & \mu_0 & & & & & 0 \\
\lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & \lambda_i & 2 & \mu_i & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\
 & & & & & \lambda_n & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{i-1} \\ m_i \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ 2\left(\dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) \\ 2\left(\dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n
\end{pmatrix}
\tag{3.12}
$$

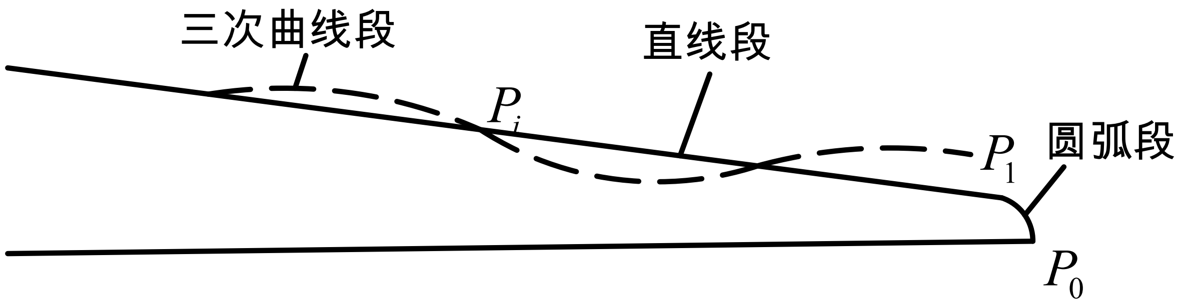
(3.12)

在 $P_{i-1}P_i$ 两点间严格为直线，它具有所需要的斜率

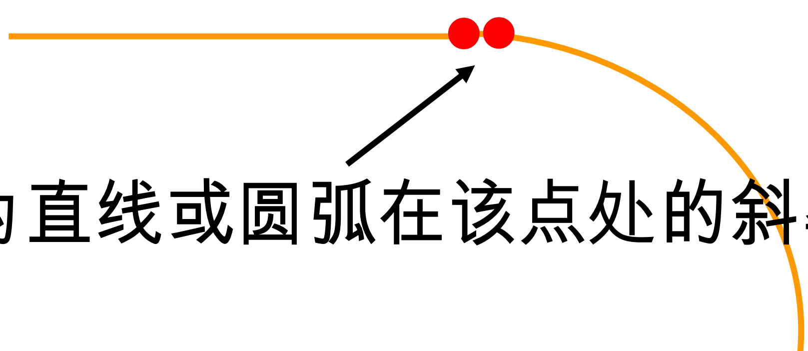
$$m_{i-1} = m_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

其方程为 $$y = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\left(x - x_{i-1}\right) \quad \left(x_{i-1} \le x \le x_i\right)$$

拟合二阶导数不连续曲线产生较大波动



——增补型值点，指定切矢量



m_i为直线或圆弧在该点处的斜率

三次样条曲线无端点条件

- 数值微分方法（抛物线插值）

$$y(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)}$$

求导一次后用 $x=x_0$代入即得

$$m_0=\frac{y_0(2x_0-x_1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{y_1(x_0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{y_2(x_0-x_1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)}$$

同理可得曲线末端点

$$m_n=\frac{y_{n-2}(x_n-x_{n-1})}{(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_n)}+\frac{y_{n-1}(x_n-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}+\frac{y_n(2x_n-x_{n-1}-x_{n-2})}{(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})}$$

型值点列的确定

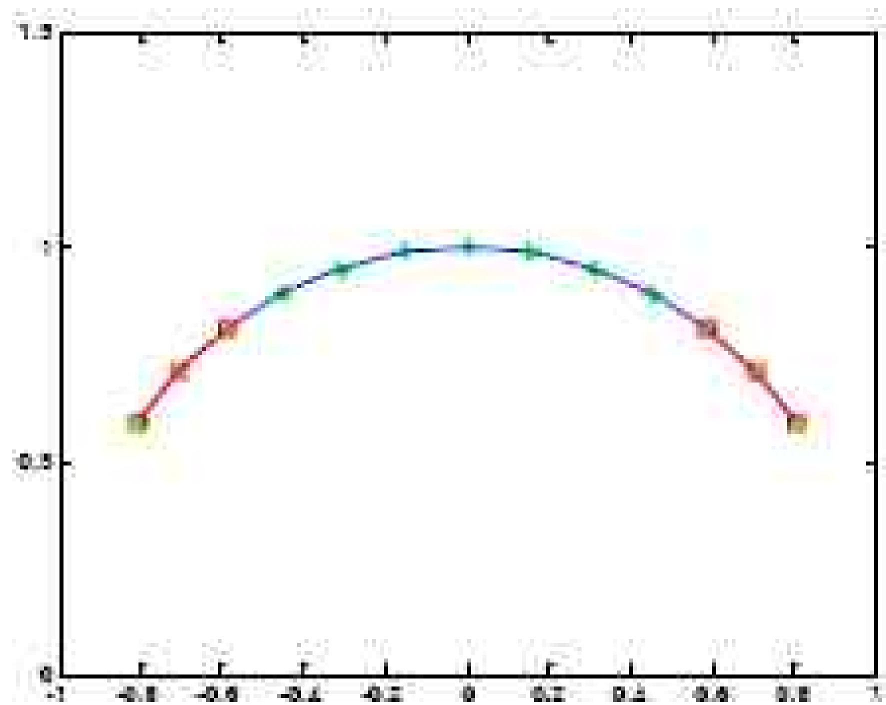
- 采用均匀分布的节点，使得计算简单，且拟合效果好。

```
function boundary()

x=cos(pi/5:pi/20:4*pi/5);
y=sin(pi/5:pi/20:4*pi/5);
m=length(x);
plot(x,y,'*g')
hold on
plot(x,y)

plot(x(1:3),y(1:3),'square r')
plot(x(1:3),y(1:3),'r')

plot(x(m-2:m),y(m-2:m),'square r')
plot(x(m-2:m),y(m-2:m),'r')
hold off
axis([-1 1 -0 1.5])
```



m 值和 M 值的几何意义

判断曲线的几何行为

m_i的符号，反映曲线在这些点处是上升还是下降；

m_i的大小，反映曲线在这些点附近升降变化的快慢程度。

M_i的符号，可判断曲线在型值点附近是凸还是凹；

M_i的大小，反映了这些点附近曲线的弯曲程度(因为对于小挠度曲线， 二阶导数基本上反映了曲线的曲率)。

特别是由于三次样条函数的二阶导数在每一个子区间上是线性函数，所以如果相邻的两个型值点上的二阶导数同号，则对应的这段曲线必然是单凸或单凹的，即这段曲线上没有拐点；如果异号，则这段曲线上必有唯一的拐点。