§2 离散型随机变量

一．离散型随机变量的概念与性质

离散型随机变量的定义

如果随机变量 X 的取值是有限个或可列无穷个，则称 X 为离散型随机变量．

返回主目录

离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为

$$x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_k, \quad \cdots$$

并设

$$P\{X = x_k\} = p_k \qquad (k = 1, \quad 2, \quad \cdots)$$

则称上式为离散型随机变量 X 的分布律．

离散型随机变量 X 的分布律还可写成矩阵的形式．

X	x_1	x_2	$\cdots,$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots,$	p_k	$\cdots$

返回主目录

说　明

1. 离散型随机变量可完全由其分布律来刻划．即离散型随机变量可完全由其的可能以及取这些值的概率唯一确定．

2． $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\} \cup \cdots = S$

且 $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \Phi \quad ,(i \neq j)$

离散型随机变量分布律的性质：

(1)．对任意的自然数 k，有

$$p_k \quad 0$$

(2)． $\sum_k p_k = 1$

返回主目录

例 1

从 1 ~ 10 这 10 个数字中随机取出 5 个数字，令：

X ：取出的 5 个数字中的最大值．

试求 X 的分布律．

解： X 的取值为 5 ，6 ，7 ，8 ，9 ，10 ． 并且

$$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^{4}}{C_{10}^{5}} \qquad (k=5，6，\cdots，10)$$

具体写出，即可得 X 的分布律：

X	5	6	7	8	9	1
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{1}{252}$

返回主目录

例 2

将 1 枚硬币掷 3 次，令：

X ：出现的正面次数与反面次数之差 .

试求 X 的分布律 .

解： X 的取值为 -3 ，-1 ，1 ，3 . 并且

X	-3	-1	1	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

例3 （已知分布律，求随机变量落在某区间上的概率）

设离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

则

$$P\{X \le 2\} = P\{\{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\}\}$$

$$= P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

返回主目录

例 3（续）

$$P\{X>3\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{4}{16}=\frac{7}{16}$$

$$P\{0.5\le X<3\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}$$

例 4 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

试求常数 c .

解：由随机变量的性质，得

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

该级数为等比级数，故有

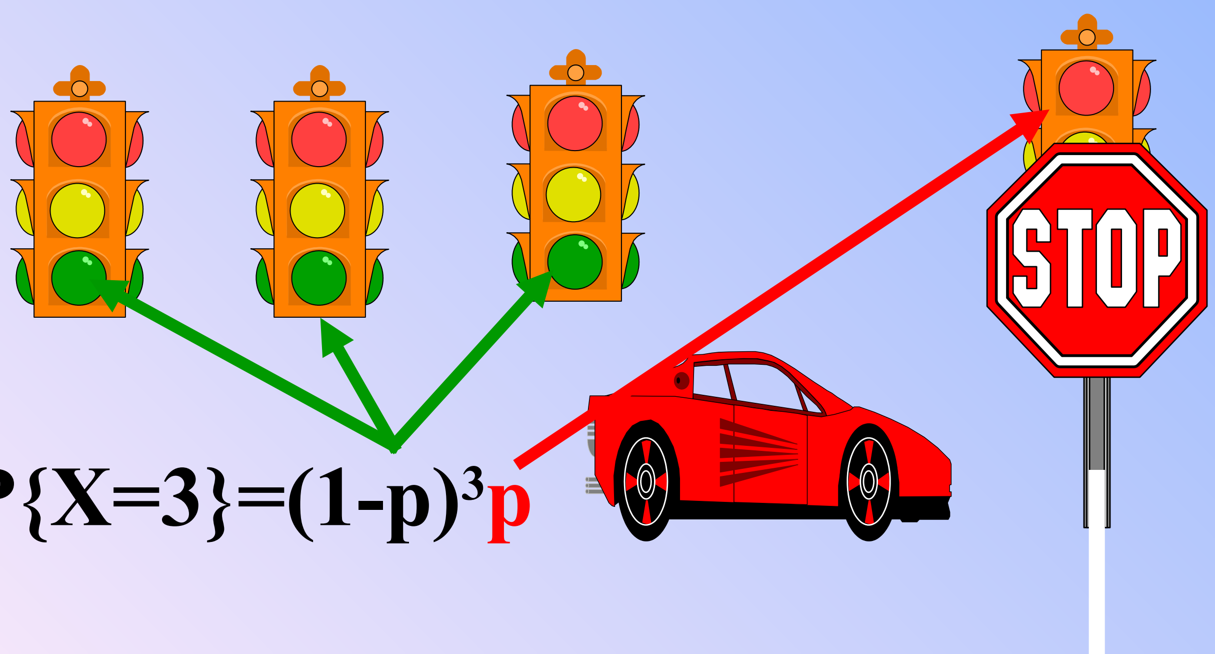
$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n=c\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

所以 $c=3$.

返回主目录

例 5

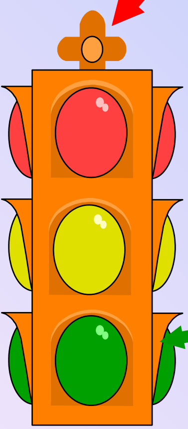
设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以 1/2 的概率允许或禁止汽车通过．以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的盏数，求 X 的分布律.(信号灯的工作是相互独立的).



$$P\{X=3\}=(1-p)^3p$$

例 5(续)

解：以 p 表示每盏信号灯禁止汽车通过的概率，则 X 的分布律为：



X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

或写成 $P\{X=k\}=(1-p)^kp$ ， $k=0,1,2,3$

$$P\{X=4\}=(1-p)^4$$

例 5（续） 以 p = 1/2 代入得：

X	0	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

n 重贝努里概型

1 、贝努里（ Bernoulli ）试验

如果随机试验 E 只有两个结果，则称 E 为 Bernoulli 试验

一般地，我们将这两个结果记作A与$\overline{A}$，分别称为“成功”与“失败”．

Bernoulli 试验的例子

掷一枚硬币，只有“出现正面”与“出现反面”两种结果，因此“掷一枚硬币”可看作是一次 Bernoulli 试验．

返回主目录

Bernoulli 试验的例子

掷一颗骰子，有六种结果．但如果我们只关心“出现六点”与“不出现六点”这两种情况，故“掷一颗骰子”也可以看作是 Bernoulli 试验．

- 对同一目标进行一次射击，若只考虑“击中目标”与“未击中目标”两种情况，则“同一目标进行一次射击”是 Bernoulli 试验．
- 在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑“至少通过 100 辆车”与“至多通过 99 辆车”这两种情况，这也是 Bernoulli 试验．

返回主目录

2. n 重 Bernoulli 试验

- 若独立重复地进行 n 次 Bernoulli 试验，这里“重复”是指每次试验中事件 A 发生的概率（即每次试验中“成功”的概率）不变，“独立”是指各次试验的结果相互独立，则称该试验为 n 重 Bernoulli 试验．

n 重 Bernoulli 试验的例子

- 掷 n 次硬币，可看作是一 n 重 Bernoulli 试验．
- 掷 n 颗骰子，如果我们对每颗骰子只关心“出现六点”与“不出现六点”这两种情况，故“掷 n 颗骰子”也可以看作是一 n 重 Bernoulli 试验．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验的例子

- 对同一目标进行 n 次射击，若每次射击只考虑“击中目标”与“未击中目标”两种情况，则“同一目标进行 n 次射击”是一 n 重 Bernoulli 试验．
- 在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑“至少通过 100 辆车”与“至多通过 99 辆车”这两种情况，这是一次 Bernoulli 试验．若独立重复地做该试验 n 次，则它是一 n 重 Bernoulli 试验．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验中的基本事件及其概率

在 n 重 Bernoulli 试验中的基本事件为

$$A_1'A_2'\cdots A_n'$$

其中$A_i'(i=1,2,\cdots n)$**为**A**或**$\overline{A}$，**总共**2^n**个。**

设在$A_1'A_2'\cdots A_n'$**中有**k**个**A_i'**为**A，$n-k$**个**A_i'**为**$\overline{A}$，

且$P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q$，**则由独立性，得**

$$P(A_1'A_2'\cdots A_n')=P(A_1')P(A_2')\cdots P(A_n')$$

$$=p^k q^{n-k}.$$

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验中恰好成功 k 次的概率

设在 n 重 Bernoulli 试验中，

$$P(A)=p\ ,\qquad P(\overline{A})=1-p=q$$

现考虑事件

$$B_{n\ ,\ k}=\left\{n\text{重}Bernoulli\text{试验中事件}A\text{恰好发生}k\text{次}\right\}$$

现求概率 $P(B_{n\ ,\ k})=P_n(k)$ ：

在 n 次试验中，指定 k 次出现 A（成功），其余 $n-k$ 次出现 $\overline{A}$（失败），这种指定的方法共有 C_n^k 种．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验中恰好成功 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (q = 1 - p)$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

注意 由二项式定理，我们有

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$= (p+q)^n$$

$$= 1$$

返回主目录

二、一些常用的离散型随机变量

1) Bernoulli 分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=1-p\ ,\quad P\{X=1\}=p$$

或

$$P\{X=k\}=p^k q^{1-k}\qquad (k=0,1)$$

X	0	1
P	1-p	p

则称随机变量 X 服从参数为 p 的 **Bernoulli 分布**．

记作 $X\sim b(1,\ p)$ （其中 $0\le p\le 1$ 为参数）

返回主目录

Bernoulli 分布也称作 0-1 分布或二点分布．

Bernoulli 分布的概率背景

进行一次 Bernoulli 试验，设：

$$P(A)=p\ ,\qquad P(\overline{A})=1-p=q$$

令：X ：在这次 Bernoulli 试验中事件 A 发生的次数．

或者说：令

$$X=\begin{cases}1 & \text{若事件}A\text{发生}\\ 0 & \text{若事件}A\text{不发生}\end{cases}$$

则 $X\sim b(1,p)$

例 5

15 件产品中有 4 件次品，11 件正品．从中取出 1 件令

X ：取出的一件产品中的次品数．则 X 的取值为 0 或者 1 ，并且

$$P\{X=0\}=\frac{11}{15}\text{，}\quad P\{X=1\}=\frac{4}{15}$$

即： $X\sim b\left(1,\frac{4}{15}\right).$

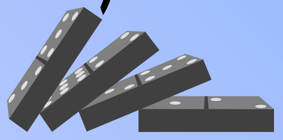
2 ）二 项 分 布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

则称随机变量 X 服从参数为 $(n,\ p)$ 的二项分布，记作 $X\sim b(n,\ p)$

（其中 n 为自然数，$0\le p\le 1$ 为参数）



返回主目录

说 明

显然，当 n=1 时 $X \sim b(1, p)$

此时，X 服从 *Bernoulli* 分布．

这说明，*Bernoulli* 分布是二项分布的一个特例．

二项分布的概率背景

进行 n 重 Bernoulli 试验，设在每次试验中

$$P(A) = p, \qquad P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

令 X：在这 Bernoulli 试验中事件 A 发生的次数．则 $X \sim b(n, p)$

分布律的验证

(1) . 由于 $0 \le p \le 1$ 以及 n 为自然数，可知

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

(2) . 又由二项式定理，可知

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \left[p + (1-p)\right]^n = 1$$

所以

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

是分布律 .

返回主目录

例 6

一大批产品的次品率为 0.05 ，现从中取出 10 件．试求下列事件的概率：

B={ 取出的 10 件产品中恰有 4 件次品 }

C={ 取出的 10 件产品中至少有 2 件次品 }

D={ 取出的 10 件产品中没有次品 }

解： $A=\{\text{取出一件产品为次品}\}$

则 $P(A)=0.05$

取 10 件产品可看作是 10 重 Bernoulli 试验．

X ：取出的 10 件产品中的次品数．

则 $X\sim b(10,\ 0.05)$

返回主目录

例 6（续）

所以，$P(B)=P\{X=4\}=C_{10}^{4}\times 0.05^{4}\times 0.95^{10-4}$

$$=9.648\times 10^{-4}$$

$$P(C)=P\{X\quad 2\}=1-P\{X<2\}$$

$$=1-C_{10}^{0}\times 0.05^{0}\times 0.95^{10}-C_{10}^{1}\times 0.05^{1}\times 0.95^{9}$$

$$=0.08614$$

$$P(D)=P\{X=0\}=0.95^{10}=0.5987$$

返回主目录

例 7

一张考卷上有 5 道选择题，每道题列出 4 个可能答案，其中只有一个答案是正确的．某学生靠猜测至少能答对 4 道题的概率是多少？

解：每答一道题相当于做一次 Bernoulli 试验，

$$A=\{\text{答对一道题}\}，\text{则}\quad P(A)=\frac{1}{4}$$

则答 5 道题相当于做 5 重 Bernoulli 试验．

设：X：该学生靠猜测能答对的题数

$$\text{则 } X\sim b\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$$

返回主目录

例 7（续）

所以

$$P\{\text{至少能答对4道题}\} = P\{X \quad 4\}$$

$$= P\{X = 4\} + P\{X = 5\}$$

$$= C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= \frac{1}{64}$$

返回主目录

例 8

设有 80 台同类型的设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01 ，且一台设备的故障能由一个人处理.考虑两种配备维修工人的方法：

其一，由 4 人维护，每人负责 20 台

其二，由 3 人，共同维护 80 台.

试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小.

例 8(续)

解：按第一种方法．以 X 记“第 1 人负责的 20 台中同一时刻发生故障的台数”，则 X ~ b(20，0.01)．

以 A_i 表示事件“第 i 人负责的台中发生故障不能及时维修”，则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \quad P(A_1) = P\{X \quad 2\}.$$

$$= 1 - P\{X \le 1\}.$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{1} P\{X = k\} = 1 - \sum_{k=0}^{1} C_{20}^{k} (0.01)^k (0.99)^{20-k}$$

$$= 0.0169$$

返回主目录

例 8(续) **按第二种方法.** 以 Y 记 80 台中同一时刻发生故障的台数， 则 Y~ b(80 ，0.01)

故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为：

$$P\{Y \quad 4\} = 1 - P\{Y \leq 3\} = 1 - \sum_{k=0}^{3} P\{X = k\}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{3} C_{80}^{k} (0.01)^{k} (0.99)^{80-k} = 0.0087$$

第二种方法中发生故障而不能及时维修的概率小，且维修工人减少一人。运用概率论讨论国民经济问题，可以有效地使用人力、物力资源。

返回主目录

例 9 对同一目标进行射击，设每次射击的命中率均为 0.23，问至少需进行多少次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95？

解： 设需进行 n 次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95．

进行 n 次射击，可看成是一 n 重 Bernoulli 试验

令：$A = \{\text{命中目标}\}$ 则，$P(A) = 0.23$

设 X={n 次射击中的命中次数} 则，$X \sim b(n, 0.23)$

$\{X \quad 1\} =$ {n 次射击至少命中一次目标 }=B

返回主目录

例 9（续）

则有 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-P\{X=0\}=1-0.77^n$

由题意，得 $P(B)=1-0.77^n \quad 0.95$

所以，有 $0.77^n \leq 0.05$

取对数，得 $n\ln 0.77 \leq \ln 0.05$

所以，有 $n \quad \dfrac{\ln 0.05}{\ln 0.77}=11.46$

即至少需进行 12 次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95 .

二项分布的分布形态

若 $X \sim B(n\,,\ p)$，则

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}}=\frac{(k-1)!(n-k+1)!\,p}{k!(n-k)!\,q}$$

$$=\frac{(n+1-k)p}{kq}=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}\qquad (q=1-p)$$

$$\therefore\quad \frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\begin{cases}>1\,, k<(n+1)p\\ =1\,, k=(n+1)p\\ <1\,, k>(n+1)p\end{cases}$$

二项分布的分布形态

$$\therefore \quad \frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\begin{cases} >1, k<(n+1)p \\ =1, k=(n+1)p \\ <1, k>(n+1)p \end{cases}$$

由此可知，二项分布的分布

$$P\{X=k\}$$

先是随着 k 的增大而增大，达到其最大值后再随着 k 的增大而减少．这个使得

$$P\{X=k\}$$

达到其最大值的 k_0 称为该二项分布的最可能次数．

返回主目录

$$\because \quad \frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\begin{cases}>1\,, & k<(n+1)p\\ =1\,, & k=(n+1)p\\ <1\,, & k>(n+1)p\end{cases}$$

如果$(n+1)p$是整数，则 $k_0=(n+1)p$ 或 $(n+1)p-1$ ；

如果$(n+1)p$不是整数，则 $k_0=[(n+1)p]$ ；

例 10

对同一目标进行 400 次独立射击，设每次射击时的命中率均为 0.02 ，

（ 1 ）试求 400 次射击最可能命中几次？：

（ 2 ）求至少命中两次目标 的概率。

解：对目标进行 400 次射击相当于做 400 重 Bernoulli 试验

令：X： 400射击中命中目标的次数 .

则 $X \sim b(400,\ 0.02)$.

(1) 由于 $(400+1)\times 0.02 = 8.02$，它不是整数

返回主目录

例 10（续）

因此，最可能射击的命中次数为

$$k_0 = [8.02] = 8$$

P{ 至少命中两次目标 } $= P\{X \quad 2\}$

$$= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$

$$= 1 - 0.98^{400} - C_{400}^{1}(0.02)(0.98)^{399}$$

$$= 0.9972.$$

返回主目录

3 ）Poisson 分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

（其中 $\lambda>0$ 为常数）

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布．

记作 $X\sim\pi(\lambda)$.

分布律的验证

(1) 由于 $\lambda > 0$ 可知对任意的自然数 k，有

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} > 0$$

(2) 又由幂级数的展开式，可知

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

所以

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

是分布律.

返回主目录

Poisson 分布中 λ 的意义

* 考虑“要求服务的顾客到达服务站”

我们把顾客看作时间轴上的质点，顾客到达服务站认为是质点出现。

设 $X=$“ $[t,t+\Delta t]$内质点出现的次数”

若 $P\{X=1\}=a\Delta t+o(\Delta t)$ ，则

$$P\{X=k\}=\frac{(a\Delta t)^k}{k!}e^{-a\Delta t}$$

即 X 服从参数为 $\lambda=a\Delta t$ 的 Poisson 分布 .

返回主目录

Poisson 分布的应用

- **Poisson 分布是概率论中重要的分布之一．**
- **自然界及工程技术中的许多随机指标都服从 Poisson 分布．**

＊ 例如，可以证明，电话总机在某一时间间隔内收到的呼叫次数，放射物在某一时间间隔内发射的粒子数，容器在某一时间间隔内产生的细菌数，某一时间间隔内来到某服务台要求服务的人数，等等，在一定条件下，都是服从 Poisson 分布的．

例 11

设随机变量 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，且已知

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}$$

试求 $P\{X=4\}$.

解：随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0，1，2，\cdots)$$

由已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$

返回主目录

例 11（续）

得 $$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$$

由此得方程 $$\lambda^2-2\lambda=0$$

得解 $$\lambda=2 .$$

（另一个解 $\lambda=0$ 不合题意，舍去）

所以，$$P\{X=4\}=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=\frac{2}{3}e^{-2}$$

$$=0.09022$$

Poisson 定理

设在 $Bernoulli$ 试验中，以 p_n 代表事件 A 在试验中发生的概率，它与试验总数 n 有关．如果

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$$

则
$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k \left(1 - p_n\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明：　令：$np_n = \lambda_n$

则
$$C_n^k p_n^k \left(1 - p_n\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

Poisson 定理的证明（续）

$$=\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

对于固定的 k ，有

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^k=\lambda^k$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right]^{-\frac{n-k}{n}\cdot\lambda_n}=e^{-\lambda}$$

返回主目录

Poisson 定理的证明（续）

所以，

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k \left(1-p_n\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\lambda_n^k\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k\,!}e^{-\lambda}$$

返回主目录

Poisson 定理的应用

由 Poisson 定理，可知

若随机变量 $X \sim B(n, \ p)$，

则当n比较大，p比较小时，

令：$\lambda = np$

则有 $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

返回主目录

例 13

设每次射击命中目标的概率为 0.012 ，现射击 600 次，求至少命中 3 次目标的概率（用 Poisson 分布近似计算）.

解：设 B={ 600 次射击至少命中 3 次目标 }

进行 600 次射击可看作是一 600 重 Bernoulli 试验.

X : 600次射击命中目标的次数 .

则 $X \sim B(600, 0.012)$.

用 $Poisson$ 分布近似计算，

取 $\lambda = 600 \times 0.012 = 7.2$.

返回主目录

例 12（续）

所以，$P(B) = P\{X \quad 3\} = 1 - P\{X < 3\}$

$$= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}$$

$$= 1 - e^{-7.2} - 7.2e^{-7.2} - \frac{7.2^2}{2}e^{-7.2}$$

$$= 0.9745$$

或 $P(B) = P\{X \quad 3\} = \sum_{k \quad 3}^{\infty} \frac{(7.2)^k}{k!} e^{-7.2}$

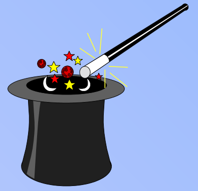
4）几 何 分 布

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$(\text{其中}\ p \quad 0,\ q \quad 0,\ p+q=1)$$

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布 .



返回主目录

分 布 律 的 验 证

(1) 由条件 $p \quad 0$，$q \quad 0$，可知对任意的自然数 k，

有 $q^{k-1}p \quad 0$

(2) 由条件可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \quad = p\cdot\frac{1}{1-q} \quad = 1$$

综上所述，可知

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

是一分布律．

返回主目录

几何分布的概率背景

在 Bernoulli 试验中，

$$P(A) = p, \quad P(\overline{A}) = q = 1 - p$$

试验进行到 A 首次出现为止．

令：X：所需试验次数．

则 X 服从参数为 p 的几何分布．

因为，$\{X = k\}$=“前 $k-1$ 次试验中 A 不出现，第 k 次试验中 A 出现”．

即 $$P\{X = k\} = q^{k-1} p \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots)$$

返回主目录

例 15

对同一目标进行射击，设每次射击时的命中率为 0.64 ，射击进行到击中目标时为止，令：

X ：所需射击次数 .

试求随机变量 X 的分布律，并求至少进行 2 次射击才能击中目标的概率 .

解：

X的取值为$1，2，\cdots，n，\cdots$

X服从参数为$p=0.64$的几何分布 .

例 15（续）

故， X 的分布律为：

$$P\{X=n\}=0.36^{n-1}\times 0.64 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$P\{\text{至少射击2次才命中}\}=P\{X\quad 2\}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}0.36^{k-1}\times 0.64 \qquad =0.64\times\frac{0.36}{1-0.36}$$

$$=0.36$$

5）超几何分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\quad\left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ \min(M,\ n)\right)$$

其中 N，M，n 均为自然数．

则称随机变量 X 服从参数为 $(N,\ M,\ n)$ 的超几何分布．

返回主目录

超几何分布的概率背景

一批产品有 N 件，其中有 M 件次品，其余 N-M 件为正品．现从中取出 n 件．

令： X：取出 n 件产品中的次品数． 则 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad \left(k=0, 1, \cdots, \min(M, n)\right)$$

此时，随机变量 X 服从参数为(N, M, n)的超几何分布

p_{55-56} 6,7,8 ,9, 10,13,15.

例 10

某病的自然痊愈率为 0.25 ，某医生为检验某种新药是否有效，他事先制定了一个决策规则：把这药给 10 个病人服用，如果这 10 病人中至少有 4 个人痊愈，则认为新药有效；反之，则认为新药无效 .

求：

(1) 新药有效，并且把痊愈率提高到 0.35 ，但通过试验却被否定的概率 .

(2) 新药完全无效，但通过试验却被判为有效的概率 .

返回主目录

例 10（续）

解：给 10 个病人服药可看作是一 10 重 Bernoulli 验．

令：$A=\{\text{某病人痊愈}\}$

(1) 若新药有效，则 $P(A)=0.35$

此时若否定新药，只有在试验中不到 4 人痊愈．因此

$$P\{\text{否定新药}\}=\sum_{i=0}^{3}C_{10}^{i}\times 0.35^{i}\times 0.65^{10-i}$$

$$=0.5138$$

返回主目录

例 10（续）

⑵ 由于新药无效，则 $P(A)=0.25$

此时若肯定新药，只有在试验中至少有 4 人痊愈. 因此

$$P\{肯定新药\}=\sum_{i=4}^{10} C_{10}^{i}\times 0.25^{i}\times 0.75^{10-i}$$

$$=1-\sum_{i=0}^{3} C_{10}^{i}\times 0.25^{i}\times 0.75^{10-i}$$

$$=0.2241$$

返回主目录

说 明

- 在例 6 的第一问中，该医生把有用的药给否定了，这种错误在统计学中称为第I类错误（弃真错误），犯这类错误的概率称为I类风险；
- 在例 6 的第二问中，该医生把无用的药给肯定了，这种错误在统计学中称为第II类错误（取伪错误），犯这类错误的概率称为II类风险；