§ 6.5 高斯求积公式

考虑如下带权求积公式：

$$I=\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

当积分具有**2n+1**次代数精度时，插值点称为高斯点。

先考虑$\rho(x)\equiv 1$的特殊情况：

定理**6.1**　高斯求积公式中节点$x_i\ (i=0,1,2,\dots,n)$是高斯点的充要条件是这些点为零点的多项式$\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$与任意不超过$n$的多项式$p(x)$均正交，即$\int_a^b p(x)\omega(x)dx=0$

必要性：

$\omega(x)$次数不大于$\mathrm{n}+1$, $p(x)$次数不大于n，

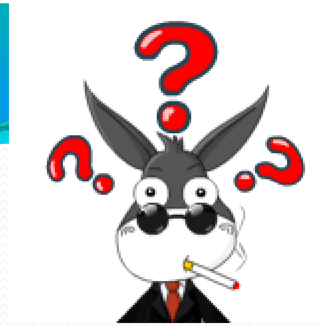
$p(x)\omega(x)$次数不大于$2n+1$

高斯点具有2n+1精度，因此：

$$\int_a^b p(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{m} w_i p(x_i)\omega(x_i)$$

但$\omega(x_i) = 0$,所以 $\int_a^b p(x)\omega(x)dx = 0$

充分性：



设$f(x)$次数不大于$2n+1$，设$f(x)=p(x)\omega(x)+Q(x)$

由$\int_a^b p(x)\omega(x)dx=0$，得$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b Q(x)dx$

插值公式对n次多项式$Q(x)$成立,所以 $\int_a^b Q(x)dx=\sum_{i=0}^{n} w_i Q(x_i)$

$$\because\ \omega(x_i)=0 \quad \therefore\ f(x_i)=Q(x_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b Q(x)dx=\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

定理1中条件的一般形式(加权正交):

$$\int_a^b \rho(x)\omega(x)\cdot x^j dx = 0 \quad (j = 0,1,2,\ldots,n)$$

定理6.2　高斯求积公式的余项为

$$R[f] = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega^2(x)dx$$

§6.5.1 几种高斯型求积公式

1. 高斯-勒让德求积公式

在$[-1,1]$上权函数$\rho(x)=1$的勒让德正交多项式为

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{(n+1)}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1}$$

$n=1, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，以零点$x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

作高斯求积公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_0 f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+w_1 f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

由于其代数精度为3，对f(x)=1,f(x)=x精确成立

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 2 \\ w_0(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}) + w_1(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = 0 \end{cases}$$

解得$w_0 = w_1 = 1$，两点高斯－勒让德求积公式：

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})}$$

$n = 2, P_3(x) = \dfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$零点$x_0 = -\dfrac{\sqrt{15}}{5}, x_1 = 0, x_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

得三点高斯－勒让德求积公式：

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\frac{\sqrt{15}}{5})}$$

当$x_0, x_1,\dots, x_n$为勒让德多项式$P_{n+1}(x)$零点时，高斯－勒让德求积公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + R[f]$$

系数为：$w_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$，$l_i(x)$拉格朗日插值基函数

余项为：

$$R[f] = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}\omega^2(x)dx = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^2}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\eta)$$

利用$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$将$[a,b]$区间求积转换为$[-1,1]$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left[\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right]dt=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt$$

表 6-6　高斯求积公式的节点和求积系数

$n+1$	x_i	w_i
1	0	2
2	±0.5773503	1
3	±0.7745967	5/9
	0	8/9
4	±0.8611363	0.3478548
	±0.3399810	0.6521452
5	±0.9061798	0.2369269
	±0.5384693	0.4786287
	0	0.5688889

例6.8　用高斯－勒让德公式计算$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$。

令$x=\frac{1}{2}(t+1)$，有　$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx=\int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(t+1)}{t+1}dt$

3节点高斯-勒德求积公式：

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{5}{9}\times\frac{\sin\frac{1}{2}(-0.7745967+1)}{-0.7745967+1}+\frac{8}{9}\times\frac{\sin\frac{1}{2}}{0+1}+$$

$$\frac{5}{9}\times\frac{\sin\frac{1}{2}(0.7745967+1)}{0.7745967+1}=0.9460831$$

对比例6.5：　$S_4=0.9460833$

2. 高斯-切比雪夫求积公式

切比雪夫多项式$T_{n+1}(x)=\cos[(n+1)\arccos(x)]$在$[-1,1]$上带权

$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$正交，$n+1$个零点为

$$x_i=\cos\left(\frac{2i-1}{2(n+1)}\pi\right)\quad (i=1,2,\dots,n+1)$$

高斯-切比雪夫求积公式：

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i f(x_i)+R[f]=\frac{\pi}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}f(x_i)+R[f]}$$

系数为：$w_i=\dfrac{\pi}{n+1}\quad (i=1,2,\dots,n+1)$

余项为：$R[f]=\dfrac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta)$

3. 高斯-拉盖尔求积公式

拉盖尔多项式$L_{n+1}(x)=e^x\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1}e^{-x})$是区间$[0,+\infty]$上关于权$\rho(x)=e^{-x}$的$n+1$次正交多项式，选其$n+1$个零点得到高斯$-$拉盖尔求积公式：

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx=\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)+R[f]}$$

系数为：$w_i=\dfrac{[(n+1)!]^2}{x_i[L'_{n+1}(x_i)]^2}\quad(i=1,2,\ldots,n+1)$

余项为：$R[f]=\dfrac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta)\quad \eta\in(0,+\infty)$

表 6－7　高斯-拉盖尔求积公式的节点与求积系数

$n\cancel{+1}$	x_i	w_i
1	0. 585 786 4	0. 853 553 4
	3. 414 213 6	0. 146 446 6
2	0. 415 774 6	0. 711 093 0
	2. 294 280 4	0. 278 517 7
	6. 289 945 1	0. 010 389 3
3	0. 322 547 7	0. 603 154 1
	1. 745 761 1	0. 357 418 7
	4. 536 620 3	0. 038 887 9
	9. 359 070 9	0. 000 539 3
4	0. 263 560 3	0. 521 755 6
	1. 413 403 1	0. 398 666 8
	3. 596 425 8	0. 075 942 4
	7. 085 810 0	0. 003 611 8
	12. 640 800 8	0. 000 023 4

例6.9 利用高斯－切比雪夫求积公计算$\int_0^2 \frac{x^2-1}{\sqrt{x(2-x)}}dx$

令$x=t+1$得$\int_0^2 \frac{x^2-1}{\sqrt{x(2-x)}}dx=\int_{-1}^1 \frac{t^2+2t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

利用两点求积公式：

$$\int_{-1}^1 \frac{t^2+2t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\pi}{2}\left[f(\cos\frac{\pi}{4})+f(\cos\frac{3\pi}{4})\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+2(\frac{\sqrt{2}}{2})+(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right]=\frac{\pi}{2}$$

本章小结

- 数值微分

中心差商：$$\boxed{f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}}$$

中点加速：$$G_1(h) = \frac{4}{3}G(\frac{h}{2}) - \frac{1}{3}G(h)$$

- 牛顿-柯特斯求积公式

梯形公式：$$\boxed{T = I_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]}$$

Simpson公式：$$\boxed{S = I_2 = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]}$$

- 复合求积法

复合梯形：

$$T_n = \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

复合**Simpson**：

$$S_n = \frac{b-a}{6n}[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

- 龙贝格求积法

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m - 1} T_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m - 1} T_{m-1}^{(k)}$$

- 高斯求积公式：n+1个插值点达到2n+1次代数精度时。