§ 3.3 牛顿迭代法

牛顿迭代法又称为**切线法**。

设x_k是$f(x)=0$根α附近的近似值，

过$(x_k, f(x_k))$作切线：

$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

令$L_k(x)=0$，得

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

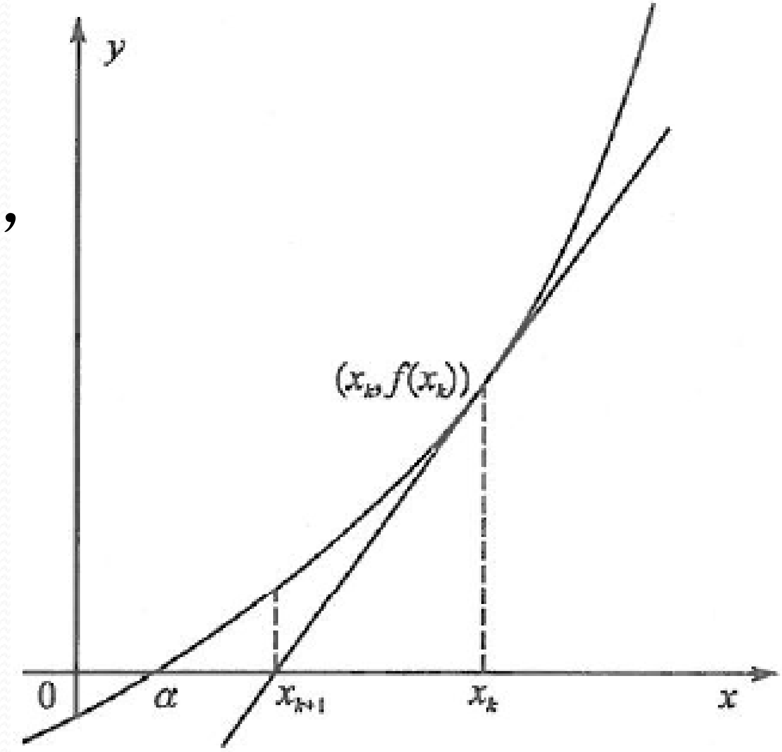

图 3－2 Newton 迭代法几何意义

当$f'(\alpha)\neq 0$时，$\varphi'(\alpha)=0$，至少平方收敛。

定理3.4 设$f(\alpha)=0, f'(\alpha)\neq 0$，且$f(x)$在$\alpha$的邻域内具有二阶连续导数，则 如下牛顿法产生的迭代 序列

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

局部收敛到 α，且收敛阶数至少为 2，

当$f''(\alpha)\neq 0$时，收敛阶恰为 2。

$$\varphi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\varphi'(\alpha)=0<1$$ 收敛!

$$x_{k+1}-\alpha = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)-f(\alpha)}{f'(x_k)}$$

将$f(\alpha)$在x_k附近作泰勒展开，得

$$f(\alpha) = f(x_k) + f'(x_k)(\alpha - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(\alpha - x_k)^2$$

$$（\alpha \le \xi_k \le x_k）$$

代入上式化简得： $x_{k+1}-\alpha = \dfrac{f''(\xi_k)(\alpha - x_k)^2}{2f'(x_k)}$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|} = \dfrac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}$

至少2阶收敛!

初值x_0阶充分靠近根才会收敛！

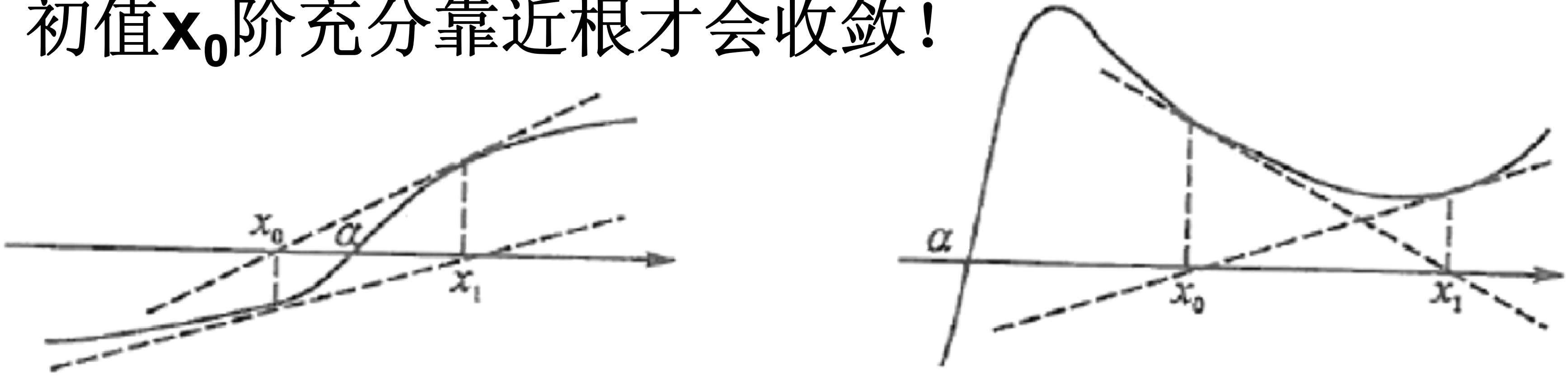

图 3－3　迭代点来回变动

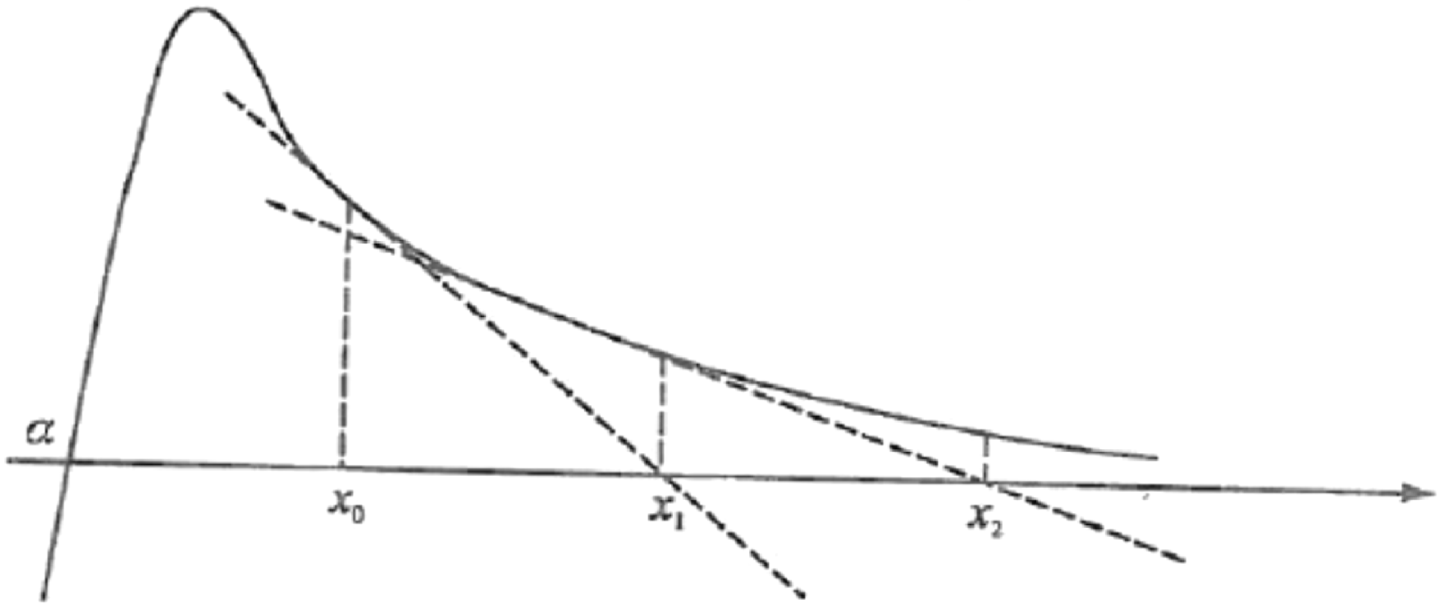

图 3－4　迭代点发散

定理3.5 设$f(x)$在有限区间$[a,b]$上二阶导数存在,且满足

(1) $f(a)\cdot f(b)<0$;

(2) $f'(x)\neq 0, x\in[a,b]$;

(3) $f''(x)$不变号, $x\in[a,b]$;

(4) 初值 $x_0\in[a,b]$,使 $\boxed{f''(x_0)\cdot f(x_0)>0.}$

则Newton迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 的唯一根。

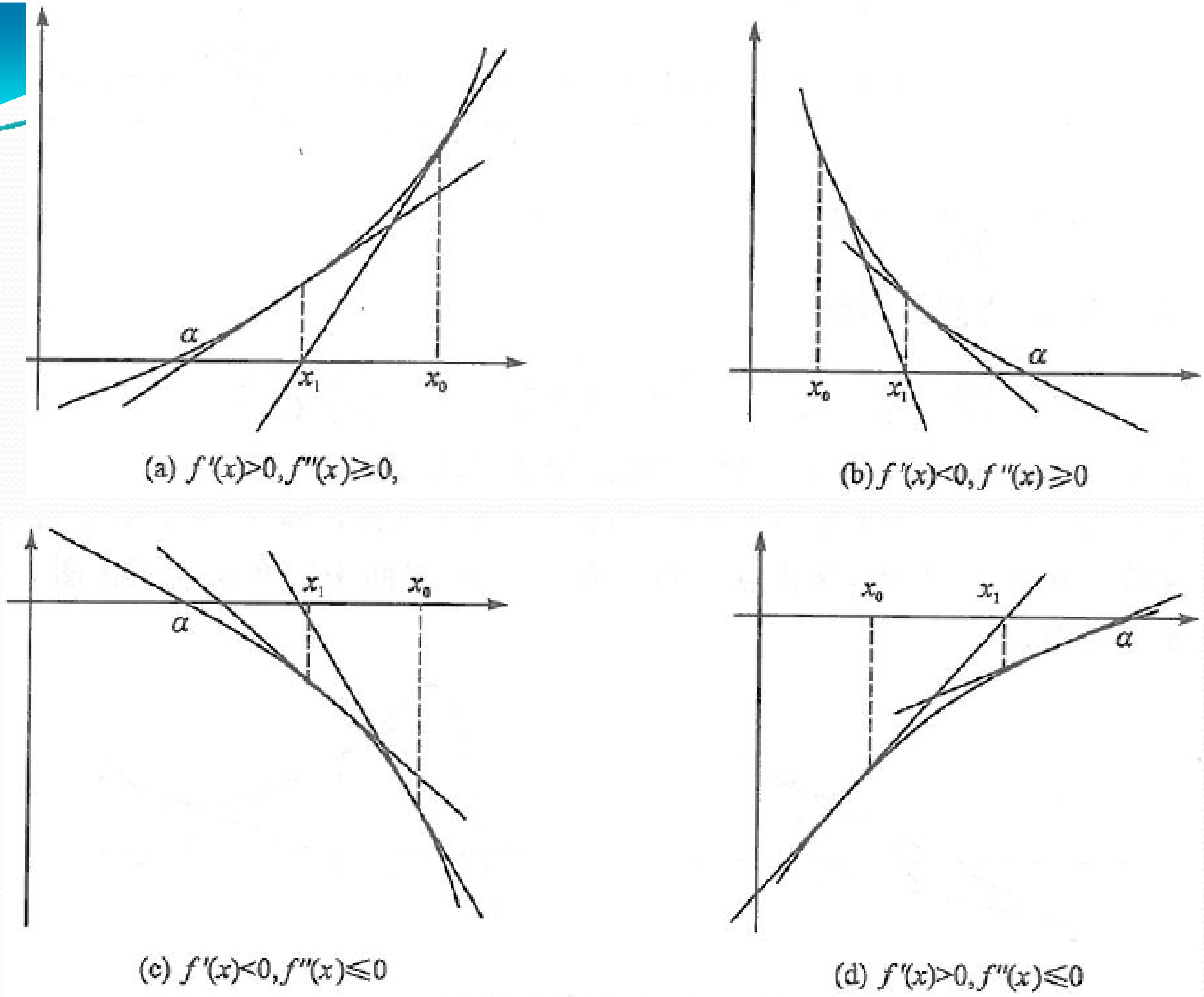

图 3－5　单调收敛于唯一根 α

例3.5 用牛顿迭代法求 $9x^2 - \sin x - 1 = 0$ 在 [0,1] 内的一个根。

$$f(1) = 9 - \sin 1 - 1 > 0,\ f(\frac{1}{3}) = 1 - \sin\frac{1}{3} - 1 < 0$$

在[1/3,1]区间内满足：

$$f'(x) = 18x - \cos x \geq 6 - 1 > 0$$

Matlab演示

$$f''(x) = 18 + \sin x \geq 18 > 0$$

$$f(0.4) = 9 \cdot 0.4^2 - \sin 0.4 - 1 \approx 0.0506 > 0$$

k	**x_k**	**k**	**x_k**
0	0.4	3	0.39184690700265
1	0.39194423490290	4	0.39184690700265
2	0.39184692120359		

牛顿迭代程序步骤：

(1)输入精度$\varepsilon_1, \varepsilon_2$，最大迭代次数$N$、初值$x_0$，

计算$f(x_0)$、$f'(x_0)$，记$k=0$

(2)若$k \geq N$或$f'(x_k)=0$，终止并输出失败标志；

(3)计算$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

(4)若$|x_{k+1}-x_k| < \varepsilon_1$或$f(x_{k+1}) < \varepsilon_2$，终止并输出

$\alpha \approx x_{k+1}$；否则$k=k+1$，转(2)。

例3.6 用牛顿迭代法求 $\sqrt{c}$, $c > 0$

作函数 $f(x)=x^2-c$ 则 $f(x)=0$ 的正根就是 $\sqrt{c}$.

$$f'(x)=2x, \quad \varphi(x)=x-\frac{x^2-c}{2x}$$

牛顿迭代公式如下：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k})$$

§3.4 牛顿迭代法的变形

§3. 4. 1 简化的牛顿迭代公式

应用牛顿迭代公式, 每一步需要计算 $f'(x_n)$.

为了避免计算导数值，将

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

修改为：

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)}$$

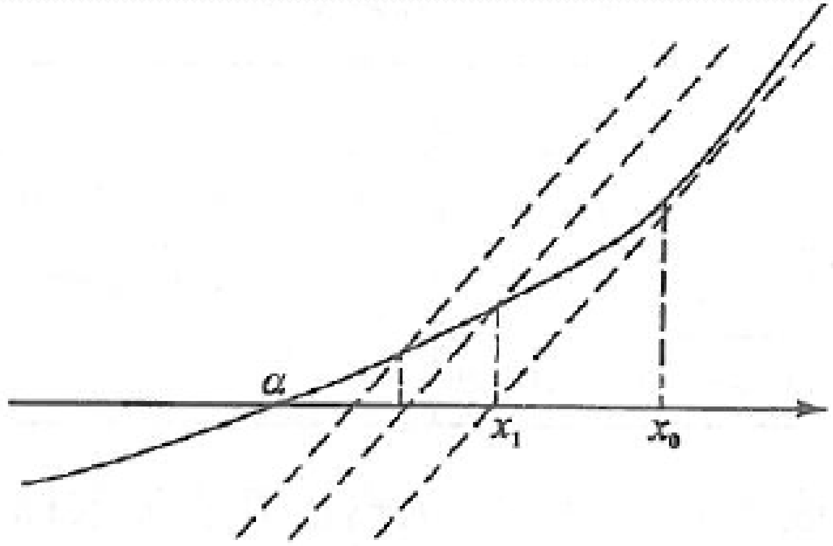

图 3－6　迭代平行

可进一步简化为：$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/c$

迭代公式为：$\boxed{\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{c}}$

根据收敛条件$|\varphi'(x)| \le L < 1$可得：

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{c}$$

$$0 < \frac{f'(x)}{c} < 2$$

异号时可能发散！

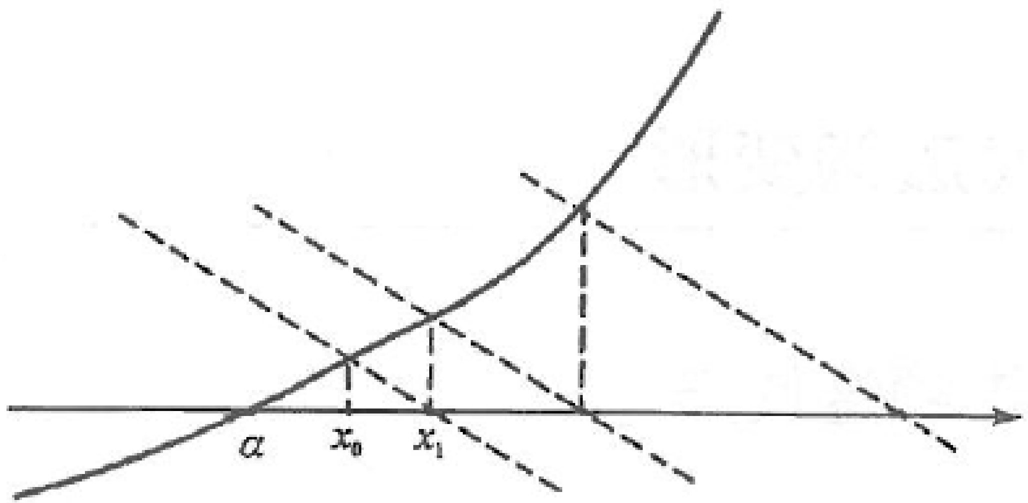

图 3－7　迭代发散

例**3.7** 用简化牛顿迭代法求 $x - e^{-x} = 0$的根，

取$x_0 = 0$,迭代至 $|x_k - x_{k-1}| \le 10^{-4}$.

由$f'(x_0) = 2$可得迭代公式为：

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/2$$

代人 $x_0 = 0$，得 $x_1 = 0.5$；

$x_2 = 0.55326532985632$；

$x_3 = 0.56416714063951$；

$x_4 = 0.56650042432150$；

$x_5 = 0.56700421456929$；

$x_6 = 0.56711319319700$；

$x_7 = 0.56713677664797$；

§3.4.2 弦截法

为了避免计算导数值，用下式近似导数：

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

迭代公式为：

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})}$$

以直代曲，需要两点函数值开始迭代。

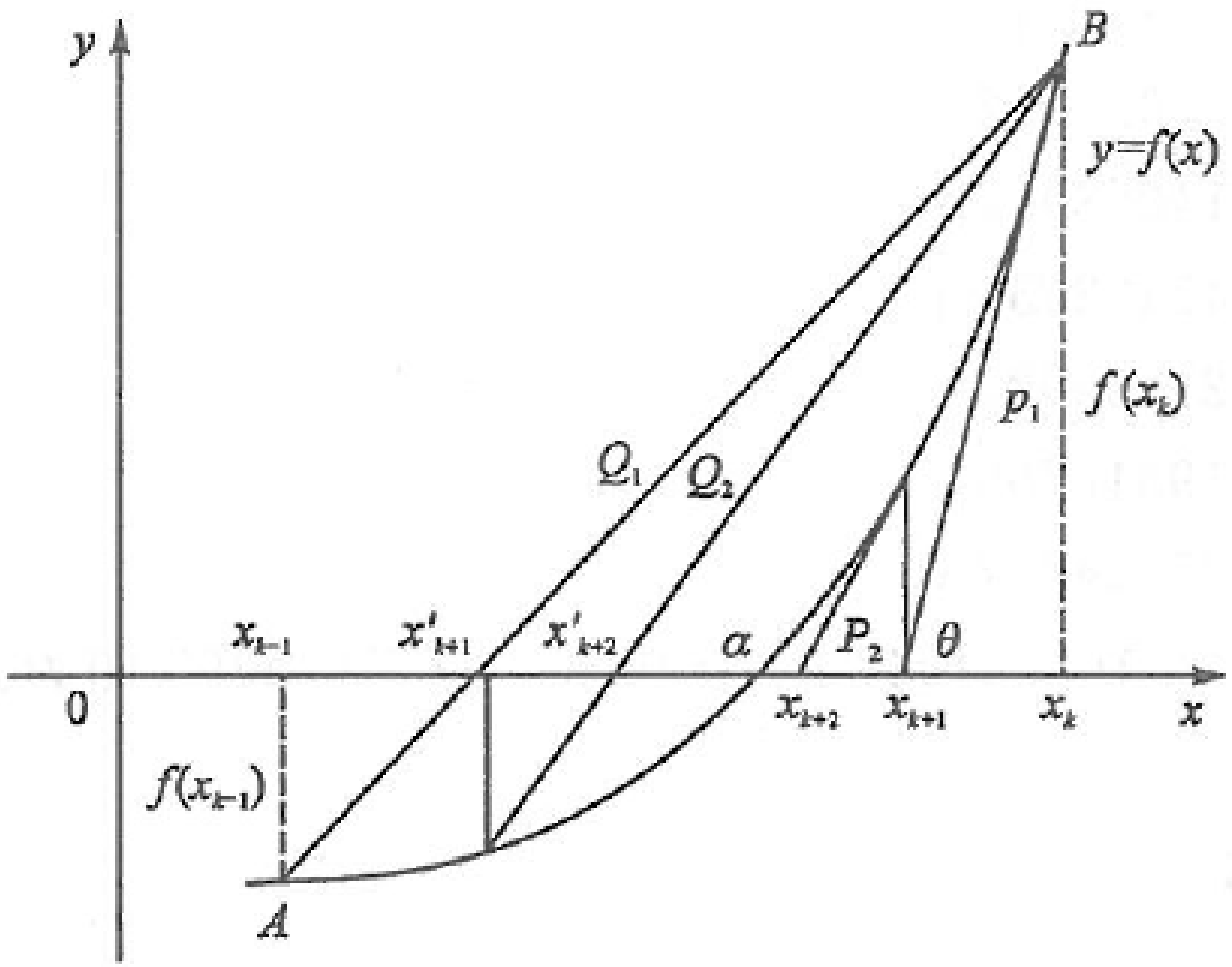

图 3－8　牛顿法与弦截法的几何意义

几何意义:

过点$(x_0, f(x_0))$与$(x_1, f(x_1))$作直线

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

令: $y = 0$, 得: $$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

记: $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0).$$

一般形式: $$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})}$$

例3.8 分别用牛顿法和截弦法求解方程在x=1.5附近根：

$$x^3 - x - 1 = 0$$

(1)牛顿法：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1} = 1.5 - \frac{(1.5)^3 - 1.5 - 1}{3(1.5)^2 - 1} \approx 1.34783$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - x_1 - 1}{3x_1^2 - 1} \approx 1.32520$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx 1.32472$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 - x_3 - 1}{3x_3^2 - 1} \approx 1.32472$$

(2)弦截法：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

$$= x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{x_k^2 - x_{k-1} \cdot x_k + x_{k-1}^2 - 1}$$

取$x_0 = 1.5$，$x_1 = 1.4$

$$x_2 = 1.4 - \frac{(1.4)^3 - 1.4 - 1}{(1.4)^2 + 1.4 \times 1.5 + (1.5)^2 - 1} \approx 1.33522$$

$$x_3 = 1.33522 - \frac{(1.33522)^3 - 1.33522 - 1}{(1.33522)^2 + 1.33522 \times 1.4 + (1.4)^2 - 1} \approx 1.32541$$

Matlab演示

k	牛顿法	截弦法
0	1.5	1.5， 1.4
1	1.3478260870	1.3352165725
2	1.3252003990	1.3254136911
3	1.3247181740	1.3247247125
4	1.3247179572	1.3247179616

牛顿法快于截弦法！

但$x_0=0$时牛顿法不收敛：-1, -0.5, 0.33, -1.44

§3.4.3 牛顿下山法

为了防止迭代发散，附加条件：

$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$$

引入 $0<\lambda\le 1$

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

λ为下山因子，一般取不同值进行试探：

$$\lambda=1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\ldots$$

例3.9 用牛顿下山法求解方程：

$$x^3/3 - x = 0$$

的一个根，取

$$x_0 = -0.99, 误差 |x_k - x_{k-1}| \le 10^{-5}$$

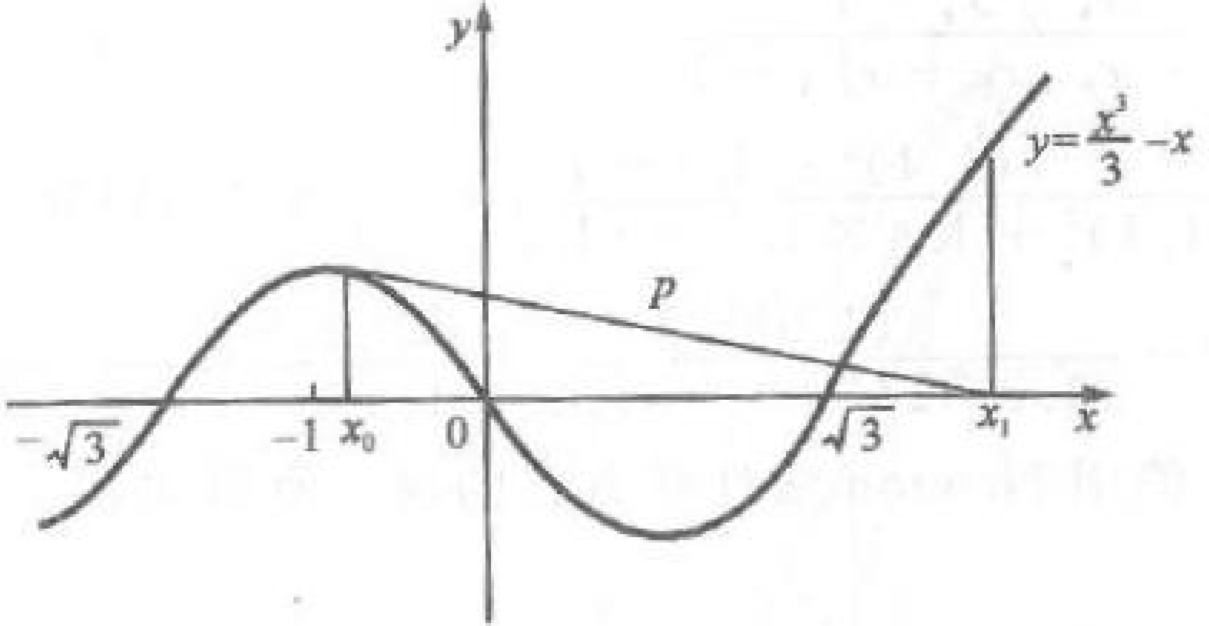

图 3-9 $y=\frac{x^3}{3}-x$ 的几何图形

表 3－4 Newton 下山法计算结果

k	λ	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
0		−0.99	0.66657	−0.01990	−33.49589
1	1	32.50598	11416.51989		
	1/2	15.75799	1288.5516		
	1/4	7.38400	126.81613		
	1/8	3.19700	7.69495		
	1/16	1.10350	−0.65559	0.21771	−3.01131
2	1	4.11481	19.10899		
	1/2	2.60916	3.31162		
	1/4	1.85633	0.27594	2.44594	0.11281
3	1	1.74352	0.02316	2.03985	0.01135
4	1	1.73217	0.00024	2.00041	0.00012
5	1	1.73205	0.00000	2.00000	0.00000
6	1	1.73205			

§ 3.5 Matlab应用实例

- 用牛顿法求解下列方程：

$$e^{5x} - \sin x + x^3 - 20 = 0$$

控制精度eps=10^{-10}，最大迭代次数M=40。分别取初始值x=1和x=0进行计算。

```matlab
k = 0;
M = 40;
x = 0;
eps = 10^-10;
while(k<M)
    c1 = f(x);
    c2 = f1(x);
    if c1==0 || c2==0
       break;
    end
    x1 = x-c1/c2;
    if abs(x1)<1
        res = abs(x1-x);
    else
        res = abs(x1-x)/abs(x1);
    end
    k = k+1;
    x = x1;
    ss = sprintf('%d        %12.10f',k,x);
    disp(ss);
    if res<eps
       break;
    end
end

function z = f(x)
z = exp(5*x)-sin(x)+x^3-20;

function z=f1(x)
z = 5*exp(5*x)-cos(x)+3*x^2;
```

Matlab演示

本 章 小 结

1. 二分法 $\boxed{2^{n+1} > (b-a)/\varepsilon}$

2. 简单迭代法 $\boxed{x = \varphi(x), \quad |\varphi'(x)| < 1}$

3. 牛顿迭代法 $\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)}$

4. 牛顿迭代法的变形

- 简化牛顿迭代法 $\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)}$

- 弦截法
$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})}$$

- 牛顿下山法
$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

课 后 作 业

第三章习题的1、3(只估计迭代次数)、4、5、6、8、13(2)（计算过程及结果精确到小数点后两位）。

5月20日递交。