1.5 对偶与范式

任一命题公式都存在着与之逻辑等价的主析取和主合取范式，并且是唯一的。

1.5.1 对偶

❖ **定义 1.15** 在给定的仅使用联结词¬, ∧, ∨ 的命题公式 A 中，若把∧和∨互换，0 和 1 互换而得到一个命题公式 A* ，则称 A* 是 A 的对偶式。

- 显然， A 也是 A* 的对偶式。
- 可见， A* 和 A 互为对偶式且 (A*)*=A 。

例 1.36 写出下列公式的对偶式。

1 ） $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

2 ） $A\wedge 0$

解：所求得的对偶式为

1 ） $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

2 ） $A\vee 1$

❖ **定理 1.3** 设 A* 和 A 互为对偶式，$P_1, P_2, \ldots, P_n$ 是出现在 A 和 A* 中的命题变元，则

1 ） $\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$

2 ） $A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

1.5.1 对偶

- **定理 1.4** 设 A 和 B 是两个命题公式，若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$ 。

证：令 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 是出现在公式 A 和 B 中的所有命题变元，因为有

$A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

故 $\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

根据定理 1.3 可得

$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$

$\neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n$

因此 $A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$ 证毕。

- 说明：
  - 1 ）对于含有$\neg, \wedge, \vee$ 之外联结词的公式，必须利用逻辑等价演算将其他联结词消去后，才能求其对偶式。
  - 2 ）一般情况下，公式与其对偶式不是逻辑等价的。

1.5.2 范式

- **定义 1.16** 命题变元和命题变元的否定称为**文字**。
- **定义 1.17** 仅由有限个文字构成的析取式称作**简单析取式**。仅由有限个文字构成的合取式称作**简单合取式**。
- 一个文字既是简单析取式，又是简单合取式。

例 1.37 判断以下公式是否为简单析（合）取式

1) $\neg P$

2) $\neg\neg P$

3) $P \wedge \neg Q$

4) $\neg(P \wedge \neg Q)$

解： 1) 是简单析取式，也是简单合取式；

2) 不是；

3) 是简单合取式；

4) 不是。

1.5.2 范式

- 定理 1.5 1）一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式。

  2）一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式。
- 定义 1.18 1）由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式。

  2）由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式。

  3）析取范式与合取范式统称为范式。
- 无论是简单析取式或是简单合取式，都既是析取范式又是合取范式。
- 定理 1.6 1）一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。

  2）一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

1.5.2 范式

❖ 定理 1.7（范式存在定理）任一命题公式都存在与之逻辑等价的析取范式与合取范式。

证：以下的步骤也是求公式范式的步骤（此为构造性证明方法之一）：

1 ）利用蕴涵律和等价律消去联结词→，↔

蕴涵律： $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价律： $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

2 ）利用双重否定律消去连续的否定号

双重否定律： $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

3 ）利用德摩根律内移否定号

德摩根律： $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

4 ）利用∨对∧的分配律求合取范式，∧对∨的分配律求析取范式。

∨对∧的分配律： $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

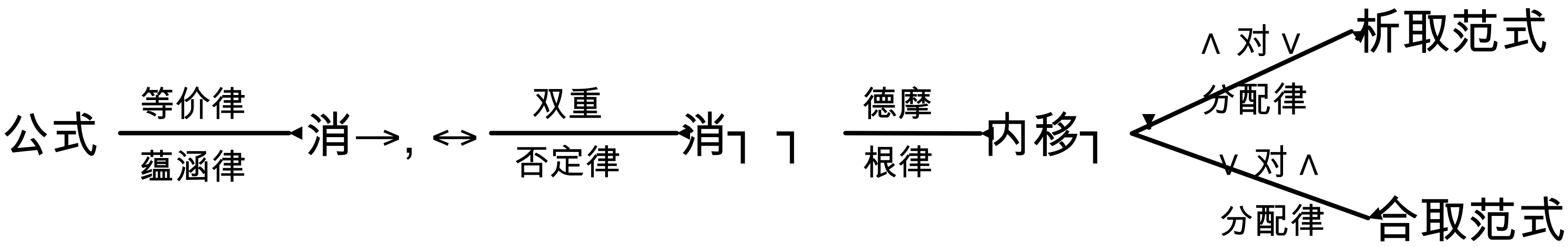
∧对∨的分配律： $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

由以上步骤，可将任一公式化成与之逻辑等价的析取范式或合取范式，

证毕。

1.5.2 范式

❖ 求析（合）取范式的思维形式注记图如图：



1.5.2 范式

例 1.38 求 $(P\to Q)\leftrightarrow R$ 的析取范式与合取范式

解：1 ）求析取范式

$(P\to Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\leftrightarrow R$ （消去→）

$\Leftrightarrow ((\neg P\vee Q)\to R)\wedge(R\to(\neg P\vee Q))$ （消去↔）

$\Leftrightarrow (\neg(\neg P\vee Q)\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg P\vee Q)$ （消去→）

$\Leftrightarrow ((P\wedge\neg Q)\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$ （否定号内移）

$\Leftrightarrow ((P\wedge\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R))\vee(R\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R))$ （∧对∨分配律）

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge\neg P)\vee(R\wedge Q)\vee(R\wedge\neg R)$ （∧对∨分配律）

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ （矛盾律、同一律、交换律）

1.5.2 范式

2 ）求合取范式

求析取范式和求合取范式的前两步是相同的，只是在利用分配律时有所不同。

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$ （∨对∧分配律）

1.5.2 范式

例 1.39　求公式 $P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R))$ 的析取范式和合取范式。

解：1）求析取范式

$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R))$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \vee R))$　　　　（消去→）

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)$　　　　（∧对∨的分配律）

2）求合取范式

求析取方式和求合取范式的前两步是相同的，只是在利用分配律时有所不同。

$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R))$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \vee R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$　　　　（∨对∧的分配律）

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R)$　　　　（合取范式同时也是析取范式）

1.5.3 主范式

- **定义 1.19** 在含有 n 个命题变元的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变元和它的否定式不同时出现，而二者之一必出现且仅出现一次；且第 i 个命题变元或它的否定式出现在从左算起的第 i 位上（若命题变元无脚标，就按字典顺序排列），称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）。
- 1 ）关于极小项的性质及说明：
  - （ 1 ）由于每个命题变元在极小项中以原形或否定式形式出现且仅出现一次，因而 n 个命题变元共可产生 2^n 个不同的极小项。
  - （ 2 ）每个极小项都有且仅有一个成真赋值；若成真赋值所对应的二进制数转换为十进制数 i ，就将所对应极小项记作 m_i.
  - （ 3 ） 2^n 个极小项两两互不逻辑等价。
  - （ 4 ）任意两个不同极小项的合取式永假。
  - （ 5 ） 2^n 个极小项的析取式永真。

1.5.3 主范式

- 2）关于极大项的性质：
  - （1）n个命题变元共可产生2^n个极大项；
  - （2）每个极大项有且仅有一个成假赋值，将其对应的十进制数i做极大项的脚标，记作M_i。
  - （3）2^n个极大项两两互不逻辑等价。
  - （4）任意两个不同极大项的析取式永真。
  - （5）2^n个极大项的合取式永假。

1.5.3 主范式

P, Q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称

1.5.3 主范式

P, Q 形成的极小项与极大项（续）

首先，写名称；

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
		m_0			M_0
		m_1			M_1
		m_2			M_2
		m_3			M_3

1.5.3 主范式

P, Q 形成的极小项与极大项（续）

首先，写名称；

其次，填成真（假）赋值；

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
	0 0	m_0		0 0	M_0
	0 1	m_1		0 1	M_1
	1 0	m_2		1 0	M_2
	1 1	m_3		1 1	M_3

1.5.3 主范式

P, Q 形成的极小项与极大项（续）

首先，写名称；

其次，填成真（假）赋值；

最后，填公式.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg P\wedge\neg Q$	0 0	m_0	$P\vee Q$	0 0	M_0
$\neg P\wedge Q$	0 1	m_1	$P\vee\neg Q$	0 1	M_1
$P\wedge\neg Q$	1 0	m_2	$\neg P\vee Q$	1 0	M_2
$P\wedge Q$	1 1	m_3	$\neg P\vee\neg Q$	1 1	M_3

1.5.3 主范式

- P,Q,R 形成的极小项与极大项（练习）

1.5.3 主范式

❖ **定理 1.8** 设 m_i 与 M_i 是命题变元 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 形成的极小项和极大项，则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i\ ; \qquad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

M_i 与 m_i 互为对偶式。

❖ **定义 1.20** 1）由有限个极小项构成的析取式称为**主析取范式**。

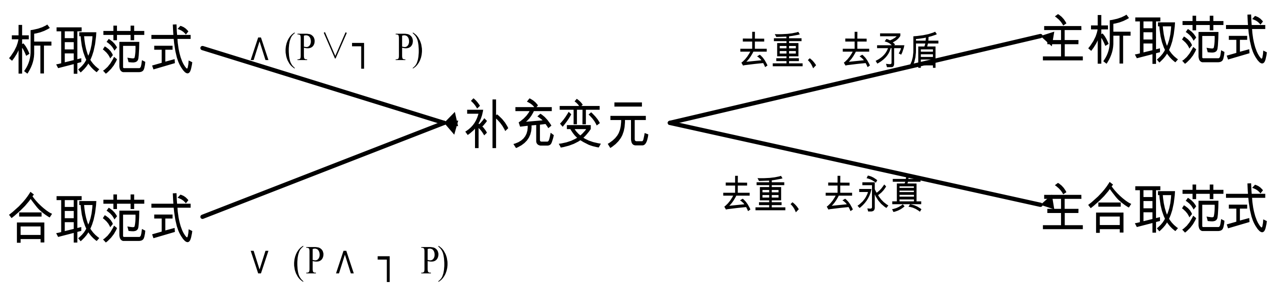
2）由有限个极大项构成的合取式称为**主合取范式**。

3）主析取范式与主合取范式统称为**主范式**。

❖ **定理 1.9（范式定理）** 任何命题公式都存在着与之逻辑等价的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的。（证略）

1.5.3 主范式

- 基于逻辑等价演算的方法求主范式的步骤如下：
  - 1) 求出析取范式（合取范式）；
  - 2) 补充命题变元；
  - 3) 消去重复出现的极小（大）项和矛盾式（重言式）。
- 求主范式的思维形式注记图如图 所示。



- 注意：在求给定公式的主析取范式（主合取范式）时，一定根据公式中命题变元的个数决定极小项（极大项）中文字的个数。

在求主范式的过程中，每个极大项和极小项中的命题变元和其否定都应该按照序号或字典顺序，最后求得的主范式一般用极大项或极小项的符号表示，并且按极小项（极大项）符号的脚标由小到大顺序排列。

1.5.3 主范式

例 1.40 求 $(P\to Q)\leftrightarrow R$ 的主析取范式与主合取范式。

解：1）求主析取范式

在例 1.38 中已求出公式的析取范式：

$(P\to Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$

分析：

（1）因为公式含三个命题变元，所以极小项均由三个文字组成。

（2）简单合取式 $P\wedge\neg Q\wedge\neg R$ 已是极小项 m_4。

（3）在此析取范式中，简单合取式 $\neg P\wedge R$，$Q\wedge R$ 都不是极小项。下面分别求出它们派生的极小项（补充命题变元）。

例 1.40　求 $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$ 的主析取范式与主合取范式

$(\neg P\wedge R)$

$\Leftrightarrow \neg P\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge R$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge \neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow m1\vee m3$

$(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee P)\wedge(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow m3\vee m7$

于是

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow m1\vee m3\vee m4\vee m7$

例 1.40　求 $(P\to Q)\leftrightarrow R$ 的主析取范式与主合取范式

2 ）求主合取范式

在例 1.38 中已求出公式的合取范式：

$(P\to Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee \neg R)$

分析：

（ 1 ）因为公式含三个命题变元，所以极大项均由三个文字组成。

（ 2 ）简单析取式 $\neg P\vee Q\vee \neg R$ 已是极大项 M5 。

（ 3 ）在此合取范式中，简单析取式 $P\vee R$ ，$\neg Q\vee R$ 都不是极大项。下面分别求出它们派生的极大项（补充命题变元）

例 1.40　求 $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$ 的主析取范式与主合取范式

$(P\vee R)$

$\Leftrightarrow P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow M0\wedge M2$

$(\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg P)\vee(\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow M2\wedge M6$

于是

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow M0\wedge M2\wedge M5\wedge M6$

1.5.3 主范式

- 两种求主范式的方法：
  - 1 ）利用真值表求公式的主范式
    - 所有成真赋值对应的极小项的析取式就是主析取范式；
    - 所有成假赋值对应的极大项的合取式就是主合取范式。
  - 2 ）利用公式的主析（合）取范式求公式的主合（析）取范式
    - 设公式 A 的主析取范式中含有 s 个极小项，则 A 有 s 个成真赋值，有 2^n-s 个成假赋值（ n 为 A 中含有命题变元的个数），写出各成假赋值对应的极大项，将它们合取起来就为 A 的主合取范式。
- 已知公式 A 中含有 3 个命题变元 P ， Q ， R ，且它的主析取范式为

$$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_5 \vee m_7$$

则 A 的成真赋值为 000 、 010 、 101 、 111 ，易知成假赋值为 001 、 011 、 100 、 110 ，它们对应的极大项分别是 $P \vee Q \vee \neg R$ 、 $P \vee \neg Q \vee \neg R$ 、 $\neg P \vee Q \vee R$ 、 $\neg P \vee \neg Q \vee R$ ，用符号表示为 M_1 ， M_3 ， M_4 和 M_6 ，于是， A 的主合取范式为

$$A \Leftrightarrow M_1 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_6$$

- 也就是说同一公式的主析取范式的极小项的脚标和主合取范式极大项的脚标是互补的。

1.5.3 主范式

- 主范式有很多用途，在此总结几点：
  - 1 ）求公式的成真赋值与成假赋值
    - 若公式 A 中含 n 个命题变元， A 的主析取范式含 $s(0\le s\le 2^n)$ 个极小项，则 A 仅有 s 个成真赋值，它们是所含极小项脚标的二进制表示，其余 2^n-s 个赋值都是成假赋值。由此可以给出公式的真值表。
  - 2 ）判断公式的类型
    - 设公式 A 中含 n 个命题变元，容易看出：

      （ 1 ） A 为重言式当且仅当 A 的主析取范式含全部 2^n 个极小项（ A 的主合取范式不含任何极大项，此时，记 A 的主合取范式为 1 ）。

      （ 2 ） A 为矛盾式当且仅当 A 的主析取范式不含任何极小项（ A 的主合取范式含全部 2^n 个极大项）。此时，记 A 的主析取范式为 0 。

      （ 3 ） A 为可满足式当且仅当 A 的主析取范式至少含一个极小项（ A 的主合取范式至多含 2^n-1 个极大项）。

1.5.3 主范式

- 3 ）判断两个命题公式是否逻辑等价
  - 设公式 A 、 B 共含有 n 个命题变元，按 n 个命题变元求出 A 与 B 的主析（合）取范式 A’ 与 B’ 。若 A’ = B’, 则 A⇔B ；否则， A 与 B 不逻辑等价。
- A⇔B 当且仅当 A 与 B 有相同的真值表，又当且仅当 A 与 B 有相同的主范式。因而可以这样说，真值表与主范式是描述命题公式标准形式的两种不同的逻辑等价形式。

1.5.3 主范式

❖ 4 ）应用主析取范式分析和解决实际问题

例 1.41　某科研所要从 3 名科研骨干 A 、 B 、 C 中挑选 1 ～ 2 名出国进修。由于工作原因，选派时要满足以下条件：

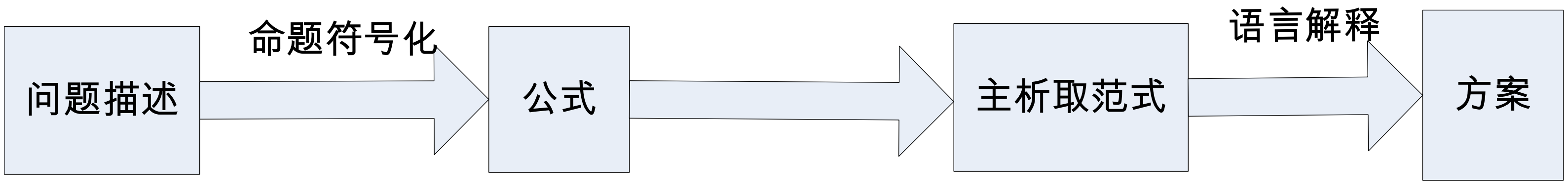
1 ）若 A 去，则 C 同去。

2 ）若 B 去，则 C 不能去。

3 ）若 C 不去，则 A 或 B 可以去。

问应如何选派他们去？

注记：此类问题要通过求主析取范式的方法分析，首先要对问题描述进行命题符号化得到该问题对应的命题公式，而问题的求解就是求出该命题公式的成真赋值，所以，通过逻辑等价演算求出公式的主析取范式就得到了问题的解决方案。思维形式注记图如图所示。



1.5.3 主范式

解：设 P: 派 A 去.; Q: 派 B 去； R: 派 C 去.

由已知条件可得公式

$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\rightarrow(P\vee Q))$

经过演算可得

$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\rightarrow(P\vee Q))$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg R)\wedge(R\vee(P\vee Q))$

$\Leftrightarrow((\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)\vee(\neg Q\wedge R))\wedge(P\vee Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee((P\wedge\neg P)\vee(\neg Q\wedge R))$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow m1\vee m2\vee m5$

由于 $m1=\neg P\wedge\neg Q\wedge R$, $m2=\neg P\wedge Q\wedge\neg R$, $m5=P\wedge\neg Q\wedge R$

可知，选派方案有 3 种：

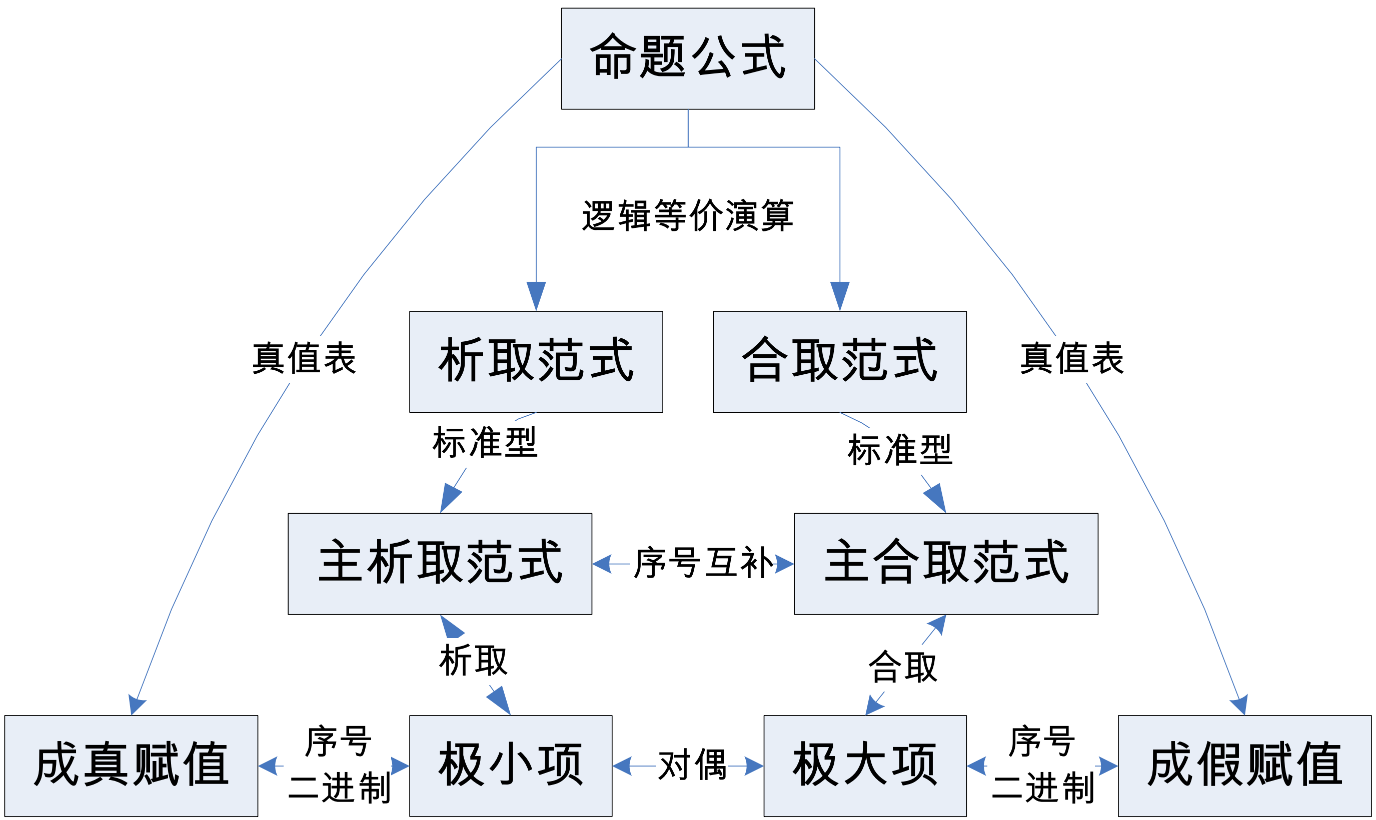
C 去，而 A, B 都不去。 B 去，而 A, C 都不去。 A, C 去，而 B 不去。

小结

- 任何命题公式都存在着与之逻辑等价的析取范式和合取范式
- 任何命题公式都存在着与之逻辑等价的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的。
- 求主范式的方法有逻辑等价演算的方法、真值表的方法，也可以利用主析（合）取范式求主合（析）取范式。
- 主析取范式中的极小项对应公式的成真赋值，主合取范式中的极大项对应公式的成假赋值。极大项和极小项互为对偶式。
- 主范式可以用于验证公式间的逻辑等价、判断公式类型、求公式的成真赋值和成假赋值等。

小结

- 本小节内容的思维形式注记图：



作业

- 课后习题 8（奇数小题）
- 习题 16