第三章 复变函数的积分

- §3.1 复变函数积分的概念
- §3.2 柯西－古萨基本定理
- §3.3 基本定理的推广
- §3.4 原函数与不定积分
- §3.5 柯西积分公式
- §3.6 解析函数的高阶导数
- §3.7 解析函数与调和函数的关系

§3.1 复变函数积分的概念

- 1. 有向曲线
- 2. 积分的定义
- 3. 积分存在的条件及其计算法
- 4. 积分性质

1. 有向曲线

设 $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

$x'(t)$、$y'(t) \in C[\alpha,\beta]$, 且$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$

$$C: \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \quad (1)$$

$z'(t)$连续且$z'(t) \ne 0$

C -- z平面上的一条光滑曲线.

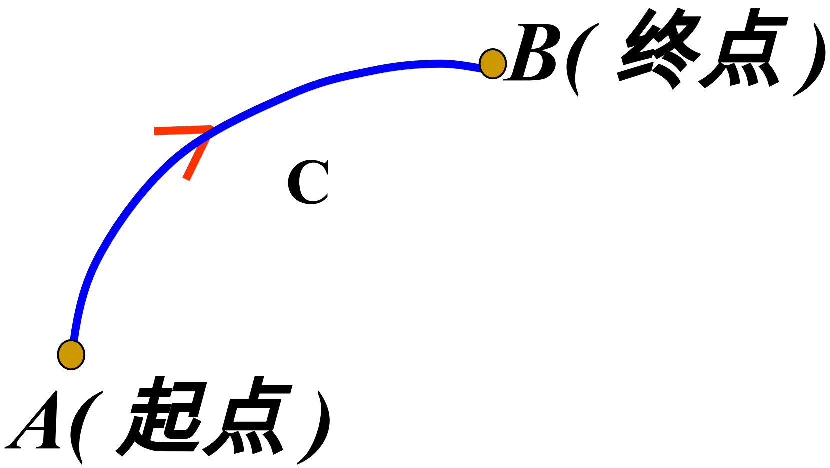
约定: C – 光滑或分段光滑曲线 (因而可求长).

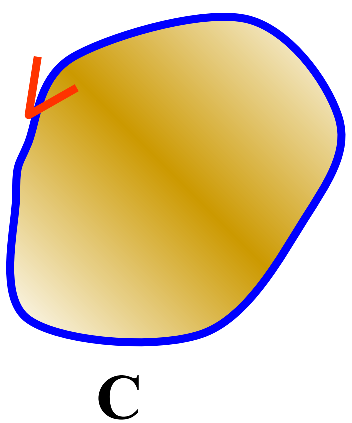
C的方向规定：

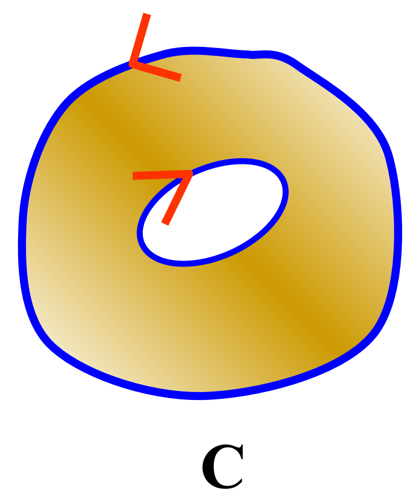
开曲线：指定起点a，终点b，若$a \to b$为正，

则$b \to a$为负，记作 C^-；

闭曲线：正方向——观察者顺此方向沿C前进一周，C的内部一直在观察者的左边。





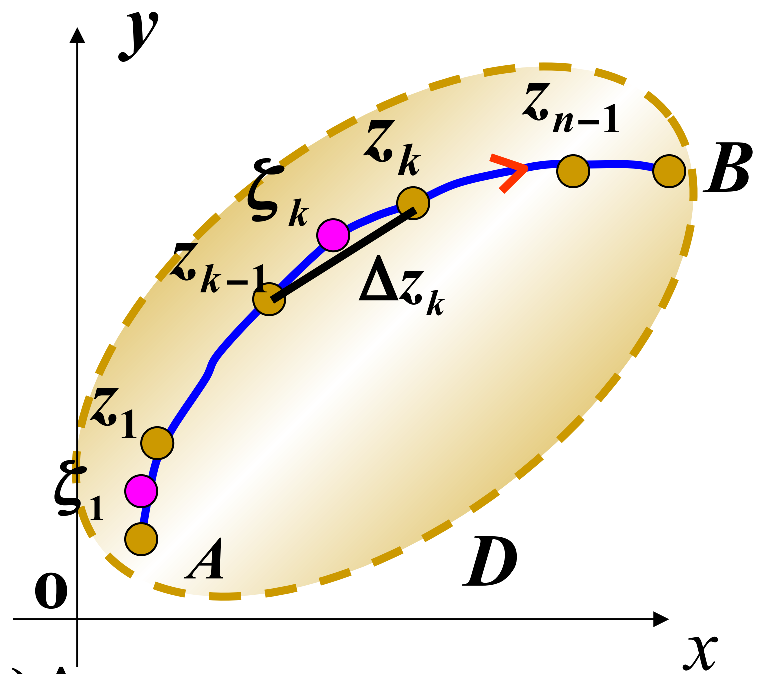


2. 积分的定义

定义 设(1) $w = f(z) \quad z \in D$

(2) C为区域D内点$A \to$点B的一条光滑有向曲线.

(3)将 $\overset{\frown}{AB}$ 任意分划成n个小弧段：$A = z_0, z_1, \cdots, z_n = B$



(4) $\forall \xi_k \in \overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$ 作乘积$f(\xi_k)\Delta z_k$

(5)作和式$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，记$\Delta S_k$为 $\overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$ 的长度，$\delta = \max\limits_{1 \le k \le n}\{\Delta S_k\}$

若 $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\(n\to\infty)}}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \overset{\exists}{=} I$ (2) 则称I为$f(z)$沿曲线C从$(A\to B)$的积分，记作$\int_C f(z)dz$

无论如何分割C, ξ_i如何取

$$i.e.,\quad \int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \quad --(3)$$

分割 $\longrightarrow$ 取乘积 $\longrightarrow$ 求和 $\longrightarrow$ 取极限

(1)若闭曲线C 记作$\oint_C f(z)dz$

(2)$C: t\in[a,b], f(z)=u(t)$, 则$\int_C f(z)dz=\int_a^b u(t)dt$

(3)如果$\int_C f(z)dz$存在,一般不能写成$\int_a^b f(z)dz$.

因为$\int_C f(z)dz$不仅与a,b有关,还与曲线C的形状和方向有关。

特例 (1) 若C表示连接点a,b的任一曲线,则

$$\int_C dz = b - a \qquad \int_C z dz = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

(2) 若C表示闭曲线,则 $\int_C dz = 0$, $\int_C z dz = 0$

3. 积分存在的条件及其计算法

定理 当$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在光滑曲线C上连续时, $f(z)$必沿C可积,即$\int_C f(z)dz$存在.

且 $$\boxed{\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy} \quad (4)$$

记忆

$$=\int_C (u+iv)(dx+idy)$$

- 这个定理表明 $\int_C f(z)dz$可通过二个二元实变函数的第二型曲线积分来计算.

证明 令 $z_k = x_k + iy_k \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k \quad u(\xi_k, \eta_k) = u_k \quad v(\xi_k, \eta_k) = v_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

$$+ i[\sum_{k=1}^{n} v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \quad (5)$$

$\boxed{\text{当}\delta \to 0\text{时，均是实函数的曲线积分.}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = (\int_C u(x,y)dx - \int_C v(x,y)dy)$$

$$+ i(\int_C v(x,y)dx + \int_C u(x,y)dy) = \int_C f(z)dz$$

$$=\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i[v(x,y)dy + u(x,y)dy]$$

- $\because$ $f(z)$在C上连续,$\therefore$ $u(x,y),v(x,y)$

在C上连续 故$\int_C u(x,y)dx$、$\int_C v(x,y)dy$、

$\int_C v(x,y)dx$、$\int_C u(x,y)dy$都存在!

推论1：当$f(z)$是连续函数,C是光滑曲线时，

$\int_c f(z)dz$一定存在。

推论2 :$\int_c f(z)dz$可以通过两个二元实函数的

线积分来计算。

设光滑曲线$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad t: \alpha \to \beta$

由曲线积分的计算法得

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha(起)}^{\beta(终)} \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt$$

$$+ i\int_{\alpha(起)}^{\beta(终)} \{v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t)y(t))y'(t)\}dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + i[v[x(t), y(t)]]\}(x'(t) + iy'(t))dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

$$\therefore \int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \quad --(6)$$

4. 积分性质

由积分定义得：

$$1)\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$$

$$2)\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$$

$$3)\int_C [f(z) \pm g(z)]dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$$

4) $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$(分段光滑曲线)

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

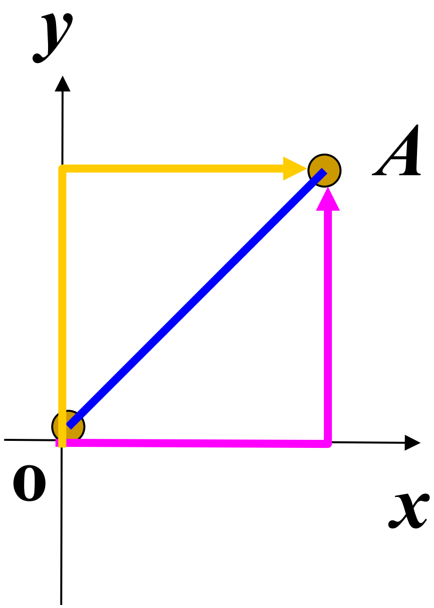
5)设C的长度为L,函数$f(z)$在C上满足$|f(z)| \le M$

$$\Rightarrow \left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML$$ ——估值定理.

例 1 计算 $\int_C z dz$ $\quad \overline{OA}: \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases} (0 \le t \le 1)$

解 $\int_C z dz = \int_0^1 (3+4i)t \cdot (3+4i) dt$

$= (3+4i)^2 \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}(3+4i)^2$



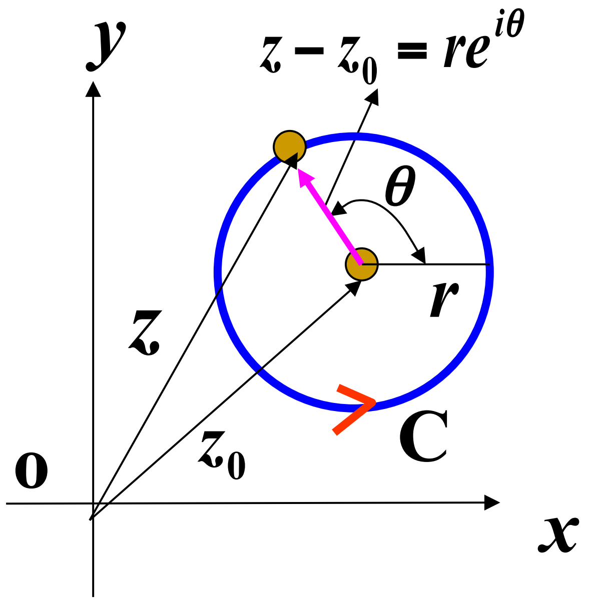
又解 $\int_C z dz = \int_C (x+iy)(dx+idy)$

$= \int_C xdx - ydy + i\int_C ydx + xdy$

容易验证,右边两个积分都与路径无关,

$\therefore \forall$连接OA的曲线C,其上积分:$\int_C f(z)dz = \frac{1}{2}(3+4i)^2$

例 2☆计算$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$这里$C$表示以$z_0$为中心，$r$为半径的正向圆周，$n$为整数.



解 $C: z = z_0 + re^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n e^{in\theta}} d\theta = \begin{cases} i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i & n = 0 \\ \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i\sin n\theta) d\theta = 0 & n \ne 0 \end{cases}$$

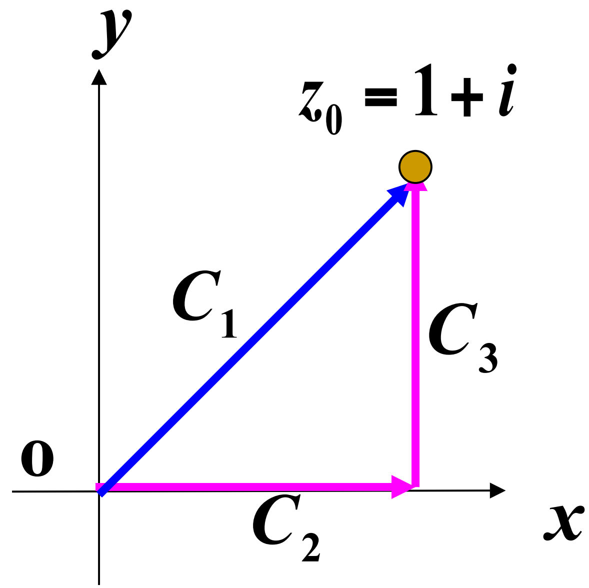
$$\therefore \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

- 这个结果与半径r及z_0无关,这个结果以后经常用到,应记住.

例3 计算$\int_C \bar{z}dz$的值

1) $C = C_1 = \overline{Oz_0}$

2) $C = C_2 + C_3$(见图)



解 1) $C_1: \quad z = (1+i)t \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it)(1+i)dt = \int_0^1 2tdt = 1$$

2) $C_2: z = t \quad 0 \le t \le 1 \quad C_3: z = 1 + it \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_2} \bar{z}dz + \int_{C_3} \bar{z}dz$$

$$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1 - it)idt = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + i) = 1 + i$$

例 4 计算$\int_{C_1} \bar{z}dz, \int_{C_2} \bar{z}dz$的值, 其中

C_1是单位圆$|z| = 1$的上半圆周，顺时针方向;

C_2是单位圆$|z| = 1$的下半圆周，逆时针方 向.

解： 1)C_1： $z = e^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi.$

$$\int_{C_1} \bar{z}dz = \int_{\pi}^{0} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = i\int_{\pi}^{0} dt = -\pi i$$

2)C_2： $z = e^{i\theta}, -\pi \le \theta \le 0.$

$$\int_{C_2} \bar{z}dz = \int_{-\pi}^{0} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = i\int_{-\pi}^{0} dt = \pi i$$

§3.2 Cauchy-Goursat 基本定理

分析 §1 的积分例子：

例1中$f(z)=z$在全平面解析,

它沿连接起点及终点的 任意C的积分值相同，

即 $\int_C f(z)dz$与路径无关，即$\int_C f(z)dz=\int_A^B f(z)dz$

例2中 $\oint\limits_{|z-z_0|=r} \dfrac{1}{z-z_0}dz=2\pi i\neq 0$

$\because\ z=z_0$为奇点,即不解析的点,

但在除去$z=z_0$的非单连通区域内处处 解析。

例3中$f(z)=\bar{z}$在复平面上处处不解析，

$\int_C \bar{z}dz$的值与积分路径C有关.

由此猜想：复积分的值与路径无关或沿闭路的积分值＝0的条件可能与被积函数的解析性及解析区域的单连通有关。

先将条件加强些，作初步的探讨

"设$f(z)=u+iv$在单连通D内处处解析,且$f'(z)$在D内连续"

$\because \ f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

$\therefore u$和v以及它们的偏导数u_x, u_y, v_x, v_y在D内都是连续的,并满足$C-R$方程$u_x = v_y \quad v_x = -u_y$

又,$\forall C \subset D$,

$$\oint_c f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy$$

由$Green$公式

$$\oint_c udx - vdy = \iint_D (-v_x - u_y)dxdy = 0$$

$$\oint_c vdx + udy = \iint_D (u_x - v_y)dxdy = 0$$

$$\therefore \oint_c f(z)dz = 0$$

1825年$Cauchy$给出了"单连通区域D内处处解析的$f(z)$在D内沿任一条闭曲线C的积分$\oint_c f(z)dz=0$"　—$Cauchy$ 定理

当时解析的定义为$f'(z)$存在,且在D内连续.

1851年$Riemann$给出了$Cauchy$定理的上述简单证明.

1900年$Goursat$给出了$Cauchy$定理的新证明,且将"$f'(z)$连续"这一条件去掉了.

这就产生了著名的$Cauchy-Goursat$定理,

从此解析函数的定义修 改为:"$f'(z)$在D内存在"

Cauchy-Goursat 基本定理： — 也称 Cauchy 定

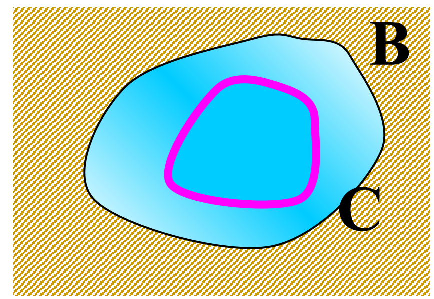
设$f(z)$在z平面上单连通区域B内解析，

C为B内任一条闭曲线 $\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0.$

(1)若C为B的边界，

$f(z)$在$\overline{B} = C \cup B$上

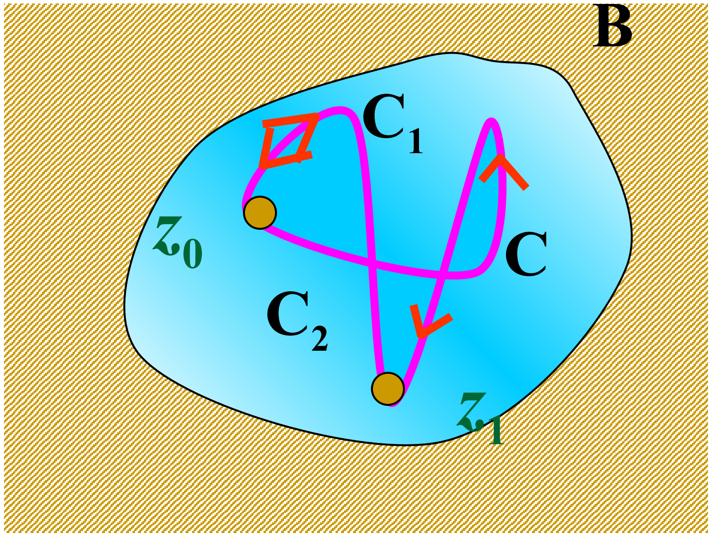
解析，定理仍成立.

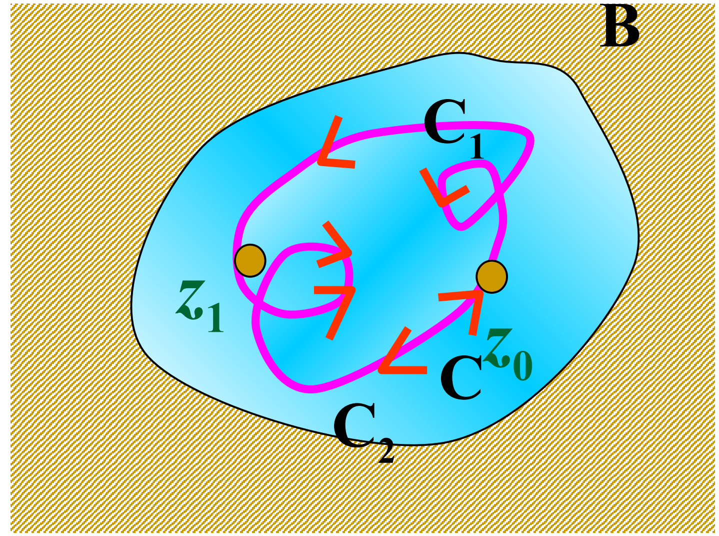


(2)若C为B的边界，$f(z)$在B内解析，

$f(z)$在$\overline{B} = C \cup B$上连续，定理仍成立.

(3) 定理中曲线 C 不必是简单的！如下图。





推论　设 $f(z)$ 在单连通区域 B 内解析，则对任意两点 $z_0, z_1 \in B$，积分 $\int_c f(z)dz$ 不依赖于连接起点 z_0 与终点 z_1 的曲线，**即积分与路径无关。**

见上图 $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$

§3.3 基本定理推广—复合闭路定理

复合闭路定理：

设①B是由$\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$所围成的有界多连通区域.且$B \subset D$,②$f(z)$在$D$内解析,则

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0 \quad (1)$$

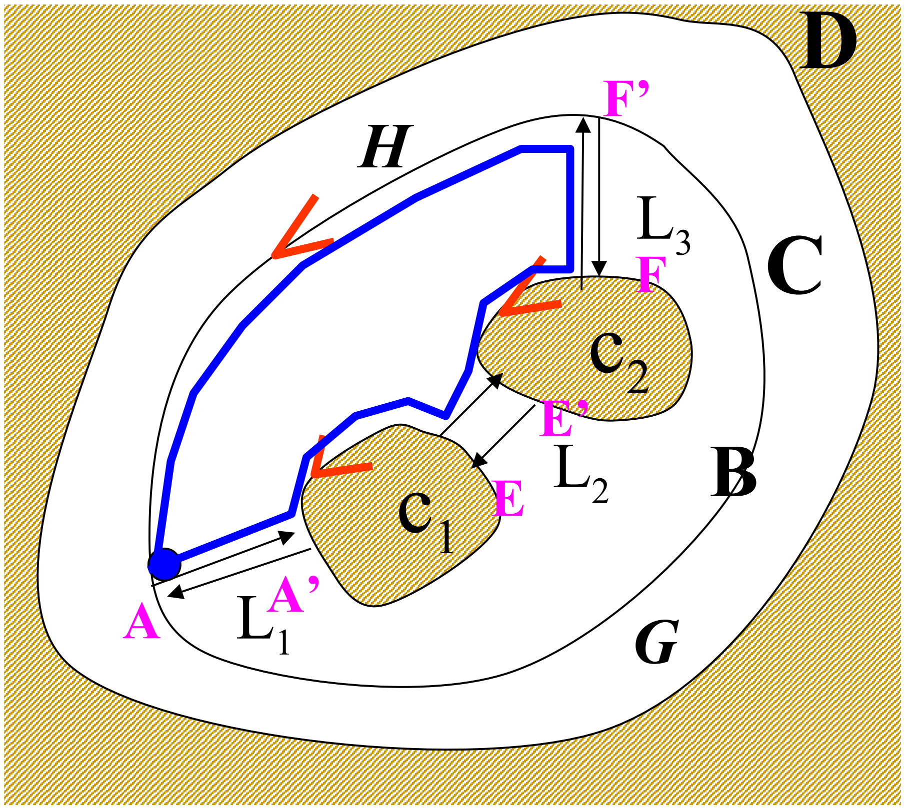
或

$$\oint_c f(z)dz = \sum_{i=1}^{n}\oint_{c_i} f(z)dz \quad (2)$$

其中:闭$C \subset D$,$C_1, C_2, \cdots C_n$是在C的内部的简单闭曲线(互不包含也不相交),每一条曲线C及C_i是逆时针,C_i^-－顺时针.

证明 设$\Gamma = C + C_1^- + C_2^-$

$$\because \oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{c+c_1^-+c_2^-+L_1+L_1^-+L_2+L_2^-+L_3+L_3^-} f(z)dz$$



$$= \oint_{AGF'FE'EA'A} f(z)dz$$

$$+ \oint_{AA'EE'FF'HA} f(z)dz$$

$$= 0$$

如：对任意C包含z_0在内的正向简单闭曲线

有 $\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$

说明 (1) Γ, C, C_k 三者之间的关系：

$$\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_k^-$$

(2) C, C_k 的特点与曲线的正向：

C 按逆时针方向, C_k 按顺时针方向.

(3) $$0 = \oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{c+c_1^-+c_2^-+\cdots+c_k^-} f(z)dz$$

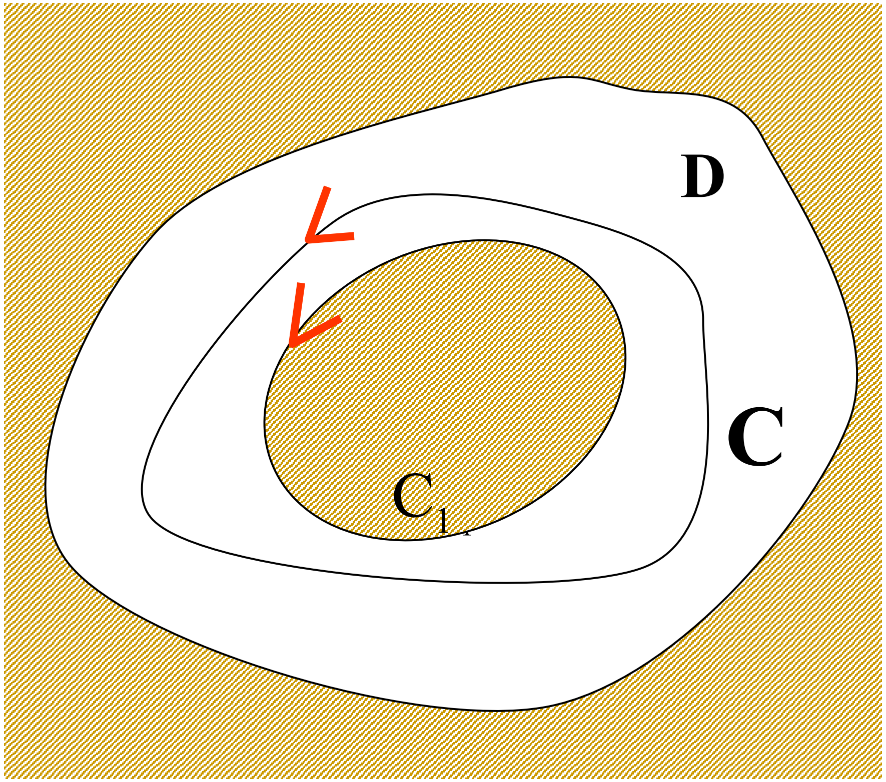
$$= \oint_{c} f(z)dz + \oint_{c_1^-} f(z)dz + \cdots + \oint_{c_k^-} f(z)dz$$

$$\therefore \quad \oint_{c} f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{c_k} f(z)dz$$

$$\oint_{c} f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz$$

此式说明一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的积分值，只要在变形过程中曲线不经过的 $f(z)$ 的不解析点.

— 闭路变形原理



例 计算$\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz$ Γ:包含圆周$|z|=1$在内的任意正向简单闭曲线.

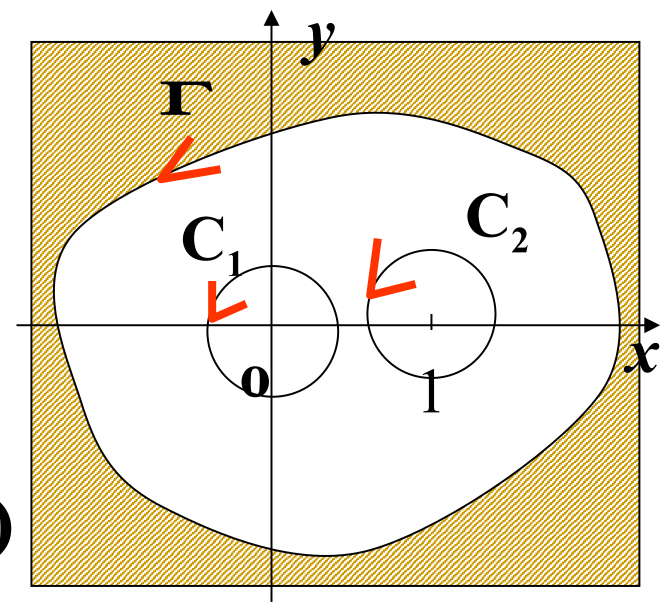
解 原式$=\oint_{\Gamma}(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z})dz$

$$=\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z}dz$$

$$=\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz$$

$$=2\pi i+2\pi i=4\pi i$$

$$(\because \oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz=0,\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz=0)$$



练习 计算 $\oint_{\Gamma}\frac{1}{z^2-z}dz$ Γ: 包含圆周 $|z|=1$ 在内的任意正向简单闭曲线.

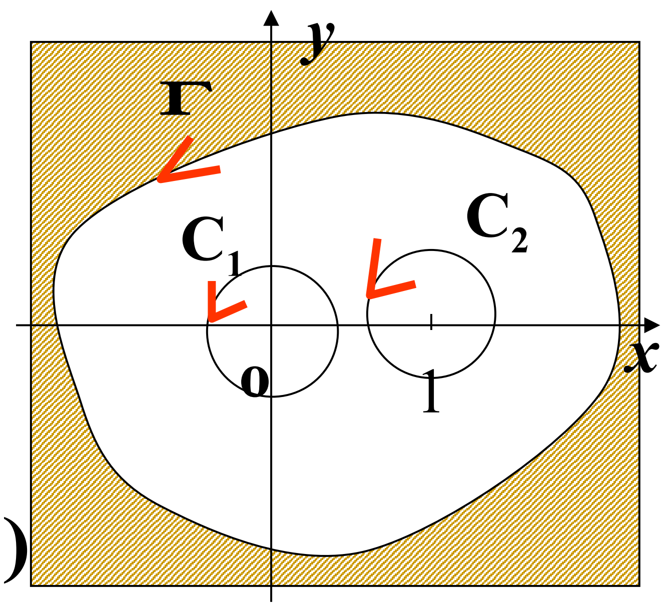
解 原式 $=\oint_{\Gamma}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz$

$$=\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z-1}dz-\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z}dz$$

$$=\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz-\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz$$

$$=2\pi i-2\pi i=0$$

$$\left(\because \oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz=0, \oint_{C_2}\frac{1}{z}dz=0\right)$$



作业

习题三　2(1, 2, 3)、 3、

6（1，2）、

7（1,2,3,4，5，6）

9（3）