第一章 矩阵

第一章 矩阵

1. 矩阵及其运算
2. 分块矩阵
3. 可逆矩阵
4. 矩阵的初等变换和初等矩阵

重点: 矩阵的各种运算及初等变换

难点: 逆矩阵, 矩阵的分块

第一节 矩阵及其运算

一、矩阵概念的引入

二、矩阵的加法与数量乘法

三、矩阵与矩阵的乘法

四、矩阵的转置

一、矩阵概念的引入

1、在生活中存在很多数表:

例 1 : 课程表

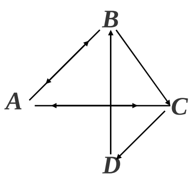
	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
一	2	1	3	4	1
二	5	9	7	6	2
三	8	6	0	5	7

高数1, 英语2, 口语3, 计算机4, C语言5, 离散6,
大物7, 马列8, 体育9, 若没课0

例2. 某航空公司在A, B, C, D四城市之间开辟了若干航线，如图所示表示了四城市间的航班图, 如果从A到B有航班, 则用带箭头的线连接 A 与B.

四城市间的航班图情况常用表格来表示:

	到达A	到达B	到达C	到达D
A出发	0	1	1	0
B出发	1	0	1	0
C出发	1	0	0	1
D出发	0	1	0	0



2、矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

排成的m行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列矩阵， 简称$m\times n$矩阵.

记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $A=A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

这$m\times n$个数称为A的元素, 简称元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

例 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个2×4实矩阵

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3×3复矩阵

(4) 是一个1×1实矩阵

例 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

其中a_{ij}为常数

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

系数矩阵

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

增广矩阵

3、几种特殊矩阵

1）方阵

行数与列数都等于n的矩阵A, 称为n阶方阵

记作 A_n.

例如 $A=\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3 阶方阵

2）行矩阵、列矩阵

只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,

称为行矩阵(或行向量).

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$,称为列矩阵(或列向量).

3）. 对角矩阵

形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵,

称为对角矩阵(或对角阵）.

diagonal

记作 $\Lambda=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)$.

如果$\lambda_1=\lambda_2\cdots=\lambda_n=\lambda\neq 0$, 称为数量矩阵。

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow$ 数量矩阵。

4）. 单位矩阵

主对角线上元素全为 1，而其余元素全为 0 的方阵，称为单位矩阵。（简称单位阵）

$E=E_n=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ 单位矩阵

全为1

$E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ 不为单位阵

5）. 零矩阵

元素全为零的矩阵称为零矩阵，$m\times n$ 零矩阵记作 $O_{m\times n}$ 或 O .

$O_{1\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad O_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6）. 三角形矩阵

上三角形矩阵

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Longrightarrow$ 下三角形矩阵

7). 对称矩阵

n阶方阵，如果 $a_{ij}=a_{ji}$，则称A为对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -1 & -9 \\ -2 & -5 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

7*. 反对称矩阵

n阶方阵，如果 $a_{ij}=-a_{ji}$，则称A为反对称矩阵。

8). 同型矩阵

两个矩阵的行数相等，列

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

?任意两个零矩阵都相等

答: ×

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9). 矩阵相等

两个矩阵 $A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$为同型矩阵，并且对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵A与B相等，记作 $A=B$.

例2 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ y & 1 & z \end{pmatrix},$$

已知 $A=B$，求 x, y, z.

小结

(1) 矩阵的概念　m行n列的一个数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵

- 方阵 $(m=n)$;　行 = 列
- 行矩阵与列矩阵；$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- 对角矩阵；$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- 单位矩阵；$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
- 零矩阵.
- 三角形矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- 对称矩阵 $a_{ij}=a_{ji}$
- 同型矩阵

二、矩阵的加法与数量乘法

1、定义

设有两个$m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$，那么矩阵A与B的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明　只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

例1

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2、 矩阵加法的运算规律

(1) 交换律 $A+B=B+A$;

(2) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$.

(3) 零矩阵的特性 $A+O=O+A=A$

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=(-a_{ij})_{m\times n},$$

称为矩阵A的负矩阵.

(4) 存在负矩阵$-A$，满足 $A+(-A)=O$

(5) 矩阵减法 $A-B=A+(-B)$

3、数与矩阵相乘

1）定义 用$\boxed{数\lambda}$乘以矩阵A的$\boxed{每一个元素}$,记作λA或$A\lambda$

$A_{m\times n}$ $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

λA
$A\lambda$

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2）数乘矩阵的运算规律

（设A,B为$m\times n$ 矩阵，λ，μ 为数）

(1) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

$\boxed{(2)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.}$

(3) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$;

(4) $1\cdot A=A,\quad 0\cdot A=O$

矩阵相加与数乘矩阵合起来,统称为矩阵的线性运算.

三、矩阵与矩阵的乘法

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n. \end{cases}$$ （a_{ij} 为常数）

称为一个从变量 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为线性变换的系数矩阵

关系式 $\sigma_{xy}:\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+3a_{23}x_3 \end{cases}$

是从变量 x_1,x_2,x_3 到变量 y_1,y_2,y_3 的线性变换

其系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

关系式 $\sigma_{tx}:\begin{cases} x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2 \\ x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2 \\ x_3=b_{31}t_1+b_{32}t_2 \end{cases}$ 是从变量 t_1,t_2 到变量 x_1,x_2,x_3 的线性变换

其系数矩阵为 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

从变量 t_1,t_2 到变量 y_1,y_2 的线性变换

$\sigma_{ty}:\begin{cases} y_1=c_{11}t_1+c_{12}t_2 \\ y_2=c_{21}t_1+c_{22}t_2 \end{cases}$ 得系数矩阵 $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

变换 σ_{ty} 称为变换 σ_{xy} 与变换 σ_{tx} 的乘积

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵C称为矩阵A与矩阵B的乘积

1、矩阵与矩阵相乘的定义

矩阵 $A_{m\times p}=(a_{ij})_{m\times p}$ 矩阵 $B_{p\times n}=(b_{ij})_{p\times n}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11}\cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21}\cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1}\cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$,

第i行 第j列 $\longrightarrow c_{ij}$

例2

$$C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

?

例3 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$AB=?$ 无意义

注意 只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

注意 矩阵不满足交换律，即:

$$AB\neq BA,\ (AB)^k\neq A^kB^k.$$

例4 $$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=(1\times 3+2\times 2+3\times 1)=(10).$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3)=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ 故 $AB\neq BA.$

$m\times k$ 的矩阵与 $k\times n$ 的矩阵相乘$\longrightarrow m\times n$

$k\times n$ 的矩阵与 $m\times k$ 的矩阵相乘

$\longrightarrow$ 当$n=m$时 $k\times k$

当$n\neq m$时 不能相乘

2、矩阵乘法的运算规律

(1) $(AB)C=A(BC)$;

(2) $(A+B)C=AC+BC$;

$C(A+B)=CA+CB$,

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）;

(4) $A_{m\times n}E_n=E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$;

$A_{m\times n}O_{n\times s}=O_{m\times s}$; $O_{p\times m}A_{m\times n}=O_{p\times n}$;

(5) $AB\neq BA$;

例5 线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

请把线性方程组写成矩阵相乘形式。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

系数矩阵

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

A X $=$ b $AX=b$

线性变换
$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

可记作

$Y=AX$

系数矩阵

若线性变换为 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称之为恒等变换.

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} \overset{\text{对应}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ 单位阵 E_n

3、矩阵乘法应注意的几点:

(1) $AB \neq BA$ (无交换律)

(2) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$

$AB = 0 \overset{?}{\Rightarrow} A = 0$ 或 $B = 0$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = 0$, 但 $A \neq 0, B \neq 0$,

$\boxed{(3) AB = AC, 若 A \neq 0 \not\Rightarrow B = C}$ (无消去律)

$A(B - C) = 0$

$AB = AC$, 若 $A \neq 0 \overset{?}{\Rightarrow} B = C$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = AC$ 且 $A \neq 0$, 但 $B \neq C$

4、矩阵的方幂

1) 若A是n阶方阵, 则 A^k为A的k次幂,

即 $A^k = \underbrace{A\,A \cdots A}_{k个}$

$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ×

2) 运算规律

$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ×

(1) $A^m A^k = A^{m+k}$,

$(A + E)(A - E) = A^2 - E$ √

(2) $\left(A^m\right)^k = A^{mk}$. $\quad m,k$为正整数

$(AB)^m \overset{?}{=} A^m B^m$, $\boxed{注意\ (AB)^m \neq A^m B^m,}$

$(AB)^m = \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{m个} \neq A^m B^m$

方阵A的n次多项式:

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是x的n次多项式

若A是n阶方阵, 那么 $f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$

称为方阵A的n次多项式

注意: 是一个方阵而不是一个数

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

A^2, 方阵A的2次多项式

$A^3 - 2A^2 + A - 3E$ 方阵A的3次多项式

例6求矩阵的方幂A^n

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

解: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore A^n = O \quad (n \geq 3)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1)$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (n = 2)$

2) $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$ 求 A^n.

解法1 $$A^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix}$$ 由此归纳出

$$A^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}\quad(n\ge 2)$$

解法2 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$ 求 A^n.

$$A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$=\lambda E+B$

$\because(\lambda E)^r(B)^k=(B)^k(\lambda E)^r=\lambda^r B^k$

故: 二项式定理成立

$A^n=(\lambda E+B)^n$

$=(\lambda E)^n+c_n^1(\lambda E)^{n-1}B+c_n^2(\lambda E)^{n-2}B^2+c_n^3(\lambda E)^{n-3}B^3+\cdots+B^n$

$=(\lambda E)^n+c_n^1(\lambda E)^{n-1}B+c_n^2(\lambda E)^{n-2}B^2$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^n&\boxed{n\lambda^{n-1}}&\boxed{\frac{n(n-1)}{2!}\lambda^{n-2}}\\&\lambda^n&\boxed{n\lambda^{n-1}}\\&&\lambda^n\end{pmatrix}$$

四、矩阵的转置

transpose

1. 定义 把矩阵 A 的列换成同序数的行得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\qquad A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n}\longrightarrow A^T_{n\times m}$$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix}_{2\times3}$ $A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}_{3\times2}$;

例 设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 是实矩阵，若 $A^TA=O$, 则 $A=O$.

证明: $A^TA=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2&ab+cd\\ab+cd&b^2+d^2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow a^2+c^2=0;b^2+d^2=0$$

因为: 是实矩阵，所以 $a=b=c=d=0$, 即 $A=O$

一般的，设 A 是实矩阵，若 $A^TA=O$，则 $A=O$.

2. 转置矩阵的运算性质 $c^T_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$

(1) $(A^T)^T=A$;

(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(3) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$

(4) $\boxed{(AB)^T=B^TA^T}$

$B^TA^T=D=(d_{ij})_{n\times m}$

$$B^T=\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}_{n\times s}$$ 第 i 行 原第 i 列 b_{ki}

记 $A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$

$$A^T=\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}_{s\times m}$$ 第 j 列 原第 j 行 a_{jk}

$AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$

$c_{ji}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$

$d_{ij}=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$

- 对称阵

n阶方阵，如果$a_{ij}=a_{ji}$，则称A为对称矩阵

A为对称矩阵 $\Leftrightarrow$ $A=A^T$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A为反对称矩阵 $\Leftrightarrow$ $A=-A^T$

例1 设列矩阵 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$满足 $\boxed{X^TX=1,}$ E为n阶单位矩阵, $\boxed{H=E-2XX^T}$, 证明 $\boxed{H\text{是对称矩阵,}}$ 且$HH^T=E$. $\boxed{H=H^T}$

证明 $\because H^T=\left(E-2XX^T\right)^T=E^T-2\left(XX^T\right)^T$

$=E-2(X^T)^TX^T=E-2XX^T=H,$

$\therefore H$ 是对称矩阵.

$HH^T=H^2=\left(E-2XX^T\right)^2=E^2-2E(2XX^T)+(2XX^T)^2$

$=E-4XX^T+4\left(XX^T\right)\left(XX^T\right)$

$=E-4XX^T+4X\left(X^TX\right)X^T$

$=E-4XX^T+4XX^T=E.$

五、共轭矩阵

1、定义

当$A=\left(a_{ij}\right)$为复矩阵时，用$\overline{a_{ij}}$表示 a_{ij} 的共轭复数，记$\overline{A}=\left(\overline{a_{ij}}\right)$，$\overline{A}$称为 A的共轭矩阵.

2、运算性质

（设A, B为复矩阵, λ 为复数, 且运算都是可行的）:

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(2) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A}$;

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

小结

(1) 矩阵的概念 m行n列的一个数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵

- 方阵 $(m=n)$; 行 = 列
- 行矩阵与列矩阵; $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
- 对角矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- 零矩阵.
- 三角形矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- 对称矩阵 $a_{ij}=a_{ji}$
- 同型矩阵

(3) 矩阵运算

- 加法
- 数与矩阵相乘
- 矩阵与矩阵相乘
- 矩阵的方幂
- 转置矩阵 共轭矩阵

矩阵运算
- 加法
- 数与矩阵相乘
- 矩阵与矩阵相乘
- 矩阵的方幂

转置矩阵（ 下次课）

共轭矩阵（ 下次课）

注意

（1）只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

（2）只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘，且矩阵相乘不满足交换律.

作业

- 习题1.1 A

  1. 2. 3.

  4.（1）（3）（5）

  8.

  1.1 B

  6. 7.

第二节 分块矩阵

一、分块矩阵

二、分块矩阵的运算规则

一、分块矩阵

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算.

例
$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \Rightarrow A_{3\times1}\text{分块矩阵}$$

子块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & O \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix},$$

其中
$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

其中
$$A_1=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_2=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

分块的原则

(1) 分块后必须能够运算

(2) 分块的目的是简化计算

二、分块矩阵的运算规则

1.相等 设$m\times n$矩阵A和B有相同的分块方式

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}$$

则$\mathbf{A}=\mathbf{B}$当且仅当$A_{ij}=B_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t)$

(2) 转置

设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$，则$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{pmatrix}$

$$A=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ \hline 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{array}\right)$$

则：$A^T=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right)$

(3) 加减法运算

(1) 设矩阵A与B的行数相同，列数相同，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{A_{s1}} & \cdots & \boxed{A_{sr}} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{B_{s1}} & \cdots & \boxed{B_{sr}} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 和 B_{ij} 的行数相同，列数相同，那么

$$A\pm B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}\pm B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}\pm B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{A_{s1}\pm B_{s1}} & \cdots & \boxed{A_{sr}\pm B_{sr}} \end{pmatrix}.$$

例1

设 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$, $\Longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$

求 $A+B$.

$$A+B=\left(\begin{array}{cc|cc} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{array}\right)$$

(4) 数乘

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ 为数，那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

(5) 矩阵乘法

设A为$m\times l$矩阵，B为$l\times n$矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数，那么

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

A的列的分法与B的行的分法相同

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$.

例2 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$ 求 AB.

解 把 A, B 分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\overbrace{\quad}^{2}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{array}{c} 2\{ \\ 2\{ \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}.$

又 $A_1B_{11}+B_{21}$

$A_1=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B_{21}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B_{22}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

(6) 设A为n阶矩阵，若A的分块矩阵只有主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且非零子块都是方阵．即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵，那么称 A 为分块对角矩阵，又称准对角阵。

分块对角阵的性质

$$(i)\ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

$A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$
$B=diag(k_1,k_2,\cdots k_n)$

$AB=$
$diag(\lambda_1k_1,\lambda_2k_2,\cdots\lambda_nk_n)$

$$(ii)\ \text{已知}A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}.$$

则

$$A^K=\begin{pmatrix} A_1^K & & & O \\ & A_2^K & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^K \end{pmatrix}.$$

$$A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A^m=\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ 求 AB.

解 将 A, B 分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}，\text{其中}\ A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}，\text{其中}\ B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

$$A_1B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix},$$

$$A_2B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^2+1 & b \\ b & b^2 \end{pmatrix},$$

$$AB=\left(\begin{array}{cc|cc} a^2+1 & a & 0 & 0 \\ a & a^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & b & b^2 \end{array}\right).$$

$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$；$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$；

小结

分块矩阵及分块矩阵的运算规律

分块的原则 (1) 分块后必须能够运算

(2) 分块的目的是简化计算

加减乘的运算

分块对角阵的性质

作业

习题 1.1

B: 6. 7.

习题1.2

A: 1. 3

B: 1(思考)

第三节 可逆矩阵

一、逆矩阵的定义

二、逆矩阵的性质

一、逆矩阵的定义

对于n阶方阵A，如果有一个n阶矩阵B,

使得 $AB=BA=E$,

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵.

定理1.1 一个矩阵A的逆矩阵是唯一的.

证明:若设 B 和 C 是A的可逆矩阵，则有

$\boxed{AB}=BA=\boxed{E},\quad AC=\boxed{CA=E},$

可得 $B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C.$

所以 A 的逆矩阵是唯一的, 即 $B=C$

通常: A 的逆矩阵记为 A^{-1}.

注意: (1) 矩阵A与B都是方阵.

(2) 并非所有方阵都可逆. 例:零方阵不可逆

定理1.2 对于n阶方阵A、B

若 $AB=E$ (或 $BA=E$)，则方阵A,B是可逆的

$B=A^{-1}, A=B^{-1}$

说明: 当A,B均为n阶方阵时

(1) 如果 $AB=E$, 指出矩阵 A 是可逆的并且逆矩阵为 $A^{-1}=B$.

(2) 指出求逆矩阵的一种方法

A (B?) $=E$

例 已知 $A_n, A^2=E$, 求 A^{-1}.

解 $\because A^2=E$, 即 $A\boxed{A}=E$,

$\therefore A^{-1}=A$

例1 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$, 求$A$的逆阵.

利用待定系数法

解 设 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 是 A的逆阵,

则 $AB=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+c&2b+d\\-a&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}2a+c=1,\\2b+d=0,\\-a=0,\\-b=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\b=-1,\\c=1,\\d=2.\end{cases}$

又因为

AB

$\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$

BA

$=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

求可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 的逆阵.

一般地: 当 $ad-bc\neq0$ 时，A可逆

$A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

二阶矩阵的逆用此规律求

例2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}$ 的逆阵.

解: $ad-bc=6-10=-4\neq0$, $\therefore A$是可逆阵.

二阶可逆矩阵的逆矩阵具有规律: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{6}{-4}&\frac{-2}{-4}\\\frac{-5}{-4}&\frac{1}{-4}\end{pmatrix}$

若是分块对角阵

A_i 可逆

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

注意：只有分块对角阵才可以

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & A_2^{-1} \\ O & A_3^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i \neq 0$

$$A^{-1}=diag(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots\lambda_n^{-1})=\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

例3 求可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $\because A$ 可逆,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

例4 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解 $A=\left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, $A_1=(5)$, $A_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$; $A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例5 设方阵A满足 $\boxed{A^2+A-4E=0}$, 证明: $A, A-E$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

分析:

$A^2+A-4E=0$

$A(\quad ? \quad)=E$

$A(1A+E)=4E$

得 $A\left(\frac{A+E}{4}\right)=E$

$A^2+A-4E=0$

$(A-E)(\quad ? \quad)=E$

$(A-E)(1A+2E)=2E$

$(A-E)\left(\frac{A+2E}{2}\right)=E$

例5 设方阵A满足 $A^2+A-4E=0$, 证明: $A, A-E$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证明

由 $A^2+A-4E=0$,

得 $A\boxed{\frac{A+E}{4}}=E$ B

由定理，A 可逆.

且 $A^{-1}=\frac{A+E}{4}$

同理

由 $A^2+A-4E=0$,

得 $(A-E)\boxed{\frac{A+2E}{2}}=E$ B

由定理, $A-E$ 可逆.

且 $(A-E)^{-1}=\frac{A+2E}{2}$

例6 设方阵A满足 $A^2-A-2E=0$, 证明: $A, A+2E$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证明 由 $A^2-A-2E=0$,

$A(1A-E)=2E$

得 $A(A-E)=2E$

$\Rightarrow A\frac{A-E}{2}=E$

由定理, A 可逆.

$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

又由 $A^2-A-2E=0$

$(A+2E)(1A-3E)=-4E$

$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)=-4E$

$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$

由定理, $A+2E$可逆.

且 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$

$=\frac{3E-A}{4}$.

二、逆矩阵的性质

(1) 若A可逆，则A^{-1}亦可逆 且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆，数$\lambda\neq 0$则λA可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证明 $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$,

推广 $\left(A_1A_2\cdots A_m\right)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

$(AB)^T=B^TA^T$

(4) 若A可逆，A^T亦可逆，且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

证明 $\because A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E$,

$\therefore \left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$. 注意：$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\neq(A^{-1})^{-1}+(B^{-1})^{-1}$

例1 设三阶矩阵A, B满足关系：

$$A^{-1}BA=6A+BA, \text{且} A=\begin{pmatrix}1/2 & & O\\ & 1/4 & \\ O & & 1/7\end{pmatrix} \text{求} B.$$

解 $A^{-1}BA-BA=6A$

$\Rightarrow \left(A^{-1}-E\right)BA=6A \Rightarrow \left(A^{-1}-E\right)B=6E$

$\Rightarrow B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}. \neq A-E$

$$B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}$$

$$=6\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

或 $A\,A^{-1}BA\,A^{-1}-A\,BA\,A^{-1}=6\,A\,A\,A^{-1}\Rightarrow B-AB=6A$

$\Rightarrow (E-A)B=6A\Rightarrow B=6(E-A)^{-1}A$

例2 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&3&4\\0&0&1&2\end{pmatrix}$, $B=(E-A)(E+2A)^{-1}$ 求：$(B-E)^{-1}$.

解：$\because B-E=(E-A)(E+2A)^{-1}-(E+2A)(E+2A)^{-1}$

$=[(E-A)-(E+2A)](E+2A)^{-1}$

$=-3A(E+2A)^{-1}$

$\therefore (B-E)^{-1}=[-3A(E+2A)^{-1}]^{-1}$

$=-\frac{1}{3}(E+2A)A^{-1}$

$=-\frac{1}{3}(A^{-1}+2E)$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix},$$

$$(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-1&\frac{2}{3}\\0&0&\frac{1}{6}&-\frac{7}{6}\end{pmatrix},$$

五、小节

- 逆矩阵的概念
- 逆矩阵的性质
- 逆矩阵的计算方法

逆矩阵的定义

$$A_nB_n=B_nA_n=E,$$

定理1.1 一个矩阵A的逆矩阵是唯一的.

定理1.2 对于n阶方阵A、B

若 $AB=E$（或$BA=E$），则 $B=A^{-1}$.

逆矩阵的求法

1)待定系数法求逆

2)二阶可逆矩阵求逆矩阵的规律

3)分块对角阵求逆

4)利用$A_nB_n=E$求逆

➤ 逆矩阵的计算方法

(1) 待定系数法;(分块矩阵)

(2)利用公式$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$；(下一章学习)

(3) 二阶可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

(4) 利用$A(B)=E$，则 $A^{-1}=B$

(5)初等变换法

作业

习题1.3

A：1.(1)(2)(3)

第四节　矩阵的初等变换和初等方阵

一、高斯消元法与初等变换

二、初等矩阵

三、相抵标准形与矩阵的秩

一、高斯消元法与初等变换

1. 高斯消元法

例1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 & (1)\\ \quad\;\; x_2+x_3=1 & (2)\\ \quad\quad\quad\; x_3=5 & (3)\end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ B=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right)\end{array}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right)$$

解:下面求方程组的解:

$(1)-(2)$得

$x_1+0x_2+0x_3=2$

$(2)-(3)$得

$x_2+0x_3=-4$

$\therefore$ 方程组的解 $\begin{cases} x_1=2\\ x_2=-4\\ x_3=5\end{cases}$

例 2 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3\\ \quad\;\; x_2+x_3=1\\ \quad\;\; x_2+x_3=5\end{cases}$$

$$B=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 5\end{array}\right)$$

解: 方程组无解。

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3\\ \quad\;\; x_2+x_3=1\\ \quad\quad\quad\; 0=4\end{cases}\quad 无解$$

$$B\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)$$

例3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3\\ \quad\quad\quad\; x_3=5\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

行是方程的个数, 列是未知量的个数.

解: 方程组有解并且有无穷多解。

$(2)-(1)$

$x_1+x_2+0x_3=-2$

$\Rightarrow x_1+x_2=-2$

令 $x_2=c$

得 $x_1=-2-c$

$\therefore$ 方程组的解:

$$\begin{cases} x_1=-2-c\\ x_2=c & c是任意实数\\ x_3=5\end{cases}$$

x_2为自由未知量。

2、初等变换

1) 定义(初等行变换)

下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(1) 对调两行, 记作 $r_i\leftrightarrow r_j$

(2) 以数 $k\neq 0$乘以某一行的所有元素记作 $r_i\times k$

(3) 把某一行(第j行)所有元素的k倍加到另一行(第i行)对应的元素上去，记作 r_i+kr_j

第一种 初等行变换

$r_i\leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i\leftrightarrow r_j$;

$$\underset{A_{m\times n}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}} \underset{r_i\leftrightarrow r_j}{\overset{r_i\leftrightarrow r_j}{\rightleftarrows}} \underset{B_{m\times n}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}$$

第二种 初等行变换 $r_i \times k, (k \neq 0)$

$$\underset{A_{m\times n}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{r_i \div k}{\overset{r_i \times k}{\rightleftarrows}} \underset{B_{m\times n}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

$r_i \times k$ 逆变换 $r_i \div k$; $r_i \times (\frac{1}{k})$

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为初等变换.

(3) 把第j行所有元素的k倍加到第i行对应的元素上

$$\underset{A_{m\times n}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{r_i - kr_j}{\overset{r_i + kr_j}{\rightleftarrows}} \underset{B_{m\times n}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i + (-k)r_j$

初等变换的逆变换仍为初等变换，且变换类型相同.

定义 线性方程组$Ax=b$与$Cx=d$有相同的解的集合，则它们是同解方程组

定理1.5 线性方程组$Ax=b$与增广矩阵$B=(A,b)$经有限次初等行变换为 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$, $\tilde{B}$ 对应的线性方程组为 $\tilde{A}x=\tilde{b}$ 则$Ax=b$ 与 $\tilde{A}x=\tilde{b}$ 是同解方程组

例4 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3=9 & ① \\ x_1+2x_2+x_3=4 & ② \\ 3x_1+7x_2+4x_3=19 & ③ \end{cases}$$

增广矩阵

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1,\ r_3-3r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

解:

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \widetilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

$\therefore$ 方程组的解:

$$\begin{cases} x_1=-12 \\ x_2=9 \\ x_3=-2 \end{cases}$$

用初等行变换解线性方程组的基本步骤:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3=9 \\ x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1+7x_2+4x_3=19 \end{cases} \Rightarrow B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 19 \end{array}\right)$$

$\Updownarrow$ (同解方程组) (初等行变换)

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ -x_2-5x_3=1 \\ -4x_3=8 \end{cases} \Leftarrow \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

行阶梯形矩阵:

特点:

（1）、可划出一条阶梯线，线的下方全为零;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}=B_3$$

（2）每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元，即非零行的第一个非零元.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \surd \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&-5&1\\0&0&-4&8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\div(-4)}\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&-5&1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div(-1)}\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&1&5&-1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-5r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&6\\0&1&0&9\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-12\\0&1&0&9\\0&0&1&-2\end{pmatrix}=C$$

$\therefore$ 方程组的解: $\begin{cases}x_1=-12\\x_2=9\\x_3=-2\end{cases}$

B与C 是一种等价关系 相抵

行简化阶梯阵

行简化阶梯阵

(1) 行阶梯形矩阵
(2) 非零行的第一个非零元为1
(3) 这些非零元所在的列的其他元素为0

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&4\\0&1&1&0&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad\times$$

定理1.6 每一个$m\times n$矩阵总可经过有限次初等行变换化成行阶梯阵与行简化阶梯阵，且行阶梯阵中的非零行数是唯一确定的，行简化阶梯阵也是唯一确定的。

例5 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}.$$

解 对A初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div(-3)}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac43\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&x_4\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac53\\0&1&2&\frac43\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases}x_1\quad-2x_3-\frac53x_4=0,\\x_2+2x_3+\frac43x_4=0,\end{cases}$$

x_1,x_2为非自由未知量，
x_3,x_4为自由未知量。

令 $x_3=c_1,x_4=c_2$,

$$\begin{cases}x_1\quad-2x_3-\frac53x_4=0,\\x_2+2x_3+\frac43x_4=0,\end{cases}$$

写成参数形式

$$\begin{cases}x_1=2c_1+\dfrac53c_2,\\x_2=-2c_1-\dfrac43c_2,\\x_3=c_1,\\x_4=c_2,\end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac53\\-\frac43\\0\\1\end{pmatrix}.$$

其中c_1,c_2为任意实数.

例6 当c，d为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\3x_1+2x_2+x_3=c\\5x_1+4x_2+(3+d)x_3=0\end{cases}$$

(1) 无解. (2) 有唯一解. (3) 有无穷解，在有无穷解时求其通解。

解：增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&2&1&c\\5&4&3+d&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3-c\\0&-1&d-2&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3-c\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(1)当$d=0,c\neq-2$时，
$0x_3=-2-c\neq0$, 无解

(2)当$d\neq0$时，方程组有惟一解

(3)当$d=0,c=-2$时，有无穷解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & d & -2-c \end{pmatrix}$$

(3) 当 $d=0, c=-2$ 时

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解于 $\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 = -4 \\ \quad\ x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

取 $x_3=c_1$ 为自由未知量

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1-4 \\ -2c_1+5 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 其中 c_1 为任意常数

二、初等矩阵

1. 初等矩阵的有关概念

定义 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

1) 对调 E 的两行或两列 $(r_i \leftrightarrow r_j)$ $E(i,j)$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$E_3(1,2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AE_4(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 9 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_m(i,j)A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

用 m 阶初等矩阵 $E_m(i,j)$ 左乘 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，

相当于对 A 施行一次相应的初等行变换

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad \text{第}i\text{列} \quad\quad\quad \text{第}j\text{列} \\ AE_n(i,j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

用 n 阶初等矩阵 $E_n(i,j)$ 右乘 A

相当于对 A 施行一次相应的初等列变换

2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某行或某列 $\underrightarrow{(r_i \times k)}$ $E(i(k))$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k\, r_i} \overset{E(i(k))}{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$E_3(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\k&9k&8k&k\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$AE_4(2(k))=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&k&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2k&3&1\\1&9k&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$E_m(i(k))A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\quad 第\ i\ 行$$

以 $E_m(i(k))$ 左乘A

相当于以数k乘A的第i行 $(r_i\times k)$;

以 $E_m(i(k))$ 右乘A

相当于以数k乘A的第i列 $(c_i\times k)$.

2) 以数 $k\neq 0$ 乘以某行(列)加到其他行(列)上去

(r_i+kr_j)或(c_j+kc_i), $E(i,j(k))$

$$E=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&1_{ii}&&0&&&\\&&&&1&&&&\\&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\&&&&&1&&&\\&&&0&\cdots&1_{jj}&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i+kr_j}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&1_{ii}&\cdots&k&&&\\&&&&1&&&&\\&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\&&&&&1&&&\\&&&&\cdots&1_{jj}&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}$

$$E_3(1,2(k))A=\begin{pmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k&2+9k&3+8k&1+k\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$AE_4(1,2(k))=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+k&3&1\\1&9+k&8&1\\1&0+k&2&2\end{pmatrix}$$

$$E_m(i,j(k))A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}+ka_{j1}&a_{i2}+ka_{j2}&\cdots&a_{in}+a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\第\ i\ 行\\\\第\ j\ 行\\\\\\\end{array}$$

以 $E_m(i,j(k))$ 左乘矩阵A,相当于

把A的第j行乘k加到第i行上去 (r_i+kr_j).

$$AE_n(i,j(k))\quad 第\,i\,列\qquad 第\ j\,列$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1i}&\cdots&a_{1j}+ka_{1i}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2i}&\cdots&a_{2j}+ka_{2i}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mi}&\cdots&a_{mj}+ka_{mi}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

以 $E_n(i,j(k))$ 右乘矩阵A,相当于

把A的第i列乘k加到第j列上去 (c_j+kc_i).

2. 初等矩阵是可逆矩阵

初等变换	逆变换	初等矩阵	逆矩阵
$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$	$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$	$E(i,j)$	$E(i,j)$
$r_i \times k (c_i \times k)$	$r_i \times \frac{1}{k} (c_i \times \frac{1}{k})$	$E(i(k))$	$E(i(\frac{1}{k}))$
$r_i + k r_j (c_i + k c_j)$	$r_i - k r_j (c_i - k c_j)$	$E(i,j(k))$	$E(i,j(-k))$

说明

初等矩阵是可逆矩阵　并且逆矩阵是同一类型的初等矩阵。

定理1.8 设A是一个 $m \times n$ 矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

初等变换 ⟹ 初等矩阵

说明　初等变换转换为矩阵的乘积

例1

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$$

$$p_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

选择

$Ap_1p_2=B$　×　　$Ap_2p_1=B$,　×　　$p_1p_2A=B$,　√　　$p_2p_1A=B$.　×

例2　计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 0} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{11}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 1} \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{11}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{11}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -12 & -1 \\ 1 & 12 & 1 \\ 9 & 108 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

*11　　*11

例3: 已知$AX=B$,其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21}-a_{22} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}-a_{32} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}\quad \text{求}X.$$

解: 因为A作两次列变换可得到矩阵B, 即

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}-a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=B$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理1.10 方阵A可逆的充要条件是A可以写成有限个初等方阵的乘积。

证: 充分性 ⟹ 若存在初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$, 使 $A = P_1P_2\cdots P_l$.

因初等方阵可逆，故 $A^{-1} = P_l^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$.

必要性 ⟸ 因A可逆, $\therefore A^{-1}A = E$

即存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$, 使

$$P_l\cdots P_2P_1A = E$$

即　$A = P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_l^{-1}$.

可逆矩阵可写成有限个初等矩阵的乘积

因初等方阵的逆还是初等方阵，故A可以写成有限个初等方阵的乘积。

4. 利用初等变换求逆阵的方法:

当A可逆（$|A| \neq 0$）时，由 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$，有 $A^{-1}A = E$

$\because \quad A^{-1} = P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E,$

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} (A \mid E)$$
$$= \left(P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A \;\middle|\; P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E \right)$$
$$= \left(E \mid A^{-1} \right) \qquad (A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1})$$

若对矩阵 $(A \mid E)$ 施行初等行变换，
当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

例1 用初等变换求矩阵的逆矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

解
$$(A, E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

例2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解
$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. 利用初等变换求矩阵方程

例3 求矩阵X，使$AX=B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

E $X = A^{-1}B$

$(A \mid B)$

A^{-1} 初等行变换

$E \quad \boxed{A^{-1}B}$

例3 求矩阵X，使$AX=B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \therefore X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 若A可逆，则 $X = A^{-1}B$.

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1),\ r_2 \div (-1)]{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \div 2]{r_2 - 5r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

若 $YA = C$ 求Y. $\qquad Y = CA^{-1}$

则可对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ 作初等列变换

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow[A^{-1}]{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow Y = CA^{-1}.$$

三、相抵标准形与矩阵的秩

1. 相抵（是一种等价关系）

设A,B是同型矩阵，若A经有限次初等变换到B，就称A相抵与B，记作 $A \cong B$ 或 $A \sim B$

例

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-c_1}D=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

反身性　　对称性　　传递性

> 定理1.11 设A和B是 $m\times n$矩阵，则矩阵 $A\cong B$ 的充要条件是：存在 m阶可逆阵 P与n 阶可逆阵 Q，使得$PAQ = B$.

对于任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换把它化为行阶梯形和行简化形矩阵

行阶梯形矩阵中 $\boxed{\text{非零行的行数是唯一确定的.}}$ $\boxed{\text{秩}}$

对行简化形矩阵再进行初等列变换就可以把矩阵化为（相抵）标准形

例如，

$$B_{4\times5}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_5-4c_1-3c_2+3c_3]{c_3\leftrightarrow c_4,\ c_4+c_1+c_2}I=\begin{pmatrix}E_3&O\\O&O\end{pmatrix}$$

矩阵F称为矩阵B的（相抵）标准形，是唯一的.

定理1.12 任意$m\times n$矩阵A必相抵于一个形如

$$I=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}_{m\times n}$$

此标准形由m,n,r 三个数唯一确定，其中r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数. $\boxed{\text{秩}}$

定理1.13 矩阵$A_{m\times n}$的相抵矩阵形式是唯一的，即相抵标准型中的r是唯一确定的。

> 所有与矩阵A等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类，标准形I是这个等价类中最简单的矩阵.

例6 证明：$r(A_{m\times n})=r(A^T_{n\times m})$

证：设$r(A)=r$，则存在m阶可逆矩阵P与n阶可逆矩阵Q

使$PAQ=I_r=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}_{m\times n}$　$Q^TA^TP^T=I_r^T=\begin{pmatrix}E_r^T&O\\O&O\end{pmatrix}_{n\times m}$

秩r没有改变.

2. 矩阵的秩 *rank* 与相抵之间的关系

同型矩阵A, B　$A\cong B(A\sim B)\Leftrightarrow R(A)=R(B)$

分析　$\therefore A\to\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$　$B\to\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$

$R(A)=R(B)=r$，则有相同的相抵标准型，利用等价的传递性，则有：$A\cong B$

> 定理1.14 $m\times n$矩阵 $R(A)=R(B)\Leftrightarrow A\cong B$.

推论：矩阵的初等变换不改变矩阵的秩

例7 证明：n阶矩阵A可逆 $\Longleftrightarrow r(A)=n$

$\Longrightarrow$ n阶可逆矩阵A经有限次初等变换到E，故$r(A)=n$

$\Longleftarrow$ $r(A)=n$ A的相抵标准型为E

存在可逆矩阵P,Q，使$PAQ=E$

故 $A=P^{-1}Q^{-1}$

若$A\cong E$，则称A为满秩矩阵（方阵）

例8：求$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}$的秩及相抵标准形。

解：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\div(-3)}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以：$r(A)=2$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+2c_1-2c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{3}\\0&1&0&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_4+\frac{5}{3}c_1-\frac{4}{3}c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 相抵标准形

相抵　相抵标准形　　矩阵的秩

$$F=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}_{m\times n}$$

作业：

习题1.4

A:　3.(2)(4)　4.(3)　7.　8.

B:　4.　8.

小结

(1) 矩阵的概念　m行n列的一个数表

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵

- 方阵　$(m=n)$;　行 = 列
- 行矩阵与列矩阵;　$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,　$B=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$
- 对角矩阵;　$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$
- 单位矩阵;
- 零矩阵.
- 三角形矩阵　$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$
- 对称矩阵　$a_{ij}=a_{ji}$
- 同型矩阵

(3) 矩阵运算

- 加法 (两个矩阵是同型矩阵)
- 数与矩阵相乘
- 矩阵与矩阵相乘 (*)　第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数
- 矩阵的方幂 (*)
- 转置矩阵
- 求逆矩阵（**）　$A_nB_n=B_nA_n=E$,

求A^n的常用方法

1) 归纳法　　2) 矩阵二项式公式

3) 构造两个矩阵相乘使其成为特殊矩阵 (单位阵或数)

逆矩阵

一个矩阵A的逆矩阵是唯一的.

对于n 阶方阵A、B

若 $AB=E$ (或 $BA=E$)，则 $B=A^{-1}$.

逆矩阵的求法

1)待定系数法求逆　　$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$

2)二阶可逆矩阵求逆矩阵的规律

3)分块对角阵求逆

4)利用$A_nB_n=E$求逆

5) 利用初等变换求逆阵的方法

4. 初等行(列)变换 $\begin{cases}(1)\, r_i \leftrightarrow r_j\,(c_i \leftrightarrow c_j);\\ (2)\, r_i \times k\,(c_i \times k);\\ (3)\, r_i + kr_j\,(c_i + kc_j).\end{cases}$

初等变换的逆变换仍为初等变换,,且变换类型相同

初等矩阵 $E(i,j)$ $E(i(k))$ $E(i,j(k))$

矩阵A的左(右)边乘以一个初等矩阵相当于对A进行了一次初等行(列)变换

用初等行变换解线性方程组

行阶梯形矩阵 行简化形矩阵

相抵标准形与矩阵的秩

练习

1. 已知$A^3 = E$,则$A^{-1} =$ ______

2. 已知$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1} =$ ______

3. 已知$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1} =$ ______

4. 若n阶方阵A满足$A^2 + 2A + 3E = 0$, 则$A^{-1} =$ ______

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 求$A^n =$ ______

6. 若A,B均为n阶方阵,且 $B = B^2, A = E + B$,
证明A可逆并求其逆。

7. 解下列矩阵方程.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. 求下列矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$, (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,\ \ 2)$; (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

9. 设$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB = A + 2B$, 求 B.

练习题参考答案

1. A^2; 2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$;

4. $-\frac{1}{3}(A + 2E)$; 5. $\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

6. $A^{-1} = (B + E)^{-1}$.

$B^2 = B \Rightarrow B^2 - B = O$

$(B + E)(B - 2E) = -2E$

$(B + E)^{-1} = (\frac{B - 2E}{-2}) = E - \frac{B}{2} = \frac{1}{2}(3E - A)$

7. $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

8. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} E, & (n偶) \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, & (n奇) \end{cases}$;

2). $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; 3). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

小结

1. 初等行(列)变换 $\begin{cases} (1) r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j); \\ (2) r_i \times k (c_i \times k); \\ (3) r_i + k r_j (c_i + k c_j). \end{cases}$

初等变换的逆变换仍为初等变换,,且变换类型相同

2. 初等矩阵

$E(i,j)$ $\quad E(i(k))$ $\quad E(i,j(k))$

矩阵A的左(右)边乘以一个初等矩阵相当于对A进行了一次初等行(列)变换

3. 用初等行变换解线性方程组

行阶梯形矩阵 行简化形矩阵

1. 初等行(列)变换 $\begin{cases} (1) r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j); \\ (2) r_i \times k (c_i \times k); \\ (3) r_i + k r_j (c_i + k c_j). \end{cases}$

初等变换的逆变换仍为初等变换,,且变换类型相同

2. 初等矩阵

$E(i,j)$ $\quad E(i(k))$ $\quad E(i,j(k))$

矩阵A的左(右)边乘以一个初等矩阵相当于对A进行了一次初等行(列)变换

3. 用初等行变换解线性方程组

行阶梯形矩阵 行简化形矩阵