§1-5 条件概率

目录索引

返回主目录

一 条件概率

条件概率是概率论中一个重要而实用的概念。

它所考虑的是事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率。

设 A、B 是某随机试验中的两个事件，且 $P(A)>0$

则称事件 B 在“事件 A 已发生”这一附加条件下的概率为在事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的条件概率，简称为 B 在 A 之下的条件概率，记为

$$P(B|A)$$

例 1 盒中有 4 个外形相同的球，它们的标号分别为 1 、 2 、 3 、 4 ，每次从盒中取出一球，有放回地取两次 .

则该试验的所有可能的结果为

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4)

(2,1) (2,2) (2,3) (2,4)

(3,1) (3,2) (3,3) (3,4)

(4,1) (4,2) (4,3) (4,4)

其中 (i,j) 表示第一次取 i 号球，第二次取 j 号球

设 A={ 第一次取出球的标号为 2 }

B={ 取出的两球标号之和为 4 }

则事件 B 所含的样本点为

(1,3) (2,2) (3,1)

因此事件 B 的概率为： $$P(B)=\frac{3}{16}$$

下面我们考虑：已知第一次取出球的标号为 2, 求取出的两球标号之和为 4 的概率。

即在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率：

$$P(B|A)$$

由于已知事件 A 已经发生，则该试验的所有可能结果为

(2,1) (2,2) (2,3) (2,4)

这时，事件 B 是在事件 A 已经发生的条件下的概率，因此这时所求的概率为

$$P(B|A)=\frac{1}{4}$$

注：由例 1 可以看出，事件在“条件 A 已发生这附加条件的概率与不附加这个条件的概率是不同的．且由于

$$P(A)=\frac{4}{16},\quad P(AB)=\frac{1}{16}$$

故有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

返回主目录

条件概率的定义

设 A、 B 是某随机试验中的两个事件，且

$$P(A) > 0$$

则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为在事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的条件概率，简称为 B 在 A 之下的条件概率。

返回主目录

条件概率的性质：

1. 非负性：对任意事件B，有$P(B|A) \quad 0$

2. 规范性：$P(S|A)=1$；

3. 可列可加性：如果随机事件$B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \middle| A\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n|A)$$

4. $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$

5. $P(B_1 \cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$

返回主目录

条件概率的计算公式：

一、公式法 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\quad (P(A)>0)$

二、缩小样本空间法 --------- 适用于古典概型

设事件 A 所含**样本点数为** n_A，事件 AB 所含**样本点数为** n_{AB}，**则**

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}$$

返回主目录

例 2 已知某家庭有 3 个小孩，且至少有一个是女孩，求该家庭至少有一个男孩的概率．

解：设 A={ 3 个小孩至少有一个女孩 }

B={ 3 个小孩至少有一个男孩 }

则 S={ 男男男，男男女，男女男，男女女，女男男，女男女，女女男，女女女 }

方法一 公式法：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

返回主目录

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}+\overline{B})$$

$$=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}$$

所以
$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{6}{7}$$

方法二 缩小样本空间法

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{6}{7}$$

S={ 男男男 , 男男女 , 男女男 , 男女女 , 女男男 ,
女男女 , 女女男 , 女女女 }

返回主目录

二 乘法公式

两个事件的乘法公式

由条件概率的计算公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

我们得

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \qquad (P(A)>0)$$

这就是两个事件的乘法公式.

多个事件的乘法公式

设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个随机事件，且

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$$

则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

这就是 n 个事件的乘法公式 .

例 4 袋中有一个白球与一个黑球，现每次从中取出一球，若取出白球，则除把白球放回外再加进一个白球，直至取出黑球为止．求取了 n 次都未取出黑球的概率．

解： 设 $B=\{$取了n次都未取出黑球$\}$

$A_i=\{$第 i 次取出白球$\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

则
$$B=A_1A_2\cdots A_n$$

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\quad P(A_2|A_1)=\frac{2}{3},$$

$$P(A_3|A_1A_2)=\frac{3}{4},\cdots$$

返回主目录

由乘法公式，我们有

$$P(B)=P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

例 5 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 1/2，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为 7/10，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为 9/10。求透镜落下三次而未打破的概率。

解：以 A_i (i=1,2,3) 表示事件"透镜第 i 次落下打破"，以 B 表示事件"透镜落下三次而未打破"，有：

$$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=(1-\frac{9}{10})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{200}.$$

返回主目录

三、全概率公式和贝叶斯公式

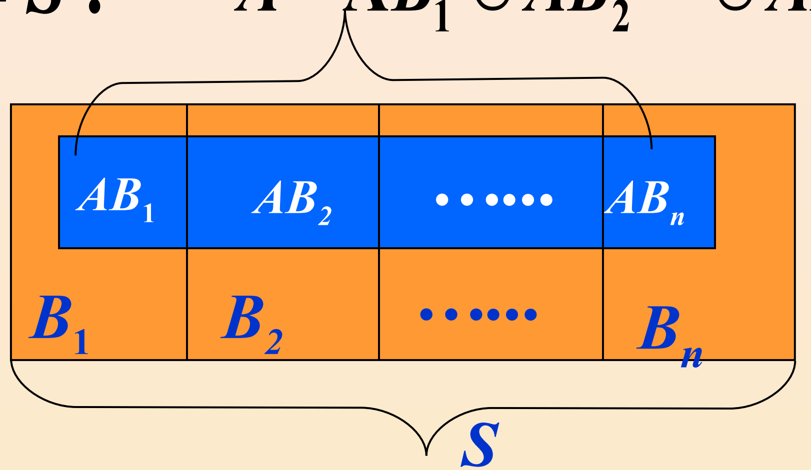
定义 设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \cdots B_n$ 为 E 的一组事件。若满足

(1) $B_i B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$;

(2) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$.

$A = AB_1 \cup AB_2 \cdots \cup AB_n$

则称 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 为样本空间 S 的一个**划分**。



返回主目录

全概率公式：

设随机事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n \cdots$ 以及 A

满足：

(1) $B_1, B_2, \cdots, B_n \cdots$ 两两互不相容；

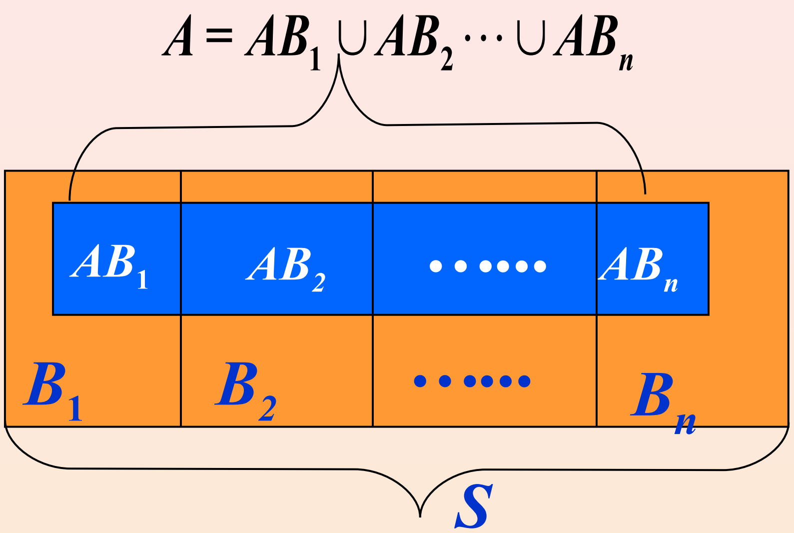
(2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = S$ 或 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$；

(3) $P(B_n) > 0 \ (n = 1, 2, \cdots)$

则有 $$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) P(A|B_n)$$

全概率公式的证明

由条件： $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$



得

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (AB_n)$$

而且由 $B_1, \quad B_2, \quad \cdots, \quad B_n \quad \cdots$ 两两互不相容，

得 $AB_1, \quad AB_2, \quad \cdots, \quad AB_n \quad \cdots$ 也两两互不相容；

返回主目录

全概率公式的证明（续）

所以由概率的可列可加性，得

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(AB_n)$$

再由条件 $P(B_n)>0$ （$n=1,\ 2,\ \cdots$），得

$$P(AB_n)=P(B_n)P(A|B_n)$$

代入公式（1），得

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(AB_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)P(A|B_n)$$

返回主目录

全概率公式的使用 （已知原因，求结果）

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(AB_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)P(A|B_n)$$

我们把事件 A 看作某一过程的结果，

把 $B_1, \quad B_2, \quad \cdots, \quad B_n \quad \cdots$ 看作该过程的若干个原因，

根据历史资料，每一原因发生的概率已知，

（即 $P(B_n)$ 已知）

而且每一原因对结果的影响程度已知，

（即 $P(A|B_n)$ 已知）

则我们可用全概率公式计算结果发生的概率．

（即求 $P(A)$）

返回主目录

例 6 某小组有 20 名射手，其中一、二、三、四级射手分别为 2、6、9、3 名．又若选一、二、三、四级射手参加比赛，则在比赛中射中目标的概率分别为 0.85、0.64、0.45、0.32，今随机选一人参加比赛，试求该小组在比赛中射中目标的概率．

解：设 $A=\{$该小组在比赛中射中目标$\}$

$B_i=\{$选i级射手参加比赛$\}(i=1, 2, 3, 4)$

$$P(B_1)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10},\cdots \quad P(A|B_1)=0.85,\cdots$$

一、二、三、四级射手分别为 2 、 6 、 9 、 3 名，又若选一、二、三、四级射手参加比赛，则在比赛中射中目标的概率分别为 0.85 、 0.64 、 0.45 、 0.32

由全概率公式，有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)+P(B_4)P(A|B_4)$$

$$=\frac{2}{20}\times 0.85+\frac{6}{20}\times 0.64+\frac{9}{20}\times 0.45+\frac{3}{20}\times 0.32$$

$$=0.5275$$

返回主目录

思考：

今随机选一人参加比赛射中了目标，

求该选手是一级选手的概率．

即求 $P(B_1|A)=?$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A|B_i)P(B_i)}$$

Bayes （逆概）公 式：

设随机事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n \cdots$ 以及A 满足

(1) $B_1, B_2, \cdots, B_n \cdots$ 两两互不相容；

(2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = S$ 或 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ；

(3) $P(B_n) > 0 \ (n = 1, 2, \cdots)$

则

乘法定理

$$P(B_n \mid A) = \frac{P(AB_n)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_n)P(B_n)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A \mid B_j)P(B_j)}, \quad n = 1,2,\cdots$$

条件概率　全概率公式

返回主目录

Bayes 公式的使用 （已知结果，求原因）

我们把事件 A 看作某一过程的结果，

把 $B_1, \quad B_2, \quad \cdots, \quad B_n \quad \cdots$ 看作该过程的若干个原因，

根据历史资料，每一原因发生的概率已知，

$\left(\text{即 } P(B_n) \text{已知} \right)$ 验前概率

而且每一原因对结果的影响程度已知，

$\left(\text{即 } P(A|B_n) \text{已知} \right)$

如果已知事件 A 已经发生，要求此时是由第 n 个原因引起的概率，则用 Bayes 公式

$\left(\text{即求 } P(B_n|A) \right)$ 验后概率

返回主目录

例 7 用某种方法普查肝癌，设：

A={ 用此方法判断被检查者患有肝癌 }，（结果）

D={ 被检查者确实患有肝癌 }，（原因）

已知

$$P(A|D)=0.95,\quad P(\overline{A}|\overline{D})=0.90$$

而且已知：$P(D)=0.0004$

1 ）求用此方法判断某被检查者患有肝癌的概率；

2 ）已知 现有一人用此法检验患有肝癌，求此人真正患有肝癌的概率．

$P(A)=?$ $P(D|A)=?$

返回主目录

$$P\left(A\middle|D\right)=0.95,\quad P\left(\overline{A}\middle|\overline{D}\right)=0.90$$

例 7（续）

解 由已知，得

$$P\left(A\middle|\overline{D}\right)=0.10,\quad P\left(\overline{D}\right)=0.9996$$

由全概率公式，有

$$P(A)=P(D)P(A|D)+P(\overline{D})P(A|\overline{D})$$

$$=0.0004\times 0{,}95+0.9996\times 0.10$$

$$=0.10034$$

例 7（续）

由 Bayes 公式，得

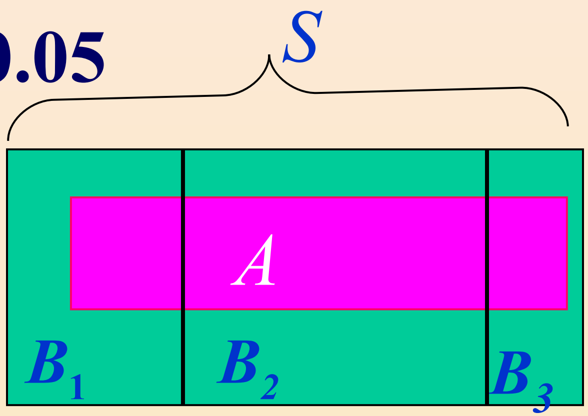
$$P(D|A)=\frac{P(D)P(A|D)}{P(D)P(A|D)+P(\overline{D})P(A|\overline{D})}$$

$$=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.9996\times0.10}$$

$$=0.0038$$

例 8 某电子设备制造厂所用的晶体管是由三家元件厂提供的。根据以往的记录有以下的数据。

元件制造厂	次品率	提供晶体管的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05



例 8（续）

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志。

（1）在仓库中随机的取一只晶体管，求它是次品的概率。

（2）在仓库中随机的取一只晶体管，若已知取到的是次品试分析此次品出自那家工厂的可能性最大。

解：设 A 表示“取到的是一只次品”，B_i ($i=1,2,3$) 表示“取到的产品是由第 i 家工厂提供的”，

例 8（续）

元件制造厂	$P(A\mid B_i)$ 次品率		$P(B_i)$ 提供晶体管的份额
1	0.02	×	0.15
2	0.01	×	0.80
3	0.03	×	0.05

$P(A)$

全概率公式

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}$$

贝叶斯公式

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\cdots+P(A\mid B_n)P(B_n).$$

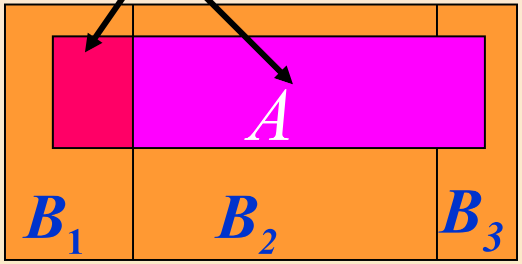
$$P(A)=0.0125$$

返回主目录

例 8（续）

元件制造厂	$P(A \mid B_i)$		$P(B_i)$
1	0.02	×	0.15
2	0.01	×	0.80
3	0.03	×	0.05

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.02 \times 0.15}{0.0125} = 0.24$$



例 8（续）

$$P(B_1 \mid A)=\frac{3}{12.5}=24\%,$$

$$P(B_2 \mid A)=\frac{8}{12.5}=64\%,$$

$$P(B_3 \mid A)=\frac{1.5}{12.5}=12\%.$$

例 9（p_{26} 24.）

有两箱同种类的零件。第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。求：

（1）第一次取到的零件是一等品的概率；$P(A_1)=?$

（2）第二次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率；$P(A_2|A_1)=?$

解：设 A_i 表示"第 i 次取到一等品"(i=1,2)，

B_i (i= 1,2) 表示"取到的是第 i 箱中的产品"，

返回主目录

例 9（续）由全概率公式，有

$$P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2),$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{10}{50}+\frac{18}{30})=\frac{2}{5};$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_2|B_1)P(B_1)+P(A_1A_2|B_2)P(B_2)$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{P_{10}^2}{P_{50}^2}+\frac{P_{18}^2}{P_{30}^2})=\frac{1}{10}(\frac{9}{49}+\frac{51}{29})$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{4}(\frac{9}{49}+\frac{51}{29})=0.4856$$

返回主目录

**

例 10　袋中有 10 个黑球，5 个白球．现掷一枚均匀的骰子，掷出几点就从袋中取出几个球．若已知取出的球全是白球，求掷出 3 点的概率．

解：设 B={取出的球全是白球}．

$$A_i=\{掷出 i 点\}\quad (i=1,2,\cdots,6)$$

则由 Bayes 公式，得

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{i=1}^{6}P(A_i)P(B|A_i)}$$

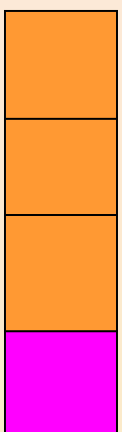
返回主目录

例 10（续）

$$=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{C_5^3}{C_{15}^3}}{\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{6}\times\frac{C_5^i}{C_{15}^i}+\frac{1}{6}\times 0}$$

$$=0.04835$$

例 11 对以往的数据分析结果表明当机器调整得良好时，产品的合格率为 90%，而当机器发生某一故障时，其合格率为 30%。每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 75%。已知某天早上第一件产品是合格品，试求机器调整得良好的概率是多少？



机器调整得良好 B

$\overline{B}$

$P(A|B)=90\%$

A

$P(A|\overline{B})=30\%$ 产品合格

返回主目录

机器发生某一故障

解：

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$
$$=0.9\times0.75+0.3\times0.25$$

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$
$$=\frac{0.9\times0.75}{0.9\times0.75+0.3\times0.25}=0.9.$$

作业：P26. 13,14,16,19,21,23