第四章 线性方程组

第四章 线性方程组

4.1 齐次线性方程组

4.2 非齐次线性方程组

方程组的矩阵和向量表示

线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

若记
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

则方程组可写成: $Ax = b.$

若记:
$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \ \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则方程组可写成:
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$$

4.1 齐次线性方程组

齐次线性方程组AX=0总有零解

何时有非零解?

定理4.1 设A为 $m\times n$矩阵, 则齐次方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 有非零解的充要条件是系数矩阵A的秩 $r(A) < n.$

证 方程组AX=0有非零解亦即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 有非零解 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩 $r(A) < n$

推论: 设A为n 阶方阵, 则齐次线性方程组$AX=0$有非零解的充要条件是 $|\mathbf{A}| = 0$

齐次线性方程组解的性质:

定理4.2 设 $x = \xi_1, x = \xi_2$ 均为 $Ax = 0$ 的解,
则 $x = \xi_1 + \xi_2$也是 $Ax=0$ 的解.

证明 $\because A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0$

$$\therefore A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0$$

故 $x = \xi_1 + \xi_2$ 也是$Ax = 0$的解.

定理4.3　设 $x=\xi_1$ 为 $Ax=0$的解，k为实数，

则　$x=k\xi_1$ 也是 $Ax=0$的解.

证明　$A(k\xi_1)=kA(\xi_1)=k0=0.$

证毕.

由以上两个性质可知，方程组的全体解向量所组成的集合，对于加法和数乘运算是封闭的，因此构成一个向量空间，称此向量空间为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间. 从而只要求出解空间的基, 就可以求出方程组的全部解. 解空间的基通常称为该方程组的基础解系.

基础解系的定义:

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$称为齐次线性方程组 $Ax=0$的基础解系,如果

(1)$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是$Ax=0$的一组线性无关 的解;

(2)$Ax=0$的任一解都可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性表出.

如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系 ,那么, $Ax=0$ 的通解可表示为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数.

基础解系的求法:

设齐次线性方程组的系数矩阵为 A，并不妨设A 的前r 个列向量线性无关.于是 A可化为

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$Ax=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n\end{cases}$$

现对$x_{r+1},\cdots,x_n$取下列 $n-r$ 组数:

$$\begin{pmatrix}x_{r+1}\\x_{r+2}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

分别代入$\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n\end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b_{11}\\\vdots\\-b_{r1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-b_{12}\\\vdots\\-b_{r2}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-b_{1,n-r}\\\vdots\\-b_{r,n-r}\end{pmatrix}.$

从而求得原方程组的 $n-r$ 个解:

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-b_{11}\\\vdots\\-b_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\xi_2=\begin{pmatrix}-b_{12}\\\vdots\\-b_{r2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-r}=\begin{pmatrix}-b_{1,n-r}\\\vdots\\-b_{r,n-r}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

下面证明 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组解空间的一个基.

(1)证明 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ **线性无关.**

由于 $n-r$个 $n-r$ 维向量 $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

线性无关，

所以 $n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 亦线性无关.

(2)证明解空间的任一解都 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ **线性表示.**

设 $x=\xi=(\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_r \quad \lambda_{r+1} \quad \cdots \quad \lambda_n)^T$ 为上述方程组的一个解．再作 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 的线性组合，

$$\eta=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}$$

由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是$Ax=0$的解,故η也是$Ax=0$的解.

下面来证明 $\xi=\eta$.

$$\eta=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}$$

$$=\lambda_{r+1}\begin{pmatrix}-b_{11}\\\vdots\\-b_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\lambda_{r+2}\begin{pmatrix}-b_{12}\\\vdots\\-b_{r2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_n\begin{pmatrix}-b_{1,n-r}\\\vdots\\-b_{r,n-r}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_r\\\lambda_{r+1}\\\lambda_{r+2}\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$$

由于ξ与η都是方程 $Ax=0$的解,而$Ax=0$又等价于

方程组 $\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n\end{cases}$

所以ξ与η都是此方程组的解 ，

由 $\xi=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_r\\\lambda_{r+1}\\\lambda_{r+2}\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix} \quad \eta=\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_r\\\lambda_{r+1}\\\lambda_{r+2}\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=c_1,\cdots,\lambda_r=c_r.$

故$\xi=\eta$.　即$\xi=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}$.

所以$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组解空间的一个基.

说明

1．解空间的基不是唯一的.

2．解空间的基又称为方程组的**基础解系**.

3．若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是$Ax=0$ 的基础解系，则其通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数.

定理4.4 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,且 $r(A)=r$ ，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系由 $n-r$ 个向量组成.

当 $r(A)=n$ 时, 方程组只有零解, 故没有基础解系 **(此时解空间只有一个零向量,为0维向量空间).**

当 $r(A)=r<n$ 时, 方程组必含有 $n-r$ 向量的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$, 此时方程组的解可表示为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中，$k_1,\cdots,k_{n-r}$ 为任意实数,解空间可表示为

$$S=\{x=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}\mid k_1,\cdots,k_{n-r}\in R\}$$

例1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解 对系数矩阵A作初等行变换，变为行最简矩阵，有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

便得 $\begin{cases} x_1=\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4, \\ x_2=\frac{5}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4. \end{cases}$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应有$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$，

即得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

并由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},(c_1,c_2\in R).$$

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵施行初等行变换 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=r=2, n=5, n-r=3,$ 即方程组有无穷多解，

其基础解系中有三个线性无关的解向量.

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.代入$\begin{cases} x_1+x_2=-x_3-4x_4+3x_5 \\ x_2=x_3-3x_4+x_5 \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

所以原方程组的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$.

其中k_1,k_2,k_3为任意常数 .

例3. 求下列齐次方程组的基础解系和通解

$$\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3+12x_4-x_5=0\\-2x_1-4x_2-x_3-5x_4+x_5=0\\2x_1+4x_2+2x_3+19x_4+x_5=0\\6x_1+12x_2+6x_3+47x_4+x_5=0\end{cases}$$

解

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3&0\\0&0&1&4&0\\0&0&0&5&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于系数矩阵的秩 $r(A)=3$

所以基础解系由2个向量构成

取 x_2,x_4 为自由未知量

令: $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

代入 $\begin{cases}x_1=-2x_2-3x_3\\x_3=-4x_4\\x_5=-5x_4\end{cases}$ 得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_3\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\end{pmatrix}$

所以基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\-4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

通解为:

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$$

例4. 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ax_1+bx_2+cx_3=0\\a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0\end{cases}$$

讨a, b, c满足何种关系时, 方程组仅有零解?方程组有非零解?

解: 由于系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

1) 当*a, b, c*互不相等时,

$|A|\neq 0$,方程组仅有零解

2) 当a=b=c时,$|A|=0$,方程组有非零解, 原方程组为

$x_1+x_2+x_3=0$ 即 $x_1=-x_2-x_3$

从而,通解为

$$x_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

3) 当 $a=b\neq c$ 时,$|A|=0$,方程组有非零解.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&c-a\\0&0&c^2-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得同解方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$

所以通解为

$$x=k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

类似地, 可处理下述两种情况:

1)$a=c\neq b$

2)$b=c\neq a$

例5. 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+ax_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

的系数矩阵为*A*, 且有3阶非零矩阵*B*使得*AB=0*, 求*a*的值.

解 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3),\beta_i$ 为3维列向量,由于 $AB=0$, 则

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(A\beta_1,A\beta_2,A\beta_3)=(0,0,0)$$

即矩阵B 的每1列均为方程组的解, 又B为非零矩阵, 故方程组有非零解, 从而

$|A|=5(a-1)=0$,于是$a=1$

例6. 设A为n阶矩阵，且det(A)=0,若某元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$ 证明: $x=k(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{im})^T$ 是方程组的通解.

证明: $|A|=0, A_{ij}\neq 0 \Longrightarrow r(A)=n-1$

$\Longrightarrow$ 基础解系由1个向量构成

又 $AA^*=|A|E=0 \Longrightarrow A^*$ 的每一列都是方程组 $Ax=0$的解

而 $A_{ij}\neq 0$ 于是 A^*的第i 列 $(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^T$是方程组的非零解.

从而，方程组的通解为: $x=k(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{im})^T$

(k 为任意常数)

例7. 设A 为 $m\times n$ 矩阵，证明 $r(A^TA)=r(A)$.

证 若x满足$Ax=0$，则有 $A^T(Ax)=0$，即 $(A^TA)x=0$

若 x 满足 $(A^TA)x=0$,则 $x^T(A^TA)x=0$，即

$$(Ax)^T(Ax)=0, \text{ 从而 } Ax=0.$$

综上所述,方程 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解.

因此 $r(A^TA)=r(A)$.

作业

习题4.1

A: 1(1),(3), 3, 4, 6,

B: 1, 2,

4.2 非齐次线性方程组

非齐次线性方程组 Ax=b 可能无解

何时有解?

称矩阵 $(\mathbf{A},\mathbf{b})$为方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的增广矩阵.

定理4.5 非齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩,即

$$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})$$

证: AX=B有解，即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{b}$ 有解.

$\Longleftrightarrow$ b可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示 $\Longleftrightarrow$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\mathbf{b}$ 等价

$\Longleftrightarrow$ $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})$

与方程组 $Ax=b$有解等价的命题

线性方程组 $Ax=b$有解

$\Leftrightarrow$

向量b能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示；

$\Leftrightarrow$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$等价;

$\Leftrightarrow$

矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$与矩阵$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$的秩相等.

非齐次线性方程组解的性质

(1)设$x=\eta_1$及$x=\eta_2$都是$Ax=b$的解,则$x=\eta_1-\eta_2$为对应的齐次方程 $Ax=0$的解.

证明 $\because A\eta_1=b,\quad A\eta_2=b$

$$\therefore A(\eta_1-\eta_2)=b-b=0.$$

即$x=\eta_1-\eta_2$满足方程$Ax=0$.

(2) 设$x=\eta$是方程 $Ax=b$的解, $x=\xi$是方程 $Ax=0$的解,则$x=\xi+\eta$仍是方程 $Ax=b$的解.

证明 $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b,$

所以$x=\xi+\eta$ 是方程 $Ax=b$的解.

证毕.

非齐次线性方程组的通解:

非齐次线性方程组Ax=b的通解为

$$x=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*.$$

其中 $k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为对应齐次线性方程组的通解，η^* 为非齐次线性方程组的任意一个特解.

非齐次线性方程组的解法:

（1）应用克莱姆法则

特点：只适用于系数行列式不等于零的情形，计算量大，容易出错，但有重要的理论价值，可用来证明很多命题.

（2）利用初等变换

特点：适用于方程组有唯一解、无解以及有无穷多解的各种情形，全部运算在一个矩阵（数表）中进行，计算简单，易于编程实现，是有效的计算方法.

例1 求解方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1, \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-1/2. \end{cases}$

解 对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $r(A)=r(B)=2$, 故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1=x_2+x_4+1/2, \\ x_3=\quad 2x_4+1/2. \end{cases}$$

取 $x_2=x_4=0$, 则 $x_1=x_3=\dfrac{1}{2}$, 即得方程组的一个特解

$$\eta^*=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程组$\begin{cases} x_1=x_2+x_4, \\ x_3=\quad 2x_4 \end{cases}$中,取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}及\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 则\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}及\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix},(c_1,c_2\in R).$$

例2 求下述方程组的解

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7,\\3x_1+x_2+2x_3+x_4-3x_5=-2,\\2x_2+x_3+2x_4+6x_5=23,\\8x_1+3x_2+4x_3+3x_4-x_5=12.\end{cases}$$

解 $$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\3&1&2&1&-3&-2\\0&2&1&2&6&23\\8&3&4&3&-1&12\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&-2&-1&-2&-6&-23\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由$r(A)=r(B)$ 知方程组有解. 又$r(A)=2,n-r=3$,
所以方程组有无穷多解. 且原方程组等价于方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5+7\\2x_2=-x_3-2x_4-6x_5-23\end{cases}$$

求特解 令 $x_3=x_4=x_5=0$,得$x_1=-\dfrac{9}{2},x_2=\dfrac{23}{2}$.

求基础解系

令 $$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

代入 $$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5\\2x_2=-x_3-2x_4-6x_5\end{cases}$$

依次得 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}.$$

故得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

所以方程组的通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9/2\\23/2\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

另一种解法 $$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\3&1&2&1&-3&-2\\0&2&1&2&6&23\\8&3&4&3&-1&12\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&-2&-1&-2&-6&-23\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1/2&0&-2&-9/2\\0&1&1/2&1&3&23/2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则原方程组等价于方程组

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_3+2x_5-\dfrac{9}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}x_3-x_4-3x_5+\dfrac{23}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_3/2+2x_5-9/2\\ x_2=-x_3/2-x_4-3x_5+23/2\\ x_3=x_3\\ x_4=x_4\\ x_5=x_5\end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9/2\\23/2\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

例3. 求解方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3+5x_4=-3\\ -x_1+2x_2-x_3-x_4=1\\ 2x_1-4x_2+2x_3+2x_4=2\end{cases}$$

解 对增广矩阵进行初等变换

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&-2&2&5&-3\\-1&2&-1&-1&1\\2&-4&2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&5&-3\\0&0&1&4&-2\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

由于 $r(A)=2$，$(A,\beta)=3$ 所以方程组无解.

例4. 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-5x_4=-1\\ 2x_1-3x_2+3x_3-6x_4=5\\ 0x_1-x_2+bx_3-3x_4=-3\\ x_1-x_2+0x_3+ax_4=8\end{cases}$$

讨论a, b取何值时, 方程组无解?有唯一解?有无穷多解?

解 对增广矩阵进行初等变换

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\2&-3&3&-6&5\\0&-1&b&-3&-3\\1&-1&0&a&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&b-3&1&4\\0&1&-3&a+5&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&b-3&1&4\\0&0&0&a+1&2\end{pmatrix}$$

1)当 $a\neq-1$ 且 $b\neq3$ 时，$r(A)=r(A,\beta)=4,n=4$, 方程组有唯一解.

2)当 $a=-1,b$ 任意时，$r(A)=3,r(A,\beta)=4$ 方程组无解.

3) 当b=3时, 有

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&a+1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&-4a-2\end{pmatrix}$$

(1)当 $b=3,a\neq-0.5$ 时，$r(A)=3,r(A,\beta)=4$, 方程组无解.

(2)当 $b=3,a=-0.5$ 时, $r(A)=r(A,\beta)=3<4$, 方程组有无穷多解.

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3&0&1\\0&1&-3&0&-9\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases}x_1=3x_3+1\\ x_2=3x_3-9\\ x_4=4\end{cases}$ 故通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\3\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-9\\0\\4\end{pmatrix}$

例5. 已知

$\alpha_1=(1,4,0,2)^T, \alpha_2=(2,7,1,3)^T, \alpha_3=(0,1,-1,a)^T, \beta=(3,10,b,4)^T$

问: a,b取何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?

β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示? 并写出表达式.

解 考虑线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$, 对增广矩阵B进行初等变换.

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix}$$

1) 当 $b\neq 2$ 时, 由于 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$ 方程组无解，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

2) 当 $b=2$ 时,

(1)若 $a\neq 1, r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=3$ 方程组有唯一解,

β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示,这是

$$B\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

于是,方程组的解为 $x_1=-1, x_2=2, x_3=0$,故 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$

(2)若 $a=1, r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=2<3,$ 方程组有无穷多解,

β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,但表示法不唯一.

$$B\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

于是,方程组的解为 $x_1=3-2k, x_2=k, x_3=-2+k$ ，故

$\beta=(3-2k)\alpha_1+k\alpha_2+(-2+k)\alpha_3$

k 为任意常数

例6. 已知方程组 $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ 有无穷多解, 求常数a.

解 由于非齐次方程组有无穷多解， 所以应有

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2=0 \Longrightarrow \begin{cases}a=-2\\a=1\end{cases}$$

(1)当 $a=-2$ 时, $r(A)=2, r(A,b)=2,$ 方程组有无穷多解.

(1)当 $a=1$ 时, $r(A)=1, r(A,b)=2,$ 方程组无解.

因此 $a=-2$

例7. 已知 $\eta_1=(-9,1,2,11)^T, \eta_2=(1,-5,13,0)^T, \eta_3=(-7,-9,24,11)^T$

是方程组的解

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1\\3x_1+b_2x_2+2x_3+b_4x_4=d_2\\9x_1+4x_2+x_3+cx_4=d_3\end{cases}$$

求方程组的通解.

解 因为 $\begin{vmatrix}3&2\\9&1\end{vmatrix}\neq 0 \Longrightarrow r(A)\geq 2$

又因为 $\xi_1=\eta_1-\eta_2=(-10,6,-11,11)^T, \xi_2=\eta_1-\eta_3=(-2,10,-22,0)^T$

是 $Ax=0$ 的解. 且 ξ_1,ξ_2 线性无关, 故 $n-r(A)=4-r(A)\geq 2$

即 $r(A)\leq 2 \Longrightarrow r(A)=2$

$\Longrightarrow x=\eta_1+k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_1-\eta_3)$

小结

1．齐次线性方程组基础解系的求法

（1）对系数矩阵 A 进行初等变换，将其化为最简形

$$A\sim\begin{pmatrix}1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

（2）得出 $r(A)=r$，同时也可知方程组的一个基础解系含有$n-r$个线性无关的解向量.

由于 $$Ax=0\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

令 $$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

得 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

故 $$\xi_1=\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \cdots,\xi_{n-r}=\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

为齐次线性方程组的一个基础解系.

2．线性方程组解的情况

$Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow$ $r(\mathbf{A})\le n$

此时基础解系中含有$n-r(A)$解向量.

$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})=n$ $\Leftrightarrow$ $Ax=b$有唯一解.

$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})<n$ $\Leftrightarrow$ $Ax=b$有无穷多解.

$r(\mathbf{A})\ne r(\mathbf{A},\mathbf{b})$ $\Leftrightarrow$ $Ax=b$无解.

作业:

习题4.2

A:　1(1),(3),2,　4,　6,

B:　1,