§1　数学期望

例 1：某班有 N 个人，其中有 n_i 个人为 a_i 分，

$$i = 1, 2, \cdots k, \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = N,$$ 求平均成绩。

解：平均成绩为：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} a_i n_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{n_i}{N}$$

若用 X 表示成绩，则 $$P\{X = a_i\} \approx \frac{n_i}{N}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n_i}{N} \approx \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P\{X = a_i\}$$

1、数学期望定义

(1) 离散型

设离散型随机变量 X 的分布律为：

$$P\{X=x_k\}=p_k\ ,\qquad k=1,2,\cdots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望，记为 E(X)，

即 E(X)= $\sum_{i=1}^{\infty} x_k p_k$ 。

数学期望也称为均值。

说 明

(1) X的数学期望刻划了X变化的平均值．

(2)由于随机变量X的数学期望表示的是随机变量X变化的平均值，因此，只有当级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$绝对收敛时，才能保证级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$的和与其级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$的求和顺序无关．

(2)、连续型

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$绝对收敛，则称积分$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$的值为随机变量$X$的数学期望。

记为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

数学期望也称为均值。

例 2

甲、乙两人射击，他们 的射击水平由下表给出：

X: 甲击中的环数；　　*Y*: 乙击中的环数；

X	8	9	10
P	0.1	0.3	0.6

Y	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

试问哪一个人的射击水平较高？

例 2（续）

解：

甲、乙的平均环数可写为

$$EX = 8 \times 0.1 + 9 \times 0.3 + 10 \times 0.6 = 9.5$$

$$EY = 8 \times 0.2 + 9 \times 0.5 + 10 \times 0.3 = 9.1$$

因此，从平均环数上看，甲的射击水平要比乙的好．

例 3

设随机变量X服从指数分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$$

例 4

设随机变量X服从Cauchy分布，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=+\infty$$

这表明积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$不绝对收敛，　因而$E(X)$不存在．

返回主目录

例 5

按规定，火车站每天 8:00~9:00, 9:00~10:00 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间相互独立，其规律为：

到站时间	8:10,9:10	8:30,9:30	8:50,9:50
概率	1/6	3/6	2/6

(1) 旅客 8:00 到站，求他候车时间的数学期望。

(2) 旅客 8:20 到站，求他候车时间的数学期望。

解：设旅客的候车时间为 X（以分记）

(1) X 的分布律：

X	10	30	50
P	1/6	3/6	2/6

$$EX=10*(1/6)+30*(3/6)+50*(2/6)=33.33(\text{分})$$

返回主目录

（ 2 ）旅客 8：20 分到达

X 的分布率为

X	10	30	50	70	90
P	3/6	2/6	(1/6)*(1/6)	(3/6)*(1/6)	(2/6)*(1/6)

EX=10*(3/6)+30*(2/6)+50*(1/36) +70*(3/36) +90*(2/36)
=27.22(分)

到站时间	8:10,9:10	8:30,9:30	8:50,9:50
概率	1/6	3/6	2/6

2、随机变量函数的数学期望

定理 1：

设 Y=g(X), g(x) 是连续函数，

（1）若 X 的分布率为 $p_k = P\{X = x_k\}$　$k = 1,2,\cdots$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则 $E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$

(2). 若 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

定理 2：

若 (X,Y) 是二维随机变量，$g(x,y)$ 是二元连续函数，

$$Z=g(X,Y)$$

(1) 若 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，

且 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛；则 $E(Z)=\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$

(2). 若 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，且

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$ 绝对收敛，

则 $$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

若二维连续型随机变量（X，Y）的联合密度为 $f(x,y)$，则

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right\}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy$$

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy$$

例 6

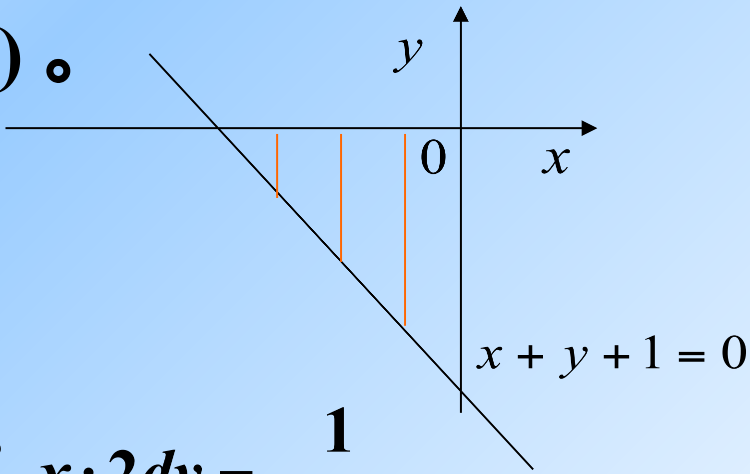
设风速V在(0,a)上服从均匀分布,又设飞机机翼受到的正压力W是V的函数: $W=kV^2$,(k>0)
求EW.

解： $f_V(v)=\begin{cases}1/a, 0<v<a; \\ 0, 其它;\end{cases}$

$$EW=\int_{-\infty}^{\infty} k v^2 f_V(v)dv = k\int_0^a v^2 (1/a)dv = \frac{1}{3}ka^2$$

例 7

设 (X,Y) 在区域 A 上服从均匀分布，其中 A 为 x 轴，y 轴和直线 x+y+1=0 所围成的区域。求 E(X)，E(-3X+2Y)，E(XY)。



解：$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in A\\ 0,\text{其它；}\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2dy=-\frac{1}{3}$$

$$E(-3X+2Y)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}(-3x+2y)f(x,y)dy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{0}2(-3x+2y)dy=\frac{1}{3}$$

$$\text{EXY}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2ydy=\frac{1}{12}$$

例 8

设在国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量是随机变量 X（吨），它在[2000,4000]上服从均匀分布，又设每售出这种商品一吨，可为国家挣得外汇 3 万元，但假如销售不出而囤积在仓库，则每吨需浪费保养费 1 万元。问需要组织多少货源，才能使国家收益最大。

解：设 y 为预备出口的该商品的数量，

这个数量可只介于 2000 与 4000 之间

用 Z 表示国家的收益（万元）

$$Z=\begin{cases}3y, & X \quad y\\ 3X-(y-X), & X<y\end{cases}$$

返回主目录

（例8续）

$2000 \le y \le 4000$

X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}, & 2000 \le x \le 4000\\ 0, & \text{其它；}\end{cases}$$

$$EZ=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx=\int_{2000}^{y}\frac{3x-(y-x)}{2000}dx+\int_{y}^{4000}\frac{3y}{2000}dx$$

（例 8 续）下面求使 EZ 达到最大的 y 值，

$$EZ=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx=\int_{2000}^{y}\frac{3x-(y-x)}{2000}dx+\int_{y}^{4000}\frac{3y}{2000}dx$$

$$=-\frac{1}{1000}[y^2-7000y+4*10^6]$$

$$=-\frac{1}{1000}[(y-3500)^2-3500^2-4*10^4]$$

$$=-\frac{1}{1000}(y-3500)^2+8250$$

即，组织 3500 吨此种商品是最佳的决策。

3、数学期望的性质

I)　Ec=c，c 是常数，若 $a \le X \le b$，

则 $a \le EX \le b$，

II)　EcX=cEX，c 是常数，

III)　E(aX+bY)=aEX+bEY

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i EX_i$$

IV)　若 x，y 独立，则 EXY=EXEY

返回主目录

例 9 对 N 个人进行验血，有两种方案：

（ 1 ）对每人的血液逐个化验，共需 N 次化验；

（ 2 ）将采集的每个人的血分成两份，然后取其中的一份，按 k 个人一组混合后进行化验（设 N 是 k 的倍数），若呈阴性反应，则认为 k 个人的血都是阴性反应，这时 k 个人的血只要化验一次；如果混合血液呈阳性反应，则需对 k 个人的另一份血液逐一进行化验，这时 k 个人的血要化验 k+1 次；

假设所有人的血液呈阳性反应的概率都是 P，且各次化验结果是相互独立的。

试说明适当选取 k 可使第二个方案减少化验次数。

返回主目录

（例 9续）

解：设 X 表示第二个方案下的总化验次数，X_i 表示第 i 个组的化验次数，则

$$X = \sum_{i=1}^{N/k} X_i \text{，且 } EX = \sum_{i=1}^{N/k} EX_i$$

EX表示第二种方案下总的平均化验次数，EX_i表示第i个组的平均化验次数。

下面求 EX_i：

[illegible]

$$P\{X_i = 1\} = q^k \quad , \quad q = 1 - p \; ;$$

$$P\{X_i = k + 1\} = 1 - q^k \; ;$$

返回主目录

（例 9 续）

$$EX_i = q^k + (k+1)(1-q^k) = k+1-kq^k \, ,$$

$$i = 1,2,\cdots,N/k \, ;$$

所以 $EX = \dfrac{N}{k}(k+1-kq^k) = N(1+\dfrac{1}{k}-q^k)$

只要选 k 使 $1+1/k-q^k<1$，即 $1/k<q^k$，就可使第二个方案减少化验次数；当 q 已知时，若选 k 使 $f(k)=1+1/k-q^k$ 取最小值，就可使化验次数最少。

例如：当 p=0.1 ，q=0.9 时，可证明 k=4 可使最小；这时，

$$EX = N(1+1/4-0.9^4) = 0.5939N$$

工作量将减少 40%.

返回主目录

例 10

一民航送客车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以 X 表示停车的次数。求 EX（设每个旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）。

此时，$X_i \quad i=1,2,\cdots,10$ 不是相互独立的

解：设，$X_i=\begin{cases}0, & \text{第 } i \text{ 站没人下车}\\ 1, & \text{第 } i \text{ 站有人下车}\end{cases}$　　$i=1,2,\cdots,10$

易见　$X=X_1+\cdots+X_{10}$　　$EX=\sum_{i=1}^{10} EX_i$

$P\{X_i=0\}=(9/10)^{20}$　　$P\{X_i=1\}=1-(9/10)^{20}$　　$i=1,\cdots,10$

$EX_i=1-(9/10)^{20}, \quad i=1,\cdots,10,$

$EX=10[1-(9/10)^{20}]=8.784(次)$。

返回主目录

例 11

用某台机器生产某种产品，已知正品率随着该机器所用次数的增加而指数下降，即

P{第 k 次生产出的产品是正品}$=e^{-\lambda k}, k=1,2,\cdots,\lambda>0.$

假设每次生产 100 件产品，试求这台机器前 10 次生产中平均生产的正品总数。

解：设 X 是前 10 次生产的产品中的正品数，并设

$$X_{ki}=\begin{cases}1, & \text{第}k\text{次生产的第}i\text{件产品是正品；}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

$k=1,2,\cdots,10, i=1,2,\cdots,100,$ 则

$$X=\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{100}X_{ki}.$$

返回主目录

例 11（续）

而 X_{ki} 服从 $p = e^{-\lambda k}$ 的 (0 — 1) 分布，$E(X_{ki}) = e^{-\lambda k}$.

$i = 1,2,\cdots,100$, 所以

$$E(X) = \sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{100} E(X_{ki}) = \sum_{k=1}^{10} 100e^{-k\lambda} = 100\sum_{k=1}^{10} e^{-k\lambda}$$

$$= \frac{100\mathrm{e}^{-\lambda}(1 - e^{-10\lambda})}{1 - e^{-\lambda}}$$

返回主目录

例 12

对产品进行抽样，只要发现废品就认为这批产品不合格，并结束抽样。若抽样到第 n 件仍未发现废品则认为这批产品合格。

假设产品数量很大，抽查到废品的概率是 p ，试求平均需抽查的件数。

解 :设 X 为停止检查时，抽样的件数，则 X 的可能取值为 1,2,…,n ，且

$$P\{X=k\}=\begin{cases} q^{k-1}p, & k=1,2,\cdots,n-1; \\ q^{n-1}, & k=n. \end{cases}$$

其中 $q=1-p$ ，于是

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p+nq^{n-1}$$

返回主目录

例 12（续）

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}(1-q)+nq^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k}+nq^{n-1}$$

$$=(1+2q+3q^{2}+\cdots+(n-1)q^{n-2})-$$

$$-(q+2q^{2}+\cdots+(n-2)q^{n-2}+(n-1)q^{n-1})+nq^{n-1}$$

$$=1+q+q^{2}+\cdots+q^{n-1}$$

$$=\frac{1-q^{n}}{1-q}=\frac{1-(1-p)^{n}}{p}$$

$p_{113-115}$ 2, 3,4,6,7,8,9,10,13,15 .

返回主目录