§6 复变函数的极限与连续性

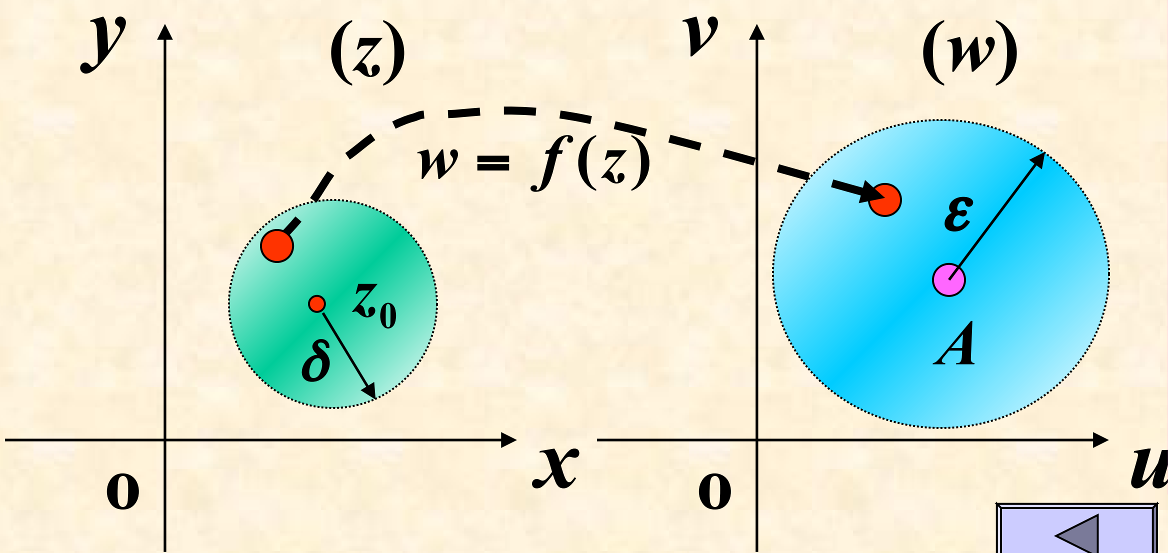
- 1. 函数的极限
- 2. 运算性质
- 3. 函数的连续性

1. 函数的极限

定义 设 $w = f(z)$, $z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \rho)$, 若存在数 A，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ $(0<\delta\le\rho)$, 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$,

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$

或当 $z \to z_0$ 时，$f(z) \to A$



几何意义：
当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小去心邻域时，它的象点 $f(z)$ 就落入 A 的一个预先给定的 ε 邻域中

(1) 意义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的.

与一元实变函数相比较要求更高.

(2) A 是复数.

(3) 若 f(z) 在 z_0 处有极限, 其极限是唯一的.

2. 运算性质

复变函数极限与其实部和虚部极限的关系:

定理 1

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $z=x+iy$ $z_0=x_0+iy_0$

则
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A=u_0+iv_0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0\\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0\end{cases}$$

定理 2

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$,则

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=\lim_{z\to z_0} f(z)\pm\lim_{z\to z_0} g(z)=A\pm B$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)\lim_{z\to z_0} g(z)=AB$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}\left(\lim_{z\to z_0} g(z)\neq 0\right)=\frac{A}{B}$$

以上定理用极限定义证！

例 1 证明$w = x^2 + y + i(x + y^2)$在平面上处处有极限.

$\because\ x^2 + y, x + y^2$在平面上处处有极限

例 2 求$f(z) = \bar{z}/z + z/\bar{z}$在$z \to 0$时的极限.

$\because\ f(z) = \dfrac{2(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$在(0,0)处极限不存在.

例 3 证明 $f(z) = \operatorname{Re} z / |z|$在$z \to 0$时的极限不存在.

3. 函数的连续性

定义 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称$f(z)$在$z_0$处连续；

若在区域D内处处连续，则称$f(z)$在D内连续；

若z、$z_0\in C$，且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称$f(z)$

在曲线C上点z_0处连续.

定理 3 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

在 $z_0=x_0+iy_0$处连续

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v(x_0,y_0) \end{cases}.$$

例 4　证明 $f(z)=\arg z$ 在原点及负实轴上不连续

证明

(1) $\because\ f(z)=\arg z$ 在原点没有定义，

故不连续。

(2)在负实轴上

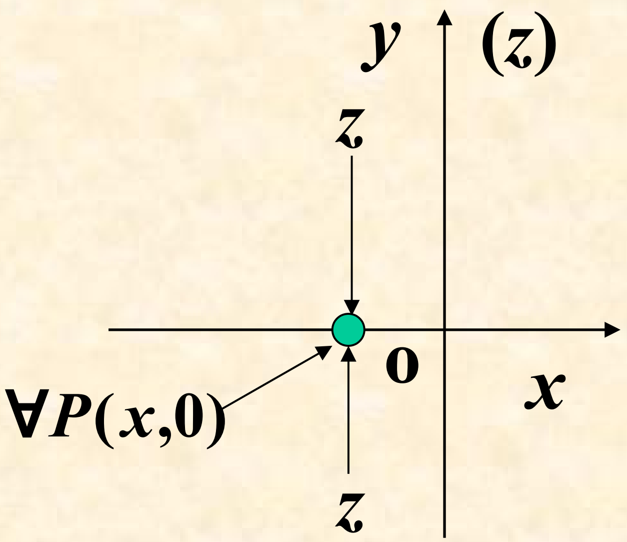
$$\forall P(x,0)(x<0)$$

$$\because\ \lim_{y\to 0^+}\arg z=\pi$$

$$\lim_{y\to 0^-}\arg z=-\pi$$

$\therefore\ \arg z$ 在负实轴

上不连续。



定理 4 连续函数的和、差、积、商 (分母不为 0) 仍为连续函数；

连续函数的复合函数仍为连续函数。

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 在整个复平面内是连续的；

$R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在复平面内除分母为0点外处处连续.

有界性：

设曲线C为闭曲线或端点包括在内的曲线段

若$f(z)$在C上连续 $\Rightarrow \exists M > 0$, 在曲线上恒有$|f(z)| \le M$

第二章 解析函数

- 第一节 解析函数的概念
- 第二节 函数解析的充要条件
- 第三节 初等函数

§2.1 解析函数的概念

- 1. 复变函数的导数定义
- 2. 解析函数的概念

一．复变函数的导数

(1) 导数定义

定义 设函数 $w=f(z)$ $z\in D$, 且 z_0、 $z_0+\Delta z\in D$ ，

如果极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，则称函数

$f(z)$ 在点 z_0 处可导。称此极限值为 $f(z)$ 在 z_0 的导数，

记作 $$f'(z_0)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

如果 $w=f(z)$ 在区域 D 内处处可导，则称 $f(z)$ 在区域 D 内可导。

(1) $\Delta z \to 0$ 是在平面区域上以任意方式趋于零。

(2) $z=x+iy, \Delta z=\Delta x+i\Delta y$, $\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$

例 1 证明：$f(z)=\operatorname{Re} z$ 在平面上的任何点都不可导.

证明：
$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Re}(z+\Delta z)-\operatorname{Re}(z)}{\Delta z}$$
$$=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}\Delta z\text{取实数趋于}0\text{时}, \Delta f/\Delta z \to 1; \\ \text{当}\Delta z\text{取纯虚数趋于}0\text{时}, \Delta f/\Delta z \to 0;\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}\text{不存在.}$$

(2) 求导公式与法则

---- 实函数中求导法则的推广

① 常数的导数 $c'=(a+ib)'=0.$

② $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n 是自然数).

证明 对于复平面上任意一点 z_0，有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+z_0^{n-1})}{z-z_0}=nz_0^{n-1}$$

③　设函数$f(z), g(z)$ 均可导，则

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)\quad ,$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)},(g(z)\neq 0)$$

由以上讨论$\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在整个复平面上处处可导；

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面上（除分母为0点外）处

处可导.

④ 复合函数的导数 $(f[g(z)])' = f'(w)g'(z)$ ，

其中 $w=g(z)$ 。

⑤ 反函数的导数 $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$ ，其中：$w=f(z)$

与 $z=\varphi(w)$ 互为单值的反函数，且 $\varphi'(w)\neq 0$ 。

思考题

实函数中, $f(x)=|x|^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导;

复函数中, $f(z)=|z|^2$ 的可导性？

例 2 已知 $f(z)=(z^2+5z)^2-\dfrac{1}{z-1}$，求 $f'(z)$

解 $$f'(z)=2(z^2+5z)(2z+5)+\frac{1}{(z-1)^2}$$

例 3 问：函数 $f(z)=x+2yi$ 是否可导？

解 $$\because \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{x+\Delta x+2(y+\Delta y)i-(x+2yi)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\begin{cases}1 & \text{当}\Delta y=0,\Delta x\to 0\text{时}\\ 2 & \text{当}\Delta x=0,\Delta y\to 0\text{时}\end{cases}\quad\therefore \text{不存在!}$$

故函数 $f(z)=x+2yi$ 处处不可导.

例 4　证明 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 只在 $z=0$ 处才可导。

证明

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\operatorname{Re}(z+\Delta z)-z\operatorname{Re}z}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\operatorname{Re}(z+\Delta z)+z\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta z\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=0 & z=0\text{时}\\ \lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\operatorname{Re}(z+\Delta z)+z\dfrac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}\right)\text{不存在！} & z\neq 0\text{时}\end{cases}$$

$$\because\ \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}0 & \text{当}\Delta y=0,\Delta x\to 0\text{时}\\ 1 & \text{当}\Delta x=0,\Delta y\to 0\text{时}\end{cases}\quad\therefore\text{不存在！}$$

 (1) 复变函数在一点处可导，要比实函数在一点处可导要求高得多，也复杂得多，这是因为 $\Delta z \to 0$ 是在平面区域上以任意方式趋于零的原故。

(2) 在高等数学中要举出一个处处连续，但处处不可导的例题是很困难的，但在复变函数中，却轻而易举。

(3) 可导与连续

若 $w=f(z)$ 在点 z_0 处可导 $\underset{\overset{?}{\Longleftarrow}}{\Longrightarrow}$ $w=f(z)$ 点 z_0 处连续

证明：若$f(z)$在z_0可导，则$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

使得当$0 < |\Delta z| < \delta$，时，有$\left| \dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$

令$\rho(\Delta z) = \dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0)$，则$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0,$

由此可得$f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z,$

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0+\Delta z) = f(z_0)$，所以$f(z)$在$z_0$连续

(4) 复变函数的微分

设函数 $w=f(z)$ z_0 处的导数为$f'(z_0)$，称

存$f'(z_0)\Delta z_0$ 为 $f(z)$ 在z_0 **微分**（ *differential* ），

记作

$$dw\Big|_{z=z_0}=f'(z_0)\Delta z_0$$

当$f(z)=z$ 时 $dz=\Delta z$,

$$dw\Big|_{z=z_0}=f'(z_0)dz$$

导数也可称为（**微商**）

$$f'(z_0)=\frac{dw}{dz}\Big|_{z=z_0}$$

二．解析函数的概念

定义 如果函数 $w=f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的某个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 **解析** (*analytic function*)；

如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析，则称 $f(z)$ 在 D 内**解析**，或称 $f(z)$ 是 D 内的**解析函数**（**全纯函数**或**正则函数**）。

如果 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，就称 z_0 是 $f(z)$ 的**奇点**。(*singular point*)

(1) $w=f(z)$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ 在 D 内可导。

(2) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导，未必在 z_0 解析

例如

(1) $w=z^2$ 在整个复平面处处可导，故是整个复平面上的解析函数；

(2) $w=1/z$ ，除去 $z=0$ 点外，是整个复平面上的解析函数；

(3) $w=z\mathrm{Re}z$ 在整个复平面上处处不解析 (见例 4) 。

定理 1 设 $w=f(z)$ 及 $w=g(z)$ 是区域 D 内的解析函数

，

则 $f(z)\pm g(z)$ ，$f(z)g(z)$ 及 $f(z)/g(z)$ $(g(z)\neq 0$ 时)

均是 D 内的解析函数。

由以上讨论$\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$是整个复平面上的解析函数；

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$是复平面上(除分母为0点外)的解析函数.

定理 2 设 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析，$h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，$h=g(z)$ 的函数值集合 $\subset$G，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内处处解析。

§2.2 解析函数的充要条件

- 1. 解析函数的充要条件
- 2. 举例

如果复变函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在定义域 D 内处处可导，则函数 $w = f(z)$ 在 D 内解析。

问题　*如何判断函数的解析性呢？*

本节从函数 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 的可导性，探求函数 $w=f(z)$ 的可导性，从而给出判别函数解析的一个充分必要条件，并给出解析函数的求导方法。

一．解析函数的充要条件

设函数$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点

$z=x+iy$可导,则

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}$$

若沿平行于实轴的方式$z+\Delta z \to z(\Delta y = 0)$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

若沿平行于虚轴的方式 $z+\Delta z \to z(\Delta x = 0)$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$\because\ f'(z)$存在

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

记忆

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}$$

定义 方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}}$$

称为 Cauchy-Riemann 方程 (简称 C-R 方程).

定理 1 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 D 内有定义，

则 $f(z)$ 在点 $z=x+iy \in D$ 处**可导的充要条件**是

$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann 方程

上述条件满足时，有

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y - iu_y = v_y + iv_x$$

证明 "$\Longrightarrow$"

(由 $f(z)$ 的可导 $\Longrightarrow$ C-R 方程满足上面已证！只须证 函数的可导 $\Longrightarrow$ 函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 可微)。

$\because$ 函数 $w=f(z)$ 点 z 可导，即

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

设 $\rho(\Delta z)=\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)$

则 $f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$ (1), 且

$$\lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$$

令：$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$ ，$f'(z)=a+ib$ ，

$\rho(\Delta z)=\rho_1+i\rho_2$ 故（ 1 ）式可写为

$$\Delta u+i\Delta v=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+(\rho_1+i\rho_2)(\Delta x+i\Delta y)$$

$$=(a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y)$$

$$+i(b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y)$$

因此 $\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y$,

$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y$$

$$\because \lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0 \quad \therefore \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_1=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_2=0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y|}{|\Delta z|}=0\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y|}{|\Delta z|}=0$$

所以 $u(x, y)$ ， $v(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微 .

"$\Leftarrow$"(由函数 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微及满足 C-R 方程 $\Rightarrow f(z)$ 在点 $z=x+iy$ 处可导)

$\because u(x，y)$ ，$v(x，y)$ 在 $(x，y)$ 点可微，即：

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_k = 0, (k = 1,2,3,4)$

$$\therefore f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$$

$$=(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta x+(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})\Delta y+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y$$

由$C-R$方程

$$=(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta z+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y$$

$$\frac{f(z-\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial u}{\partial x}+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

$$\because |\frac{\Delta x}{\Delta z}|\le 1,\quad |\frac{\Delta y}{\Delta z}|\le 1\Rightarrow\frac{\Delta x}{\Delta z}(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\to 0$$

$$\therefore f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

定理 2 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内**解析充要**

条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

满足 Cauchy-Riemann 方程

 由此可以看出可导函数的实部与虚部有密切的联系 . 当一个函数可导时 , 仅由其实部或虚部就可以求出导数来 .

 利用该定理可以判断那些函数是不可导的 .

★ 使用时 : i) 判别 $u(x, y)$ ， $v(x, y)$ 偏导数的连续性，

ii) 验证 C-R 条件 .

iii) 求导数 :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

 前面我们常把复变函数看成是两个实函数拼成的，但是求复变函数的导数时要注意，并不是两个实函数分别关于 x, y 求导简单拼凑成的 .

二. 举例

例 1 判定下列函数在何处可导，在何处解析：

$$(1)w=\bar{z};\quad (2)f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y);(3)w=|z|^{2}$$

解 (1) 设 $z=x+iy$ $w=x-iy$ $u=x,\ v=-y$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

故 $w=\bar{z}$在全平面不可导，不解析。

解:

(2) $\because f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 则 $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

故 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$在全平面可导，解析。

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=f(z)$$

解 (3) 设 $z=x+iy$ $w=x^2+y^2$ $u=x^2+y^2$，$v=0$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow$$

仅在点 $z=0$ 处满足 C-R 条件，故

$w=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，但处处不解析。

例 2　求证函数

$$w = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

在$z = x + iy \neq 0$处解析，并求$\dfrac{dw}{dz}$.

证明　由于在 $z\neq0$ 处，$u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 都是可微函数，

且满足 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

故函数 $w=f(z)$ 在 $z\neq0$ 处解析，其导数为

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{z^2}$$

例 3 若 $f'(z)\equiv 0\,,z\in D\Rightarrow f(z)=C\,,z\in D$

证明 $\because\ f'(z)=u_x+iv_x=\frac{1}{i}u_y+v_y\equiv 0$

$\therefore u_x=v_x=u_y=v_y=0$

$\Rightarrow u=C_1\quad v=C_2\quad f(z)=C_1+iC_2=C$(复常数)

例 4　如果 $f(z)=u(x, y)+i\,v(x, y)$ 是一解析函数，且 $f'(z)\neq 0$ ，那么曲线族 $u(x, y)=C_1$ ，$v(x, y)=C_2$ 必相正交，这里 C_1 、 C_2 常数.

解 $\because\ f'(z)=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\neq 0\quad \therefore \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 不全为0

那么在曲线的交点处，i) u_y 、 v_y 均不为零时，

由隐函数求导法则知曲线族 $u(x, y)=C_1$ ，$v(x, y)=C_2$ 中任一条曲线的斜率分别为

$k_1=-u_x/u_y$，$k_2=-v_x/v_y$

利用 C-R 方程 $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ 有

$k_1k_2=(-u_x/u_y)(-v_x/v_y)=-1$ ，即：两族曲线互相正交.

ii) u_y ，v_y 中有一为零时，不妨设 $u_y=0$ ，则 $k_1=\infty$ ，$k_2=0$（由 C-R 方程）

即：两族曲线在交点处的切线一条是水平的，另一条是铅直的， 它们仍互相正交。

练习：

若 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$

问常数 a,b,c,d 取何值时, $f(z)$在复平面内处处解析？

$a=2$, $b=-1$, $c=-1$, $d=2$

作 业

习题 2　**4（2、4、6）、5（1、2）**