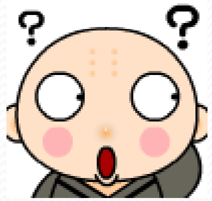
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$\frac{1}{6(n+1)} < I_n < \frac{1}{5(n+1)}$$



$$0 \le x \le 1, \quad 5 \le x+5 \le 6$$

算法**2**：

$$I_n^* \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{5(n+1)}\right]$$

$$I_{k-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{k} - I_k\right) \quad (k = n, n-1, \ldots, 1)$$

n	I_n(算法1)	I_n(算法2)
0	0.18232155	0.18232155
1	0.08839225	0.08839222
2	0.05803875	0.05803892
3	0.04313958	0.04313873
4	0.03430208	0.03406033
5	0.02848958	0.02846835
6	0.02421875	0.02432491
7	0.02176339	0.02123260
8	0.01618305	0.01883699
9	0.03019588	0.01692617
10	-0.05097941	0.01536914
11	0.34580612	0.01406339
12	-0.64567926	0.01301636
13	8.30540938	0.01184127
14	-41.45561831	0.01222222

算法1的误差传播：

$$e_n = I_n - I_n^* = -5(I_{n-1} - I_{n-1}^*) = -5e_{n-1}$$

$$e_n = (-5)^n e_0$$

算法2的误差传播：

$$e_{k-1} = -\frac{1}{5}e_k \qquad e_0 = (-\frac{1}{5})^n e_n$$

- 不同的算法，效果大不相同；
- 计算过程中误差不会增长的算法具有**数据稳定性**。

§1.5 数值计算中应注意的问题

1. 避免两个相近的数相减

$$e_r(x-y)=\frac{e(x)-e(y)}{x-y}$$

$$x=\sqrt{1+10^{-7}}-1=\frac{10^{-7}}{\sqrt{1+10^{-7}}+1}\approx 4.999999\times 10^{-8}$$

$$x=1-\cos 2^{\circ}\approx 1-0.9994=6\times 10^{-4}$$

$$x=1-\cos 2^{\circ}=2\sin^2 1^{\circ}\approx 2\times 0.0175^2=6.125\times 10^{-4}$$

2. 避免大数吃小数

$$x^2 - (10^9 + 1)x + 10^9 = 0$$

$$\text{x} = \frac{10^9 + 1 \pm \sqrt{(10^9 + 1)^2 - 4 \times 10^9}}{2}$$

$$x_1 = 10^9, x_2 \approx 0$$

$$x_2 = \frac{2 \times 10^9}{10^9 + 1 + \sqrt{(10^9 + 1)^2 - 4 \times 10^9}} \approx 1$$

3. 避免除数绝对值远小于被除数绝对值

$$\text{e}(\frac{x}{y}) = \frac{ye(x) - xe(y)}{y^2} \qquad |y| << |x|$$

4. 简化计算，减少运算量，提高效率

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

$$\ln 2 = \ln(1+x)\,|_{x=1} \;= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

截断误差 $\frac{1}{n+1}$,误差小于 10^{-5},需要10^5次运算

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n+1}+\ldots)$$

$$\ln 2=\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_{x=1/3}=\frac{2}{3}[1+\frac{1}{3\times 9}+\frac{1}{5\times 9^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\times 9^n}+\ldots]$$

取前**5**项近似所产生的误差：

$$e=\frac{2}{3}[\frac{1}{11\times 9^5}+\frac{1}{13\times 9^6}+\frac{1}{15\times 9^7}+\ldots]<\frac{2}{3}\times\frac{1}{11\times 9^5}[1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\ldots]$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{11\times 9^5}\times\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{12\times 11\times 9^4}<10^{-5}$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- 直接计算：n(n+1)/2次乘法，n次加法；
- 秦九韶算法： n次乘法，n次加法。

$$P_n(x) = a_0 + x\{a_1 + x[\ldots x(a_{n-2} + x(a_{n-1}x + a_n))]\}$$

5. 选择数值稳定性好的算法

- 进行收敛性分析。

本 章 小 结

- 数值计算方法研究什么？
  - 利用计算机近似求解数学问题；
- 误差
  - 来源：模型、观测、截断、舍入；
  - 绝对误差、相对误差及有效数字。
- 误差的传播

$$e(y) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} e(x_i) \qquad e_r(y) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i}{f} e_r(x_i)$$

- 数值计算中应注意的问题。

课 后 作 业

- 第一章习题的1、4、5、6、10、11。
- 下周三(5月13日递交)。
- 注意：
  - 计入平时成绩，不可补交；
  - 请用学校统一的作业纸作答，每页上端写上班级、学号、姓名；
  - 不用抄题目，写清题号，直接作答即可；
  - 请各位班长(或学委)收齐并按学号排列。