4.4 等价关系与划分

- 等价关系：同时具有自反、对称和传递性 。
- 等价关系是最重要、最常见的二元关系之一。

4.4 等价关系与划分

定义 4.13 设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的**等价关系**。设 R 为等价关系，如果 $<x,y>\in R$，称 x 等价于 y ，记作 $x\sim y$ 。

- 例如，实数集上的相等关系、幂集上的各子集间的相等关系，三角形集合上的三角形的相似关系都是等价关系。

- 因为等价关系是自反、对称和传递的，可以通过关系矩阵和关系图判断某关系是否是等价关系。

4.4 等价关系与划分

例 4.21　设 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$，A 上的关系 R 定义如下：

$$R=\{<x, y> \mid x, y \in A \land x \equiv y \pmod 3\}$$

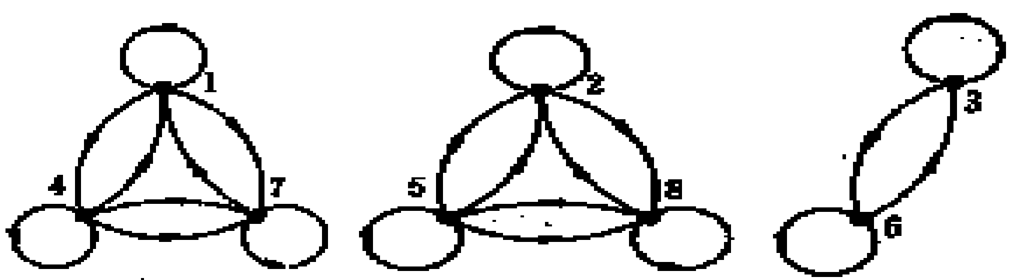
其中 $x \equiv y \pmod 3$ 叫做 x 与 y 模 3 相等，即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等或 $x-y$ 可被 3 整除。可以验证 R 为 A 上的等价关系：

（1）自反：$\forall x \in A$，$x \equiv x \pmod 3$，即 $<x, x> \in R$。

（2）对称：$\forall x, y \in A$，若 $x \equiv y \pmod 3$ 即 $<x, y> \in R$，则 $y \equiv x \pmod 3$ 即 $<y, x> \in R$。

（3）传递：$\forall x, y, z \in A$，若 $x \equiv y \pmod 3$ 且 $y \equiv z \pmod 3$，则 $x \equiv z \pmod 3$。

该关系的关



4.4 等价关系与划分

定义 4.14 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，∀ $x\in A$，令

$$[x]_R=\{y \mid y\in A\wedge xRy\}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称为 x 的等价类，简记为 $[x]$。 x 的等价类就是 A 中所有与 x 等价的元素构成的集合。

如例 4.21 中的等价类有:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

4.4 等价关系与划分

定理 4.19 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

（1）$\forall x \in A$，必定有 $[x] \neq \varnothing$ 且 $[x] \subseteq A$。

（2）$\forall x, y \in A$，如果 xRy，那么 $[x]=[y]$。

（3）$\forall x, y \in A$，如果 $x\tilde{R}y$，那么 $[x] \cap [y] = \varnothing$。

（4）$\bigcup_{x \in A} [x] = A$

定义 4.15 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类为元素构成的集合称为 A 关于 R 的**商集**，记作 A/R，表示为

$$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

例 4.21 中 A 关于 R 的商集是：

$$A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$$

4.4 等价关系与划分

定义 4.16 设 A 是非空集合，若 A 的子集族π（以 A 的子集为元素构成的集合）满足以下条件：

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）$\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

（3）$\bigcup_{x \in \pi} x = A$

则称π为 A 的一个划分，且称π中的元素为 A 的划分块。

例 4.22 设 A={1, 2, 3}，判断下列子集族是否为 A 的划分?

$\pi_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$，$\pi_2 = \{\{1\}, \{1, 3\}\}$

$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$，$\pi_4 = \{\{1, 2, 3\}\}$

$\pi_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$，$\pi_6 = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{3\}\}$

根据定义 4.16 可以判断π_3，π_4，π_5为集合 A 的划分，其他都不是 A 的划分。

4.4 等价关系与划分

根据等价类的性质（定理 4.19 ）以及划分的定义（定义 4.16 ），显然有下面的结论：

（ 1 ）商集就是 A 的一个划分，等价类就是划分块。如例 4.21 中的商集 $A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$ 是 A 的一个划分。

（ 2 ）给定集合 A 上的一个等价关系 R 决定了 A 的一个划分，并且不同的等价关系将对应于不同的划分。

（ 3 ）给定集合 A 的一个划分确定该集合上的一个等价关系。

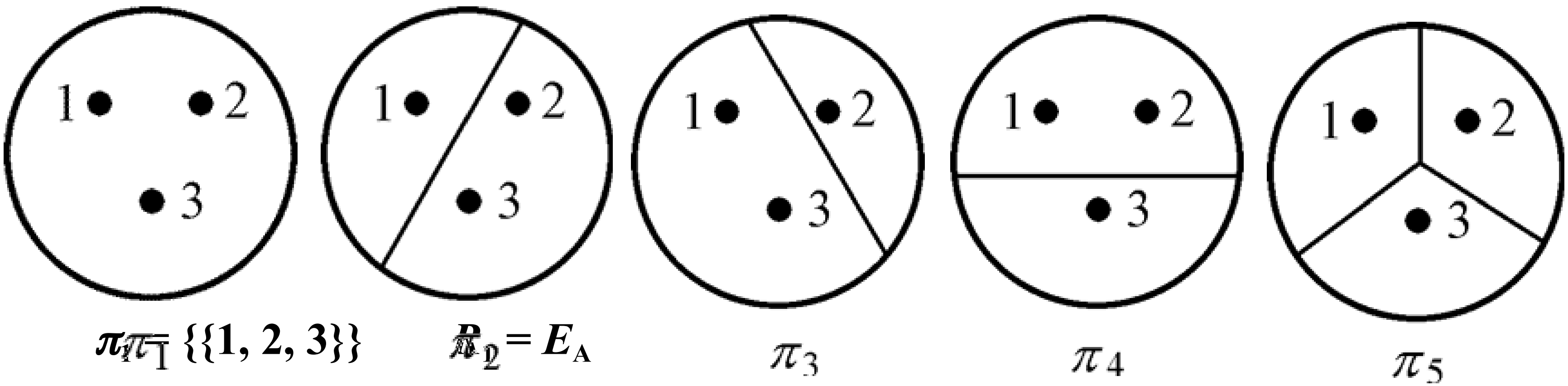
A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的：

A 上的等价关系 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ A 的划分

4.4 等价关系与划分

例 4.24 求出 A={1, 2, 3} 上所有的等价关系。

解：先求出 A 的所有的划分，这些划分与 A 上的等价关系之间的一一对应是：



$\pi_1 = \{\{1, 2, 3\}\}$ $R_1 = E_A$

$\pi_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ $R_2 = \{<2, 3>, <3, 2>\} \cup I_A$

$\pi_3 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$ $R_3 = \{<1, 3>, <3, 1>\} \cup I_A$

$\pi_4 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ $R_4 = \{<1, 2>, <2, 1>\} \cup I_A$

$\pi_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ $R_5 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>\} = I_A$

小结

（1）等价关系同时具有自反、对称和传递性。

（2）可以通过关系矩阵和关系图判断某关系是否是等价关系。

（3）等价类的定义与性质。

（4）商集的定义。

（5）划分的定义。

（6）A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的。

（7）由给定的划分确定其对应的等价关系共有 3 种方法：

① 通过集合运算求。

② 利用关系矩阵求。

③ 利用关系图求。

作业

❖ **补充习题 4.4**

1．设$A=\{1,2,3,4\}$，R是A上的等价关系，且R在A上所构成的等价类是$\{1\},\{2,3,4\}$.

(1) 求R；

(2) 求$R\circ R^{-1}$；

(3) 求R的传递闭包.

2．设$A=\{a,b,c,d\}$，A上的等价关系

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}\cup I_A$$

画出R的关系图，并求出A中各元素的等价类.

3．设$A=\{a,b,c,d,e,f\}$，R是A上的关系，且$R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$，设$R^*=tsr(R)$，则$R^*$是$A$上的等价关系.

(1) 给出R^*的关系矩阵；

(2) 给出商集A/R^*.

4．设$A=\{1,2,3,4\}$，R为$A\times A$上的二元关系，$\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in A\times A$，

$$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle\Leftrightarrow a+b=c+d$$

(1) 证明R为等价关系.

(2) 求R导出的划分.

4.5 相容关系与覆盖

- 相容关系：同时具有自反性和对称性。

4.5 相容关系与覆盖

定义 4.17　设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的和对称的，则称 R 为 A 上的相容关系。

根据该定义，相容关系有以下三个性质：

（1）所有的等价关系都是相容关系。

（2）相容关系的关系矩阵主对角线全为 1 且是对称矩阵。

（3）相容关系的关系图每一个节点上都有环，且每两个不同节点间如果有边，一定有方向相反的两条边。

例 4.25　设 $A=\{2166, 243, 375, 648, 455\}$，定义该集合上的关系 R 为：

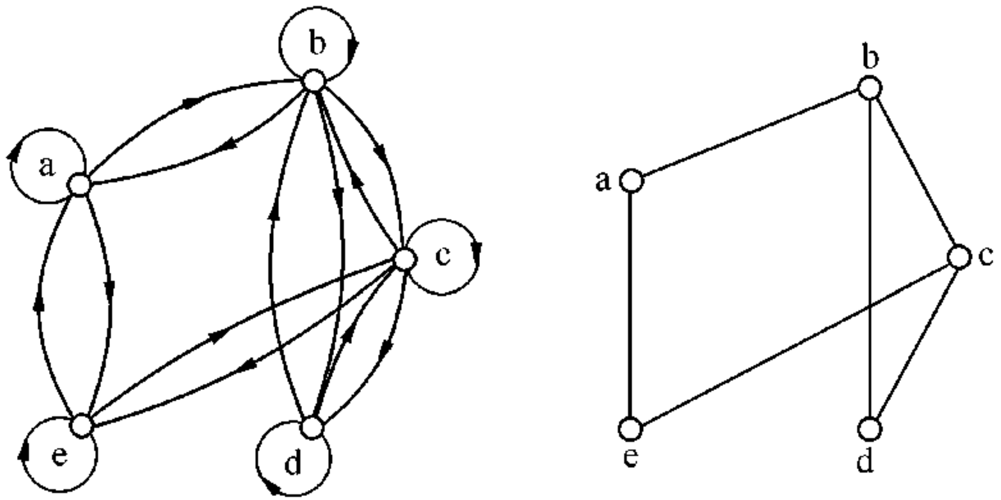
$$R=\{<x, y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \text{ 和 } y \text{ 至少有一个相同的数码}\}$$

显然，R 是自反的和对称的，但它不是可传递的，故 R 是 A 上的一个相容关系。

4.5 相容关系与覆盖

相容关系的图形表示中，每个环不必画出，两个元素之间方向相反的有向边用一条无向边替代，这样的图称为相容关系的简化关系图。

例 4.26 设集合 A={a, b, c, d, e}，R={<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>, <e, e>, <a, b>, <b, a>, <a, e>, <e, a>, <b, c>, <c, b>, <b, d>, <d, b>, <c, d>, <d, c>, <c, e>, <e, c>}，易知 R 是 A 上的相容关系，则其关系图和简化关系图如下：



（a）　　　　（b）

4.5 相容关系与覆盖

定义 4.18 设 R 是非空集合 A 上的相容关系，集合 $C \subseteq A$ ，若对任意的 x, $y \in C$ 都有 xRy 成立，则称 C 是由相容关系 R 产生的相容类。

如果 R 是 A 上的相容关系，C 是由相容关系 R 产生的相容类，从定义可看出：

（1）相容类 C 一定是 A 的子集。

（2）因为相容关系 R 是自反的，即 $\forall x \in A$ ，有 xRx ，所以 $\{x\}$ 是由相容关系 R 产生的一个相容类，即 A 中的任何元素组成的单元素集是由相容关系 R 产生的一个相容类。

定义 4.19 设 R 是非空集合 A 上的相容关系， C 是 R 产生的相容类。如果它不是其他任何相容类的真子集，则称 C 为最大相容类，记为 C_R。

根据定义 4.19，最大相容类 C_R 具有如下的性质：

（1） C_R 中任意元素 x 与 C_R 中的所有元素都有相容关系 R 。

（2） $A - C_R$ 中没有一个元素与 C_R 中的所有元素都有相容关系 R 。

4.5 相容关系与覆盖

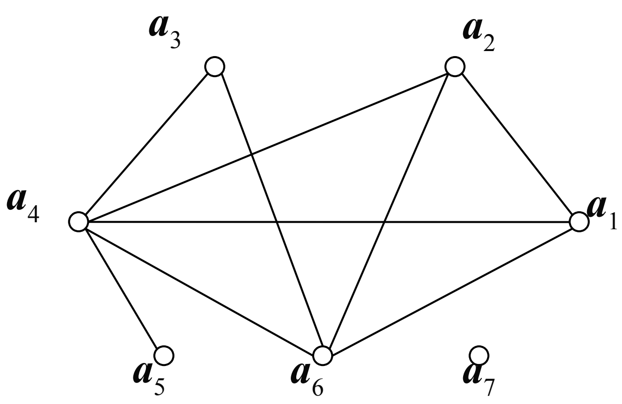
利用相容关系的简化关系图求最大相容类的方法：

（ 1 ）最大完全多边形的顶点构成的集合是最大相容类。

（ 2 ）孤立点构成的集合是最大相容类。

（ 3 ）如果一条边不是任何完全多边形的边，则它的两个端点构成的集合是最大相容类。

❖ 例 4.28 设给定相容关系的简化关系图如下图所示，写出其所有最大相容类。



解：最大相容类为 $\{a_1, a_2, a_4, a_6\}$，$\{a_3, a_4, a_6\}$，$\{a_4, a_5\}$，$\{a_7\}$。

4.5 相容关系与覆盖

定理 4.20 设 R 是非空有限集合 A 上的相容关系， C 是 R 产生的相容类，那么必存在最大相容类 C_R，使得 $C \subseteq C_R$。

定义 4.20 设 A 是非空集合，若 A 的子集族π满足以下条件：

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）$\bigcup_{x \in \pi} x = A$

则称π为集合 A 的一个覆盖。

定理 4.21 设 A 是有限集合， R 是 A 上的相容关系，由 R 产生的所有最大相容类构成的集合是 A 的覆盖，叫作集合 A 的完全覆盖，记为 $C_R(A)$。

4.5 相容关系与覆盖

定理 4.22 给定集合 A 的覆盖 $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$，则由它确定的关系 $R= A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\ldots\cup A_n\times A_n$ 是 A 上的相容关系。

定理 4.23 集合 A 上的相容关系 R 与完全覆盖 $C_R(A)$ 存在一一对应。

小结

（1）相容关系同时具有自反、对称性。

（2）可以通过关系矩阵和关系图判断某关系是否是相容关系。

（3）相容类、最大相容类的定义。

（4）覆盖的定义，完全覆盖。

（5）覆盖与相容关系之间不具有一一对应关系；集合 A 上的相容关系 R 与完全覆盖 $C_R(A)$ 存在一一对应。