

不同的拉普拉斯变换形式,称为单边拉普拉斯变换,在分析带初始条件(即非初始静止的)的线性常系数微分方程所确定的因果系统中,它起着特别重要的作用。

信号  $x(t)$  的单边拉普拉斯变换  $\tilde{X}(s)$  定义为

$$\tilde{X}(s) \triangleq \int_{0+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (9.120)$$

由式(9.120)和(9.2)的比较中可看到,单边和双边拉普拉斯变换定义的区别在于积分下限。双边变换取决于从  $t=-\infty$  到  $+\infty$  的整个信号,而单边变换仅取决于从  $t=0+$  到  $\infty$  的信号。因此,在  $t<0$  时不同但在  $t>0$  时相同的两个信号,将有不同的双边拉普拉斯变换,但有相同的单边拉普拉斯变换。我们也注意到,因为单边变换不包括  $t=0$ ,所以它不包括任何冲激或较高阶的奇异函数  $u_n(t)$  ( $n>0$ )。基本上单边变换不应认为是一个新变换,它是在  $t<0+$  时信号值被置为零的双边变换。因此,对右边信号利用9.2节性质4,我们看到式(9.120)的ROC总是右半平面。为了描述单边拉普拉斯变换,考虑下面两例。

**例9.16** 考虑信号

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \quad (9.121)$$

因为  $t<0$  时,  $x(t)=0$  且不包含奇点,所以单边和双边变换一致。这样,由表9.2

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a \quad (9.122)$$

**例9.17** 考虑下面信号

$$x(t) = e^{-a(t+1)} u(t+1) \quad (9.123)$$

此例的双边变换  $X(s)$  可从例9.1和时间移位性质9.5.2节得到,具体是

$$\tilde{X}(s) = \frac{e^s}{s+a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a \quad (9.124)$$

通过对比,单边拉普拉斯变换是

$$\begin{aligned} \tilde{X}(s) &= \int_{0+}^{\infty} e^{-a(t+1)} u(t+1) e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} e^{-a} e^{-t(s+a)} dt \\ &= e^{-a} \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a \end{aligned} \quad (9.125)$$

因此,对此例,单边和双边拉普拉斯变换明显不同。事实上,我们应当把  $X(s)$  认作是  $x(t)u(t)$  的而不是  $x(t)$  的双边变换,这与以上关于单边变换就是  $t<0+$  时信号值为零的双边变换的解说相符合。

单边变换的大多数性质与双边变换是相同的。事实上,式(9.74)和(9.75),即初值和终值性质,与单边拉普拉斯变换有更恰当及直接的联系,因为初值和终值性质的有效性要求在  $t<0$  时,  $x(t)$  为零且不含冲激或高阶奇点。在这些条件下,双边拉普拉斯变换与单边拉普拉斯变换是一致的。

单边和双边变换性质间特别重要的差异是微分性质。尤其是,若  $x(t)$  有单边拉普拉斯变换  $X(s)$ ,则通过分部积分,我们得到  $dx(t)/dt$  的单边拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt &= x(t) e^{-st} \Big|_{0+}^{\infty} + s \int_{0+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= s\tilde{X}(s) - x(0+) \end{aligned} \quad (9.126)$$

类似地,第二次应用这种方法,就得出  $d^2x(t)/dt^2$  的单边拉普拉斯变换

$$s^2\tilde{X}(s) - sx(0+) - x'(0+) \quad (9.127)$$

这里  $x'(0+)$  表示在  $t=0+$  时计算的  $x(t)$  的导数。很清楚, 我们可以继续这种方法, 以获得更高阶导数的单边变换。

单边拉普拉斯变换的主要用途, 在于求带非零初始条件的线性常系数微分方程的解。例如, 考虑由方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (9.128)$$

表征的因果系统, 具有初始条件

$$y(0+) = 3, \quad \frac{dy(0+)}{dt} = -5 \quad (9.129)$$

设  $x(t) = 2u(t)$ , 然后对式(9.128)两边进行单边变换, 得到

$$s^2 \tilde{Y}(s) - 3s + 5 + 3s\tilde{Y}(s) - 9 + 2\tilde{Y}(s) = \frac{2}{s} \quad (9.130)$$

或

$$\tilde{Y}(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)} + \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \quad (9.131)$$

这里  $Y(s)$  是  $y(t)$  的单边拉普拉斯变换。为了得到  $y(t)$ , 我们可以用部分分式展开的方法展开  $Y(s)$ , 得到

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \quad (9.132)$$

对每一项应用例9.16的方法, 得到

$$y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t) \quad (9.133)$$

## 9.9 小 结

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

在本章中, 我们已经提出并研究了被看作傅里叶变换推广的拉普拉斯变换。作为分析和研究 LTI 系统的一种分析方法, 它特别有用。由于拉普拉斯变换的性质, LTI 系统, 包括那些由线性常系数微分方程表示的系统, 都能在变换域中用代数运算表征和分析。

对于有理拉普拉斯变换的信号和系统, 通过在复平面 ( $s$  平面) 上标出极点、零点的位置和标明收敛域, 常常可以方便地表示这种变换。由极点—零点图, 能用几何的方法得到傅里叶变换。由极点位置和收敛域的知识, 也可以很容易地鉴定因果性、稳定性和其他特性。

本章主要涉及双边拉普拉斯变换, 也介绍了与其稍有差异的拉普拉斯变换形式, 即单边变换。事实上, 单边变换可以解释为在  $t$  小于  $0+$  时信号值为零的双边变换。这种形式的拉普拉斯变换, 在求解具有非零初始条件的线性常系数微分方程的解时特别有用。

## 习 题

9.1. 试确定以下各时间函数的拉普拉斯变换、有关的收敛域和极点—零点图。]

(a)  $e^{-at}u(t)$ ,  $a < 0$ ;

(b)  $-e^{at}u(-t)$ ,  $a > 0$ ;

(c)  $e^{at}u(t)$ ,  $a > 0$ ;

(d)  $e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$ ;

(e)  $u(t)$ ;

(f)  $\delta(t-t_0)$ ;

(g)  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t-kT)$  (在确定极点—零点图之前, 把答案写成闭合式);

(h)  $te^{-at}u(t)$ ,  $a>0$ ;

(i)  $\delta(at+b)$ ,  $a, b$  为实常数;

(j)  $\cos(\omega_0 t + \phi)u(t)$ .

9.2. 对以下有关  $x(t)$  的每一个说明和图 P 9.2 四张极点—零点图的每一张, 求相应的 ROC 约束。

1.  $x(t)e^{-t}$  的傅里叶变换存在;

2.  $x(t)=0$ ,  $t>10$ ;

3.  $x(t)=0$ ,  $t<0$ .

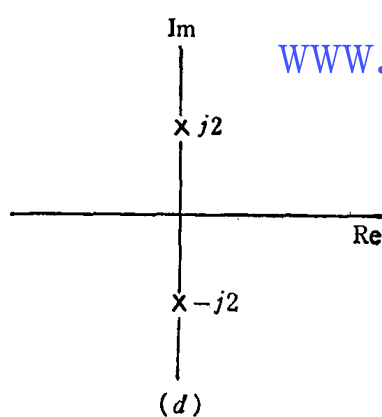
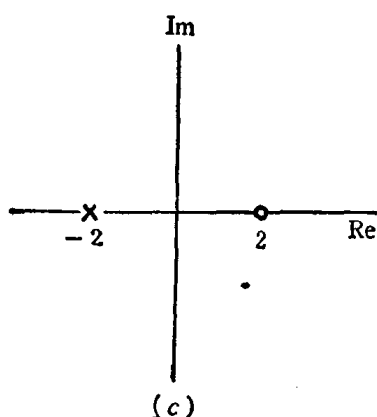
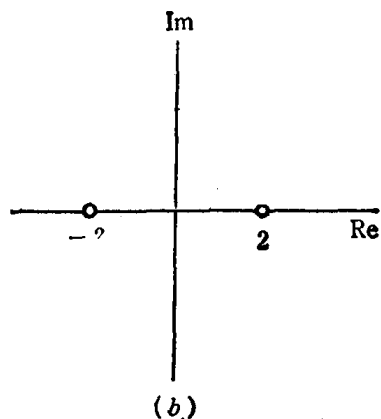
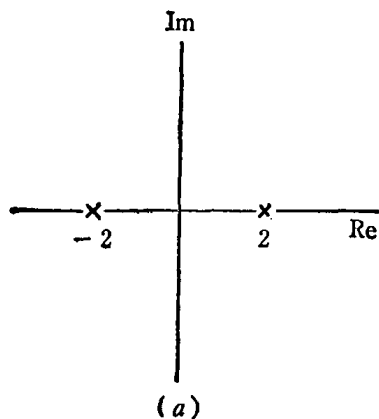


图 P 9.2

9.3. 对于一个特定的复数  $s$ , 如果变换的幅度是有限的, 即, 如果  $|X(s)| < \infty$ , 则可认为拉普拉斯变换存在。

试证明: 在  $s=s_0=\sigma_0+j\omega_0$ , 变换  $X(s)$  存在的充分条件由下式给出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

即, 以  $e^{-\sigma_0 t}$  指数加权的  $x(t)$  是绝对可积的。这里需利用关于复函数  $f(t)$  的结果,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \quad (\text{P 9.3})$$

不用严格证明式 (P 9.3), 能否讨论一下它的合理性。

9.4. 由下列各拉普拉斯变换  $X(s)$  和有关的收敛域, 试求时间函数  $x(t)$ :

(a)  $\frac{1}{s+1}$ ,  $\text{Re}\{s\} > -1$ ;

$$(b) \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < -1;$$

$$(c) \frac{s}{s^2+4}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0;$$

$$(d) \frac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -2;$$

$$(e) \frac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < -3;$$

$$(f) \frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}, \quad 0 < \operatorname{Re}\{s\} < 1;$$

$$(g) \frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}, \quad -1 < \operatorname{Re}\{s\};$$

$$(h) \frac{s+1}{(s+1)^2+4}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1 \text{ [提示: 利用(c)的结果]}.$$

9.5. 信号  $x(t)$  的拉普拉斯变换  $X(s)$  有四个极点, 零点的个数未知。已知  $x(t)$  在  $t=0$  有一冲激, 试确定这里提供了关于零点数目及其位置的那些信息(如果有的话)。

9.6. 本题中考虑拉普拉斯变换的收敛域都包含  $j\omega$  轴。

(a) 考虑信号  $x(t)$ , 具有傅里叶变换  $X(j\omega)$  和拉普拉斯变换  $X(s)=s+1/2$ 。试画出  $X(s)$  的极点—零点图, 并画出矢量: 对给定的  $\omega$ , 矢量的长度表示  $|X(j\omega)|$ , 矢量与实轴的交角表示  $\angle X(j\omega)$ 。

(b) 通过分析(a)的极点—零点图和矢量图, 试确定一个不同的对应于时间函数  $x_1(t)$  的拉普拉斯变换  $X_1(s)$ , 使

$$|X_1(j\omega)| = |X(j\omega)|$$

而

$$x_1(t) \neq x(t)$$

试画出极点—零点图和表示  $X_1(j\omega)$  的有关矢量。

(c) 由(b)的答案, 再通过分析有关的矢量图, 确定  $\angle X(j\omega)$  和  $\angle X_1(j\omega)$  之间的关系。

(d) 试求拉普拉斯变换  $X_2(s)$ , 使

$$\angle X_2(j\omega) = \angle X(j\omega)$$

但  $x_2(t)$  与  $x(t)$  不成比例。试图示  $X_2(s)$  的极点—零点图和表示  $X_2(j\omega)$  的有关矢量。

(e) 对(d)的答案, 确定  $|X_2(j\omega)|$  和  $|X(j\omega)|$  之间的关系。

(f) 考虑信号  $x(t)$ , 具有拉普拉斯变换  $X(s)$ ,  $X(s)$  的极点—零点图如图 P9.6 所示。试求  $X_1(s)$ , 使得  $|X(j\omega)| = |X_1(j\omega)|$ , 并且  $X_1(s)$  的所有极点零点都在  $s$  平面的左半部[即  $\operatorname{Re}\{s\} < 0$ ]。还要求出  $X_2(s)$ , 使得  $\angle X(j\omega) = \angle X_2(j\omega)$ , 并且  $X_2(s)$  的所有极点零点在  $s$  平面的左半部。

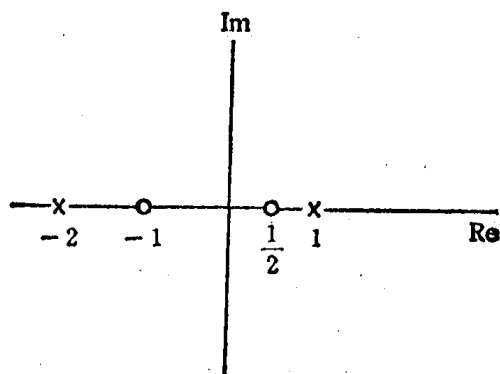


图 P9.6

9.7. 用傅里叶变换的几何确定方法(9.4节研究过的), 试对图P9.7的每个极点-零点图, 画出与傅里叶变换有关的幅度。

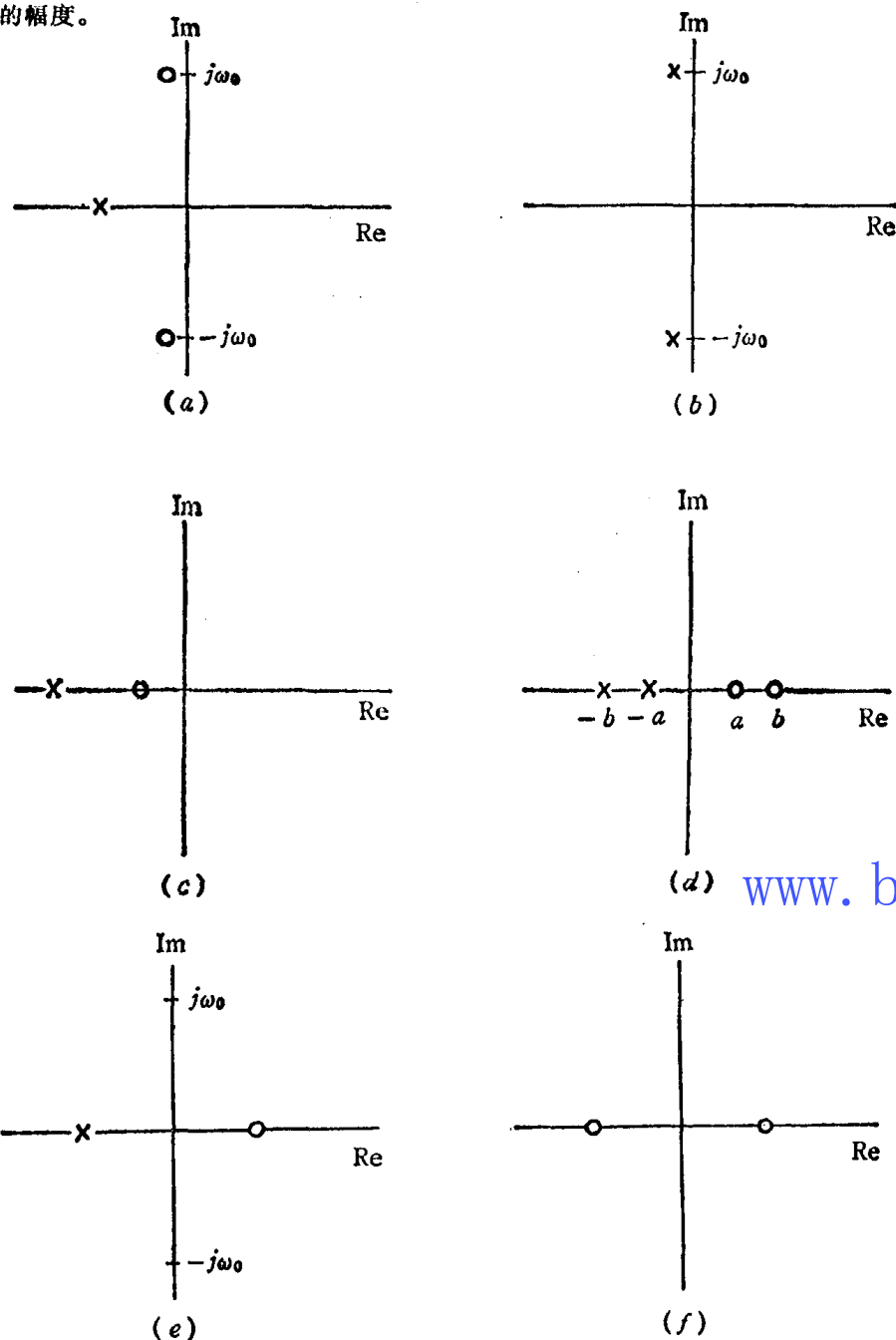


图 P9.7

9.8. 在长距离电话通讯中, 有时会碰到的回波, 是由被发射的信号在接收机处反射, 沿线送回, 在发射机处, 又被反射到接收机处。模拟这种作用的系统的冲激响应如图P9.8所示, 假设只收到一个回波, 参数 $T$ 相当于沿通信信道一个单程的传播时间, 参数 $\alpha$ 表示发射机和接收机之间幅度衰减。

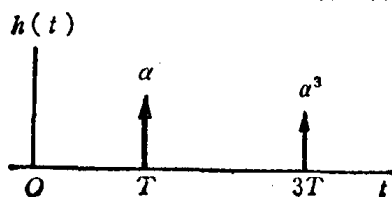


图 P9.8

- (a) 试确定此系统的系统函数  $H(s)$  及有关的收敛域。
- (b) 由(a)的结果可看到,  $H(s)$  不是由多项式之比所组成。不过, 用极点和零点来表示  $H(s)$  是有用的。与通常一样, 零点是  $H(s)=0$  时的  $s$  值, 极点是  $1/H(s)=0$  时的  $s$  值。试确定(a)中的系统函数的零点, 并论证不存在极点。
- (c) 由(b)的结果, 画出  $H(s)$  的极点—零点图。
- (d) 通过考虑  $s$  平面上适当的矢量, 画出此系统频率响应的幅度。
- 9.9. 如9.5节所指出的, 拉普拉斯变换的许多性质和性质的推导类似于对应的傅里叶变换的性质(如第4章中研究过的)。本题要求略述9.5节中几个拉普拉斯变换性质的推导。
- 通过与第4章中傅里叶变换相对应性质的推导作比较, 试导出以下每个拉普拉斯变换的性质, 推导时必须包括对收敛域的考虑。
- (a) 时间移位性质(9.5.2)。
- (b)  $s$  域移位(9.5.3)。
- (c) 时间比例尺改变(9.5.4)。
- (d) 卷积性质(9.5.5)。
- 9.10. (a) 如果  $x(t)$  是偶时间函数, 故  $x(t)=x(-t)$ , 试证明这要求  $X(s)=X(-s)$ 。
- (b) 如果  $x(t)$  是奇时间函数,  $x(t)=-x(-t)$ , 试证明:  $X(s)=-X(-s)$ 。
- (c) 试确定图 P9.10 的极点—零点图中, 哪些(如果有的话)可对应于偶时间函数, 对这些能对应的图, 指明其要求的 ROC。

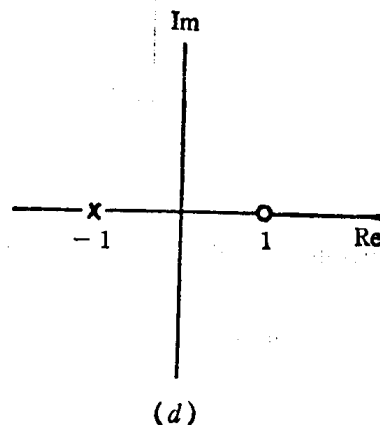
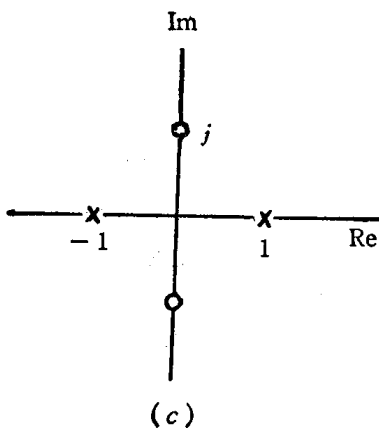
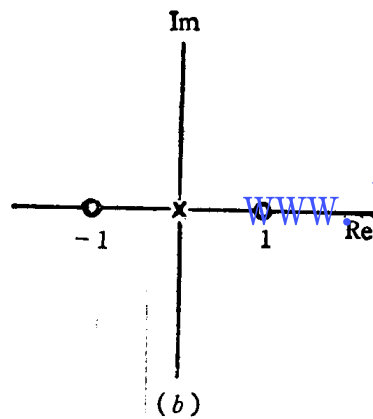
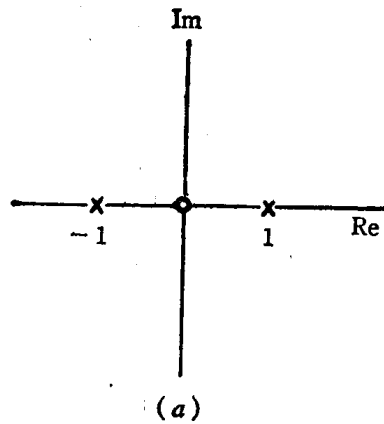


图 P9.10

- (d) 试确定图 P9.10 的极点—零点图中, 哪些(如果有的话)可对应奇时间函数, 对这些能对应的图, 表明所需的 ROC。

- 9.11. 如9.5.9节介绍的, 初值定理叙述了, 具有拉普拉斯变换  $X(s)$  的信号  $x(t)$ , 对于  $t < 0$ ,  $x(t) = 0$ ,  $x(t)$  的初值 [即  $x(0+)$ ] 可由以下关系

$$\text{【式(9.74)] } x(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

从  $X(s)$  获得。首先, 注意到, 因为  $t < 0$  时,  $x(t) = 0$ , 所以  $x(t) = x(t)u(t)$ 。然后, 把  $x(t)$  展开为在  $t=0+$  时的泰勒级数

$$\begin{aligned} x(t) = & [x(0+) + x^{(1)}(0+)t + \cdots \\ & + x^{(n)}(0+)\frac{t^n}{n!} + \cdots]u(t) \end{aligned} \quad (\text{P 9.11})$$

式中  $x^{(n)}(0+)$  表示在  $t=0+$  时算出的  $x(t)$  的  $n$  次导数。

- (a) 确定式(P 9.11)右边任意项  $x^{(n)}(0+)(t^n/n!)u(t)$  的拉普拉斯变换(可以发现, 复习例 9.11 很有帮助)。

- (b) 由(a)的结果和式(P 9.11)中的展开式, 试证明:  $X(s)$  可表达为

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(0+) \frac{1}{s^{n+1}}$$

- (c) 论证式(9.74)由(b)的结果得出。

- (d) 对以下每例, 首先确定  $x(t)$ , 然后证明初值定理:

$$1. X(s) = \frac{1}{s+2},$$

$$2. X(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

- (e) 初值定理较一般的形式叙述为: 如果  $n < N$  时,  $x^{(n)}(0+) = 0$ , 则  $x^{(N)}(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{N+1}X(s)$ 。试证明这更为一般的叙述也由(b)的结果得出。

- 9.12. 考虑一个具有拉普拉斯变换  $X(s)$  的实值信号  $x(t)$ 。

- (a) 对式(9.37)两边求复共轭, 试证明  $X(s) = X^*(s^*)$ 。

- (b) 由(a)的结果, 试证明: 如果  $X(s)$  在  $s=s_0$  处有一极点(零点), 则在  $s=s_0^*$  处也一定有一极点(零点), 即当  $x(t)$  为实数时, 不在实轴上的  $X(s)$  的极点和零点一定成共轭对出现。

- 9.13. 9.6节的表9.2中, 列出了一些拉普拉斯变换对, 并特别指出了怎样由例9.1和9.11加上表9.1的各种性质得到变换对1至9。

通过利用表9.1中适当的性质, 证明变换对10至14怎样由表9.2中的变换对1至9中得出。

- 9.14. 考虑一个 LTI 系统, 其系统函数  $H(s)$  的极点—零点图如图 P 9.14 所示。

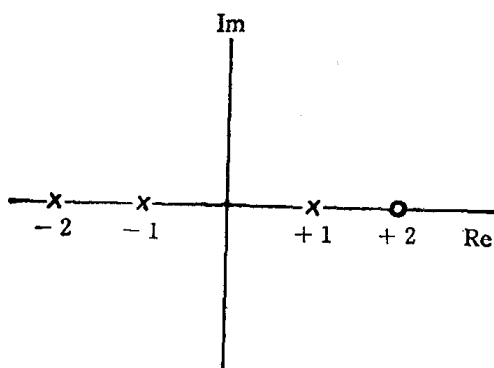


图 P 9.14

- (a) 试表明与此极点—零点图有关的所有可能的 ROC。

- (b) 对于(a)中确定的每个 ROC, 指明有关的系统是稳定的和/或因果的。

- 9.15. 考虑一个 LTI 系统, 其输入  $x(t) = e^{-t}u(t)$ , 冲激响应  $h(t) = e^{-2t}u(t)$ 。

- (a) 确定  $x(t)$  和  $h(t)$  的拉普拉斯变换。

- (b) 利用卷积性质确定输出  $y(t)$  的拉普拉斯变换  $Y(s)$ 。
- (c) 由在 (a) 获得的  $y(t)$  的拉普拉斯变换, 确定  $y(t)$ 。
- (d) 通过直接把  $x(t)$  和  $y(t)$  卷积, 证明 (b) 的结果。
- 9.16. 压力计可被模拟为一个 LTI 系统, 它对单位阶跃输入的时间响应由  $(1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$  给定。对于某一未知输入  $x(t)$ , 观察到输出为  $(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ 。
- 由观察到的这一测量, 确定输入到压力计作为时间函数的真正压力输入。
- 9.17. 可定义 LTI 系统  $H(s)$  的逆系统为: 当它与  $H(s)$  级联时, 产生单位总传递函数, 或等价地, 产生的总冲激响应是一个冲激。
- (a) 如果  $H_1(s)$  表示  $H(s)$  逆系统的传递函数, 试确定  $H(s)$  和  $H_1(s)$  之间的一般代数关系。
- (b) 一个稳定、因果系统  $H(s)$  的极点—零点图如图 P 9.17 所示。试确定有关逆系统的极点—零点图。

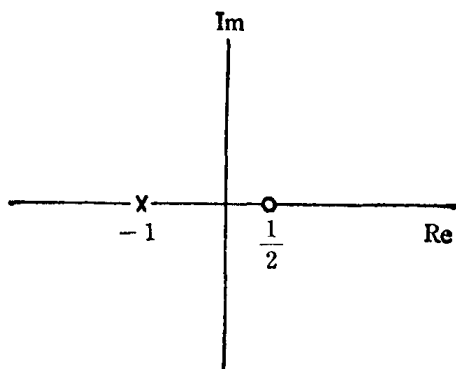


图 P 9.17

- (c) 如设逆系统是稳定的, 试确定它的冲激响应  $h_1(t)$ 。
- (d) 通过直接把  $h(t)$  与  $h_1(t)$  [(c) 中确定的] 卷积, 证明两个系统级联的冲激响应是一个冲激。
- 9.18. 有时可用以下叙述来定义被称为最小延时或最小相位的系统: 这些系统是因果的和稳定的, 且逆系统也是因果的和稳定的。
- 试提出一种论证, 用以证明在以上定义的基础上, 最小延时系统传递函数的所有极点和零点一定在  $s$  平面左半部 [即  $\text{Re}\{s\} < 0$ ]。
- 9.19. 试确定以下关于 LTI 系统的每个叙述是否正确。如叙述是正确的, 试给出使人信服的论证。如叙述是错误的, 用一个反例来说明。
- 叙述 1 一个稳定的连续时间系统, 其所有极点一定在  $s$  平面左半部 [即  $\text{Re}\{s\} < 0$ ]。
- 叙述 2 如果系统函数的极点多于零点, 并且系统是因果的, 则阶跃响应在  $t=0$  处连续。
- 叙述 3 如果系统函数的极点多于零点, 且系统不限定是因果的, 则在  $t=0$  处, 阶跃响应可能不连续。
- 叙述 4 一个稳定、因果的系统, 它的所有极点和零点一定在  $s$  平面的左半部。
- 9.20. 定义信号  $x(t)$  的自相关函数  $\phi_{xx}(\tau)$  为

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau) dt$$

- (a) 当一个 LTI 系统输入为  $x(t)$  时, 输出为  $\phi_{xx}(t)$  (图 P 9.20—1), 试确定此 LTI 系统用  $x(t)$  表示的冲激响应  $h(t)$ 。

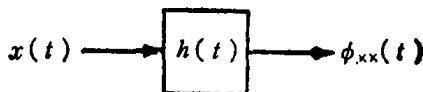


图 P 9.20—1



(b) 由(a)的答案, 试确定用  $X(s)$  表示的  $\phi_{xx}(\tau)$  的拉普拉斯变换  $\Phi_{xx}(s)$ , 再用  $X(j\omega)$  表示  $\phi_{xx}(\tau)$  的傅里叶变换  $\Phi_{xx}(j\omega)$ 。

(c) 如果  $x(t)$  的极点—零点图和 ROC 如图 P 9.20—2 所示, 试画出  $\phi_{xx}(\tau)$  的极点—零点图, 并表明 ROC。

9.21. 在信号设计和分析的一些应用中, 要碰到的一类信号  $\phi_n(t)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , 它由以下关系来定义:

$$\phi_n(t) = e^{-t/2} L_n(t) u(t), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (\text{P 9.21a})$$

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}). \quad (\text{P 9.21b})$$

(a) 事实上, 函数  $L_n(t)$  是多项式, 被称为拉盖尔多项式。为了证实它们具有多项式的形式, 试直接求出  $L_0(t)$ ,  $L_1(t)$  和  $L_2(t)$ 。

(b) 试利用表 9.1 拉普拉斯变换的性质和表 9.2 拉普拉斯变换对, 确定  $\phi_n(t)$  的拉普拉斯变换  $\Phi_n(s)$ 。

(c) 信号集  $\phi_n(t)$  可以图 P 9.21 形式的网络用冲激响应来激励产生。由(b)的结果, 试确定  $H_1(s)$  和  $H_2(s)$ , 使得沿着级联链形结构的冲激响应是所指的信号  $\phi_n(t)$ 。

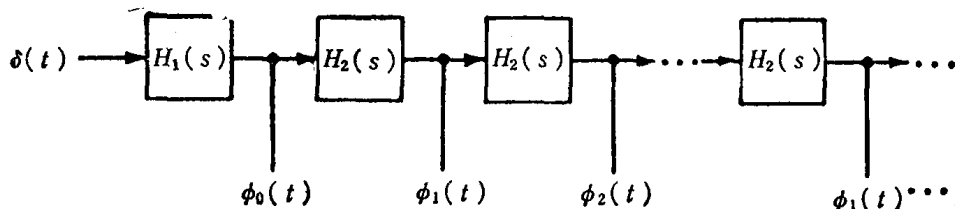


图 P 9.21

9.22. 考虑一个 LTI 系统, 对此系统给出以下的信息:

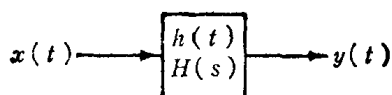


图 P 9.22—1

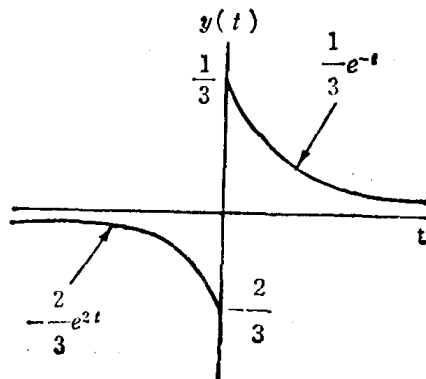


图 P 9.22—2

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2},$$

$$x(t) = 0, \quad t > 0,$$

及

$$y(t) = -\frac{2}{3} e^{2t} u(-t) + \frac{1}{3} e^{-t} u(t).$$

(a) 确定  $H(s)$  及其收敛域。

(b) 确定  $h(t)$ 。

(c) 如果输入  $x(t)$  是

$$x(t) = e^{3t}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

试利用(a)求出的系统函数  $H(s)$ , 确定输出  $y(t)$ 。

9.23. 考虑一个连续时间 LTI 系统, 其输入  $x(t)$  和输出  $y(t)$  由下列微分方程联系:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

设  $X(s)$  和  $Y(s)$  表示  $x(t)$  和  $y(t)$  的拉普拉斯变换, 设  $H(s)$  表示系统冲激响应  $h(t)$  的拉普拉斯变换。

(a) 试求  $H(s)$ ,  $H(s)$  为  $s$  的多项式之比, 画出  $H(s)$  的极点-零点图。

(b) 对以下三种情况中的每一种, 试确定  $h(t)$ :

1. 系统是稳定的;
2. 系统是因果的;
3. 系统既不稳定也不因果。

9.24. 具有冲激响应  $h(t)$  的因果线性时不变系统有以下性质:

1. 当系统的输入  $x(t) = e^{2t}$  (对所有  $t$ ) 时, 输出  $y(t) = \left(\frac{1}{6}\right)e^{2t}$  (对所有  $t$ );

2. 冲激响应  $h(t)$  满足微分方程

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = (e^{-4t})u(t) + bu(t)$$

式中  $b$  是未知常数。

试求符合以上条件的系统的系统函数  $H(s)$ 。答案中不应有未知常数, 即常数  $b$  应不出现在答案中。

9.25.  $H(s)$  表示一个因果、稳定系统的系统函数。系统输入由三项之和组成。其中之一是冲激  $\delta(t)$ , 其他的是复指数  $e^{s_0 t}$  形式。这里  $s_0$  是复常数。输出是

$$y(t) = -6e^{-t}u(t) + \frac{4}{34}e^{4t} \cos 3t + \frac{18}{34}e^{4t} \sin 3t + \delta(t)$$

试确定符合以上情况的  $H(s)$ 。

9.26. 信号

$$y(t) = u(t)e^{-2t}$$

是因果全通系统的输出, 此系统的系统函数是

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

(a) 至少求出和画出能产生以上输出的两个可能的输入  $x(t)$ 。

(b) 如果已知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

输入是什么?

(c) 如果已知当  $y(t)$  是输入时, 将有  $x(t)$  为输出的这样一个稳定(但不必是因果的)系统的存在。问: 输入  $x(t)$  是什么? 试求这个滤波器的冲激响应  $h(t)$ , 且通过直接卷积证明它所具有的性质, 即

$$y(t) * h(t) = x(t)$$

9.27. 一个因果 LTI 系统的系统函数  $H(s)$  由下式给出

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

当输入  $x(t)$  由下式给出时,

$$x(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty < t < \infty$$

试确定和画出  $y(t)$ 。

9.28. 如在第 6 章中讨论过的, 在滤波器设计中, 把低通滤波器的设计转为高通滤波器的设计, 常常是可能和方便的。反之亦然。用  $H(s)$  表示原滤波器的传递函数, 用  $G(s)$  表示变换后滤波器的传递函

数。一种通常使用的变换是用  $1/s$  代替  $s$ ，即

$$G(s) = H\left(\frac{1}{s}\right)$$

(a) 对于  $H(s) = 1/\left(s + \frac{1}{2}\right)$ ，试画出  $|H(j\omega)|$  和  $|G(j\omega)|$ 。

(b) 试确定与  $H(s)$  和  $G(s)$  有关的线性常系数微分方程。

(c) 现在考虑更一般的情况，在这种情况下， $H(s)$  是与以下一般形式线性常系数微分方程有关的传递函数

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (\text{P 9.28})$$

不失一般性，可假设方程两边导数的数目  $N$  是相同的（虽然在任何特定的情况中，有的系数也许为零），试求  $H(s)$  和  $G(s)$ 。

(d) 试用 (c) 的结果，以式 (P 9.28) 的系数表示，确定与  $G(s)$  有关的线性常系数微分方程。

9.29. 考虑一般的连续时间系统，输入  $x(t)$ ，输出  $y(t)$ 。下面列出的是几个可能的输入—输出性质：

1.  $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$ ，对任何  $t_0$ ；

2.  $kx(t) \rightarrow ky(t)$ ，对任何  $k$ ；

3.  $\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \frac{dy(t)}{dt}$ ；

4.  $e^{at} \rightarrow H(s)e^{at}$ 。

对以上四种性质的每一种，试指明，它对以下的各种情况通常是否正确：

(a) 每一个线性系统；(b) 每一个时不变系统；(c) 每一个 LTI 系统；(d) 每一个系统。

9.30.  $B(s)$  表示  $N$  阶巴特沃兹滤波器的传递函数，截止频率为  $\omega_c$ 。

(a) 对  $\omega_c = 2\pi \times 10^3$  和

1.  $N=4$ ，

2.  $N=5$ ，

画出  $B(s)$  的极点—零点图。

(b) 对 (a) 的两种情况用代数式表达  $B(s)$ 。

(c) 对  $\omega_c = 2\pi \times 10^3$  和  $N=4$ ，试求与  $B(s)$  有关的微分方程。

9.31. 如果  $\tilde{X}(s)$  表示  $x(t)$  的单边拉普拉斯变换，试用  $\tilde{X}(s)$  表示以下各式的单边拉普拉斯变换。

(a)  $x(t-1)$ ；

(b)  $x(t+1)$ ；

(c)  $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ ；

(d)  $\frac{d^3 x(t)}{dt^3}$ 。

9.32. (a) 对图 P 9.32 的 RLC 线路，试求与  $v_i(t)$  和  $v_o(t)$  有关的微分方程。

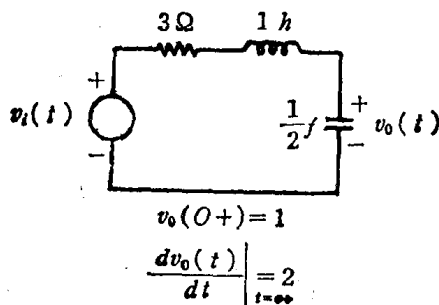


图 P 9.32

(b) 设  $v_i(t) = e^{-3t}u(t)$ ，利用单边拉普拉斯变换，试求  $t > 0$  时的  $v_o(t)$ 。

## 第十章 $z$ 变 换

### 10.0 引 言

第9章讨论了拉普拉斯变换,它是连续时间傅里叶变换的一种推广。促使这一推广的部分原因,是由于适合拉普拉斯变换的信号种类比傅里叶变换的更广泛,因为对于许多信号,傅里叶变换不收敛,而拉普拉斯变换却是收敛的。与傅里叶变换的情况一样,拉普拉斯变换是在分析 LTI 系统对复指数输入的响应时自然出现的。此外,正如我们已经看到的那样,拉普拉斯变换具有许多和傅里叶变换相同的性质,所以在连续时间 LTI 系统分析中,它是一种有效的工具。

这一章研究  $z$  变换,这是拉普拉斯变换在离散时间中的对应变换,也是离散时间傅里叶变换的相应推广。我们会看到,促使这种推广的原因以及  $z$  变换的性质,完全类似于拉普拉斯变换的相应情况。然而,正如连续时间和离散时间傅里叶变换之间的关系一样,  $z$  变换和拉普拉斯变换之间,也存在着一些重大的差别,这些差别是由连续时间和离散时间信号与系统之间的根本区别所引起的。

### 10.1 $z$ 变 换

如在5.1节中所见,一个具有冲激响应  $h[n]$  的离散时间线性时不变系统,对复指数输入  $z^n$  的响应为

$$y[n] = H(z)z^n \quad (10.1)$$

式中

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \quad (10.2)$$

当  $z = e^{j\Omega}$ , 且  $\Omega$  为实数 (即,  $|z|=1$ ) 时,式 (10.2) 的求和相当于  $h[n]$  的离散时间傅里叶变换。更一般地,当  $|z|$  不限定为 1 时,式 (10.2) 的求和就称为  $h[n]$  的  $z$  变换。正如连续时间和离散时间信号的傅里叶变换以及连续时间情况下的拉普拉斯变换那样,  $z$  变换一般作为应用于序列的一种变换是有重要作用的,而不管这些序列是否代表系统的冲激响应。

一个序列  $x[n]$  的  $z$  变换定义为

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (10.3)$$

式中  $z$  是复变量。这种形式的  $z$  变换通常称为双边  $z$  变换,以便把它和单边  $z$  变换区别开,单边  $z$  变换在10.9节中讨论。我们把式 (10.3) 所定义的  $X(z)$  简称为  $z$  变换,只是在需要避免混淆的场合才使用“双边”这一术语。为了方便起见,有时将  $x[n]$  的  $z$  变换表示为  $z\{x[n]\}$ ,并且将  $x[n]$  和其  $z$  变换之间关系表示为

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad (10.4)$$

在第9章中,我们曾讨论了连续时间信号情况下,拉普拉斯变换和傅里叶变换之间的一些重要关系。类似的但不是完全相同的方式,  $z$  变换和傅里叶变换之间也有一些重要的关系。为了研究这些关系,我们把复变量  $z$  用极坐标形式表示为

$$z = re^{j\Omega} \quad (10.5)$$

式中  $r$  为  $z$  的模,  $\Omega$  为  $z$  的相位。用  $r$  和  $\Omega$  表示,式(10.3)就变成

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n}$$

或等效为

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\Omega n} \quad (10.6)$$

由式(10.6)可以看出,  $X(re^{j\Omega})$  就是序列  $x[n]$  乘上一个实指数  $r^{-n}$  后的傅里叶变换,即,

$$X(re^{j\Omega}) = F\{x[n]r^{-n}\} \quad (10.7)$$

指数加权  $r^{-n}$  可以随着  $n$  的增加而衰减或者增大,这取决于  $r$  值是否大于或小于1。特别应该指出的是,  $r=1$  或等效为  $|z|=1$  时,  $z$  变换就转化为傅里叶变换,即,

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = F\{x[n]\} \quad (10.8)$$

离散时间信号的  $z$  变换和傅里叶变换之间的关系,十分类似于9.1节中对连续时间信号的相应讨论,但也有一些重大的差别。在连续时间情况下,当变换变量的实部等于零时,拉普拉斯变换转化为傅里叶变换。用  $s$  平面来说明时,这表示在虚轴(即,  $s=j\omega$ )上的拉普拉斯变换转化为傅里叶变换。作为对比,当变换变量  $z$  的模等于1(即,  $z=e^{j\Omega}$ )时,  $z$  变换转化为傅里叶变换。因此,  $z$  变换在复数  $z$  平面的一个围线上转化为傅里叶变换,这一围线相当于图10.1所表示的半径为1的圆。 $z$  平面上的这个圆称为单位圆,并且在  $z$  变换的讨论中,它起着类似于  $s$  平面中虚轴在拉普拉斯变换中的作用。由于  $z$  变换和傅里叶变换的这种关系,在这里是方便的,只要把代表离散时间傅里叶变换的符号作一简单改变。具体说,为了强调在  $z=e^{j\Omega}$  时,傅里叶变换等于  $z$  变换这一事实,现在我们用  $e^{j\Omega}$  来表示与离散时间傅里叶变换有关的独立变量,而不是简单地用  $\Omega$  来表示。由于符号的这种改变,我们亦可以把式(10.8)表示为

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = F\{x[n]\} = X(e^{j\Omega}) \quad (10.9)$$

从式(10.7)看出,为了使  $z$  变换收敛,要求  $x[n]r^{-n}$  的傅里叶变换也收敛。对于任何一个具体的序列  $x[n]$  来说,我们总是希望这种收敛是针对  $r$  的某些值。通常,有一个与序列的  $z$  变换有关,且使  $X(z)$  收敛的  $z$  值范围。与拉普拉斯变换时一样,这个  $z$  值的范围称为收敛域(ROC)。如果 ROC 包括单位圆,那么傅里叶变换也是收敛的。为了说明  $z$  变换及其有关的收敛域,我们来研究几个例子。

例10.1 设信号  $x[n]=a^n u[n]$ 。根据式(10.3),

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

为使  $X(z)$  收敛,要求  $\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$ 。因此,收敛域就是满足  $|az^{-1}| < 1$  或等效于  $|z| > |a|$  时的  $z$  值范围,则,

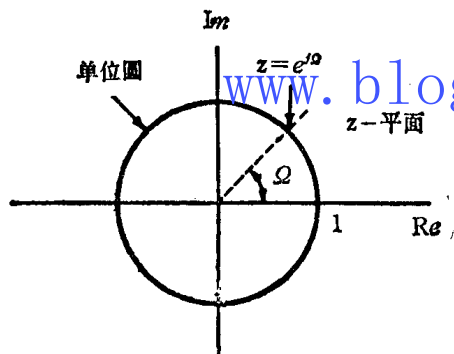


图10.1 复数  $z$  平面。对应单位圆上的  $z$  值,  $z$  变换转化为傅里叶变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a| \quad (10.10)$$

因此,  $a$  为任何有限值时,  $z$  变换收敛。另一方面,  $x[n]$  的傅里叶变换仅当  $|a| < 1$  时收敛。当  $a=1$  时,  $x[n]$  是单位阶跃序列, 其  $z$  变换为

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

可见, 例10.1的  $z$  变换是一个有理函数。因而, 正如有理的拉普拉斯变换一样,  $z$  变换可用它的零点(分子多项式的根)和极点(分母多项式的根)来表征。对于上述例子来说, 在  $z=0$  处有一个零点, 而在  $z=a$  处有一个极点。图10.2表示了例10.1的极点—零点图和收敛域。当  $|a| > 1$  时, ROC 不包括单位圆, 这与  $a^n[n]$  的傅里叶变换在这些  $a$  值时不收敛的事实相符。

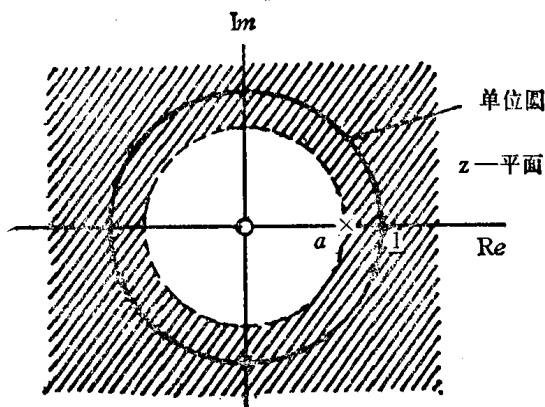


图10.2 例10.1的极点—零点图和收敛域

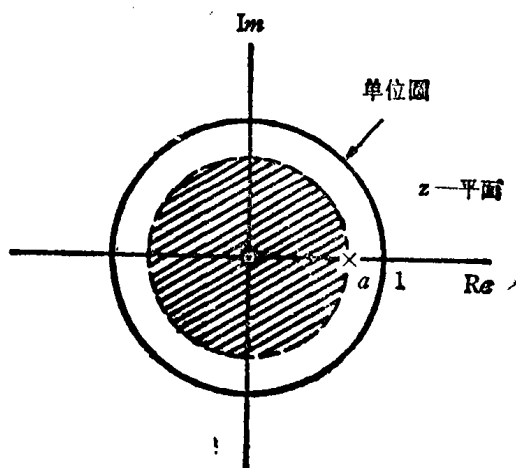


图10.3 例10.2的极点—零点图和收敛域

例10.2 现在令  $x[n] = -a^n u[-n-1]$ , 则,

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n \end{aligned} \quad (10.11)$$

如果  $|a^{-1}z| < 1$  或等效于  $|z| < |a|$ , 那么式(10.11)中的和收敛, 并且

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad (10.12)$$

这个例子的极点—零点图和收敛域如图10.3所示。

比较式10.10和式10.12, 以及图10.2和图10.3, 可以看出, 例10.1和例10.2中  $X(z)$  的代数表达式及相应的极点—零点图是相同的, 而不同的仅是  $z$  变换的收敛域。因此, 正如拉普拉斯变换那样,  $z$  变换需要由代数表达式和收敛域这两者来描述。此外, 在这两个例子中, 序列都是指数形式, 并且得到的  $z$  变换都是有理的。实际上, 如同下面例子进一步提供的, 每当  $x[n]$  是实指数或复指数的线性组合时,  $X(z)$  总是有理的。

例10.3 研究两个实指数之和的信号:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (10.13)$$

则  $z$  变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \quad (10.14)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{2 - \left(\frac{5}{6}\right) z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{z \left(2z - \frac{5}{6}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right)} \quad (10.15)$$

为使  $X(z)$  收敛, 式 (10.14) 中的两项和必须收敛, 这就要求  $\left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1$  和  $\left|\frac{1}{3} z^{-1}\right| < 1$  或者等效为  $|z| > \frac{1}{2}$  和  $|z| > \frac{1}{3}$ 。因此, 其收敛域是  $|z| > \frac{1}{2}$ 。

上述例子的  $z$  变换也可以利用例10.1的结果来获得。具体说, 根据  $z$  变换的定义〔式 (10.3)〕, 可以看出,  $z$  变换是线性的, 即, 如果  $x[n]$  是两项之和, 那么,  $X(z)$  将为  $x[n]$  中各项  $z$  变换之和, 并且当这两项的  $z$  变换收敛时,  $X(z)$  也将收敛。由例10.1看出,

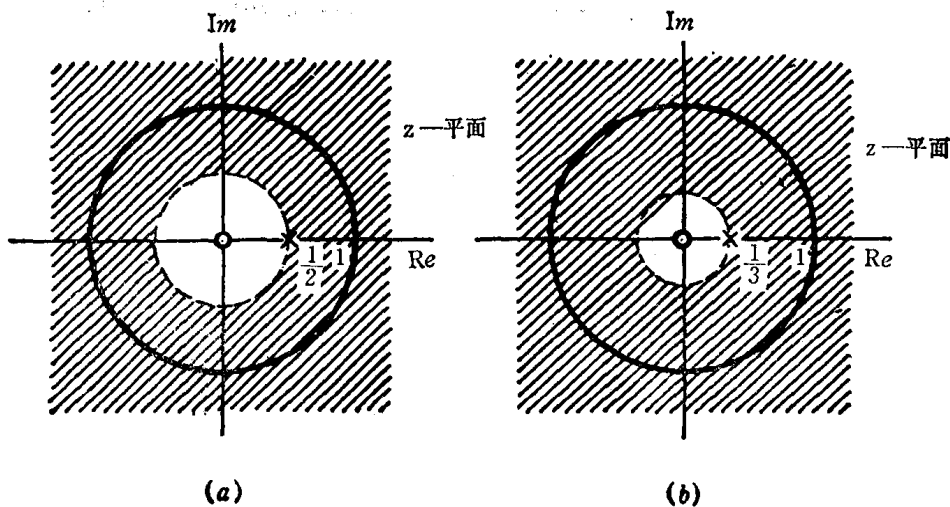
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (10.16)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (10.17)$$

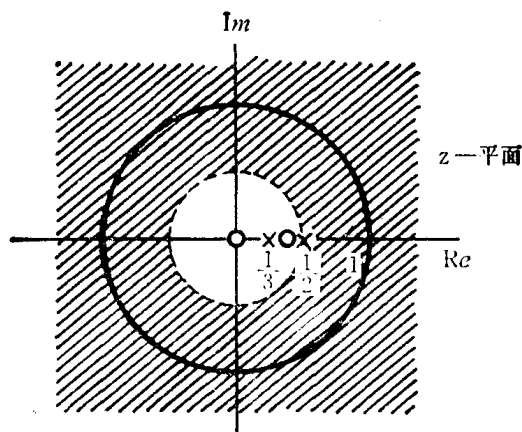
因此,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (10.18)$$

这就是上面所得的结果。图10.4表示组合信号及其每一项  $z$  变换的极点—零点图和 ROC。







(c)

图10.4 例10.3中每一项及其和的极点—零点图和收敛域: (a)  $1/(1-\frac{1}{2}z^{-1})$ ,  $|z|>1/2$ ;  
(b)  $1/(1-\frac{1}{3}z^{-1})$ ,  $|z|>1/3$ ; (c)  $1/(1-\frac{1}{2}z^{-1})+1/(1-\frac{1}{3}z^{-1})$ ,  $|z|>1/2$

以上三例中，我们都用  $z$  多项式之比以及用  $z^{-1}$  多项式之比两种方式来表示  $z$  变换。从式 (10.3) 给出的  $z$  变换定义形式可见，对于当  $n<0$  时为零的序列来说， $X(z)$  仅包含  $z$  的负次幂。因此，对于这类信号，用  $z^{-1}$  多项式来表示  $X(z)$ ，就显得特别方便。同时，在适当场合，我们的讨论将采用这种形式。当以  $(1-az^{-1})$  因子表示  $z$  变换时，应记住这个因子既引入了一个极点又引入了一个零点，如在前面例子中用代数表达式所表明的那样。

## 10.2 $z$ 变换的收敛域

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

在第9章，我们已看到，对不同类型信号的拉普拉斯变换，其收敛域具有各种性质和特定限制，理解了这些性质和限制，会使我们对拉普拉斯变换有更深刻的认识。按照类似方法，我们来研究  $z$  变换收敛域的若干性质。下面讨论的每一个性质和它的证明，完全类似于9.2节中相应性质的证明。

性质1:  $X(z)$  的 ROC 由  $z$  平面上以原点为中心的一个圆环组成。

这个性质表示在图10.5中，并且是根据以下的事实得来，即 ROC 由  $z=re^{j\Omega}$  的这些值组成，其  $x[n]r^{-n}$  具有收敛的傅里叶变换。因而，收敛仅仅取决于  $r=|z|$ ，而不取决于  $\Omega$ 。因此，如果  $z$  的一个特定值在 ROC 内，那么同一圆上所有  $z$  值（即，具有相同的模）也在 ROC 内。这样显然保证了 ROC 将由同心环组成。正如在性质6中将要看到的那样，实际上 ROC 必定由唯一的单个环组成。在某些情况下，ROC 的内边界可以向内延伸到原点，这样，ROC 就变成一个圆盘和/或 ROC 的外边界可以向外延伸到无限远。

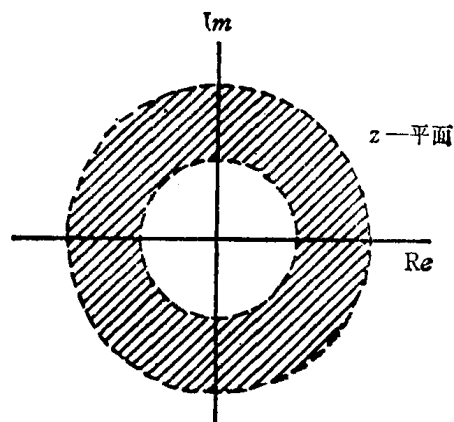


图10.5 ROC 视为  $z$  平面上的一个环。对特定情况，内边界可以向内延伸到原点，这时，ROC 变成一个圆盘。对特定情况，其外边界可以延伸到无限远



性质 2：ROC 不包含任何极点。

正如拉普拉斯变换那样，这个性质简单地就是下面事实的结果，即， $X(z)$  在极点处为无穷大，因此，根据定义， $X(z)$  不收敛。

性质 3：如果  $x[n]$  是有限时宽，那末 ROC 是整个  $z$  平面，可能不包括  $z=0$  和/或  $z=\infty$ 。

一个有限时宽序列仅具有有限个非零值，也就是说，从  $n=N_1$  扩展到  $n=N_2$ ，其中  $N_1$  和  $N_2$  是有限值。因此， $z$  变换  $X(z)$  是有限项之和，具体说

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (10.19)$$

当  $z$  不等于零或无穷大时，总和中每一项将是有限的，因此， $X(z)$  将收敛。如果  $N_1$  为负和  $N_2$  为正，在  $n < 0$  和  $n > 0$  两种情况下，使得  $x[n]$  具有非零值，那末式 (10.19) 的求和应该包括  $z$  的正幂次项和  $z$  的负幂次项。当  $|z| \rightarrow 0$  时，含有  $z$  的负幂次的这些项变成无界；当  $|z| \rightarrow \infty$  时，那些包含  $z$  的正幂次项变成无界。因此，在  $N_1$  为负和  $N_2$  为正的情况下，ROC 不包括  $z=0$  或  $z=\infty$ 。如果  $N_1$  是零或为正，则式 (10.19) 中只有  $z$  的负幂次项，因此 ROC 含有  $z=\infty$ 。如果  $N_2$  是零或为负，式 (10.19) 只有  $z$  的正幂次项，因此 ROC 含有  $z=0$ 。

性质 4：如果  $x[n]$  是一个右边序列，并设圆  $|z|=r_0$  在 ROC 内，那末所有  $|z| > r_0$  的  $z$  有限值亦在 ROC 内。

这一性质的证明与 9.2 节中的性质 4 相同。右边序列就是  $n$  在某值（比方说  $N_1$ ）以前等于零的序列。如果圆  $|z|=r_0$  在 ROC 内，那末  $x[n]r_0^{-n}$  是绝对可和的，或者等效为  $x[n]r_0^{-n}$  的傅里叶变换是收敛的。由于  $x[n]$  是右边序列，所以， $x[n]$  乘上一个随着  $n$  增加

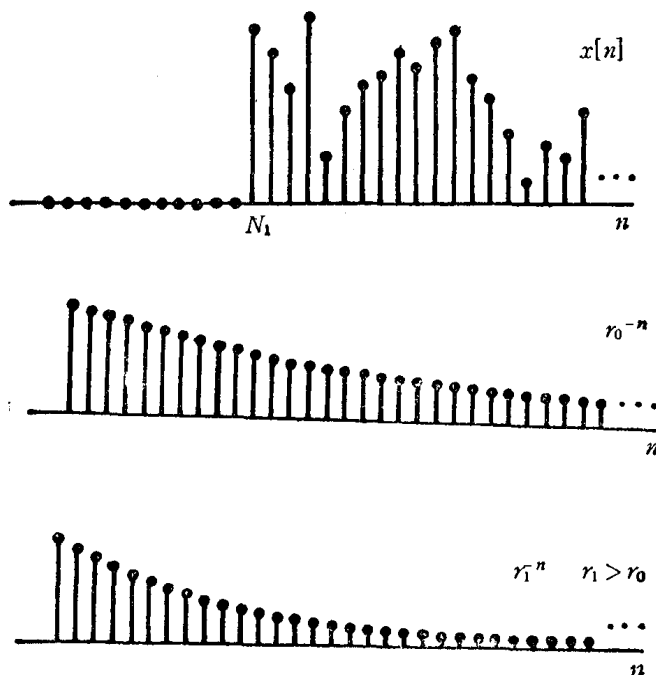


图10.6  $r_1 > r_0$  时，随着  $n$  增加， $x[n]r_1^{-n}$  比  $x[n]r_0^{-n}$  衰减得较快。由于  $n < N_1$  时， $x[n]=0$ ，这就意味着，如果  $x[n]r_0^{-n}$  绝对可和，则  $x[n]r_1^{-n}$  也将绝对可和

而衰减比  $r_0^{-n}$  快的任何实指数序列时, 也将是绝对可和的。具体说, 如同图10.6说明的, 这种更快衰减的指数序列将进一步衰减  $n$  为正值时的序列值, 同时也不会导致  $n$  为负值时序列值变为无界, 这是因为  $n < N_1$  时,  $x[n]z^{-n} = 0$ 。更完整的论证十分类似于9.2节拉普拉斯变换中性质4的论证, 并留在习题10.3中作为一个练习。

一般, 对于右边序列, 式(10.3)写成下面形式

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (10.20)$$

式中  $N_1$  是有限值, 可以正或负。如果  $N_1$  是负的, 那末当  $|z| \rightarrow \infty$  时, 式(10.20)的求和中含有  $z$  的正幂次项就变成无界。因此, 通常对于右边序列, 其 ROC 将不包含无限远点。然而, 对于因果序列<sup>①</sup> 那样的特定类别,  $N_1$  将是正的, 因此 ROC 将延伸到无限远。

性质5: 如果  $x[n]$  是左边序列, 并设圆  $|z| = r_0$  在 ROC 内, 则所有  $0 < |z| < r_0$  的  $z$  值也在 ROC 内。

这个性质又一次完全类似于拉普拉斯变换的相应性质, 其论证和直观概念类似于性质4, 在习题10.3中将考虑它的正规证明。一般, 对于左边序列, 根据式(10.3),  $z$  变换的求和将为如下形式

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (10.21)$$

式中  $N_2$  可正可负。如果  $N_2$  是正的, 那末式(10.21)含有  $z$  的负幂次项, 当  $|z| \rightarrow 0$  时, 它就变成无界的了。因此, 对于左边序列, 通常 ROC 将不包括  $z=0$ 。对逆因果(即,  $n \geq 0$  时,  $x[n] = 0$ , 这样式(10.21)中的  $N_2$  小于或等于零)的特殊左边序列来说, 其 ROC 将含有  $z=0$ 。

性质6: 如果  $x[n]$  是双边序列, 并设圆  $|z| = r_0$  在 ROC 内, 则 ROC 由  $z$  平面上包括圆  $|z| = r_0$  的一个圆环构成。

正如9.2节中性质6那样, 我们可以通过把  $x[n]$  表示为左边信号和右边信号之和的方法来分析双边信号的 ROC。右边分量的 ROC 是一个内侧以一个圆为界, 并且向外延伸到(可能包含)无限远的区域。而左边分量的 ROC 是外侧以一个圆为界, 并向内延伸, 并可能包括原点的区域。组合信号的 ROC 就是这两个区域的交叉部分。如图10.7说明的, 重叠部分(假设存在)就是  $z$  平面上的一个圆环。

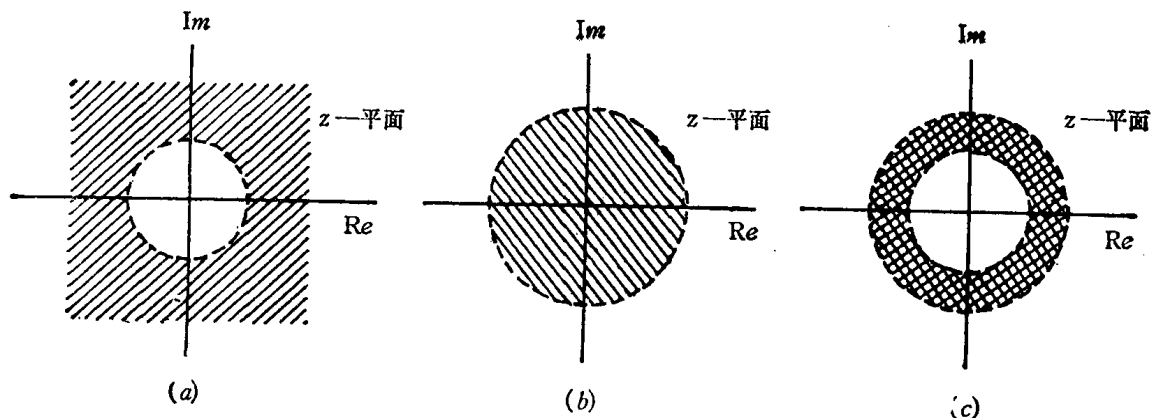


图10.7 (a) 右边序列的 ROC; (b) 左边序列的 ROC; (c) (a)、(b) 中 ROC 的交叉部分表示双边序列的 ROC, 该双边序列即为右边序列和左边序列之和

<sup>①</sup>如果一个信号相当于因果系统的冲激响应, 那末该信号就称为因果信号, 即,  $t < 0$  (连续时间) 或  $n < 0$  (离散时间) 时, 这个信号为零。

我们用几个十分类似于例9.5和例9.6的例子来说明上述性质。

例10.4 研究下列信号

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, a > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n \\ &= \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \end{aligned} \quad (10.22)$$

由于  $x[n]$  是有限长度, 根据性质 3, ROC 包括整个  $z$  平面, 可能不含原点和/或无限远点。实际上, 根据性质 3 的讨论知道, 由于  $n < 0$  时  $x[n]$  为零, 所以 ROC 将延伸到无限远。然而, 由于  $n$  的某些正值引起  $x[n]$  不等于零, 所以 ROC 将不包括原点。从式 (10.22) 明显地看到, 在  $z=0$  处有一个  $N-1$  阶极点。分子多项式的  $N$  个根在

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (10.23)$$

处。  $k=0$  处的根抵消了  $z=a$  处的极点。因此, 除了原点处极点之外没有别的极点。留下的零点在

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k=1, \dots, N-1 \quad (10.24)$$

处, 图10.8表示其极点—零点图。

例10.5 令

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0 \quad (10.25)$$

图 10.9 表示  $b < 1$  和  $b > 1$  两种情况时的序列。这个双边序列的  $z$  变换, 可以通过把它表示为右边序列和左边序列之和来获得。具体说,

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1] \quad (10.26)$$

根据例10.1,

$$b^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b \quad (10.27)$$

根据例10.2,

$$b^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b} \quad (10.28)$$

图10.10 (a)~(d)中, 示出了  $b > 1$  和  $b < 1$  时, 式 (10.27) 和式 (10.28) 的极点—零点图和 ROC。  $b > 1$  时, 没有共同的 ROC, 因此式 (10.25) 的序列不存在  $z$  变换, 即使右边分量和左边分量可以各自单独进行  $z$  变换。而  $b < 1$  时, 式 (10.27) 和式 (10.28) 的 ROC 重叠, 因此组合序列的  $z$  变换为

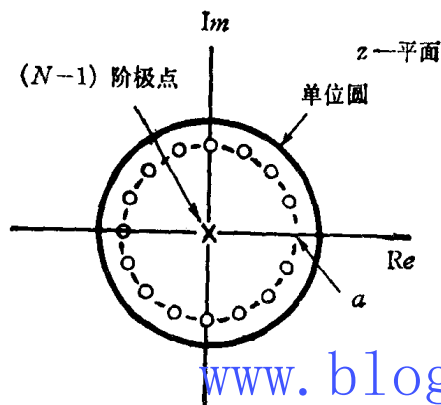


图10.8 例10.4中  $N=16$  时的极点—零点图。这个例子的收敛域包括除  $z=0$  之外所有  $z$  值

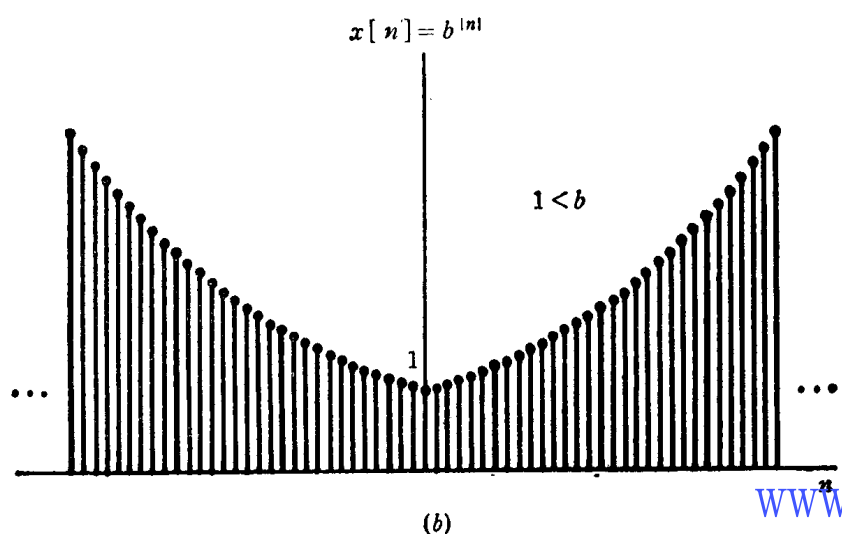
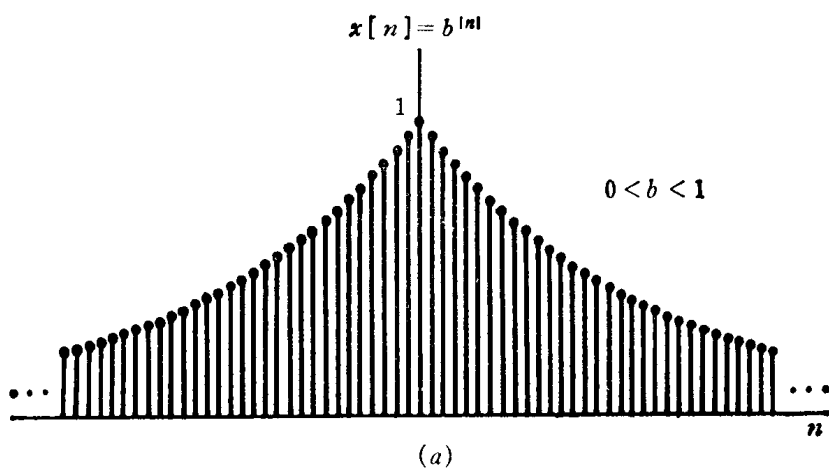


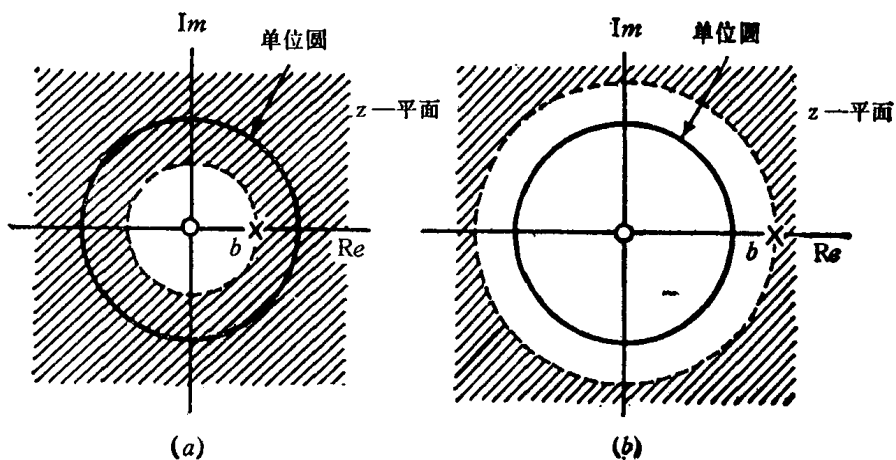
图10.9 对于  $|b| < 1$  和  $|b| > 1$  的序列  $x[n] = b^{|n|}$ , (a)  $b = 0.95$ , (b)  $b = 1.05$

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad b < |z| < \frac{1}{b} \quad (10.29)$$

或等效为

$$X(z) = \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z - b)(z - b^{-1})}, \quad b < |z| < \frac{1}{b} \quad (10.30)$$

图10.10(e)表示相应的极点—零点图和 ROC。



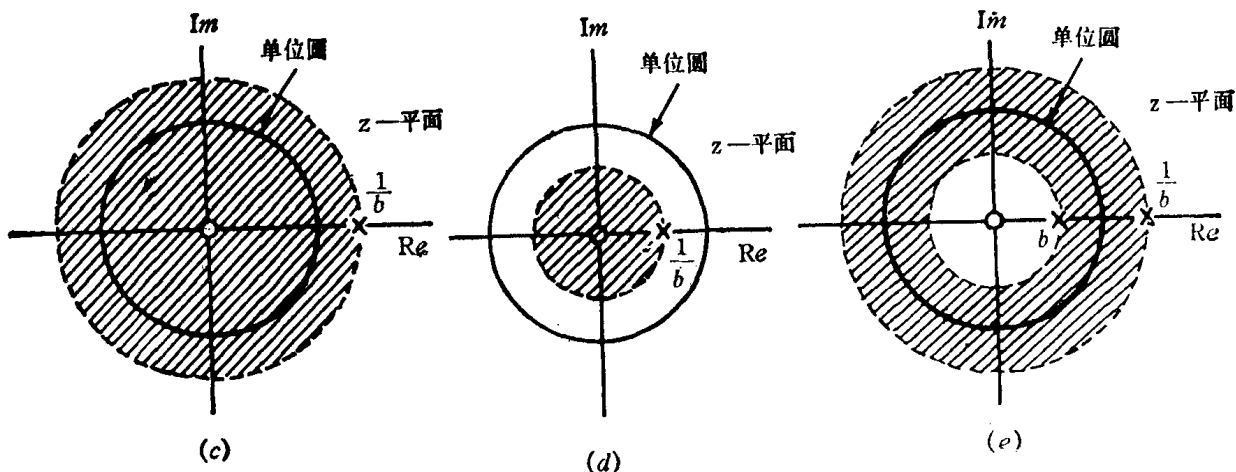


图10.10 例10.5的极点—零点图和 ROC: (a)  $|b| < 1$  时, 式(10.27); (b)  $|b| > 1$  时, 式(10.27); (c)  $|b| < 1$  时, 式(10.28); (d)  $|b| > 1$  时, 式(10.28); (e)  $|b| < 1$  时, 式(10.30)的极点—零点图和 ROC。在  $|b| > 1$  时, 对任何  $z$  值  $z$  变换都不收敛

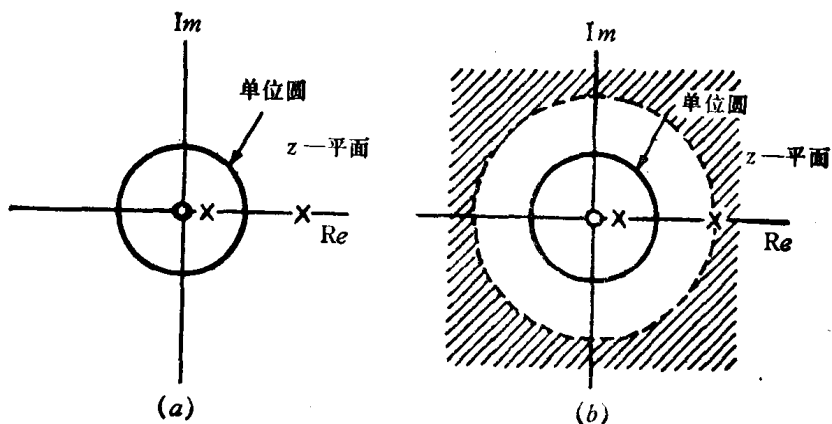
第9章拉普拉斯变换的讨论中, 我们叙述了对于一个有理的拉普拉斯变换, 其 ROC 总是以极点和无限远点为界。在前面的例子中, 可以看到, 有一种类似的论述应用于  $z$  变换。实际上, 正如拉普拉斯变换那样, 对于任何有理的  $z$  变换, ROC 以极点或延伸到无限远点为界总是正确的。对于一个已知的极点—零点图, 或者与其等效的一个已知的有理代数表达式  $X(z)$ , 仅有有限个不同的 ROC 符合上面所研究的性质。为了说明不同的 ROC 怎样与同一极点—零点图相联系, 我们来研究下面例子, 这完全类似于例9.7。

例10.6 我们研究所有可能与以下函数有关的 ROC,

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)(1 - 2z^{-1})} \quad (10.31)$$

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

图10.11(a)示出  $X(z)$  的极点—零点图。根据本节讨论, 有三种可能的 ROC 对应这个  $z$  变换的代数式。图10.11(b)~(d)中示出了这些 ROC。三种 ROC 中每一个都对应于不同的序列。图10.11(b)对应于右边序列, 图10.11(c)对应于左边序列, 图10.11(d)对应于双边序列。由于图10.11(d)中的 ROC 唯一包括单位圆, 所以与(d)有关的序列, 才使傅里叶变换收敛。



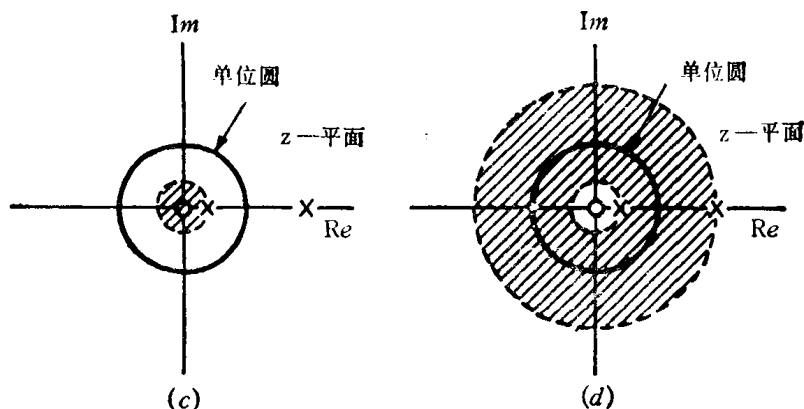


图10.11 与例10.6中  $z$  变换式有关的三个可能的 ROC。(a)  $X(z)$  的极点—零点图；(b)  $x[n]$  是右边序列的极点—零点图和 ROC；(c)  $x[n]$  是左边序列的极点—零点图和 ROC；(d)  $x[n]$  为双边序列的极点—零点图和 ROC。在每一种情况下，原点处的零点是一个二阶零点

### 10.3 $z$ 逆 变 换

本节，我们研究从已知序列的  $z$  变换求出该序列的几种方法。首先，分析用  $z$  变换来表示一个序列的正规表达式。这一表达式可以根据10.1节中讨论的将  $z$  变换解释为指数加权序列的傅里叶变换来获得。具体说，如式(10.7)①所表示，

$$X(re^{j\Omega}) = F\{x[n]r^{-n}\} \quad (10.32)$$

式中  $|z|=r$  在 ROC 内。对式(10.32)的两边进行傅里叶逆变换，

$$x[n]r^{-n} = F^{-1}\{X(re^{j\Omega})\}$$

或者

$$x[n] = r^n F^{-1}[X(re^{j\Omega})] \quad (10.33)$$

利用傅里叶逆变换式(5.43)，则有

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

或者把指数因子  $r^n$  移到积分号内，并与  $e^{j\Omega n}$  项合并，则有

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\Omega}) (re^{j\Omega})^n d\Omega \quad (10.34)$$

现在将积分变量  $\Omega$  改为  $z$ ， $z=re^{j\Omega}$  且  $r$  固定时，则  $dz=jre^{j\Omega}d\Omega=jz d\Omega$ ，或者  $d\Omega=(1/j)z^{-1}dz$ 。式(10.34)的积分是对变量为  $\Omega$  的  $2\pi$  区间内进行的，用  $z$  作积分变量时，就相当于绕圆  $|z|=r$  一周。这样，用  $z$  平面的积分来表示时，式(10.34)可以写为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (10.35)$$

式中符号  $\oint$  表示以原点为中心，以  $r$  为半径，按逆时针方向旋转的闭合围线。 $r$  值可选取能使  $X(z)$  收敛的任何值。式(10.35)就是  $z$  逆变换的标准式，也是拉普拉斯逆变换式(9.37)的离散时间对应形式。这样，逆变换积分式(10.35)的正规计算需要利用复平面上的围线积分。然而，为从  $z$  变换中获得序列，还有几种可行的方法。正如拉普拉斯变换那样，对有理  $z$  变

① 原文误为(10.8)式。——译者注

换。一个特别有用方法是把代数表达式展开成部分分式，并判定与展开式中各项相关的序列。现用一个具体例子来说明这种方法。

**例10.7** 研究下列  $z$  变换

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (10.36)$$

这里有两个极点，一个在  $z=1/3$  处，另一个在  $z=1/4$  处。因为 ROC 位于最外面极点之外，所以逆变换是一个右边序列。如在附录中描述的， $X(z)$  可以利用部分分式展开。对于本例子，以  $z^{-1}$  的多项式表示的部分分式展开式为

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (10.37)$$

因此， $x[n]$  是两项之和，一项的  $z$  变换是  $1/(1 - \frac{1}{4}z^{-1})$  和另一项的  $z$  变换是  $2/(1 - \frac{1}{3}z^{-1})$ 。为了确定上述每一项的  $z$  逆变换，必须确定与每一项有关的 ROC。由于  $X(z)$  的 ROC 是在最外面极点之外，所以式(10.37)中每一项的 ROC 必定在每一项的极点之外。因此，

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad (10.38)$$

式中

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} \quad (10.39a)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (10.39b)$$

根据例10.1，通过观察可以看出

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

和

$$x_2[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

因此

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (10.40)$$

**例10.8** 现研究与例10.7相同的  $X(z)$  的代数表达式，但假定  $X(z)$  的 ROC 是  $\frac{1}{4} < z < \frac{1}{3}$ 。

式(10.37)仍然为  $X(z)$  的代数表达式，但是与每一项有关的 ROC 将要改变。特别是，由于  $X(z)$  的 ROC 处在  $z=1/4$  极点之外和  $z=1/3$  极点之内，式(10.38)中每一项的  $z$  变换变成

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} \quad (10.41a)$$



$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3} \quad (10.41b)$$

因此,  $x_1[n]$  仍然与前面的一样, 而根据例10.2可以看出,

$$x_2[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \quad (10.42)$$

所以,

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \quad (10.43)$$

上面两个例子说明利用部分分式展开式确定  $z$  逆变换的基本方法。正如拉普拉斯的相应方法那样, 这一方法依靠了把  $z$  变换表示为较简单项的线性组合, 每一项的逆变换是通过观察获得的。通常, 部分分式展开式可能还包括除上面所讨论的一阶项之外的其他项。在10.6节中, 我们研究了其他一些  $z$  变换对, 这些变换对与10.5节所研究的  $z$  变换性质一起, 用来扩大以上提出的逆变换方法。

另一种确定  $z$  逆变换的非常有用的方法, 是依靠了  $X(z)$  的幂级数展开式。这一方法是受以下观察的启发, 即, 式(10.3)所给出的  $z$  变换定义, 可以解释为包含  $z$  的正幂和负幂的幂级数。实际上, 这个幂级数的系数就是序列值  $x[n]$ 。为了说明幂级数展开式如何能获得  $z$  逆变换, 让我们研究一个简单的例子。

#### 例10.9 研究

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

这一表达式可以用长除法展开成幂级数,

$$\begin{array}{r} 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \\ 1 - az^{-1} \overline{) 1} \\ \underline{1 - az^{-1}} \phantom{+ \dots} \\ az^{-1} \phantom{+ \dots} \\ \underline{az^{-1} - a^2z^{-2}} \phantom{+ \dots} \\ a^2z^{-2} \phantom{+ \dots} \end{array}$$

或者

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \quad (10.44)$$

比较式(10.44)和  $z$  变换定义式(10.3), 可得  $x[n] = 0, n < 0$ ;  $x[0] = 1$ ;  $x[1] = a$ ;  $x[2] = a^2$ ; 并且, 一般形式为  $x[n] = a^n u[n]$ , 这个结果与例10.1一致。

式(10.44)中  $1/(1 - az^{-1})$  的幂级数展开式在  $|az^{-1}| < 1$  或  $|z| > |a|$  时是正确的。而如果 ROC 规定为  $|z| < |a|$  或等效为  $|az^{-1}| > 1$ , 那末, 通过下列长除法可获得  $1/(1 - az^{-1})$  的幂级数展开式, 即

$$\begin{array}{r} -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \\ -az^{-1} + 1 \overline{) 1} \\ \underline{1 - a^{-1}z} \phantom{+ \dots} \\ a^{-1}z \phantom{+ \dots} \end{array}$$

或者

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \quad (10.45)$$



则, 这时  $x[n]=0, n \geq 0$  和  $x[-1]=-a^{-1}, x[-2]=-a^{-2} \dots$ , 即,  $x[n]=-a^n u[-n-1]$ 。当然, 这一结果也与例10.2一致。

用幂级数展开式方法来得到  $z$  逆变换, 对非有理的  $z$  变换来说, 特别有用。这里, 我们用一附加例子来说明。

#### 例10.10 研究 $z$ 变换

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), |z| > |a| \quad (10.46)$$

当  $|az^{-1}| < 1$  时, 可利用下式给出的  $\log(1+w)$  ( $|w| < 1$ ) 时的泰勒级数展开式, 将式(10.46)展开成幂级数。

$$\log(1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n}, |w| < 1 \quad (10.47)$$

把上式应用于式(10.46)的  $X(z)$  中, 则有

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n} \quad (10.48)$$

由此, 可以看出  $x[n]$  为

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases} \quad (10.49)$$

或等效为

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$

在习题10.10中, 将研究一个具有收敛域为  $|z| < |a|$  的例子。

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

## 10.4 根据极点—零点图进行傅里叶变换的几何求值

10.1节中, 我们讨论了  $z$  变换和傅里叶变换之间的关系。并注意到, 假定  $z$  变换的 ROC 包含单位圆, 事实上, 使傅里叶变换收敛时, 对  $|z|=1$  (即,  $z$  平面上的围线相当于单位圆) 来说,  $z$  变换简化为傅里叶变换。类似地, 在第9章已经看到, 对于连续时间信号, 在  $s$  平面的  $j\omega$  轴上, 拉普拉斯变换简化为傅里叶变换。9.4节中还讨论了根据极点—零点图进行傅里叶变换的几何计算问题。在离散时间情况下, 通过分析  $z$  平面上的极点与零点矢量, 也可以用几何方法计算傅里叶变换。然而, 由于在这种情况下, 有理函数是在围线  $|z|=1$  上求值, 因此, 应该分析从极点和零点到单位圆 (而不是到虚轴) 的矢量。为了说明这种计算过程, 我们研究如5.12节所讨论的一阶和二阶系统。

### 10.4.1 一阶系统

一阶因果离散时间系统的冲激响应有如下一般形式

$$h[n] = a^n u[n] \quad (10.50)$$

根据例10.1, 上式的  $z$  变换为

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \quad (10.51)$$

$|a| < 1$  时, ROC 包含单位圆, 因此它的傅里叶变换收敛, 并且等于  $H(z)$  ( $z = e^{j\Omega}$  时)。因此, 一阶系统的频率响应由下式给出

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad (10.52)$$

图10.12表示包括从极点和零点到单位圆的矢量的极点—零点图。在频率 $\Omega$ 处, 频率响应的幅度是矢量 $\mathbf{V}_1$ 和矢量 $\mathbf{V}_2$ 长度之比。频率响应的相位是 $\mathbf{V}_1$ 相对于实轴的角度减去 $\mathbf{V}_2$ 相对于实轴的角度。首先注意到, 从处于原点的零点到单位圆的矢量 $\mathbf{V}_1$ 具有不变的单位长度, 因此, 对 $H(e^{j\Omega})$ 的幅度没有影响。零点提供给 $H(e^{j\Omega})$ 的相位是零点矢量相对于实轴的夹角, 这一角度等于 $\Omega$ 。当 $0 < a < 1$ 时, 极点矢量在 $\Omega = 0$ 时具有最小长度, 并且它的长度随着 $\Omega$ 从零增到 $\pi$ 而单调地增加。因此, 频率响应的幅度在 $\Omega = 0$ 处为最大, 并随 $\Omega$ 从零增到 $\pi$ 而单调地减小。极点矢量的角度开始为零, 且随 $\Omega$ 从零增加到 $\pi$ 而单调非线性地增加, 图5.31表示了 $H(e^{j\Omega})$ 最后所得到的对数幅度和相位特性。

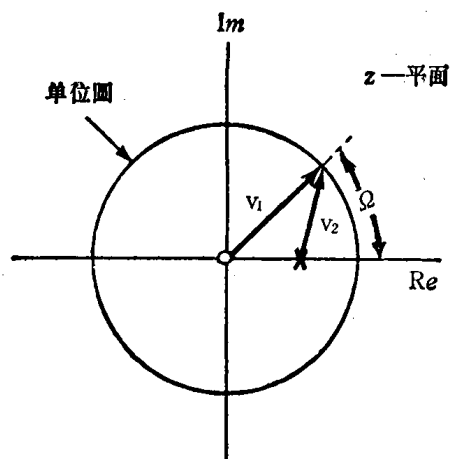


图10.12 对于一阶系统, 频率响应的几何确定的极点—零点矢量

在离散时间一阶系统中, 参数 $a$ 的大小起着类似于连续时间一阶系统时间常数 $\tau$ 的作用。如同5.12节所讨论以及图5.29和图5.30所说明的那样, 随着 $|a|$ 的减小, 冲激响应更急剧地衰减, 并且阶跃响应更迅速地稳定。就多极点而论, 各极点的响应速度与原点到该极点的距离有关, 那些最靠近原点的极点, 在冲激响应中提供速度最快的衰减项。这点将在下面研究的二阶系统中作进一步说明。

#### 10.4.2 二阶系统

接着, 我们研究5.12节中所讨论过的二阶系统, 其冲激响应和频率响应已由式(5.166)和式(5.162)给出:

$$[式(5.166)] \quad h[n] = r^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} u[n]$$

$$[式(5.162)] \quad H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta e^{-j\Omega} + r^2 e^{-j2\Omega}}$$

式中 $0 < r < 1$ 和 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。因为 $H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$ , 根据式(5.162)可以导出相当于系统冲激响应的 $z$ 变换的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (10.53)$$

$H(z)$ 的极点位于

$$z_1 = re^{j\theta}, \quad z_2 = re^{-j\theta} \quad (10.54)$$

并且在 $z=0$ 处有一个双重零点。图10.13(a)表示在 $0 < \theta < \pi/2$ 时的极点—零点图, 及极点矢量和零点矢量。图10.13(b)中表明了频率响应的幅度。特别注意到, 当沿着单位圆从 $\Omega=0$ 向 $\Omega=\pi$ 方向移动时, 矢量 $\mathbf{V}_2$ 的长度先是减小, 然后增大, 在极点位置附近具有一个最小长度。这是符合以下事实的, 即, 当矢量 $\mathbf{V}_2$ 长度较小时, 频率响应的幅度在 $\Omega$ 靠近 $\theta$ 附近出现峰点。根据极点矢量的性质, 同样明显的是, 当 $r$ 增大趋向1时, 极点矢量的最小长度将减小, 导致频率响应随 $r$ 增加而更陡峭地成峰。根据冲激响应(式(5.166)和图5.32)或者阶跃响应(式(5.171)和图5.33)的形式, 可以看出, 正如处理一阶系统那样, 随着极点离开

单位圆越远（相当于  $r$  减小），冲激响应也越迅速地衰减，并且阶跃响应更快地趋向稳定。

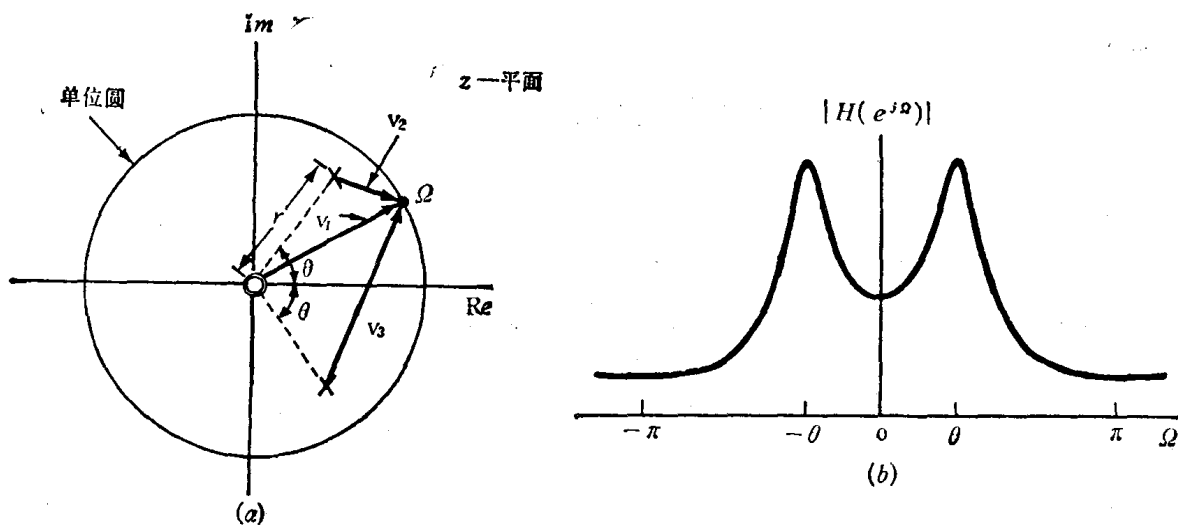


图10.13 (a) 用于二阶系统频率响应几何计算中的极点矢量  $V_1$  和  $V_2$ ; (b) 频率响应的幅度，相当于各极点矢量长度乘积的倒数

## 10.5 $z$ 变换的性质

正如我们已经论述过的其他变换那样， $z$  变换也具有许多性质，这些性质使得  $z$  变换成为研究离散时间信号与系统的极其有用的工具。这一节，概述这些性质。这些性质的推导类似于其他变换性质的推导，因此许多推导留在本章之末作为练习（见题10.14~10.18）。

### 10.5.1 线性

如果

$$x_1[n] \xrightarrow{z} X_1(z), \quad \text{ROC} = R_1$$

和

$$x_2[n] \xrightarrow{z} X_2(z), \quad \text{ROC} = R_2$$

则

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad \text{ROC 包含 } R_1 \cap R_2 \quad (10.55)$$

如上所指，线性组合的 ROC 至少是  $R_1$  和  $R_2$  的相交部分。对于具有有理  $z$  变换的序列来说，如果  $aX_1(z) + bX_2(z)$  的极点由  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$  的所有极点组成（即，没有极点—零点的抵消），则它的收敛域正好等于两个收敛域的重迭部分。如果线性组合所引入的一些零点对消了一些极点，则收敛域可能会较大。一个简单例子是，当  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  都具无限时宽而其线性组合具有有限时宽时，就会出现这种情况。这时，线性组合的收敛域是整个  $z$  平面，但零点和/或无限远点可能要除外。例如，序列  $a^n u[n]$  和  $a^n u[n-1]$  均具有收敛域  $|z| > |a|$ ，但对应于它们之差的序列  $(a^n u[n] - a^n u[n-1]) = \delta[n]$  其收敛域却为整个  $z$  平面。

### 10.5.2 时间移位

如果

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \text{ ROC} = R_x$$

则

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z), \text{ ROC} = R_x (\text{除可能添加或删除的原点和无限远点}) \quad (10.56)$$

因为乘上了  $z^{-n_0}$ , 故当  $n_0 > 0$  时, 在  $z=0$  处将引入一些极点, 而在无限远处将删去一些极点。因此, 即使  $R_x$  可能包含原点, 而  $x[n-n_0]$  的 ROC 则可能不包含原点。同样, 如果  $n_0 < 0$ , 在  $z=0$  处将引入一些零点, 在无限远处将引入一些极点。因此, 虽然  $R_x$  可能由于  $X(z)$  在原点处包含了极点而不包括  $z=0$ , 但  $x[n-n_0]$  的 ROC 却可能包括原点。这一点完全符合 10.2 节中关于有限时宽序列 ROC 的论述。总之, 除了可能添加原点 ( $z=0$ ) 或无限远点, 或者删去原点或无限远点之外,  $x[n-n_0]$  的 ROC 与  $x[n]$  的 ROC 是相同的。

### 10.5.3 频率移位

如果

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \text{ ROC} = R_x$$

则

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{-j\Omega_0} z), \text{ ROC} = R_x \quad (10.57a)$$

我们认为上式左边相当于用一个复指数序列去调制, 右边可以解释为在  $z$  平面中的旋转, 即,  $z$  平面中所有极点—零点的位置旋转了一个  $\Omega_0$  的角度, 如图 10.14 所示。这一点可以这样来理解, 如果  $X(z)$  具有  $(1-az^{-1})$  形式的因子, 那末  $X(e^{-j\Omega_0} z)$  将具有因子  $(1-ae^{j\Omega_0} z^{-1})$ ,

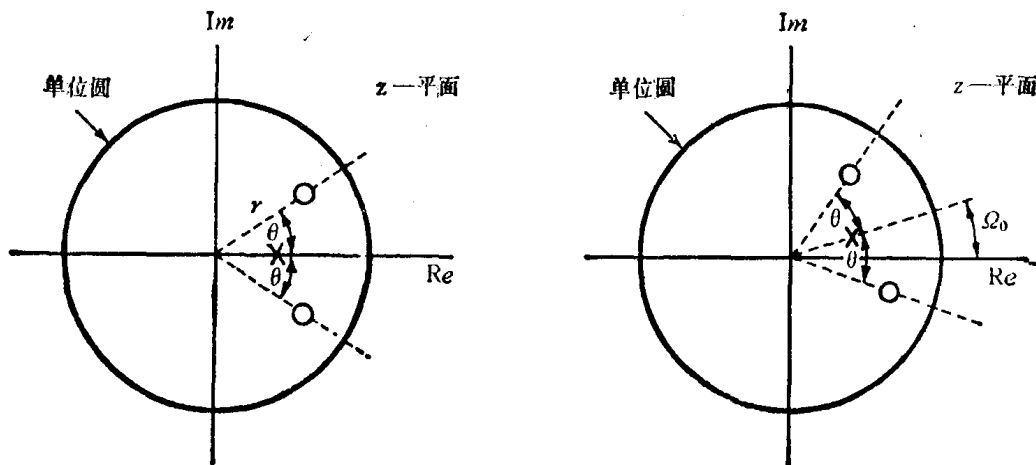


图 10.14 由复指数序列  $e^{j\Omega_0 n}$  进行时域调制后在极点—零点图上的影响

因此,  $X(z)$  在  $z=a$  处的极点或零点, 将变为  $x(e^{-j\Omega_0} z)$  在  $z=ae^{j\Omega_0}$  处的极点或零点。于是单位圆上  $z$  变换过程也将移过一个  $\Omega_0$  的角度。这是符合性质 5.5.4 的, 那里指出, 在时域

中, 用一个复指数去调制, 就相当于傅里叶变换的频率移位。

如果  $x[n]$  是实数, 则除了  $\Omega_0$  是  $\pi$  的整数倍之外,  $e^{j\Omega_0 n} x[n]$  将不是实数。相应地, 如果  $X(z)$  的极点和零点是呈复数共轭对的话 ( $x[n]$  是实数), 那末在频率移位以后, 它们不再具有这种对称性。这一点在图10.14中是明显的。更一般地, 与性质9.5.3对应的离散时间情况下的性质为

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \text{ROC} = z_0 R_x \quad (10.57b)$$

式中  $|z_0|=1$ , 因此  $z_0=e^{j\Omega_0}$ ①。这样上式化为式(10.57a)。当  $z_0=re^{j\Omega_0}$ ②时, 极点与零点的位置在  $z$  平面上旋转了一个  $\Omega_0$  的角度, 并且在径向位置上也要按  $r$  因子改变长度的比例, 相应的 ROC 也要改变长度比例。因此, 如果  $z_x$  点在  $x[n]$  的 ROC 内, 那末  $z_0 z_x$  将在  $z_0^n x[n]$  的 ROC 内。

#### 10.5.4 时间逆转

如果

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \text{ROC} = R_x$$

则

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right), \text{ROC} = \frac{1}{R_x} \quad (10.58)$$

$x[-n]$  的收敛域是  $R_x$  的倒数, 即, 如果  $z_0$  在  $x[n]$  的 ROC 内, 则  $1/z_0$  在  $x[-n]$  的 ROC 内。

[www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

#### 10.5.5 卷积性质

如果

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z), \text{ROC} = R_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z), \text{ROC} = R_2$$

则

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) X_2(z), \text{ROC 包含 } R_1 \cap R_2 \quad (10.59)$$

正如拉普拉斯变换的卷积性质那样,  $X_1(z)X_2(z)$  的 ROC 包括  $R_1$  和  $R_2$  的重迭部分, 并且, 如果在乘积中发生极点—零点的对消, 则 ROC 可能会较大。

可以用各种不同方法导出卷积的性质。在习题10.21中将进行一种正规的推导。也可用类似4.7节关于连续时间傅里叶变换卷积性质的推导方法来完成, 它是将傅里叶变换解释成复指数的幅值在通过 LTI 系统时的一种变化。对于  $z$  变换, 通常还有其他关于卷积性质的有效的解释。具体说, 根据式(10.3)的定义, 我们认为  $z$  变换是一个  $z^{-1}$  的多项式, 其中  $z^{-n}$  的系数就是序列值  $x[n]$ 。本质上, 卷积性质式(10.59)表明, 当两个多项式或幂级数  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$  相乘时, 该乘积的多项式的系数就是多项式  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$  中系数的卷积。

①原文误为  $z_0=e^{j\Omega_0 n}$ ——译者注

②原文误为  $z_0=re^{j\Omega_0 n}$ ——译者注

### 10.5.6 z 域微分

如果

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \text{ ROC} = R_x$$

则

$$\boxed{nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \text{ ROC} = R_x} \quad (10.60)$$

这一性质可通过对  $z$  变换式(10.3)的两边进行微分直接获得。作为应用该性质的一个例子, 利用它来确定例10.10所讨论的  $z$  逆变换。

例10.11 如果

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), |z| > |a| \quad (10.61)$$

则

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, |z| > |a| \quad (10.62)$$

通过微分, 我们把  $z$  变换变成一个有理式。根据例10.1和性质10.5.2 [式(10.56)], 可以获得式(10.62)右边的  $z$  逆变换。具体说, 根据例10.1和线性性质,

$$a(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a}{1 + az^{-1}}, |z| > |a| \quad (10.63)$$

并且将上式与性质10.5.2结合, 得到

$$a(-a)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

因此,

$$x(n) = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1] \quad (10.64)$$

例10.12 作为应用微分性质的另一例子, 分析由下式给出的  $X(z)$ , 确定其  $z$  逆变换

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, |z| > |a| \quad (10.65)$$

根据例10.1

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \quad (10.66)$$

因此,

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, |z| > |a| \quad (10.67)$$

### 10.5.7 初值定理

如果  $n < 0$  时,  $x[n] = 0$ , 则

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (10.68)$$

这一性质是在分析  $n < 0$  时, 对  $x[n]$  为零的  $z$  变换式中每一项分别取极限的结果。具体说, 在这一限制下

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

当  $z \rightarrow \infty$  时,  $z^{-n} = 0$  ( $n > 0$ ); 而  $n = 0$  时,  $z^{-n} = 1$ , 因此得到式(10.68)的结果。

作为初值定理的一个结论, 我们观察到, 对因果序列来说, 如果  $x[0]$  是有限值, 则  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$  也是有限值。因此, 当用  $z$  的多项式之比表示  $X(z)$  时, 分子多项式的阶数不能大于分母多项式的阶数; 或者, 相当于  $X(z)$  的零点不能多于极点数。

### 10.5.8 性质小结

表10.1中, 总结了上述  $z$  变换的性质, 同时也列入了另外一些性质。

表10.1  $z$  变换的性质

性 质	序 列	变 换	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	$R_x$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	$R_1$
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	$R_2$
10.5.1	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	至少为 $R_1$ 和 $R_2$ 的重迭部分
10.5.2	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R_x$ 除了可能添加或删除原点
10.5.3	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$	$R_x$
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R_x$
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	$R_x$ 经刻度变换后的形式 (即, $a^{-1}R_x$ 表示对 $R_x$ 中的 $z$ 的点 $\{az\}$ 的集合)
10.5.4	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	取倒数的 $R_x$ (即, $R_x^{-1}$ 表示点 $z^{-1}$ 的集合, 这里 $z$ 在 $R_x$ 内)
	$W[n] = \begin{cases} x[r], & n=rk \\ 0, & n \neq rk \text{ 对某些 } r \text{ 值} \end{cases}$	$X(z^k)$	$R_x^{1/k}$ (即, 点 $z^{1/k}$ 的集合, 这里 $z$ 在 $R_x$ 内)
10.5.5	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	至少为 $R_1$ 和 $R_2$ 的重迭部分
10.5.6	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_x$ 除了可能添加或删除原点
	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	至少为 $R_x$ 和 $ z  > 1$ 的重迭部分

## 10.6 常用的 $z$ 变换对

同拉普拉斯逆变换时一样, 通过把  $X(z)$  表示为较简单项的线性组合, 且这些项的  $z$  逆变换可直接看出, 这样, 往往能方便地计算出  $z$  逆变换。在表10.2中, 列出了一些有用的  $z$  变换对。这些变换对都可以由上面的例子再结合表10.1中的  $z$  变换性质而导出。例如, 变换对 2 和 5 可直接从例10.1得出, 变换对 7 由例10.12得出。上述变换对与性质10.5.4和性质10.5.2一起, 则导得变换对 3, 6 和 8。变换对 9 和 10, 可以由变换对 2 和性质10.5.1及10.5.3一起导出。



表10.2 一些常用  $z$  变换对

变 换 对 信 号	变 换	ROC
1. $\delta[n]$	1	所有 $z$
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
3. $u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
4. $\delta[n-m]$	$z^{-m}$	除去 0 (若 $m > 0$ ) 或 $\infty$ (若 $m < 0$ ) 的所有 $z$
5. $\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z  >  \alpha $
6. $-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z  <  \alpha $
7. $n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z  >  \alpha $
8. $-nd^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z  <  \alpha $
9. $[\cos \Omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos \Omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
10. $[\sin \Omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos \Omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
11. $[r^n \cos \Omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \Omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
12. $[r^n \sin \Omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r \sin \Omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \Omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$

## 10.7 利用 $z$ 变换进行 LTI 系统的分析和表征 [www.blogoil.com](http://www.blogoil.com)

在分析和表征离散时间 LTI 系统时,  $z$  变换起着特别重要的作用。由卷积性质10.5.5,

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (10.69)$$

式中  $X(z)$ 、 $Y(z)$  和  $H(z)$  分别为系统的输入、输出和冲激响应的  $z$  变换。 $H(z)$  称为系统函数或转移函数。对于在单位圆上求值的  $z$  (即,  $z = e^{j\Omega}$ ), 若单位圆在  $H(z)$  的 ROC 内, 那末  $H(z)$  就简化为系统的频率响应。

系统的各种特性, 例如稳定性和因果性等, 都可以与系统函数在极点-零点图和 ROC 上的各种约束有关。例如, 若系统是因果的, 则根据 10.2 节中的性质 2 和性质 4,  $H(z)$  的 ROC 应在最远的极点以外。如果系统是稳定的, 则冲激响应绝对可和, 这时  $h[n]$  的傅里叶变换将是收敛的, 因此,  $H(z)$  的 ROC 必定包含单位圆。对于一个既稳定又因果的系统, 其 ROC 必定包含单位圆, 且在最远极点之外。由此可见, 对于因果、稳定系统来说, 所有的极点必定在单位圆以内。作为一个例子, 我们回到 10.4.2 节中讨论过的二阶系统。

**例10.13** 式(10.53)给出了一个具有复数极点的二阶系统的系统函数, 具体为

$$[式(10.53)] \quad H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (10.70)$$

其极点位于  $z_1 = re^{j\theta}$  和  $z_2 = re^{-j\theta}$  处。假设系统为因果性的, 则 ROC 在最远极点之外 (即,  $|z| > |r|$ )。图 10.15 表示  $r < 1$  和  $r > 1$  两种情况下的极点-零点图和 ROC。当  $|r| < 1$  时, 极点都在单位圆内部, ROC 包含单位圆, 因此系统是稳定的。当  $|r| > 1$  时, 极点在单位圆



以外, ROC 不包含单位圆, 所以系统是不稳定的。

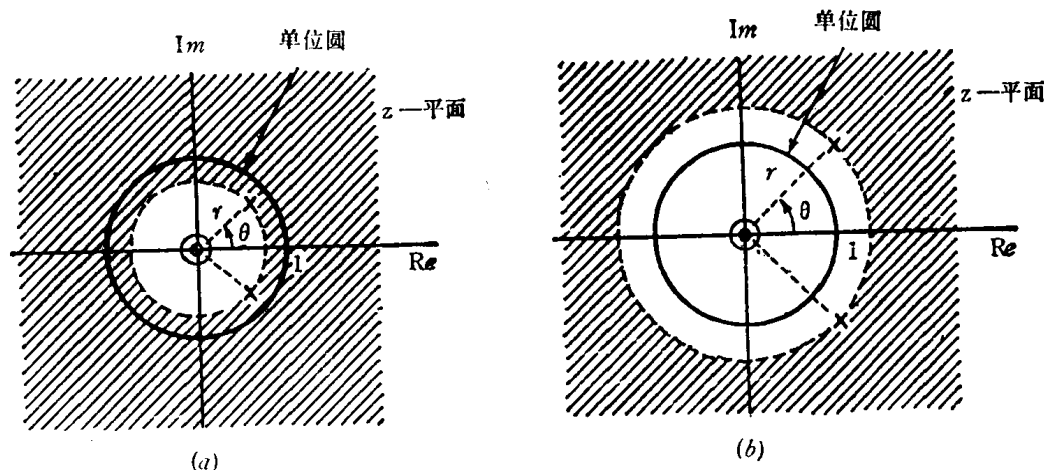


图10.15 具有复数极点的二阶系统的极点-零点图: (a)  $r < 1$ ; (b)  $r > 1$

### 10.7.1 用线性常系数差分方程表征的系统

对于用线性常系数差分方程表征的系统,  $z$  变换的各种性质给获得系统的系统函数、频率响应、或时域响应提供了一种非常方便的方法。首先用一个例子来说明这一方法。

例10.14 研究一个 LTI 系统, 它的输入  $x[n]$  和输出  $y[n]$  满足线性常系数差分方程

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] \quad (10.71)$$

对方程(10.71)两边进行  $z$  变换, 并应用线性性质10.5.1和时间移位性质10.5.2, 则得到

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z) \quad \text{www.blogoil.com}$$

或者

$$Y(z) = X(z) \left[ \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right] \quad (10.72)$$

根据式(10.69), 则

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (10.73)$$

上式提供了  $H(z)$  的代数表达式, 但没有给出收敛域。实际上, 有两个性质不同的冲激响应可符合差分方程(10.71), 一个为符合方程式右边, 另一个为符合方程式左边。相应地, 与代数式(10.73)有关的 ROC, 就有两种不同的选择。一个是  $|z| > \frac{1}{2}$  与  $h[n]$  为右边的假定有关, 另一个是  $|z| < \frac{1}{2}$  与  $h[n]$  为左边的假定有关。

对于更一般的  $N$  阶差分方程, 可以用类似于例10.14的方法对方程式两边进行  $z$  变换, 并应用线性和时间移位性质。为此, 分析一个 LTI 系统, 它的输入和输出满足下列形式的线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (10.74)$$

则

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

或者

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

所以

$$H(z) \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (10.75)$$

特别要指出, 对于一个满足线性常系数差分方程的系统, 其系统函数总是有理的。与上面的例子及拉普拉斯变换的有关讨论相一致, 差分方程本身不提供与代数式  $H(z)$  有关的 ROC。然而, 一种外加的约束, 诸如系统的因果性和稳定性, 可用来确定收敛域。例如, 假定我们还知道系统是因果的, 那末 ROC 将在最远极点之外。如果系统是稳定的, ROC 必定包括单位圆。

### 10.7.2 LTI系统互连的系统函数

正如连续时间拉普拉斯变换那样, 离散时间的  $z$  变换使我们能用代数运算来替代时域运算 (例如, 卷积及时间移位)。上一节中已利用了这种替代, 在那里, 我们能用代数方程的描述来代替 LTI 系统的差分方程的描述。在分析 LTI 互连系统 (诸如串联、并联和反馈互连) 时, 利用  $z$  变换把系统的描述变换成代数方程也是很有用的。例如, 研究如图 10.16 所示的两个系统的反馈互连, 要确定时域中整个系统的差分方程或冲激响应是比较困难的。然而, 当用它们的  $z$  变换来表示系统和序列时, 其分析仅涉及代数方程式。对图 10.16 互连的特定方程完全类似于式 (9.101)~(9.104), 图 10.16 的反馈系统, 其总的系统函数的最后结果为

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)} \quad (10.76)$$

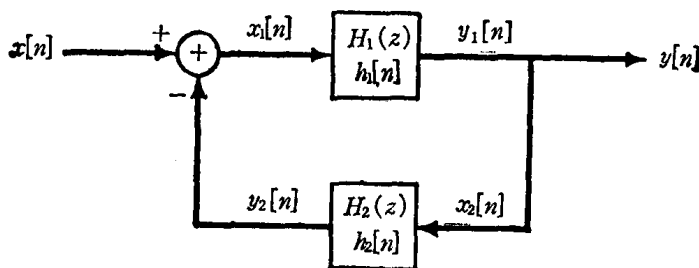


图10.16 两个系统的反馈互连

## 10.8 连续时间和离散时间系统之间的变换

在许多场合中, 把连续时间系统转换成离散时间系统是很有意义的。例如, 在第 8 章

中, 我们研究了应用离散时间系统处理连续时间信号的问题。在这种情况下, 通过周期抽样, 将连续时间信号表示成离散时间信号, 用一个适当的离散时间系统处理以后, 将所得到的序列再变回到连续时间信号。因此, 就有一个把所要求的连续时间系统转变为适当的离散时间系统的问题。对连续时间到离散时间系统变换的研究的另一个推动因素是下列事实: 即在高密度、高速度的数字技术出现之前, 所有滤波和信号处理系统基本上都是连续时间系统。因此, 能满足时域或频域中一组给定技术要求的连续时间系统的设计, 在技术发展上已有悠久历史。通过本节所讨论的变换技术的应用, 就可以把连续时间系统的系统设计变换为具有相近技术要求的离散时间系统的系统设计。

本节中要研究三种变换方法, 以将一个具有有理系统函数的连续时间系统映射到具有有理系统函数的离散时间系统。第一种方法称为冲激不变法。在这种方法中, 一个连续时间系统变换到一个离散时间系统时, 是使该离散时间系统的冲激响应相当于连续时间系统冲激响应的等间隔抽样。这正是第 8 章中讨论连续时间信号的离散时间处理时所研究的方法。特别是, 因离散时间冲激响应是从连续时间冲激响应抽样而取得的, 所以这种变换的应用范围只限于频率响应完全带限或至少是近似带限的连续时间系统。

第二种方法是用后向差分来代替表示连续时间系统的微分方程中的导数, 以获得离散时间系统的差分方程。在应用上这是一种稍受限制的方法, 但是它的不足却有助于揭示连续时间到离散时间系统变换中重要的依据。我们所讨论的第三种方法是拉普拉斯变换映射到  $z$  变换中所应用的双线性变换。如同冲激不变法一样, 可以看到, 这种方法对某一类系统来说, 是十分有用的变换。

### 10.8.1 冲激不变法

如果已知一个连续时间冲激响应  $h_c(t)$ , 我们就可以考虑设计一个离散时间系统, 其冲激响应  $h_d[n]$  由  $h_c(t)$  的等间隔抽样组成, 这样

$$h_d[n] = h_c(nT) \quad (10.77)$$

式中  $T$  是设计过程中供选择的一个正数。由  $h_c(t)$  到  $h_d[n]$  的变换可从图 10.17 看出。根据 8.1.1 节的讨论, 具体说, 根据式 (8.5) 得出①

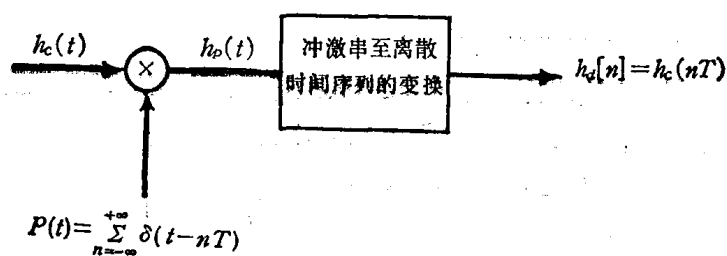


图10.17 利用冲激不变法实现连续时间冲激响应到离散时间冲激响应的变换

$$H_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c \left( j\omega - j \frac{2\pi k}{T} \right) \quad (10.78)$$

并且由式 (8.20), 有

$$H_d(e^{j\Omega}) = H_p \left( j \frac{\Omega}{T} \right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c \left[ j \left( \frac{\Omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right] \quad (10.79)$$

①与第 9 章开始介绍的符号变化相一致, 这里是将傅里叶变换表示为  $j\omega$  的函数, 而不是  $\omega$  的函数, 如同第 8 章的情况。

因此,对通过冲激不变法从连续时间系统获得的离散时间系统来说,其离散时间的频率响应  $H_d(e^{j\Omega})$ ,是通过连续时间频率响应的周期性重复和频率轴的线性比例尺变换与  $H_c(j\omega)$  联系起来的。如果  $H_c(j\omega)$  是带限的,并且选择  $T$  使之避免混迭失真,那末除了幅值和频率的线性比例变换之外,离散时间频率响应与连续时间频率响应是相同的。

让我们进一步研究冲激不变法的特性。根据图10.17,抽样时间信号  $h_p(t)$  可以表示为

$$\begin{aligned} h_p(t) &= h_c(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_c(nT) \delta(t-nT) \end{aligned} \quad (10.80)$$

把拉普拉斯变换应用于式(10.80)

$$\begin{aligned} H_p(s) &= \mathcal{L} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_c(nT) \delta(t-nT) \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_c(nT) \mathcal{L} \{ \delta(t-nT) \} \end{aligned}$$

或者由于

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \delta(t-nT) \} &= e^{-snT} \textcircled{1} \\ H_p(s) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_c(nT) e^{-snT} \end{aligned} \quad (10.81)$$

另一方面,根据定义  $h_d[n]$  的  $z$  变换  $H_d(z)$  为

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d[n] z^{-n}$$

或者使用式(10.77)

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_c(nT) z^{-n} \quad (10.82)$$

比较式(10.82)和式(10.81),可得

$$H_d(z) \big|_{z=e^{st}} = H_p(s) \quad (10.83a)$$

此外,用更一般的拉普拉斯变换的变量  $s$  来代替式(10.78)中的  $j\omega$ ,则有

$$H_p(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c \left( s - j \frac{2\pi k}{T} \right) \quad (10.83b)$$

或等效为

$$H_d(z) \big|_{z=e^{st}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c \left( s - j \frac{2\pi k}{T} \right) \quad (10.83c)$$

式(10.83a)表明,冲激不变法相当于  $H_p(s)$  和  $H_d(z)$  之间的一种变换,这种变换是用  $s$  平面和  $z$  平面之间的映射关系  $z=e^{st}$  表示的。图10.18说明了这种映射。其中,图10.18(a)中的阴影斜线带映入整个  $z$  平面。根据式(10.83),  $H_d(z)$  的取得可看成是:首先把宽度为  $2\pi/T$  的各平行带中  $H_c(s)$  的状况迭合或混入阴影带内(式10.83b),然后根据映射  $z=e^{st}$ , (式10.83a)把阴影斜线带映射到整个  $z$  平面。对于这种映射,如果  $\text{Re}\{s\} < 0$ , 就是  $|z| < 1$ , 因而  $s$  平面左半部的各点映射到单位圆的内部。同样地,  $s$  平面右半部的各点映射到单位圆的外部,且  $j\omega$  轴上各点映射到单位圆上。

当  $h_c(t)$  的拉普拉斯变换是有理函数时,我们可用一个比式(10.83)更为方便的形式来表示  $H_d(z)$  和  $H_c(s)$  间的关系。现在,考虑用部分分式展开式来表示连续时间系统的传递函

①原文误为  $e^{-\delta nT}$ 。——译者注

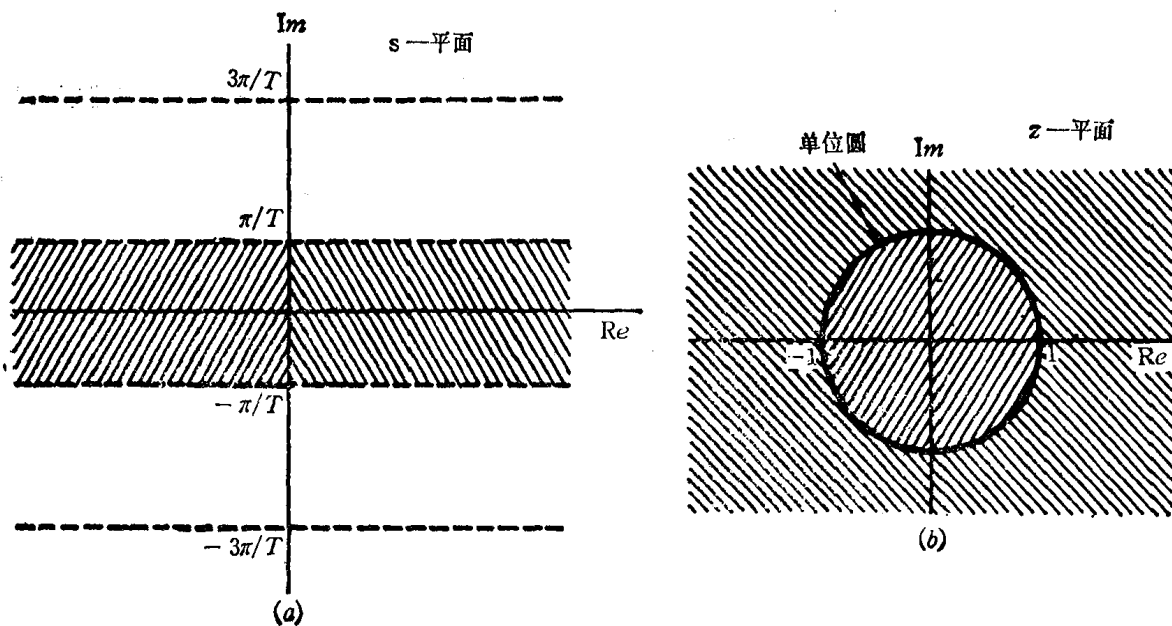


图10.18 由变换  $z=e^{sT}$  引入的映射

数。为了方便起见，假设仅有一阶极点，不过如习题 10.35 所说明的那样，讨论也是很容易扩展到多阶极点。当  $H_c(s)$  表示成如下形式时，

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s-s_k} \quad (10.84)$$

相应的冲激响应是

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (10.85)$$

并且相应的离散时间系统单位抽样响应是

$$\begin{aligned} h_d[n] &= h_c(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u[n] \\ &= \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n u[n] \end{aligned} \quad (10.86)$$

那末离散时间滤波器的传递函数由下式表示

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1-e^{s_k T} z^{-1}} \quad (10.87)$$

因此， $H_d(z)$  是有理函数，尤其是在部分分式展开式中保存了留数  $A_k$ ，并且， $H_c(s)$  在  $s=s_k$  处的极点映射为  $H_d(z)$  在  $z=e^{s_k T}$  处的极点。上述极点映射的结果是：一个稳定的连续时间滤波器总会导致一个稳定的离散时间滤波器。这是由于  $\text{Re}\{s_k\} < 0$ ，则  $|e^{s_k T}| < 1$  的缘故。然而， $H_d(z)$  的零点是式(10.87)中极点和留数的函数，并且，通过变换  $z=e^{sT}$ ， $H_d(z)$  的零点位置一般并不对应于  $H_c(s)$  的零点的直接映射。

总之，冲激不变法的应用，就相当于把连续时间冲激响应通过抽样变换为离散时间冲激响应。为了避免混迭，这个方法只限于带限频率响应的变换。如果没有混迭，离散时间的频率响应就是在频率中经过线性比例变换的连续时间频率响应的周期重复。对于有理传递函数，也可以通过式(10.87)把冲激不变法解释为  $H_c(s)$  和  $H_d(z)$  的部分分式展开式之间的关系。借此保存了留数，并且通过变换  $z=e^{sT}$ ，把  $H_c(s)$  的极点映射为  $H_d(z)$  的极点。

### 10.8.2 微分方程的后向差分近似法

连续时间滤波器变换为离散时间滤波器的第二种方法,是用有限差分来近似连续时间滤波器的微分方程式中导数。这是模拟系统在数字模拟中的一种常用方法,并且可用待微信号相邻抽样之差来近似连续时间函数的导数的直观概念引出这一方法。为了说明这种方法,研究如下一阶微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (10.88)$$

后向差分法是用  $x[n]$  代替  $x(t)$ , 用  $y[n]$  代替  $y(t)$ , 并用下列一阶后向差分来代替一阶导数  $dy(t)/dt$

$$\Delta^{(1)}y[n] = \frac{y[n] - y[n-1]}{T} \quad (10.89)$$

这样就得出如下差分方程

$$\frac{y[n] - y[n-1]}{T} + ay[n] = x[n] \quad (10.90)$$

如果  $T$  足够小的话, 就可以解得所需要的  $y[n]$ , 从而为  $y(t)$  的抽样提供一个满意的近似。

为了解释连续时间传递函数  $H_c(s)$  到离散时间传递函数  $H_d(z)$  的映射所表示的方法, 我们将拉普拉斯变换用于式(10.88), 得到

$$sY(s) + aY(s) = X(s) \quad (10.91)$$

因此,

$$H_c(s) = \frac{1}{s+a} \quad (10.92)$$

另一方面, 当  $z$  变换用于式(10.90)时,

$$\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)Y(z) + aY(z) = X(z) \quad (10.93)$$

或者

$$H_d(z) = \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) + a} \quad (10.94)$$

比较  $H_c(s)$  和  $H_d(z)$ , 可知

$$H_d(z) = H_c(s) \big|_{s=(1-z^{-1})/T} \quad (10.95)$$

可用类似方法近似高阶导数。例如

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{dy(t)}{dt} \right] \quad (10.96)$$

同时, 把  $y(t)$  的一阶导数的近似式的后向差分, 作为这个二阶导数的近似, 即, 用下式代替  $d^2y(t)/dt^2$ ,

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)}y[n] &= \Delta^{(1)}(\Delta^{(1)}y[n]) \\ &= \frac{\frac{y[n] - y[n-1]}{T} - \frac{y[n-1] - y[n-2]}{T}}{T} \\ &= \frac{y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]}{T^2} \end{aligned} \quad (10.97)$$



于是, 可知

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = s^2 Y(s) \quad (10.98)$$

$$\mathcal{Z}\{\Delta^{(2)} y[n]\} = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^2 Y(z) \quad (10.99)$$

因此, 关系式(10.95), 或等效为变换式

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \quad (10.100)$$

对高阶微分方程同样成立。

现在, 我们来研究变换式(10.100)。首先需要指出的是, 如果  $H_c(s)$  是  $s$  的有理函数, 则  $H_d(z)$  将是  $z$  的有理函数。这是不意外的, 因为就变换的本质而言, 一个线性常系数微分方程 (相应于有理的连续时间系统函数) 就是被变换成的一个线性常系数差分方程 (已证明它总是对应于有理的离散时间系统函数)。下面, 我们把关系式(10.100)转换为用  $s$  来表示  $z$  的关系式,

$$z = \frac{1}{1-sT} \quad (10.101)$$

在  $sT = \sigma + j\omega$  时,

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{(1-\sigma)^2 + \omega^2}} \quad (10.102)$$

并且看到, 如果  $\sigma < 0$ , 则  $|z| < 1$ , 这样  $s$  平面的左半部映入单位圆内部。因此, 正如冲激不变法那样,  $s$  平面的左半部的极点将映入单位圆之内。因此, 一个稳定的连续时间系统总会变换成一个稳定的离散时间滤波器。离散时间系统的频率响应, 是通过设想  $H_d(z)$  在单位圆上来研究的; 而对于连续时间系统, 则是通过设想  $H_c(s)$  在  $j\omega$  轴上来研究的。因此, 为了保持从  $H_c(s)$  映射到  $H_d(z)$  时的频率响应特性, 我们总希望  $s$  平面上的  $j\omega$  轴映射成  $z$  平面上的单位圆, 如同冲激不变法的情况一样。

对于式(10.101)的变换, 我们来研究一下  $s$  平面上  $j\omega$  轴是如何映射到  $z$  平面上的。当  $s = j\omega$  时, 根据式(10.101)有

$$z = \frac{1}{1-j\omega T} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1+j\omega T}{1-j\omega T} \right] \quad (10.103)$$

复数  $1+j\omega T$  可以用极坐标形式表示为

$$1+j\omega T = [1 + (\omega T)^2]^{\frac{1}{2}} e^{j \tan^{-1} \omega T}$$

同样, 复数  $1-j\omega T$  可以用极坐标形式表示为

$$1-j\omega T = [1 + (\omega T)^2]^{\frac{1}{2}} e^{-j \tan^{-1} \omega T}$$

因此, 比值  $(1+j\omega T)/(1-j\omega T)$  具有单位模, 其相位等于  $2 \tan^{-1} \omega T$ , 即,

$$\frac{1+j\omega T}{1-j\omega T} = e^{j 2 \tan^{-1} \omega T} \quad (10.104)$$

因此,

$$z = \frac{1}{2} [1 + e^{j 2 \tan^{-1} \omega T}] \quad (10.105)$$

根据式(10.105), 当  $\omega$  从  $-\infty$  变化到  $+\infty$  时, 在  $z$  平面上的轨迹是一个圆, 圆心位于  $z=1/2$  处, 半径也为  $1/2$ , 如图10.19所示。仅在很小的  $\omega T$  (即, 仅当所考虑的频率  $\omega$  比抽样率

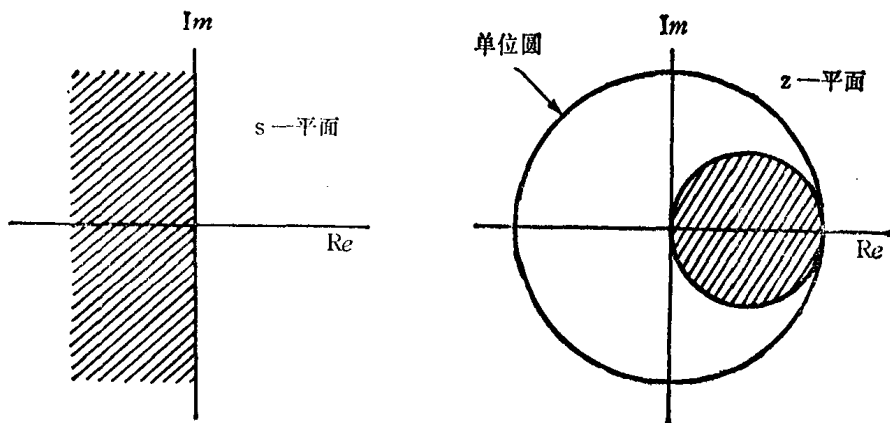


图10.19 用后向差分代替导数的变换  $z=1/(1-sT)$

$1/T$  低得多时)时,该圆上的  $|z|$  才接近单位圆。因此,当  $H_c(j\omega)$  基本上是带限时,我们就可以把  $T$  选得足够小,以便在所考虑的频带内,  $H_d(e^{j\Omega})$  近似于  $H_c(j\omega)$ 。换句话说,如果希望通过后向差分近似来模拟由微分方程表征的系统,那么,就必须选择微分步长  $T$ ,使得  $1/T$  比连续时间系统的带宽小得多,这相当于信号的显著过抽样。

总之,虽然后向差分变换避免了在使用冲激不变法时所遇到的混迭问题,但已看出,它有其自身的问题。具体说,除了  $|z|=1$  附近的很小范围以外,  $j\omega$  轴甚至不能近似地映射到单位圆上。

在以上讨论中,详细地研究了通过后向差分代替导数来进行微分方程到差分方程的变换。有许多种用差分来近似导数的其他方法,并且每一种方法对应于  $H_c(s)$  和  $H_d(z)$  之间的不同变换。这样的方案之一,是利用前向差分(而不是后向差分),如习题10.38中所讨论的那样。

### 10.8.3 双线性变换

本节中,我们要研究  $s$  平面和  $z$  平面之间的另一种称为双线性变换的映射。它由下式确定

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (10.106)$$

这一变换是可逆的,其逆映射为

$$z = \frac{1+(T/2)s}{1-(T/2)s} \quad (10.107)$$

在此情况下,则

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s=(T/2)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]} \quad (10.108)$$

如习题10.40中所给出的。这种变换也是由一种适于用数值积分的微分方程的特殊近似法(梯形法)而形成的。根据式(10.107),当  $s=\sigma+j\omega$  时,

$$z = \frac{[1+(T/2)(\sigma)] + j\omega T/2}{[1-(T/2)(\sigma)] - j\omega T/2} \quad (10.109)$$



当  $\sigma < 0$  时,  $|z|$  小于 1, 所以  $s$  平面的左半部映射到单位圆内部。同样, 当  $\sigma > 0$  时,  $|z|$  大于 1, 因此  $s$  平面的右半部映射到单位圆的外部。当  $z = e^{j\Omega}$  时, 由式(10.106),

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{j\Omega}}{1 + e^{j\Omega}} = \frac{2}{T} \frac{j \sin(\Omega/2)}{\cos(\Omega/2)} = j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (10.110)$$

因此, 单位圆映到  $j\omega$  轴上, 其连续时间和离散时间频率变量之间的关系为

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2} \quad (10.111a)$$

$$\Omega = 2 \tan^{-1} \frac{\omega T}{2} \quad (10.111b)$$

图10.20表示双线性变换的映射特性。因为整个  $j\omega$  轴 ( $\omega$  从  $-\infty$  到  $+\infty$ ) 都映入单位圆的圆周线上 ( $\Omega$  从  $-\pi$  经过 0 到  $+\pi$ ), 故应用双线性变换也避免了混迭。

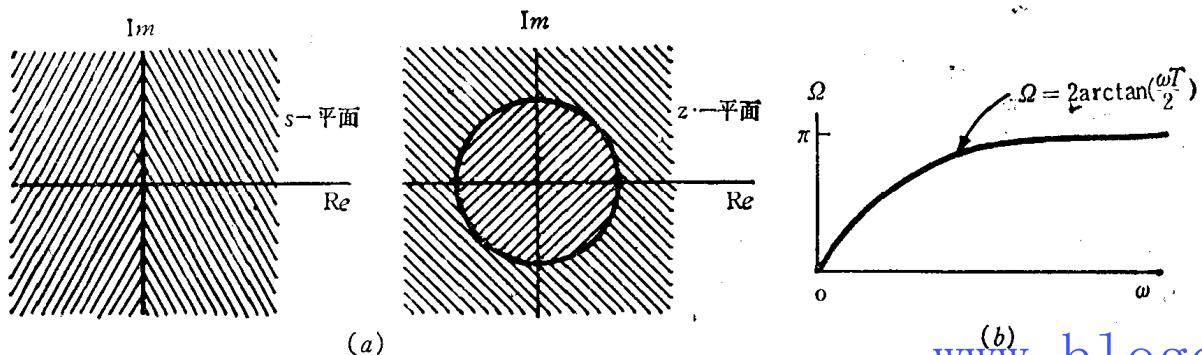


图10.20 双线性变换的映射: (a)  $s$  平面的左半部映入  $z$  平面单位圆之内, 又  $s$  平面的右半部映到单位圆之外; (b) 连续时间频率变量  $\Omega$  和离散时间频率变量  $\omega$  之间的非线性映射

由于利用了双线性变换, 稳定的连续时间系统总可以映射为稳定的离散时间系统, 并且离散时间系统的频率响应将精确地重现连续时间系统的频率响应。但是存在频率轴的非线性变形 [如式(10.111)所确定的], 例如, 如果我们把双线性变换应用到一个具有图6.34(c)所示频率特性的连续时间等波纹滤波器时, 则所得到的离散时间滤波器的通带和阻带内同样具有等纹波特性。这就是通过双线性变换只改变了独立变量 (即, 频率轴) 这一事实的结果, 然而, 纹波的频率位置及通带和阻带的边缘自然会受到影响。如果我们对利用模拟设计法和双线性变换法来设计一个给定技术指标的数字滤波器感兴趣的话, 就必须把这些离散时间技术条件“预畸变”成为  $H_c(j\omega)$  的技术条件, 以便将因双线性变换所引起的频率变形考虑在内。例如, 如习题10.41所说明的那样, 为了设计一个给定带宽和通带中心频率的带通数字滤波器, 可先设计一个连续时间带通滤波器, 再利用双线性变换来实现。但是, 由于式(10.111)是非线性频率变形, 因此, 该连续时间滤波器技术条件中所要求的带宽, 既取决于所需离散时间系统的带宽, 又取决于其中心频率。

## 10.9 单边 $z$ 变换

到现在为止, 本章所讨论的  $z$  变换是一种通常称为双边  $z$  变换的形式。与拉普拉斯变换的情况一样, 还有另一种称为单边  $z$  变换的形式。单边  $z$  变换在分析具有初始条件 (即,

在起始时,不是静止的)的线性常系数差分方程所确定的因果系统时,是特别有用的。单边 $z$ 变换的讨论,非常类似于9.8节中单边拉普拉斯变换的讨论。

序列 $x[n]$ 的单边 $z$ 变换 $\tilde{X}(z)$ 定义为

$$\tilde{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (10.112)$$

与双边 $z$ 变换不同之处,在于仅在 $n$ 的非负值范围内实现求和,而不管 $n < 0$ 时 $x[n]$ 是否为零。因此,实际上, $x[n]$ 的单边 $z$ 变换可以设想为 $x[n]u[n]$ (即, $x[n]$ 乘上单位阶跃序列)的双边 $z$ 变换。因此,特别是对于 $n < 0$ 时其值为零的任何序列,单边和双边 $z$ 变换是相同的。还应当提出的是,由于 $x[n]u[n]$ 总是一个右边序列,其 $x(z)$ 的收敛域总在单位圆之外。

例10.15 研究信号

$$x[n] = a^n u[n] \quad (10.113)$$

因为 $n < 0$ 时 $x[n] = 0$ ,所以这是一个单边和双边 $z$ 变换相等的例子。因此,

$$\tilde{X}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (10.114)$$

例10.16 令

$$x[n] = a^{n+1} u[n+1] \quad (10.115)$$

这时,单边和双边变换不相等。特别是,根据例10.1和时间移位性质10.5.2,可以获得双边变换,具体为

$$\tilde{X}(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (10.116)$$

而单边变换为

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} \\ &= \frac{a}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \end{aligned} \quad (10.117)$$

如前所述,单边 $z$ 变换的重要性在于分析一个由线性常系数差分方程所表征的系统上的应用。在双边 $z$ 变换情况下,我们利用了10.5节所讨论的性质,把 $z$ 变换应用于求解差分方程。单边 $z$ 变换的大多数性质与双边 $z$ 变换的相同,但也有一些例外,其中最重要的就是移位性质。这个性质在解差分方程时尤其重要。对双边变换来说,上述性质已在10.5.2节中讨论过。为了研究单边变换的相应性质,我们来分析信号

$$y[n] = x[n-1] \quad (10.118)$$

因此,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-(n+1)} \\ &= x[-1] + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \end{aligned} \quad (10.119)$$

结果

$$\tilde{Y}(z) = x[-1] + z^{-1}x(z)$$

同样地, 信号

$$w[n] = x[n-2] \quad (10.120)$$

具有单边变换

$$\tilde{W}(z) = x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}x(z) \quad (10.121)$$

并且我们可以得到  $x[n-m]$  的单边变换的相应表达式。这个性质可以用来解带初始条件的差分方程。为了说明这点, 我们分析下列例子。

例10.17 研究方程式

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n] \quad (10.122)$$

其中  $x[n] = u[n]$ , 并且初始条件为

$$y[-1] = 1 \quad (10.123)$$

把单边变换应用到式(10.122)的两边, 得出

$$\tilde{Y}(z) + 3 + 3z^{-1}\tilde{Y}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (10.124)$$

解  $\tilde{Y}(z)$  得到

$$\tilde{Y}(z) = -\frac{3}{1+3z^{-1}} + \frac{1}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})} \quad (10.125)$$

进行部分分式展开, 得到

$$\tilde{Y}(z) = -\frac{\frac{9}{4}}{1+3z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-z^{-1}} \quad (10.126)$$

并将例10.16应用到每一项, 得到

$$y[n] = \left[ \frac{1}{4} - \frac{9}{4}(-3)^n \right] u[n] \quad (10.127)$$

www.blogoil.com

## 10.10 小结

本章, 我们推导了离散时间信号的  $z$  变换。这种讨论和推导, 完全类似于连续时间信号拉普拉斯变换的相应论述, 但是也有一些重要差别。例如, 在  $s$  复平面上, 拉普拉斯变换可以简化为虚轴上的傅里叶变换, 而  $z$  变换在  $z$  复平面上简化为单位圆上的傅里叶变换。对于拉普拉斯变换, ROC 由一带状区域或半个平面 (即, 向一个方向延伸到无限远) 组成。而对于  $z$  变换, ROC 是一个环, 或许由环向外延伸到无限远和/或向内延伸到包含原点。如同拉普拉斯变换那样, 像序列的右边、左边或双边性质这类时域特性, 以及 LTI 系统的因果性或稳定性, 都可与收敛域的性质相联系。尤其是对于有理  $z$  变换, 这些时域特性可与收敛域有关的极点位置相联系。

本章, 我们还讨论了若干从连续时间到离散时间系统的映射问题。这类映射的采用, 是受了一些见解的启发, 其中包括这样的事实, 即, 连续时间系统设计方法具有悠久的历史。这样, 通过已讨论过的变换, 就能设计离散时间系统。另一种启发, 在于借助离散时间系统来实现连续时间系统常常是有效的这一事实。在这种情况下, 所需要的连续时间系统必须变换为适当的离散时间系统。

本章以单边  $z$  变换的简短讨论结束。这种  $z$  变换形式, 对于求解由带非零初始条件的线性常系数差分方程所表征系统的响应时, 特别有用。

## 习 题

10.1. 确定下面每一序列的  $z$  变换。画出极点—零点图，并指出收敛域，简要说明是否存在序列的傅里叶变换。

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\delta[n]$ ;   | (b) $\delta[n-1]$ ;                           |
| (c) $\delta[n+1]$ ;   | (d) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ;       |
| (e) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$ ;   | (f) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$ ;      |
| (g) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} u[n]$ ; | (h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$ . |

10.2. 确定下面序列的  $z$  变换，所有和式用闭合式表示。画出极点—零点图，并指出收敛域，指出是否存在序列的傅里叶变换。

- (a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \{u[n] - u[n-10]\}$ ;
- (b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ ;
- (c)  $7\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left[\frac{2\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right] u[n]$ ;
- (d)  $x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & 0 \leq n \leq 9, \\ 0, & 9 < n. \end{cases}$

10.3. 在10.2节性质4中表明，如果  $x[n]$  是右边序列，且圆  $|z|=r_0$  在ROC之内，那末所有  $|z|>r_0$  的  $z$  有限值也在ROC内。该讨论中，已作了直观的解释，而一个更正规的论证，完全类似于9.2节对有关拉普拉斯变换的性质4所采用的论证。具体说，假定一个右边序列  $x[n]$ ，即

$$x[n]=0, \quad n < N_1,$$

对该序列来说

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| r_0^{-n} = \sum_{N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

如果  $r_0 < r_1$ ，则

$$\sum_{N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} \leq A \sum_{N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} \quad (\text{P 10.3})$$

式中  $A$  是一个正常数。

(a) 证明式(P 10.3)是正确的，并确定用  $r_0$ 、 $r_1$  和  $N_1$  表示的常数  $A$ 。

(b) 根据(a)的结果，证明10.2节中性质4。

(c) 用类似上述的论证，证明10.2节性质5的正确性。

10.4. 利用下面指定的方法，确定与下列每一个  $z$  变换有关的序列。

(a) 部分分式法：

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}, \quad \text{并且 } x[n] \text{ 绝对可和。}$$

(b) 长除法：

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad x[n] \text{ 为右边序列。}$$

①原文误为  $|z| < r_0$ 。——译者注

(c) 部分分式法:

$$X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}, \quad x[n] \text{ 绝对可和。}$$

10.5. 本题列出了几个  $z$  变换。对于每一个变换, 试用两种方法 (部分分式展开法和基于长除法的泰勒级数法) 求其  $z$  逆变换。

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2},$$

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > \frac{1}{a}.$$

10.6. 试研究具有下列  $z$  变换的右边序列  $x[n]$

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} \quad (\text{P 10.6})$$

- (a) 试将式 (P 10.6) 进行部分分式展开 (表示成  $z^{-1}$  的多项式之比), 然后根据展开式确定  $x[n]$ 。  
 (b) 将式 (P 10.6) 改写为  $z$  的多项式之比, 并对  $X(z)$  进行部分分式展开 (表示成  $z$  的多项式), 然后根据展开式确定  $x[n]$ , 并证明该序列与 (a) 中所得序列相等。

10.7. 研究具有下列  $z$  变换的右边序列  $x[n]$ ,

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} \quad (\text{P 10.6})$$

- (a) 试将  $X(z)$  写成  $z$  而不是  $z^{-1}$  的多项式之比。  
 (b) 试用部分分式展开法, 将  $X(z)$  表示为各项之和, 每一项表示 (a) 中答案的一个极点。  
 (c) 确定  $x[n]$ 。

10.8. 一右边序列  $x[n]$  具有  $z$  变换  $X(z)$  为

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

试确定  $n < 0$  时  $x[n]$  值。

10.9. (a)  $x_1[n]$  为左边序列, 其  $z$  变换为  $X_1(z) = e^z$ , 在  $z=0$  邻域内, 将  $X(z)$  用泰勒级数展开, 试确定  $x_1[n]$ 。

(b)  $x_2[n]$  ① 为右边序列, 其  $z$  变换为  $X_2(z) = e^{-1/z}$ , 试确定  $x_2[n]$ 。

10.10. 试用幂级数展开式

$$\lg(1-w) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{w^i}{i}, \quad |w| < 1,$$

确定下列每一  $z$  变换的逆变换:

① 原文误为  $x_3[n]$ 。——译者注