北京科技大学 2015—2016 学年第二学期
高等数学 AII 期末模拟试题

班级________________学号______________姓名_____________考试教室__________

题号	一	二	三	四	课程考核成绩
评分					
评阅					

说明：1、要求正确地写出主要计算或推到过程，过程有错或只写答案者不得分；

2、考场、班级、学号、姓名均需写全，不写全的试卷为废卷；

3、涂改学号及姓名的试卷为废卷；

4、请在试卷上答题，在其它纸张上的解答一律无效。

一、填空题

1. 求过点 M（-1, 0, 1），且垂直于直线 l_1 ：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{1}$ 又与直线 l_2：

$2x+2=2y-6=z$ 相交的直线方程__________

2. 已知 $z=3x+\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ （a、b 均为常数），求：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ ______

3. 设函数 $g(x,y)=\int_1^{xy}e^{-t^2}dt$，求 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ =_______

4. 计算 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \dfrac{\sin z}{1-z}dz$ =________

5. 已知 Σ 为球面 $y^2+x^2+z^2=1$ 的外侧，试计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{dydz}{x}+\dfrac{dzdx}{y}+\dfrac{dxdy}{z}=$

____

6. 设二阶常系数线性微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\alpha\dfrac{dy}{dx}+\beta y=\gamma e^x$ 的一个解为

$y=e^{2x}+(1+x)e^x$，则 α=_____ β =_____ γ =_____ 方程的通解为

____

二、选择题

1.若 $f(x,2x)=x^2+3x, f_x(x,2x)=6x+1$，则 $f_y(x,2x)=$ （　　）

(A) $x+\frac{3}{2}$　　(B) $x-\frac{3}{2}$　　(C) $2x+1$　　(D) $-2x+1$

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ （　　）

(A) 处处连续；　　(B) 处处有极限，但不连续；

(C) 仅在（0,0）点连续；　　(D) 除（0,0）点外处处连续

3.下列关系式错误的是（　　）

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　　(B) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(C) $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$　　(D) $\vec{a}\times\vec{a}=0$

4.二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}\sqrt[3]{x^2+y^2}dxdy$ 的值等于（　　）

(A) $\frac{7}{6}\pi$　　(B) $\frac{3}{2}\pi$　　(C) $\frac{6}{5}\pi$　　(D) $\frac{3}{4}\pi$

5、$\frac{dy}{dx}+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$ 是（　　）方程.

(A)　可分离变量　　(B) 齐次

(C)　一阶线性　　(D) 伯努利

6、下列对面积的曲面积分不为零的有（　　）.

$(A)\ \oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} x\cos x ds$

$(B)\iint\limits_{\Sigma} y^3 ds$,其中$\sum$ 是椭球面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$位于第一和第四象限部分

$(C)\ \oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}\frac{xy+yz+xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}ds$

$(D)\ \oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+y^2+x+y)ds$

7、设 P(x,y),Q(x,y)在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数 P(x,y)dx+Q(x,y)dy 在 G 内为某一函数 U(x,y)的全微分，计算 U(x,y)的公式是（）

$(A).U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$

$(B).U(x,y)=\int_{x_0}^{x}Q(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}P(x_0,y)dy$

$(C).U(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dx+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx$

$(D).U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$

三、求曲线$L:\begin{cases} x=\int_0^t e^u \cos u du \\ y=2\sin t+\cos t \\ z=1+e^{3t} \end{cases}$在 t=0 处相应点处的切线和切平面方程。

四、求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

五、设函数 f(t)具有连续的二阶导数，且 $f'(1)=f(1)=1$ 试确定函数 $f(\frac{y}{x})$ 使得 $\oint_l [\frac{y^2}{x}+xf(\frac{y}{x})]dx+[y-xf'(\frac{y}{x})]dy=0$ 其中 L 是不与 y 轴相交的任意的简单正向闭合路径

六、

(1)设 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，计算 $\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$,其中 a>0

(2)计算曲线积分 I=$\oint_c (z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$ 其中 C：$\begin{matrix} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{matrix}$

从 z 轴正向往负方向看是顺时针.

七、设函数 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$ 其中 f(x)是连续函数，求 $f(x)$ 的表达式

八、设$u=f(\sqrt{x^2+y^2})$函数有连续的二阶偏导数，且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求函数$u$

一、填空题

1. $\frac{x+1}{13}=\frac{y}{16}=\frac{z-1}{25}$

解：∵直线 l_0 与 l_2 相交

且 $2x+2=2y-6=z=t$

$\therefore \begin{cases} x=\frac{t-2}{2} \\ y=\frac{6+t}{2} \\ z=t \end{cases}$

设交点为 $(\frac{t_0-2}{2}, \frac{6+t_0}{2}, t_0)$

∵ l_0 过点 $M(-1,0,1)$

∴ l_0 方向向量 $\vec{s}$ 可表示为 $(\frac{t_0}{2}, \frac{6+t_0}{2}, t_0-1)$

∵ l_0 垂直于 l_1

且 l_1: $\vec{s}=(3,-4,1)$

$\therefore \frac{3t_0}{2}-2(6+t_0)+t_0-1=0$

$\therefore t_0=26$

$\therefore \vec{s}=(13,16,25)$

∴ l_0 表示为

$\frac{x+1}{13}=\frac{y}{16}=\frac{z-1}{25}$

2. D

解：$z=3x+\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=3+\frac{\frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=3+\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-(x-a)\cdot 2(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{2(y-b)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-(y-b)\cdot 2(y-b)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

3. $-2e^{-(xy)^2}$

解：$g(x,y)=\int_1^{xy} e^{-t^2}dt$

$\therefore \frac{\partial g}{\partial x}=e^{-(xy)^2}\cdot y \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y}=e^{-(xy)^2}\cdot x$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y\cdot e^{-(xy)^2}\cdot(-2xy^2)=(-2xy^3)e^{-(xy)^2}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x\cdot e^{-(xy)^2}\cdot(-2x^2y)=(-2x^3y)\cdot e^{-(xy)^2}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=e^{-(xy)^2}+y\cdot e^{-(xy)^2}\cdot(-2x^2y)=e^{-(xy)^2}(1-2x^2y^2)$

$\therefore \frac{x}{y}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(-2x^2y^2)\cdot e^{-(xy)^2}+e^{-(xy)^2}(4x^2y^2-2)+(-2x^2y^2)\cdot e^{-(xy)^2}=-2e^{-(xy)^2}$

4. $\frac{1}{2}(1-\sin 1)$

解: $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{\sin z}{1-z}\,dz$

$\because 0<z<y<x<1$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 \frac{\sin z}{1-z}\,dz\int_z^1 dy\int_y^1 dx$

$=\int_0^1 \frac{\sin z}{1-z}\,dz\int_z^1 (1-y)\,dy$

$=\int_0^1 \frac{\sin z}{1-z}\cdot\left(y-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_z^1\,dz$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)\sin z\,dz$

$=\frac{1}{2}(1-\sin 1)$

证明 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)\,dz$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 f(z)\,dz$

解: $\int_0^x dy\int_0^y f(z)\,dz$

$=\int_0^x f(z)\,dz\int_z^x dy$

$=\int_0^x (x-z)f(z)\,dz$

$\int_0^1 dx\int_0^x (x-z)f(z)\,dz$

$=\int_0^1 f(z)\,dz\int_z^1 (x-z)\,dx$

$=\int_0^1 \left(\frac{1}{2}z^2-z+\frac{1}{2}\right)f(z)\,dz$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 f(z)\,dz$

5. 12π

解: 为封闭曲面，根据~~高斯~~公式得，且 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，$\Sigma_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$\Sigma_2: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$

$I=2\iiint\limits_{D_{xy}} -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\,dxdydz$

$=-2\iiint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\,dxdydz$

由对称性得，$I=-6\iiint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{z^2}\,dxdydz$

$=-6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\cdot r^2\sin\varphi\,dr$ （错误做法）

解: 由对称性得，$\oiint\limits_{\Sigma} \frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}=3\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}\,dxdy$

$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho=12\pi$

6. -3、2、-1 $\quad y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

解: $y=e^{2x}+(1+x)e^x$

$\therefore y'=2e^{2x}+e^x+(1+x)e^x$

$y''=4e^{2x}+e^x+e^x+(1+x)e^x$

$\therefore 4e^{2x}+2e^x+(1+x)e^x+\alpha\left[2e^{2x}+e^x+(1+x)e^x\right]+\beta\left[e^{2x}+(1+x)e^x\right]=\gamma e^x$

$\therefore (4+2\alpha+\beta)e^{2x}+(2+1+x+\alpha+\alpha+\alpha x+\beta+\beta x)e^x=\gamma e^x$

$\therefore \begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\ 3+x+2\alpha+\alpha x+\beta+\beta x=\gamma\\ 1+\alpha+\beta=0\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=2\\ \gamma=-1\end{cases}$

$\therefore y''-3y'+2y=-e^x$

$y''-3y'+2y=-e^x$

$y''-3y'+2y=0$

对应特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0 \rightarrow \lambda=1$或$\lambda=2$

$\therefore$齐次方程解为$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

再设其特解为$y=cxe^x$

$\therefore y'=cxe^x+ce^x$

$y''=cxe^x+ce^x+ce^x=cxe^x+2ce^x$

代入得，$cxe^x+2ce^x-3cxe^x-3ce^x+2cxe^x=-e^x$

$\therefore -ce^x=-e^x$

$\therefore c=1$

$\therefore$通解为$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

二、选择题

1\. D

解：$f'(x,2x)=2x+3$

$\therefore f_x\cdot 1+2f_y=2x+3$

$\therefore f_y=-2x+1$

2\. A

解：$\because$对于$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=2\varepsilon$，当(x,y)属于$(0,0)$的δ邻域$U(\delta)$，

即$\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，有$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\varepsilon$

$\therefore f(x,y)$在$(0,0)$点处连续

3\. D

解：$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

4\. D

解：$\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\sqrt[3]{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^{\frac{3}{2}}\rho\,d\rho=\frac{3}{4}\pi$

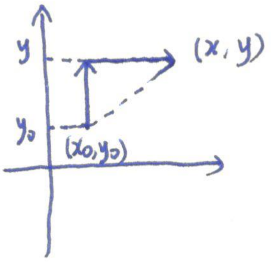
5\. A

6. D

解：根据曲域是否对称及奇函数可知.

7. C

解



三、

解：$L:\begin{cases} x=\int_0^t e^u\cos u\,du \\ y=2\sin t+\cos t \\ z=1+e^{3t} \end{cases}$

当 $t=0$ 时，$x=0$，$y=1$，$z=2$

$\begin{cases} x'=e^t\cos t \\ y'=2\cos t-\sin t \\ z=3e^{3t} \end{cases}$

∴当 $t=0$ 时，$x'=1$，$y'=2$，$z'=3$

∴切线为 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$

切平面方程为 $x+2(y-1)+3(z-2)=0$

即 $x+2y+3z-8=0$

四、

解：$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$

$\begin{cases} f_x=3x^2+6x-9=0 \\ f_y=-3y^2+6y=0 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} x=-3\text{或}1 \\ y=0\text{或}2 \end{cases}$ ∴可能取极值的点有$(-3,0)(-3,2)(1,0)(1,2)$

∵ $f_{xx}=6x+6$，$f_{yy}=-6y+6$，$f_{xy}=0$

由Hesse矩阵及极值的充分条件得

在$(-3,2)$取极大值，为31

在$(1,0)$取极小值，为-5

五、

解：$\oint_L [\frac{y^2}{x}+xf(\frac{y}{x})]dx+[y-xf'(\frac{y}{x})]dy=0$

$P=\frac{y^2}{x}+xf(\frac{y}{x})$ ，$Q=y-xf'(\frac{y}{x})$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{x}+xf'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}=\frac{2y}{x}+f'(\frac{y}{x})$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=-f'(\frac{y}{x})-xf''(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})=-f'(\frac{y}{x})+\frac{y}{x}f''(\frac{y}{x})$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$\therefore \frac{2y}{x}+f'(\frac{y}{x})=-f'(\frac{y}{x})+\frac{y}{x}f''(\frac{y}{x})$

$\therefore \frac{y}{x}f''(\frac{y}{x})-2f'(\frac{y}{x})-\frac{2y}{x}=0$

设 $\frac{y}{x}=t$ $\therefore tf''(t)-2f'(t)-2t=0$

设 $p=f'(t)$

$\therefore tp'-2p=2t$

$\therefore p'-\frac{2}{t}p=2$

$\therefore$ 通解为 $p=ct^2-2t$

$\because f(1)=1$ $\therefore c=3$

$\therefore p=3t^2-2t$

$\therefore f'(t)=3t^2-2t$

$\therefore f(t)=t^3-t^2+C$

$\because f(1)=1$ $\therefore C=1$

$\therefore f(\frac{y}{x})=(\frac{y}{x})^3-(\frac{y}{x})^2+1$

六、

解：(1) 补平面 Σ_1：$z=0$，$x^2+y^2\le a^2$ 取下侧，构成封闭曲面，由高斯公式得，

$\therefore I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$

$\because \iint_{\Sigma+\Sigma_1}=\frac{1}{-a}\iiint_{\Sigma+\Sigma_1} a+2(z+a)\,dxdydz=\frac{1}{-a}\iiint_{\Sigma+\Sigma_1} 3a+2z\,dxdydz$

$=\frac{1}{-a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^a(3a+2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr$

$=\frac{3\pi}{-2}a^3$

$$\iint_{\Sigma_1} = -\frac{1}{a}\iint_{\Sigma_1} a^2\,dx\,dy = -\pi a^3$$

$$\therefore I = -\frac{3\pi}{2}a^3 + \pi a^3 = -\frac{\pi}{2}a^3$$

(2)

$$x = \cos\theta$$
$$y = \sin\theta$$
$$z = 2-\cos\theta+\sin\theta$$

$$\therefore I = -\int_0^{2\pi}\left[(2-\cos\theta)\cdot(-\sin\theta) + (2\cos\theta-2-\sin\theta)\cdot\cos\theta + (\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\right]d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta + 2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta\right)d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(3\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\sin\theta - 2\cos\theta\right)d\theta$$

$$= -2\pi$$

七、

解: $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$

$$= \sin x - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x t f(t)\,dt$$

$$\therefore f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)\,dt - xf(x) + xf(x)$$

$$\therefore f''(x) = -\sin x - f(x)$$

$$\therefore f''(x) + f(x) = -\sin x$$

即 $y'' + y = -\sin x$

对应特征方程为 $\lambda^2+1=0 \rightarrow \lambda = \pm i$

$\therefore$ 齐次方程解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x$

再设其特解为 $y = x\cdot(C_3\cos x + C_4\sin x) = C_3x\cos x + C_4x\sin x$

$$\therefore y' = C_3\cos x - C_3x\sin x + C_4\sin x + C_4x\cos x$$

$$\therefore y'' = -C_3\sin x - C_3\sin x - C_3x\cos x + C_4\cos x + C_4\cos x - C_4x\sin x$$

代入 $y''+y = -\sin x$, $C_3 = \frac{1}{2}$, $C_4 = 0$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x\cos x$$

$$\therefore f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\cos x$$

$$\because f(0) = 0,\quad f'(0) = 1$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x$$

八、

$$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$\cancel{\therefore f'(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}+1}}$$

$\cancel{设\ \sqrt{x^2+y^2} = t}$

$$\cancel{\therefore f'(t) = \frac{t^3}{t+1} = \frac{t^3+1-1}{t+1} = t^2-t+1-\frac{1}{t+1}}$$

$$\cancel{\therefore f(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2} - \ln(\sqrt{x^2+y^2}+1) + C}$$

八、

解：$u=f(\sqrt{x^2+y^2})$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=f'\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

$=f''\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\because \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''+f'\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=x^2+y^2$

设 $\sqrt{x^2+y^2}=t$

$\therefore f''(t)+\frac{1}{t}\cdot f'(t)=t^2$

令 $p=f'(t)$

$\therefore p'+\frac{1}{t}p=t^2$

$\therefore$ 通解为 $p=\frac{C_1}{t}+\frac{t^3}{4}$

$\therefore f'(t)=\frac{C_1}{t}+\frac{t^3}{4}$

$\therefore f(t)=C_1\ln t+\frac{1}{16}t^4+C_2$

即 $u=C_1\ln(\sqrt{x^2+y^2})+\frac{1}{16}(x^2+y^2)^2+C_2$