§1-7 n 重贝努里概型

一 . 独立随机试验 设 E_1 与 E_2 是两个随机试验，如果 E_1 的各个结果与 E_2 的各个结果相互独立，则称 E_1 与 E_2 是相互独立的随机试验 .

二 .n 次相互独立试验

如果随机试验 E_1，E_2，$\cdots$，E_n 的各个结果相互独立，则称 E_1，E_2，$\cdots$，E_n 为相互独立的随机试验 .

返回主目录

三 .n 次相互独立试验的例子

- 掷 n 次硬币，可看作是 n 次独立试验；
- 某射手对同一目标射击 n 次，可看作是 n 次独立试验；
- 观察 n 个元件的使用寿命，可看作是 n 次独立试验 .

注意： 如果 E_1， E_2， $\cdots$， E_n 为相互独立的随机试验，A_i是$E_i(i=1,2,\cdots n)$中的随机事件，则A_1, A_2，$\cdots, A_n$相互独立。

返回主目录

例 1

三门火炮向同一目标射击，设三门火炮击中目标的概率分别为 0.3 ，0.6 ，0.8 ．若有一门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为 0.2 ；若两门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为 0.6 ；若三门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为 0.9 ．试求目标被摧毁的概率．

解：设：B ={ 目标被摧毁 }

$$A_i = \{\text{有}i\text{门火炮击中目标}\} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

$$C_i = \{\text{第}i\text{门火炮击中目标}\} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

返回主目录

由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

而

$$P(A_1)=P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1C_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1\overline{C}_2C_3)$$

$$=P(C_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(C_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)$$

$$=0.3\times0.4\times0.2+0.7\times0.6\times0.2+0.7\times0.4\times0.8$$

$$=0.332$$

$$P(A_2)=P(C_1C_2\overline{C}_3)+P(C_1\overline{C}_2C_3)+P(\overline{C}_1C_2C_3)$$
$$=P(C_1)P(C_2)P(\overline{C}_3)+P(C_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)+P(\overline{C}_1)P(C_2)P(C_3)$$
$$=0.3\times0.6\times0.2+0.3\times0.4\times0.8+0.7\times0.6\times0.8$$
$$=0.468$$

$$P(A_3)=P(C_1C_2C_3)=P(C_1)P(C_2)P(C_3)$$
$$=0.3\times0.6\times0.8 \quad =0.144$$

所以

$$P(B)=0.332\times0.2+0.468\times0.6+0.144\times0.9$$
$$=0.4768$$

返回主目录

四．贝努里（ Bernoulli ）试验

如果随机试验 E 只有两个结果，则称 E 为 Bernoulli 试验
一般地，我们将这两个结果记作A与$\overline{A}$，分别称为
"成功"与"失败".

Bernoulli 试验的例子

掷一枚硬币，只有"出现正面"与"出现反面"两种结果，因此"掷一枚硬币"可看作是一次 Bernoulli 试验.

掷一颗骰子，有六种结果.但如果我们只关心"出现六点"与"不出现六点"这两种情况，故"掷一颗骰子"也可以看作是 Bernoulli 试验.

返回主目录

Bernoulli 试验的例子

- **对同一目标进行一次射击，若只考虑“击中目标”与“未击中目标”两种情况，则“同一目标进行一次射击”是 Bernoulli 试验．**
- **在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑“至少通过 100 辆车”与“至多通过 99 辆车”这两种情况，这也是 Bernoulli 试验．**

n 重 Bernoulli 试验

- 若独立重复地进行 n 次 Bernoulli 试验，这里“重复”是指每次试验中事件 A 发生的概率（即每次试验中“成功”的概率）不变，则称该试验为 n 重 Bernoulli 试验．

n 重 Bernoulli 试验的例子

- 掷 n 次硬币，可看作是一 n 重 Bernoulli 试验．
- 掷 n 颗骰子，如果我们对每颗骰子只关心“出现六点”与“不出现六点”这两种情况，故“掷 n 颗骰子”也可以看作是一 n 重 Bernoulli 试验．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验的例子

- 对同一目标进行 n 次射击，若每次射击只考虑“击中目标”与“未击中目标”两种情况，则“同一目标进行 n 次射击”是一 n 重 Bernoulli 试验．
- 在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑“至少通过 100 辆车”与“至多通过 99 辆车”这两种情况，这是一次 Bernoulli 试验．若独立重复地做该试验 n 次，则它是一 n 重 Bernoulli 试验．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验中的基本事件及其概率

在 n 重 Bernoulli 试验中的基本事件为

$$A_1'A_2'\cdots A_n'$$

其中$A_i'(i=1,2,\cdots n)$**为**A**或**$\overline{A}$**，　总共**2^n**个。**

设在$A_1'A_2'\cdots A_n'$**中有**k**个**A_i'**为**A**，**$n-k$**个**A_i'**为**$\overline{A}$**，**

且$P(A)=p$**，**$P(\overline{A})=1-p=q$**，则由独立性，得**

$$P(A_1'A_2'\cdots A_n')=p^k q^{n-k}.$$

返回主目录

例 2

将一枚硬币掷 5 次，可看作是一 5 重 Bernoulli 试验

令：$A=\{$出现正面$\}$ 且：$P(A)=p$，$P(\overline{A})=q$

则，$P(AAAAA)=p^5$；

$P(AA\overline{A}\overline{A}\overline{A})=p^2q^3$；

$P(AA\overline{A}A\overline{A})=p^3q^2$；

$P(\overline{A}AA\overline{A}A)=p^3q^2$．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验中恰好成功 k 次的概率

设在 n 重 Bernoulli 试验中，

$$P(A)=p\,,\qquad P(\overline{A})=1-p=q$$

现考虑事件

$$B_{n,k}=\{n\text{重}Bernoulli\text{试验中事件}A\text{恰好发生}k\text{次}\}$$

现求概率 $P(B_{n,k})$：

在 n 次试验中，指定 k 次出现 A(成功)，其余 $n-k$ 次出现 $\overline{A}$(失败)，这种指定的方法共有 C_n^k 种．

返回主目录

n 重 Bernoulli 试验中恰好成功 k 次的概率

$$P\left(B_{n,k}\right)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \left(q=1-p\right)$$

$$\left(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\right)$$

注意　　**由二项式定理，我们有**

$$\sum_{k=0}^{n} P\left(B_{n,k}\right)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=\left(p+q\right)^n$$

$$=1$$

返回主目录

例 3

设在 N 件产品中有 M 件次品，每次从中任意取出一件，有放回地取 n 次．试求取出的 n 件产品中恰有 k 件次品的概率．

解：

B={ 取出的 n 件产品中恰有 k 件次品 }

每取一次只有两种结果：

$A=\{\text{取出次品}\}$，　　　$\overline{A}=\{\text{取出正品}\}$，

因此每取一次产品可看作是一次 Bernoulli 试验

返回主目录

例 4（续）

并且， $P(A)=\dfrac{M}{N}$ ， $P(\overline{A})=1-\dfrac{M}{N}$

因此，有放回地取 n 件产品可看作是一个 n 重

Bernoulli 试验．由前面的讨论，可知

$$P(B)=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

返回主目录

例 4

一大批产品的次品率为 0.05 ，现从中取出 10 件．试求下列事件的概率：

B={ 取出的 10 件产品中恰有 4 件次品 }

C={ 取出的 10 件产品中至少有 2 件次品 }

D={ 取出的 10 件产品中没有次品 }

解：

取 10 件产品可看作是一 10 重 Bernoulli 试验．

$$A=\{\text{取出一件产品为次品}\}$$

则 $P(A)=0.05$

返回主目录

例 5（续）

所以，

$$P(B)=C_{10}^{4}\times 0.05^{4}\times 0.95^{10-4}$$

$$=9.648\times 10^{-4}$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})$$

$$=1-C_{10}^{0}\times 0.05^{0}\times 0.95^{10}-C_{10}^{1}\times 0.05^{1}\times 0.95^{9}$$

$$=0.08614$$

$$P(D)=0.95^{10}\quad =0.5987$$

例 5

对同一目标进行射击，设每次射击的命中率均为 0.23 ，问至少需进行多少次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95 ？

解：设需进行 n 次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95 .

B={ n 次射击至少命中一次目标 }

进行 n 次射击，可看成是一 n 重 Bernoulli 试验 .

令：$A = \{$命中目标$\}$ 则，$P(A) = 0.23$

返回主目录

例 5（续）

则有 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.77^n$

由题意，得 $P(B)=1-0.77^n \quad 0.95$

所以，有 $0.77^n \le 0.05$

取对数，得 $n\ln 0.77 \le \ln 0.05$

所以，有 $n \quad \dfrac{\ln 0.05}{\ln 0.77}=11.46$

即至少需进行 12 次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95 .

返回主目录

例 6

某病的自然痊愈率为 0.25，某医生为检验某种新药是否有效，他事先制定了一个决策规则：把这药给 10 个病人服用，如果这 10 病人中至少有 4 个人痊愈，则认为新药有效；反之，则认为新药无效．求：

(1) 新药有效，并且把痊愈率提高到 0.35，但通过试验却被否定的概率．

(2) 新药完全无效，但通过试验却被判为有效的概率．

例 6（续）

解：给 10 个病人服药可看作是一 10 重 Bernoulli 验．

令：$A=\{某病人痊愈\}$　　$P(A)=0.35$

(1) 若新药有效，则

此时若否定新药，只有在试验中不到 4 人痊愈．因此

$$P\{否定新药\}=\sum_{i=0}^{3}C_{10}^{i}\times 0.35^{i}\times 0.65^{10-i}$$

$$=0.5138$$

返回主目录

例 6（续）

(2) 由于新药无效，则 $P(A)=0.25$

此时若肯定新药，只有在试验中至少有 4 人痊愈．因此

$$P\{\text{肯定新药}\}=\sum_{i=4}^{10}C_{10}^{i}\times 0.25^{i}\times 0.75^{10-i}$$

$$=1-\sum_{i=0}^{3}C_{10}^{i}\times 0.25^{i}\times 0.75^{10-i}$$

$$=0.2241$$

说 明

- 在例 6 的第一问中，该医生把有用的药给否定了，这种错误在统计学中称为第Ⅰ类错误（弃真错误），犯这类错误的概率称为Ⅰ类风险；
- 在例 6 的第二问中，该医生把无用的药给肯定了，这种错误在统计学中称为第Ⅱ类错误（取伪错误），犯这类错误的概率称为Ⅱ类风险；

第一章 小　结

1 阐述了随机试验的特征以及随机事件之间的关系及运算。

2 给出了随机事件的频率及概率的含义和基本性质。

3 给出了条件概率的定义及乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式。

4 给出了随机事件独立性的概念，会利用事件独立性进行概率计算。

6 引进贝努里概型及 n 重贝努里试验的概念，要会
计算与之相关事件的概率。

返回主目录