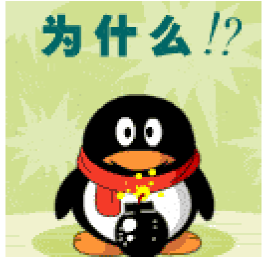
§4.4 高斯列主消去法

例4.7 求解方程组(计算过程保留3位有效数字)



$$\begin{cases} 0.50x_1 + 1.1x_2 + 3.1x_3 = 6.0 \\ 2.0x_1 + 4.5x_2 + 0.36x_3 = 0.020 \\ 5.0x_1 + 0.96x_2 + 6.5x_3 = 0.96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.50x_1 + 1.1x_2 + 3.1x_3 = 6.0 \\ \qquad 0.100x_2 - 12.0x_3 = -24.0 \\ \qquad -10.0x_2 - 24.5x_3 = -59 \end{cases}$$

$$x_3 = 2.02 \quad x_2 = 2.40 \quad x_1 = -5.80$$

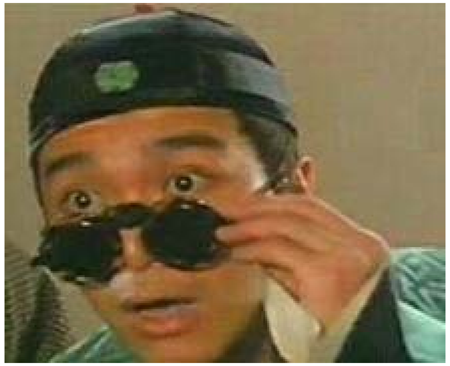
$$\begin{cases} 0.50x_1 + 1.1x_2 + 3.1x_3 = 6.0 \\ \qquad 0.100x_2 - 12.0x_3 = -24.0 \\ \qquad\qquad -1220x_3 = -2460 \end{cases}$$

$$x_3 = 2.00 \quad x_2 = 1.00 \quad x_1 = -2.60$$

交换次序：

$$\begin{cases} 5.0x_1 + 0.96x_2 + 6.5x_3 = 0.96 \\ 2.0x_1 + 4.5x_2 + 0.36x_3 = 0.020 \\ 0.50x_1 + 1.1x_2 + 3.1x_3 = 6.0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5.0x_1 + 0.96x_2 + 6.5x_3 = 0.96 \\ \qquad\qquad 4.12x_2 - 2.24x_3 = -0.364 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2.99x_3 = 5.99 \end{cases}$$



解得：

$$x_3 = 2.00$$

$$x_2 = 1.00$$

$$x_1 = -2.60$$

列主元消去法步骤：

假设Gauss消去法的消元过程进行到

第 $k\ (1 \le k \le n-1)$ 步，设

$$a_k = \max_{k \le i \le n} |a_{i,k}^{(k)}|$$

并令 i 为达到最大值 a_k 的最小行标 $i \ge k$ ，若 $i > k$

则交换 A 和 b 中的第 i 行和第k 行，

再进行消 元过程的第 k 步.

这时每个乘子 $l_{ik} = a_{i,k}^{(k)} / a_{k,k}^{(k)}$ 都满足

$$\left| l_{i,k} \right| \le 1, \quad i = k, \cdots, n,$$

可以防止有效数字大量丢失而产生误差.

全主元消去法

定义 $a_k = \max\limits_{k\le i,j\le n} |a_{i,j}^{(k)}|$

此时交换 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的行及的列，使主元位置的元素

的绝对值具有给出的最大值 $\boldsymbol{\alpha_k}$ ，

然后进行第 $\boldsymbol{k}$ 步消元过程

注意：因为有列的交换，未知量的次序有改变，待消元过程结束时必须还原. 多使用列主元消去法.

例4.8 用主元消去法求解方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \end{cases}$$

(1)列主元消去法

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一行与第三行互换}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 2.333 & 5 \\ 0 & 1.167 & 0.944 & 5.167 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二,三行互换}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & 1.167 & 0.944 & 5.167 \\ 0 & -1 & 2.333 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & 1.167 & 0.944 & 5.167 \\ 0 & 0 & 3.142 & 9.428 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 3.001 \quad x_2 = 2.000 \quad x_1 = 1.000$$

(2) 全主元消去法

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一,三行互换}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 2.333 & 5 \\ 0 & 1.167 & 0.944 & 5.167 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二,三列互换}} \begin{pmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & 2.333 & -1 & 5 \\ 0 & 0.994 & 1.167 & 5.167 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二次消元}} \begin{pmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & 2.333 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1.572 & 3.144 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 2.000 \quad x_3 = 3.000 \quad x_1 = 1.000$$

§ 4.5 三角分解法

Gauss消元法的实质是将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分解为

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ --单位下三角矩阵， $\boldsymbol{U}$ --上三角矩阵.

以3元线性方程组为例，用以下矩阵左乘A：

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -l_{21} & 1 & \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中$l_{i1} = a_{i1} / a_{11}$

$$\mathbf{L}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & & \\ -l_{21} & 1 & \\ -l_{31} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)}\\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)}\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{(1)}$$

$$\mathbf{L}_2=\begin{pmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -l_{32} & 1\end{pmatrix},\text{其中}\, l_{32}=a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$$

$$\mathbf{L}_2\mathbf{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -l_{32} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)}\\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)}\\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)}\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{(2)}$$

$$\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(2)} \Rightarrow \mathbf{A} = (\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1})\mathbf{A}^{(2)}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$化为$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

消元过程$\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$，回代过程$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$

定理4.9 n阶方阵A有LU分解，且分解式唯一的**充要条件**为$A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$非奇异，其中$A_k(k=1, 2, \cdots, n-1)$是A的k阶顺序主子式矩阵.

LU分解公式：

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, & j = 1,2,\dots,n \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}, & i = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

对k=2, 3, …, n：

$$\begin{cases} u_{kj} = a_{kj} - \sum\limits_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}, & j = k,\dots,n \\ l_{ik} = \dfrac{a_{ik} - \sum\limits_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}}{u_{kk}}, & i = k+1,\dots,n \end{cases}$$

【例 4.9】 对矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2&1&5\\8&7&2&10\\4&8&3&6\\12&6&11&20\end{pmatrix}$ 作 LU 分解。

$$\begin{bmatrix}4&2&1&5\\8&7&2&10\\4&8&3&6\\12&6&11&20\end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{c|ccc}4&2&1&5\\ \hline 2&7&2&10\\1&8&3&6\\3&6&11&20\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}4&2&1&5\\2&3&0&0\\ \hline 1&2&3&6\\3&0&11&20\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}4&2&1&5\\2&3&0&0\\1&2&2&1\\ \hline 3&0&4&20\end{array}\right]$$

$$A=\begin{pmatrix}1&&&\\2&1&&\\1&2&1&\\3&0&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&1&5\\&3&0&0\\&&2&1\\&&&1\end{pmatrix}$$

§ 4.6 Matlab应用实例

```
function [x, n] = jacobi (A, b, xo, eps, varagin)
 if nargin==3
    eps = 1.0e-6;
    M=200;
elseif nargin<3
    disp('Not enough parameters!');
    return;
elseif nargin==5
    M = varagin{1};
End
D  = diag(diag(A));
L = -tril(A, -1);
U = -triu(A,1);
B = D\(L+U);
f = D\b;
x = B*xo+f;
n = 1;
while norm(x-xo)>=eps
    xo = x;
    x = B*xo+f;
    n = n+1;
    if (n>=M)
        disp('Warning: 迭代不收敛');
        return;
    end
end
```

本章小结

向量范数和矩阵范数

$$\| \mathbf{x} \|_p = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p)^{\frac{1}{p}} \qquad \|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right] \qquad \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right]$$

迭代法 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$

- 雅克比迭代

$$\mathbf{x} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

- 高斯-赛德尔迭代

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

收敛性

迭代$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$收敛的充要条件： $\rho(\mathbf{B}) < 1$。

充分条件1: $\|\mathbf{B}\| < 1$

充分条件2：A为严格对角占优。

- 高斯消去法
  - 高斯列主元消元法
  - 高斯全主元消元法
- 三角分解法

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, & j = 1,2,\dots,n \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}, & i = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{kj} = a_{kj} - \displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}, & j = k,\dots,n \\ l_{ik} = \dfrac{a_{ik} - \displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}}{u_{kk}}, & i = k+1,\dots,n \end{cases}$$

课 后 作 业

第四章习题的1、2、9、13 (题中迭代公式2中x的下标应为2) 、14、16、19(题中Doolittle分解即为LU分解)。