北京科技大学
University of Science and Technology Beijing

离散数学

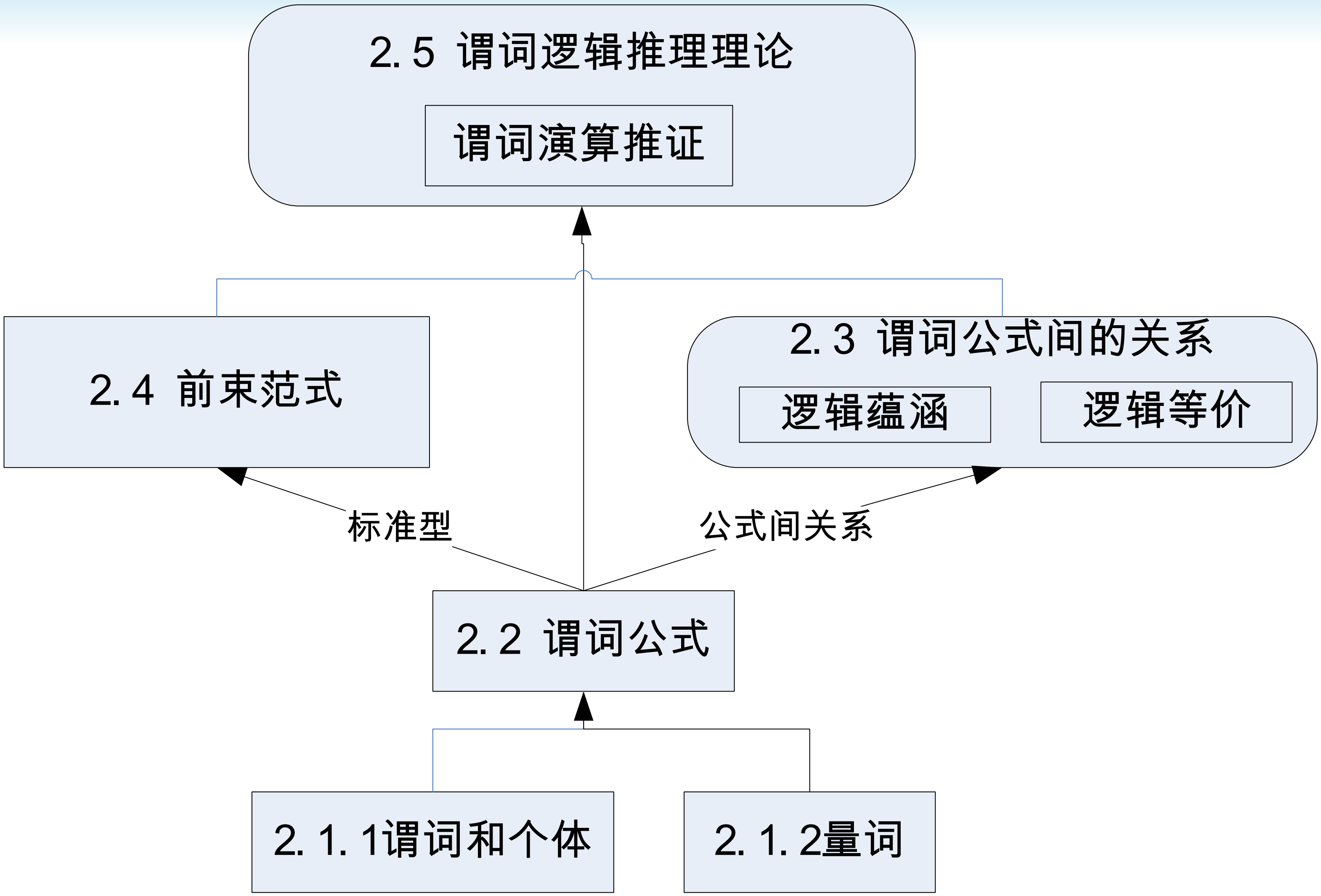
Discrete Mathematics

第二章 谓词逻辑

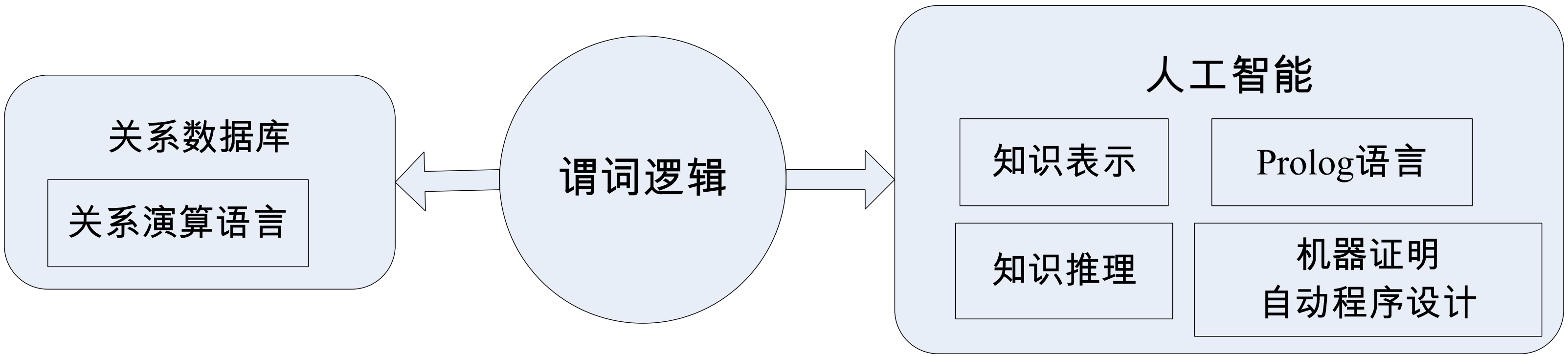
第二章 谓词逻辑

- 命题逻辑研究的基本单位是原子命题，不再对原子命题进行分解，也不再对原子命题的内部结构作进一步的分析。这是命题逻辑的一个特点，也是它的一个缺点。其缺点表现为以下两方面：
  - 1）它不能揭示某些有效的论证；
    - 例如：所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。这是简单而有名的苏格拉底三段论。直观地，我们认为这是一个有效的论证，但它却无法用命题逻辑予以推证。
  - 2）无法将具有某种共同属性的命题显示出来。
    - 例如：设 P 表示命题：张扬是教师； Q 表示命题：李明是教师
    - 显然，仅仅从命题符号 P 和 Q 看不出张扬和李明都是教师这一特性。
- 一阶谓词逻辑，又称为一阶谓词演算、狭义谓词逻辑、初等逻辑、量词理论等，一般简称为谓词逻辑。

谓词逻辑部分知识逻辑概图



谓词逻辑在计算机科学技术相关领域的应用概图



2.1 谓词的基本概念

谓词：刻画论域中个体性质或个体之间相互关系的模式。

2.1.1 谓词和个体

- 定义 2.1 个体是一切可以独立存在的、具体的或抽象的客体。
  - 例如，小王，小李，北京，3 等。
  - 个体可根据其是具体的还是抽象的，分为两种：
    - 1）个体常元：将表示具体或特定的客体的个体称作个体常元，一般用小写英文字母 a，b，c，…，a_1，b_1，c_1，…等表示。
    - 2）个体变元：将表示抽象或泛指的个体称为个体变元，常用 x，y，z，…，x_1，y_1，z_1，…等表示。
- 定义 2.2 个体变元的取值范围称为个体域（或称论域）。
  - 个体域可以是有穷集合，也可以是无穷集合。
- 定义 2.3 宇宙间的所有个体域聚集在一起所构成的个体域，称为全总个体域。
    - 在没有特别指明情况下，都使用全总个体域。

2.1.1 谓词和个体

- 定义 2.4 刻画论域中个体性质或个体之间相互关系的模式称为谓词。
- 谓词也可根据其是具体的还是抽象的，分为两种：
  - 1）谓词常元：表示具体性质或关系的谓词。
  - 2）谓词变元：表示抽象的、泛指的性质或关系的谓词。
- 无论是谓词常元或变元都用大写英文字母 F，G，H，…表示，可根据上下文区分。
- 单纯的谓词或单纯的个体都无法构成一个完整的逻辑含义，只有将它们结合起来时才能构成一个完整、独立的逻辑断言。

2.1.1 谓词和个体

- 定义 2.5 一个原子命题用一个谓词和 n 个有次序的个体常元 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 表示成 $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的形式，称为该原子命题的谓词形式。
  - 说明：若 n=0 ，则 P 称为零元谓词，即 P 本身就是一个命题；若 n=1 ，则称 P 是一元谓词；若 n=2 ，则称 P 是二元谓词，以此类推。一元谓词用来描述某一个体具有的性质，而 n 元谓词则用以描述 n 个个体之间的关系。
- 定义 2.6 若表达式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中， P 是某个 n 元谓词， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是个体变元，则 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为简单命题函数。
- 定义 2.7 由一个或多个简单命题函数以及联结词组合而成的表达式称为复合命题函数。
- 简单命题函数和复合命题函数统称为命题函数。
- 通常，命题函数不是命题，只有当其中的个体变元都用具体的个体取代后才成为命题。

2.1.1 谓词和个体

例 2.1 在一阶逻辑中试将下列命题符号化：

1）2 是质数；

2）平方为 -1 的数不是实数；

3）6 能被 2 整除。

4）武汉位于北京和广州之间。

解 1）用 a 表示 2，F(x) 表示“x 是质数”，则命题“2 是质数”符号化为 F(a)。

2）用 a 表示平方为 -1 的数，F(x) 表示“x 是实数”，则命题“平方为 -1 的数不是实数”符号化为 $\neg F(a)$。

3）用 a, b 分别表示 6, 2，F(x, y) 表示“x 能被整除 y”，则命题“6 能被 2 整除”符号化为 F(6, 2)。

4）用 a, b，c 分别表示武汉、北京、广州，F(x, y, z) 表示“x 位于 y 和 z 之间”，则命题“武汉位于北京和广州之间”符号化为 F(a, b, c)。

❖ 注意：谓词中个体的顺序是十分重要的，不能随意变更。

2.1.2 量词

❖ 表示个体常元或变元之间数量关系的词为**量词**。

- 1 ）**全称量词∀：** 表示所有的、每一个（∀是 All 中第一个字母 A 旋转 180°）。

  ∀ ∀x ：对个体域中所有的 x 。

  - 日常生活和数学中所用的“一切的”、“所有的”、“每一个”、“任意的”、“凡”、“都”等词可统称为全称量词。
  - 如：∀ xF(x) 表示个体域中所有的 x 具有性质 F ；∀ x∀yG(x,y) 表示个体域中所有的 x 和 y 有关系 G 。

2.1.2 量词

- 2 ）存在量词∃：表示存在、有一个（∃是 Exist 中第一个字母 E 旋转 180^{o} ）。

  ∀∃x ：个体域中有一个 x 。

  - 日常生活和数学中所用的“存在”、“有一个”、“有的”、“至少有一个”等词统称为存在量词。
  - 如：∃xF(x) 表示个体域中有一个 x 具有性质 F ；∃x∃yG(x,y) 表示个体域中存在 x 和 y 有关系 G ；∀x∃yG(x,y) 表示对个体域中每一个 x 都存在一个 y 使得 x 和 y 有关系 G ；∃x∀yG(x, y) 表示个体域中存在一个 x 使得对每一个 y,x 和 y 有关系 G 。

2.1.2 量词

- 说明：全称量词是对某类个体的全部进行肯定的判断，存在量词是对某类个体的部分有所肯定的判断。
  - 设个体域为 D ， G(x) 是某个具体的谓词，则∀ xG(x) 表示"对 D 中的任何一个个体，都有 G(x) 这个性质"，显然，这是一个可以确定真值的命题。当 D 为有穷集时：
    - ∀xG(x) 的真值为 1 ，当且仅当对于每一个 x∈D ， G(x) 都成立；
    - ∀xG(x) 的真值为 0 ，当且仅当存在某一个 x∈D ，使得 G(x) 不成立。
  - ∃xG(x) 表示"至少存在 D 中的一个个体，有 G(x) 这个性质"，显然，这是一个可以确定真值的命题。当 D 为有穷集时：
    - ∃xG(x) 的真值为 0 ，当且仅当对于每一个 x∈D ， G(x) 都不成立；
    - ∃xG(x) 的真值为 1 ，当且仅当至少存在某一个 x∈D ，使得 G(x) 都成立。

2.1.2 量词

例 2.2 在个体域分别为 D_1：人类集合和 D_2：全总个体域条件时，在一阶逻辑中将下面两个命题符号化。

1) 凡人都呼吸。

2) 有的人喜欢唱歌。

解：当个体域是 D_1：人类集合时，

令 F(x): x 呼吸；

G(x): x 喜欢唱歌。

1) 在 D_1 中除了人外，再无别的东西，因而“凡人都呼吸”应符号化为：$\forall xF(x)$

2) 在 D_1 中的有些个体（人）喜欢唱歌，因而“有的人喜欢唱歌”符号化为：$\exists xG(x)$

2.1.2 量词

当个体域是 D_2 ：全总个体域条件时，

分析：D_2 中除了有人外，还有万物，因而在 1) ，2) 符号化时，必须考虑将人分离出来。

令 M(x): x 是人；

F(x): x 呼吸；

G(x): x 喜欢唱歌。

在 D_2 中，1) ，2) 可以分别重述如下：

1) 对于宇宙间一切事物而言，如果事物是人，则他要呼吸。

2) 在宇宙间存在着喜欢唱歌的人。

于是 1) ，2) 的符号化形式分别为

1 ）$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

2 ）$\exists x(M(x)\wedge G(x))$

2.1.2 量词

- 注意：特性谓词的使用
- 由例 2.2 可知，命题 1) ， 2) 在不同的个体域 D_1 和 D_2 中符号化的形式不一样。主要区别在于，在使用全总个体域时，要将人与其他事物区分开来，为此引进了谓词 M(x) ，像这样的谓词称为**特性谓词**。
- 在命题符号化时一定要正确使用特性谓词。
- 一般，在全总个体域中，
  - **对全称量词，特性谓词常作蕴涵的前件**（如：$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$ ）；
  - **对存在量词，特性谓词常作合取项**（如：$\exists x(M(x)\wedge G(x))$ ）。

2.1.2 量词

例 2.3 试将下列命题符号化：

1 ）那件事谁都能做。

2 ）有些学生提前完成了任务。

3 ）并不是每一个学生都迟到过。

4 ）没有不呼吸的人。

解： 1 ）分析：命题“那件事谁都能做”等价于“一切人都能做那件事”。

令 $F(x)$ ： x 是人；

$G(x)$ ： x 能做那件事。

则原命题符号化为：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 。

2 ）令 $F(x)$ ： x 是学生；

$G(x)$ ： x 提前完成了任务。

则原命题符号化为：$\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 。

2.1.2 量词

3 ）令 $F(x)$ ： x 是学生

$G(x)$ ： x 迟到过”

则原命题符号化为 $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 。

该命题也等价于“有一些学生没迟到过”，符号化为 ：$\exists x(F(x)\wedge \neg G(x))$ 。

4 ）令 $F(x)$ ： x 是人；

$G(x)$ ： x 呼吸。

则原命题符号化为 $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

该命题也等价于“所有的人都呼吸”，符号化为 ：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 。

2.1.2 量词

例 2.4 试将下列命题符号化：

1) 兔子比乌龟跑得快。

2) 有的兔子比所有的乌龟跑得快。

分析（1）本题没有指明个体域，因而采用全总个体域。

（2）出现二元谓词，因而引入两个体变元 x 与 y 。

解：令 $F(x)$: x 是兔子；

$G(y)$: y 是乌龟；

$H(x,y)$: x 比 y 跑得快。

这两个命题分别符号化为：

1) $\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$ 或者 $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

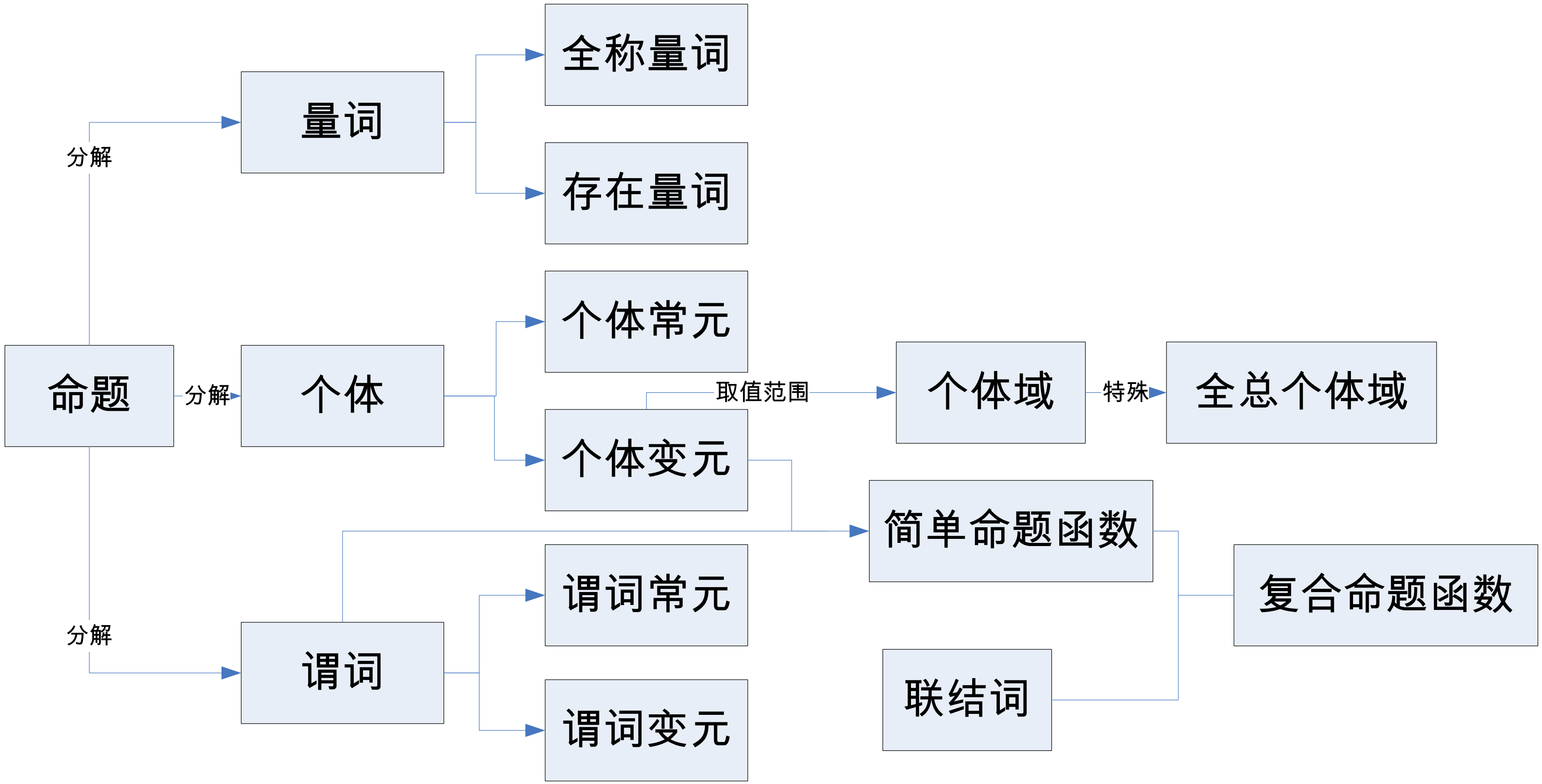
2) $\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

小结

- 谓词逻辑中进行命题符号化，首先也要确定简单命题及它们之间的联结词，然后对简单命题在谓词逻辑中用谓词、量词和个体进行符号化，在这里要注意：
  - 1 ）根据命题的实际意义选用全称量词或存在量词；
  - 2 ）根据个体域和是否有量词，确定是否需要特性谓词；
  - 3 ）分析命题中表示性质和关系的谓词，分别符号化为一元和 n 元谓词；
  - 4 ）注意谓词及量词的先后顺序；
  - 5 ）命题的符号化形式不是唯一的。

小结

- 本小节的思维形式注记图



作业

- 2.1 补充习题

2.2 谓词公式与解释

谓词公式：谓词演算的合式公式。

2.2.1 谓词公式的定义

- **定义 2.8** $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 称为谓词演算的**原子谓词公式**，其中， P 是谓词， $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是个体变元、个体常元或任意的 n 元函数。
- **定义 2.9 谓词演算的合式公式，又称为谓词公式**，由如下递归定义构成：
  - 1 ）原子谓词公式是谓词公式；
  - 2 ）若 A 是谓词公式，则 $(\neg A)$ 也是谓词公式；
  - 3 ）若 A 和 B 都是谓词公式，则 $(A\wedge B), (A\vee B), (A\rightarrow B), (A\leftrightarrow B)$ 都是谓词公式；
  - 4 ）若 A 是谓词公式， x 是任何个体变元，则 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 都是谓词公式；
  - 5 ）只有经过有限次地应用规则 1 ）， 2 ）， 3 ）， 4 ）所得到的公式是谓词公式。

2.2.1 谓词公式的定义

- 如
  - $F(x)$
  - $F(x) \vee \neg G(x,y)$
  - $\forall x(F(x) \to G(x))$
  - $\exists x \forall y(F(x) \to G(y) \wedge L(x,y))$

都是谓词公式。

2.2.2 自由与约束

- 定义 2.10 对于谓词公式∀ xA 或∃ xA 来说， x 称为量词∀ x 或量词∃ x 的指导变元或作用变元 。 A 称为相应量词的辖域。在∀ x 和∃ x 的辖域中， x 的所有出现都称为约束出现，所有约束出现的变元称为约束变元。 A 中不是约束出现的其他变元均称为是自由出现的，所有自由出现的变元为自由变元。

例 2.5 说明下列各式中量词的辖域与变元约束的情况：

1) $\forall xF(y)$

2) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

3) $\forall x(F(x)\rightarrow \exists yG(x, y))$

4) $\forall x\forall y(F(x, y)\wedge G(y, z))\wedge \exists xF(x, y)$

5) $\forall x(F(x)\wedge \exists xG(x, z)\rightarrow \exists yH(x, y))\vee G(x, y)$

6) $\forall x(F(x)\leftrightarrow G(x))\wedge \exists xH(x)\wedge R(x)$

2.2.2 自由与约束

解：1）$\forall xF(y)$

$\forall x$ 的辖域是 $F(y)$，其中 y 为自由出现。

2）$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\forall x$ 的辖域是 $F(x)\rightarrow G(x)$, x 为约束出现。

3）$\forall x(F(x)\rightarrow \exists yG(x, y))$

$\forall x$ 的辖域是 $F(x)\rightarrow \exists yG(x, y)$, $\exists y$ 的辖域是 $G(x, y)$，其中 x, y 都为约束出现。

4）$\forall x\forall y(F(x, y)\wedge G(y, z))\wedge \exists xF(x, y)$

$\forall x$ 的辖域是 $\forall y(F(x, y)\wedge G(y, z))$，$\forall y$ 的辖域是 $F(x, y)\wedge G(y, z)$，$\exists x$ 的辖域是 $F(x, y)$，其中在 $\forall x\forall y(F(x, y)\wedge G(y, z))$ 中，x，y 都为约束出现，z 为自由出现，在 $\exists xF(x, y)$ 中，x 为约束出现，y 为自由出现。

2.2.2 自由与约束

5 ）$\forall x(F(x)\wedge\exists xG(x, z)\rightarrow\exists yH(x, y))\vee G(x, y)$

$\forall x$ 的辖域是 $F(x)\wedge\exists xG(x, z)\rightarrow\exists yH(x, y))$ ，其中 x 的 3 次出现都为约束出现，但第 2 次出现是受量词$\exists$ x 的约束，而第 1 次、第 3 次出现是受量词$\forall$ x 的约束， z 为自由出现，$\exists$ x 的辖域是 G(x, z) 。$\exists$ y 的辖域是 H(x, y) ，其中 y 为约束出现， G(x, y) 中的 x, y 都为自由出现。

6 ）$\forall x(F(x)\leftrightarrow G(x))\wedge\exists xH(x)\wedge R(x)$

$\forall x$ 的辖域是 $F(x)\leftrightarrow G(x)$ ， x 为约束出现，$\exists$ x 的辖域是 H(x), x 也为约束出现， R(x) 中 x 的出现为自由出现。

2.2.2 自由与约束

- 定义 2.11　若公式 A 中不含自由出现的个体变元，则称 A 为封闭的公式，简称闭式。
  - 例如，$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$ 为闭式，而$\exists x(F(x) \wedge G(x,y))$ 不是闭式。
  - 要想使含 n（ $n \geq 1$ ）个自由出现的个体变元的公式变成闭式至少要加上 n 个量词。

2.2.2 自由与约束

- 将谓词公式中的约束变元更改名称符号，这一过程称为约束变元换名。
- 约束变元的换名规则：
  - 1 ）换名时，更改的变元名称的范围是量词中的指导变元，以及该量词辖域中所出现的所有该变元，在公式的其余部分不变；
  - 2 ）换名时一定不能更改为公式中的其他变元名称。
- 为了使一个变元在同一个公式中只以一种身份出现，除了进行约束变元换名外，也可以进行自由变元代入。
- 自由变元的代入规则：
  - 1 ）将给定公式中出现该自由变元的每一处都用新的个体变元替换；
  - 2 ）新变元不允许在原公式中以任何约束形式出现。

2.2.2 自由与约束

例 2.7 谓词公式$\forall x(F(x, y) \vee G(x, z))$，若对约束变元 x 换名，则可变为$\forall v(F(v, y) \vee G(v, z))$，但下列换名都是错误的：

1 ）$\forall v(F(v, y) \vee G(x, z))$

2 ）$\forall x(F(v, y) \vee G(v, z))$

3 ）$\forall v(F(x, y) \vee G(x, z))$

4 ）$\forall y(F(x, y) \vee G(y, z))$

5 ）$\forall z(F(z, y) \vee G(z, z))$

2.2.2 自由与约束

- 当个体域中元素的个数是有限时，对量词辖域中的约束变元的所有可能的取代是可枚举的，即：
  - 若设个体域为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 则
    - 1 ）$\forall xF(x) \Leftrightarrow F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \ldots \wedge F(a_n)$
    - 2 ）$\exists xF(x) \Leftrightarrow F(a_1) \vee F(a_2) \vee \ldots \vee F(a_n)$
- 这也被称为有限域量词消去规则。

2.2.3 谓词公式的解释

- 定义 2.12　谓词逻辑中公式 A 的每一个解释（赋值）I 由以下几部分构成：
  - 1 ）非空个体域 D ；
  - 2 ） D 中的某些特定元素；
  - 3 ） D 中的某些特定的函数；
  - 4 ） D 中某些特定的谓词。
- 用一个解释 I 解释一个谓词公式 A 包括：将 I 的个体域 D 作为 A 的个体域， A 中的个体常元用 I 中的特定元素代替， A 中的函数用 I 中的特定函数代替，谓词用 I 上的特定谓词代替。把这样得到的公式记作 A’ 。称 A’ 为 A 在 I 下的解释，或 A 在 I 下被解释成 A’ 。

2.2.3 谓词公式的解释

例 2.8 给定解释 I 如下：

1 ）个体域为实数集合 R ；

2 ） R 中的特定元素 $a=0$ ；

3 ） R 上的特定函数 $f(x, y)=x+y$, $g(x, y)=xy$ ；

4 ） R 上的特定谓词 $F(x, y)$ ： $x=y$ 。

在解释 I 下，求下列各式的真值：

1 ）$\exists xF(f(x, a), g(x, a))$

2 ）$\forall x\forall y(F(f(x, y), g(x, y))\rightarrow F(x, y))$

3 ）$\forall xF(g(x, y), a)$

2.2.3 谓词公式的解释

解：在解释 I 下，公式分别解释为：

1）$\exists xF(f(x, a), g(x, a))$ 解释为：

$\exists x(x+0=x\cdot 0)$ 真值为 1;

2）$\forall x\forall y(F(f(x, y), g(x, y))\rightarrow F(x, y))$)) 解释为：

$\forall x\forall y(x+y=x\cdot y\rightarrow x=y)$ 真值为 0;

3）$\forall xF(g(x, y), a)$ 解释为：

$\forall x(x\cdot y=0)$ 真值不确定。

定理 2.1 封闭的公式在任何解释下都成为命题。（证略）

2.2.4 谓词公式的类型

- **定义 2.13** 若谓词公式 A 在任何解释下均为真，则称 A 为逻辑有效的或永真式； 若 A 在任何解释下均为假，则称 A 为不可满足的或永假式；若至少有一个解释使 A 为真，则称 A 为可满足的。
  - 逻辑有效的公式为可满足的，但反之不真。
  - 在命题逻辑中，可以用真值表等方法判断任意给定命题公式的类型。
  - 判断谓词公式类型的问题是不可判定的，既不存在一个算法能够在有限步内判断任意给定的公式的类型。
- 对一些满足特殊条件的公式我们有一些简便的判定方法。
- **定义 2.14** 设 A_0 是含命题变元 $P_1,P_2, \ldots, P_n$ 的命题公式， $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个谓词公式，用 A_i $(1\le i\le n)$ 处处代替 A_0 中的 P_i ，所得公式 A 称为 A_0 的代换实例。
  - 例， $F(x)\rightarrow G(x)$, $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$ 等都是 $P\rightarrow Q$ 的代换实例。

2.2.4 谓词公式的类型

- 定理 2.2 重言式的代换实例都是逻辑有效的，永假式的代换实例都是不可满足的。

例 2.9 判断下列公式中，哪些是逻辑有效的，哪些是不可满足的？

1 ）$\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$

2 ）$\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

3 ）$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

- 分析——两种思路

（ 1 ）公式的解释； （ 2 ）定理 2.2 。

解：

1 ）永真式 $P\rightarrow(Q\rightarrow P)$ 的代换实例，故为逻辑有效的。

2 ）矛盾式 $\neg(P\rightarrow Q)\wedge Q$ 的代换实例，故为不可满足的。

3 ）解释 I1: 个体域 N, F(x):x>5, G(x): x>4, 公式为真

解释 I2: 个体域 N, F(x):x<5, G(x):x<4, 公式为假

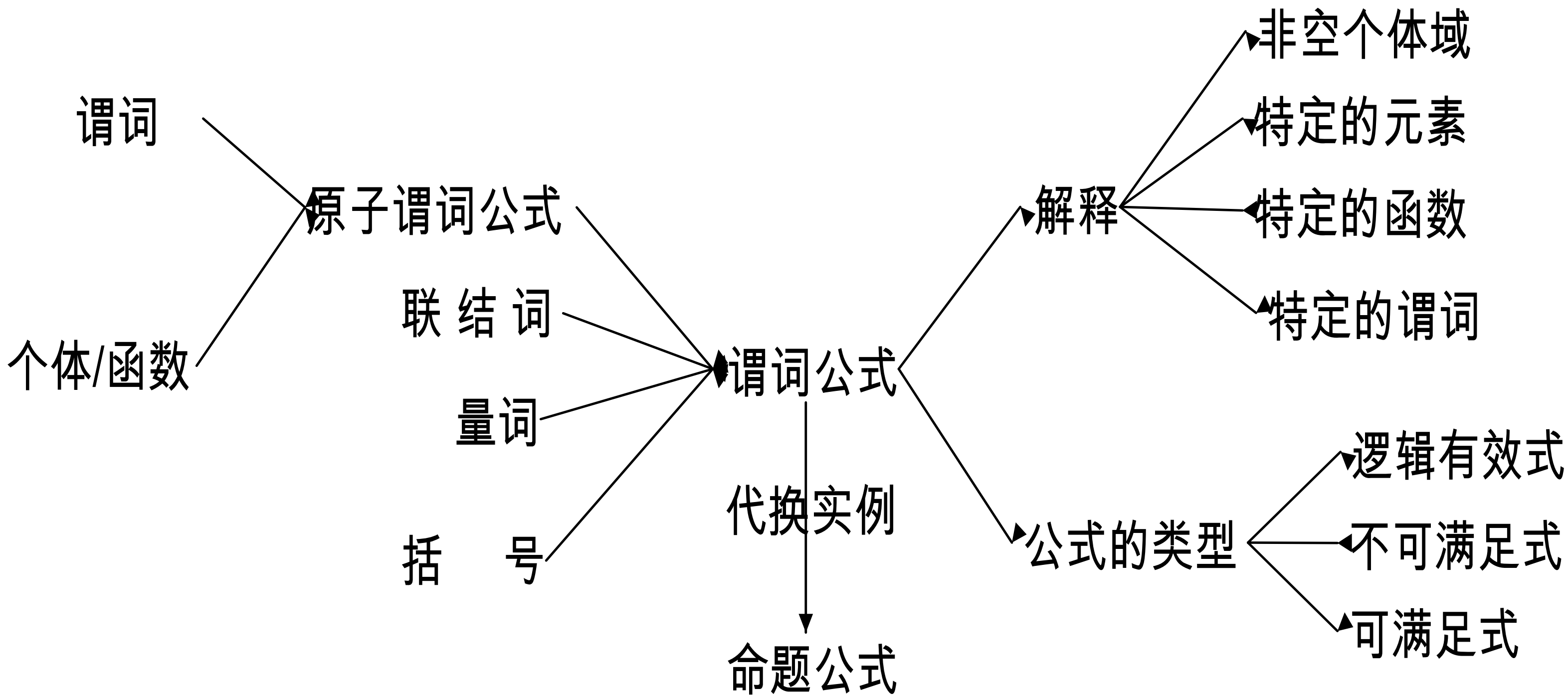
结论：为非永真式的可满足式。

小结

- 把形如 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 称为谓词演算的原子谓词公式，其中，P 是谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是个体或函数。
- 谓词演算的合式公式，又称为谓词公式，由递归定义构成。
- 判定谓词公式中指导变元及其辖域，从而确定变元的约束的情况。
  - 可应用换名规则将谓词公式中的约束变元更改名称符号；
  - 也可以应用代入规则进行自由变元代入。
- 在证明一个谓词公式既不是逻辑有效的也不是不可满足时，可以为公式分别找一个成真的解释和一个成假的解释；当证明一个谓词公式是逻辑有效或不可满足的公式时，可以使用相应的命题公式进行代换。若命题公式为永真式，则原谓词公式也是逻辑有效的；若命题公式为矛盾式，则原谓词公式也是不可满足的。

小结

❖ **本小节的思维形式注记图**



作业

- 2.2 补充习题