§2　边缘分布

- 边缘分布函数
- 边缘分布律
- 边缘概率密度

返回主目录

边缘分布的定义

如果(X, Y)是一个二维随机变量，则它的分量X（或者Y）是一维随机变量，因此，分量X（或者Y）也有分布．我们称X（或者Y）的分布为二维随机变量(X, Y)关于X（或者Y）的边缘分布．

边缘分布也称为边沿分布或边际分布．

一、已知联合分布函数求边缘分布函数

设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$，则分量X的分布函数为

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, -\infty < Y < +\infty\}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty)$$

返回主目录

同理，分量Y的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{-\infty < X < +\infty,\ Y \le y\}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} F(x,\ y) = F(+\infty,\ y)$$

例 1

设二维随机变量$(X,\ Y)$的联合分布函数为

$$F(x,\ y) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty)$$

试求：(1)．常数 A、 B、 C；

(2)．X及Y的边缘分布函数．

解：(1)．由分布函数的性质，得

例 1（续）

$$1=F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$0=F(x,-\infty)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$0=F(-\infty,y)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

由以上三式可得， $A=\dfrac{1}{\pi^2}$，$B=\dfrac{\pi}{2}$，$C=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) . X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\qquad(x\in(-\infty,+\infty))$$

返回主目录

例 1（续）

同理，Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x\,,\; y)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y}{2}\right)$$

$$\left(y \in (-\infty\,,\; +\infty)\right)$$

返回主目录

二、已知联合分布律求边缘分布律

对于二维离散型随机变量(X, Y)，已知其联合分布律为

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} \quad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

现求随机变量X的边缘分布律：

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = P\left\{X = x_i, \bigcup_j (Y = y_j)\right\}$$

$$= \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_j p_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

同理，随机变量Y的边缘分布律为：

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}$$

返回主目录

已知联合分布律求边缘分布律

X 以及 Y 的边缘分布律也可以由下表表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

返回主目录

例 2

将两个球等可能地放入编号为1 ,2 ,3的三个盒子中 .

令：X：放入1号盒中的球数；

Y：放入2号盒中的球数 .

求X以及Y的边缘分布律。

例 2

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}=p_{0\cdot}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}=p_{1\cdot}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}=p_{2\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}=p_{\cdot 0}$	$\frac{4}{9}=p_{\cdot 1}$	$\frac{1}{9}=p_{\cdot 2}$	

返回主目录

例 3

设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在 1~X 中等可能地取一整数值。

求X以及Y的边缘分布律。

返回主目录

例 3（续）

可得(X, Y)与X及Y的边缘分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4} = p_{1\cdot}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4} = p_{2\cdot}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4} = p_{3\cdot}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4} = p_{4\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{25}{48} = p_{\cdot 1}$	$\frac{13}{48} = p_{\cdot 2}$	$\frac{7}{48} = p_{\cdot 3}$	$\frac{3}{48} = p_{\cdot 4}$	

返回主目录

三、已知联合密度函数求边缘密度函数

对于二维连续型随机变量(X, Y)，已知其联合密度函数为 $f(x, y)$

现求随机变量X的边缘密度函数： $f_X(x)$

由 $F_X(x) = P\{X \le x\} = F(x, +\infty)$

$$= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\,dy\right]du = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

得 $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

返回主目录

已知联合密度函数求边缘密度函数

同理，得 $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

总之：若(X, Y)的联合密度函数为 $f(x, y)$，

则 随机变量X的边缘密度函数为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

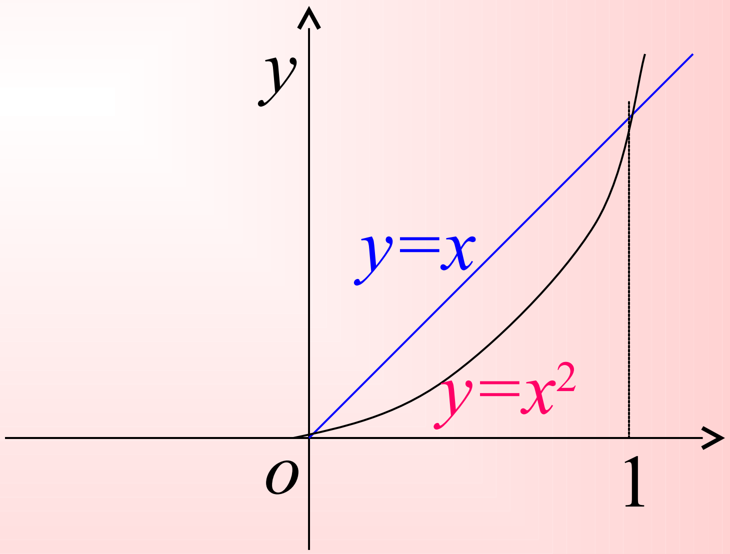
随机变量Y的边缘密度函数为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

返回主目录

例 4

设平面区域 D 是由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围，随机变量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布．试求随机变量 (X, Y) 的联合密度函数及 X、Y 各自的边缘密度函数．



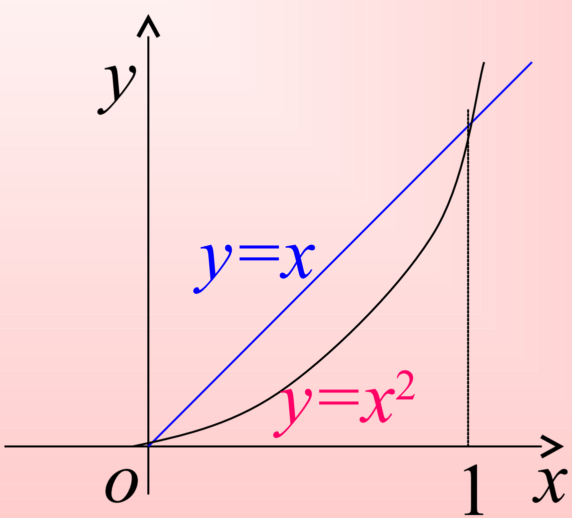
例 4（续）

解：（1）．区域D的面积为

$$A=\int_0^1\int_{x^2}^x dy\,dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

所以，二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$



例 4（续）

(2)．随机变量X的边缘密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

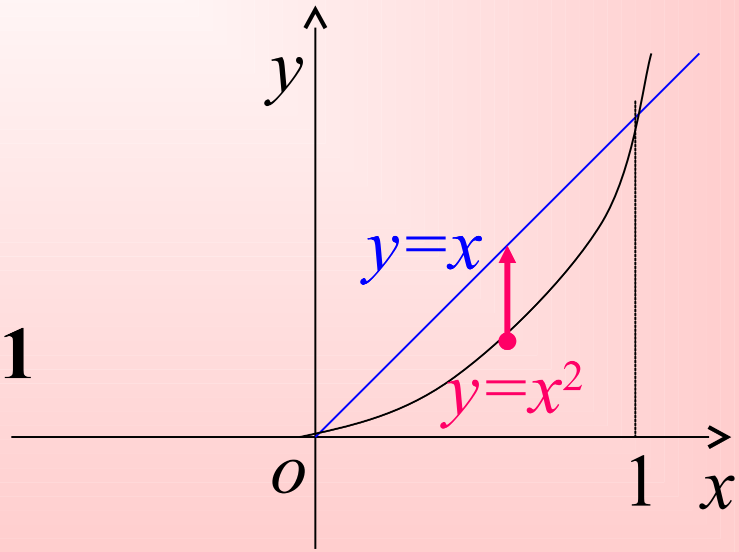
当$0<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{x^2}+\int_{x^2}^{x}+\int_{x}^{+\infty}$$

$$=\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2)$$

所以，

$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



例 4（续）

同理，随机变量Y的边缘密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

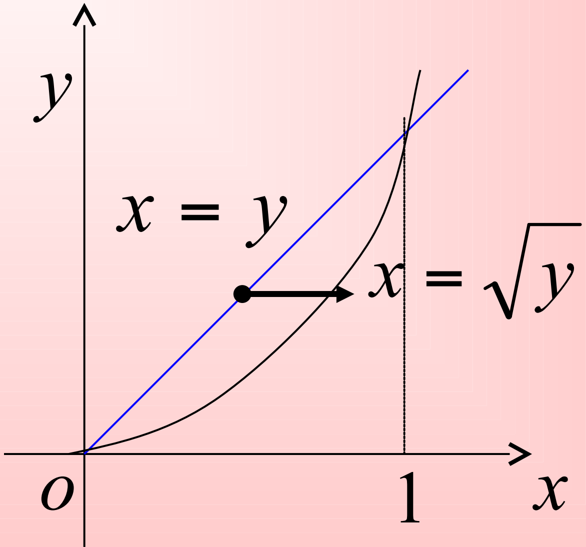
当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{y}+\int_{y}^{\sqrt{y}}+\int_{\sqrt{y}}^{+\infty}$$

$$=\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6\left(\sqrt{y}-y\right)$$

所以，

$$f_Y(y)=\begin{cases}6\left(\sqrt{y}-y\right) & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

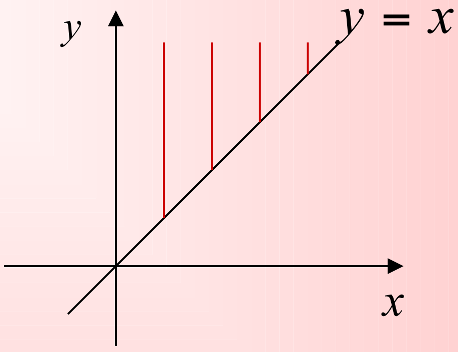


例 5

设二维连续型随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} cxe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求：(1)．常数c；　(2)．X及Y的边缘密度函数．



解：

(1)．由密度函数的性质，得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = \int_{0}^{+\infty}dy\int_{0}^{y} cxe^{-y}\,dx$$

返回主目录

例 5（续）

$$= \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}\,dy = \frac{c}{2}\times 2 = c$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-y} & 0 < x < y < +\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

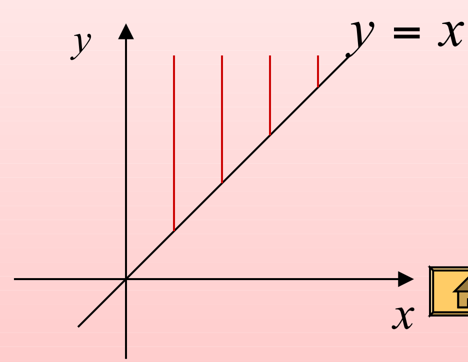
所以， $c = 1$

(2) ．当$x > 0$时，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy = \int_x^{+\infty} xe^{-y}\,dy = xe^{-x}$$

所以，X的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$



返回主目录

例 5（续）

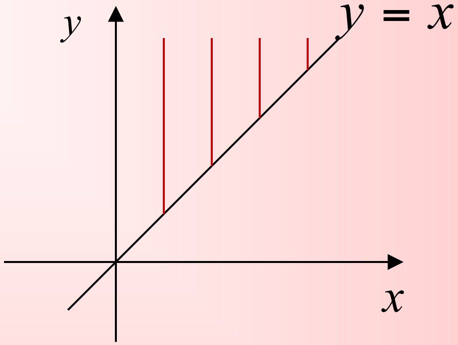
$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

(3)．当 $y>0$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad =\int_0^y xe^{-y}\,dx \quad =\frac{1}{2}y^2e^{-y}$$

所以，Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}y^2e^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$



例 6

设二维随机变量$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$
试求X及Y的边缘密度函数.

解：

(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

例 6（续）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

在 $-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$ 中，

对y进行配方，得

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}$$

例 6（续）

所以，

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2\right\}dy$$

作变换，令：$u=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$

则，$du=\frac{dy}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

例 6（续）

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\sqrt{2\pi}\quad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

这表明，$X\sim N\left(\mu_1,\ \sigma_1^2\right)$

例 6（续）

由(X, Y)的密度函数可知，X与Y的地位是对称的，因此有

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (-\infty<y<+\infty)$$

这表明，$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

通过本题，我们有以下几条结论：

结论（一）

二维正态分布的边缘分布是一维正态分布.

即若$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$则有，

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

结论（二）

上述的两个边缘分布中的参数与二维正态分布中的常数ρ无关.

结论（三）

结论（二）表明：如果

$$(X_1, Y_1) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_1)$$

$$(X_2, Y_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_2)$$

（其中$\rho_1 \neq \rho_2$）

则，(X_1, Y_1)与(X_2, Y_2)的分布不相同，

但是X_1与X_2的分布相同， Y_1与Y_2的分布相同．

这表明，一般来讲，我们不能由边缘分布求出联合分布．

作业： p_{85} 5,6,9

返回主目录