第二篇 集合论

Set Theory

引言

- 集合是数学中最为基本的概念，又是数学各分支、自然科学及社会科学各领域的最普遍采用的描述工具。
- 集合论是以集合概念为基础，研究集合的一般性质的数学分支学科，是现代数学的理论基础。
  - 由于集合论的语言适合于描述和研究离散对象及其关系，所以是计算机科学与工程的理论基础。
  - 集合的元素已由数学的“数集”和“点集”拓展成包含文字、符号、图形、图表和声音等多媒体的信息，构成了可以包含各种数据类型的集合。
- 与计算机科学的联系
  - 在程序设计、数据库、形式语言和自动机理论等学科领域中都有重要的应用。

集合论的创立

- 1874 年，德国数学家康托尔（ G. Cantor ， 1845 年— 1918 年）创立了朴素集合论，为数学的统一提供了基础。
- 正当集合论被誉为绝对严格的数学基础时， 1900 年前后，集合论的悖论相继发现，尤其是罗素悖论的提出，动摇了整个数学的基础。使人们对数学的严密可靠性产生了怀疑，从而触发了极为严重的第三次数学危机。
- 为了排除悖论，克服危机，恢复数学的“绝对严格性”，数学家和逻辑学家做了大量工作，展开了激烈的论战。于是在 20 世纪初，便产生了一个新的数学领域——数学基础，并逐步形成了三大学派，即布劳威尔的直觉主义、罗素的逻辑主义以及希尔伯特的形式主义。同时，数学家对集合论也进行了公理化改造，建立了各种形式的公理集合论。

集合论的争议
(有关集合论的悖论)

❖ (1) “理发师悖论”

一天，萨维尔村理发师挂出一块招牌：“村里所有不自己理发的男人都由我给他们理发，我也只给这些人理发。”于是有人问他：“您的头发由谁理呢？”理发师顿时哑口无言。

因为，如果他给自己理发，那么他就属于自己给自己理发的那类人。但是，招牌上说明他不给这类人理发，因此他不能自己理。

如果由另外一个人给他理发，他就是不给自己理发的人，而招牌上明明说他要给所有不自己理发的男人理发，因此，他应该自己理。

由此可见，不管怎样的推论，理发师所说的话总是自相矛盾的。

集合论的争议(续)
(有关集合论的悖论)

❖ (2) 罗素悖论

1902 年，英国数学家罗素提出了这样一个理论：以 M 表示是其自身成员的集合的集合，N 表示不是其自身成员的集合的集合。然后问 N 是否为它自身的成员？

如果 N 是它自身的成员，则 N 属于 M 而不属于 N ，也就是说 N 不是它自身的成员；另一方面，如果 N 不是它自身的成员，则 N 属于 N 而不属于 M ，也就是说 N 是它自身的成员。无论出现哪一种情况都将导出矛盾的结论，这就是著名的罗素悖论。

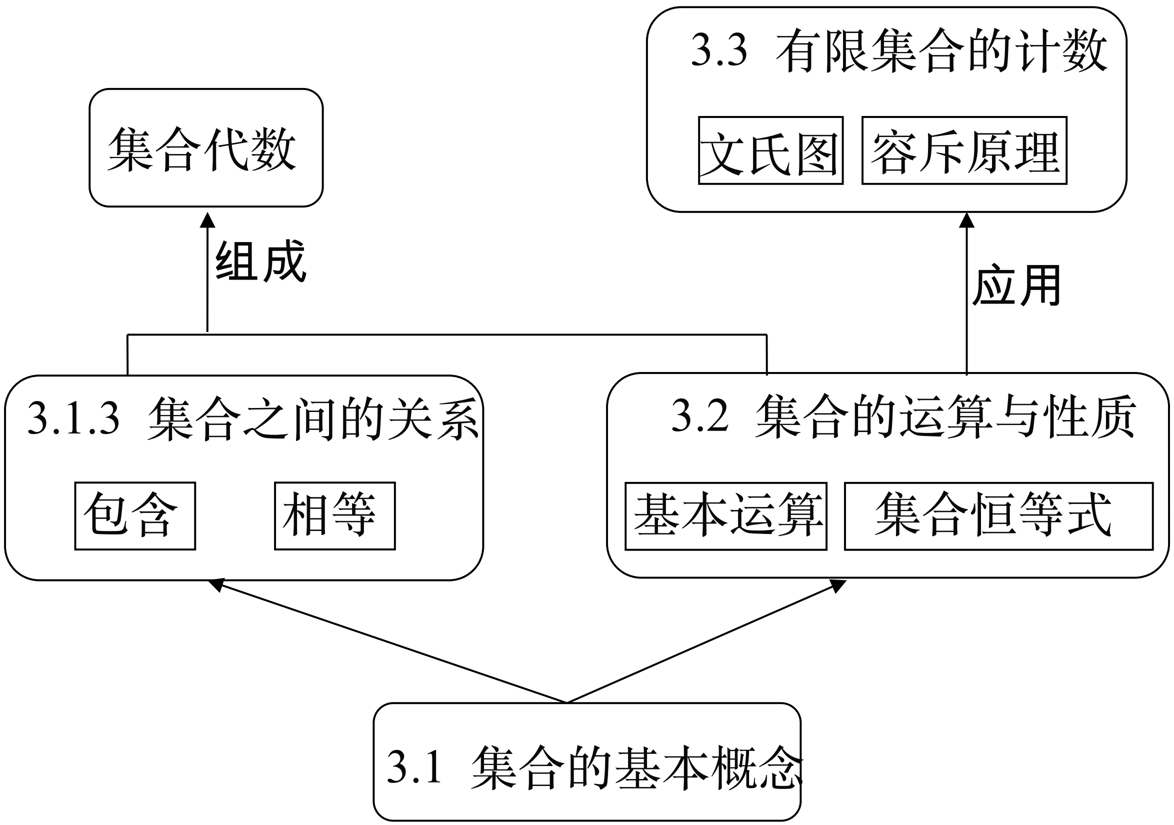
为了避免出现悖论，我们应该避免使用诸如“所有的集合组成的集合”这一类的术语。

集合论的知识体系

- 集合论
  - 第 3 章 集合
    - 集合的基本概念
    - 集合的运算与性质
    - 有限集合的计数
  - 第 4 章 二元关系
    - 关系的定义及表示方法
    - 关系的运算
    - 关系的性质及其判断方法
    - 等价关系、等价类与划分
    - 相容关系、相容类与覆盖
    - 偏序关系
  - 第 5 章 函数
    - 函数的基本概念
    - 函数的运算
  - 第 6 章 集合的基数

第三章 集 合

集合部分知识逻辑概图


3.3 有限集合的计数
文氏图
容斥原理
集合代数
组成
应用
3.1.3 集合之间的关系
包含
相等
3.2 集合的运算与性质
基本运算
集合恒等式
3.1 集合的基本概念

3.1 集合的概念与关系

集合：一些事物的整体。

3.1.1 集合的基本概念

- 集合作为数学的一个基本而又简单的原始概念，是不能精确定义的。
- 集合：
  - 传统意义上，一般我们把一些事物汇集到一起组成一个整体称为集合。
  - 本篇所讨论的集合均指传统意义上的 Cantor 集合。
- 元素： 集合中的对象称为集合的元素。
- 例如，

（1）图书馆的藏书组成一个集合，任一本书是该集合的元素。

（2）直线上的所有点组成实数集合 R ，每一个实数都是集合 R 的元素。

（3） 26 个英文字母组成一个集合，任一英文字母是该集合的元素。

（4）小于 10 的正奇数集合 O 可以表示为 $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 。

3.1.1 集合的基本概念

- 通常用大写字母如 A、B、C 等表示集合，用小写字母如 a、b、c 等表示集合中的元素。下面将本书中常用的集合符号列举如下：

  N ：自然数集合

  Z ：整数集合

  Z^+ ：正整数的集合

  Q ：有理数集合

  R ：实数集合

  C ：复数集合

3.1.1 集合的基本概念

❖ 集合中的元素具有以下性质：

（1）集合中的元素是确定的。所谓确定的，是指任何一个对象是不是集合的元素是明确的，不能模棱两可。

（2）集合中的元素是互不相同的，或者说是不重复的。如果同一个元素在集合中多次出现，应该认为是一个元素，如集合 $\{a, b, c\} = \{a, b, b, c\}$。

（3）集合中的元素之间没有次序关系。如集合 $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$。

（4）集合的元素是任意的对象。对象是可以独立存在的具体的或抽象的客体。它可以是独立存在的数、字母、人或其他物体，也可以是抽象的概念，当然也可以是集合。例如，集合 $\{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$ 的元素 $\{3\}$ 和 $\{1, 2\}$ 就是集合。

（5）集合中元素之间可以有某种关联，也可以彼此毫无关系。

3.1.1 集合的基本概念

- 元素和集合之间的关系是隶属关系，即属于或不属于。
  - 若元素 a 是集合 A 的元素时，记作 $a \in A$ ，读作“ a 属于 A” ；
  - 反之，写成 $a \notin A$ ，读作“ a 不属于 A” 。
  - 例如， $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, 这里 $2 \in A$ ， $\{3\} \in A$ ，但 $3 \notin A$ 。

3.1.2 集合的表示法

- 表示一个集合通常有两种方法：列举法和谓词表示法。

1）列举法（或枚举法）：将集合的元素全部写在一对花括号内，元素之间用逗号分开。例如，

（1）$A = \{a, b, c, d\}$

（2）$B = \{1, 2, 3\}$

（3）$C = \{$张，王，李，赵$\}$等。

- 列举法一般用于有限集合和有规律的无限集合。
- 例如，

（1）$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

（2）$B = \{10, 20, 30, \ldots\}$

（3）$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$等。

3.1.2 集合的表示法

2）描述法（谓词公式法）：用 $A=\{x \mid P(x)\}$ 来表示所有具有性质 P 的一些对象组成的集合，其中 $P(x)$ 是谓词。

- 例如：

（1）$A = \{x \mid x \in R \wedge x^2-1=0\}$ 表示方程 $x^2-1=0$ 的实数解集，也可以表示成 $A = \{-1, 1\}$。

（2）$B = \{x \mid x \in Z \wedge 3<x\leq 6\}$，即 $B = \{4, 5, 6\}$。

（3）C==$\{x \mid x$ 是本校在校学生$\}$ 等。

3.1.2 集合的表示法

❖ 集合是多种多样的，我们可以根据集合中元素的个数对其进行分类。

定义 3.1　集合 S 中元素的个数有限时，称 S 为有限集合；否则，称 S 为无限集合。若 S 为有限集，S 中元素的个数称为 S 的基数，记为 $|S|$。（关于集合基数的定义将在第 6 章详细讨论）

❖ 例如：

（1）$A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$ 是有限集，且 $|A| = 4$。

（2）令 S 为英语字母集，那么 $|S| = 26$。

（3）全体正偶数的集合 $\{2, 4, 6, \ldots\}$ 是无限集。

3.1.2 集合的表示法

❖ 下面介绍两个特殊集合。

定义 3.2　不包含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$。符号化表示为：

$$\varnothing=\{x \mid P(x) \wedge \neg P(x)\}$$

其中 $P(x)$ 是任意谓词。空集是不包含任何元素的集合，所以，$|\varnothing| = 0$。

❖ 说明：

（1）$\varnothing \neq \{\varnothing\}$，前者是空集，是没有元素的集合；后者是以$\varnothing$作为元素的集合。

（2）空集是客观存在的，例如，$\{x|x\in \mathrm{R} \wedge x^2+1=0\}$，即方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合是空集。

3.1.2 集合的表示法

定义 3.3 如果一个集合包含了所要讨论的每一个元素，则称该集合为全集，记作 E 。全集的符号化表示为：

$$E = \{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$$

其中 $P(x)$ 是任意谓词。

- 全集是一个相对的概念。由于所研究的问题不同，所取的全集也不同。
- 例如，
  - 在研究整数间的问题时，可把整数集 Z 取作全集。
  - 在研究平面几何的问题时，可把整个坐标平面取作全集。

3.1.3 集合之间的关系

- 包含与相等是集合间的两种基本关系，也是集合论中的两个基本概念。

外延公理 两个集合 A 与 B 相等当且仅当其元素相同，记作 $A = B$ 。

- 例如，

  若 $A = \{2, 3\}$ ，$B = \{$ 小于 4 的素数 $\}$ ，则 $A = B$ 。

- 外延公理事实上刻画了集合元素的“相异性”、“无序性”，以及集合表示形式的“不唯一性”。

3.1.3 集合之间的关系

定义 3.4 设 A 和 B 是任意两个集合，如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的一个子集。这时也称 A 被 B 包含或 B 包含 A 。记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。如果 A 不是 B 的子集，即 A 至少有一个元素不属于 B ，则记作 $A \not\subseteq \mathrm{B}$ 。

- $A \subseteq B$ 用谓词公式表示为：

  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

- $A \not\subseteq B$ 用谓词公式表示为：

  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$

- 例如：

（1）若 $A=\{a, b, c\}$ ，$B=\{a, e, i, o, u\}$ ，$D=\{a, c\}$ ，则有 $D \subseteq A$ ，$D \not\subseteq B$ 。

（2）若 $A=\{a, b, c\}$ ，$B=\{c, a, b\}$ ，则有 $B \subseteq A$ ，$A \subseteq B$ 。

（3）$\mathrm{N} \subseteq \mathrm{Z} \subseteq \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{R} \subseteq \mathrm{C}$ 。

3.1.3 集合之间的关系

❖ 根据子集的定义可以证明，包含关系具有下列一些性质。

定理 3.1 设 A ，B 和 C 是任意集合，则：

（1）$\varnothing \subseteq A$

（2）$A \subseteq A$

（3）$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

证：（1）、（2）由定义显然成立。

（3） $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$

$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in C)$

$\Leftrightarrow \forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in C))$

$\Rightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$

$\Leftrightarrow A \subseteq C$

3.1.3 集合之间的关系

- **平凡子集：**

  由定理 3.1 的（ 1 ）、（ 2 ），任意一个非空集合 A 至少有两个子集，一个是空集$\varnothing$，另一个是它本身 A ，称为 A 的平凡子集。

- **一般而言，A 的每个元素都能确定 A 的一个子集。即若 $a \in A$ ，则 $\{a\} \subseteq A$ 。**

3.1.3 集合之间的关系

定理 3.2 集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是这两个集合互为子集。

如果 A 和 B 不相等，则记作 $A \neq B$。

证：集合相等可用谓词公式表示为，

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

$$\Leftrightarrow \forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

由外延公理可得，$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

- 例如：

（1）若 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{c, a, b\}$，有 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$，则有 $A=B$。

（2）设 $A=\{\{1, 2\}, 4\}$，$B=\{1, 2, 4\}$，则 $A \neq B$

3.1.3 集合之间的关系

定理 3.3 空集是唯一的。

证：设有两个空集$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，由定理 3.1 的（1）有，

$$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2 \text{ 且 } \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$$

根据定理 3.2，得$\varnothing_1 = \varnothing_2$。

定义 3.5 设 A、B 是集合，如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 为 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。如果 A 不是 B 的真子集，记为 $A \not\subset B$。

真子集用谓词公式表示为：

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

例如：

（1）$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$，但 $\mathrm{N} \not\subset \mathrm{N}$。

（2）若 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{b, c\}$，则 $B \subset A$，但 $A \not\subset A$。

3.1.3 集合之间的关系

例 3.1 确定下列命题是否为真。

（1）$\varnothing \subseteq \varnothing$

（2）$\varnothing \in \varnothing$

（3）$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

（4）$\varnothing \in \{\varnothing\}$

解：

由定理 3.1 有，（1）、（3）为真，

由空集的定义，（2）为假。（4）为真。

3.1.4 幂集和集族

- 含有 n 个元素的集合简称 n 元集，它的含有 $m(m\le n)$ 个元素的子集叫做它的 m 元子集。
- 任给一个 n 元集，怎样求出它的全部子集呢？举例说明如下。

例 3.2 求 $A = \{a, b, c\}$ 的全部子集。

解：将 A 的子集按基数从小到大分类，

0 元子集：有 $C_3^0=1$ 个，即空集 $\varnothing$；

1 元子集：有 $C_3^1=3$ 个，$\{a\}$，$\{b\}$ 和 $\{c\}$；

2 元子集：有 $C_3^2=3$ 个，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$ 和 $\{b, c\}$；

3 元子集：有 $C_3^3=1$ 个，$\{a, b, c\}$。

集合 A 共有 8 个子集。

3.1.4 幂集和集族

定义 3.6 给定集合 A，由集合 A 的所有子集为元素组成的集合，称为集合 A 的**幂集**，记为 $P(A)$（或 2^A）。幂集的符号化表示为，

$$P(A)=\{x \mid x \subseteq A\}$$

如例 3.2 中，$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$。

对任意集合 A，因为 $\varnothing \subseteq A$，$A \subseteq A$，所以一定有 $A \in P(A)$，$\varnothing \in P(A)$。

例 3.3 令 $A = \varnothing$，$B = \{\varnothing, a, \{a\}\}$，求 $P(A)$、$P(B)$ 和 $P(P(A))$。

解：

$P(A) = \{\varnothing\}$

$P(P(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$，

$P(B) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, a\}, \{\varnothing, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{\varnothing, a, \{a\}\}\}$。

3.1.4 幂集和集族

定理 3.4 如果 $|A| = n$ ，则 $|P(A)| = 2^n$ 。

证：A 的 $k(k=1, 2, \ldots, n)$ 元子集的个数为 C_n^k ，所以

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

根据此定理，当集合 A 的基数逐渐增长时，幂集 $P(A)$ 的基数将以指数形式增长。

3.1.4 幂集和集族

定理 3.5 设 A，B 为任意集合，则 $A \subseteq B$ 当且仅当 $P(A) \subseteq P(B)$。

证：必要性：对任意的 x，

$x \in P(A)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A$，因为 $A \subseteq B$，

$\Rightarrow x \subseteq B$

$\Leftrightarrow x \in P(B)$

所以 $P(A) \subseteq P(B)$。

充分性：

假设 $A \not\subseteq B$，那么至少有一元素 $a \in A$ 且 $a \notin B$，考虑集合 $\{a\}$，有 $\{a\} \in P(A)$ 且 $\{a\} \notin P(B)$，与 $P(A) \subseteq P(B)$ 矛盾，故 $A \subseteq B$。

定理得证。

3.1.4 幂集和集族

定义 3.7 以集合为元素的集合称为**集族**。

例如，

$A = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{f\}, \{1, 2, 3\}\}$、$B = \{\mathrm{N}, \mathrm{Z}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}\}$ 为集族。

定义 3.8 给定集合 A，由集合 A 的子集为元素组成的集合，称为集合 A 的**子集族**。

由定义 3.8，A 的所有子集族都是其幂集 $P(A)$ 的子集。

如例 3.2 中，$A = \{a, b, c\}$，

$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$，

则 $B=\{\varnothing\}$，$C=\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，$D=\{\{a\}, \{b, c\}\}$ 等均是 A 的子集族。

3.1.5 文氏图

- 还可以用文氏图（ Venn Diagram ）形象地表示集合。
- 表示方法：
  - 在文氏图中全集 E 用长方形表示。
  - 在长方形内部，其他集合由各自不同的圆（或任何其他的适当的闭曲线）表示，圆的内部表示集合。
  - 有时用点来表示集合中特定的元素。
  - 如果没有关于集合不交的说明，任何两个圆应彼此相交。

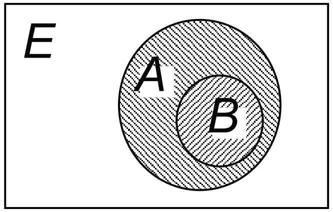
3.1.5 文氏图

- 文氏图常用于表示**集合之间的关系**。设 A 、 B 为任意两个集合，具体表示方法如下：

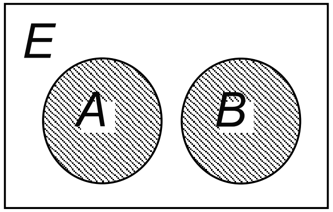
（ 1 ）如果 $B \subset A$ ，则表示 B 的圆在表示 A 的圆内，如图（ a ）所示。

（ 2 ）如果 A 与 B 不交，即它们没有公共元素，则表示 A 和 B 的两个圆在图中是分离的，如图（ b ）所示。

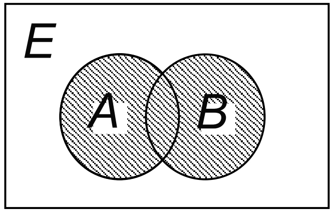
（ 3 ）如果 A 与 B 相交却不包含，即有某些元素在 A 中但不在 B 中，某些元素在 B 中但不在 A 中，而有些元素可能同时属于 A 与 B ，有些元素可能既不在 A 中也不在 B 中。表示方法如图（ c ）所示。



(a)



(b)



(c)

小结

- 集合
  - 集合的特征：元素的确定性、相异性、无序性
  - 元素与集合的关系：$\in$、$\notin$
  - 集合与集合的关系
    - 包含：$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
    - 相等：$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
  - 集合的文氏图表示

作业

- **补充习题 3.1**

1. 确定下列命题是否为真：

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(2) $\varnothing \in \varnothing$

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(5) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

(6) $\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b\}\}$

(7) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

(8) $\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

2. 求下列集合的幂集：

(1) $\{a,b,c\}$

(2) $\{1,\{2,3\}\}$

(3) $\{\varnothing\}$

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(5) $\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,1,2\}\}$

(6) $\{\{\varnothing,2\},\{2\}\}$

北京科技大学 University of Science and Technology Beijing