§1. 大数定律

在实践中，不仅事件发生的频率具有稳定性，还有大量测量值的算术平均值也具有稳定性。

定义 1： 设 $Y_1,\cdots,Y_n,\cdots$ 是随机变量序列，a 是一个常数；若对任意 $\varepsilon > 0$ 有：

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

则称 $Y_1,\cdots,Y_n,\cdots$ 依概率收敛于 a，记为 $Y_n \xrightarrow{P} a$。

说明 1： $y_n = P\{|Y_n - a| < \varepsilon\}$ 是一实数，

$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$ 是数列的极限。

$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$ 是指：

当n很大时，不等式

$|Y_n - a| < \varepsilon$ 成立的概率很大.

说明 2 若 $X_n \xrightarrow{P} a$, $Y_n \xrightarrow{P} b$, $g(x,y)$ 在点(a,b)连续

则 $g(X_n,Y_n) \xrightarrow{p} g(a,b)$。

定理 1（切比晓夫定理的特殊情况）

设随机变量 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且具有相同的数学期望及方差， $EX_k=\mu$ ， $DX_k=\sigma^2$ ， $k=1,2,\cdots$ ，令 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$

则对任意的 $\varepsilon>0$ ，有

$$\lim_{n->\infty} P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}=\lim_{n->\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu|<\varepsilon\}=1$$

或 $$\lim_{n->\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu| \quad \varepsilon\}=0$$

返回主目录

证：

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}EX_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu=\mu$$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}DX_k=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$$

由切比晓夫不等式得：

$$1 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\} \quad 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

当$n\to\infty$时，$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}\to 1$

定理 2（贝努里大数定律）

设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 发生的概率，即 $n_A \sim B(n,p)$.

则:对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n}-p|<\varepsilon\}=1 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n}-p| \quad \varepsilon\}=0$$

证：令 $X_k=\begin{cases}0\text{，在第}k\text{次试验中}A\text{不发生}\\ 1\text{，在第}k\text{次试验中}A\text{发生}\end{cases}$，$k=1,2,\cdots,n$

则 $n_A=\sum_{k=1}^{n}X_k$，且 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立同服从于0-1分布

故 $EX_k=p$，$DX_k=p(1-p)$，$k=1,2,\cdots,n,\cdots$

由定理 1 有 $\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p|<\varepsilon\}=1$，

即 $\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{n_A}{n}-p|<\varepsilon\}=1$。 此定理说明了频率的稳定性。

定理3（辛钦大数定律）

设 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布，且具有数学期望 $EX_k = \mu$，$k = 1, 2, \cdots, n, \cdots$，

则：对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

注：贝努里大数定律是辛钦大数定律的特殊情况。

§2. 中心极限定理

定义：

设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立的随机变量序列，

EX_k，DX_k 存在，令：$Z_n=(\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}EX_k)/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}DX_k}$，

若对任意 $x\in R_1$，有 $\lim_{n->\infty}P\{Z_n\le x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$。

则称 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理。

说明 3： $E(Z_n)=0,\ D(Z_n)=1$.

[illegible]当 n 很大时，

$$Z_n=(\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}EX_k)/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}DX_k}$$

近似服从标准正态分布。

返回主目录

定理 4（独立同分布的中心极限定理）

（林德伯格 - 列维（ Lindeberg-Levy) 中心极限定理）

设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $EX_k=\mu$，$DX_k=\sigma^2\neq 0,(k=1,2,\cdots)$

则 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理，即：

$$\lim_{n->\infty} P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

说明 4 ：由定理 4 知：

若 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ **是独立同分布的随机变量序列，且**

$$EX_k=\mu\,,\ DX_k=\sigma^2\neq 0,(k=1,2,\cdots)$$

则　当n很大时，

1) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ **近似服从标准正态分布** $N(0\,,1)$.

或 $$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\ \overset{\text{近似}}{\sim}\ N(0\,,1).$$

或 $\sum_{k=1}^{n}X_k$ **近似服从正态分布** $N(n\mu\,,n\sigma^2)$

返回主目录

2) $P\{a < \sum_{k=1}^{n} X_k \le b\}$

$$= P\{\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le \frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\}$$

$$\approx \Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}) - \Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$$

$P\{a < \overline{X} \le b\}$

$$= P\{\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$\approx \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$$

返回主目录

用独立同分布的中心极限定理（定理4）解决问题的步骤：

1）引进随机变量 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ **，说明它们是独立同分布的随机变量；**

2) 求 $EX_k=\mu$，$DX_k=\sigma^2\neq 0,(k=1,2,\cdots);$

3) 求 $P\{a<\sum_{k=1}^{n}X_k\leq b\}$

$$=P\{\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}<\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\}$$

$$\approx\Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})-\Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$$

定理 5 （李雅普诺夫定理(Liapunov 定理)）

设$X_1,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，且$EX_k=\mu_k$，$DX_k=\sigma_k^2\neq 0$,

$(k=1,2,\cdots)$，设$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$,若存在正数$\delta$，

使得当$n\to\infty$时，$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E\{|X_k-\mu_k|^{2+\delta}\}\to 0$

则$\{X_n\}$服从中心极限定理，即：

$$\lim_{n->\infty}P\{\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}DX_k}}\le x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

定理 6（棣莫佛 - 拉普拉斯定理）(De Moivre--Laplace)

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 n,p(0<p<1) 的二项分布, 即 $\eta_n \sim B(n,p)$.

则对于任意 x，恒有：

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{npq}} \le x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (q=1-p)$$

证: $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ ，

其中 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立且都服从于 (0-1)分布。

$EX_k = p$，$DX_k = pq$。

由定理 4 有结论成立。

$$\lim_{n->\infty} P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

说明 5 :由定理 6 知：

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 n , p (0<p<1) 的二项分布，即 $\eta_n \sim B(n,p)$. 当 n 充分大时有：

1) $\dfrac{\eta_n - np}{\sqrt{npq}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$.

2) $$P\{a<\eta_n \le b\} = P\{\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < \frac{\eta_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\}$$

$$\approx \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$$

公式 2 ）给出了 n 较大时二项分布的概率 计算方法。

返回主目录

用棣莫佛 - 拉普拉斯中心极限定理（定理 6 ）解决问题的步骤：

1 ）引进二项分布随机变量 $X \sim b(n, p)$ ；

2) 求 np， npq ；

3) 计算 $P\{a < \eta_n \le b\} = P\{\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < \frac{\eta_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\}$

$$\approx \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$$

例 1 一加法器同时收到 20 个噪声电压 $V_k\ (k=1,2,\cdots,20)$，设它们是互相独立的随机变量，且都在区间 (0,10) 上服从均匀分布，记

$$V=\sum_{k=1}^{20} V_k$$

求 P{V>105}近似值。

解： $V_k\ (k=1,2,\cdots,20)$ 独立同分布，

$$\mu = EV_k = 5，\ \sigma^2 = DV_k = \frac{10^2}{12}\ (k=1,2,\cdots,20)$$

由定理 4 知 $\dfrac{V-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \dfrac{V-5\times 20}{\sqrt{20}\times\sqrt{10^2/12}}$

近似服从标准正态分布。

返回主目录

$$P\{V>105\}=P\left\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{10^2/12}\times\sqrt{20}}>\frac{105-20\times 5}{\sqrt{10^2/12}\times\sqrt{20}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{V-100}{(10/\sqrt{12})\times\sqrt{20}}>0.387\right\}=1-P\left\{\frac{V-100}{(10/\sqrt{12})\times\sqrt{20}}\le 0.387\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(0.387)=0.348$$

例 2 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的汽车承用，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0。977。

$$(\Phi(2)=0.977)$$

返回主目录

例 2 解： 设 $X_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是装运第 k 箱的重量

n 是所求箱数，则载重量

$$T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

是独立同分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 之和。

$$\mu = EX_k = 50,\ \sigma^2 = DX_k = 25\ (k=1,2,\cdots,n)$$

由定理 4 知 $$\frac{T_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{T_n - 50n}{5\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 50n}{5\sqrt{n}}$$

近似服从标准正态分布。

例 2 解（续）

$$P\{\text{不超载}\} = P\{T_n \le 5000\}$$

$$= P\left\{\frac{T_n - 50n}{5\sqrt{n}} \le \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977$$

故 n 应满足条件 $\dfrac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2,$

即 $n < 98.0199.$

故最多可以装 98 箱。

返回主目录

例 3 某单位有 200 台电话分机，每台分机有 5% 的时间要使用外线通话。假定每台分机是否使用外线是相互独立的，问该单位总机要安装多少条外线，才能以 90% 以上的概率保证分机用外线时不等待？

解： 设有 X 部分机同时使用外线，则有 $X \sim B(n, p)$,

其中 $n = 200, p = 0.05, np = 10, \sqrt{np(1-p)} = 3.08.$

设有 N 条外线。由题意有 $P\{X \le N\} \quad 0.9$

由德莫佛 - 拉普拉斯定理有

$$P\{X \le N\} = P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{N-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{N-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{N-10}{3.08}\right).$$

查表得 $\Phi(1.28) = 0.90$. 故 N 应满足条件 $\dfrac{N-10}{3.08} \quad 1.28,$

即 $N \quad 13.94$. 取 $N = 14$, 即至少要安装 14 条外线。

例 4

设一个系统由 100 个相互独立起作用的部件组成，每个部件的损坏率为 0.1 。为了使整个系统正常工作，至少必须有 85 个部件正常工作，求整个系统正常工作的概率。

解：**设 X 是损坏的部件数，则 X~B(100,0.1) 。则整个系统能正常工作当且仅当≤X 15.**

由德莫佛 - 拉普拉斯定理有

$$P\{X \le 15\} = P\left\{\frac{X - 100\times 0.1}{\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}} \le \frac{15 - 100\times 0.1}{\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{15 - 100\times 0.1}{\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 0.952.$$

返回主目录

例 5

设一个系统由 n 个相互独立起作用的部件组成，每个部件的可靠性为 0.90 ，且必须至少有 80 % 的部件工作才能使整个系统正常工作，问 n 至少为多大才能使系统的可靠性不低于 0.95 ？

解：设 X 是能正常工作的部件数，则 X~B(n,0.9) 。

则整个系统能正常工作当且仅当 X ≥ n80 %

由德莫佛 - 拉普拉斯定理有

$$P\{X \quad 0.8n\} = 1 - P\{X < 0.8n\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{X - 0.9n}{\sqrt{n \times 0.1 \times 0.9}} < \frac{0.8n - 0.9n}{\sqrt{n \times 0.1 \times 0.9}}\right\}$$

返回主目录

例 5

$$\approx 1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)$$

由题意有：

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \quad 0.95\approx\Phi(1.64)$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{n}}{3} \quad 1.64 \qquad \text{即} \quad n \quad 25.$$

n 至少为 25 才能使系统的可靠性不低于 0.95 ？

例 6

某车间有 200 台车床，它们独立地工作着，开工率为 0.6, 开工时耗电各为 1 千瓦，问供电所至少要供给这个车间多少电力才能以 99.9% 的概率保证这个车间不会因供电不足而影响生产。

解：**记某时在工作着的车床数为 X ,则 $X \sim B(200,0.6)$.**

设至少要供给这个车间 r 千瓦电才能以 99.9% 的概率保证这个车间不会因供电不足而影响生产。由题意有：

$$0.999 \le P\{X \le r\} = \sum_{k=0}^{r} C_{200}^{k}(0.6)^{k}(0.4)^{200-k}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{r-200\times 0.6}{\sqrt{200\times 0.6\times 0.4}}\right)$$

（由说明 5 的 2 知）

返回主目录

$$= \Phi\left(\frac{r-120}{\sqrt{48}}\right) \quad 0.999,$$

查表得

$$\frac{r-120}{\sqrt{48}} \quad 3.1 \qquad \text{所以} \quad r \quad 141.$$

即供给 141 千瓦电就能以 99.9% 的概率保证这个车间不会因供电不足而影响生产。

用频率估计概率时误差的估计：

由上面的定理知

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}= P\left\{\left|\frac{\eta_n-np}{n}\right|<\varepsilon\right\}=$$

$$=P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{\eta_n-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1$$

用这个关系式可解决许多计算问题。

第一类问题是已知 $n, p, \varepsilon,$ **求概率**

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\};$$

第二类问题是要使 $\frac{\eta_n}{n}$ **与** p **的差异不大于定数** ε **的概率不小于预先给定的数** β **，问最少应做多少次试验？**

这时只需求满足下式的最小的 n,

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 \quad \beta$$

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1$$

第三类问题是已知 n, p **及** β **,求** ε **，先求** x_β **使**

$2\Phi(x_\beta) - 1 = \beta$ ， **有** $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \quad x_\beta$ ， **故** $\varepsilon \quad x_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}}.$

返回主目录

例 7.

现有一批种子，其中良种占 1/6 。今任取 6000 粒，问能以 0.99 的概率保证在这 6000 粒种子中良种所占的比例与 1/6 的差不超过多少？相应的良种粒数在哪个范围内？

解：

设良种数为X，则$X \sim B(n, p)$,其中$n = 6000, p = 1/6.$

设不超过的界限为 α，则应有：

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000} - \frac{1}{6}\right| \leq \alpha\right\} = 0.99$$

由德莫佛 - 拉普拉斯定理

返回主目录

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|\le\alpha\right\}$$

$n=6000, p=1/6.$

$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{npq}}\le x\}=\Phi(x)$$

$$=P\left\{\left|\frac{X-6000\times 1/6}{\sqrt{6000\times 1/6\times 5/6}}\right|\le\frac{6000\alpha}{\sqrt{6000\times 1/6\times 5/6}}\right\}$$

$$\approx 2\Phi\left[\frac{6000\alpha}{\sqrt{6000\times 1/6\times 5/6}}\right]-1$$

故近似地有

$$2\Phi\left[\frac{6000\alpha}{\sqrt{6000\times 1/6\times 5/6}}\right]-1=0.99,$$

返回主目录

即 $\Phi\left[\dfrac{6000\alpha}{\sqrt{6000\times 1/6\times 5/6}}\right]=0.995,$

查表得 $\dfrac{6000\alpha}{\sqrt{6000\times 1/6\times 5/6}}=2.58,$

解得 $\alpha=0.0124.$

$$\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|\le\alpha$$

良种粒数 X 的范围为

$$(1/6-0.0124)\times 6000\le X\le(1/6+0.0124)\times 6000,$$

即 $925\le X\le 1075.$

思考题：

假设一批种子的良种率为 $\frac{1}{6}$，从中任意选出 600 粒，试用切比晓夫（Chebyshev）不等式和中心极限定理分别估计：这 600 粒种子中良种所占比例与 $\frac{1}{6}$ 之差的绝对值不超过 0.02 的概率。

$$EX = 600\times\frac{1}{6}, \qquad DX = 600\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}.$$

由切比晓夫不等式有

$$P\left\{\left|\frac{X}{600}-\frac{1}{6}\right|\le 0.02\right\} = P\left\{\left|\frac{X-100}{600}\right|\le 0.02\right\}$$

$$= P\{|X-100|\le 12\} \quad 1-\frac{DX}{12^2} = 1-\frac{600\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}{144} = 0.4213$$

第五章：习题课

第五章 小　结

1 引进了大数定律的概念，要了解大数定律的意义和内容，理解贝努里、辛钦大数定律，了解契比雪夫大数定律。

2 阐述了中心极限定理的含义及其客观背景，要掌握独立同分布的中心极限定理和德莫佛-拉普拉斯定理，会利用中心极限定理解决一般实际应用问题。

作业：$P_{126-127}$ 1,3,5,6,9,12,14.

返回主目录

例 1 ：一食品店有三种蛋糕出售，由于售出哪一种蛋糕是随机的，因而一只蛋糕的价格是一个随机变量，它取 1 元、 1.2 元、 1.5 元各个值的概率分别为 0.3 、 0.2 、 0.5 ．某天该食品店出售了 300 只蛋糕．试用中心极限定理计算，这天的收入至少为 395 元的概率．

解：

设 X_k **表示该食品店出售的第** k **只蛋糕的价格** $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 300)$ **，则** X_k **的分布律为**

X_k	1	1.2	1.5
P	0.3	0.2	0.5

所以， $E(X_k)=1\times 0.3+1.2\times 0.2+1.5\times 0.5=1.29$ **，**

$$E(X_k^2)=1^2\times 0.3+1.2^2\times 0.2+1.5^2\times 0.5=1.713\ ,$$

例 1（续）

所以，$D(X_k)=E(X_k^2)-[E(X_k)]^2=1.713-1.29^2=0.0489$.

因此，$X_1,\quad X_2,\quad \cdots,\quad X_{300}$ 是独立同分布的随机变量，故

$$P\left(\sum_{k=1}^{300}X_k \quad 395\right)=1-P\left(\frac{\sum_{k=1}^{300}X_k-\sum_{k=1}^{300}E(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{300}D(X_k)}}<\frac{395-\sum_{k=1}^{300}E(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{300}D(X_k)}}\right)$$

$$=1-P\left(\frac{\sum_{k=1}^{300}X_k-300\times1.29}{\sqrt{300\times0.0489}}<\frac{395-300\times1.29}{\sqrt{300\times0.0489}}\right)$$

$$=1-P\left(\frac{\sum_{k=1}^{300}X_k-300\times1.29}{\sqrt{300\times0.0489}}<2.09\right)$$

$$=1-\Phi(2.09)=1-0.9817=0.0183\ .$$

例 2.

某运输公司有 500 辆汽车参加保险，在一年内每辆汽车出事故的概率为 0.006，每辆参加保险的汽车每年交保险费 800 元，若一辆车出事故保险公司最多赔偿 50000 元．试利用中心极限定理计算，保险公司一年赚钱不小于 200000 元的概率．

设 $A=\{$ 某辆汽车出事故 $\}$ 　　则．$P(A)=0.006$

设 $X=$“运输公司一年内出事故的车数”．则 ．

$X \sim B(500,\ 0.006)$

例 2.

保险公司一年内共收保费 $800\times500=400000$ ，若按每辆汽车保险公司赔偿 50000 元计算，则保险公司一年赚钱不小于 200000 元，则在这一年中出事故的车辆数不能超过 4 辆．因此所求概率为

.

$$P\left(X\le 4\right)=P\left(\frac{X-500\times0.006}{\sqrt{500\times0.006\times0.994}}\le\frac{4-500\times0.006}{\sqrt{500\times0.006\times0.994}}\right)$$

$$=P\left(\frac{X-500\times0.006}{500\times0.006\times0.994}\le 0.58\right)$$

$$\approx\Phi\left(0.58\right)=0.7190$$

例3： 某射手射击，他打中 10 环的概率为 0.5, 打中 9 环的概率为 0.3, 打中 8 环的概率为 0.1, 打中 7 环的概率为 0.05, 打中 6 环的概率为 0.05. 他射击 100 次，试用中心极限定理计算他所得的总环数介于 900 环与 930 环之间的概率 .

解 设X_k表示该射手的第k发时所得的环数$(k=1,2,\cdots,100)$.

则X_k的分布律为

X_k	10	9	8	7	6
p	0.5	0.3	0.1	0.05	0.05

所以

$$EX_k = 10\times 0.5 + 9\times 0.3 + 8\times 0.1 + 7\times 0.05 + 6\times 0.05 = 9.15$$

$$E(X_k^2) = 10^2\times 0.5 + 9^2\times 0.3 + 8^2\times 0.1 + 7^2\times 0.05 + 6^2\times 0.05 = 84.95$$

则

$$DX_k = E(X_k^2) - (EX_k)^2 = 84.95 - 9.15^2 = 1.2275$$

因此, $X_1, X_2, \cdots X_{100}$ 是相互独立的随机变量. 故

$$P\left(900 \le \sum_{k=1}^{100} X_k \le 930\right)$$

$$= P\left(\frac{900 - \sum_{k=1}^{100} E(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{100} D(X_k)}} \le \frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - \sum_{k=1}^{100} E(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{100} D(X_k)}} \le \frac{930 - \sum_{k=1}^{100} E(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{100} D(X_k)}}\right)$$

$$= P\left(\frac{900 - 100 \times 9.15}{\sqrt{100 \times 1.2275}} \le \frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - 100 \times 9.15}{\sqrt{100 \times 1.2275}} \le \frac{930 - 100 \times 9.15}{\sqrt{100 \times 1.2275}} \right)$$

$$= P\left(-1.35388 \le \frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - 100 \times 9.15}{\sqrt{100 \times 1.2275}} \le 1.35388 \right)$$

$$= \Phi(1.35) - \Phi(-1.35) = 2\Phi(1.35) - 1 = 0.82289$$

例 4　假设一条自动生产线的产品合格率为 0.8, 试用中心极限定理计算，要使一批产品的合格率在 76% 与 84% 之间的概率不小于 90%，问这批产品至少要生产多少件？

解　设这批产品至少需要生产 n 件，才能使合格率在 76% 与 84% 之间的概率不小于 90%

再设 X 为这批产品中的合格品的数目，则

X~B(n, 0.8)

所以，EX=0.8n,　DX=0.16n.

因此，n 需满足下面的不等式

$$P\left\{0.76 \le \frac{X}{n} \le 0.84\right\} \quad 0.90$$

由中心极限定理计算，可知

$$P\left\{0.76 \le \frac{X}{n} \le 0.84\right\}$$

$$= P\left\{\frac{0.76n - 0.8n}{\sqrt{0.16n}} \le \frac{X - 0.8n}{\sqrt{0.16n}} \le \frac{0.84n - 0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right\}$$

$$= P\left\{-0.1\sqrt{n} \le \frac{X - 0.8n}{\sqrt{0.16n}} \le 0.1\sqrt{n}\right\}$$

$$\approx \Phi(0.1\sqrt{n}) - \Phi(-0.1\sqrt{n}) = 2\Phi(0.1\sqrt{n}) - 1$$

因此，要使

$$P\left\{0.76 \le \frac{X}{n} \le 0.84\right\} \quad 0.90$$

只须

$$2\Phi(0.1\sqrt{n})-1 \quad 0.90,$$

即

$$\Phi(0.1\sqrt{n}) \quad 0.95=\Phi(1.65),$$

得

$$0.1\sqrt{n} \quad 1.65$$

解得

$$n \quad 272.25$$

因此，由中心极限定理计算，可知这批产品至少要生产 273 件，才能使其合格率在 76% 与 84% 之间的概率不小于 90%.

例 5.

在掷硬币试验中，至少掷多少次，才能使正面出现的频率落在区间（ 0.4 , 0.6) 内的概率不小于 0.9?（用中心极限定理估计）

解：设至少掷 n 次，X 表示正面出现的次数，则

$$X \sim B(n, 0.5)$$

由题意有： $P\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\} \quad 0.9$

$$P\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\} = P\{0.4n < X < 0.6n\}$$

例 5. $\boxed{X \sim B(n\,, 0.5)}$ $\boxed{P\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\} \quad 0.9}$

$$= P\{\frac{0.4n - 0.5n}{0.5\sqrt{n}} < \frac{X - 0.5n}{0.5\sqrt{n}} < \frac{0.6n - 0.5n}{0.5\sqrt{n}}\}$$

$$= 2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 \quad 0.9$$

$$\Phi(0.2\sqrt{n}) \quad 0.95 = \Phi(1.645)$$

$$0.2\sqrt{n} \quad 1.645 \quad , \quad n \quad 67.65 \quad , n = 68.$$