§3.3 Cauchy 积分公式

主 要 内 容

利用 Cauchy-Goursat 基本定理在多连通域上的推广，即复合闭路定理，导出一个用边界值表示解析函数内部值的积分公式，该公式不仅给出了解析函数的一个积分表达式，从而成为研究解析函数的有力工具，而且提供了计算某些复变函数沿闭路积分的方法.

分析 设D－单连通，$f(z)$在D内解析，

$z_0 \in D$, C是D内围绕z_0的一条闭曲线，则

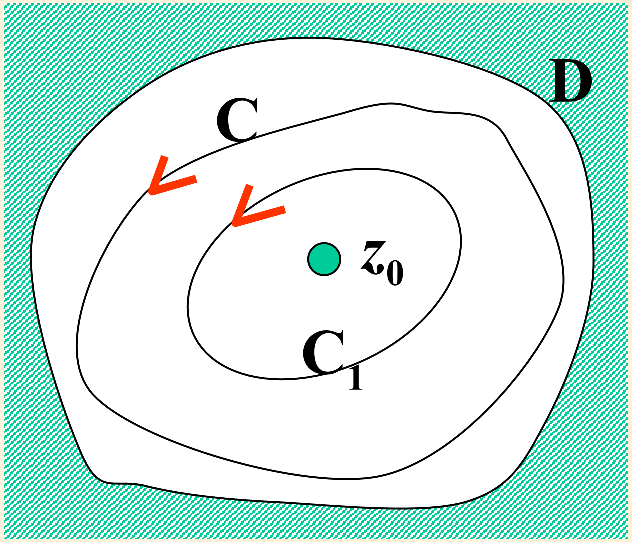
$\dfrac{f(z)}{z-z_0}$在z_0不解析．$\therefore \oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz \overset{\text{一般}}{\neq} 0$

由复合闭路定理得，

任意包含z_0在内部的

曲线$C_1 \subset C$的内部

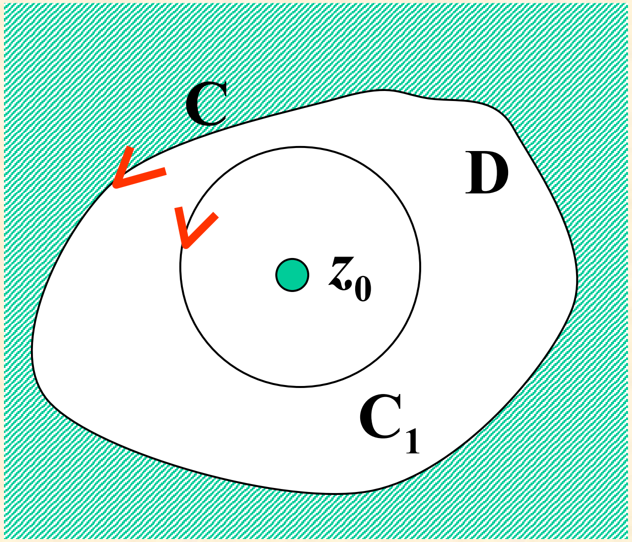
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$



特别取 $C_1=\{z\,\big|\,|z-z_0|=\delta(\delta>0\text{可充分小})\}$

$\because$ $f(z)$的连续性,在C_1上的函数值$f(z)$

当$\delta\to 0$时,$f(z)\to f(z_0)$



$\therefore$ 猜想积分

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \xrightarrow{\delta\to 0}$$

$$\to f(z_0)\oint_{C_1}\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

这个猜想是对的,这就是下面的定理.

定理 (*Cauchy* 积分公式)

1)设$f(z)$在D内处处解析,

2)C是D内任意一条正向简单闭 曲线,

它的内部完全含于D,

3)z_0为C内任意一点 $\Rightarrow$ $\boxed{f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz}$

证明 设$\forall K=\{z\,\big|\,|z-z_0|=R\}\subset C$的内部.

$$\because \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$与K的半径R无关,

$$\therefore \text{只须证明:} \lim_{R\to 0}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).$$

即要证：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| = R < \delta$

$$\left| \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < \varepsilon$$

$$\because \left| \oint_k \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \oint_k \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \oint_k \frac{1}{z - z_0} dz \right|$$

$$= \left| \oint_k \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \le \oint_K \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} ds < \frac{\varepsilon}{R} \oint_K ds = 2\pi\varepsilon$$

$\because \lim\limits_{z - z_0} f(z) = f(z_0) \quad \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad |z - z_0| = R < \delta \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{R\to 0}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \Rightarrow f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

(1)若定理条件改为 $f(z)$在C所围区域B内解析,及在$C+B=\overline{B}$上连续,$Cauchy$积分公式仍成立.

(2) $Cauchy$积分公式表明函数在C内部任一点的值可以用它在边界的 值来表示. 即若f(z)在区域边界上的值一经 确定, 则它在区域内部任一处的值也就确 定了.

(3)若$C: z = z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta}$ 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})}{\mathrm{Re}^{i\theta}} Rie^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})d\theta$$

一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

例1 求: 1) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\dfrac{\sin z}{z}dz$ 2) $\oint_{|z|=4}\left(\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{2}{z-3}\right)dz$

解 1) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz=\sin z\Big|_{z=0}=0$$

2) $$\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz=\oint_{|z|=4}\frac{dz}{z+1}+\oint_{|z|=4}\frac{2}{z-3}dz$$

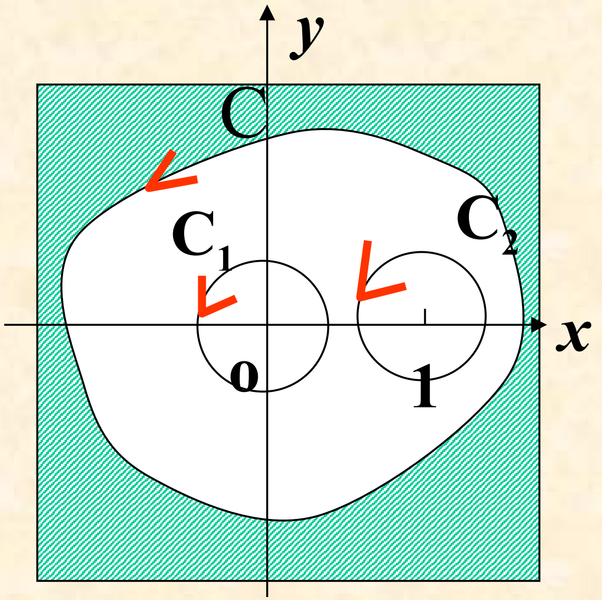
$$\overset{f(z)=1\text{及}2}{=}2\pi i\cdot 1+2\pi i\cdot 2=6\pi i$$

例2 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$

C为包含$|z|=1$在内的任意简单正向曲线.

解 $$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{2z-1}{z-1}}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{2z-1}{z}}{z-1}dz$$



由C积分公式

$$= \left.\frac{2z-1}{z-1}\right|_{z=0} 2\pi i + \left.\frac{2z-1}{z}\right|_{z=1} 2\pi i$$

$$= 4\pi i$$

例 3 设C 表圆周$x^2+y^2=3$, $f(z)=\int_C \frac{3\varsigma^2+7\varsigma+1}{\varsigma-z}d\varsigma$,

求$f'(1+i)$.

解 $\because$ $3z^2+7z+1$在全平面上处处解析，

$$\therefore f(z)=\int_C \frac{3\varsigma^2+7\varsigma+1}{\varsigma-z}d\varsigma=\begin{cases}0 & |z|>3\\ 2\pi i(3z^2+7z+1) & |z|<3\end{cases}$$

又 $$f'(z)=\begin{cases}0 & |z|>3\\ 2\pi i(6z+7) & |z|<3\end{cases}$$

故 $$f'(1+i)=2\pi i[6(1+i)+7]=2\pi(13i-6)$$

二、 解析函数的高阶导数

主 要 内 容

本节研究解析函数的无穷次可导性，并导出高阶导数计算公式。研究表明：一个解析函数不仅有一阶导数，而且有各阶导数，它的值也可用函数在边界上的值通过积分来表示。这一点与实变函数有本质区别。

形式上，

对积分公式 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz\,(z_0\in D)$

两边在积分号下对 z_0 求导得

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz \qquad \cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad (n=1,2,\cdots)$$

以下将对这些公式的正确性加以证明。

定理 解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数，它的n阶导数为

$$\boxed{f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz} \quad (n=1,2,\cdots)$$

其中C为在$f(z)$的解析区域D内围绕z_0的任意正向简单闭曲线，而且它的内部$\subset D$.

证明 用数学归纳法和导数定义。

先证$n=1$的情形.

$$\forall z_0\in D \quad f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

由柯西积分公式 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$

$$f(z_0+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}dz$$

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i\Delta z}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}dz-\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz$$

令为 I

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz+\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}dz}$$

$$|I| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|\Delta z||f(z)|}{|z - z_0 - \Delta z||z - z_0|^2} ds$$

$\because$ $f(z)$在C上解析 ,$\therefore$ $f(z)$在C上连续

则$\exists M, s.t. |f(z)| \leq M, d = \min\limits_{z\in C}|z - z_0|$ 取$|\Delta z| < \frac{1}{2}d$,则有

$$|z - z_0| \quad d, \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{d}$$

$$|z - z_0 - \Delta z| \quad |z - z_0| - |\Delta z| > \frac{d}{2}, \quad \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} < \frac{2}{d}$$

$$\therefore |I| < |\Delta z| \frac{ML}{\pi d^3} \quad (L\text{——}C\text{的长度})$$

显然，$\lim\limits_{\Delta z \to 0} I = 0$，从而有

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \quad (*)$$

再利用(*)式及推导(*)的方法可证$n = 2$的情形.

$$f''(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f'(z_0 + \Delta z) - f'(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$ 依次类推，用数学归纳法可得

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

定理表明$f(z)$在z平面上D内解析 $\Rightarrow$ $f(z)$在D内具有各阶导数,即在D内解析 $\Rightarrow$ 无穷次可导.

一个解析函数的导数仍为解析函数。

用途：可计算积分 $$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

例 1 求下列积分值　$C: |z| = r > 1$

$$1) \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz \qquad 2) \oint_C \frac{e^z}{(1+z^2)^2} dz$$

解　1) $\because$ $\cos \pi z$ 在全平面处处解析

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1}$$

$$= \frac{2\pi i}{4!}(-\pi^4) = -\frac{\pi^5}{12} i$$

2) $\because \dfrac{e^z}{(z^2+i)^2}$在$z=\pm i$处不解析.取$C_1:|z-i|=\rho_1$

$C_2:|z+i|=\rho_2$ C_1,C_2不相交且在C的内部

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{(1+z^2)^2}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{(1+z^2)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{(1+z^2)^2}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{\dfrac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz$$

$$=\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left(\frac{e^z}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i}+\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left(\frac{e^z}{(z-i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-i}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)(e^{i}-ie^{-i})$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)^{2}(\cos 1-\sin 1)=\pi i\sqrt{2}\sin(1-\frac{\pi}{4})$$

3)求下列积分值, $C:|z|=r>1, \oint_C \frac{e^z}{z^n}dz$

$n=1$, 原式 $=2\pi i$;　$n\neq 1$, 原式 $=\dfrac{2\pi i}{(n-1)!}$

4)求下列积分值, $\oint_{|z|=4}\frac{\cos\pi z}{z^3(z-1)^2}dz$　　$(12-\pi)\pi i$

第六讲
解析函数与调和函数的关系

§3.4 解析函数与调和函数的关系

内 容 简 介

在 §3.3 我们证明了在 D 内的解析函数，其导数仍为解析函数，所以解析函数有任意阶导数。本节利用这一重要结论研究解析函数与调和函数之间的关系。

定义 若二元实变函数$\varphi(x,y)$在D内具有二阶连续偏导数且满足$Laplace$方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad 即\ (\ \Delta\varphi=0)$$

则称$\varphi(x,y)$为D内的调和函数.

定理 若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析

$\Rightarrow u=u(x,y)\ ,\ v=v(x,y)$是$D$内的调和函数。

证明：设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析，则

由 $C-R$ 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

从而有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$

由解析函数高阶导数定理 $\Rightarrow u(x,y),v(x,y)$

具有任意阶的连续导数. $\quad \therefore \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$

故在D内有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ 同理有 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

即 u 及 v 在 D 内满足拉普拉斯 (*Laplace*) 方程：

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0 \quad \text{其中} \ \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$\therefore u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$是D内的调和函数。

定义 设$u(x, y)$为D内的调和函数，称使得 $u + iv$ 在D内构成解析函数的调和函数$v(x, y)$为$u(x, y)$的共轭调和函数.

上面定理说明：

D内解析函数的虚部是实部的共轭调和函数.

即, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在D内解析 $\Rightarrow$

在D内$v(x,y)$必为$u=u(x,y)$的共轭调和函数.

由解析的概念得：

在D内满足$C-R$方程：$u_x=v_y, u_y=-v_x$的两个调和函数u,v, v必为u的共轭调和函数.

现在研究反过来的问题：若u,v是任意选取的在区域D内的两个调和函数,则$u+iv$在D内就不一定解析.

如 $v=x+y$不是$u=x+y$的共轭调和函数.

($\because$ $f(z)=u+iv=(x+y)+i(x+y)$在z平面上处处不解析$u_x=1=v_y \quad u_y=1\neq -v_x$)

要想使$u+iv$在D内解析,u及v还必须满足$C-R$方程，即v必须是u的共轭调和函数.由此，

已知一个解析函数的实部$u(x,y)$,利用$C-R$方

(虚部$v(x,y)$)

程可求得它的虚部$v(x,y)$,从而构成解析函数$u+iv$.

(实部$u(x,y)$)

设D一单连通区域，$u(x,y)$是区域D内的调和函数，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

即，$-\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial x}$在$D$内有连续一阶偏导数

且
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\overset{\exists v}{=}dv(x,y)$$

$$\boxed{v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c\qquad(*)}$$

$\because \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$满足$C-R$方程.

$\therefore u+iv$在D内解析.

定理 设$u(x,y)$在单连通D内调和函数,

则(*)式所确定的$v(x,y)$,使得

$f(z)=u+iv$在D内解析.

公式不用强记！可如下推出：

已知：$u(x,y)$,求其共轭调和函数$v(x,y)$:

由$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \overset{C-R\text{方程}}{=} -u_y dx + u_x dy$

然后两端积分。

由$du = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \overset{C-R\text{方程}}{=} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy$

类似地，然后两端积分得，

$$\boxed{u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y dx - v_x dy + c \qquad (**)}$$

 调和函数在流体力学和电磁场理论等实际问题中都有重要应用。本节介绍了调和函数与解析函数的关系。

例 1 由下列条件求解析函数 $f(z)=u+iv$

$$u=x^2+xy-y^2 \qquad f(i)=-1+i$$

解 $\because \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y \qquad -\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$

$$\therefore dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=(2y-x)dx+(2x+y)dy$$

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-x)dx+(2x+y)dy+c$$

$$=\int_o^x -xdx+\int_0^y(2x+y)dy+c$$

$$=-\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+c$$

曲线积分法

故 $$f(z)=(x^2-y^2+xy)+i(-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+c)$$

$$=(x+iy)^2-\frac{i}{2}(x+iy)^2+ic=(1-\frac{1}{2}i)z^2+ic$$

$\because\ f(i)=-1+i$ 代入上式得 $(1-\frac{i}{2})i^2+ic=-1+i$

$\therefore c=\frac{1}{2}$ $\quad f(z)=(1-\frac{i}{2})z^2+\frac{i}{2}$

□ $\quad x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

又解 $\because\ dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy$

凑全微分法

$$= (2y - x)dx + (2x + y)dy$$

$$= 2ydx + 2xdy - xdx + ydy$$

$$= 2dxy + d\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$$

$$v(x, y) = -\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + c$$

$$f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + c\right)$$

又解 $\because \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + y \Rightarrow v = 2xy + \dfrac{y^2}{2} + \varphi(x)$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) \overset{\because \frac{\partial v}{\partial x}}{=} 2y - x$$

偏积分法

$$\varphi'(x) = -x \qquad \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\therefore v(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c$$

$$f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + c\right)$$

又解 $f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$

$$= (2x + y) - i(x - 2y)$$

$$= 2(x + iy) - i(x + iy)$$

$$= (2 - i)(x + iy)$$

$$= (2 - i)z$$

$$\therefore f(z) = \frac{2-i}{2} z^2 + ic$$

$$f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i(-\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + c)$$

不定积分法

作业

习题3　8、9（**1、2、4、5**）、22、23（1, 2, 3）

第 四 章　级 数

CH4§4.1 复数项级数

- 1. 复数列的极限
- 2. 级数的概念

1. 复数列的极限

定义 设复数列 $\{\alpha_n\}(n=1,2,\cdots)$,其中$\alpha_n = a_n + ib_n$,

又设复常数 :$\alpha = a + ib$,

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \ni n > N$,恒有$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$,

那么α称为复数列$\{\alpha_n\}$当$n\to\infty$时的极限，

记作$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$,或当$n\to\infty$时，$\alpha_n \to \alpha$,

此时，也称复数列$\{\alpha_n\}$收敛于α.

定理 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

证明 $\Rightarrow$"已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ 即，

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \ni n > N$,恒有$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$

$$又\left|\alpha_n-\alpha\right|=\left|(a_n-a)+i(b_n-b)\right|=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}$$

$$\therefore \left|a_n-a\right|\le\left|\alpha_n-\alpha\right|<\varepsilon \qquad \left|b_n-b\right|\le\left|\alpha_n-\alpha\right|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b.$

"$\Leftarrow$"已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 即，

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\ni n>N,$恒有$\left|a_n-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2},\ \left|b_n-b\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$又\left|\alpha_n-\alpha\right|=\left|(a_n-a)+i(b_n-b)\right|$$

$$\le\left|a_n-a\right|+\left|b_n-b\right|<\varepsilon$$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha.$

2. 级数的概念

定义 ▪设复数列：$\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}(n=1,2,\cdots,),$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$ --- 无穷级数

▪级数的前面 n 项的和

$$s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$ --- 级数的部分和

▪若部分和数列$\{s_n\}$

收敛 - 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$称为收敛

$\lim_{n\to\infty}s_n=s$称为级数的和

不收敛 - 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$称为发散

例 1 判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3i}{2^n}$的敛散性。

解 $\because\ s_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{3i}{2^j}=3i(1-\frac{1}{2^n})$, 又 $\lim_{n\to\infty}s_n=3i$

$\therefore$ 级数收敛, 且和为 $3i$.

定理 2 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛。

证明 $\because\ s_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+ib_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+i\sum_{k=1}^{n}b_k=\sigma_n+i\tau_n$

由定理 1 ,$\lim_{n\to\infty}s_n=a+ib\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\sigma_n=a,\lim_{n\to\infty}\tau_n=b$

$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛。

由定理 2 ，复数项级数的收敛问题可归之为两个实数项级数的收敛问题。

性质 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛的必要条件: $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0.$

定理 3 若$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，且$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|.$

证明 $\because |\alpha_n| = |a_n + ib_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$\therefore |a_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$

$|b_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

由比较判定法

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$均绝对收敛，

由定理2得$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛。

$\because \left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|, \therefore \left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$

由定理 3 的证明过程，及不等式$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le |a_n|+|b_n|$有：

定理 4 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$都收敛。

□ 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛$\overset{?}{\Longrightarrow}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛. (例如：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n i}{n}$)

定义 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为绝对收敛；

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为条件收敛.

例 2 下列级数是否收敛？是否绝对收敛？

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\quad (2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}\quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$$

解 (1) $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ 发散.

(2) $\because \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|8i|^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛，$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 绝对收敛。

(3) $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$ 收敛.

又 $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，$\therefore$ 原级数非绝对收敛.

例 3 讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$的敛散性。

解 令$|z|=r$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}=e^r$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$在复平面上处处绝对收敛。

练习： 讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$的敛散性。

讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$的敛散性。 $\cos in=\frac{e^n+e^{-n}}{2}$

§4.2 幂级数

- 1. 幂级数的概念
- 2. 收敛定理
- 3. 收敛圆与收敛半径
- 4. 收敛半径的求法
- 5. 幂级数的运算和性质

1. 幂级数的概念

定义

- 设复变函数列 :$\{f_n(z)\}\quad z\in D,\quad n=1,2,\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \qquad (1)$$

--- 称为复变函数项级数

- 级数的最前面 n 项的和

$$s_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

--- 级数的部分和

- 若$\forall z_0\in D\quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)=s(z_0)$,称级数(1)在$z_0$收敛,

其和为$s(z_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0)$不存在，称级数(1)发散,

若级数 (1) 在 D 内处处收敛，其和为 z 的函数

$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$--- 级数 (1) 的和函数

特殊情况，在级数 (1) 中 $f_n(z) = c_n(z - z_0)^n$ 得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (2) \qquad \text{当} z_0 = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \quad (3)$$

称为幂级数

$\because$ 在(2)中令$z - z_0 = \xi$ (2) $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} c_n \xi^k$

$\therefore$ 研究级数(3)并不失一般性。

2. 收敛定理

同实变函数一样，复变幂级数也有所谓的收敛定理：

定理 1 (阿贝尔 (Able) 定理)

(1)若级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$在$z = z_0(\neq 0)$收敛,则对满足$|z| < |z_0|$的$z$,级数必绝对收敛.

(2)若级数在$z = z_0$发散,则对满足$|z| > |z_0|$的z,级数必发散.

证明 (1)$\because \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$收敛,则$\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$，即

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，$\ni n > N$，恒有$\left|c_n z_0^n\right| < \varepsilon$

取$M = \max\left\{\varepsilon, \left|c_0\right|, \left|c_1 z_0\right|, \left|c_2 z_0^2\right|, \cdots, \left|c_N z_0^N\right|\right\}$

故$\left|c_n z_0^n\right| < M, n = 0,1,2,\cdots$

若$|z| < |z_0|$，则$\dfrac{|z|}{|z_0|} = q < 1$ $\quad \left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n\right| \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n$,

由于$\sum_{n=0}^{+\infty} Mq^n$收敛,由比较判别法得$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|c_n z^n\right|$收敛,

$\therefore \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛。

(2) 用反证法，设$\exists z_1, \ni |z_1| > |z_0|$，有$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_1^n$收敛，

由(1)知$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$收敛与假设矛盾，得证！

3. 收敛圆与收敛半径

由 *Able* 定理，幂级数的收敛范围不外乎下述三种情况：

(*i*) 若对所有正实数都收敛，级数 (3) 在复平面上处　处收敛。

(*ii*) 除 z=0 外，对所有的正实数都是发散的，这时，级数 (3) 在复平面上除 z=0 外处处发散。

(iii) $\exists\alpha>0$, 使得 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\alpha^n$ 收敛,

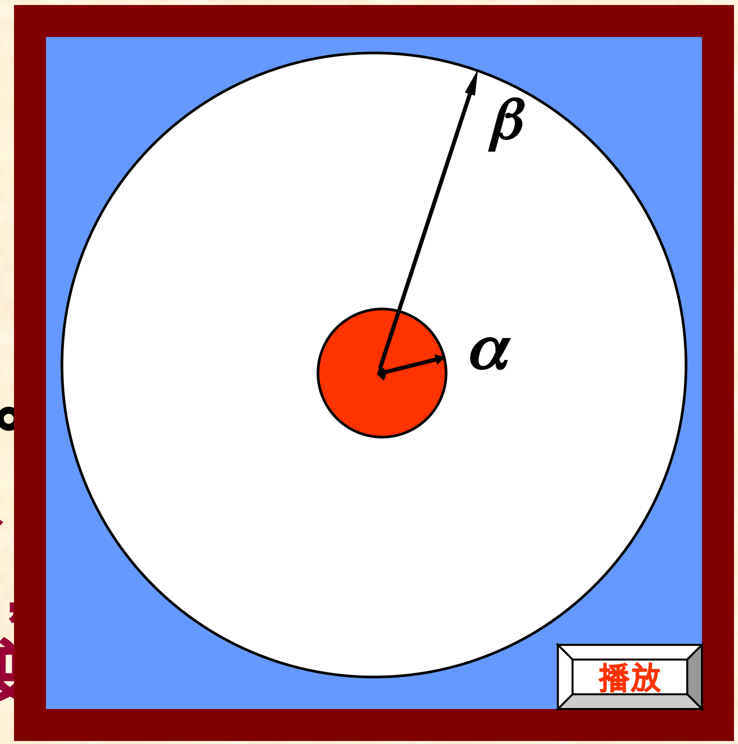
$\exists\beta>0$, 使得 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\beta^n$ 发散.

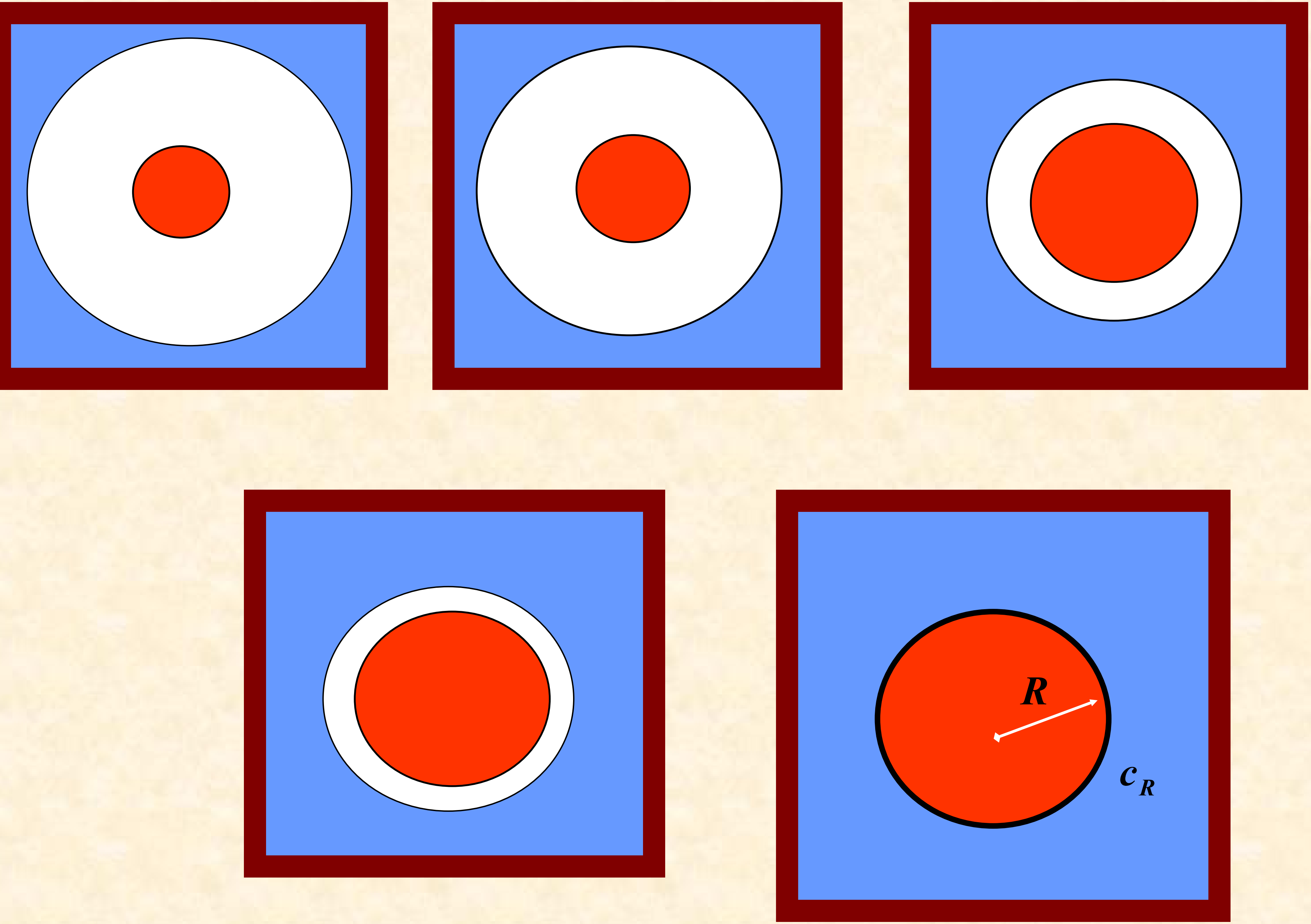
由 $Able$ 定理，在圆周 c_α：$|z|=\alpha$ 内，级数(3)收敛；在圆周 c_β：$|z|=\beta$ 外，级数(3)发散. 显然，$\alpha<\beta$

否则，级数 (3) 将在 α 处发散。

将收敛部分染成红色，发散部分染成蓝色，α 逐渐变大，在 c_α 内部都是红色，β 逐渐变

小，在 c_β 外部都是蓝色，红、蓝色不会交错。故一定 $\exists$ $\boxed{c_R\ |z|=R}$，为红、蓝两色的分界线。




R
c_R

定义　这个红蓝两色的分界圆周 c_R 叫做幂级数的**收敛圆**；这个圆的半径 R 叫做幂级数的**收敛半径**。

(i) 幂级数在收敛圆内部收敛，在收敛圆外部发散，在圆周上可能收敛可能发散，具体问题要具体分析。

(ii) 幂级数 (3) 的收敛范围是以 0 为中心，半径为 R 的圆域；幂级数 (2) 的收敛范围是以 z_0 为中心，半径为 R 的圆域.

4. 收敛半径的求法

关于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (3)的收敛半径求法，有

定理 2（比值法） 若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$，则 $R = \begin{cases} 1/\lambda & 0<\lambda<+\infty \\ +\infty & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = +\infty \end{cases}$

证明 $(i)\lambda \neq 0, \because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z| = \lambda|z|$

当$\lambda|z| < 1$时，即$|z| < \frac{1}{\lambda}$时，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$绝对收敛；

当$\lambda|z| > 1$时，即$|z| > \frac{1}{\lambda}$时，$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$发散，

以下证：当$|z|>\dfrac{1}{\lambda}$时，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$也发散.

用反证法,设在$|z|=\dfrac{1}{\lambda}$外有一点z_0，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n z_0^n$收,

再取一点z_1,满足$\dfrac{1}{\lambda}<|z_1|<|z_0|$，由$Able$定理得：

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|c_n||z_1|^n$收敛,矛盾！$\therefore\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n z_0^n$发散,即

当$|z|>\dfrac{1}{\lambda}$时，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$发散,故$R=\dfrac{1}{\lambda}$.

(ii)若$\lambda=0$时，对$\forall z$都有$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|c_n z^n|$收敛

$\therefore\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$在复平面上处处收敛，故$R=+\infty$;

(iii)当$\lambda=+\infty$时，除$z=0$外，对一切z,有

$\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n z^n|$发散，从而,$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$也发散.

否则，如果有一点$z_0\neq 0$,∂ $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z_0^n$收敛,则

$\exists z_1$,满足$|z_0|>|z_1|\neq 0$,$\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n z_1^n|$收敛，矛盾！　故$R=0$.

定理 3（根值法） 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\mu$，则　$R=\begin{cases}1/\mu & 0<\mu<+\infty\\ +\infty & \mu=0\\ 0 & \mu=+\infty\end{cases}$

定理 2（比值法） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$，则 $R = \begin{cases} 1/\lambda & 0 < \lambda < +\infty \\ +\infty & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = +\infty \end{cases}$

定理 3（根值法） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \mu$，则 $R = \begin{cases} 1/\mu & 0 < \mu < +\infty \\ +\infty & \mu = 0 \\ 0 & \mu = +\infty \end{cases}$

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

的收敛范围及和函数。

解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 \quad \therefore R = 1$

又 $s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$

$\because$ 当 $|z| < 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0, \therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1 - z}.$

$\because$ 当 $|z| = 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n \neq 0, \therefore$ 级数发散.

综上 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} \text{收敛, 且和函数为 } \dfrac{1}{1-z} & \text{当 } |z| < 1 \text{ 时;} \\ \text{发散} & \text{当 } |z| \quad 1 \text{ 时.} \end{cases}$

例 2 求下列幂级数的收敛半径并讨论收敛圆周上的情形：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}(p>0);\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n;\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n.$$

解 (1) $\because\ \lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| =\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1 \quad \therefore R=1$

$\boxed{p=1}$ 当 $z=1$ 时， 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$， 该级数发散

当 $z=-1$ 时， 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$， 该级数收敛

$\boxed{p=2}$ 在圆周 $|z|=1$ 上，$\because\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，

$\therefore$ 该级数在收敛圆上是处处收敛的。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n$;

(2)$\because\ c_n=\operatorname{ch}\frac{i}{n}=\frac{1}{2}(e^{\frac{i}{n}}+e^{-\frac{i}{n}})$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{n}+i\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}-i\sin\frac{1}{n}\right]=\cos\frac{1}{n}$$

$$\because\ \lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\cos\frac{1}{n+1}\Big/\cos\frac{1}{n}\right|=1\quad\therefore R=1$$

在圆周$|z-1|=1$上，$\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{n})e^{in\theta}$

$\because\ \lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})e^{in\theta}\neq 0$，$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n$发散。

综上　当$|z-1|<1$时，该级数收敛，

当$|z-1|\quad 1$时，该级数发散。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

(3) $\because\ \ln(in)=\ln|in|+i\arg(in)=\ln n+\frac{\pi}{2}i$

其中 $|\ln in|=\sqrt{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$

$$\therefore |c_n|=\frac{1}{|\ln in|^n}=\left[1\Big/\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$故\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\frac{1}{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$\therefore R=+\infty$

故该级数在复平面上是处处收敛的 .

5. 幂级数的运算和性质

❑ 代数运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) \quad R = r_1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = g(z) \quad R = r_2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n = f(z) \pm g(z) \quad |z| < R$$

--- 幂级数的加、减运算

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0) z^n$$

$$= f(z) g(z), \quad |z| < R$$

其中：$R = \min(r_1, r_2)$

--- 幂级数的乘法运算

设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \quad |z|<r,$

$g(z)$在$|z|<R$内解析，且$|g(z)|<r$

$$\Rightarrow f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n \quad |z|<R$$

--- 幂级数的代换(复合)运算

幂级数的代换运算在函数展成幂级数中很有用.

例 3 把$\dfrac{1}{z-b}$表成形如$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$的幂级数，这里，复常数$b\neq a$.

解
$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\boxed{\dfrac{z-a}{b-a}}}=\frac{1}{1-g(z)}\left(-\frac{1}{b-a}\right)$$

代换

解 $$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\boxed{\dfrac{z-a}{b-a}}}=\frac{1}{1-g(z)}\left(-\frac{1}{b-a}\right)$$

代换

展开

$$\because \frac{1}{1-g(z)}=1+g(z)+[g(z)]^2+\cdots+[g(z)]^n+\cdots \quad ,|g(z)|<1$$

$$=1+\frac{z-a}{b-a}+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^2+\cdots+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^n+\cdots \quad ,|z-a|<|b-a|=R$$

还原

$$\therefore \frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-g(z)}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}(z-a)$$

$$-\frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2-\cdots\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots \quad |z-a|<R$$

□ 分析运算

定理 4 设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z) \quad |z| < R$

$\Rightarrow (i) \quad f(z)$在$|z| < R$内解析.

$$(ii) \quad f'(z) = (\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad |z| < R$$

--- 幂级数的逐项求导运算

$$(iii) \quad \int_c f(z)dz = \int_c \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_c z^n dz$$

或 $\int_0^z f(\varsigma)d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} \quad |z| < R, C \subset |z-a| < R$

--- 幂级数的逐项积分运算

作业

- P103 30(1)(2),31
- P141 1(2)(4),3(3)(4),6(2)(3)(4),11(1)(3)