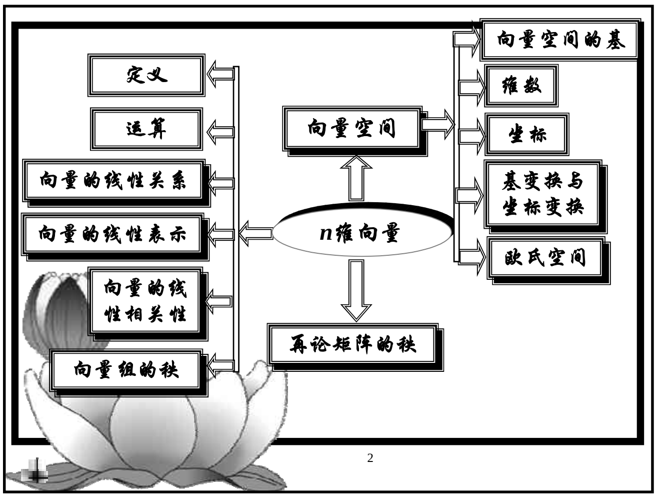
第三章 向量空间



第一节 向量空间

- 一、几何空间
- 二、n 维向量
- 三、向量的运算
- 四、向量、向量组与矩阵
- 五、向量空间

一、几何空间

在几何空间中，称既有大小又有方向的量为向量.

建立空间直角坐标系后，向量的坐标表示为

$$\alpha=(a_1,a_2,a_3),\quad \beta=(b_1,b_2,b_3).$$

向量的加法与数乘运算(也称为线性运算)的坐标表示为

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

$$\lambda\alpha=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),\ (\lambda\text{为常数})$$

向量平行：若两个非零向量的方向相同或相反,则称这两个向量平行. 由于零向量的方向可看作是任意的,可以认为零向量与任意向量都平行.

定理1 两个向量 α,β 平行的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ,μ, 使得 $\lambda\alpha+\mu\beta=0.$

证明 必要性 由于 α,β 平行, 当 $\alpha\neq 0$ 时, 令 $m=\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}$, 若 α,β 同向, 则有 $\beta=m\alpha$, 即 $m\alpha+(-1)\beta=0.$

若 α,β 反向, 则有 $\beta=-m\alpha$, 即 $m\alpha+\beta=0.$

当 $\alpha=0$ 时, 有 $1\alpha+0\beta=0.$

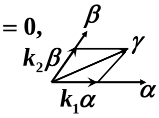
充分性 由于 $\lambda\alpha+\mu\beta=0$, λ,μ 不全为零. 不妨设 $\mu\neq 0$, 则 $\beta=-\dfrac{\lambda}{\mu}\alpha$, 即 α,β 平行.

定理2 三个向量 α,β,γ 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3, 使 $k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=0.$

证明 必要性 $(\Rightarrow)$ 若 α,β 共线, 存在不全为零的数 k_1,k_2, 使得 $k_1\alpha+k_2\beta=0$, 则 $k_1\alpha+k_2\beta+0\gamma=0.$

若 α,β 不共线, 用平行四边形法则将向量 γ 沿 α,β 方向分解, 可得 $\gamma=k_1\alpha+k_2\beta$, 则 $k_1\alpha+k_2\beta-1\gamma=0.$

充分性 $(\Leftarrow)$ 由于 $k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=0$, k_1,k_2,k_3 不全为零, 不妨设 $k_3\neq 0$, 则有 $\gamma=-\dfrac{k_1}{k_3}\alpha-\dfrac{k_2}{k_3}\beta$. γ 在 α,β 所在的平面上, 故 α,β,γ 共面.



二、n 维向量

1. 向量定义

几何空间中的向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ 是由三个实数构成的有序数组 (a_1,a_2,a_3)，称之为三维向量．

定义1 n 个数组成的有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为 n 维向量，这 n 个数称为该向量的 n 个分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量．

分量全为实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量．

如不特别声明，我们所讨论的向量均为实向量．

2. n 维向量的表示方法

n 维向量写成一列，称为列向量，也就是列矩阵，通常用 α,β,γ 等表示，如：

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

n 维向量写成一行，称为行向量，也就是行矩阵，通常用 $\alpha^T,\beta^T,\gamma^T$ 等表示，如：

$$\alpha^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

例如

$(1,2,3,\cdots,n)$ ⟶ n 维实向量

$(1+2i,2+3i,\cdots,n+(n+1)i)$ ⟶ n 维复向量

第1个分量　第2个分量　第 n 个分量

定义2 若两个 n 维向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^T$ 对应分量相等，即

$$\alpha_i=\beta_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则称这两个向量相等，记作 $\alpha=\beta$．

三、向量的运算

定义3 设 n 维向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^T$

定义 α 与 β 的加法为

$$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)^T,$$

定义4 数乘 $\lambda\alpha=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\cdots,\lambda\alpha_n)^T$，

注意

1.行向量与列向量都按照矩阵的运算法则进行运算；

2.向量的加法与数乘运算称为向量的线性运算．

定义5 分量全为零的向量 $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 称为零向量，记为 $\mathbf{0}$．

负向量　$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$，　$-\alpha=\begin{pmatrix}-\alpha_1\\-\alpha_2\\\vdots\\-\alpha_n\end{pmatrix}$

负向量

由定义易得向量加法与数乘向量具有如下性质：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$
$$\alpha+0=\alpha$$
$$\alpha+(-\alpha)=0$$
$$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$$
$$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$$
$$k(l\alpha)=(kl)\alpha=l(k\alpha)$$
$$1\alpha=\alpha$$
$$(-1)\alpha=-\alpha$$
$$0\alpha=0$$
$$k0=0.$$

若 $k\neq0,\alpha\neq0$，则 $k\alpha\neq0$.

四、向量、向量组与矩阵

1. 向量组的定义

由m个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$构成的集合称为向量组.

记作 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$.

2. 向量组与矩阵的关系

例如，矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_j & & \alpha_n \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ \alpha_j,\ \cdots,\alpha_n)$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 称为矩阵A的列向量组.

类似地，矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$又有m个n维行向量.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \\ \beta_i^T \\ \\ \beta_m^T \end{array} \quad A=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_i^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix} \quad \beta_i=\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

向量组 $\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$称为矩阵$A$的行向量组.

由此可知：矩阵可看作由列向量组构成.
矩阵也可看作由行向量组构成.

反之，由有限个同维数的向量所组成的向量组可以构成一个矩阵.

m个n维列向量所组成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)_{n\times m}$$

构成一个$\boxed{n\times m}$矩阵.

m个n维行向量所组成的向量组

$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots\beta_m^T$，构成一个$\boxed{m\times n}$ 矩阵.

$$B=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}_{m\times n}$$

五、向量空间

1. 定义

定义7 设V为 n 维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于加法及数乘两种运算封闭，则称集合V为实数域上的向量空间.

说明：(1). 集合V对于加法及数乘两种运算封闭指

若$\forall\alpha\in V,\beta\in V$，则$\alpha+\beta\in V$;

若$\forall\alpha\in V,\lambda\in R$，则$\lambda\alpha\in V$.

(2). 向量空间$\begin{cases} \text{集合}V\text{非空} \\ \text{加法封闭} \quad \forall\alpha,\beta\in V\Rightarrow\alpha+\beta\in V \\ \text{数乘封闭} \quad \forall\alpha\in V,\lambda\in R\Rightarrow\lambda\alpha\in V \end{cases}$

例1 3维向量的全体$R^3=\{(x_1,x_2,x_3)^T\mid x_i\in R\}$，是一个向量空间.

解 (1) $0=(0,0,0)^T\in R^3$，$\therefore$ R^3非空;

(2). $\forall\alpha,\beta\in R^3$，设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\beta=(y_1,y_2,y_3)^T$，

$\therefore\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)^T\in R^3$

(3). $\lambda\alpha=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)^T\in R^3$

$\therefore$ $R^3=\{(x_1,x_2,x_3)^T\mid x_i\in R\}$是一个向量空间.

同理，可以验证：实数域上的全体n维向量

$$R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\mid x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$$

也是一个向量空间，称为实数域上的n维向量空间，记作R^n.（定义6）

2. 子空间

定义 设有向量空间V_1及V_2，若 $V_1\subset V_2$，则称V_1是V_2 的子空间.

实例 设 V是由 n 维向量所组成的向量空间，显然 $V\subset R^n$，所以V总是R^n的子空间.

例2 判别下列集合是否为向量空间.

$$V_1=\left\{x=\left(x_1,0,\cdots,0,x_n\right)^T \middle| x_1,x_n\in R\right\}，其中\ n\geq 2.$$

解 (1) 由 $(0,0,\cdots,0)^T\in V_1$ $\therefore V_1$非空;

(2) 设$\alpha=\left(a_1,0,\cdots,0,a_n\right)^T\in V_1$, $\beta=\left(b_1,0,\cdots,0,b_n\right)^T\in V_1$

$\Rightarrow \alpha+\beta=\left(a_1+b_1,0,\cdots,0,a_n+b_n\right)^T\in V_1$

$\forall\ \lambda\in R$, $\lambda\alpha=\left(\lambda a_1,0,\cdots,0,\lambda a_n\right)^T\in V_1$.

故V_1是向量空间，且是R^n的子空间.

例3 判别下列集合是否为向量空间.

$$V_2=\left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T \middle| x_1x_2\cdots x_n=0, x_i\in R\right\}$$

解 因为若 $\alpha=\left(1,0,\cdots,0\right)^T\in V_2$,

$\beta=\left(0,1,\cdots,1\right)^T\in V_2$

$\Rightarrow \alpha+\beta=\left(1,1,\cdots,1\right)^T\notin V_2$. $(\because 1\cdot 1\cdots 1=1\neq 0)$

故V_2不是向量空间.

例4 判别下列集合是否为向量空间.

$$V=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid Ax=0,\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\right\}$$

$$S=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid Ax=b,\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\right\}$$

解 (1). $0\in V$, $\therefore$ V非空;

(2). $\forall x,y\in V$, 即$Ax=0, Ay=0$,

$A(x+y)=Ax+Ay=0$ $\therefore x+y\in V$.

(3). $\forall\lambda\in R$, $A(\lambda x)=\lambda Ax=0$

$\therefore$ $\lambda x\in V$，故V是向量空间，

称为方程组$Ax=0$的解空间.

齐次线性方程组解向量的集合构成了向量空间.

$\forall x\in S$, 即$Ax=b$,

$A(2x)=2Ax=2b\neq b$, $\therefore$ $2x\notin S$

故S不是向量空间.

非齐次线性方程组的解向量的集合不构成向量空间.

例5 设a, b为两个已知的n维向量, 集合

$$V=\left\{x=\lambda a+\mu b \middle| \lambda,\mu\in R\right\}$$

试判断集合是否为向量空间.

解 显然V非空,对任意$x_1,x_2\in V$，则 $x_1=\lambda_1 a+\mu_1 b$

$x_2=\lambda_2 a+\mu_2 b$, 于是

$x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)a+(\mu_1+\mu_2)b\in V$,

$\forall k\in R$, $kx_1=(k\lambda_1)a+(k\mu_1)b\in V$.

故V是向量空间.

该向量空间称为由<u>向量a, b所生成的向量空间.</u>

一般地，由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可生成向量空间

$$V=\left\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \middle| \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\right\},$$

记为 $V=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$.

作 业

- 习题3.1(P_{101})

A: 1, 2, 3

B: 1

预习：向量组的线性表示

线性相关与无关

第二节　向量组的线性关系

- 一、向量的线性表示
- 二、向量的线性相关性
- 三、小结
- 四、作业

一、向量的线性表示

1. 线性表示

定义11 给定n维向量组A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，对于任一组实数 k_1，$k_2,\cdots,k_m$，向量

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

称为向量组A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合.

k_1，$k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的系数.

如果存在一组实数 λ_1，$\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$$

则称β是向量组A: α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合.

此时称β可由向量组A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

例1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

判断$\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$能否由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示.

解 (1) α_3

$$\alpha_3=(0)\alpha_1+(0)\alpha_2$$

$\therefore$ α_3 能由 α_1,α_2线性表示.

事实上，0向量可由任意向量组线性表示.

$$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$$

$$0=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m.$$

$A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$

$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(2) α_4

$$\alpha_4=(1)\alpha_1+(1)\alpha_2$$

$\therefore$ α_4 能由 α_1,α_2线性表示.

(3) α_5

$$\alpha_5\overset{?}{=}(\lambda)\alpha_1+(\mu)\alpha_2$$

$$=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ α_5 不能由 α_1,α_2线性表示.

例2 n维向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\ \varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

称为n维单位坐标向量组，则对任意n维向量

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，均有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n.$$

即任意一个n维向量均可由单位坐标向量组线性表示.

对于线性方程组

(1) $$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

(2) 矩阵乘积形式：$Ax=b$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

(3) 向量形式

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ b_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$$\underset{b}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} = \underset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} x_1 + \underset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} x_2 + \cdots + \underset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} x_n$$

$$b = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

（3） 向量形式

$Ax = b$

$$\begin{array}{c} b \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

$$b = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

(4)

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \overset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \beta_1^T x \\ \beta_2^T x \\ \vdots \\ \beta_m^T x \end{pmatrix}$$

$$\beta_i^T x = b_i \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\beta_1^T x = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n$$

? $b \xrightarrow{\ ?\ }$ 可由$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$线性表示?

定理3 向量b可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$线性表示的充要条件 是方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = b$ 有解.

证明 充分性 若方程组有解, 设$k_1,\ k_2,\cdots,k_m$为一组解.

则有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = b$

即向量b可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$线性表示.

必要性 向量b可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$线性表示，则存在一组数$k_1,\ k_2,\cdots,k_m$，使得

$$b = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

即 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = b$ 的一组解.

例3 设 $\alpha_1 = (1,2,-3)^T, \alpha_2 = (-3,4,7)^T, \alpha_3 = (7,-3,2)^T$, $\beta = (2,-1,3)^T$, 问β能否由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 若能, 写出表示式.

解 考虑线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$,

即
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

由于系数矩阵A的行列式 $D = |A| \neq 0$, 方程组有唯一解.

故方程组的解 $x_1 = -\dfrac{27}{98}, x_2 = \dfrac{19}{98}, x_3 = \dfrac{20}{49}$.

于是β可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且

$$\beta = -\frac{27}{98}\alpha_1 + \frac{19}{98}\alpha_2 + \frac{20}{49}\alpha_3.$$

2. 向量组等价的定义

定义12 设有两个向量组

A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$； B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$.

若B组中的每个向量都能由向量组A线性表示,则称向量组B能由向量组A线性表示.若向量组A与向量组B能相互线性表示,则称这两个向量组等价.

显然任意一个向量组可由自身线性表示. 因为对于任意一个向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$， 有

$$\alpha_k = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{k-1} + \alpha_k + 0\alpha_{k+1} + \cdots + 0\alpha_m,\ k = 1,2,\cdots,m.$$

故例3中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,b$ 等价.

定理4 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，而向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$C:\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$线性表示，则向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$C:\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$线性表示.

证明 由假设存在实数$k_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$,使得

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{t}k_{ij}\beta_j\quad(i=1,2,\cdots,s)$$

及存在实数$l_{jm}(j=1,2,\cdots,t;m=1,2,\cdots,p)$，使得

$$\beta_j=\sum_{m=1}^{p}l_{jm}\gamma_m\quad(j=1,2,\cdots,t)$$

从而

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{t}k_{ij}\sum_{m=1}^{p}l_{jm}\gamma_m=\sum_{j=1}^{t}\sum_{m=1}^{p}k_{ij}l_{jm}\gamma_m=\sum_{m=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{t}k_{ij}l_{jm}\right)\gamma_m$$
$$(i=1,2,\cdots,s).$$

向量组的等价性具有如下性质：

1) 反身性：

每一个向量组与自身等价.

2) 对称性：

若向量组A与向量组B等价, 则向量组B与向量组A等价.

3) 传递性：

若向量组A与向量组B等价, 向量组B与向量组C等价,则向量组A与向量组C等价.

方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=b$$

有解的充要条件是向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$与向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,b$等价.

例4 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\cdots,\beta_s$等价, 记

$$V_1=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$
$$V_2=\operatorname{span}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$$

试证： $V_1=V_2$.

证明 $\forall x\in V_1$，则x可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

因$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$可由$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表示， 故x可由$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表示， 所以$x\in V_2$. 于是$V_1\subset V_2$.

类似可证： $V_2\subset V_1$.

故 $V_1=V_2$.

3. $B=AK$向量组间的关系

设有两向量组

$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$, $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$,

两向量组分别作为矩阵的列向量组构成的矩阵记为

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

(1) B组能由A组线性表示

B组能由向量组A线性表示,即对每个向量$\beta_j(j=1,2,\cdots,s)$,存在数$k_{1j},k_{2j},\cdots k_{mj}$，使得

$$\beta_j=k_{1j}\alpha_1+k_{2j}\alpha_2+\cdots+k_{mj}\alpha_m=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix},$$

B组能由A组线性表示

$$\beta_j=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix},j=1,2,\cdots,s$$

从而

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1s}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ms}\end{pmatrix}$$

矩阵$K_{m\times s}=(k_{ij})_{m\times s}$称为这一线性表示的系数矩阵.

说明: B组能由A组线性表示 $\Rightarrow\exists K$,使$B=AK$, 反之,若$B=AK\Rightarrow$ B的列向量组能由A的列向量组线性表示,K是线性表示的系数矩阵.

注!

$$\beta_j=k_{1j}\alpha_1+k_{2j}\alpha_2+\cdots+k_{mj}\alpha_m=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix},$$

不能写成

$$\beta_j=k_{1j}\alpha_1+k_{2j}\alpha_2+\cdots+k_{mj}\alpha_m=(k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{mj})\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix},$$

若 $C_{m\times n} = A_{m\times s}B_{s\times n}$,

则矩阵C的列向量组能由矩阵A的列向量组线性表示，B为这一表示的系数矩阵：

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

$C = AB \Rightarrow C^T = B^T A^T$

C^T的列向量组能由矩阵B^T的列向量组线性表示，

即C的行向量组能由矩阵B的行向量组线性表示.

$C = AB$ $\begin{cases} C\text{的列向量组能由}A\text{的列向量组线性表示} \\ C\text{的行向量组能由}B\text{的行向量组线性表示} \end{cases}$

4. 初等变换与向量组间的关系

$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$，则存在可逆矩阵$P$，使得$B = PA$，

则B的行向量组能由A的行向量组线性表示.

$\because\ A = P^{-1}B$

则A的行向量组能由B的行向量组线性表示.

$\therefore$ $\boxed{A\text{的行向量组与}B\text{的行向量组是等价向量组.}}$

定理5
- $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B \Rightarrow A$与$B$的行向量组等价
- $A \xrightarrow{\text{初等列变换}} B \Rightarrow A$与$B$的列向量组等价

重要结论

二、向量组的线性相关性

例5 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(\ 0\ )\alpha_1 + (\ 0\ )\alpha_2 + (\ 0\ )\alpha_3 = 0$

？ 是否存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，

$(2)\alpha_1 + (1)\alpha_2 + (0)\alpha_3 = 0$

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性相关的.

定义13 给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m \ge 1)$，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

则称向量组A 是线性相关的.

定义14若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m \ge 1)$,不是线性相关的，则称为线性无关的.

说明

(1) $k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为零 表示至少有一个数 $k_i \ne 0$

(2) 存在一组不全为零的数，并不是任意一组.

例6 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

由于 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

但 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \ne 0$

(3) 线性无关的充要条件

向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,如果存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$,则称$A$是线性相关的，否则，称为线性无关的。

定义15 线性无关

$\Leftrightarrow$ 任何一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \ne 0.$

$\Leftrightarrow$ 当 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$时 $\Rightarrow k_1 = k_2 \cdots = k_m = 0.$

例7 向量组 $A: 0,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,

$$1\cdot 0+0\cdot\alpha_2+\cdots+0\cdot\alpha_m=0$$

所以向量组A线性相关.

包含零向量的任何向量组是线性相关的.

例8 向量组A: α，分析向量组A的线性相关性.

$$\alpha\begin{cases}\alpha=0, & 1\cdot\alpha=0, \quad \text{所以向量组}A\text{线性相关.}\\ \alpha\neq 0, & k\cdot\alpha=0\Rightarrow k=0, \quad \text{所以向量组}A\text{线性无关.}\end{cases}$$

向量组A只包含一个向量α时, 若$\alpha=0$, 则A组线性相关; 若$\alpha\neq 0$, 则A组线性无关.

定理6 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m\geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示.

证明 必要性 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m\geq 2)$线性相关, 则存在不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

不妨设 $k_i\neq 0$, 则有

$$\alpha_i=-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1}\cdots-\frac{k_m}{k_i}\alpha_m.$$

即 α_i 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

定理6 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m\geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示.

充分性 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一个向量（比如 α_i）能由其余向量线性表示. 即有

$$\alpha_i=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{i-1}\alpha_{i-1}+\lambda_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+\lambda_m\alpha_m$$

$$\therefore \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{i-1}\alpha_{i-1}+(-1)\alpha_i+\lambda_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$$

故由定义13可知: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

向量组线性相关的概念是几何空间中两个向量共线(平行)，三个向量共面概念的推广.

当 $m=1$ 时，α 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$

$m=2$时, α_1,α_2线性相关 $\Leftrightarrow$ 在几何上, α_1与α_2共线.

$m=3$时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关$\Leftrightarrow$在几何上, α_1, α_2, α_3共面.

说明 至少有一个向量可由其余向量线性表示,

不是所有向量可由其余向量线性表示.

例9 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

解 $\alpha_1=0\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3$ $\therefore$ 向量组 α_1, α_2, α_3线性相关.

$\alpha_2=\lambda\cdot\alpha_1+\mu\cdot\alpha_3$ ✗

例10 证明n维单位坐标向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

证明 若有常数k_1, k_2, ..., k_n 使得

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0$$

于是

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0.$$

故向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关.

例11 判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$ 的线性相关性.

解 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$, 即

$$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

也即 $\begin{cases}k_1+2k_2+5k_3=0\\2k_1+2k_3=0,\\3k_1+k_2+k_3=0\end{cases}$ 该方程组的系数行列式 $D\neq 0$, 有唯一解,

于是$k_1=k_2=k_3=0$, 故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

一般地，对于向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots,\alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix},$$

作齐次线性方程组

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+x_s\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0,$

我们有：

定理7 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关的充要条件是齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0, \quad (1)$$

有非零解.

证明 充分性 若方程组(1)有非零解,设$k_1,k_2,\cdots,k_s$为其一组非零解, 则有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

必要性 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,则存在不全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$， 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

此式表明: $k_1,k_2,\cdots,k_s$是方程组(1)的一组非零解.

推论 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充要条件是齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0, \quad (1)$$

只有零解.

例12 若$a_1,a_2,\cdots,a_n$是互不相等的一组数， 设

$$\alpha_1=(1,a_1,a_1^2,\cdots,a_1^{n-1})^T,\alpha_2=(1,a_2,a_2^2,\cdots,a_2^{n-1})^T,\cdots,\ \alpha_n=(1,a_n,a_n^2,\cdots,a_n^{n-1})^T,$$

证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

证明 考虑线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$$

即

$$\begin{pmatrix}1&1&\vdots&1\\a_1&a_2&\vdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\vdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\vdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$D=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(a_i-a_j)$$

由于系数行列式D为n阶范德蒙行列式，且$a_1,a_2,\cdots,a_n$互不相等，所以 $D\ne 0$, 方程组只有零解, 从而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

例13 已知向量组A: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,

证明: $3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_3-5\alpha_1$ 也线性无关.

分析 (抽象的向量组)

$$\lambda_1(3\alpha_1+2\alpha_2)+\lambda_2(\alpha_2-\alpha_3)+\lambda_3(4\alpha_3-5\alpha_1)=0$$

$\downarrow$ 整理

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

$$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$$

$\downarrow$

求 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

证明 设有$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使

$$\lambda_1(3\alpha_1+2\alpha_2)+\lambda_2(\alpha_2-\alpha_3)+\lambda_3(4\alpha_3-5\alpha_1)=0$$

整理得:

$$(3\lambda_1-5\lambda_3)\alpha_1+(2\lambda_1+\lambda_2)\alpha_2+(4\lambda_3-\lambda_2)\alpha_3=0,$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}3\lambda_1-5\lambda_3=0\\2\lambda_1+\lambda_2=0\\4\lambda_3-\lambda_2=0\end{cases}\quad D=\begin{vmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{vmatrix}=22\ne 0$$

故方程组只有零解，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

$\therefore 3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_3-5\alpha_1$ 线性无关.

例13 已知向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关， 证明:$3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_3-5\alpha_1$也线性无关．

定理8 若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则向量组 $B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots\alpha_t$ 也线性相关. 反之, 若向量组B线性无关, 则向量组A也线性无关.

证明 $\because$ $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,

$\therefore$ 存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

$\therefore$ $\underline{k_1}\alpha_1+\underline{k_2}\alpha_2+\cdots+\underline{k_m}\alpha_m+\underline{0}\cdot\alpha_{m+1}+\cdots+\underline{0}\cdot\alpha_t=0$

$\therefore$ B: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ \alpha_{m+1},\cdots,\alpha_t$ 线性相关.

定理8 若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则向量组 $B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots\alpha_t$ 也线性相关. 反之, 若向量组B线性无关, 则向量组A也线性无关.

- 向量组若有线性相关的部分组, 则该向量组线性相关.
  简言之, 部分相关, 整体相关.
  特别地, 含有零向量的向量组必线性相关.

$$A:(\underbrace{\boxed{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}}_{\text{线性相关}},\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n)$$

- 若一个向量组线性无关, 则它的任何部分组必线性无关.
  简言之,整体无关, 部分无关.

$$A:\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n)}_{\text{线性无关}}$$

定理9 设 $\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\end{pmatrix},\ \beta_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\\\vdots\\a_{sj}\end{pmatrix},\ (j=1,2,\cdots,m),$

即对α_j 添上若干分量后得向量β_j.若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 则向量组B: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关.
反言之, 若向量组B线性相关, 则向量组A也线性相关.

若A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,则B: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$也线性无关.

证明 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=0$ (II) $r+(s-r)$个方程

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$ (I) r个方程

(II)的解都是(I)的解, $\because\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,

$\therefore$ 方程组(I)只有零解, 从而方程组(II)只有零解,

故向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\end{pmatrix},\ \beta_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\\ \\ \end{pmatrix},$

定理9 设 $\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\end{pmatrix},\ \beta_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\\\vdots\\a_{sj}\end{pmatrix},\ (j=1,2,\cdots,m),$

即对α_j 添上若干分量后得向量β_j.若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 则向量组B: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关.
反言之, 若向量组B线性相关, 则向量组A也线性相关.

定理9表明:
向量组线性无关, 添加分量所得向量组仍线性无关,
向量组线性相关, 减少分量所得向量组仍线性相关.

- 若 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \alpha_r=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-b_{11}\\\vdots\\-b_{t1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}-b_{12}\\\vdots\\-b_{t2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \beta_r=\begin{pmatrix}-b_{1,r}\\\vdots\\-b_{t,r}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$ 线性无关

定理10 设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而向量组$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关， 则向量β必可由向量组A线性表示，且表示法是惟一的.

证明 $\because$ $B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，

则存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m,k$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=0$$

若$k=0$，则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$

$\therefore$ $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关,与已知$A$组线性无关矛盾.

$\therefore$ $k\neq 0$， 则$\beta=-\dfrac{k_1}{k}\alpha_1-\dfrac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\dfrac{k_m}{k}\alpha_m.$

即β能由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

定理10设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而向量组$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关， 则向量β必可由向量组A线性表示，且表示法是惟一的.

下证惟一性 设β的表示法为

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \quad ①$$

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \quad ②$$

$$0=(\lambda_1-k_1)\alpha_1+(\lambda_2-k_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_m-k_m)\alpha_m$$

又$\because$ $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，

$\therefore$ $\lambda_1-k_1=\lambda_2-k_2=\cdots=\lambda_m-k_m=0$

$\therefore$ $\lambda_1=k_1,\lambda_2=k_2,\cdots,\lambda_m=k_m$，故表示法是惟一的.

由于n维单位坐标向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关，故任意$n$维向量$\alpha$可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$惟一线性表示.

定理11设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，且$r>s$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关.

证明 由假设

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{s}a_{ji}\beta_j \quad (i=1,2,\cdots,r).$$

设 $$\sum_{i=1}^{r}x_i\alpha_i=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0,$$

$$\sum_{i=1}^{r}x_i\left(\sum_{j=1}^{s}a_{ji}\beta_j\right)=0,\quad \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r}a_{ji}x_i\right)\beta_j=0.$$

令 $$\sum_{i=1}^{r}a_{ji}x_i=0 \ (j=1,2,\cdots,s).$$

由于这个方程组有r个未知量s个方程，且$r>s$.所以有自由未知量，于是方程组($*$)有非零解，设其非零解为$k_1,k_2,\cdots,k_r$，则

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r}a_{ji}k_i\right)\beta_j=0$$

从而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关.

$$\sum_{i=1}^{r}a_{ji}x_i=0 \ (j=1,2,\cdots,s),\quad (*)$$

推论1 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，则$r\leq s$.

推论2 两个等价线性无关向量组所含向量的个数相同.

推论3 任意n+1个n维向量均线性相关.

证明 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$是任意$n$+1个$n$维向量，

由于该向量组可由n维单位坐标向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表示， 又$n+1>n$，由定理9可知:

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$线性相关.

定理9 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，且$r>s$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关.

例14 判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}.$

(2) $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix},\ \beta_4=\begin{pmatrix}11\\12\\13\end{pmatrix}.$

解 (1) 由于$\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\ \varepsilon_2=(0,1,0)^T,\ \varepsilon_3=(0,0,1)^T$线性无关，所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(2) 由于向量的个数大于向量的维数，所以向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

三、小 结

1. 重要定义

定义1 设有两个向量组

$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$; $B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$.

若B组中的每个向量都能由向量组A线性表示，则称向量组B能由向量组A线性表示.若向量组A与向量组B能相互线性表示，则称这两个向量组等价.

1) 反身性:
2) 对称性:
3) 传递性:

定义2 给定向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 1)$，若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

则称向量组A 是线性相关的，否则称为线性无关的.

2. 重要结论

1). 向量b可由向量组$A: \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性表示的充要条件是方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = b$ 有解.

2). $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B \Rightarrow A$与$B$的行向量组等价

$A \xrightarrow{\text{初等列变换}} B \Rightarrow A$与$B$的列向量组等价

3). 向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示.

4). 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关的充要条件是齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0, \quad (1)$$

有非零解.

5). 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关的充要条件是齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0, \quad (1)$$

只有零解.

6). 部分组相关，整体组相关.
整体组无关，部分组无关.

7).向量组线性无关，添加分量所得向量组仍线性无关;
向量组线性相关，减少分量所得向量组仍线性相关.

8). 设向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 $B: \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则向量β必可由向量组A线性表示，且表示法是惟一的.

9). 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表示，且$r > s$，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性相关.

10). 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表示，且向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关，则$r \leq s$.

11). 两个等价线性无关向量组所含向量的个数相同.

12). 任意$n+1$个n维向量均线性相关.

13).

$$C = AB \begin{cases} C\text{的列向量组能由}A\text{的列向量组线性表示} \\ C\text{的行向量组能由}B\text{的行向量组线性表示} \end{cases}$$

四、作 业

- 习题3.2(P_{113})

A:1(1)，4，5

B: 3 ,4

预习：极大无关组　向量组的秩

第三节 向量组的秩

- 一、向量组的极大线性无关组
- 二、向量组的秩
- 三、向量空间的基 维数 坐标
- 四、基变换与坐标变换
- 五、欧氏空间
- 六、小结
- 七、作业

一、向量组的极大线性无关组

定义16 若向量组A的一个部分组$A_0: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足

(1) 向量组 $A_0: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) 向量组A中的任意向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示.

则称向量组$A_0: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量组$A$的一个极大线性无关向量组, 简称为极大无关组或最大无关组.

注 线性无关组的极大无关组是它本身.

向量组$A: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关, A的极大无关组 ?

向量组$A: 0$, A的极大无关组 ?

只含有零向量的向量组没有极大无关组.

例 $A: \alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, 求$A$的极大无关组.

解 $\beta=2\alpha$, 所以向量组A是线性相关的.

$\because \alpha\neq 0$, 所以α是向量组A极大无关组.

同理 $\because \beta\neq 0$, 所以β也是向量组A极大无关组.

一般地, 向量组的极大无关组不惟一.

由极大无关组的定义可得以下三个结论: **定理11**

(1) 向量组A与它的极大无关组A_0等价.

事实上, 设向量组A的极大无关组为$A_0: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,

因为A_0是A组的部分组, 所以A_0组可由A组线性表示.

又A组可由A_0组线性表示.

故向量组A与它的极大无关组A_0等价.

研究A组的性质 $\xrightarrow{\text{转化为}}$ 研究A_0组的性质

(2) $A_0: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组$A$的极大无关组, 则向量组$A$的任意线性无关部分组所含向量的个数至多为$r$个.

这是因为A中任意$r+1$个向量均可由$A_0: \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示, 根据§2定理11可知:这$r+1$个向量线性相关.

(3) A组的极大无关组不惟一, 但A组的所有极大无关组是等价的.

A_0组是A组的一个极大无关组, 则A组与A_0组等价;

A_1组也是A组的一个极大无关组,则A组与A_1组等价;

故A_1组与A_0组等价.

在全体n维向量构成的向量组R^n中, n维单位坐标向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关, 且$R^n$中任一向量均可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表示, 故$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$R^n$的一个极大无关组.

R^n中任意n个线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$也是$R^n$的一个极大无关组.

事实上, 若n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关, 对任意$n$维向量$\alpha$, 由于$n+1$个$n$维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$线性相关, 故$\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示. 所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$也是$R^n$的一个极大无关组.

这说明R^n的两个极大无关组所含向量的个数相同.

二、向量组的秩

定理11

向量组的极大线性无关组不惟一,但我们有如下定理:

定理12 向量组的极大线性无关组所含向量的个数相同.

证明 设向量组 $\mathrm{I}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\mathrm{II}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 都是向量组A的极大无关组, 由于一个向量组的任何两个极大无关组等价, 故向量组I与II等价. 根据§2定理11推论2可知:故$s=t$.

这两个极大无关组所含向量的个数相同.

定义17 向量组的极大线性无关组所含的向量的个数称为向量组的秩.

如: 全体n维向量构成的向量组R^n 的秩为 n.

定理13 向量组线性无关的充要条件是其秩等于向量组所含向量的个数.

证明 必要性 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关, 则该向量组的极大线性无关组就是其本身, 故向量组的秩为s, 即为向量个数.

充分性 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩等于向量的个数$s$, 则该向量组的极大线性无关组由$s$个向量构成,故为其本身, 从而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

推论 向量组线性相关的充要条件是其秩小于向量组所含向量的个数.

例1 若向量组A的秩为r, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组$A$中$r$个线性无关的向量, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组$A$的极大线性无关组.

证明 由于向量组A的秩为r, 则向量组A的任意线性无关部分组所含向量的个数至多为r. 故对向量组A中任意向量β, $r+1$个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 必线性相关. 又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关, 从而$\beta$必可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示. 故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组$A$的极大线性无关组.

定理14 若向量组A可由向量组B线性表示, 向量组A的秩为r,向量组B的秩为s , 则$r\le s$.

定理11

证明 设向量组A的极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 向量组$B$的极大无关组为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$, 由于向量组$A$可由向量组$B$线性表示, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$B$线性表示, 而向量组$B$可由其极大线性无关组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示, 从而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示. 又向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关, 由§2定理11推论1可知:$r\le s$.

推论 等价的向量组有相同的秩.

注: 若两个向量组有相同的秩, 则它们不一定等价.

例如, 向量组(I) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

向量组(II) $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

向量组(I)和(II)的秩均为2, 但这两个向量组不等价.

两个向量组的秩相等,它们满足什么条件等价?

补充定理 若向量组B能由向量组A线性表示,且它们的秩相等, 则向量组A与向量组B等价.

分析 由A组与C组等价, B组与C组等价$\Rightarrow A$组与B组等价.

只需证明: A组与(A,B)组等价, B组与(A,B)组等价.

证明 设A组与B组的秩为r, $C=(A,B)$.

$\because$ B组可由A组线性表示, $\therefore$ C组可由A组线性表示.

$\because$ A组是C的部分组, $\therefore$ A组可由C组线性表示.

$\therefore$ A组与C组等价.因此C组的秩也为r . 因B组的秩为r, 故B组的极大无关组B_0含有r个向量, 因此B_0组也是C组的极大无关组.从而C组与B_0组等价. 由B_0组与B组等价. 故A组与B组等价.

说明：

构造一个新的向量组.

部分组A_0，若线性无关的部分组A_0的秩 = 总组A的秩，

则部分组A_0是总组的极大无关组.

本段小结

1. 基本定义

1). 极大线性无关向量组

若向量组A的一个部分组A_0: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足

(1) 向量组 A_0 : $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(2) 向量组A中的任意向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示.

则称向量组A_0: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量组$A$的一个极大线性无关向量组，简称为极大无关组或最大无关组.

2) 向量组的秩

向量组的极大线性无关组所含的向量的个数称为向量组的秩.

2. 重要结论

1) 向量组线性无关的充要条件是其秩等于向量组所含向量的个数.

2) 向量组线性相关的充要条件是其秩小于向量组所含向量的个数.

3) 若向量组A可由向量组B线性表示，向量组A的秩为r，向量组B的秩为s，则 $r \le s$.

4) 等价的向量组有相同的秩.

5) 若向量组B能由向量组A线性表示，且它们的秩相等，则向量组A与向量组B等价.

6) 若向量组A的秩为r，则A中任意$r+1$个向量必线性相关.

三、向量空间的基 维数 坐标

定义18 设V为实数域上的向量空间，若V中存在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，满足

(1) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关；

(2) V中任意向量均可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示.

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为向量空间$V$的基，基中所含向量的个数$m$称为向量空间$V$的维数，记作$\dim(V)=m$.

这时也称V为m维向量空间. 对V中任意向量α，存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

称 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$下的坐标.

说明

(1) 只含有零向量的向量空间称为0维向量空间，因此它没有基.

(2) 若把向量空间 V 看作向量组，那末V 的基就是该向量组的极大无关组，V 的维数就是该向量组的秩.

(3) 向量空间V 的基不惟一.

(4) 注意区分向量空间V的维数与V中向量的维数.

(5) 若$\dim V = r$，则V中任意$r+1$个向量均线性相关.

(6) 若W为V的子空间，则有 $\dim W \le \dim V$.

对于向量空间 R^3，

$\because \varepsilon_1=(1,0,0)^T, \varepsilon_2=(0,1,0)^T, \varepsilon_3=(0,0,1)^T \in R^3$

$\therefore \varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是$R^3$的极大无关组，$R^3$的秩为：3

(任意3个线性无关的3维向量组也是R^3的极大无关组)

$\therefore \varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是向量空间$R^3$的基，数3称为向量空间的维数.

称R^3为3维向量空间.

(任意3个线性无关的3维向量组也是R^3的基)

对任意$\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T \in R^3$，有

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3,$$

a_1,a_2,a_3 就是向量 α 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标.

n维向量的全体R^n,
R^n的极大无关组: $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n$, R^n 的秩为: n
(任意n个线性无关的n维向量组都是R^n的极大无关组)

R^n是一个向量空间, $\therefore \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是向量空间$R^n$的基,
数n称为向量空间R^n的维数.

(任意n个线性无关的n维向量组都是R^n的基)
故R^n 称为 n 维向量空间.
对任意$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in R^n$, 有
$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,$$
$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 就是向量α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标.

由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$所生成的向量空间
$$V=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$
$$=\{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\}$$
显然向量空间V与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$等价,所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大无关组就是$V$的一个基. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的秩就是$V$的维数.
若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V$的一个基,则$V$可以表示为
$$V=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$$
$$=\{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in R\}$$
该表达式清楚地显示出向量空间V的结构.

例如, $\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T$,
$V=\text{span}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, 则$V$是$R^3$的子空间, 且
$\varepsilon_1,\varepsilon_2$是$V$的一个基, $\dim(V)=2$.

再如, $V_1=\text{span}\{\varepsilon_1\}$, 则$V_1$是$R^3$的子空间, 且
ε_1是V_1的一个基, $\dim(V_1)=1$.

例2 对于$x=(1,5,-2)^T$, $\because \varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T$,
$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$是R^3的基, 且 $x=1\,\varepsilon_1+5\,\varepsilon_2+(-2)\,\varepsilon_3$,
所以x在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标为$1,5,-2$.
又设 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$
$$|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=2$$
则方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$只有零解,
$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$也是$R^3$的基.
下面求x在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标 x_1,x_2,x_3.

$x=(1,5,-2)^T$, $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$
下面求x在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标$x_1,x_2,x_3$.
$$x=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1+x_3\\x_2+x_3\end{pmatrix}}$$
$$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1+x_3=5\\x_2+x_3=-2\end{cases}\quad\Rightarrow x_1=4,x_2=-3,x_3=1$$
故x在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为 $4,-3,1$.
此例表明: 同一向量在同一向量空间的不同基下坐标不同.

四、基变换与坐标变换

1. 基变换

问题: 在n维向量空间V中,任意n个线性无关的向量都可以作为V的一个基. 对于不同的基,同一个向量的坐标是不同的.
那么,同一个向量在不同的基下的坐标有什么关系呢?
换句话说,随着基的改变,向量的坐标如何改变呢?

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是向量空间$R^n$的两个基，且有

$$\begin{cases}\beta_1=\boxed{p_{11}\alpha_1+p_{21}\alpha_2+\cdots+p_{n1}\alpha_n}\\ \beta_2=\boxed{p_{12}\alpha_1+p_{22}\alpha_2+\cdots+p_{n2}\alpha_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_n=\boxed{p_{1n}\alpha_1+p_{2n}\alpha_2+\cdots+p_{nn}\alpha_n}\end{cases},$$

称此公式为基变换公式.

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix}}_{P}$$

$$\boxed{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P}$$

$\Uparrow$

基变换公式

在基变换公式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

中，矩阵P称为从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵.

当然也存在n阶方阵$Q=(q_{ij})$，使得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\underbrace{\begin{pmatrix}q_{11}&q_{12}&\cdots&q_{1n}\\q_{21}&q_{22}&\cdots&q_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\q_{n1}&q_{n2}&\cdots&q_{nn}\end{pmatrix}}_{Q}$$

矩阵Q称为从基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$到基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的过渡矩阵.

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$
$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)Q$$

由于

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$
$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)QP$$

而同一向量在确定的基下坐标是惟一的，所以

$$QP=E_n$$

即过渡矩阵P是可逆的.

2. 坐标变换公式

定理 设V_n中的向量α，在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标为$y_1,y_2,\cdots,y_n$，若两个基满足关系式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

则有**坐标变换公式**

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}}_{\text{旧坐标}}=P\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}}_{\text{新坐标}},\quad\text{或}\quad\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}}_{\text{新坐标}}=P^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}}_{\text{旧坐标}}.$$

证明 $\because\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\underline{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$$\underline{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P}$$

$$\therefore\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

由于在确定的基下，坐标是惟一的，所以

定理 设V_n中的 ... $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为$x_1,x_2,\cdots,x_n$, ... β_n下的坐标为$y_1,y_2,\cdots,y_n$，若 ... 式

$(\beta_1,\beta_2,\cdots$ ... $\cdots,\alpha_n)P$

例3 在R^4中取两个基

$\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$，$\alpha_3=(-1,2,1,1)^T$，$\alpha_4=(-1,-1,0,1)^T$及$\beta_1=(2,1,0,1)^T$，$\beta_2=(0,1,2,2)^T$，$\beta_3=(-2,1,1,2)^T$，$\beta_4=(1,3,1,2)^T$，求坐标变换公式.

分析 借助于4维单位坐标向量这个基来求过渡矩阵.

解 先将$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$表示.

$\because(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A$ 其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}$

$\because(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)B$

$\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B$

$B=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boxed{A^{-1}B}$$ 过渡矩阵

故坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=(B^{-1}A)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} 1&1&-1&-1\\ 2&-1&2&-1\\ -1&1&1&0\\ 0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$(B\,\vdots\,A)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2&0&-2&1&1&1&-1&-1\\ 1&1&1&3&2&-1&2&-1\\ 0&2&1&1&-1&1&1&0\\ 1&2&2&2&0&1&1&1\end{array}\right)$$

$$B=\begin{pmatrix} 2&0&-2&1\\ 1&1&1&3\\ 0&2&1&1\\ 1&2&2&2\end{pmatrix}$$

$$(B\,\vdots\,A)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2&0&-2&1&1&1&-1&-1\\ 1&1&1&3&2&-1&2&-1\\ 0&2&1&1&-1&1&1&0\\ 1&2&2&2&0&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&1&-1&1\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&-1&1&-1\end{array}\right)$$

$B^{-1}A$

故所求坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&1&-1&1\\ -1&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

作业

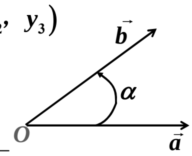
- 习题3.3(P_{126})

  A: 1, 3

  B: 2

五、欧氏空间

引入: $\vec a=(x_1,\ x_2,\ x_3),\vec b=(y_1,\ y_2,\ y_3)$



内积: $\vec a\cdot\vec b=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

长度: $|\vec a|=\sqrt{\vec a\cdot\vec a}=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}}$

夹角: $\cos\alpha=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\cdot|\vec b|}$

1. 内积定义

定义19 设有n维向量 $x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$

令 $\boxed{(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}$

称$(x,\ y)$为向量 x 与 y 的内积.

$$(x,y)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=x^Ty=y^Tx$$

$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

内积的运算性质

(以下x,y,z为n维向量, λ为实数)

(1) $(x,y)=(y,x)$; (对称性)

(2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)=(x,\lambda y)$;

(3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$; (分配律)

(4) $(x,x)\ge 0$, 且当$x\ne 0$时, 有$(x,x)>0$;
当$x=0$时, 有$(x,x)=0$; (正定性)

2. 向量的模及性质

(1). 向量模定义

定义 令

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

称$|x|$为n维向量x的模(或长度).

(2). 向量的长度具有下述性质:

1) 非负性 $|x| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$

当$x \neq 0$时, 有$|x| > 0$; 当$x = 0$时, 有$|x| = 0$.

2) 齐次性 $|\lambda x| = |\lambda| |x|$;

$$|\lambda x| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2} = |\lambda| |x|.$$

3) 三角不等式 $|x + y| \leq |x| + |y|$.

定理15 柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式

$$|(x,y)| \leq |x| |y|,$$

$x| |y|,$

证明 显然当$y = 0$时, $(x,y) = 0, |y| = 0$, 命题成立.

当$y \neq 0$时, 对任意λ有

$$F(\lambda) = (x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0,$$

$$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y),$$

而 $F(\lambda) = (x, x + \lambda y) + (\lambda y, x + \lambda y)$

$$= (x,x) + 2\lambda(x,y) + \lambda^2(y,y) \geq 0,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (2(x,y))^2 - 4(x,x)\cdot(y,y) \leq 0$$

即 $(x,y)^2 \leq (x,x)\cdot(y,y).$

$$\Rightarrow (x,y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2.$$

$$\therefore \quad |(x,y)| \leq |x| |y|,$$

下证三角形不等式 $|x + y| \leq |x| + |y|.$

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x + y, x) + (x + y, y)$$

$$= (x,x) + 2(y,x) + (y,y)$$

$$\because \quad |(x,y)| \leq |x| \cdot |y|,$$

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

$$\therefore \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

(3). 单位向量 $|x| = 1$.

若$\alpha \neq 0$, 则$|\alpha| > 0$, 且$\dfrac{1}{|\alpha|}\alpha$是单位向量.

定义20 定义了内积运算的实数域上的向量空间称为欧氏空间(Euclid空间).

几何空间是欧氏空间, R^n的子空间在如上定义的内积下, 均成为欧氏空间.

3. 向量的夹角

1). 引入 $\because \quad |(\alpha,\beta)| \leq |\alpha| |\beta|$, 当$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$时,

$$\Rightarrow \frac{|(\alpha,\beta)|}{|\alpha| |\beta|} \leq 1$$

2). 夹角定义

定义21 当$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$时, $\theta = \arccos \dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha| |\beta|}$

称为n维向量α与β的夹角. 记作$\langle \alpha,\beta \rangle$,
其中$\langle \alpha,\beta \rangle \in [0,\pi]$.

3). 正交

定义22 $\boxed{\text{当}(\alpha,\beta) = 0\text{时, 称向量}\alpha\text{与}\beta\text{正交,}}$ 记为$\alpha \perp \beta$.

由定义知: 若$\alpha = 0$, 则$(\alpha,\beta) = 0$.

则零向量与任何向量都正交.

例5 求向量$\alpha = (1,2,2,3)$与$\beta = (3,1,5,1)$的夹角.

解 $\because \cos\langle \alpha,\beta \rangle = \dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha| |\beta|} = \dfrac{18}{3\sqrt{2}\cdot 6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \langle \alpha,\beta \rangle = \frac{\pi}{4}.$$

4. 正交矩阵

定义23 若n阶矩阵A, 满足$AA^T=E$, 则称A为正交矩阵.

正交矩阵的性质:

- n阶正交矩阵A可逆, 且$A^{-1}=A^T$.
- n阶正交矩阵A的行列式$|A|=\pm 1$.
- n阶正交矩阵A的行列具有如下性质:

例6 方阵A为正交矩阵的充要条件是A的列(行)向量组都是单位向量且两两正交.

证明 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 由$A^TA=E$, 得

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=E.$$

$$\Rightarrow \alpha_i^T\alpha_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当i=j\\0, & 当i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots n)$$

即方阵A为正交矩阵的充要条件为A的列向量组都是单位向量且两两正交.

同理可证

正交矩阵的行向量都是单位向量且两两正交.

A为正交矩阵的充要条件是下列条件之一成立:

(1) $AA^T=E$;

(2) $A^{-1}=A^T$;

(3) A的列向量组都是单位向量且两两正交.

(4) A的行向量组都是单位向量且两两正交.

例7 判别下列矩阵是否为正交矩阵.

$$(1)\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 1/3\\-1/2 & 1 & 1/2\\1/3 & 1/2 & -1\end{pmatrix},\quad (2)\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}.$$

解(1) 考察矩阵的第一列

由于 $1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2>1$,

所以它不是正交矩阵.

$$(2)\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}$$

由于

$$AA^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以它是正交矩阵.

例8 验证矩阵$P=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$是正交矩阵.

解 P的每个列向量都是单位向量, 且两两正交,

所以P是正交矩阵.

5. 正交向量组

1) 正交向量组的定义

定义24 设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一组非零的 n 维向量，若 $i\neq j$, 都有 α_i 与 α_j 正交，则称向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为正交向量组.

例9 向量组 A: $\alpha=0$ 与 $\beta\neq 0$, 问 A: α,β 是否为正交向量组？ (不是)

2) 正交向量组的性质

定理16 正交向量组必线性无关.

证明 设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为正交向量组，并设有数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，使得

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0,$$

两边与 α_i 作内积

$$(\alpha_i,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r)=(\alpha_i,0),$$

$$\lambda_1(\alpha_i,\alpha_1)+\cdots+\lambda_i(\alpha_i,\alpha_i)+\cdots+\lambda_r(\alpha_i,\alpha_r)=0$$

$\therefore\ \lambda_i(\alpha_i,\alpha_i)=0,\ \because\ \alpha_i\neq 0\ \Rightarrow(\alpha_i,\alpha_i)=|\alpha_i|^2\neq 0,$

$\Rightarrow\lambda_i=0$, $i=1,2,\cdots,r$. $\therefore\ \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0.$

$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

3) 标准正交基(规范正交基)

定义25 设 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间 $V\ (V\subset R^n)$ 的一个基，若 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是两两正交，且都是单位向量，则称 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间 V 的标准正交基或规范正交基.

(1) 标准正交基唯一吗？

(2) 引入标准正交基的作用是什么？

例如，向量空间 R^4 的一个基为 A:

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(1) 对任意 $i\neq j$, 有 $\varepsilon_i\perp\varepsilon_j$, $i,j=1,2,3,4$.

(2) 对任意 i, 有 $|\varepsilon_i|=1$, $i=1,2,3,4$.

$\therefore A:\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是向量空间 R^4 的一个标准正交基.

基 B:

$$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

(1) 对任意 $i\neq j$, 有 $e_i\perp e_j$, $i,j=1,2,3,4$.

(2) 对任意 i, 有 $|e_i|=1$, $i=1,2,3,4$.

$\therefore B:e_1,e_2,e_3,e_4$ 也是向量空间 R^4 的一个标准正交基.

故标准正交基不惟一.

标准正交基的作用

对于向量空间 R^n, 设 $E:e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 R^n 的一个标准正交基，则对 $\forall\alpha\in R^n$，α 可由 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示，且表示法惟一. 设

$$\alpha=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n$$

$$(\alpha,e_i)=(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n,e_i)=\lambda_i(e_i,e_i)$$ $\lambda_i=(\alpha,e_i)$

故 $\alpha=(\alpha,e_1)e_1+(\alpha,e_2)e_2+\cdots+(\alpha,e_n)e_n.$

于是 α 在标准正交基 $E:e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的坐标为 $(\alpha,e_1),(\alpha,e_2),\cdots,(\alpha,e_n)$.

6. 施密特正交化

1). 引入

重点

标准正交基比一般的基好,

$\boxed{\text{一般的基}} \xrightarrow{\text{导出}} \boxed{\text{标准正交基}}$ **?**

2) 求规范正交基的方法

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间V的一个基,

重点

1.正交化

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \xrightarrow{\text{施密特正交化方法}} \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 等价 $(1\le i\le r)$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为正交向量组

2.单位化 $e_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|},e_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|},\cdots,e_r=\dfrac{\beta_r}{|\beta_r|}$

$e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间V的一个标准正交基.

定理17 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 则存在正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$, 使得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i$ 等价 $(i=1,2,\cdots,r)$.

证明 取 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

分析

设 $\beta_2=\alpha_2+k\beta_1$

由 $0=(\beta_1,\beta_2)=(\beta_1,\alpha_2)+k(\beta_1,\beta_1)$,

$\Rightarrow k=-\dfrac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}$

说明

- β_1,β_2 可由 α_1,α_2 线性表示
- α_1,α_2 可由 β_1,β_2 线性表示
- α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价
- β_1,β_2 正交

$\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

同理设 $\beta_3=\alpha_3+k_1\beta_1+k_2\beta_2$

由 $(\beta_3,\beta_1)=0,(\beta_3,\beta_2)=0$

$\Rightarrow k_1=-\dfrac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)},k_2=-\dfrac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}$

$$\beta_3=\boxed{\alpha_3}-\frac{(\beta_1,\boxed{\alpha_3})}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\boxed{\alpha_3})}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

说明

- β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示
- $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示
- $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 等价
- β_1,β_2,β_3 正交

$\beta_1=\alpha_1,$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

……………………

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\beta_1,\alpha_r)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_r)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\beta_{r-1},\alpha_r)}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

则 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 两两正交, 且 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 等价.

上述由线性无关向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 构造出正交向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的方法称为 **施密特正交化方法**.

施密特正交化方法

$\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

• • • • • • • • • • • •

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\beta_1,\alpha_r)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_r)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\beta_{r-1},\alpha_r)}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

例10 已知R^3的一个基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

试将R^3的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$化为标准正交基.

解 1. 正交化

$\beta_1=\alpha_1$;

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

β_1,β_2,β_3就是R^3的一个标准正交基.

例11已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,求一组非零向量$\alpha_2,\alpha_3$使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两正交.

分析 $(\alpha_1,\alpha_2)=0\Leftrightarrow\alpha_1^T\alpha_2=0$; $(\alpha_1,\alpha_3)=0\Leftrightarrow\alpha_1^T\alpha_3=0$.

解 由已知，α_2,α_3应满足方程 $\alpha_1^Tx=0$，即

$x_1+x_2+2x_3=0$

求方程组的两个线性无关的解向量. $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

将它正交化,即合所求. 取$\alpha_2=\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$$\alpha_3=\xi_3-\frac{(\alpha_2,\xi_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两正交.

六、小结

1、向量组的极大线性无关组及秩

$\boxed{\text{向量组}A\text{与它的极大无关组}A_0\text{等价.}}$

$\boxed{\text{研究}A\text{组的性质}\xrightarrow{\text{转化为}}\text{研究}A_0\text{组的性质}}$

重要结论

1) 向量组线性无关的充要条件是其秩等于向量组所含向量的个数.

2) 向量组线性相关的充要条件是其秩小于向量组所含向量的个数.

3) 若向量组A可由向量组B线性表示，向量组A的秩为r,向量组B的秩为s，则$r\le s$.

2、向量空间基、维数及坐标

注意区分向量空间V的维数与V中向量的维数.

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是向量空间$R^n$的两组基,

$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P \Rightarrow$ **基变换公式**

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$, $\Rightarrow$ **坐标变换公式**

3、欧氏空间

1) 内积 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$,

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

向量的长度，两向量的夹角，向量的正交.

正交矩阵：若n阶矩阵A，满足$AA^T=E$,

2) 正交向量组:

设$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一组非零的 n 维向量，$i\ne j$，都有α_i与α_j正交.

结论: 正交向量组必线性无关.

3) 标准正交基(规范正交基)

4) 施密特正交化方法

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\beta_1,\alpha_r)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_r)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\beta_{r-1},\alpha_r)}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

作业

- 习题3.3(P_{126})

A: 4, 5, 6, 7

B: 1, 3

预习：§3.5 矩阵的秩

定理11 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示, 且$r>s$, 则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关.

推论1 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，则$r\le s$.

推论2 两个等价线性无关向量组所含向量的个数相同.

第五节 再论矩阵的秩

- 一、矩阵的行秩与列秩
- 二、矩阵的子式
- 三、小结
- 四、作业

一、矩阵的行秩与列秩

本节中将通过向量组的秩进一步研究矩阵的秩，并讨论矩阵的秩与向量组的秩之间的关系.

设A为$m\times n$矩阵，矩阵A的行向量组由m个n维行向量组成. 矩阵A的列向量组由n个m维列向量组成.

矩阵A的行向量组的秩

矩阵A的列向量组的秩

? 矩阵A的秩

定义28 矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的行秩，矩阵A的列向量组的秩称为矩阵A的列秩.

例1 求矩阵A的行秩与列秩，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&3&4\\1&1&5&7\end{pmatrix}$$

解 A的行向量组为 $\alpha_1^T=(1\ \ 0\ \ 2\ \ 3)$，$\alpha_2^T=(0\ \ 1\ \ 3\ \ 4)$，$\alpha_3^T=(1\ \ 1\ \ 5\ \ 7)$，

由于α_1^T,α_2^T线性无关，$\alpha_3^T=\alpha_1^T+\alpha_2^T$，所以向量组$\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T$的秩为2，即矩阵$A$的行秩为2.

A的列向量组为

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\quad \beta_4=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$$

显然β_1,β_2线性无关，$\beta_3=2\beta_1+3\beta_2$，$\beta_4=3\beta_1+4\beta_2$，

从而向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为2，即矩阵$A$的列秩为2.

该例说明矩阵A的行秩和列秩相等.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&3&4\\1&1&5&7\end{pmatrix}$$

例2 求矩阵A的行秩，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&0&3&9\\0&1&2&0&2&3\\0&0&0&1&5&5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解 矩阵A是行简化阶梯阵，$r(A)=3$.

选取非零行及非零行首元所在列的元素所构成的向量组$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$，则该向量组线性无关，在每一个向量相应位置上，添加三个分量，可得向量组(I)：

$(1,0,3,0,3,9)$，$(0,1,2,0,2,3)$，$(0,0,0,1,5,5)$，

则向量组(I)仍线性无关，而矩阵A的最后一行是零向量.

所以矩阵A的行秩为3，等于矩阵A的秩$r(A)$.

简化阶梯阵A的行秩 ?= 矩阵A的秩

定理18 行简化阶梯阵A的行秩等于矩阵的秩$r(A)$.

证明 (略).

定理19 矩阵A的行秩等于矩阵的秩$r(A)$.

证明 设矩阵A经初等行变换变为行简化阶梯阵B，则$r(A)=r(B)$. 由于A的行向量组与B的行向量组等价，所以A的行秩等于B的行秩. 又行简化阶梯阵B的秩等于矩阵B的行秩. 所以A的行秩等于A的秩$r(A)$.

推论1 矩阵的列秩等于矩阵的行秩，等于矩阵的秩.

证明 矩阵A的列秩 = 矩阵A^T的行秩

= 矩阵A^T的秩

= 矩阵A的秩.

于是可以通过矩阵的秩求向量组的秩.

推论2 设A为$m\times n$矩阵，则 $r(A)\le\min\{m,n\}$.

证明 由推论1得 $r(A)\le m,\ r(A)\le n,\ \therefore r(A)\le\min\{m,n\}$

求向量组秩的方法：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\xrightarrow{\text{初等行变换}}B(\text{行阶梯阵}).$$

B的非零行行数就是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的秩.

例3 求向量组 $\alpha_1=(1,2,1,2)^T,\alpha_2=(1,0,3,1)^T$,

$\alpha_3=(2,-1,0,1)^T,\alpha_4=(2,1,-2,2)^T,\alpha_5=(2,2,4,3)^T$的秩.

解 对矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\2&0&-1&1&2\\1&3&0&-2&4\\2&1&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\0&-2&-5&-3&-2\\0&2&-2&-4&2\\0&-1&-3&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\leftrightarrow r_2]{r_4\div(-1)}\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\0&1&3&2&1\\0&2&-2&-4&2\\0&-2&-5&-3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\0&1&3&2&1\\0&0&-8&-8&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\0&1&3&2&1\\0&0&-8&-8&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div(-8)}\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\0&1&3&2&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

故$r(A)=3$， 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为3.

定理20 矩阵A经初等行变换化为矩阵B，则矩阵A列向量组与矩阵B列向量组对应的向量有相同的线性关系.

证明 设矩阵A经初等行变换化为矩阵B，则存在可逆矩阵P，使得 $PA=B$. 设

$$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n),$$
$$B=(\beta_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n).$$

则
$$PA=(P\alpha_1,\cdots,P\alpha_i,\cdots,P\alpha_j,\cdots,P\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n).$$

即 $P\alpha_i=\beta_i,\ i=1,2,\cdots,n.$

$P\alpha_i=\beta_i,\ i=1,2,\cdots,n.$

首先证明：若$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$线性无关，则对应的$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关.

设有 $k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r}=0$,

左乘P， $P(k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r})=0$,

$k_1P\alpha_{i_1}+k_2P\alpha_{i_2}+\cdots+k_rP\alpha_{i_r}=0$,

即 $k_1\beta_{i_1}+k_2\beta_{i_2}+\cdots+k_r\beta_{i_r}=0$.

因 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$,

即$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关.

$P\alpha_i=\beta_i,\ i=1,2,\cdots,n.$

再证明：若β_j可由$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$线性表示，则对应的$\alpha_j$可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表示.

设有 $\beta_j=k_1\beta_{i_1}+k_2\beta_{i_2}+\cdots+k_r\beta_{i_r}$,

即 $P\alpha_j=k_1P\alpha_{i_1}+k_2P\alpha_{i_2}+\cdots+k_rP\alpha_{i_r}$,

$\Rightarrow P\alpha_j=P(k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r})$,

左乘P^{-1}， $\Rightarrow\alpha_j=k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r}$,

即α_j可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表示，且表示的系数相同.

定理20 矩阵A经初等行变换化为矩阵B，则矩阵A列向量组与矩阵B列向量组对应的向量有相同的线性关系.

求向量组中向量之间的线性关系方法：

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\xrightarrow{\text{初等行变换}}B$(行简化阶梯阵).

从行简化阶梯阵中可以确定向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的极大无关组和秩，并可将其余向量用极大线性无关组线性表示.

注

行简化阶梯阵的非零行的第一个非零元对应的列向量选为极大线性无关组.

例4 求例3中向量组 $\alpha_1=(1,2,1,2)^T,\alpha_2=(1,0,3,1)^T,$ $\alpha_3=(2,-1,0,1)^T,\alpha_4=(2,1,-2,2)^T,\alpha_5=(2,2,4,3)^T$ 的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的向量用极大无关组线性表示.

解 对矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\xrightarrow{\text{初等行变换}}B$(行简化阶梯阵)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\2&0&-1&1&2\\1&3&0&-2&4\\2&1&1&2&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\0&1&3&2&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&0&2\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

令$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$，由于$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$的极大无关组，且

$$\beta_4=\beta_1-\beta_2+\beta_3,\quad \beta_5=\beta_1+\beta_2.$$

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是其中一个极大线性无关组, 且有

$$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\quad \alpha_5=\alpha_1+\alpha_2.$$

注：

(1) 求矩阵列向量组的秩 ⇒ 初等行变换 / 初等列变换

(2) 求矩阵列向量组极大线性无关组 ⇒ 初等行变换

例5 已知向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,$ $\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T,\ \alpha_4=(-2,-6,10,p)^T.$

(1) p为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，此时将$\alpha=(4,1,6,6)^T$用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示.

(2) p为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关, 此时求出向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和极大线性无关组.

解 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)$,

$$A\xrightarrow{\text{行变换}}B(\text{行阶梯阵})\xrightarrow{\text{行变换}}C(\text{行简化阶梯阵})$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-(p-9)r_3]{-\frac{1}{7}r_3}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\ &&&&\end{pmatrix}=B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta).$$

$\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,$

$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T,\ \alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$

$\alpha=(4,1,6,6)^T$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&-3-p\end{pmatrix}=B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta).$$

于是矩阵A与B对应的列具有相同的线性关系，

当$p\neq 2$时，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为4，线性无关，

当$p=2$时，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关，且$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是其极大线性无关组. 所以

(1) 当$p\neq 2$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&-3-p\end{pmatrix}=B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta).$$

$\boxed{p\neq 2}$

$$A\longrightarrow B\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&\dfrac{3p+4}{p-2}\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&\dfrac{3+p}{2-p}\end{array}\right)$$

于是 $\alpha=2\alpha_1+\dfrac{3p+4}{p-2}\alpha_2+\alpha_3+\dfrac{3+p}{2-p}\alpha_4.$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&-3-p\end{pmatrix}=B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta).$$

(2) 当$p=2$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，其秩为3，其极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

注意: $A\xrightarrow{\text{行变换}}B$ 重点

(1) A与B对应的列向量组具有相同的线性关系；

(2) A的行向量组与B的行向量组等价.

$A\xrightarrow{\text{列变换}}B$

(1) A与B对应的行向量组具有相同的线性关系；

(2) A的列向量组与B的列向量组等价.

定理21 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$均为$n$维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件是$|A|\neq 0$.

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关 $\Leftrightarrow r(A)=n.$

$$r(A)=n\Leftrightarrow |A|\neq 0.$$

例6 设A为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3维列向量，已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，且$A\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$, $A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，求$|A|$.

解 由于

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$$
$$=(\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2)$$
$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

从而

$$|A|\cdot|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\cdot\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix},$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=2.$$

二、矩阵的子式

1. k 阶子式的定义

定义29 在 $m\times n$ 矩阵A中，任取 k 行与 k 列（$k\le m, k\le n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为矩阵A的k阶子式.

例如
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 5 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$D_2=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0-9=-9$$
$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-4=-1$$

矩阵A的2, 3列 $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ 必线性无关.

第五节 矩阵的秩 | 版权归《线性代数》课程组 | 小结

2. k阶子式的个数

$m\times n$ 矩阵A的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

3. 矩阵的秩与子式的关系

定理22 设$A=(a_{ij})$为$m\times n$矩阵,则$r(A)=r$的充要条件是A中有一个r阶子式不为零，所有$r+1$阶子式均为零.

证明 必要性 由于$r(A)=r$, 矩阵A的行秩为r, 有r个行线性无关，不妨设前r行线性无关. 令
$$B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn}\end{pmatrix}$$

第五节 矩阵的秩 | 版权归《线性代数》课程组 | 小结

则矩阵B的列秩为r, 矩阵B有r个列线性无关. 不妨设矩阵B的前r列线性无关.

$$B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn}\end{pmatrix}$$

令
$$C=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr}\end{pmatrix}$$

则矩阵C的秩为r, 于是$|C|\neq 0$, 即矩阵A有r阶非零子式.

若矩阵 A有一个$r+1$阶子式非零，则这$r+1$阶子式所在列线性无关，这与列向量组的秩为 r相矛盾. 故矩阵A的所有$r+1$阶子式均为零.

第五节 矩阵的秩 | 版权归《线性代数》课程组 | 小结

定理22 设$A=(a_{ij})$为$m\times n$矩阵,则$r(A)=r$的充要条件是A中有一个r阶子式不为零，所有$r+1$阶子式均为零.

充分性 设A中有一个r阶子式不为零，不妨设左上角的r阶子式非零，则矩阵A的前r列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关. 对于矩阵$A$的任一列向量$\alpha_j\,(r<j\le n)$，若$\alpha_j$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_j$线性无关. 矩阵$D=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_j)$的列秩为$r+1$. 由必要性的证明知:矩阵$D$有$r+1$阶非零子式,于是$A$有一个$r+1$阶非零子式. 与假设矛盾. 所以$\alpha_j$能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示. 于是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$A$的列向量组的极大线性无关组. 所以$r(A)=r$.

第五节 矩阵的秩 | 版权归《线性代数》课程组 | 小结

若矩阵所有的$r+1$阶子式均为零, 则由行列式的展开定理知：矩阵的所有$r+2$阶子式均为零, 更高阶子式若存在的话也均为零. 所以

矩阵的秩是矩阵最高阶非零子式的阶数.

结论:

1) 若D_r是矩阵A的一个最高阶非零子式，则r是列(行)向量组的秩.
2) D_r所在的r列是列向量组的一个极大无关组;
3) D_r所在的r行是行向量组的一个极大无关组.

第五节 矩阵的秩 | 版权归《线性代数》课程组 | 小结

例7 设 $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$, 则 $r(C)\le r(A),\ r(C)\le r(B)$.

证明 设矩阵C和A用其列向量表示为

$C=(c_1,\cdots,c_n)$, $A=(a_1,\cdots,a_s)$. 而$B=(b_{ij})$, 由
$$(c_1,\cdots,c_n)=(a_1,\cdots,a_s)\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}$$

可知：矩阵C的列向量组能由A的列向量组线性表示，

$\therefore\ r(C)\le r(A).\quad \because C^T=B^TA^T$, 又有

$r(C^T)\le r(B^T),\quad \Rightarrow r(C)\le r(B).$

第五节 矩阵的秩 | 版权归《线性代数》课程组 | 小结

例8 设A, B均为 $m\times n$ 矩阵，则

$$r(A\pm B)\le r(A)+r(B).$$

证明 设$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，于是

$$A+B=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n).$$

设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的极大线性无关组为$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$，

向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$的极大线性无关组为$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}$.

由于向量组(I): $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n$可由向量组(II): $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$，$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性表示，所以

向量组(I)的秩 ≤ 向量组(II)的秩，

向量组(II)的秩≤ 向量组(II)所含向量的个数$r+t$,

于是 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

三、小结

1. 本节重要结论

1) 矩阵的列秩等于矩阵的行秩, 等于矩阵的秩.

2) 矩阵A经初等行变换化为矩阵B, 则矩阵A列向量组与矩阵B列向量组对应的向量有相同的线性关系.

3) n阶方阵A可逆的⇔是$r(A)=n$.

⇔是其行(列)向量组线性无关.

4) 设$A=(a_{ij})$为 $m\times n$ 矩阵,则$r(A)=r$的充要条件是A中有一个r阶子式不为零，所有$r+1$阶子式均为零.

5) 矩阵的秩是矩阵最高阶非零子式的阶数.

6) $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}\Rightarrow r(C)\le r(A)$, $r(C)\le r(B)$.

7) 设A, B均为 $m\times n$ 矩阵 $\Rightarrow r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

8) 设A为$m\times n$矩阵，则 $r(A)\le \min\{m,n\}$.

2. 本节常用方法

1) 求向量组秩的方法:

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\xrightarrow{\text{初等行变换}}B(\text{行阶梯阵}).$$

B的非零行行数就是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的秩.

2) 求向量组中向量之间的线性关系方法:

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\xrightarrow{\text{初等行变换}}B(\text{行简化阶梯阵}).$$

从简化阶梯阵中可以确定向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的极大无关组和秩，并可将其余向量用极大线性无关组线性表示.

作 业

- 习题3.5(P_{138})

A: 1, 2, 5

B: 1 , 3

预习：齐次线性方程组