课堂提问：

孤立奇点	Laurent 级数的特点	$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m 级极点★	含有有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为 ∞

第五章 留数及其应用

- 第一节 函数的孤立奇点
- 第二节 留数
- 第三节 留数在定积分计算中的应用

§5.1 孤立奇点

- 1. 定义
- 2. 分类
- 3. 性质
- 4. 零点与极点的关系

1. 定义

定义 若$f(z)$在z_0处不解析，但在z_0的某个去心邻域$0<|z-z_0|<\delta$内解析，则称z_0为$f(z)$的孤立奇点.

例如 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ ----$z=0$ 为孤立奇点

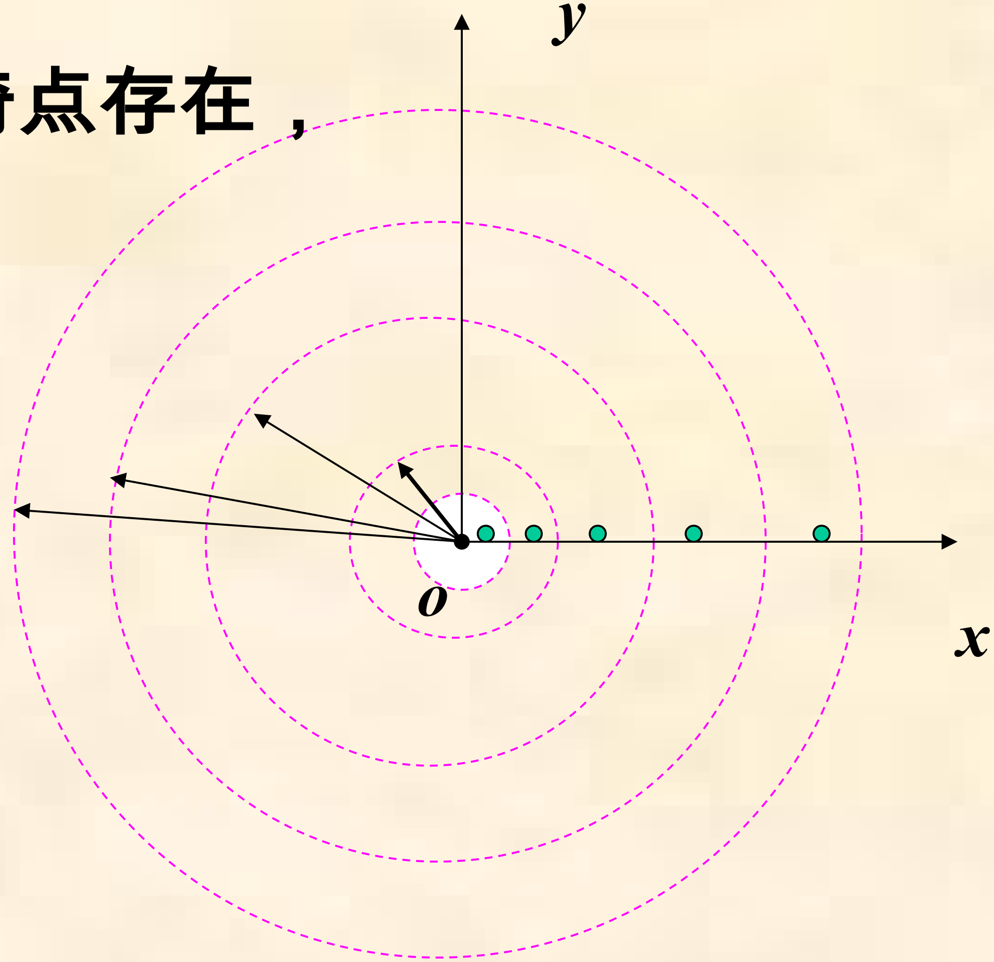
$$f(z)=\frac{1}{z-1}$$ ----$z=1$ 为孤立奇点

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

----$z=0$ 及 $z=1/n\pi\ (n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是它的奇点

但$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\pi}=0,\therefore$ 在$z=0$不论多么小的去心邻域内，总有$f(z)$的奇点存在，

故$z=0$不是$\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$的孤立奇点。



这说明奇点未必是孤立的。

2. 分类

以下将 $f(z)$ 在孤立奇点的邻域内展成洛朗级数，根据展开式的不同情况，将孤立点进行分类。考察：

$$(1)\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

特点：没有负幂次项

$$(2)\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots$$

特点：只有有限多个负幂次项

$$(3)e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$$

特点：有无穷多个负幂次项

定义　设 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点，在 z_0 的去心邻域内，

若 $f(z)$ 的洛朗级数

$$(i)\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

没有负幂次项，称 $z=z_0$ 为可去奇点；

$$(ii)\ f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\,(c_{-m}\neq 0, m\quad 1)$$

只有有限多个负幂次项，称 $z=z_0$ 为 m 级极点；

$$(iii)\ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

有无穷多个负幂次项，称 $z=z_0$ 为本性奇点。

3. 性质

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$$

补充定义：$f(z_0)=c_0$ $\quad f(z)$在z_0解析.

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的 $m\ (m\ \ 1)$ 级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\,(c_{-m}\neq 0, m\ \ 1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$$

其中：$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots,$

$g(z)$在$|z-z_0|<\delta$内是解析函数且$g(z_0)\neq 0.$

例如：$f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{(z^2+1)(z-1)^4}$

$z=1$ 为 $f(z)$ 的一个三级极点， $z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的一级极点。

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点

$\Leftrightarrow$ $f(z)$的洛朗级数有无穷多项负幂次项

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在，也不为$\infty$

4. 零点与极点的关系

定义 不恒等于 0 的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

其中：$\varphi(z_0)\neq 0, \varphi(z)$在$z_0$点解析$, m\in N$

则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 级零点。

例如：$z=0$与$z=1$分别是$f(z)=z(z-1)^3$的一级与三级零点。

定理 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

$(\varphi(z_0)\neq 0,\varphi(z)$在$z_0$点解析$,m\in N)$

$\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0(n=0,1,2,\cdots,m-1)\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

事实上，$\because\ \varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\quad c_0=\varphi(z_0)\neq 0$

$$\therefore f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^{n+m}$$

由$Taylor$级数的系数公式有：

$f^{(n)}(z_0)=0\ \ (n=0,1,2,\cdots,m-1),$

而$\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}=c_0\neq 0$ 必要性得证！

例如　$z=0$与$z=1$均为$f(z)=z(z-1)^3$的零点。

又$f'(z)=(z-1)^3+3z(z-1)^2$

$$f''(z)=6(z-1)^2+6z(z-1)$$

$$f'''(z)=12(z-1)+6(z-1)+6z$$

$\because\ f'(0)=(-1)^3\neq 0$

$\therefore z=0$为一级零点

$\because\ f'(1)=0\quad f''(1)=0\quad f'''(1)=6\neq 0$

$\therefore z=1$为三级零点

定理： 若z_0是$f(z)$的m级极点$\Leftrightarrow$ z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

证明 “$\Rightarrow$” 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)\left(g(z)\text{在}z_0\text{解析,且}g(z_0)\neq 0\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{g(z)}=(z-z_0)^m h(z)\quad (z\neq z_0)$$

$$\left(h(z)\text{在}z_0\text{解析,且}h(z_0)\neq 0\right).$$

$\because \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0,\therefore$ 令 $\dfrac{1}{f(z_0)}=0$，则z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

$\Leftarrow$"若 z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点,则

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\varphi(z)\ \big(\varphi(z)\text{在}z_0\text{解析,且}\varphi(z_0)\neq 0\big).$$

当$z\neq z_0$时，$f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\boxed{\dfrac{1}{\varphi(z)}}=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\boxed{\psi(z)}$

$$\big(\psi(z)\text{在 }z_0\text{ 解析,且}\psi(z_0)\neq 0\big).$$

$\therefore z_0$是$f(z)$的m级极点.

推论1 设 $g(z_0)\neq 0$, $g(z)$ 在 z_0解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点或 m 级极点时，z_0 也是函数 $f(z)g(z)$的 m 级零点或 m 级极点；

推论2 若 z_0是 $f_k(z)$ 的 m_k 级零点，则 z_0 是 $f_1(z)f_2(z)$ 的 m_1+m_2 级零点；且当 $m_1<m_2$ 时，z_0 为 $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ 的 m_2-m_1 级极点

例 求$f(z)=\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$的奇点，

如果是极点指出它的级。

解 显然，$z=\pm i$ 是 $(1+z^2)$ 的一级零点

$\because\ e^{\pi z}+1=0$, 即$e^{\pi z}=-1$

$\therefore \pi z=Ln(-1)=i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$

故奇点为：$z_k=(2k+1)i \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\because\ (1+e^{\pi z})'\Big|_{z=i(2k+1)}=\pi e^{\pi z}\Big|_{z=i(2k+1)}$

$=\pi[\cos\pi(2k+1)+i\sin\pi(2k+1)]=-\pi\neq 0$

$\therefore z_k=i(2k+1) \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是$1+e^{\pi z}$的一级零点

综合 $z=\pm i$为$f(z)$的二级极点;

$z_k=i(2k+1)\quad(k=1,\pm 2,\cdots)$为$f(z)$的一级极点.

练习：考察下列函数的孤立奇点，奇点类型，如果是极点，指出它的级数。

$$(1)\ f(z)=\frac{1}{z^2(e^z-1)}\qquad (2)\ f(z)=\frac{\ln(1+z)}{z}$$

$$(3)\ f(z)=\frac{1}{z\left(z^{2}+1\right)^{2}}$$

$$(4)\ f(z)=\frac{\sin z}{z^{3}}$$

$$(5)\ f(z)=\frac{1}{z^{3}-z^{2}-z+1}$$

$$(6)\ f(z)=\frac{1}{z-\sin z}$$

$$(7)\ f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$$

$$(8)\ f(z)=\frac{(z-1)^{2}(z-2)^{2}}{\left(\sin \pi z\right)^{3}}$$

本性奇点例子教材 85 页★

§5.2 留数 (Residue)

- 1. 留数的定义
- 2. 留数定理
- 3. 留数的计算规则

1. 留数的定义

$$\oint_c f(z)dz = \begin{cases} 0 & f(z)\text{在}c\text{所围成的区域内解析} \\ \text{未必为}0 & c\text{所围成的区域内含有}f(z)\text{的奇点} \end{cases}$$

设$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n, 0 < |z-z_0| < r$

(z_0是$f(z)$的孤立奇点， c包含z_0在其内部)

对上式两边沿简单闭曲 线c逐项积分得：

$$\oint_c f(z)dz = c_{-1}\oint_c \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i c_{-1}$$

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 邻域内的洛朗级数中负幂次项 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数 c_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 的**留数**，记作 $\operatorname{Res}[f(z), z_0]$ 或 $\operatorname{Res} f(z_0)$。

由留数定义，$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$ (1)

故 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$ (2)

2. 留数定理

定理 设c是一条简单闭曲线，函数$f(z)$在c内有有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$，除此以外，$f(z)$在c内及c上解析，则

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k] \qquad (3)$$

证明 用互不包含，互不相交的正向简单闭曲线c_k $(k = 1,2,\cdots n)$将c内孤立奇点z_k围绕，

由复合闭路定理得：

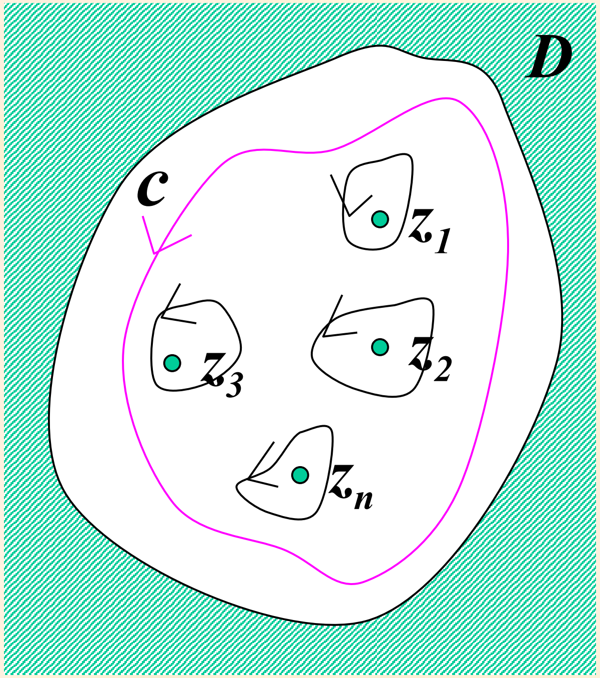
$$\oint_{c} f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz + \oint_{c_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{c_n} f(z)dz$$

用 $2\pi i$ 除上式两边得：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_k} f(z)dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

故 $\oint_{c} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$



得证！

求沿闭曲线 c 的积分，归之为求在 c 中各孤立奇点的留数。

3. 留数的计算规则

一般求 $\text{Res}\,[f(z), z_0]$ 是采用将 $f(z)$ 在 z_0 邻域内展开成洛朗级数求系数 c_{-1} 的方法，但如果能先知道奇点的类型，对求留数更为有利。

以下就三类孤立奇点进行讨论：

(i)若$z=z_0$为可去奇点$\Rightarrow c_{-1}=0 \Rightarrow \text{Res}[f(z), z_0]=0$

(ii)若$z=z_0$为本性奇点$\Rightarrow f(z)\overset{\text{展开}}{=}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}s[f(z),z_0]=c_{-1}$$

(iii)若$z=z_0$为极点时，求$\operatorname{Re}s[f(z),z_0]$有以下几条规则

规则 I 若z_0是$f(z)$的一级极点,$\Rightarrow$

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \qquad (4)$$

规则 II 若z_0是$f(z)$的m级极点$\Rightarrow\forall n\quad m$,

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] \qquad (5)$$

事实上，由条件

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,\quad (c_{-m}\neq 0)$$

以$(z-z_0)^m$乘上式两边，得

$$(z-z_0)^n f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{n-m}+c_{-m+1}(z-z_0)^{n-m+1}+$$

$$\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{n-1}+c_0(z-z_0)^n+\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-z_0)^n f(z)\}=(n-1)!c_{-1}+c_0 n!(z-z_0)+\cdots$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]=(n-1)!c_{-1},$$ 得(5)式.

 当 m=1 时，式 (5) 即为式 (4).

规则 III 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $P(z),Q(z)$在z_0处解析，

$P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0 \Rightarrow$

z_0是$f(z)$的一级极点，且 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ (6)

事实上 $\because$ $Q(z_0)=0$及$Q'(z_0)\neq 0$

$\therefore$ z_0为$Q(z)$的一级零点,从而z_0为$\dfrac{1}{Q(z)}$的一级极点，

因此，$\dfrac{1}{Q(z)}=\dfrac{1}{z-z_0}\varphi(z)$ $\big(\varphi(z)$在z_0处解析且$\varphi(z_0)\neq 0\big)$

故$f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}g(z)\quad (g(z)=\varphi(z)P(z)$在$z_0$解析,

且$g(z_0)\neq 0)$, 则z_0为$f(z)$的一级极点,由规则I

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}\quad \left(Q'(z_0)\neq 0\right)$$ 得证!

例 1 计算：$\oint_{|z|=2} \dfrac{5z-2}{z(z-1)^2} dz$

解 $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|=2$ 的内部有一个一级

极点 $z=0$ 和一个二级极点 $z=1$

由规则 I

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{5z-2}{(z-1)^2}=-2$$

由规则II

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\{(z-1)^2\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\}$$

$$=\lim_{z\to 1}(\frac{5z-2}{z})'=\lim_{z\to 1}\frac{2}{z^2}=2$$

$$\therefore \oint_{|z|=2} f(z)dz=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]+2\pi i\operatorname{Res}[f(z),1]=0$$

例 2 计算$\oint_c \frac{z}{z^4-1}dz \quad c:$正向$|z|=2$

解 $\because\ f(z)$有4个一级极点$:\pm1,\pm i$都在圆周c内，

由规则III $\quad \frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2}$

故 $\oint_c \frac{z}{z^4-1}dz$

$$=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),-1]+\operatorname{Res}[f(z),1]$$

$$+\operatorname{Res}[f(z),i]+\operatorname{Res}[f(z),-i]\}$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right]=0$$

例 3 计算$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$

解 $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$有一个 $z = 0$的三级极点

由规则II

$$\operatorname{Re}s[f(z),0] = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2}[z^3 f(z)]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} (\cos z)'' = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = 2\pi i \operatorname{Re}s[f(z),0] = 2\pi i(-\frac{1}{2}) = -\pi i$$

例4 计算$\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz \quad (n \in N)$

解 $\tan \pi z = \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$ 令$\cos \pi z = 0$

解得$\pi z = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 即, $z = k + \dfrac{1}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$\because \ (\cot \pi z)' \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\pi \csc^2 \pi z \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} \neq 0$

$\therefore z = k + \dfrac{1}{2}$为一级极点,由规则III得

$$\operatorname{Res}\left[\tan \pi z, k + \frac{1}{2}\right] = \left.\frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

故由留数定理得：

$$\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz = 2\pi i \sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n} \operatorname{Re}s\left[\tan \pi z, k+\tfrac{1}{2}\right] = 2\pi i\left(-\frac{2n}{\pi}\right) = -4ni$$

 (1) 要灵活运用规则及洛朗级数展开来求留数，不要死套规则。

如 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{z - \sin z}{z^6}$

由于 $p(0) = 0 \quad p'(0) = (1 - \cos z)\big|_{z=0} = 0$

$p''(0) = \sin z\big|_{z=0} = 0 \quad p'''(0) = \cos z\big|_{z=0} = 1 \neq 0$

$\therefore z = 0$ 是 $p(z)$ 的三级零点，是 $f(z)$ 的三级极点。

由规则II $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6},0\right]=\dfrac{1}{(3-1)!}\lim\limits_{z\to 0}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^3}\right]''$

若将$f(z)$作*Laurent*级数展开：

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}[z-(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots)]$$

$$=\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}-\frac{1}{5!}\frac{1}{z}+\cdots$$

$$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=-\frac{1}{5!}$$

--- 该方法较规则 II 更简单！

(2) 由规则 II 的推导过程知，在使用规则 II 时，可将 m 取得比实际级数高，这可使计算更简单。

如

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}\left[z^6\left(\frac{z-\sin z}{z^6}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}(z-\sin z)=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z)=-\frac{1}{5!}$$

★ **例 5.** 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 $z=0$ 解析，且 $f(0)\neq 0$, $g(0)=g'(0)=0$, $g''(0)\neq 0$. 证明：$z=0$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的二阶极点，且

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},0\right]=\frac{2f'(0)}{g''(0)}-\frac{2f(0)g'''(0)}{3\left[g''(0)\right]^2}$$

证： 由题设知，在 $z=0$ 的某邻域内：$g(z)=z^2\varphi(z)$,

其中 $\varphi(z)=\dfrac{1}{2!}g''(0)+\dfrac{1}{3!}g'''(0)\cdot z+\cdots$, 由此可得

$$\varphi(0)=\frac{1}{2}g''(0),\qquad \varphi'(0)=\frac{1}{6}g'''(0),$$

于是

$$\lim_{z\to 0} z^2\cdot\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}=\frac{f(0)}{\varphi(0)}=2\frac{f(0)}{g''(0)}\neq 0$$

即 $z=0$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的二阶极点，且

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{f(z)}{g(z)},0]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{f'(z)\varphi(z)-f(z)\varphi'(z)}{\varphi^2(z)}=\frac{f'(0)\varphi(0)-f(0)\varphi'(0)}{\varphi^2(0)}$$

$$=\frac{f'(0)\frac{1}{2}g''(0)-f(0)\frac{1}{6}g'''(0)}{(\frac{1}{2}g''(0))^2}=\frac{2f'(0)}{g''(0)}-\frac{2}{3}\cdot\frac{f(0)g'''(0)}{(g''(0))^2}$$

第六周周五作业

1、书面作业

习题五 (P108)

5(2, 3, 6, 7)、 6(1, 2, 4, 6)

2、课外作业

（1）复习高数“反常积分计算”有关内容

（2）预习第五章第四节

（3）完成练习册第四章之内容