矩阵的基本运算

矩阵特征值、特征向量

解线性方程组

用数值方法计算定积分

矩阵的基本运算

		注意
数 乘	k*A	k 是一个数，A 是一个矩阵
矩阵的左除	A\B	AX=B, X=A^{-1}B, A 必须是方阵
矩阵的右除	A/B	XB=A,X=AB^{-1}, B 必须是方阵
矩阵的行列式	det(A)	A 必须为方阵
矩阵的逆	inv(A)	A 必须为方阵，|A| ‡ 0
矩阵的乘幂	A^n	A 必须为方阵，n 是正整数
矩阵行变换化简	rref(A)	求 A 阶梯形的行最简形式

P82 表 5-1

矩阵的特征值、特征向量、特征多项式

[V,D]=eig(A
)

例 1

```
A=[1,-1;2,4];
[V,D]=eig(A)
```

ans

V=

-985/1393	1292/2889	— — 方阵 A 的特征向量矩阵
985/1393	-2584/2889	

D=

2	0	— — — — 方阵 A 的特征值矩阵
0	3	

矩阵的特征值、特征向量、特征多项式

p=poly(A)

若 A 为矩阵，则 p 为 A 的特征多项式系数；
若 A 为行向量，则 p 为以 A 为根的特征多项式系数。

poly2str(p,’x’)　　得到多项式的习惯形式

例 1

A=[1,-1;2,4];
p=poly(A)
poly2str(p,’x’)

ans

p=[1 -5 6]

x^2-5x+6

解线性方程组

1、逆矩阵法（求逆法）

例 1 ： 求方程组的解

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-y=1 \end{cases}$$

相当于

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解：

```
A=[2,3;1,-1];
b=[4;1]
X=inv(A)*b
```

ans

```
X =
     1.4000
     0.4000
```

方程的解是： x=1.4, y=0.4

解线性方程组

逆矩阵法（左除与右除法）

AX=B X=A\B
XA=B X=B/A

例1： 求方程组的解

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-y=1 \end{cases}$$

解：

```
A=[2,3;1,-1];
b=[4;1]
X=A\b
```

相当于

AX=b,X=A\b

ans

```
X =
    1.4000
    0.4000
```

方程的解是： x=1.4, y=0.4

解线性方程组

2、初等变换法

在线性代数中用消元法求线性方程组的通解的过程为：

1、用初等变换化线性方程组为阶梯形方程组，把最后的恒等式“0=0”去掉；

2、如果剩下的方程当中最后的一个等式是零等于非零的数，那么方程无解。否则有解；

3、在有解的情况下：

- 如果阶梯形方程组中方程的个数 r 等于未知量的个数，那么方程组有唯一的解；
- 如果阶梯形方程组中方程的个数 r 小于未知量的个数，那么方程组有无穷多个解。

解线性方程组

例 5-21 求齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

解： Matlab 命令为

A=[1 -8 10 2;2 4 5 -1;3 8 6 -2]; - - - 系数矩阵

rref(A) - - - 行的最简形式

ans=

1	0	4	0
0	1	-3/4	-1/4
0	0	0	0

分析：

将 0=0 的一行去掉，则原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \dfrac{3}{4}x_3 + \dfrac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

--- 方程的个数 $<$ 未知量个数

有无穷多个解

取 $\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ 取 $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

基础解系为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

解线性方程组

所以方程的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

其中 k_1, k_2 是任意实数

例 5-22　求非齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

解： MATLAB 命令为：

```
B=[1 -1 -1 1 0;1 -1 1 -3 1;1 -1 -2 3 -1/2];
rref(B)
```

```
ans =

1      -1      0      -1      1/2
0       0      1      -2      1/2
0       0      0       0      0
```

分析：原方程组对应的同解方程组为：

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \dfrac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

方程的个数 < 未知量个数

有无穷多个解

其中一个特解为：

$$\eta = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

解线性方程组

再求解对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$

可得到一个基础解系：

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以方程的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in R)$$

解线性方程组

例 求非齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10 \\ 11x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$$

解： Matlab 命令为

```
B=[4 2 -1 2;3 -1 2 10;11 3 0 8];
rref(B)
```

解线性方程组

ans=

1	0	3/10	0
0	1	-11/10	0
0	0	0	1

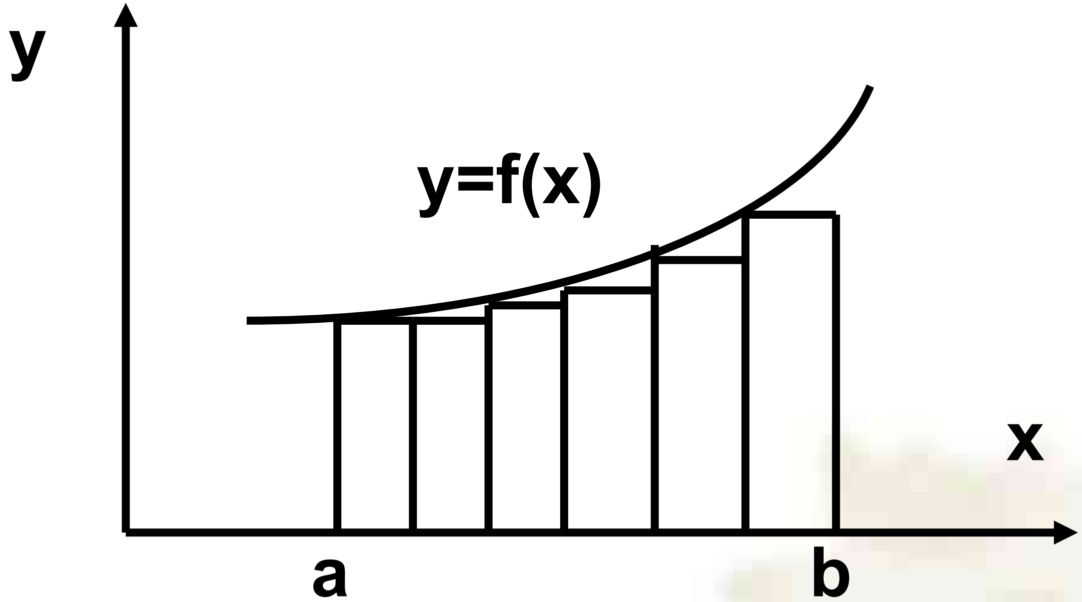
结果分析：行最简形式中最后一行出现了零等于非零的情况，故方程组无解。

用数值方法计算定积分

P145

$$\int_a^b f(x)dx$$

的几何意义



有三种方法：　1、 矩形法

2、复合梯形公式

3、复合辛普生公式

1、使用矩形法求定积分

例 1 计算定积分 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$， 与精确值 π 比较。

解 MATLAB 命令为：

```
h=0.01;x=0:h:1;
y=4./(1+x.^2);
format long
z1=sum(y(1:length(x)-1))*h          % 左矩形公式
z2=sum(y(2:length(x)))*h            % 右矩形公式
```

format short

u1=z1-pi,u2=z2-pi

输出结果：

z1 =

3.151575986923129

z2 =

3.131575986923129

u1 =

0.0100

u2 = -

0.0100

2、复合梯形公式

用小梯形面积代替小曲边梯形的面积，然后求和以获得定积分的近似值，比矩形法精度高。

相当于求

命令： **trapz(x,y)**

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y(i)+y(i+1)}{2}\Delta x_i$$

3、复合辛普生公式

用抛物线代替小曲边梯形的曲边计算小面积，然后求和以获得定积分的近似值，精度比前两种方法高。

命令： quad(‘fun’,a,b,tol)

1、式中 fun 是被积函数表达式字符串或者是 M 函数文件；

2、 a,b 是积分的下限与上限；

3、 tol 代表精度，可以缺省（ tol=0.001 ）；

例 3 用三种方法计算定积分$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x+1}dx$的值。

解：编程如下：

```
x=0:0.01:1;
y=sin(x.^2)./(x+1);
s1=sum(y(1:100))*0.01
s2=sum(y(2:101))*0.01
s3=trapz(x,y)
s4=quad('sin(x.^2)./(x+1)',0,1)
```

运行结果为：

s1 =

0.1787

s2 =

0.1829

s3 =

0.1808

s4 =

0.1808

按左矩形公式计算结果是 0.1787 ，按右矩形公式计算结果是 0.1829 ，按梯形法和辛普生法计算结果都是 0.1808.

建立函数文件 jifen.m ：

```
function y=jifen(x)
y=sin(x.^2)./(x+1);
```

编程如下：

```
s=quad('jifen',0,1)
```

练习： P115 21. (4)

P167 17. (3)

作业

P115 21. (1),(2)

第七章习题 P167

17. (2)

18

名称：线性代数相关运算及数值方法计算定积分

目的：掌握矩阵的基本运算、特征值、特征向量和线性方程组的求解；能熟练运用数值方法求定积分