第六章　二次型

第六章　二次型

6.1　二次型的定义及其矩阵表示

定义6.1　含n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$$
$$+a_{nn}x_n^2$$

称为n元二次型，简称二次型.

当系数a_{ij}均为实数时，称为实二次型.

只含有平方项的二次型

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

称为n元二次型的标准形.

例如 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

都为3元二次型；

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2$$

为3元二次型的标准形.

二次型的矩阵及秩

对二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

取$a_{ji}=a_{ij}$,则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$,于是

$$f=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

$$f=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)$$
$$+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)$$
$$+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)$$
$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则二次型可记作 $f=x^TAx$,其中A为对称矩阵.

$$f=x^TAx$$

在二次型的矩阵表示中，任给一个二次型，就唯一地确定一个对称矩阵；反之，任给一个对称矩阵，也可唯一地确定一个二次型．这样，二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系．

对称矩阵A叫做二次型 f 的矩阵;

f 叫做对称矩阵A的二次型;

对称矩阵A的秩叫做二次型 f 的秩.

例 1 写出二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-6x_2x_3$$

的矩阵.

解 $a_{11}=1, a_{22}=2, a_{33}=-3,$

$a_{12}=a_{21}=2,\ a_{13}=a_{31}=0,$

$a_{23}=a_{32}=-3.$

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

例2 求下列二次型的矩阵

1) 三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+8x_1x_2-x_2^2;$

2) 二元二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+8x_1x_2-x_2^2.$

解 1) 这是三元二次型,所求矩阵为三阶实对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) 这是二元二次型,所求矩阵为三阶实对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

例3 求n元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i\neq j}x_ix_j$$

的矩阵A.

解: $a_{ii}=0 \quad \forall 1\le \mathrm{i}\le n$

$$a_{ij}=a_{ji}=\frac{1}{2}\quad 1\le \mathrm{i};\mathrm{j}\le \mathrm{n}$$

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例4 求n阶对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

所对应的二次型.

解: 所对应的二次型为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{1\le i\le j\le n}2x_ix_j.$$

作业

习题6.1:

A: 1 (1) (3) (5); 4

6.2 二次型的标准形

6.2.1 用正交变换化二次型为标准形

6.2.2 用配方法化二次型为标准形

6.2.3 惯性定理与规范型

6.2.4* 二次型的一些应用

6.2.1 用正交变换化二次型为标准形

二次型的标准形： $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换，将二次型化为标准形.

设
$$\begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n, \\ x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2n} y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \cdots + c_{nn} y_n \end{cases}$$

记$C = (c_{ij})$，则上述可逆线性变换可记作

$$x = Cy$$

$x = Cy$ 将其代入 $f = x^T Ax$,有

$$f = x^T Ax = (Cy)^T A (Cy) = y^T (C^T AC) y.$$

结论 任给可逆矩阵C,令$B = C^T AC$,如果A为对称矩阵,则B也为对称矩阵,且$r(B) = r(A)$.

定义6.2 若A,B都是n阶对称矩阵，如果存在n阶可逆矩阵C使得 $B=C^TAC$则称矩阵A与B是合同的。

性质6.1 矩阵的合同关系是一种等价关系，即

(1)反身性 A与A本身合同.

(2)对称性 若A与B合同,$\Rightarrow$ B与A合同.

(3)传递性 若A与B合同,B与C合同,

$\Rightarrow$ A与C合同.

说明

1.二次型经可逆变换$x = Cy$后,其秩不变,但f的矩阵由A变为$B = C^T AC$;

2.要使二次型f经可逆变换 $x = Cy$变成标准形,就是要使

$$y^T C^T ACy = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$
$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

也就是要使$C^T AC$成为对角矩阵.

由于对任意的实对称矩阵A,总有正交矩阵P,使$P^{-1}AP = \Lambda$,即$P^T AP = \Lambda$.把此结论应用于二次型,有

定理6.2 任给二次型 $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j (a_{ij} = a_{ji})$,

总有正交变换 $x = Py$, 使 f 化为标准型,

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $A = (a_{ij})$的特征值.

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤

1. 将二次型表成矩阵形式$f=x^TAx$,求出A;

2. 求出A的所有特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$;

4. 将特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$正交化,单位化,得$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$,记$C=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$;

5. 作正交变换$x=Cy$,则得f的标准形
$$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

例1 将二次型
$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$
通过正交变换 $x=Py$,化成标准形.

解 1. 写出对应的二次型矩阵，并求其特征值
$$A=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}$$
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\2&4&\lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

从而得特征值 $\lambda_1=9,\lambda_2=\lambda_3=18.$

2. 求特征向量

将$\lambda_1=9$代入$(\lambda E-A)x=0$,得基础解系
$$\xi_1=(1/2,1,1)^T.$$
将$\lambda_2=\lambda_3=18$代入$(\lambda E-A)x=0$,得基础解系
$$\xi_2=(-2,1,0)^T,\ \xi_3=(-2,0,1)^T.$$

3. 将特征向量正交化

取 $\alpha_1=\xi_1,\alpha_2=\xi_2,\alpha_3=\xi_3-\dfrac{[\alpha_2,\xi_3]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2$,

得正交向量组
$$\alpha_1=(1/2,1,1)^T,\quad \alpha_2=(-2,1,0)^T,$$
$$\alpha_3=(-2/5,-4/5,1)^T.$$

4. 将正交向量组单位化，得正交矩阵 P

令 $\eta_i=\dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|},\quad (i=1,2,3),$

得 $\eta_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5\\1/\sqrt5\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{45}\\-4/\sqrt{45}\\5/\sqrt{45}\end{pmatrix}.$

所以
$$P=\begin{pmatrix}1/3&-2/\sqrt5&-2/\sqrt{45}\\2/3&1/\sqrt5&-4/\sqrt{45}\\2/3&0&5/\sqrt{45}\end{pmatrix}.$$
满足
$$P^TAP=\begin{pmatrix}9&&\\&18&\\&&18\end{pmatrix}$$

于是所求正交变换为 $x=Py$，即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&-2/\sqrt5&-2/\sqrt{45}\\2/3&1/\sqrt5&-4/\sqrt{45}\\2/3&0&5/\sqrt{45}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$
且有 $f=x^TAx=(Py)^TA(Py)=y^T(P^TAP)y.$
$$=9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2.$$

例2 用正交变换化二次型
$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$$
为标准型.

解: 二次型的矩阵
$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix},$$
A 的特征多式
$$f_\lambda(A)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5),$$
特征值为 $\lambda=1,\lambda=2,\lambda=5,$

其对应的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

将这三个向量标准正交化得到

$$\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

则

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$$

做正交变换 $X=QY$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

例3 求一个正交 $x=Py$，把二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

化为标准形.

解

二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix},$

它的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1&-1\\1&-\lambda&-1&1\\1&-1&-\lambda&1\\-1&1&1&-\lambda\end{vmatrix}.$$

计算特征多项式：把二,三,四列都加到第一列上,有

$$|A-\lambda E|=(-\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\1&-\lambda&-1&1\\1&-1&-\lambda&1\\1&1&1&-\lambda\end{vmatrix},$$

把二,三,四行分别减去第一行,有

$$|A-\lambda E|=(-\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\0&-\lambda-1&-2&2\\0&-2&-\lambda-1&2\\0&0&0&-\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda+1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-1&-2\\-2&-\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda+1)^2(\lambda^2+2\lambda-3)=(\lambda+3)(\lambda-1)^3.$$

于是 A 的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1.$

当 $\lambda_1=-3$ 时,解方程 $(A+3E)x=0,$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化即得 $p_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$

当 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 时,解方程 $(A-E)x=0,$

可得正交的基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

单位化即得 $p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},p_4=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&1/\sqrt{2}&0&1/2\\-1/2&1/\sqrt{2}&0&-1/2\\-1/2&0&1/\sqrt{2}&1/2\\1/2&0&1/\sqrt{2}&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

且有 $f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2.$

思考题

求一正交变换，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

化为标准型，并指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

思考题解答

解 二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$,

可求得$\det(\lambda E-A)=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$,

于是A的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$,

对应特征向量为

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

将其单位化得

$$q_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix},\quad q_2=\frac{p_2}{\|p_2\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},$$

$$q_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

故正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

化二次型为 $f=4y_2^2+9y_3^2.$

可知$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示椭圆柱面.

6.2.2 用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形，其特点是保持几何形状不变.

下面介绍另一种行之有效的化二次型为标准形方法——拉格朗日配方法.

拉格朗日配方法的步骤

1. 若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形；

2. 若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij}\neq 0$ $(i\neq j)$,则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \quad (k=1,2,\cdots,n\text{且}k\neq i,j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

例1 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

解

含有平方项　含有 x_1 的项配方

$$f = \boxed{x_1^2} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$
$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$
$$= (x_1+x_2+x_3)^2$$

去掉配方后多出来的项

$$-x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3$$
$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+2x_3)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$
$$= y_1^2 + y_2^2.$$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (|C| = 1 \neq 0).$$

例2 化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

成标准形,并求所用的可逆矩阵.

解 由于所给二次型中无平方项，所以

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases} \left(\text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$

代入 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$,

得 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$

再配方，得

$$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3 \end{cases} \left(\text{即} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right)$

得 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.\quad (|C|=-2\neq 0).$$

例3 用配方法化二次型 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 为标准型.

解: 由 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$, 配方有

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2=(x-\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2.$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases}x_1=x-\dfrac{y}{2},\\ y_1=\quad y\end{cases}\quad 即\begin{cases}x=x_1-\dfrac{y_1}{2},\\ y=\quad y_1\end{cases}$$

有 $f(x,y)=x_1^2+\frac{3}{4}y_1^2.$

当然我们也可以采用另一种配方的办法，即

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2=\frac{3}{4}x^2+(\frac{x}{2}-y)^2.$$

这样作可逆线性变换

$$\begin{cases}x_2=x\\ y_2=\dfrac{x}{2}-y\end{cases},\quad 即\begin{cases}x=x_2\\ y=\dfrac{x_2}{2}-y_2\end{cases},$$

可将二次型化为标准型 $\frac{3}{4}x_2^2+y_2^2.$

如果选取可逆线性代换

$$\begin{cases}x_3=\dfrac{x+y}{2}\\ y_3=\dfrac{x-y}{2}\end{cases},\quad 即\begin{cases}x=x_3+y_3\\ y=x_3-y_3\end{cases},$$

同样可以把二次型化为标准型 $x_3^2+3y_3^2.$

6.2.3 惯性定理与规范型

可以看到，二次型经不同的可逆线性变换可能得到不同的标准形，即二次型的标准形不惟一.

设秩为 r 的实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$

经可逆线性变换 $X=CY$ 化为标准形

$$f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots d_ny_n^2,$$

不妨设 $d_1,d_2,\cdots,d_p>0$, $d_{p+1},d_{p+2},\cdots,d_r<0$,

$d_{r+1}=d_{r+2}=\cdots=d_n=0$, 再作可逆线性变换

$$\begin{cases}z_1=\sqrt{d_1}y_1\\ \cdots\\ z_p=\sqrt{d_p}y_p\\ z_{p+1}=\sqrt{-d_{p+1}}y_{p+1}\\ \cdots\\ z_r=\sqrt{-d_r}y_r\\ z_{r+1}=y_{r+1}\\ \cdots\\ z_n=y_n\end{cases},$$

二次型进一步化为标准形

$$f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

称上式为实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范型.

定理6.3（Sylvester惯性定律）

实二次型都能用可逆的线性代换化为规范形，且规范形是惟一的.

由惯性定理知，尽管实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的标准形不惟一，但标准形中正平方项的个数 p 是惟一确定的，负平方项的个数 $q = r - p$ 也是惟一确定的(r为二次型的秩)，

分别称之为实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数和负惯性指数，

$p - q$ 称为二次型的符号差.

惯性定理用矩阵表述为:

定理6.4 任意一个秩为 r 的 n 阶实对称矩阵A都合同于一个形如

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

的对角阵.

6.2.4* 二次型的一些应用

例6.10 设三元二次型

$$f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz,$$

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，方程$f(x,y,z)=0$、$f(x,y,z)=6$ 及 $f(x,y,z)=-6$ 分别是什么曲面？

解 二次型 $f(x,y,z)$ 的矩阵为三阶对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

经过简单计算可以得到,A的特征多项式为 $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36$,

它有三个不同的特征值 $-2, 3, 6$, 它们的特征向量单位化后依次为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

做变量代换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$,

其中正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

那么，二次型 $f(x,y,z)$ 就化为关于变量 x_1,y_1,z_1 的二次型 $g(x_1,y_1,z_1)=-2x_1^2+3y_1^2+6z_1^2.$

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，二次曲面 $f(x,y,z)=0$ 的方程可以经变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

化为空间直角坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 中的方程 $g(x_1,y_1,z_1)=0$，也就是$3y_1^2+6z_1^2=2x_1^2$， 可以看到这是一个椭圆锥面.

因此，在 $O-xyz$ 坐标系中， 二次曲面 $f(x,y,z)=0$ 是一个椭圆锥面.

同理，可以得到在 $O-xyz$ 坐标系中，

二次曲面 $f(x,y,z)=6$ 是一个单叶双曲面;

二次曲面 $f(x,y,z)=-6$ 是一个双叶双曲面.

例6.11 已知二次型

$$f(x,y,z)=5x^2+5y^2+cz^2-2xy+6xz-6yz$$

的秩为2.

（1）求出参数c及二次型的矩阵的全部特征值;

（2）指出方程 $f(x,y,z)=36$ 表示何种曲面.

解 （1）首先易得二次型f的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix},$$

且$r(A)=2$，这就是说$|A|=0.$

计算得到 $|A|=24c-72$， 因此 $c=3.$

其次，在 $c=3$ 时，A 的特征多项式为 $\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$，三个特征值为 0, 4, 9.

（2）由（1）的分析计算可知，二次型在某个正交变换下的标准形为 $4x_1^2+9y_1^2$，于是方程 $f=36$ 就化为 $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1$， 这是椭圆柱面.

小结

将一个二次型化为标准形，可以用正交变换法，也可以用拉格朗日配方法，或者其它方法，这取决于问题的要求. 如果要求找出一个正交矩阵，无疑应使用正交变换法；如果只需要找出一个可逆的线性变换，那么各种方法都可以使用. 正交变换法的好处是有固定的步骤，可以按部就班一步一步地求解，但计算量通常较大；如果二次型中变量个数较少，使用拉格朗日配方法反而比较简单. 需要注意的是，使用不同的方法，所得到的标准形可能不相同，但标准形中含有的非零项的项数必定相同，项数等于所给二次型的秩.

作业

习题6.2
A: 1 (1) (4)、2 (3)、4 (1) (3) (5)、5 (1),
B: 3 (1)

思考题

化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

为标准形,并写出所作的可逆线性变换.

思考题解答

解 由于所给二次型不含平方项,故令

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2, \\ x_2=y_1+y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$$

有 $f=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2$,

再令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_2, \\ z_2=y_2, \\ z_3=y_3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y_1=z_1-z_3, \\ y_2=z_2, \\ y_3=z_3, \end{cases}$

得标准形

$$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2,$$

所用可逆线性变换为

$$\begin{cases} x_1=z_1-z_2-z_3, \\ x_2=z_1+z_2-z_3, \\ x_3=z_3. \end{cases}$$

6.3 正定二次型与正定矩阵

一、 正负定二次型的概念

定义6.3 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是一个实二次型,若对于任意的非零向量 X,
都有 $X^TAX>0$、$X^TAX<0$、$X^TAX\ge 0$、$X^TAX\le 0$,
则称二次型分别为正定的、负定的、半正定的、半负定的.否则称为不定的.

相应的矩阵分别称为正定矩阵、负定矩阵、半正定矩阵、半负定矩阵、不定矩阵.

例6.1 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 是正定的;

但二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2$ 不是正定的,

因 $X=(0,0,\cdots,1)^T\ne 0$,但 $f(X)=0$.

二、 正负定二次型的判别

定理6.1 二次型$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$是正定的充分必要条件是$d_i>0,\ i=1,2,\cdots,n.$

证明：必要性　二次型$f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 的矩阵为

$$A=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n),$$

由于二次型是正定的，对任意的$X\neq 0$，有$X^TAX>0.$

特别取 $X_i=(0,\cdots,0,1,0\cdots 0)^T\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，则有 $d_i=X_i^TAX_i>0(i=1,2,\cdots,n).$

充分性　设 $d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，对任意的

$$X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\neq 0,$$

则有某个$x_k\neq 0$，于是$d_kx_k^2>0$，而其余的$d_ix_i^2\geq 0$，所以

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2>0,$$

于是二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)$为正定二次型.

定理 6.2　可逆线性变换不改变二次型的正定型.

证明　设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$是正定的，且经可逆线性变换 $X=CY$ 变成二次型

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=Y^T(C^TAC)Y=Y^TBY,\text{ 其中}B=C^TAC.$$

下面证明$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=Y^TBY$是正定二次型.

对任意一个**n**元向量Y_0，由于矩阵C可逆，则$X_0=CY_0\neq 0$，于是由$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$正定二次型知 $X_0^TAX_0>0$，因此

$$Y_0^TBY_0=Y_0^T(C^TAC)Y_0=(CY_0)^TA(CY_0)=X_0^TAX_0>0,$$

由定义知二次型 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=Y^TBY$是正定二次型.

推论1　**n**元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定的充分必要条件是其规范型为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2.$

推论2　**n**元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定的充分必要条件是其正惯性指数为**n.**

把上述二次型的有关结论用相应的矩阵语言来叙述我们有：

定理6.3　实对称矩阵A正定的充分必要条件是 A合同于单位方阵.

定理6.4　n阶实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 A 的正惯性指数为$n.$

上述两个定理用推论1、推论2易证.

定理6.5　实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 A 的特征值全部为正值.

证明　设A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，可知存在正交变换 $X=QY$，使得二次型

$$\begin{aligned}f(X)=X^TAX&=Y^TQ^TAQY\\&=Y^Tdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Y\\&=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.\end{aligned}$$

矩阵 A 正定$\Leftrightarrow$ 二次型$f(X)=X^TAX$正定 $\Leftrightarrow \lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n).$

下面从实对称矩阵本身讨论正定矩阵的性质.

A 是对称矩阵，$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 子式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$$

称为 A 的主子式，而子式

$$a_{11}、\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}、\cdots、\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 A 的顺序主子式.

定理6.6 正定矩阵的行列式大于零.

证明 若A正定，则存在可逆矩阵 P,

使得$A = P^T EP = P^T P$, 所以$|A| = |P^T P| = |P|^2 > 0.$

定理6.7 设A是实对称矩阵,则 A正定的充分必要条件是其顺序主子式均大于零.

定理6.8 设A是实对称矩阵，则A正定的充分必要条件是其主子式全大于零.

例1 判断是对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

是否正定.

解 由于

$$3>0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 46 > 0,$$

根据定理6.7知这个矩阵是正定的.

例2 设二次型

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_3$,

当t 为何值时，上述二次型为正定二次型.

解： 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

二次型正定的充分必要条件是A 的各阶顺序主子式均大于零,即

$$|1| > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = (1-t^2) > 0, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5t^2 - 4t > 0,$$

解得$-\frac{4}{5} < t < 0$,因此$-\frac{4}{5} < t < 0$时,二次型为正定二次型.

例3 若A, B是n 阶正定矩阵，则 $A+B$也是正定矩阵.

证明：**1)** 因$A^T = A$, $B^T = B$, 故$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B.$

即$A+B$ 是实对称矩阵.

2) 因A,B正定，故对任意**n**维列向量 $X \ne 0$,

均有 $X^T AX > 0, X^T BX > 0$, 从而

$X^T(A+B)X = X^T AX + X^T BX > 0,$

即$A+B$ 为正定矩阵.

例4 设A为$m \times n$ 实矩阵且$rankA = n$, 证明$A^T A$正定.

证明：因$rankA = n$, A是$m \times n$ 矩阵,故$AX = 0$只有0解，

于是$\forall X \ne 0$, X不是$AX = 0$的解，所以$AX \ne 0$,

故 $(AX)^T(AX) > 0$, 因此$\forall X \ne 0$, 有

$X^T(A^T A)X = (AX)^T(AX) > 0.$

由定义知，$X^T(A^T A)X$是正定二次型，

$A^T A$ 是正定矩阵.

常见的证明题：已知一矩阵正定，证明该矩阵运算后所得的新矩阵也正定。例如：

例5 设A 为正定矩阵，则A^{-1}, kA(其中$k>0$)，A^* 也是正定矩阵.

例6 如果C 是可逆矩阵，A 为正定矩阵，证明 CAC^T 也是正定矩阵.

总之，下面几个条件是相互等价的：

1) 二次型X^TAX是正定二次型；
2) A是正定矩阵；
3) A 的正惯性指数是n；
4) A合同于单位矩阵；
5) A的特征值都是正数；
6) A的顺序主子式都大于零.

作业

习题 6.3

A: 1 (1) (3)、2、3 (1)