§1-4 等可能概型

目 录 索 引

返回主目录

1．等可能概型（古典概型）

等可能概型

考虑最简单的一类随机试验，它们的共同特点是：

♣ 样本空间的元素只有有限个；　　(有限性)

♣ 每个基本事件发生的可能性相同。（等可能性）

我们把这类试验称为**等可能概型**，考虑到它在概率论早期发展中的重要地位，又把它叫做**古典概型**。

返回主目录

基本事件的概率：

设 $S=\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$，由古典概型的等可能性，得

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\})$$

又由于基本事件两两互不相容，所以

$$1 = P(S) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + (P\{e_n\}),$$

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

随机事件的概率：

等可能概型

若事件 A 包含 k 个基本事件，即

$$A=\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_k}\}$$

则有 ：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(\{e_{n_i}\})=\frac{k}{n}$$

即 ：

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}}.$$

例 1 将一枚硬币抛掷三次。设：

 事件 A_1=“恰有一次出现正面”

返回主目录

等可能概型

事件 A_2 =“ 至少有一次出现正面”，

求 $P(A_1)$, $P(A_2)$。

解：根据上一节的记号，E_2 的样本空间

S_2={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT TTH, TTT},

n = 8 ，即 S_2 中包含有限个元素，且由对称性

知每个基本事件发生的可能性相同，属于古典概型。

∵ A_1 为“恰有一次出现正面”，

A_1={HTT, THT, TTH},

返回主目录

等可能概型

$$k=3\ ,\qquad P(A_1)=\frac{k}{n}=\frac{3}{8},$$

事件 A_2=“至少有一次出现正面”,

A_2={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH }

$$k_2=7\ ,\qquad P(A_2)=\frac{k_2}{n}=\frac{7}{8},$$

另解: 由于 $\overline{A}_2=\{TTT\}$, $k_{\overline{A}_2}=1$, $P(\overline{A}_2)=\dfrac{k_{\overline{A}_2}}{n}=\dfrac{1}{8}$,

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

返回主目录

例 2 一口袋装有 6 只球，其中 4 只白球、2 只红球。从袋中取球两次，每次随机的取一只。考虑两种取球方式：

- 放回抽样 第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球。
- 不放回抽样 第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球。

分别就上面两种方式求：

1）取到的两只都是白球的概率；

2）取到的两只球颜色相同的概率；

3）取到的两只球中至少有一只是白球的概率。

解：从袋中取两球，每一种取法就是一个基本事件。

设 A= “ 取到的两只都是白球 ”，

B= “ 取到的两只球颜色相同 ”，

C= “ 取到的两只球中至少有一只是白球”。

有放回抽取： $P(A)=\dfrac{4^2}{6^2}=0.444,$

$$P(B)=\frac{4^2+2^2}{6^2}=0.556$$

$$P(C)\neq\frac{C_4^1C_6^1}{6^2}$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{2^2}{6^2}=0.889$$

等可能概型

无放回抽取：

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{P_4^2}{P_6^2}$$

$$P(B)=\frac{C_4^2+C_2^2}{C_6^2}=\frac{P_4^2+P_2^2}{P_6^2}$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{C_2^2}{C_6^2}$$

返回主目录

例 3 将 n 只球随机的放入 N (N n) 个盒子中去，

求每个盒子至多有一只球的概率(设盒子的容量不限)。

解： 将 n 只球放入 N 个盒子中去，共有

$$N \times N \times \cdots \times N = N^n$$ 种放法，

而每个盒子中至多放一只球，共有

$$N\times(N-1)\times\cdots\times[N-(n-1)] = P_N^n$$ 种放法，

故
$$p = \frac{N\times(N-1)\times\cdots\times[N-(n-1)]}{N^n} = \frac{P_N^n}{N^n}.$$

返回主目录

等可能概型

该数学模型可用于许多实际问题：

n(n ≤365) 个人在 365 天的生日，可看成是 n 个球放入 365 个盒子中。随机取 n(≤ 365) 人他们的生日各不相同的概率为

$$P(A)=\frac{365\times 364\times\cdots(365-n+1)}{365^n},$$

因而， n 个人中至少有两人生日相同的概率为

$$p=1-P(A)=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}$$

等可能概型

经计算可得下述结果：

n	20	23	30	40	50	64	100
p	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

如

“在一个有 64 人的班级里，至少有两人生日相同”的概率为 99.7%。

例 4 设有 N 件产品，其中有 D 件次品，今从中任取 n 件，问其中恰有 k（k ≤ D）件次品的概率是多少？

1 ）不放回抽样（超几何分布模型）

解：在 N 件产品中抽取 n 件，取法共有 C_N^n 种，

又在 D 件次品中取 k 件，所有可能的取法有 C_D^k 种，

在 N-D 件正品中取 n-k 件，所有可能的取法有 C_{N-D}^{n-k} 种，

返回主目录

等可能概型

由乘法原理知：在 N 件产品 中取 n 件，其中恰有 k 件次品的取法共有 $C_D^k C_{N-D}^{n-k}$ **种，**

于是所求的概率为：

$$p=\frac{C_D^k\,C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

此式即为超几何分布的概率公式。

返回主目录

等可能概型

超几何分布在产品检验中的应用：

一、在 N 已知时，作抽样检查，抽出 n 件产品中恰有 k 件次品，问如何根据这个检验结果推断 产品的次品数？这就是“假设检验问题”。

$$p=\frac{C_D^k\,C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

二、在 D 已知时，作抽样检查，抽出 n 件产品中恰有 k 件次品，问如何根据这个检验结果推断产品的总数 N ？

这就是统计中的“最大似然估计问题”。

返回主目录

等可能概型

2 ） 有放回抽样（二项分布模型）

从 N 件产品中有放回地抽取 n 件产品进行排列，可能的排列数为 N^n 个，将每一排列看作基本事件，总数为 N^n。

而在 N 件产品中取 n 件，其中恰有 k 件次品的取法共有

$$C_n^k D^k (N-D)^{n-k}$$

于是所求的概率为：

$$P = \frac{C_n^k D^k (N-D)^{n-k}}{N^n} = C_n^k (\frac{D}{N})^k (1-\frac{D}{N})^{n-k}$$

此式即为二项分布的概率公式。

返回主目录

例 5 袋中有 a 只白球，b 只黑球．K 人依次在袋中取一只球，试求第 $k(1,2,\cdots,k)$ 人取出的球是黑球的概率．

解： 设：A=“第 i 人取出的球是黑球”

1）有放回抽样

$$P(A)=\frac{b(a+b)^{k-1}}{(a+b)^{k}}=\frac{b}{a+b}.$$

2）不放回抽样

样本点总数 $=P_{a+b}^{k}$

第 i 人取出黑球，有取法 b 种，

其余 $k-1$ 人取球，有取法 P_{a+b-1}^{k-1} 种，

因此事件 A 所含样本点数为 $b \cdot P_{a+b-1}^{k-1}$.

所以，
$$P(A)=\frac{b \cdot P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}}=\frac{b}{a+b} .$$

注意：结果与 i 无关 .

此结果适用于：抓阄，买彩票等问题

返回主目录

例 6 在 1~2000 的整数中随机的取一个数，问取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率是多少？

解：设 A 为事件"取到的整数能被 6 整除"， B 为"取到的整数能被 8 整除"，则所求的概率为：

$$P(\overline{A}\ \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B),$$

其中 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

由于 $\left[\dfrac{2000}{6}\right] = 333,$ 所以能被 6 整除的整数为：6，12，18…1998 共 333 个，

返回主目录

$P(A)=\frac{333}{2000}$，同理得： $P(B)=\frac{250}{2000}$, $P(AB)=\frac{83}{2000}$.

其中 B ={8, 16, … 2000 }, AB = {24, 48 … 199 2 } ，

AB 为“既被 6 整除又被 8 整除”或“能被 24 整除”

于是所求的概率为：

$$p=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-\frac{333+250-83}{2000}=1-\frac{500}{2000}=\frac{3}{4}.$$

例 7 将 15 名新生随机地平均分配到 3 个班中去，这 15 名新生中有 3 名是优秀生。问：

(1) 每个班各分配到一名优秀生的概率是多少？

(2) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率是多少？

解：15 名新生平均分配到 3 个班级中去的分法总数为： $C_{15}^{5}\times C_{10}^{5}\times C_{5}^{5}$

$$=\frac{15\times14\times13\times12\times11}{5!}\times\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5!}\times\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5!}=\frac{15!}{5!\times5!\times5!},$$

返回主目录

思考：从 20 人中取 15 人随机地平均分配到 3 个班中去，共有多少种分法？

答：

$$C_{20}^{15} \times \frac{15!}{5!\times 5!\times 5!},$$

返回主目录

等可能概型

(1) 将 3 名优秀生分配到 3 个班级，使每个班级都有一名优秀生的分法共有 3! 种。其余 12 名新生平均分配到 3 个班级中的分法共有

$$12!/(4!\,4!\,4!)\text{种},$$

每个班各分配到一名优秀生的分法总数为：

$$3!\times[12!/(4!\,4!\,4!)]$$

于是所求的概率为：

$$p_1=\frac{3!\times 12!}{4!\,4!\,4!}\bigg/\frac{15!}{5!\,5!\,5!}=\frac{3!\times 12!\times 4!\,4!\,4!}{15!\times 5!\,5!\,5!}=\frac{25}{91}=0.2747\,.$$

返回主目录

等可能概型

(2) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率为：

$$p_2 = 3 \times \frac{12!}{2!5!5!} \Big/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{3 \times 12! \times 5!}{2! \times 15!} = \frac{6}{91} = 0.0659 .$$

三名优秀生分配在同一班级内

其余 12 名新生，一个班级分 2 名，另外两班各分 5 名

例 8 某接待站在某一周曾接待过 12 次来访，已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的。问是否可以推断接待时间是有规定的？

解：假设接待站的接待时间没有规定，各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，那么，12 次接待来访者都在周二、周四的概率为：

$$P = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003$$

即千万分之三。

返回主目录

人们在长期的实践中总结得到“概率很小的事件在一次实验中几乎是不发生的”（称之为实际推断原理）。现在概率很小的事件在一次实验中竟然发生了，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的。

等可能概型

例 9 从 1 ~ 9 这 9 个数中有放回地取出 n 个数，试求取出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率 .

解：A ={ 取出的 n 个数的乘积能被 10 整除 }；

B={ 取出的 n 个数至少有一个偶数 }；

C ={ 取出的 n 个数至少有一个 5 } .

则 A=B∩C

$$P(A)=P(BC)=1-P\left(\overline{BC}\right)=1-P\left(\overline{B}\cup\overline{C}\right)$$

$$=1-\left[P\left(\overline{B}\right)+P\left(\overline{C}\right)-P\left(\overline{B}\,\overline{C}\right)\right]$$

$$=1-\frac{5^n}{9^n}-\frac{8^n}{9^n}+\frac{4^n}{9^n}$$

返回主目录

例 10 一部 10 卷文集，将其按任意顺序排放在书架上试求其恰好按先后顺序排放的概率．

解：设 A={ 10 卷文集按先后顺序排放 }

将10卷文集按任意顺序排放 ,共有 10！种不同的排法（样本点总数）．

$$1,\ 2,\ \cdots,\ 10,$$

或

$$10,\ 9,\ \cdots,\ 1,$$

所以

$$P(A)=\frac{2}{10!}$$

例 11 同时掷 5 颗骰子，试求下列事件的概率：A={ 5 颗骰子不同点 }；

B={ 5 颗骰子恰有 2 颗同点 }；

C={ 5 颗骰子中有 2 颗同点，另外 3 颗同是另一个点数 }．

解：同时掷5颗骰子，所有可能结果共有6^5个

所以 $$P(A)=\frac{P_6^5}{6^5}$$

事件B所含样本点数为$C_5^2\cdot 6\cdot P_5^3$，

所以 $$P(B)=\frac{C_5^2\cdot 6\cdot P_5^3}{6^5}=0.4630$$

返回主目录

例 11（续）

等可能概型

事件 C 所含样本点数为 $C_5^2 \cdot P_6^2$，

所以，
$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot P_6^2}{6^5}$$

$$= 0.03858$$

作业：p_{25} 7, 9, 11, 12, 18.

返回主目录

二 几何概型

几何概型考虑的是有无穷多个等可能结果的随机试验。

首先看下面的例子。

例 1 (会面问题) 甲、乙二人约定在 12 点到 5

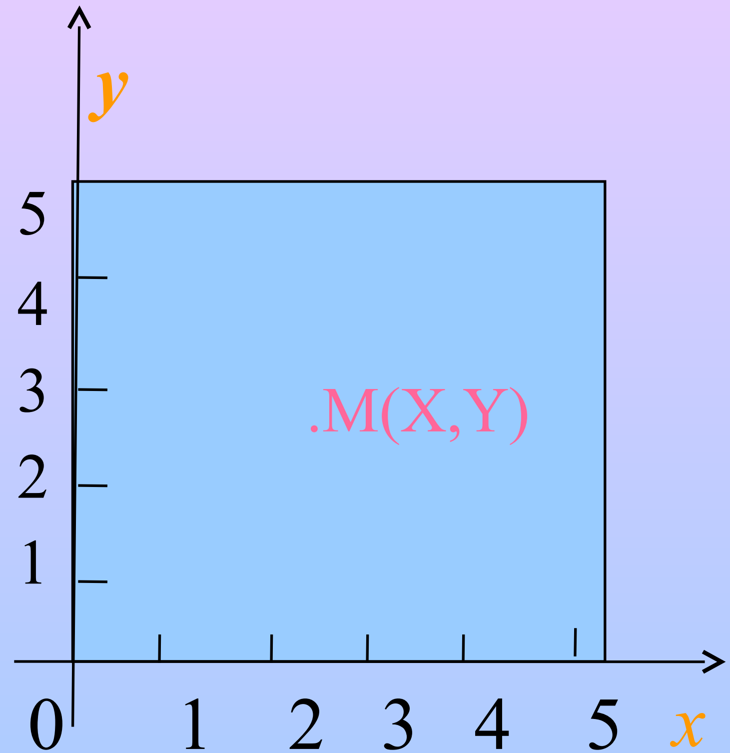
点之间在某地会面，先到者等一个小时后即离去

设二人在这段时间内的各时刻到达是等可能的，

且二人互不影响。求二人能会面的概率。

解： 以 X , Y 分别表示甲乙二人到达的时刻，于是 $0 \le X \le 5,\ 0 \le Y \le 5.$

即 点 M 落在图中的阴影部分。所有的点构成一个正方形，即有无穷多个结果。由于每人在任一时刻到达都是等可能的，所以落在正方形内各点是等可能的。



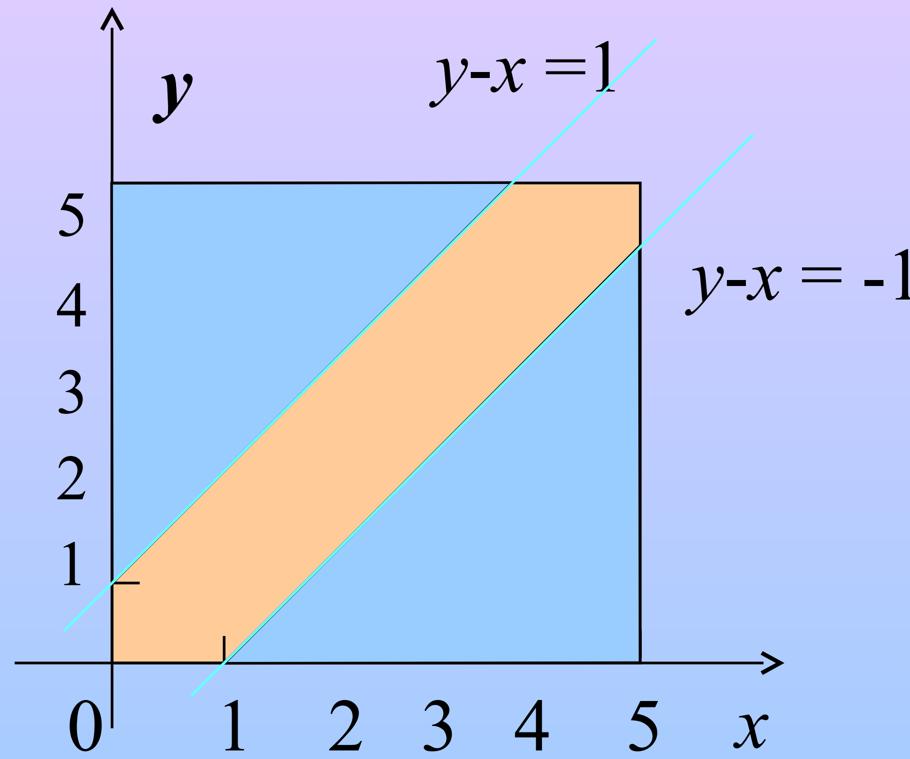
返回主目录

几何概型

二人会面的条件是：$|X-Y|\le 1,$

$$P=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}$$

$$=\frac{25-2\times\frac{1}{2}\times 4^2}{25}=\frac{9}{25}.$$



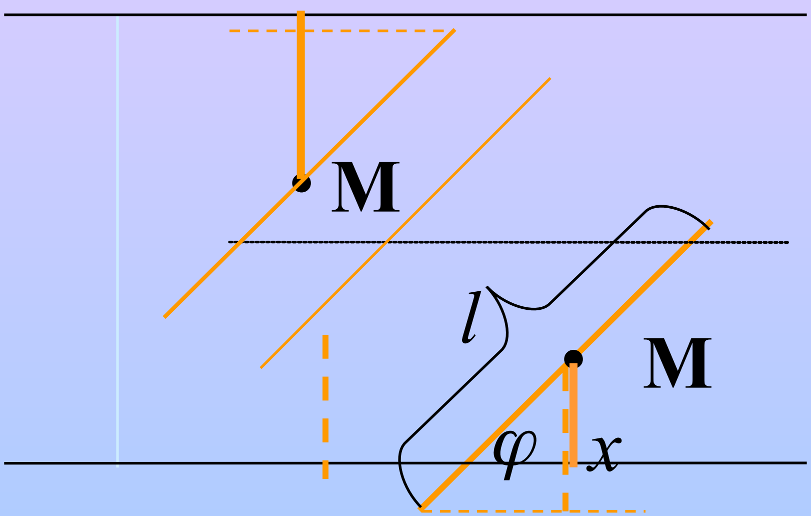
返回主目录

一般，设某个区域 D (线段，平面区域，空间区域)，具有测 度 m_D(长度，面积，体积)。如果随机实验 E 相当于向区域内任意地取点，且取到每一点都是等可能的，则称此类试验为 几何概型。

如果试验 E 是向区域内任意取点，事件 A 对应于点落在 D 内的某区域 A ，则

$$P(A)=\frac{m_A}{m_D}.$$

例 2（蒲丰投针问题）平面上有一族平行线。其中任何相邻的两线距离都是 a (a>0) 。向平面任意投一长为 l (l<a) 的针，试求针与一条平行线相交的概率。



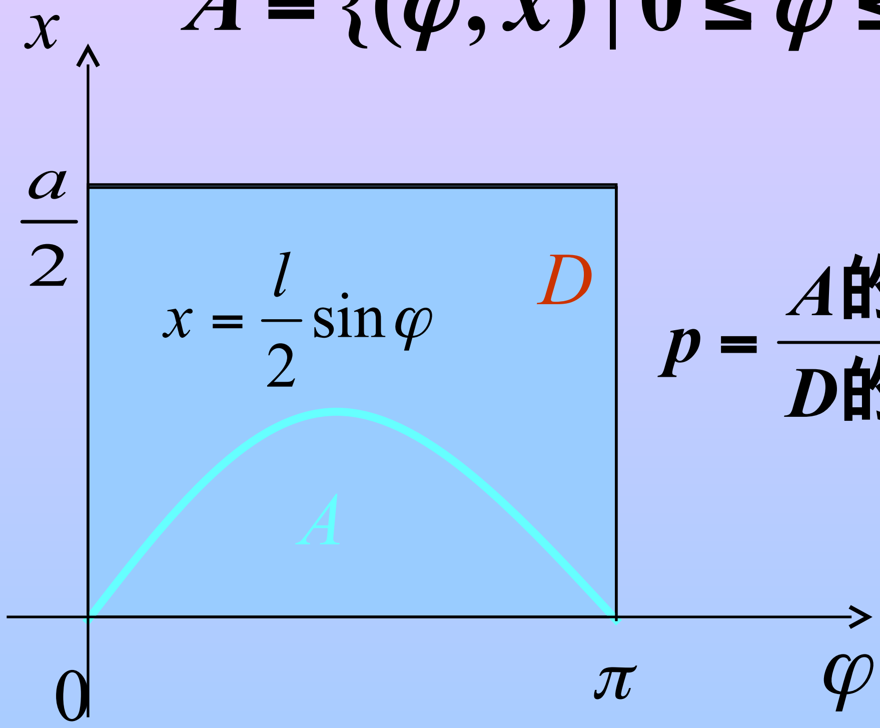
解：设 x 是针的中点 M 到最近的平行线的距离，φ 是针与此平行线的交角，投针问题就相当于向平面区域 D 取点的几何概型。

$$D=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{a}{2}\}$$

几何概型

$$D=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{a}{2}\}$$

$$A=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{l}{2}\sin\varphi\}$$



$$p=\frac{A\text{的面积}}{D\text{的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{a}{2}\pi}=\frac{2l}{\pi a}.$$

返回主目录

几何概型

思考题

1) 某人午觉醒来，发觉表停了，他打开收音机，想听电 台报时， 求他等待的时间不超过 10 分钟的概率。 (1/6)

2) 在线段 AD 上任意取两个点 B 、 C ，在 B 、 C 处折断此线段 而得三折线，求此三折线能构成三角形的概率。 (1/4)

3) 甲、乙两船停靠同一码头，各自独立地到达，且每艘 船在一昼夜间到达是等可能的。若甲船需停泊 1 小时，乙 船需停泊 2 小时，而该码头只能停泊一艘船。试求其中一 艘船要等待码头空出的概率。 (0.121)

返回主目录

4) 在区间 (0, 1) 中随机地取两个数，求下列事件的概率：

(1) 两个数中较小 (大) 的小于 1/2 ； (3/4, 1/4)

(2) 两数之和小于 3/2 ； (7/8)

(3) 两数之积小于 1/4 。 (0.5966)

作业：p_{25} 7 , 9 , 11 , 12 ,18.