第六章 集合的基数

集合的基数知识逻辑概图

6.2 基数的比较

方法 基数序列

6.1 基数的基本概念

等势 基数 → 在第三篇代数结构中有应用

6.1 基本概念

定义 6.1 设 A 和 B 是任意集合，若存在从 A 到 B 的双射，则称 A 与 B 是**等势的**，记为 $A \approx B$。若 A 与 B 不等势，则记为 $A \not\approx B$。

- 通俗地讲，集合的势是度量集合所含元素多少的量，集合的势越大，所含元素越多。

6.1 基本概念

可以证明，等势具有下列性质：自反性、对称性和传递性。

定理 6.1 **等势**是任何集合族上的等价关系。

证：对任意的集合 A ，B ，C ，

（1）$A \approx A$

$I_A: A \to A$ 是 A 上的双射函数，因此 $A \approx A$ 。等势关系满足自反性。

（2）若 $A \approx B$ ，则 $B \approx A$ 。

若 $A \approx B$ ，则存在双射 $f: A \to B$ ，则有 $f^{-1}: B \to A$ 是双射，因而 $B \approx A$ 。等势关系满足对称性。

（3）若 $A \approx B$ ，$B \approx C$ ，则 $A \approx C$ 。

若 $A \approx B$ ，$B \approx C$ ，则存在双射 $f: A \to B$ ，$g: B \to C$ ，则有 $f \circ g: A \to C$ 是双射，故 $A \approx C$ 。等势关系满足传递性。

综上可见，等势关系是个等价关系。

6.1 基本概念

一些等势集合的例子：

例 6.1　下列集合是等势的。

（1）$N \approx Z \approx Q$

（2）$R \approx (0, 1) \approx (a, b)$ ，$a, b \in R$ ，$a<b$

证明见教材。

例 6.2　设 A 为任意集合，则 $P(A) \approx \{0, 1\}^A$ 。

证明见教材。

6.1 基本概念

定义 6.2　设 A 为任意集合，如果存在自然数 n ，使得 A ≈ {0, 1, 2,…, n−l}，则称 A 为**有限集**，否则称 A 为**无限集**。

例 6.3　根据上述定义，有以下结论。

（ 1 ）$A=\{a, b, c\}$ 为一有限集。

（ 2 ）自然数集 N 为无限集。

证明见教材。

6.1 基本概念

基数的不完全归纳的描述性定义：

定义 6.3

（1）对于有限集合 A，存在自然数 n，使得 $A \approx \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$，则称 n 为 A 的基数（cardinal number），记作 $|A|$（或 card$A$）。即

$$|A| = n \quad (\text{或 } \mathrm{card}A = n)$$

（2）设 A 为任意集合，如果有 $A \approx N$，N 为自然数集，则称集合 A 的基数为 $\aleph_0$（读作“阿列夫零”）。即

$$|A| = \aleph_0 \quad (\text{或 } \mathrm{card}A = \aleph_0)$$

显然，自然数集、整数集、偶数集、有理数集等集合的基数均为 $\aleph_0$。

6.1 基本概念

基数的不完全归纳的描述性定义：

定义 6.3（续）

（3）设 A 为任意集合，如果有 $A \approx R$，R 为实数集，则称集合 A 的基数为ℵ（读作“阿列夫”）。即

$$|A| = \aleph \text{（或 } \mathrm{card}A = \aleph \text{）}$$

具有基数ℵ的集合常称为连续统（continuum）。

（4）存在着集合其基数大于ℵ（由 6.2 中定理 6.5（康托定理））。

由（1）可知，有限集合的基数就是其所含元素的个数。两个有限集合 A 和 B 等势当且仅当 A 和 B 的元素个数相同。

例 6.4 求证 $|[0, 1]| = |(0, 1)| = \aleph$。

证明见教材。

6.1 基本概念

例 6.5 求下列集合的基数。

（1）$T = \{x \mid x$ 是单词“BASEBALL”中的字母$\}$

（2）$B = \{x \mid x \in R \wedge x^2 = 9 \wedge 2x=8\}$

（3）$C = P(A)$，$A = \{1, 3, 5, 7\}$

解：

（1）$T = \{\mathrm{A, B, E, L, S}\}$，得 $|T| = 5$。

（2）$B = \varnothing$，得 $|B| = 0$。

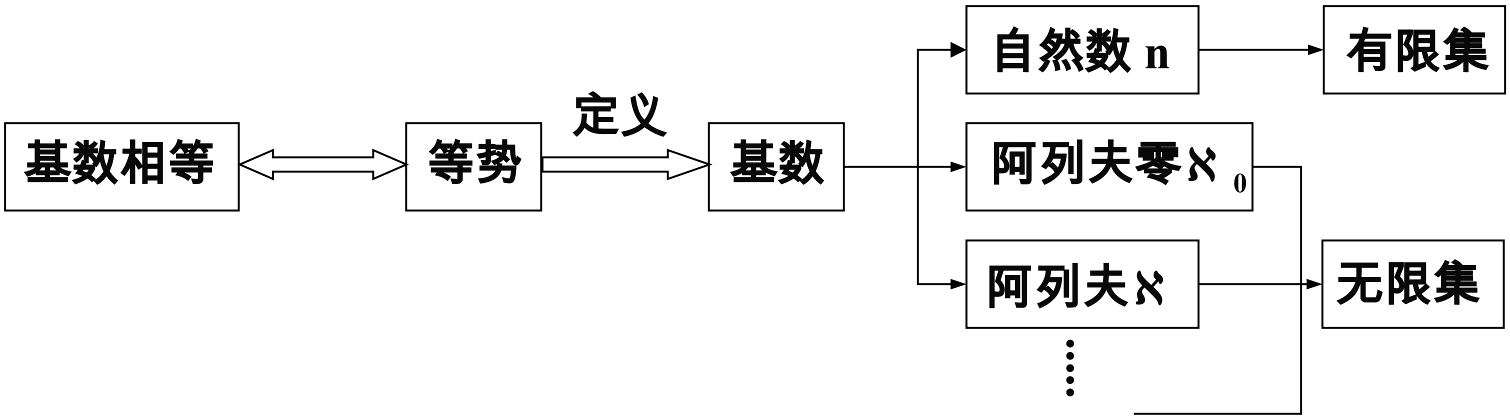
（3）由 $|A| = 4$，得 $|P(A)| = 2^4 = 16$。

小结

（1）等势、集合基数、有限集、无限集等基本概念。

（2）典型的集合等势：$N \approx Z \approx Q \approx N \times N$，$R \approx (0, 1) \approx [0, 1] \approx (a, b) \approx (a, b] \approx [a, b)$，$a, b \in R$，$a<b$。

（3）典型集合的基数：有限集的基数是某自然数 n，自然数集的基数是 $\aleph_0$，实数集的基数是$\aleph$。



6.2 基数的比较

定义 6.4 设 A 、 B 为任意集合，

（ 1 ）若有一个从 A 到 B 的双射函数，则称 A ， B 基数相等（即定义 6 .1 的 A 与 B 等势），记为

$$|A|=|B|$$

（ 2 ）若有一个从 A 到 B 的单射函数，则称 A 的基数小于等于 B 的基数，记为

$$|A|\leq|B|$$

（ 3 ）如果 | A |≤| B | 且 | A |≠| B | ，则称 A 的基数小于 B 的基数，记为

$$|A|<|B|$$

6.2 基数的比较

根据定义 6.4 ，可得出以下结论（证明略）：

（ 1 ）对任何自然数 m ， n ，若 $m \leq n$ ，则

$$|\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}| \leq |\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}|$$

（ 2 ）对任何自然数 n ， $n < \aleph_0$ ，即

$$|\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}| < |\{0, 1, 2, \ldots\}|$$

（ 3 ）$\aleph_0 < \aleph$ ，即

$$|\{0, 1, 2, \ldots\}| < |R|$$

6.2 基数的比较

定理 6.2　基数的≤关系为全序关系。即满足：

（1）对任意的集合 A，有 $|A| \le |A|$。

（2）对任意的集合 A，B，如果 $|A| \le |B|$，$|B| \le |A|$，则 $|A| = |B|$。

（3）对任意的集合 A，B，C，若 $|A| \le |B|$，$|B| \le |C|$，则 $|A| \le |C|$。

（4）对任意的集合 A，B，以下三个式子：

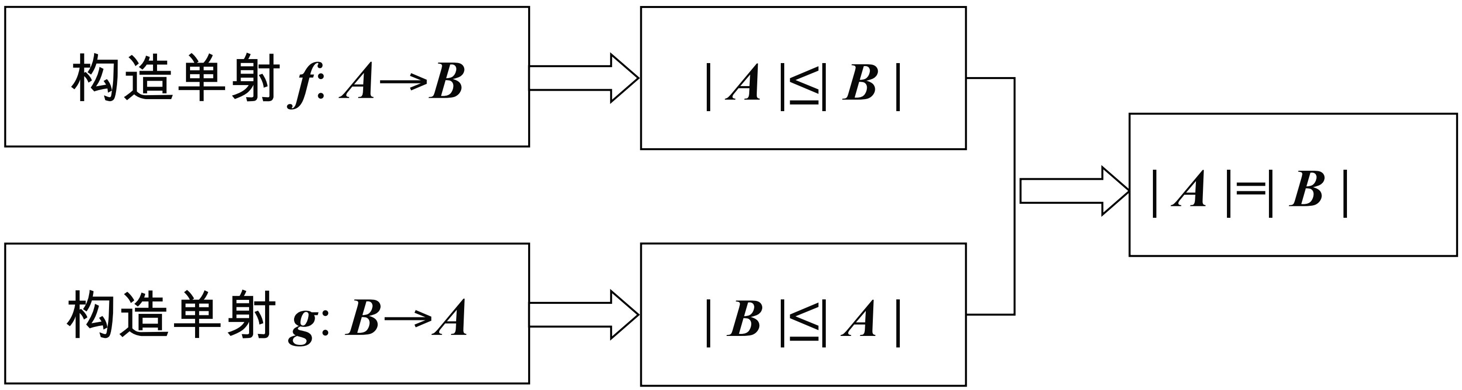
$$|A| < |B|,\quad |A| = |B|,\quad |B| < |A|$$

必成立其一且仅成立其一。这个性质称为基数的三歧性。

基数满足（1）~（3），说明基数的≤关系为偏序关系，满足（4）则≤为全序关系。该定理可根据定义 6.4 及函数的性质，这里证明略。

6.2 基数的比较

说明：定理 6.2 为证明两个集合基数相等提供了一种有效的方法。如果我们能构造一个单射 $f: A\to B$ ，即说明 $|A|\le|B|$ 。同时，若能构造一个单射 $g: B\to A$ ，即说明 $|B|\le|A|$ 。因此根据定理 6.2 就得到 $|A|=|B|$ 。该方法的思维形式注记图如下：



例 6.6　利用定理 6.2 证明例 6.4 中的 $|[0, 1]| = |(0, 1)|$ 。

定理 6.3　设 A 是有限集，则 $|A| < \aleph_0 < \aleph$ 。

6.2 基数的比较

定义 6.5　设 A 为集合，若 $\mathrm{card}A \leq \aleph_0$，则称 A 为可数集或可列集。

显然，可数集包括有限集和可数无限集，而其它无限集称为不可数集。

关于可数集有下面的命题：

（1）可数集的任何子集都是可数集。

（2）两个可数集的并是可数集。

（3）两个可数集的笛卡儿积是可数集。

（4）可数个可数集的并仍是可数集。

6.2 基数的比较

引理 6.1 任一无限集，必含有无限可数子集。

证：设 A 为任一无限集，显然 $A \neq \varnothing$，在 A 中任取一个元素记为 a_0， $A_1=A-\{a_0\}$ 仍为无限集，再在 A_1 中任取一个元素记为 a_1， $A_2=A_1-\{a_1\}$ 依然为无限集，继续下去将得到一个无限可数子集 $B=\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$。

定理 6.4 $\aleph_0$ 是最小的无限集基数。即对任一无限集 A，有 $\aleph_0 \leq |A|$。

证：因为 A 为无限集，那么根据引理 6.1， A 必有一可数无限子集 B，构造函数

$$f: B \to A,\quad f(x)=x$$

f 为单射，因此 $|B| \leq |A|$，即 $\aleph_0 \leq |A|$。$\aleph_0$ 是最小的无限集基数。

6.2 基数的比较

下面定理表明没有最大基数，或者没有最大集合。

定理 6.5（康托定理） 设 A 为任意集合，则 $|A| < |P(A)|$。

证：（1）首先证明 $|A| \le |P(A)|$，为此构造函数

$$f: A \to P(A)\ ,\ f(x)=\{x\}$$

f 是单射函数，故 $|A| \le |P(A)|$。

（2）其次证明 $|A| \ne |P(A)|$，我们将证明任何函数 $g: A \to P(A)$ 都不是满射的。

对任意的函数 $g: A \to P(A)$，构造如下集合 B：

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

则 $B \subseteq A$ 即 $B \in P(A)$。则对任意的 $x \in A$ 有 $x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$。

所以对任意的 $x \in A$，都有 $g(x) \ne B$，则 $B \notin \mathrm{ran}\, g$. $g: A \to P(A)$ 不是满射的，所以不是双射的。因此有 $|A| \ne |P(A)|$。

6.2 基数的比较

说明：将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到：

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中，

（1）$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ 恰好是全体自然数，是有穷集合的基数，也叫做有穷基数。

（2）$\aleph_0, \aleph, \ldots$ 是无穷集合的基数，也叫做无穷基数。

（3）$\aleph_0$ 是最小的无穷基数。

（4）$\aleph$ 后面还有更大的基数，如 $|P(R)|$ 等，不存在最大的基数。

小结

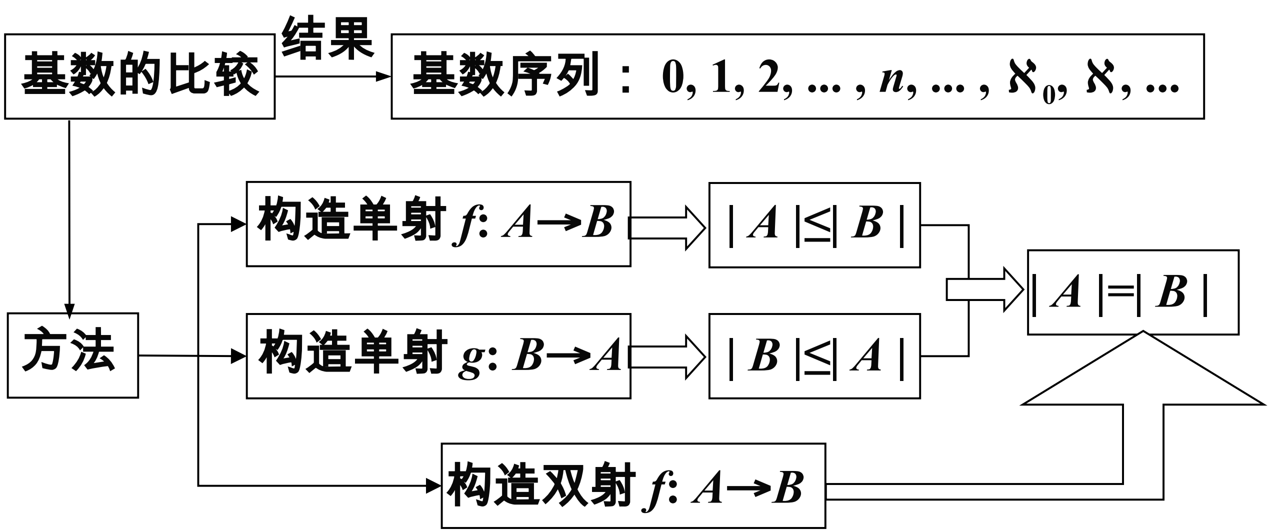
（1）基数的比较：已知的基数按从小到大的顺序排列是 $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$ 。$\aleph_0$是最小的无穷基数，不存在最大的基数。

（2）证明集合基数相等有两种方法：

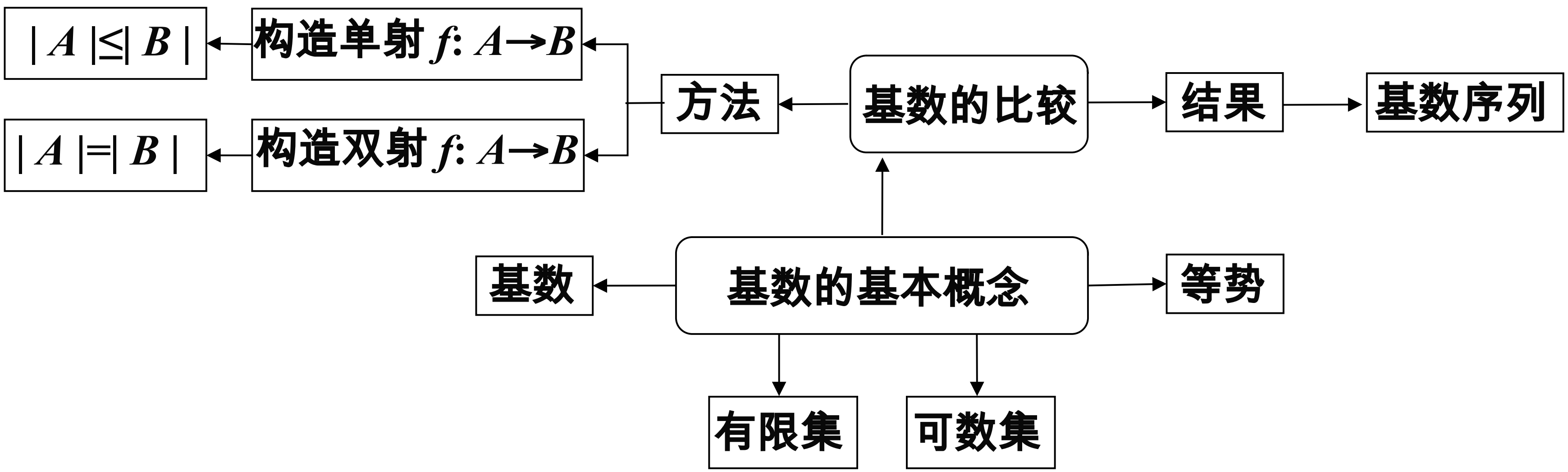
① 构造一个双射函数

② 构造两个单射函数。

（3）可数集（或可列集）的定义。

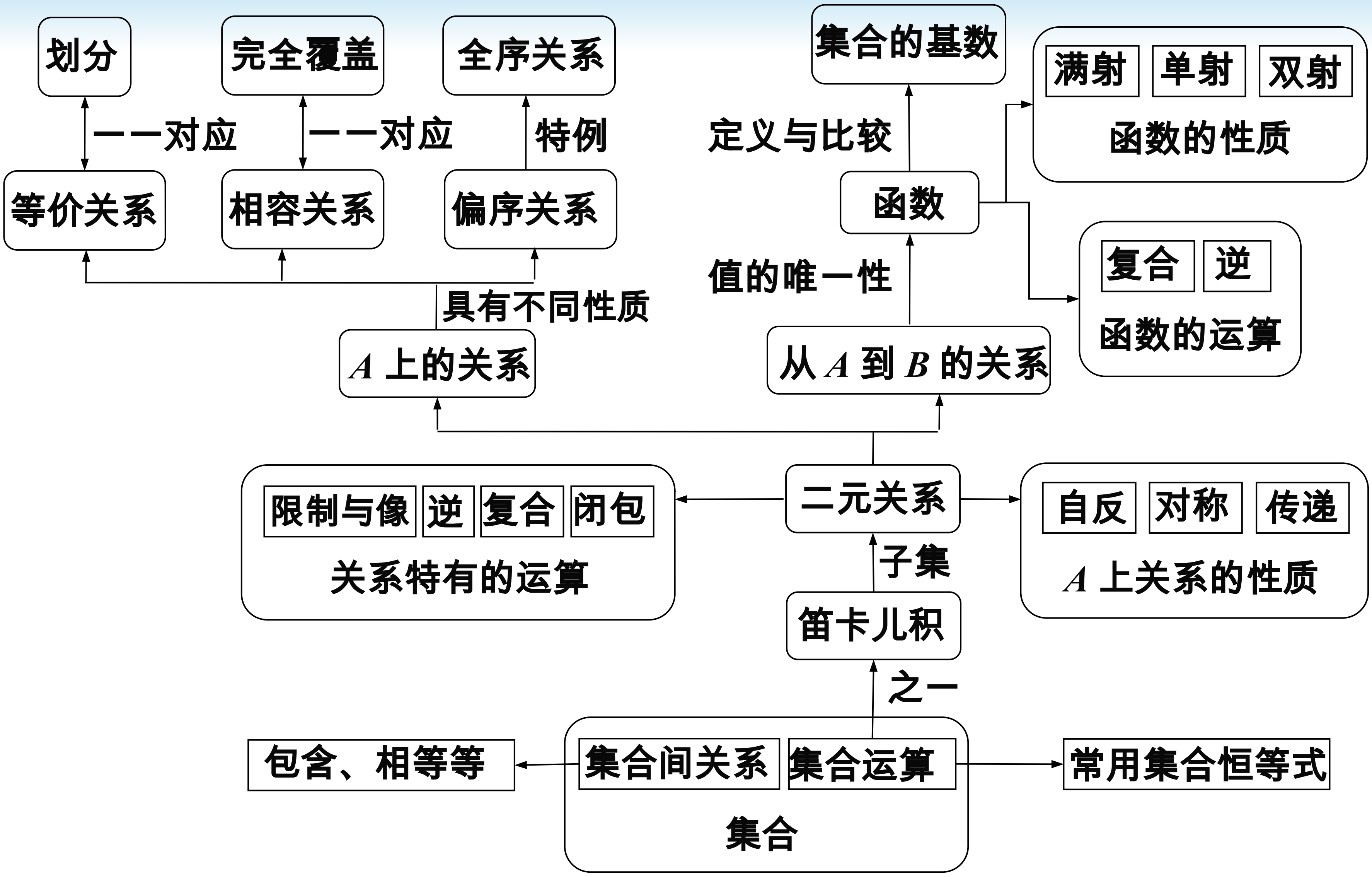


本章小结



$|A|\le|B|$
构造单射 $f: A\to B$
$|A|=|B|$
构造双射 $f: A\to B$
方法
基数的比较
结果
基数序列
基数
基数的基本概念
等势
有限集
可数集

本篇知识逻辑结构图



划分
完全覆盖
全序关系
一一对应
一一对应
特例
等价关系
相容关系
偏序关系
具有不同性质
A 上的关系
集合的基数
满射
单射
双射
函数的性质
定义与比较
函数
复合
逆
函数的运算
值的唯一性
从 A 到 B 的关系
限制与像
逆
复合
闭包
关系特有的运算
二元关系
自反
对称
传递
A 上关系的性质
子集
笛卡儿积
之一
包含、相等等
集合间关系
集合运算
常用集合恒等式
集合