第三章 非线性方程的解法

王志明

wangzhiming@ies.ustb.edu.cn

§3 非线性方程的解法

- 求f(x)=0的根；$ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0$
- 对多项式方程$P_n(x)=0$，在n>=5式没有一般形式的解。
- 三四阶方程求解公式
- 三个基本问题：
  - 根的存在性；
  - 根的隔离(分成小区间)；
  - 根的精确化。

本 章 内 容

- 3.1 二分法
- 3.2 简单迭代法
- 3.3 牛顿迭代法
- 3.4 牛顿迭代法的变形
- 3.5 Matlab应用实例

§ 3.1 二分法

若f(x)在[a, b]上**连续**，

且f(a)f(b)<0

(1)取$x_0 = \dfrac{a+b}{2}$，计算$f(x_0)$

若$f(a)f(x_0) < 0$，则根位于$[a, x_0]$

取$a_1 = a, b_1 = x_0$

若$f(a)f(x_0) > 0$，则根位于$[x_0, b]$

取$a_1 = x_0, b_1 = b$

(2)取$x_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$，计算$f(x_1)$

……

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \cdots$$

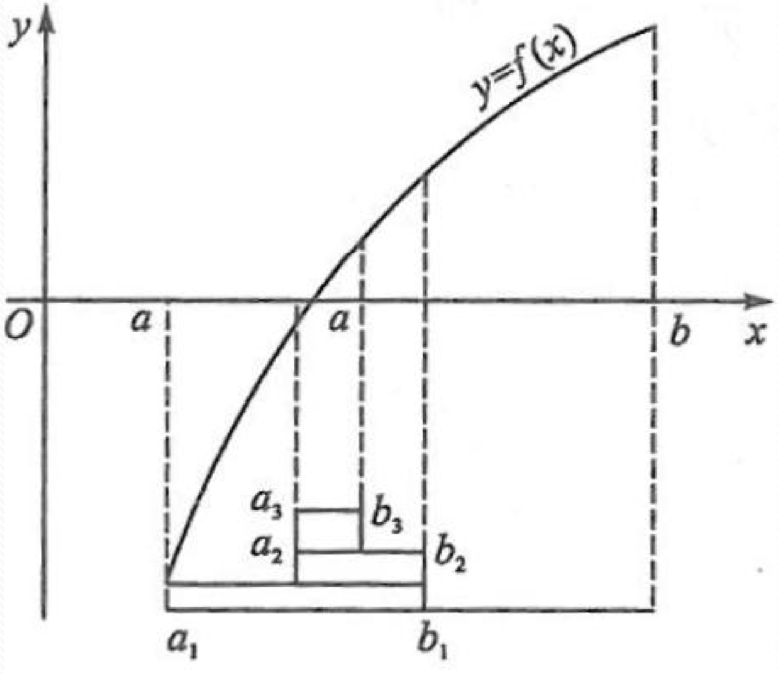


图 3-1 二分法示意图

$$[a_n,b_n]\text{长度为}: b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\ldots=\frac{b-a}{2^n}$$

$$\text{以}x_n=\frac{b_n+a_n}{2}\text{以近似解，误差满足：}$$

$$|\alpha-x_n|\le\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^{\boxed{n+1}}}$$

若设定误差不大于 ε

$$\text{则}|\alpha-x_n|\le\frac{b-a}{2^{n+1}}<\varepsilon \qquad \boxed{2^{n+1}>\frac{b-a}{\varepsilon}}$$

则可估计所需迭代次数：

$$\boxed{n+1\ge[(\ln(b-a)-\ln\varepsilon)/\ln 2]}$$

$$n\ge\log_2(b-a)-\log_2\varepsilon-1$$

优点：计算简单，收敛性可保证，只要求函数连续；
缺点：收敛速度慢，不能求重根。

例3.1 证明方程 $e^x + 10x - 2 = 0$ 存在唯一实根 $x^* \in (0,1)$，用二分法求根，要求误差不超过 0.5*10⁻²。

严格单调： $f'(x) = e^x + 10 > 0$

解存在： $f(0) = -1 < 0$， $f(1) = e + 8 > 0$

$$k+1 \geq [(\ln(1-0) - \ln(0.5\cdot 10^{-2}))/\ln 2]$$

$$k+1 \geq \ln(200)/\ln 2 \approx 7.64$$

$$\Rightarrow k = 7$$

表 3-1 计算过程

k	a_k($f(a_k)$ 的符号)	x_k($f(x_k)$ 的符号)	b_k($f(b_k)$ 的符号)
0	0(−)	0.5(+)	1(+)
1	0(−)	0.25(+)	0.5(+)
2	0(−)	0.125(+)	0.25(+)
3	0(−)	0.0625(−)	0.125(+)
4	0.0625(−)	0.09375(+)	0.125(+)
5	0.0625(−)	0.078125(−)	0.09375(+)
6	0.078125(−)	0.0859375(−)	0.09375(+)
7	0.0859375(−)	0.08984375(+)	0.09375(+)

例　设 $f(x)=\sin x-(x/2)^2$

已知 $f(2)<0, f(1.5)>0$

求 $f(x)=0$ 在区间[1.5, 2]内根的近似值.

计算结果列表如下：

n	函数值符号	有根区间
	f(1.5)>0	
0	f(2)<0	(1.5, 2)
1	f(1.75)>0	(1.75, 2)
2	f(1.875)>0	(1.875, 2)
3	f(1.9375)<0	(1.875, 1.9375)
4	f(1.90625)>0	(1.90625, 1.9375)
5	f(1.921875)>0	(1.921875, 1.9375)

取 $\tilde{\alpha}=x_6$

$$=\frac{1}{2}(1.921875+1.9375)$$

$$=1.9296875$$

误差限 $\frac{1}{2^6}(b-a)=\frac{1}{128}=0.0078125$

§3.2 简单迭代法

- 将方程f(x)=0化为另一个与它同解的方程：

$$x = \varphi(x)$$

- 取初值x_0代入右边得到：

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

- 如果迭代收敛，则结果为所求根。

例3.2 用简单的迭代法求解：

$$f(x) = 2x^3 - x - 1 = 0$$

$$f(x)=2x^3-x-1=0$$

方法一：

$$x=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}=\varphi(x)$$

取初值x_0=0得到迭代序列：

0.79，0.964，0.994，…

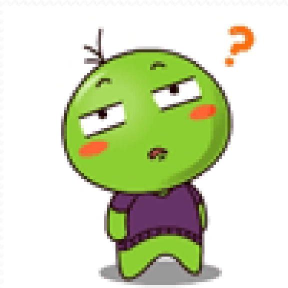
方法二：

$$x=2x^3-1=\varphi(x)$$

取初值x_0=0得到迭代序列：

−1，−3，−55，…

什么条件 下才收敛呢？



定理 3.1 设迭代函数满足：

(1)当$x \in [a,b]$时， $a \le \varphi(x) \le b$

(2)存在$0 < \mathrm{L} < 1$，对任意 $x \in [a,b]$有$|\varphi'(x)| \le L$

则存在唯一根，对任意 初值$x_0 \in [a,b]$收敛于 α，

且

$$\boxed{\begin{aligned} |x_k - \alpha| &\le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \\ |x_k - \alpha| &\le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \end{aligned}}$$

■根据微分中值定理：

$$x_{k+1} - \alpha = \varphi(x_k) - \varphi(\alpha) = \varphi'(\xi)(x_k - \alpha)$$

$$x_{k+1} - x_k = \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) = \varphi'(\bar{\xi})(x_k - x_{k-1})$$

由 $\varphi'(x) \le L$：

$$\left|x_{k+1} - \alpha\right| = \left|\varphi'(\xi)\right| \cdot \left|x_k - \alpha\right| \le L\left|x_k - \alpha\right|$$

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| = \left|\varphi'(\bar{\xi})\right| \cdot \left|x_k - x_{k-1}\right| \le L\left|x_k - x_{k-1}\right|$$

$$\left|x_k - \alpha\right| \le \left|x_k - x_{k+1}\right| + \left|x_{k+1} - \alpha\right|$$

$$= \left|x_{k+1} - x_k\right| + L\left|x_k - \alpha\right| \le L\left|x_k - x_{k-1}\right| + L\left|x_k - \alpha\right|$$

$$(1 - L)\,|\,x_k - \alpha\,| \le L\,|\,x_k - x_{k-1}\,|$$

$$\boxed{|\,x_k - \alpha\,| \le \frac{L}{1 - L}\,|\,x_k - x_{k-1}\,|}$$

$$\left|x_k - x_{k-1}\right| \le L\left|x_{k-1} - x_{k-2}\right| \le L^2\left|x_{k-2} - x_{k-3}\right| \le \ldots \le L^{k-1}\left|x_1 - x_0\right|$$

$$|x_k - \alpha| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$L < 1, \quad \lim_{k\to\infty}|x_k - \alpha| = 0, \quad \text{即} \lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

定理3.2 如果函数 $\varphi(x)$在根 α的邻域连续可微且 $|\varphi'(\alpha)|<1$，则只要 x_0充分接近 α，简单迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 产生的序列收敛于 α，且有误差估计：

$$|x_k-\alpha|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

例3.3 求方程$x=e^{-x}$在$x=0.5$附近的一个根，要求精度$\delta=10^{-3}$

$$\varphi'(x)=-e^{-x}$$

当$x\in[0.4,0.6]$时， $|\varphi'(x)|<0.671<1$，收敛

表 3-2 迭代结果

K	x_k	e^{-x_k}	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$
0	0.5	0.606 531	
1	0.606 531	0.545 239	0.061 292
2	0.545 239	0.579 703	0.034 464
3	0.579 703	0.560 065	0.019 638
4	0.560 065	0.571 172	0.011 107
5	0.571 172	0.564 863	0.006 309
6	0.564 863	0.568 439	0.003 576
7	0.568 439	0.566 409	0.002 030
8	0.566 409	0.567 560	0.001 151
9	0.567 560	0.566 907	0.000 653
10	0.566 907	0.567 277	0.000 370

判断是否收敛后，收敛速度如何度量？

设迭代格式为 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，当$k\to\infty$时，$x_k\to\alpha$，并记$e_k = x_k-\alpha$。

定义**3.1** 若存在实数 $p\geq 1$和$c>0$满足：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c$$

则称迭代法为 p阶收敛。

$p=1$为线性收敛， $p>1$为超线性收敛，

$p=2$为平方收敛。

根据泰勒展开式判断收敛速度：

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(\alpha)+\varphi'(\alpha)(x_k-\alpha)+\frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(x_k-\alpha)^2$$

$$+\ldots+\frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_k-\alpha)^{p-1}+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-\alpha)^p$$

若 $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\ldots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0$

但 $\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$

则 $x_{k+1}-\varphi(\alpha)=x_{k+1}-\alpha=\dfrac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-\alpha)^p$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\varphi^{(p)}(\xi)|}{p!}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\varphi^{(p)}(\alpha)|}{p!}$

p阶收敛!

定理3.3 若迭代函数 $\varphi(x)$在根 α附近满足：

(1) $\varphi(x)$ 存在 p阶导数且连续；

(2) $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\ldots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0$， $\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$

则$x_{k+1}=\varphi(x_k)$为p阶收敛。

例3.4 设$f(\alpha)\equiv 0, f'(\alpha)\neq 0$，证明由

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=\varphi(x)$$

建立的迭代法至少是平方收敛。

$$\varphi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$\because f(\alpha)=0 \quad \therefore \varphi'(\alpha)=0$ 平方收敛!