第三章 多维随机变量及其分布
习题课

返回主目录

第三章 小　结

1 要理解二维随机变量的分布函数的定义及性质。

2 要理解二维随机变量的边缘分布以及与联合分布的关系，了解条件分布。

3 掌握二维均匀分布和二维正态分布。

4 要理解随机变量的独立性。

5 要会求二维随机变量的和、商分布及多维随机变量的极值分布和函数的分布。

重点：随机变量的独立性、二维随机变量的和、商分布及多维随机变量的极值分布函数的分布。

返回主目录

一、 要理解二维随机变量的分布函数的定义及性质。

1 二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数

$$F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

2 分布函数具有以下的基本性质：

$$F(-\infty, y)=0; \quad F(x,-\infty)=0;$$

$$F(-\infty,-\infty)=0; \quad F(+\infty,+\infty)=1.$$

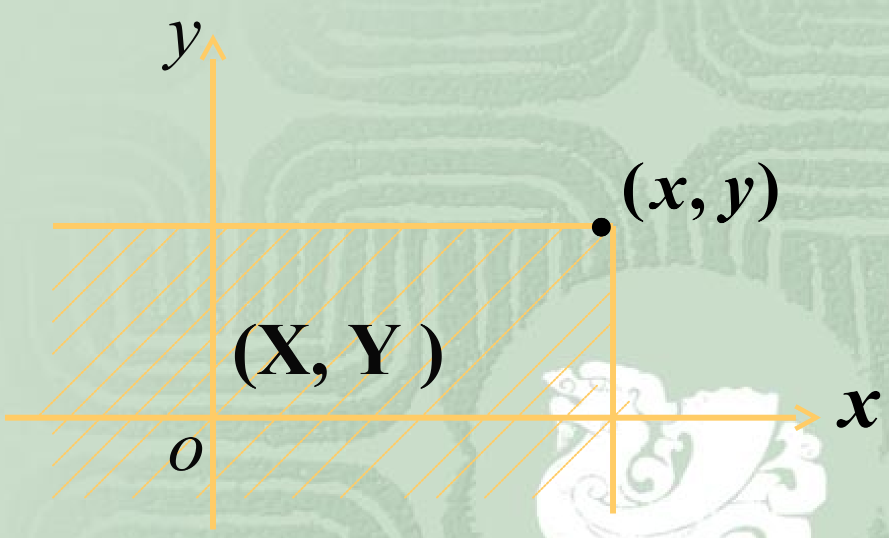
3 已知联合分布函数求边缘分布函数

$$F_X(x)=F(x,+\infty) \qquad F_Y(y)=F(+\infty, y)$$

返回主目录

二维分布函数的几何意义

二维分布函数的几何意义是：$F(x, y)$ 表示平面上的随机点 (X, Y) 落在以 (x, y) 为右上顶点的无穷矩形中的概率.



返回主目录

二、 二维离散型随机变量

1. 会求二维离散型随机变量(X, Y)的（联合）分布律.

$$p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}\quad(i, j=1, 2, \cdots)$$

性质 $$\sum_{i,j} p_{ij}=1$$

2、已知联合分布律，会求边缘分布律

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}$$

返回主目录

3、会判断离散型随机变量的独立性；

$$p_{ij}=P\{X=x_i\ ,\ Y=y_j\}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\quad,\forall\ i,j=1,2,\cdots$$

4、已知离散型随机变量 X、Y 的相互独立以及各

自的（边缘）分布，会求联合分布；

三、二维连续型随机变量

1、分布函数 F(x,y) 与密度函数 f(x,y) 的关系：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv,$$

2、概率密度 $f(x,y)$ 具有以下性质：

1^0 $f(x,y) \quad 0$;

2^0 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$;

3^0 若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

4^0 设 G 是平面上的一个区域，点（X,Y）落在 G 内的概率为：

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.$$

返回主目录

3、已知联合密度函数，会求边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx$$

4、会判断连续型随机变量的独立性

对于几乎所有的 x，y 有，

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)$$

特别地，上式对 $f(x,\ y)$的所有连续点$(x,\ y)$必须成立．

返回主目录

5、 掌握二维均匀分布和二维正态分布。

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x, y)\in D\\ 0 & (x, y)\notin D\end{cases}$$

$$(X, Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \ \rho)$$

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

返回主目录

结论（一）

二维正态分布的边缘分布是一维正态分布，

即若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ **则有，**

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

结论（二）

X，Y 独立 $\Leftrightarrow \rho_{XY} = \rho = 0 \Leftrightarrow$ **X，Y 不相关。**

6、要会求二维随机变量的和及最值分布。

返回主目录

例 1 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$,$Y \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$P\{XY=0\}=1,$ （1）求 X 与 Y 的联合分布

（2）X 与 Y 是否独立？

解：$(1)\ P\{XY=0\}=1$

$\Rightarrow \quad P\{XY\neq 0\}=0,$

$\Rightarrow \quad P\{X=-1,Y=1\}+$

$P\{X=1,Y=1\}=0,$

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

（2）X 与 Y 不独立

$$0=p_{-11}\neq p_{-1\cdot}p_{\cdot 1}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2},$$

返回主目录

例 2 设 X 与 Y 相互独立，下表给出 X ，Y 的联合分布律及各自的边缘分布律中的部分数值，求其余数值。

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

例 3 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(0, \sigma^2)$，$Y \sim N(0, \sigma^2)$，求 $P\{\frac{X}{Y} > 0\}$.

解：

$$P\{\frac{X}{Y} > 0\} = P\{X > 0, Y > 0\} + P\{X < 0, Y < 0\}$$

(随机变量 X 与 Y 相互独立)

$$= P\{X > 0\}P\{Y > 0\} + P\{X < 0\}P\{Y < 0\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

返回主目录

例 4 一口袋装有 4 只球，其中 1 只白球，1 只黑球，2 只红球。从中任取球两只，以 X 表示取出红球数，以 Y 表示取出白球数，$Z=|X-Y|$

求（1）X 和 Z 的联合分布律；（2）X 和 Z 的边缘分布律

解：X 的取值为 0，1，2；

Y 的取值为 0，1，Z 的取值为 0，1，2；

例 4

$$P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=0$$

$$P\{X=0,Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}=1/6$$

$$P\{X=0,Z=2\}=P(\phi)=0$$

$$P\{X=1,Z=0\}=P\{X=1,Y=1\}=2/6$$

$$P\{X=1,Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}=2/6$$

$$P\{X=1,Z=2\}=P(\phi)=0$$

$$P\{X=2,Z=0\}=P(\phi)=0$$

$$P\{X=2,Z=1\}=P(\phi)=0$$

$$P\{X=2,Z=2\}=P\{X=2,Y=0\}=1/6$$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

返回主目录

例 5 设(X, Y)在$G=\{(x,y)\mid 1\le x\le 3, 1\le y\le 3\}$上服从均匀分布。记 $Z=|X-Y|$

求Z的密度函数$f_Z(z)$

解：二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & (x, y)\in G\\ 0 & (x, y)\notin G\end{cases}$$

例 5（续） $F_Z(z)=P\{Z\le z\} \quad =P\{|X-Y|\le z\}$

若$z\le 0$，则 $F_Z(z)=0;$　　若$z \quad 2$，则 $F_Z(z)=1$

若$0<z<2$，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\le z}\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}[4-(2-z)^2]=1-\frac{1}{4}(2-z)^2$$

Z的密度函数$f_Z(z)$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-z) & 0<z<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

返回主目录

例 6

设(X, Y)在$G=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$上服从均匀分布。记

$$U=\begin{cases}0 & X\le Y\\ 1 & X>Y\end{cases},\qquad V=\begin{cases}0 & X\le 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases},$$

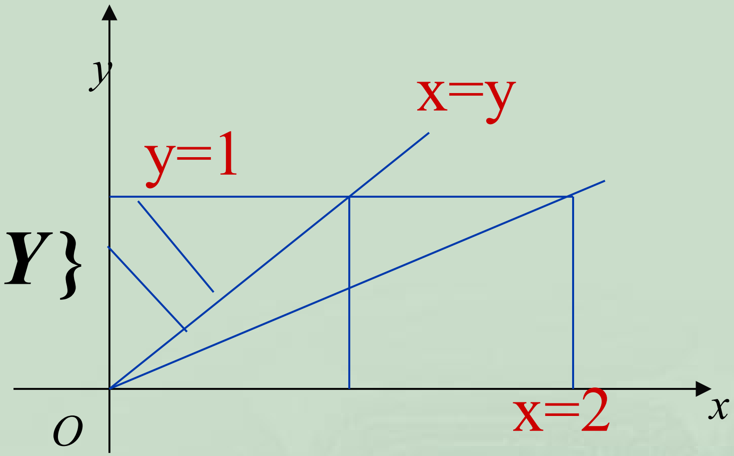
试求(U, V)的联合分布律.

解：二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x, y)\in G\\ 0 & (x, y)\notin G\end{cases}$$

返回主目录

例 6（续）



$$P\{U=0,V=0\}$$

$$=P\{X\le Y, X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}$$

$$=\iint\limits_{x\le y} f(x,\ y)dxdy=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y, X>2Y\}=0$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y, X\le 2Y\}$$

$$=P\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=1,V=1\}=\frac{1}{2}$$

返回主目录

二 几何概型

几何概型考虑的是有无穷多个等可能结果的随机试验。

首先看下面的例子。

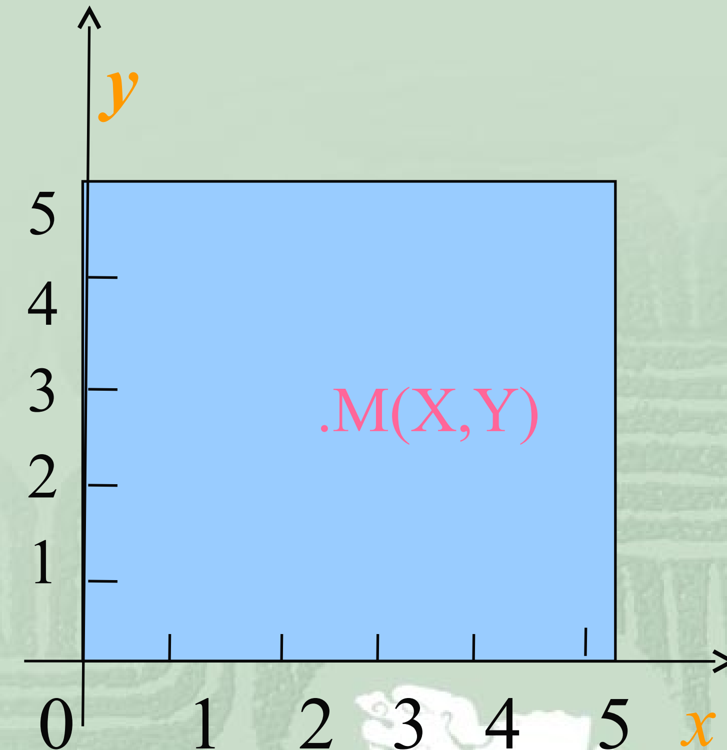
例 1 (会面问题) 甲、乙二人约定在 12 点到 5

点之间在某地会面，先到者等一个小时后即离去

设二人在这段时间内的各时刻到达是等可能的，

且二人互不影响。求二人能会面的概率。

解： 以 X , Y 分别表示甲乙二人到达的时刻，于是 $0 \le X \le 5,\ 0 \le Y \le 5.$



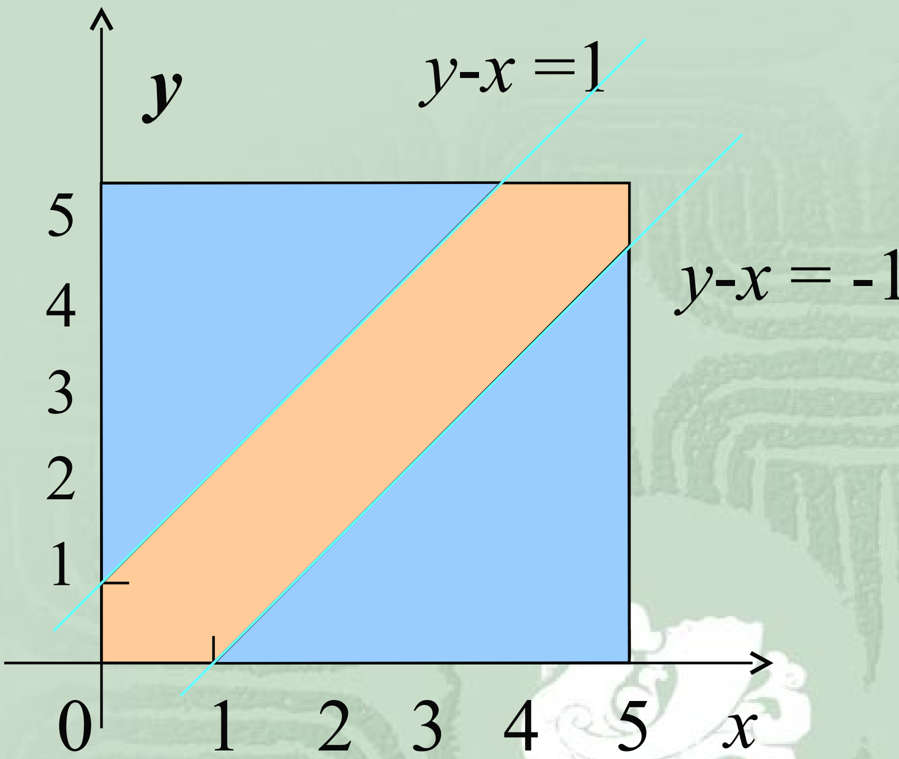
即点 M 落在图中的阴影部分。所有的点构成一个正方形，即有无穷多个结果。由于每人在任一时刻到达都是等可能的，所以落在正方形内各点是等可能的。

返回主目录

二人会面的条件是：$|X-Y|\le 1,$

$$p=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}$$

$$=\frac{25-2\times\frac{1}{2}\times 4^2}{25}=\frac{9}{25}.$$



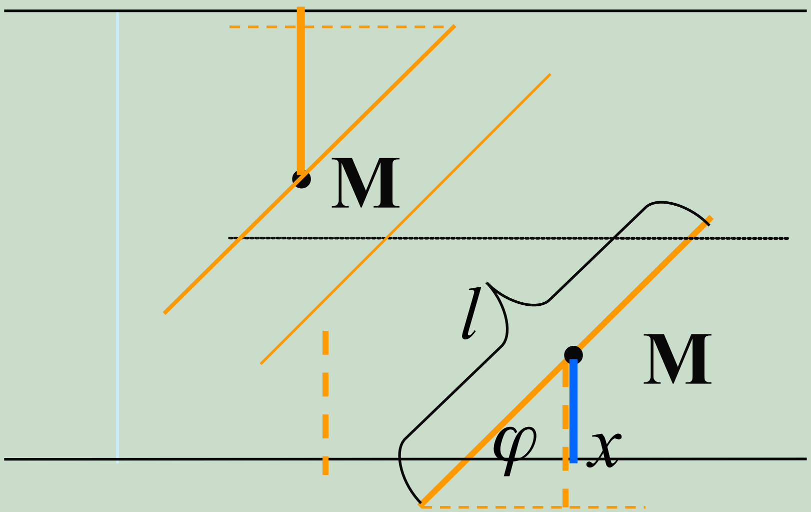
返回主目录

一般，设某个区域 D(线段，平面区域，空间区域)，具有测度 m_D(长度，面积，体积)。如果随机实验 E 相当于向区域内任意地取点，且取到每一点都是等可能的，则称此类试验为几何概型。

如果试验 E 是向区域内任意取点，事件 A 对应于点落在 D 内的某区域 A，则

$$P(A)=\frac{m_A}{m_D}.$$

例 2 (蒲丰投针问题) 平面上有一族平行线。其中任何相邻的两线距离都是 a (a>0) 。向平面任意投一长为 l (l<a) 的针，试求针与一条平行线相交的概率。



解 ：设 x 是针的中点 M 到最近的平行线的距离，φ 是针与此平行线的交角，投针问题就相当于向平面区域 D 取点的几何概型。

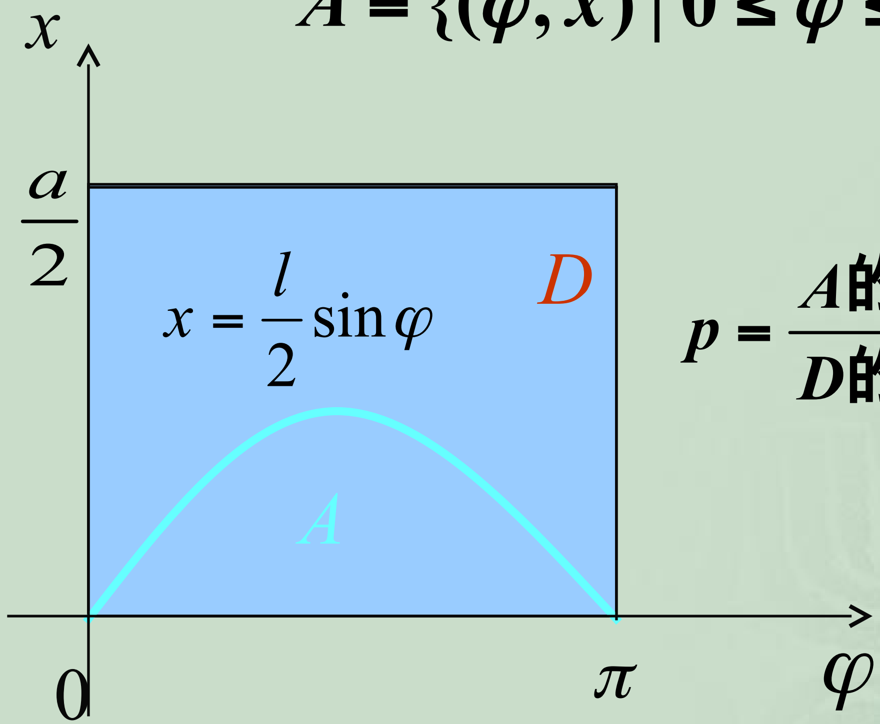
$$D=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{a}{2}\}$$

返回主目录

几何概型

$$D = \{(\varphi, x) \mid 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le x \le \frac{a}{2}\}$$

$$A = \{(\varphi, x) \mid 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi\}$$



$$p = \frac{A\text{的面积}}{D\text{的面积}} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2}\sin\varphi \, d\varphi}{\frac{a}{2}\pi} = \frac{2l}{\pi a}.$$

思考题

1) 某人午觉醒来，发觉表停了，他打开收音机，想听电 台报时， 求他等待的时间不超过 10 分钟的概率。 (1/6)

2) 在线段 AD 上任意取两个点 B、 C ，在 B、 C 处折断此线段 而得三折线，求此三折线能构成三角形的概率。 (1/4)

3) 甲、乙两船停靠同一码头，各自独立地到达，且每艘 船在一昼夜间到达是等可能的。若甲船需停泊 1 小时，乙 船需停泊 2 小时，而该码头只能停泊一艘船。试求其中一 艘船要等待码头空出的概率。 (0.121)

返回主目录

4) 在区间 (0, 1) 中随机地取两个数，求下列事件的概率：

(1) 两个数中较小 (大) 的小于 1/2 ； (3/4, 1/4)

(2) 两数之和小于 3/2 ； (7/8)

(3) 两数之积小于 1/4 。 (0.5966)

2. 设随机变量Y服从参数为$\theta=1$的指数分布，定义随机变量X_k如下

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\le k\\ 1, & Y>k\end{cases}\qquad k=1,2$$

求X_1和X_2的联合分布列及边缘分布列。

X_1 \ X_2	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

3. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & 0<x^2<y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 X 和 Y 的边缘密度函数。

$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

4. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |x|<y,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求（ 1 ）X 和 Y 的边缘密度函数；（ 2 ）X 与 Y 是否相互独立。

$$f_X(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

X 与 Y 不独立

5. 设随机变量 X 和 Y 的分布列分别为

X	-1	0	1
P	¼	½	¼

Y	0	1
P	½	½

已知 P{XY=0}=1 ，试求 Z=max{X, Y} 的分布列。

Z	0	1
P	0.25	0.75

6. 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求随机变量$Z=\dfrac{X+Y}{2}$的密度函数。

$$f_Z(z)=\begin{cases} 4ze^{-2z} & z>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$