概率统计习题课

2002 ， 2003 ， 2004 考研题

1.$(Ch7)$ 设总体X的分布率为：$0<\theta<1/2$

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

利用总体X的如下样本值：3, 1, 2, 0, 3, 1, 2, 3,

求θ的矩估计量和极大似然估计值

$$\mu_i = E(X^i) = A_i$$
$$i = 1,2,\cdots,k$$

解：

$$E(X) = 0\times\theta^2 + 1\times 2\theta(1-\theta) + 2\theta^2 + 3(1-2\theta)$$

$$= 3-4\theta = \overline{X} \longrightarrow \hat{\theta} = \frac{3-\overline{X}}{4}\text{(矩估计量)}$$

1.(Ch7) 设总体X的分布率为：$0<\theta<1/2$

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

利用总体X的如下样本值：3, 1, 2, 0, 3, 1, 2, 3,

求θ的矩估计量和极大似然估计值

解：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{8}p(x_i,\theta)=p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdots\cdot p(x_8,\theta)$$

$$=p(3,\theta)\cdot p(1,\theta)\cdot p(2,\theta)\cdot p(0,\theta)$$

$$\cdot p(3,\theta)\cdot p(1,\theta)\cdot p(2,\theta)\cdot p(3,\theta)$$

$$=(1-2\theta)^3\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot(\theta^2)^2\cdot\theta^2$$

$$\ln L(\theta)=3\ln(1-2\theta)+2\ln 2\theta+2\ln(1-\theta)+6\ln\theta$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{6}{1-2\theta}+\frac{1}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}+\frac{6}{\theta}=0 \longrightarrow \hat{\theta}=\frac{1}{3}\text{或}\frac{7}{8}$$

取$\hat{\theta}=\frac{1}{3}$

2. $(Ch7)$ 设总体X的分布函数为：

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$ 其中未知参数$\beta>1,$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本，求：

(1) β的矩估计量；

(2) β的最大似然矩估计量；

2. (*Ch7*) 设总体X的分布函数为：

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$ 其中未知参数$\beta>1$,

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本，求：

$\mu_i=E(X^i)=A_i$

$i=1,2,\cdots,k$

(1) β的矩估计量；

解：$E(X)=\overline{X}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{\infty}x\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$$

$$f(x,\beta)=\frac{dF(x,\beta)}{dx}=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$

$$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$$

2.$(Ch7)$ 设总体X的分布函数为：

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$

其中未知参数$\beta>1$，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本，求：

(2) β的最大似然矩估计量；

$x_i>1, i=1,2,\cdots,n$

解：

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\beta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta}{x_i^{\beta+1}}=\frac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}$$

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$0=\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \rightarrow \hat{\beta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

$$\hat{\beta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

3. $(Ch7)$ $(Ch2)$ $(Ch3)$ 设总体X的概率密度为：$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

其中$\theta>0$是未知参数。

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本,记$\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

求：(1)总体X的分布函数$F(x)$

(2)统计量$\hat{\theta}$的分布函数$F_{\hat{\theta}}(x)$

(3)如果用$\hat{\theta}$作为θ的估计量，讨论它是否具有无偏性。

3. (Ch7) (Ch2) (Ch3) 设总体X的概率密度为：$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

其中$\theta>0$是未知参数。

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本，记$\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

求：(1)总体X的分布函数$F(x)$

解：

当$x>\theta$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{\theta}^{x}2e^{-2(t-\theta)}dt=1-e^{-2(x-\theta)}$，

当$x\le\theta$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=0$

(2)统计量$\hat{\theta}$的分布函数$F_{\hat{\theta}}(x)$

$$F_{\hat{\theta}}(x)=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

3. (Ch7) (Ch2) (Ch3) 设总体X的概率密度为：$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$ 其中$\theta>0$是未知参数。

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本,记$\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

(3)如果用$\hat{\theta}$作为θ的估计量，讨论它是否具有无偏性。

解：

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)dx=\int_{\theta}^{\infty}x2ne^{-2n(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta$$

$\therefore\hat{\theta}$不是θ的无偏估计量。

$$f_{\hat{\theta}}(x)=F'_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

$$F_{\hat{\theta}}(x)=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

4.$(Ch4)$ 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，且其方差为 $\sigma^2 > 0$.

令$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 则：(A)正确

$(A)\ \operatorname{cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$

$(B)\ \operatorname{cov}(X_1, Y) = \sigma^2$

$(C)\ D(X_1 + Y) = \frac{(n+2)\sigma^2}{n}$

$(D)\ D(X_1 - Y) = \frac{(n+1)\sigma^2}{n}$

解：

$$\operatorname{cov}(X_1, Y) = \operatorname{cov}(X_1, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\operatorname{cov}(X_1, \sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= \frac{1}{n}[\underbrace{\operatorname{cov}(X_1, X_1)}_{\sigma^2} + \underbrace{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}_{0} + \cdots + \underbrace{\operatorname{cov}(X_1, X_n)}_{0}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

5. 设A,B是随机事件，且$P(A)=\dfrac{1}{4},P(B|A)=\dfrac{1}{3}, P(A|B)=\dfrac{1}{2},$

$(Ch4)$

$(Ch3)$

$(Ch1)$

令$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$ $\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$

求:(1)(X,Y)的概率分布

(2) ρ_{XY}

5. 设A,B是随机事件，且$P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$,

(Ch4)

(Ch3)

(Ch1)

令$X=\begin{cases}1, & A发生\\ 0, & A不发生\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & B发生\\ 0, & B不发生\end{cases}$

求:(1)(X,Y)的概率分布

解 :$\frac{1}{3}=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ → $P(AB)=\frac{1}{12}$,

$\frac{1}{2}=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ → $P(B)=\frac{1}{6}$,

5. 设A,B是随机事件，且$P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2},$

(Ch4)

(Ch3)

(Ch1)

令$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$

求：(1)(X,Y)的概率分布 $P(B)=\frac{1}{6},\ P(AB)=\frac{1}{12},$

Y \ X	0	1	
0	2/3	1/6	5/6
1	1/12	1/12	1/6
	3/4	1/4	1

$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$

$=1-P(A\cup B)$

$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3}$

$P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})$

$=P(A)-P(AB)=1/6$

$P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)$

$=P(B)-P(AB)=1/12$

$P(X=1,Y=1)=P(AB)=1/12$

5. 设A,B是随机事件，且$P(A)=\frac{1}{4},P(B|$

$$E(XY)=\sum x_i y_j p_{ij}$$

$(Ch4)$

$(Ch3)$

$(Ch1)$

令$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\0, & A\text{不发生}\end{cases}$　　$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\0, & B\text{不发生}\end{cases}$

求：(2) ρ_{XY}

Y \ X	0	1	
0	2/3	1/6	5/6
1	1/12	1/12	1/6
	3/4	1/4	1

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$=1/12-1/4\cdot 1/6=1/24$$

$E(X)=1/4$，$E(Y)=1/6$，

$E(XY)=1/12$，

$E(X^2)=1/4$，$E(Y^2)=1/6$，

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=3/16,$$
$$D(Y)=5/36,$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1/24}{\sqrt{3}/4\cdot\sqrt{5}/6}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

6. 设随机变量X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x<\pi \\ 0, & 其它\end{cases}$

$(Ch4)$

$(Ch2)$

对X独立重复地观察4次，用Y表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求：$E(Y^2)$

解：$P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$

$Y:4$次观察中$\{X>\frac{\pi}{3}\}$的次数，$Y\sim B(4,\frac{1}{2})$

$E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2 \qquad D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

$E(Y^2)=D(Y)+E^2(X)=5$

6. 设随机变量X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x<\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$(Ch4)$

$(Ch2)$

对X独立重复地观察4次，用Y表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求：$E(Y^2)$

解2：$P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$

Y：4次观察中$\{X>\frac{\pi}{3}\}$的次数，$Y\sim B(4,\frac{1}{2})$

$$P(Y=k)=C_4^k\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{4-k}}=C_4^k\frac{1}{2^4}\quad k=0,1,2,3,4$$

$$E(Y^2)=\sum_{k=0}^{4}k^2P(Y=k)=\sum_{k=0}^{4}k^2C_4^k\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4}k^2C_4^k$$

$$=\frac{1}{16}(0\cdot C_4^0+1\cdot C_4^1+4\cdot C_4^2+9\cdot C_4^3+16\cdot C_4^4)=\frac{80}{16}=5$$

7.已知甲、乙两箱装有同 种产品，其中甲箱中装 有3件合

$(Ch4)$ 格品和3件次品，乙箱中仅装有3件合格品，从甲箱

$(Ch1)$ 中任取3件产品放入乙箱中，求：

(1) 乙箱中次品数X的数学期望

(2) 从乙箱中任取一件产品 是次品的概率

7.已知甲、乙两箱装有同种产品，其中甲箱中装有3件合格品和3件次品，乙箱中仅装有3件合格品，从甲箱中任取3件产品放入乙箱中，求：

$(Ch4)$

$(Ch1)$

(1) 乙箱中次品数X的数学期望

甲 $\begin{cases} 3\text{ 件正品} \\ 3\text{ 件次品} \end{cases}$

解：设$H_i=\{$从甲箱任取3件中有i件次品放入乙箱$\}$

H_0： 乙箱中有6件合格品，0件次品，$P(H_0)=C_3^3/C_6^3=1/20$

H_1： 乙箱中有5件合格品，1件次品，$P(H_1)=C_3^1C_3^2/C_6^3=9/20$

H_2： 乙箱中有4件合格品，2件次品，$P(H_2)=C_3^2C_3^1/C_6^3=9/20$

H_3： 乙箱中有3件合格品，3件次品，$P(H_3)=C_3^3/C_6^3=1/20$

X	0	1	2	3
p	$1/20$	$9/20$	$9/20$	$1/20$

$$E(X)=\frac{3}{2}$$

7.已知甲、乙两箱装有同种产品，其中甲箱中装有3件合格品和3件次品，乙箱中仅装有3件合格品，从甲箱中任取3件产品放入乙箱中，求：

$(Ch4)$

$(Ch1)$

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率 A

解：设 $H_i=\{$从甲箱任取3件中有i件次品放入乙箱$\}$

H_0： 乙箱中有6件合格品，0件次品，$P(H_0)=C_3^3\big/C_6^3=1/20$

H_1： 乙箱中有5件合格品，1件次品，$P(H_1)=C_3^1C_3^2\big/C_6^3=9/20$

H_2： 乙箱中有4件合格品，2件次品，$P(H_2)=C_3^2C_3^1\big/C_6^3=9/20$

H_3： 乙箱中有3件合格品，3件次品，$P(H_3)=C_3^3\big/C_6^3=1/20$

$$P(A)=P(H_0)P(A|H_0)+P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)$$

$$=\frac{1}{20}\cdot\frac{0}{6}+\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

8. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$(Ch3)$

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则$P(X+Y\le 1)=$ ______$1/4$______

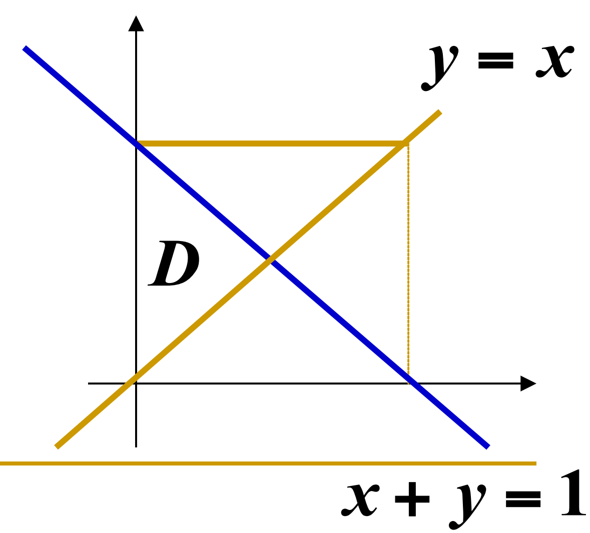
解：

$$P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)dx$$

$$=\frac{1}{4}$$



9.$(Ch2)$ 设随机变量X服从参数为λ的指数分布，

则$P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ e^{-1}

解：

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{则} P\{X > \sqrt{D(X)}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-1}$$

10. $(Ch2)$ 设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma > 0)$,

且二次方程$y^2 + 4y + X = 0$无实根的概率为$\dfrac{1}{2}$,则$\mu =$ 4

解：

二次方程无实根 $\Leftrightarrow 16 - 4X < 0 \Leftrightarrow X > 4$

$$\frac{1}{2} = P(X > 4) = 1 - P(X \le 4)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4-\mu}{\sigma} = 0 \rightarrow \mu = 4$$

11.$(Ch2)$ 设X_1和X_2是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$，分布函数分别为$F_1(x)$和$F_2(x)$，则有：

(A) $f_1(x)+f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度。

(B) $f_1(x)\cdot f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度。

(C) $F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数。

(D) $F_1(x)\cdot F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数。

解：$X=\max\{X_1,X_2\}$

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X_1\le x,X_2\le x)$$
$$=P(X_1\le x)\cdot P(X_2\le x)=F_1(x)\cdot F_2(x)$$

概率统计习题课

(Ch2　Ch3)

1. 设随机变量X,Y相互独立，其概率密度分别为：

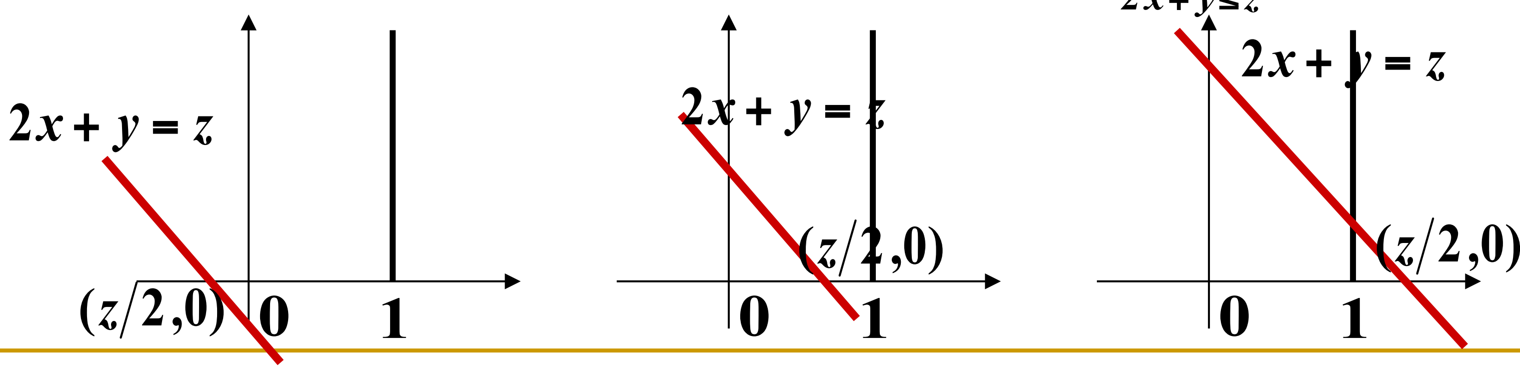
$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

求$Z=2X+Y$的概率密度.

解：$\because$ X,Y相互独立，$\therefore(X,Y)$的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(x)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X+Y\le z)=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)dxdy$$



(1) (2) (3)

1. 设随机变量X,Y相互独立，其概率密度分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

求$Z=2X+Y$的概率密度.

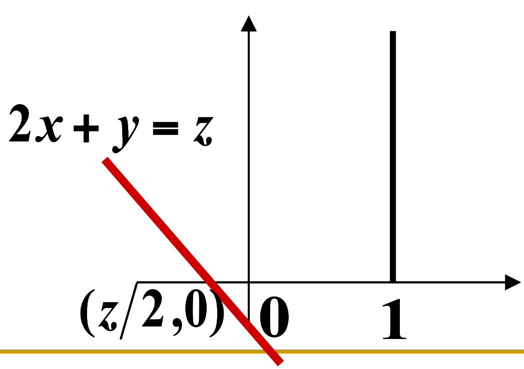
解：$\because$ X,Y相互独立，$\therefore (X,Y)$的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(x)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$\frac{z}{2}\le 0$,即$z\le 0$时，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X+Y\le z)=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=0$$



(1)

1. 求$Z=2X+Y$的概率密度.

解：$\because$ X,Y相互独立，$\therefore (X,Y)$的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(x)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当$0\le \dfrac{z}{2}\le 1$,即$0\le z\le 2$时，

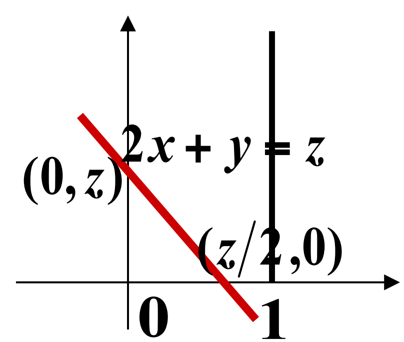
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X+Y\le z)=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^z dy\int_0^{\frac{z-y}{2}} e^{-y}dx=\frac{1}{2}\int_0^z e^{-y}(z-y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left(z\int_0^z e^{-y}dy-\int_0^z ye^{-y}dy\right)$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}\left(\int_0^z e^{-y}dy+ze^{-z}-ze^{-z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-z})$$



(2)

1. 求$Z=2X+Y$的概率密度.

解：$\because$ X,Y相互独立，$\therefore (X,Y)$的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(x)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

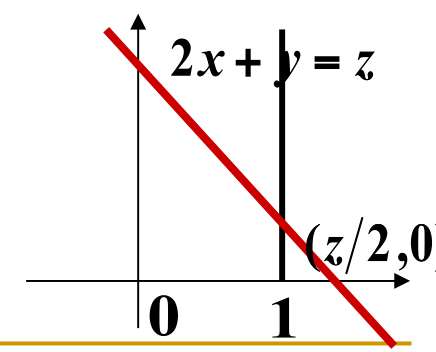
当$\frac{z}{2}>1$,即$z>2$时，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X+Y\le z)=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{z-2x} e^{-y}dy=\int_0^1(1-e^{2x-z})dx$$

$$=1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}$$



(3)

1. 求$Z=2X+Y$的概率密度.

解：$\because$ X,Y相互独立，$\therefore (X,Y)$的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(x)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} 0 & \text{当} z\le 0\text{时，} \\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}) & \text{当} 0\le z\le 2\text{时，} \\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z} & \text{当} z>2\text{时，} \end{cases}$$

2. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

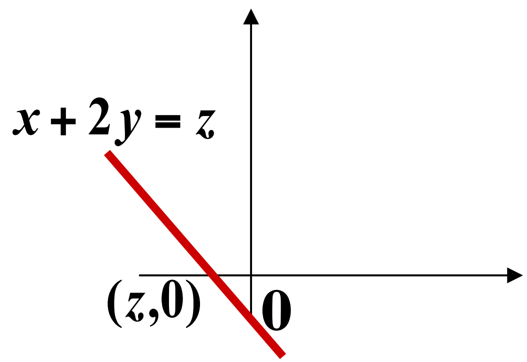
求$Z=X+2Y$的概率密度

解：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)=\iint_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy$$

当$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$

当$z>0$时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}dy$

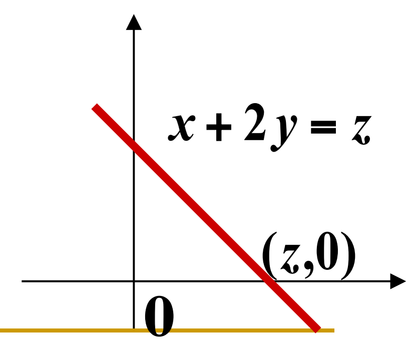


$$=2\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} e^{-2y}dy$$

$$=\int_0^z e^{-x}(1-e^{x-z})dx$$

$$=\int_0^z e^{-x}dx-\int_0^z e^{-z}dx$$

$$=1-e^{-z}-ze^{-z}$$



2. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

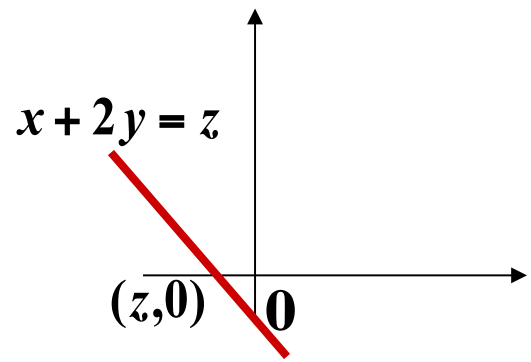
$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$Z=X+2Y$的概率密度

解：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy$$

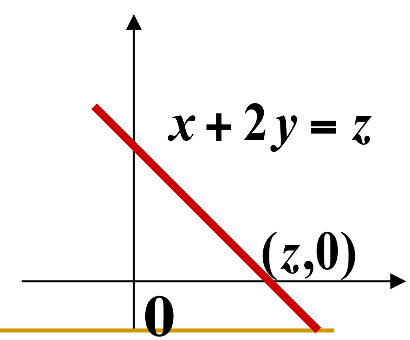
当$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$



当$z>0$时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}dy$

$$=1-e^{-z}-ze^{-z}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$



3. 设随机变量X,Y相互独立，下表给出了(X,Y)的联合分布率和X,Y的边缘分布率的部分数值，是将其余数值填入表中的空白处。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

解：

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

4. 设随机变量X,Y相互独立，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y \sim U[-\pi,\pi]$

求$Z=X+Y$的概率密度.(计算结果用标准正态分布$\Phi(x)$表示)

解：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\le y\le\pi \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

作变量代换：

$$t=\frac{z-y-\mu}{\sigma}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\Phi(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma})]$$

5. 设随机变量X服从参数为$\frac{1}{2}$的指数分布，$f_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in(0,1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

证明：$Y=1-e^{-2X}$在区间$(0,1)$上服从均匀分布.

解：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2X}\le y\}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$=P\{e^{-2X}\quad 1-y\}=P\{-2X\quad \ln(1-y)\}\ (1-y>0)$$

$$=P\{X\le -\frac{1}{2}\ln(1-y)\}=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)} f_X(x)dx$$

当$y\le 0$时，$1-y\quad 1$，$\because -\frac{1}{2}\ln(1-y)\le 0$ $\therefore F_Y(y)=0$ $f_Y(y)=0$

当$y\quad 1$时，$F_Y(y)=P\{1-e^{-2X}\le y\}=1$ $f_Y(y)=0$

当$y\in(0,1)$时，$0<1-y<1$，$\because -\frac{1}{2}\ln(1-y)>0$

$$\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(-\frac{1}{2}\ln(1-y))[\frac{1}{2(1-y)}]$$

$$=2e^{-2[-\frac{1}{2}\ln(1-y)]}[\frac{1}{2(1-y)}]=1$$

概率统计习题课

(Ch4---Ch8)

1.$(Ch4)$ 设由自动线加工的某种零件的内径$X \sim N(\mu,1)$,
(8分) 内径小于10或大于12的为不合格品，其余为 正品。
已知销售利润T与销售零件的内径X有如下关系：

$$T=\begin{cases}-1, & X<10\\ 20, & 10\le X\le 12\\ -5, & X>12\end{cases}$$

$$\because\ X\sim N(\mu,1)$$

$$\therefore X-\mu\sim N(0,1)$$

问平均内径μ取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

解：$E(T)=20\cdot P(10\le X\le 12)-1\cdot P(X<10)-5P(X>12)$

$$=20\cdot P(10-\mu\le X-\mu\le 12-\mu)-1\cdot P(X-\mu<10-\mu)$$

$$-5P(X-\mu>12-\mu)$$

$$=20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-1\cdot\Phi(10-\mu)-5[1-\Phi(12-\mu)]$$

$$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$$

1. $(Ch4)$

$$T=\begin{cases}-1, & X<10\\ 20, & 10\le X\le 12\\ -5, & X>12\end{cases}$$

$\because X\sim N(\mu,1)$

$\therefore X-\mu\sim N(0,1)$

问平均内径μ取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

解：$E(T)=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$

$$\because \Phi'(x)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore 0=\frac{dE(T)}{d\mu}=-25\Phi'(12-\mu)+21\Phi'(10-\mu)$$

$$=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu)$$

$$\frac{25}{21}=\frac{\varphi(10-\mu)}{\varphi(12-\mu)}=e^{2(11-\mu)}\qquad \ln\frac{25}{21}=2(11-\mu)$$

$$\mu=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}\approx 10.9$$

2. $(Ch5)$某保险公司经多年的资料统计表明，在上财产险的(6分)客户中被盗的占20%。在随机抽查的100家客户中被盗的客户数为随机变量X. 求$P(14 \le X \le 30)$

解：

$$np(1-p)=16$$

$$X \sim B(100,0.2) \quad \Rightarrow \quad \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \underset{n\text{很大}}{\overset{\text{近似}}{\sim}} N(0,1) \qquad np=20$$

$$P(14 \le X \le 30) = P\left(\frac{14-20}{4} \le \frac{X-20}{4} \le \frac{30-20}{4}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{30-20}{4}\right) - \Phi\left(\frac{14-20}{4}\right)$$

$$= \Phi(2.5) - \Phi(-1.5)$$

$$= \Phi(2.5) - [1-\Phi(1.5)]$$

$$= 0.927$$

3. $(Ch3)$ 设(X,Y)在矩形$G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2\,,\,0\le y\le 1\}$上服从均匀分布，

(9分)

试求边长为X和Y的矩形面积S的概率密度$f(s)$

解：

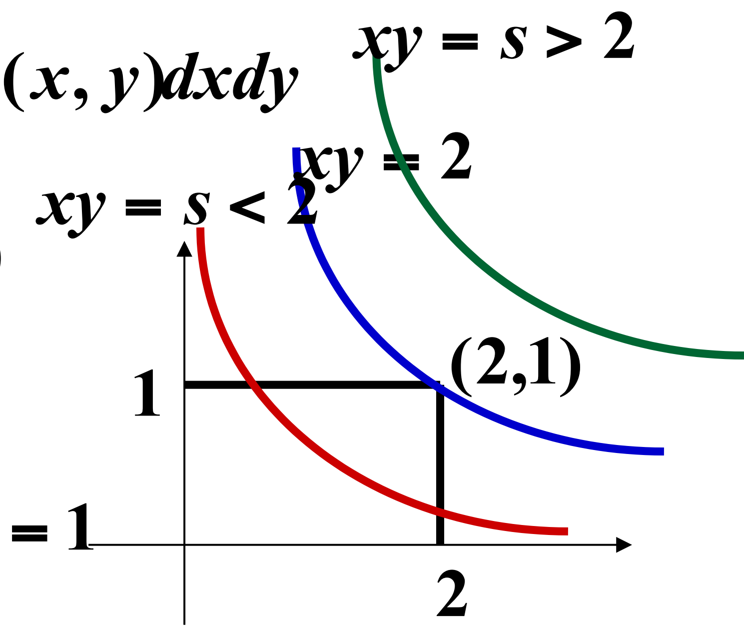
先求$F(s)$ $\quad (X,Y)$的$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in G\\ 0 & (x,y)\notin G\end{cases}$

$$F(s)=P(S\le s)=P(XY\le s)=\iint\limits_{xy\le s} f(x,y)dxdy$$

$$(1)\ s\le 0,\ F(s)=\iint\limits_{\text{交集}=\phi} f(x,y)dxdy=0$$

(2) $s \quad 2,$

$$F(s)=\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\times G\text{的面积}=1$$



3. $(Ch3)$ (9分) 设(X,Y)在矩形$G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2\,,\,0\le y\le 1\}$上服从均匀分布，

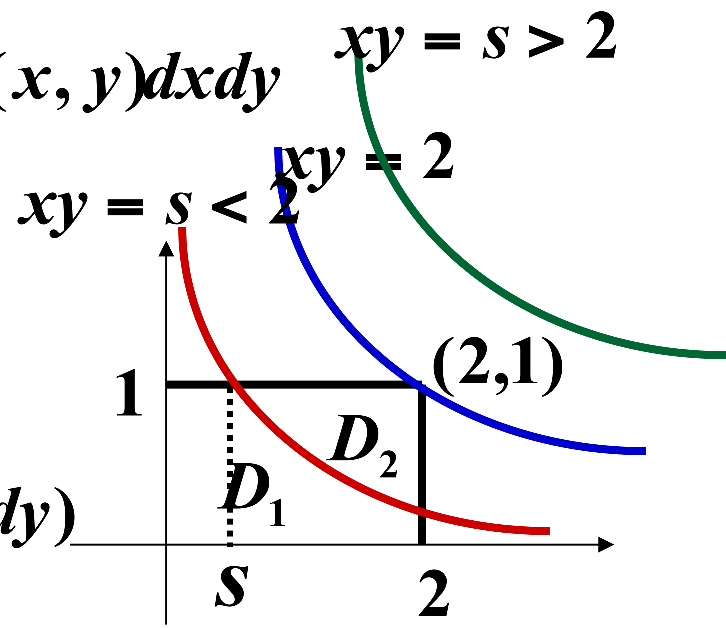
试求边长为X和Y的矩形面积S的概率密度$f(s)$

解：

先求$F(s)$　　(X,Y)的$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in G\\ 0 & (x,y)\notin G\end{cases}$

$$F(s)=P(S\le s)=P(XY\le s)=\iint_{xy\le s} f(x,y)dxdy$$

(3) $0<s<2$,



$$F(s)=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\times D_1\text{的面积}$$

$$=\frac{1}{2}\times(2-D_2\text{的面积})=\frac{1}{2}\times\left(2-\int_s^2 dx\int_{\frac{s}{x}}^1 dy\right)$$

$$=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s)$$

3. $(Ch3)$ (9分) 设(X,Y)在矩形$G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2\ ,\ 0\le y\le 1\}$上服从均匀分布，

试求边长为X和Y的矩形面积S的概率密度$f(s)$

解：

先求$F(s)$

$$(1)\ s\le 0,\quad F(s)=0$$

$$(2)\ s\quad 2,\quad F(s)=1$$

$$(3)\ 0<s<2,\quad F(s)=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s)$$

$$f(s)=F'(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{s}, & 0<s<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

4. (Ch7) (8分) 设$Y=\ln X \sim N(\mu,1)$, X的一组样本值为

$$0.5, 1.25, 0.8, 2$$

(1) 求$E(X)=b$

(2) 求μ的置信度为0.95的置信区间

(3) 求b的置信度为0.95的置信区间

4. $(Ch7)$ 设$Y=\ln X\sim N(\mu,1)$, X的一组样本值为

(8分) 0.5, 1.25, 0.8, 2

(1) 求$E(X)=b$

解：$b=E(X)=E(e^Y)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t+\mu}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}+t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

$t=y-\mu$

$dt=dy$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-u^2}{2}}du=\sqrt{2\pi}$$

4. $(Ch7)$ 设$Y=\ln X\sim N(\mu,1)$, X的一组样本值为
(8分) 0.5, 1.25, 0.8, 2

(2) 求μ的置信度为0.95的置信区间

解：

复习

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，对μ,σ^2进行区间估计置信度$1-\alpha$

	统计量	置信区间
1)求μ的置信区间，σ^2为已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	★ $(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$
2)求μ的置信区间，σ^2为未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	★ $(\bar{X} \pm \dfrac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$
3)求σ^2的置信区间	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	★ $(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$

4. $(Ch7)$ (8分) 设$Y=\ln X \sim N(\mu,1)$, X的一组样本值为

$$0.5,\ 1.25,\ 0.8,\ 2$$

(2) 求μ的置信度为0.95的置信区间

解：

$$\left(\bar{y} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right) = \left(0 \pm \frac{1}{\sqrt{4}} z_{0.05/2}\right)$$

$$= \left(0 \pm \frac{1}{2} \times 1.96\right)$$

$$= (-0.98, 0.98)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \ln x_i = \frac{1}{4}\ln x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{1}{4}\ln 1 = 0$$

4. $(Ch7)$ (8分) 设$Y=\ln X\sim N(\mu,1)$, X的一组样本值为

$$0.5,\ 1.25,\ 0.8,\ 2$$

(2) 求μ的置信度为0.95的置信区间

(3) 求b的置信度为0.95的置信区间 $b=e^{\mu+\frac{1}{2}}$

解：

$$(\bar{y}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})=(-0.98,0.98)$$

$$P(-0.98<\mu<0.98)=0.95$$

$$P(-0.98+0.5<\mu+\frac{1}{2}<0.98+0.5)=0.95$$

$$P(-0.48<\mu+\frac{1}{2}<1.48)=0.95$$

$$P(e^{-0.48}<e^{\mu+\frac{1}{2}}<e^{1.48})=0.95$$

$\therefore b$的置信度为0.95的置信区间为$(e^{-0.48},e^{1.48})$