3.2 集合的运算与性质

集合运算是指用已知的集合去生成新的集合。

3.2.1 集合的运算

定义 3.9　设 A 和 B 是任意两个集合，

（ 1 ） A 和 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 和 B 的**交集**，记为 A∩B ，即：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

（ 2 ）将 A 和 B 的所有元素合在一起构成的集合称为 A 和 B 的**并集**，记为 A∪B ，

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

（ 3 ）从集合 A 中去掉集合 B 的元素得到的集合称为 A 和 B 的**差集**，也称作 B 对 A 的**相对补集**，记为 A−B ，即：

$$A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

例 3.4　设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ， $B=\{2, 3, 5\}$ ，求 $A \cap B$ 、 $A \cup B$ 、 $A-B$ 和 $B-A$ 。

解： $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B=\{2, 3\}$

$A-B=\{1, 4\}$, $B-A=\{5\}$

3.2.1 集合的运算

例 3.6 设 $A\subseteq B$，求证：$A\cap C\subseteq B\cap C$。

证：

对任意的 x，

$$x\in A\cap C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in C$$

$$\Rightarrow x\in B\wedge x\in C \text{（因为 } A\subseteq B\text{）}$$

$$\Leftrightarrow x\in B\cap C$$

因此，$A\cap C\subseteq B\cap C$。

3.2.1 集合的运算

定义 3.10 若集合 A 和 B 没有公共元素，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 和 B **不相交**。

如令 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{4, 5\}$，则 $A \cap B = \varnothing$。

定义 3.11 设 A 为任意集合，A 的**绝对补集**简称**补集**，记作 ~A（或 ），定义为：

$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$

因为 E 是全集，$x \in E$ 是真命题，所以 ~A 可以定义为：

$\sim A = \{x \mid x \notin A\}$

它是一元运算，是差运算的特例。

例如，$E=\{a, b, c, d\}$，$A=\{a, c\}$，则

$\sim A = \{b, d\}$。

3.2.1 集合的运算

定义 3.12 设 A 和 B 是任意两个集合， A 与 B 的**对称差**记作 A⊕B ，定义为：

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$

例如， $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$ ，则

$$A-B=\{1, 2, 3\} ,\quad B-A=\{6, 7, 8\} ,$$

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)= \{1, 2, 3, 6, 7, 8\} 。$$

集合的基本运算可以用文氏图给予形象的描述。(具体见教材图 3.4)

说明：在以上讨论的各种运算中，幂集、绝对补运算的优先级要高于并、交、相对补、对称差等二元运算。

3.2.2 集合的运算性质

下面的恒等式给出了集合运算的主要算律。

定理 3.6　设 A, B, C 为任意的集合，集合运算满足以下所列规律。

（1）**双重否定律**　$\sim(\sim A)=A$

（2）**幂等律**　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

（3）**交换律**　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

（4）**结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

（5）**分配律**　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（6）**吸收律**　$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$

（7）**德摩根律**　$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$，$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$，$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

$\sim E=\varnothing$，$\sim\varnothing=E$

3.2.2 集合的运算性质

（8）**同一律** $A \cap E = A$，$A \cup \varnothing = A$；

（9）**零律** $A \cap \varnothing = \varnothing$，$A \cup E = E$

（10）**排中律** $A \cup \sim A = E$

（11）**矛盾律** $A \cap \sim A = \varnothing$

不难看出，集合运算的规律和谓词演算的规律是一致的，所以谓词演算的方法是证明集合恒等式的基本方法。

3.2.2 集合的运算性质

例 3.8 证明 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ ，即定理 3.6 的（ 7 ）。

证：对任意的 x ，

$$x\in A-(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg x\in(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg x\in B\wedge\neg x\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A-B)\wedge(x\in A-C)$$

$$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$$

故 $\mathrm{A}-(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) = (\mathrm{A}-\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}-\mathrm{C})$ 。

3.2.2 集合的运算性质

例 3.9 求证 $A\cap(A\cup B)=A$ ，即定理 3.6 的（ 6 ）。

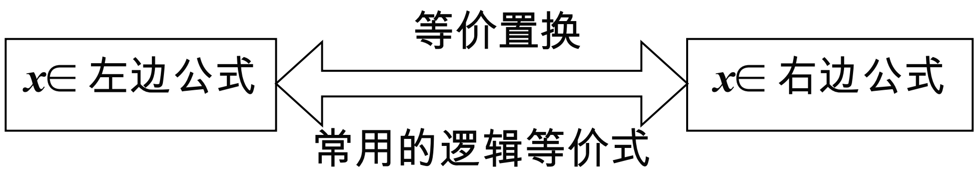
证：假设定理 3.6 中的其它恒等式均成立，则

$$
\begin{aligned}
& A\cap(A\cup B) \\
&= (A\cup\varnothing)\cap(A\cup B) && \text{（同一律）} \\
&= A\cup(\varnothing\cap B) && \text{（分配律）} \\
&= A\cup\varnothing && \text{（零律）} \\
&= A && \text{（同一律）}
\end{aligned}
$$

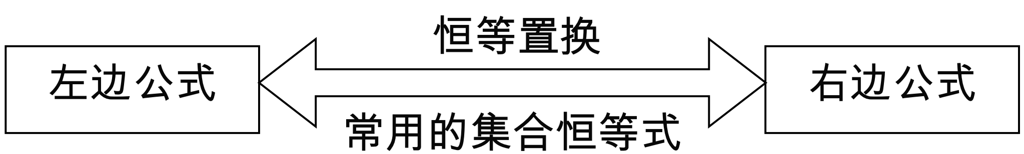
3.2.2 集合的运算性质

说明：证明集合恒等式的方法有两种：

（1）根据定义进行证明，在叙述中采用半形式化的方法，证明中大量用到数理逻辑的等价式及推理规则。如例3.8。思维形式注记图如下。



（2）恒等演算，利用已有的集合恒等式证明新的恒等式，如例3.9。思维形式注记图如下。



3.2.2 集合的运算性质

定理 3.7 设 A, B, C 是任意集合，则

（1）$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$

（2）$A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$

（3）$A - B = A \cap \sim B$

（4）$A - B \subseteq A$

（5）$(A - B) \cup B = A \cup B$，$(A \cup B) - B = A - B$

（6）若 $A \subseteq C$，$B \subseteq C$，则 $A \cup B \subseteq C$

（7）若 $A \subseteq B$，$A \subseteq C$，则 $A \subseteq B \cap C$

（8）若 $A \subseteq B$，则 $\sim B \subseteq \sim A$

证明略，见教材。

3.2.2 集合的运算性质

定理 3.8 对于任意集合 A ，B ，C ，

（1）$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)=(A \cup B)-(A \cap B)$

（2）$A \oplus B=B \oplus A$

（3）$A \oplus A=\varnothing$

（4）$A \oplus \varnothing=A$

（5）$\sim A \oplus \sim B=A \oplus B$

（6）$(A \oplus B) \oplus C=A \oplus (B \oplus C)$

可根据定义或用恒等演算法证明，证明略。

3.2.2 集合的运算性质

例 3.10　已知 $A\oplus B=A\oplus C$，证明 $B=C$。

证：已知 $A\oplus B=A\oplus C$，则

$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$

$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$　　（由定理 3.8（6））

$\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$　　（由定理 3.8（3））

所以，$B=C$　　（由定理 3.8（4））

并与交运算可以推广到多个集合的情形：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\{x \mid x\in A_1\wedge x\in A_2\wedge\ldots\wedge x\in A_n\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\{x \mid x\in A_1\vee x\in A_2\vee\ldots\vee x\in A_n\}$$

3.2.2 集合的运算性质

例 3.11 化简集合表达式：$(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$

解：$(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$

$=(B\cap\sim(A\cap C))\cup(B\cap(A\cap C))$ （由定理 3.7（3），交换律，结合律）

$=B\cap(\sim(A\cap C)\cup(A\cap C))$ （分配律）

$=B\cap E$ （排中律）

$=B$ （同一律）

例 3.12 已知 $A\cup B=A\cup C$，$A\cap B=A\cap C$，试证 $B=C$。

证：$B=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)$

$=(B\cap A)\cup(B\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$=(A\cup B)\cap C=(A\cup C)\cap C$

$=C$

3.2.3 有序对与笛卡儿积

定义 3.14 由两个元素 x 和 y 按一定的顺序排列成的二元组叫做一个**有序对**，也称**序偶**，记作 <x, y> ，其中 x 是它的第一元素， y 是它的第二元素。

例如，平面直角坐标系中点的坐标就是有序对， <1, 3>, <3, 1>, <2, 0> 等代表平面中不同的点。

由定义可知，有序对具有如下性质：

（ 1 ）当 $x \neq y$ 时 ,$<x, y> \neq <y, x>$ ，即与顺序有关。

（ 2 ）给定两个有序对 $<x, y>$ 和 $<u, v>$ ， $<x, y> = <u, v>$ 的充分必要条件是 $x=u$ 且 $y=v$ 。

（ 3 ）有序对 $<x, y>$ 与集合 $\{x, y\}$ 不同，后者中的元素是无次序的。如当 $x \neq y$ 时， $\{x, y\} = \{y, x\}$ 。

3.2.3 有序对与笛卡儿积

定义 3.16 设 A，B 为集合，用 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫做 A 和 B 的**笛卡儿积**，记作 A×B。笛卡儿积的符号化表示为：

$$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B\}$$

例如，$A=\{a, b\}$，$B=\{0, 1, 2\}$，则

$$A\times B=\{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$$

$$B\times A=\{\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$$

可见，在一般情况下，$A\times B\neq B\times A$。

从笛卡儿积的定义和逻辑演算的知识可得：

（1）若 $\langle x, y\rangle\in A\times B$，则有 $x\in A$ 和 $y\in B$。

（2）若 $\langle x, y\rangle\notin A\times B$，则有 $x\notin A$ 或 $y\notin B$。

（3）由排列组合的知识易得，如果 $|A|=m$，$|B|=n$，则 $|A\times B|=|B\times A|=m\times n$。

3.2.3 有序对与笛卡儿积

作为集合的一种二元运算，笛卡儿积运算具有如下性质：

（1）对任意集合 A ，有$\varnothing\times A = A\times\varnothing = \varnothing$

（2）当 $A\neq B\wedge A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing$ 时，有 $A\times B\neq B\times A$ ，即笛卡儿积运算不适合交换律。

（3）当 A, B, C 都不是空集时，有 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$ ，即笛卡儿积运算不满足结合律。

（4）笛卡儿积运算对$\cup$和$\cap$运算满足分配律。即对任意的集合 A, B, C 有，

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

3.2.3 有序对与笛卡儿积

例如，设 $A=\{1\}$ ， $B=\{1, 2\}$ ， $C=\{2, 3\}$ ，则

$A\times(B\cup C) = \{1\}\times\{1, 2, 3\} = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>\}$

$(A\times B)\cup(A\times C) = \{1\}\times\{1,2\}\cup\{1\}\times\{2,3\} = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>\}$

$A\times(B\cap C) = \{1\}\times\{2\} = \{<1,2>\}$

$(A\times B)\cap(A\times C) = \{<1,1>,<1,2>\}\cap\{<1,2>,<1,3>\} = \{<1,2>\}$

3.2.3 有序对与笛卡儿积

定理 3.9 设 A, B, C 为集合， $C\neq\varnothing$ ，则

（1）$A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $A\times C\subseteq B\times C$ 。

（2）$A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $C\times A\subseteq C\times B$ 。

证：仅证明（1），可类似地证明（2）。

必要条件：对于任意的 $\langle x,y\rangle$ ，

$$\langle x,y\rangle\in A\times C \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C \Rightarrow x\in B\wedge y\in C \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in B\times C$$

所以 $A\times C\subseteq B\times C$ 。

充分条件：因为 $C\neq\varnothing$ ，所以存在 $y\in C$ ，对于任意的 x ，

$$x\in A \Rightarrow x\in A\wedge y\in C \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C \Rightarrow \langle x,y\rangle\in B\times C$$

$$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in C \Rightarrow x\in B$$

所以 $A\subseteq B$ 。

3.2.3 有序对与笛卡儿积

定理 3.10　设 A, B, C, D 为非空集合，则 A×B ⊆C×D 的充分必要条件是 A⊆C 且 B⊆D。

证：必要条件：对于任意的 x ，y ，

$x\in A\wedge y\in B \Rightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B \Rightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D \Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D$

所以 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$。

充分条件：对于任意的 $\langle x, y\rangle$ ，

$\langle x, y\rangle\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow x\in C\wedge y\in D \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in C\times D$

所以 $A\times B \subseteq C\times D$。

例 3.13　设 $A=\{1,2\}$ ，求 $P(A)\times A$。

解： $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ，

$P(A)\times A = \{\langle\varnothing, 1\rangle,\langle\varnothing, 2\rangle,\langle\{1\}, 1\rangle,\langle\{1\}, 2\rangle,\langle\{2\}, 1\rangle,\langle\{2\}, 2\rangle,$

$\langle\{1, 2\}, 1\rangle,\langle\{1, 2\}, 2\rangle\}$。

3.2.3 有序对与笛卡儿积

例 3.14 设 A, B, C, D 为任意集合，判断以下命题是否为真，并说明理由。

（1）$A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$

（2）$A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$

（3）$A=B\wedge C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

（4）存在集合 A，使得 $A\subseteq A\times A$

解：（1）不一定为真，当 $A=\varnothing, B=\{1\}, C=\{2\}$ 时有 $A\times B=A\times C=\varnothing$，但 $B\neq C$。

（2）不一定为真，当 $A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$ 时有

$$A-(B\times C) = \{1\}-\{<1, 2> = \{1\}$$

$$(A-B)\times(A-C) = \varnothing\times\{1\} = \varnothing$$

（3）为真，由恒等置换的原理可证。

（4）为真，当 $A=\varnothing$ 时，有 $A\subseteq A\times A$ 成立。

小结

集合运算

- 分类：并、交、差（相对补）、补（绝对补）和对称差
- 运算的性质：常用的集合恒等式或集合的运算定律
- 证明集合恒等式的方法
  - 恒等演算法：集合恒等式
  - 谓词演算法：逻辑等价式
- 笛卡儿积运算的性质
  - 若 $|A|=m$ ，$|B|=n$ ，则 $|A\times B|=|B\times A|=m\times n$
  - 不满足交换律
  - 不满足结合律
  - 对$\cup$和$\cap$运算满足分配律

3.3 有限集合的计数

- 集合的运算，可用于有限个元素的计数问题。

3.3 有限集合的计数

❖ 使用文氏图可以很方便地解决有限集的计数问题。具体方法如下：

1 ）根据已知条件画出对应的文氏图。

一般地说，一条性质决定一个集合。有多少条性质，就有多少个集合。如果没有特殊的说明，任何两个集合都画成相交的。

2 ）将已知集合的元素数填入表示该集合的区域内。

通常从 n 个集合的交集填起，根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域。如果交集的数字是未知的，可以设为 x 。

3 ）根据题目中的条件，列出一次方程或方程组，就可以求得所需要的结果。用文氏图求解有限集计数问题的思维形式注记图如下。

问题描述 → 文氏图 → 填入区域元素数 → 列方程并求解

3.3 有限集合的计数

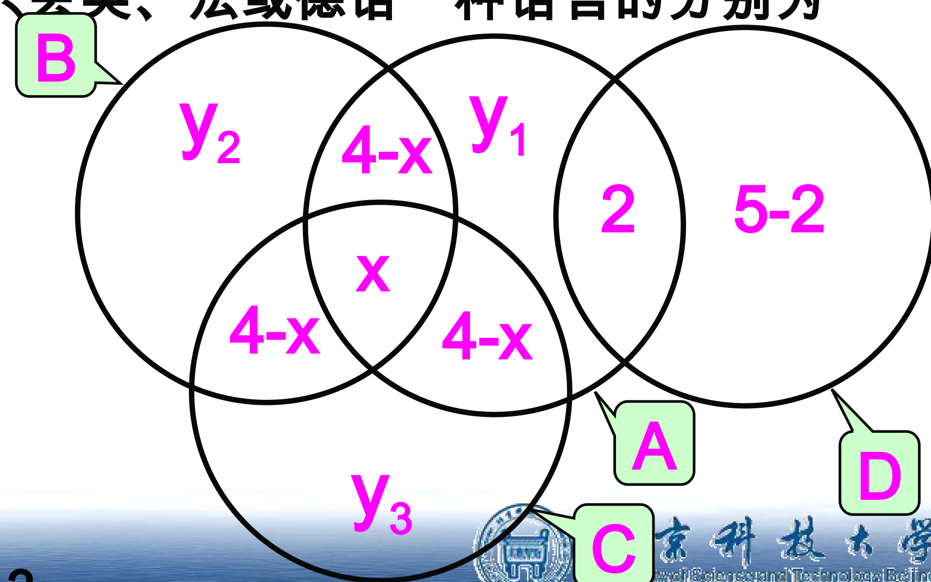
例 3.15 对 24 名人员掌握外语情况的调查．其统计结果如下：

- 会英、日、德、法分别为：13, 5, 10 和 9 人；
- 同时会英语和日语的有 2 人；
- 会英、德和法语中任两种语言的都是 4 人．

已知会日语的人既不懂法语也不懂德语，分别求只会一种语言（英、德、法、日）的人数和会三种语言的人数．

解 令 A, B, C 和 D 分别表示会英、法、德、日语的人的集合．

设同时会三种语言的有 x 人，只会英、法或德语一种语言的分别为 y_1, y_2 和 y_3. 画出的图如右图．



列出下面方程组：

$$\begin{cases} y_1 + 2(4-x) + x + 2 = 13 \\ y_2 + 2(4-x) + x = 9 \\ y_3 + 2(4-x) + x = 10 \end{cases}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + 3(4-x) + x = 24-5$$

解得：$x = 1$, $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.

例 3.16 求 1 到 1000 之间 (包含 1 和 1000 在内)，既不能被 5 和 6，也不能被 8 整除的数有多少个 .

解 设

$S = \{ x \mid x \in Z \wedge 1 \le x \le 1000 \}$

$A = \{ x \mid x \in S \wedge x$ 可被 5 整除 $\}$

$B = \{ x \mid x \in S \wedge x$ 可被 6 整除 $\}$

$C = \{ x \mid x \in S \wedge x$ 可被 8 整除 $\}$

$|A| = int(1000/5) = 200$

$|B| = int(1000/6) = 166$

$|C| = int(1000/8) = 125$

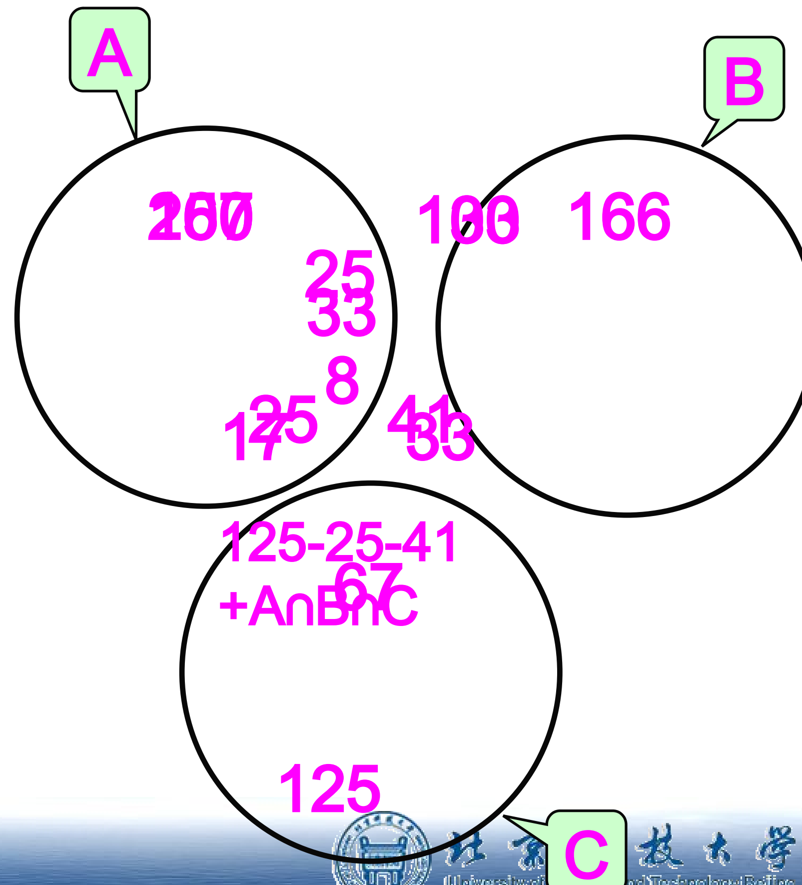
$|A \cap B| = int(1000/lcm(5,6)) = 33$

$|A \cap C| = int(1000/lcm(5,8)) = 25$

$|B \cap C| = int(1000/lcm(6,8)) = 41$

$|A \cap B \cap C| = int(1000/lcm(5,6,8)) = 8$

$1000-(150+100+67+25+17+33+8)=600$



3.3 有限集合的计数

（容斥原理） 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 m 个性质 .S 中的任何元素 x 或者具有性质 P_i，或者不具有性质 $P_i(i=1..m)$，两种情况必居其一 .

令 A_i 表示 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

$$=|S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

推论 S 中至少具有一条性质的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| \\
&\quad + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

根据容斥原理，例 3.16 中所求的元素数为：

$$
\begin{aligned}
|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| &= |S| - (|A|+|B|+|C|) \\
&\quad + (|A \cap B|+|A \cap C|+|B \cap C|) - |A \cap B \cap C| \\
&= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600
\end{aligned}
$$

欧拉函数

- **例 3.18 求欧拉函数的值**
- 欧拉函数 Φ 是数论中的一个重要函数，设 n 是正整数 ,Φ(n) 表示 {0,1,…,n-1} 中与 n 互素的数的个数．例如 Φ(12)=4，因为与 12 互素的数有 1,5,7,11．这里认为 Φ(1)=1．利用容斥原理给出欧拉函数的计算公式．
- 分析

(1) 将全集看成为 {0,1,…,n-1}

(2) 素因子！

(3) 容斥原理。

欧拉函数（续）

- 求素因子

给定正整数 n, n 的素因子分解式为， $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

令 $A_i = \{x \mid 0 \le x < n-1, 且 p_i 整除 x\}$

则有 $\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}|$

- 容斥原理

首先计算 $|A_i| = \frac{n}{p_i}, i = 1,2,\dots,k$ $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, 1 \le i, j \le n$

由容斥原理得

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} - \dots + (-1)^k \left(\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}\right)\right.$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

3.3 有限集合的计数

- 思考题：没有时间上学
  - “ 但是我没有时间上学，”埃迪向劝学员解释道，“我一天睡眠 8 小时，以每天为 24 小时计，一年中的睡眠时间加起来大约 122 天。星期六和星期天不上课，一年总共是 104 天。我们有 60 天的暑假。我每天用膳要花 3 小时 -- 一年就要 45 天以上。我每天至少还得有 2 小时的娱乐活动 -- 一年就要超过 30 天。”
  - 埃迪边说边匆匆写下这些数字，然后他把所有的天数加起来。结果是 361 。
    - 睡眠 (一天 8 小时) 122
    - 星期六和星期天 104
    - 暑假 60
    - 用膳 (一天 3 小时) 45
    - 娱乐 (一天 2 小时) 30
    - 总 和 361 天
  - “你瞧，”埃迪接着说，“剩下给我病卧在床的只有 4 天，我还没有把每年 7 天的学校假期考虑在内呢 !”
  - 劝学员搔搔头。“这里有差错，”他咕哝道。但是，他左思右想，也未能发现埃迪的数据有何不准确之处。你能解释错误何在吗？

小结

文氏图的作用：

① 形象地描述集合之间的关系。

② 形象地描述集合的运算。

③ 方便地解决有限集的计数问题。

文氏图

描述集合之间的关系

描述集合的运算

容斥原理

解决有限集的计数问题

作业

- 补充习题 3.2 ， 3.3

1. (1) 设 R 为实数集，

$X=\{x \mid x\in R且 -3\le x<0\}$

$Y=\{x \mid x\in R且 -1\le x<5\}$

$W=\{x \mid x\in R且 x<1\}$

求 $(X\cap Y)-W$.

(2) 设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{2,3,4,5\}$，$W=\{2,3\}$，求 $(X\cup Y)\oplus W$.

2. 化简下列集合表达式：

(1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)$

(2) $(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$

(3) $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap \sim B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)$

3. 设 A,B,C 是任意集合，证明：

(1) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(2) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

作业

❖ **补充习题 3.2 ，3.3**

4. 已知 $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，求 $A\times P(A)$.

5. 判断下述命题的真假，如果为真，给出证明；如果为假，给出反例.

(1) $A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$

(2) 存在集合 A，使得 $A\subseteq A\times A$

6. 某班有 25 个学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有 2 人会打这三种球. 已知 6 个会打网球的人都会打篮球或排球. 求不会打球的人数.

常见题型分析

- 判断一个命题或真或假。
- 判别元素是否属于给定的集合
- 集合运算。
- 证明两集合之间的关系：包含关系或集合相等。
- 有限集合的计数。

本章小结

本章主要内容的知识逻辑结构图：