2.5 谓词逻辑推理理论

谓词演算推证的基本思路是将量词消去，然后用类似命题演算推证法证明。

2.5.1 谓词演算推证

- 谓词演算推证也是由三个要素组成：推理根据、推理规则和证明方法。

- 推理根据：
  - 一方面命题演算推证中命题定律和推理定律的代换实例可以作为谓词演算推证的推理依据；
  - 一方面谓词演算的基本逻辑等价式：
    - 量词否定逻辑等价式
    - 量词辖域的收缩与扩张逻辑等价式
    - 量词分配逻辑等价式
    - 具有两个量词的逻辑等价式
    - 量词与联结词的逻辑蕴涵式
    - 具有两个量词的逻辑蕴涵式

2.5.1 谓词演算推证

- 证明方法：
  - 直接证法
  - 间接证明方法
    - 反证法
    - 附加前提证法。

2.5.1 谓词演算推证

- 推理规则 ：
  - P 规则
  - T 规则
  - CP 规则
  - 消去和添加量词的规则

2.5.1 谓词演算推证

❖ 1 ）US 规则（全称指定规则）

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

这里 P 是谓词，而 c 是个体域中某个任意的个体。

- 例如，设个体域为全体偶数的集合， P(x) 表示“ x 是整数”，则∀ xP(x) 表示“所有的偶数都是整数”，那么根据全称指定规则有 P(6) ，即“ 6 是整数”。
- 全称指定规则在使用时要求 x 是 P(x) 中自由出现的个体变元。该规则使用时还可以有以下形式

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(y)}$$

- 注意：这里 y 是任意的不在 P(x) 中约束出现的个体变元。

2.5.1 谓词演算推证

- 2）UG 规则（全称推广规则）

$$\frac{P(x)}{\therefore \forall y P(y)}$$

  - 设 E 是指定的个体域，若对于 E 中的任意个体 a ，都有 P(a) 成立，才能应用该全称推广规则。
  - 例如，设个体域是全体人类， P(x) 表示“ x 是要死的”。显然，对于任意一个人 a ， P(a) 都成立，即任何人都是要死的。则应用全称推广规则有∀ xP(x) 成立。
  - 注意：全称推广规则在使用时要求 y 不在 P(x) 中约束出现。

2.5.1 谓词演算推证

- 3）ES 规则（存在指定规则）

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 这里 c 是指定个体域中的某一个个体。但需注意的是，应用存在指定规则时，指定的个体 c 不是任意的。
- 例如，设个体域是全体整数， P(x) 表示“ x 是偶数”， Q(x) 表示“ x 是奇数”，显然， P(2) 和 Q(3) 都为真， $P(2) \land Q(3)$ 也为真。这里 $\exists xP(x)$ 和 $\exists xQ(x)$ 都为真，但 $P(2) \land Q(2)$ 为假。
- 注意：存在指定规则在使用时要求：
  - （1）c 是使 P(c) 为真的指定个体域中的某一个个体。
  - （2）c 不曾在 P(x) 中出现过。在具体的推证过程中还要求 c 不在以前步骤中出现过。
  - （3）P(x) 中除 x 外还有其他自由出现的个体变元时，不能用此规则。

2.5.1 谓词演算推证

❖ （ 4 ）EG 规则（存在推广规则）

$$\frac{P(c)}{\therefore \exists x P(x)}$$

- 这里 c 是指定个体域中的某一个个体，该规则的成立是显然的。
- 设个体域是全体人类， P(x) 表示“ x 是天才”， P(爱因斯坦) 表示“爱因斯坦是天才”是成立的，故∃ xP(x) 成立。
- 注意：存在推广规则在使用时要求取代 c 的 x 不在 P(c) 中出现。

2.5.2 谓词演算推证举例

例 2.16　设前提为$\forall x\exists yF(x, y)$，下面的推证是否正确？

(1) $\forall x\exists yF(x, y)$　　P

(2) $\exists yF(y, y)$　　T (1) US

解：推证不正确。

取解释 I：个体域为 R，在 I 下前提被解释为$\forall x\exists y(x>y)$，为真；

而$\exists yF(y, y)$被解释为$\exists y(y>y)$，为假。

所以推理不正确。

错误的原因是第 (2) 步违反了 US 规则成立的条件。

2.5.2 谓词演算推证举例

例 2.17 设前提为 $\forall x\exists yF(x, y)$ ，下面的推证是否正确？

(1) $\forall x\exists yF(x, y)$ P

(2) $\exists yF(t, y)$ T (1) US

(3) $F(t, c)$ T (2) ES

(4) $\forall xF(x,c)$ T (3) UG

(5) $\exists y\forall x F(x,y)$ T (4) EG

解 推证不正确。

取与例 2.16 相同的解释，则 $\forall x\exists yF(x,y)$ 为真；

而 $\exists y\forall x F(x,y)$ 意为“存在着最小实数”，是假命题，

所以推理不正确。

之所以出现这样的错误，是第 (3) 步违反了 ES 规则成立的条件。

2.5.2 谓词演算推证举例

例 2.18　试证明$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))\Rightarrow\forall x(P(x)\rightarrow R(x))$

证：(1)$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(2)$P(y)\rightarrow Q(y)$	T (1) US
(3)$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$	P
(4)$Q(y)\rightarrow R(y)$	T (3) US
(5)$P(y)\rightarrow R(y)$	T (2)(4) I
(6)$\forall x(P(x)\rightarrow R(x))$	T (5) UG

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

例 2.19 试证明$\forall x(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))\wedge\exists x(C(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\wedge R(x))$

证：	(1) $\exists x(C(x)\wedge Q(x))$	P
	(2) $C(a)\wedge Q(a)$	T (1) ES
	(3) $\forall x(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))$	P
	(4) $C(a)\rightarrow W(a)\wedge R(a)$	T (3) US
	(5) $C(a)$	T (2) I
	(6) $W(a)\wedge R(a)$	T (4)(5) I
	(7) $Q(a)$	T (2) I
	(8) $R(a)$	T (6) I
	(9) $Q(a)\wedge R(a)$	T (7)(8) I
	(10) $\exists x(Q(x)\wedge R(x))$	T (9) EG

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

❖ 注意：

- 在推证过程中，如既要使用规则 US 又要使用规则 ES 消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先使用规则 ES ，再使用规则 US 。
- 在例 2.19 的推理过程中 (2)(3) 与 (4) 两条就不能颠倒，若先用 US 规则得到 $C(a) \rightarrow W(a) \wedge R(a)$ ，则再用 ES 规则时，不一定得到 $C(a) \wedge Q(a)$ ，一般应为 $C(b) \wedge Q(b)$ ，故无法推证下去。

2.5.2 谓词演算推证举例

例 2.20 证明苏格拉底三段论："所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。"

证：设 $H(x)$ ： x 是一个人， $D(x)$ ： x 是要死的， a ：苏格拉底。

则本论证形式化为：$\forall x(H(x)\rightarrow D(x))\wedge H(a)\Rightarrow D(a)$;

(1) $\forall x(H(x)\rightarrow D(x))$	P
(2) $H(a)\rightarrow D(a)$	T (1) US
(3) $H(a)$	P
(4) $D(a)$	T (2)(3) I

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

例 2.21 试证明下列推论的有效性。

有些病人喜欢一切医生，但是没有一个病人喜欢骗子，因此医生都不是骗子。

证：设 $P(x)$ ： x 是病人， $D(x)$ ： x 是医生， $Q(x)$ ： x 是骗子， $L(x,y)$ ： x 喜欢 y 。

则本论证形式化为：$\exists x(P(x)\wedge\forall y(D(y)\rightarrow L(x, y)))$ ， $\forall x(P(x)\rightarrow\forall y(L(x, y)\rightarrow \neg Q(y))) \Rightarrow \forall y(D(y)\rightarrow \neg Q(y))$

(1)$\exists x(P(x)\wedge\forall y(D(y)\rightarrow L(x, y)))$	P
(2)$P(a)\wedge\forall y(D(y)\rightarrow L(a, y))$	T (1) ES
(3)$\forall x(P(x)\rightarrow\forall y(L(x, y)\rightarrow \neg Q(y)))$	P
(4)$P(a)\rightarrow\forall y(L(a, y)\rightarrow \neg Q(y))$	T (3) US
(5)$P(a)$	T (2) I
(6)$\forall y(L(a,y)\rightarrow \neg Q(y))$	T (4)(5) I
(7)$L(a, y)\rightarrow \neg Q(y)$	T (6) US
(8)$\forall y(D(y)\rightarrow L(a, y))$	T (2) I
(9)$D(y)\rightarrow L(a, y)$	T (8) US
(10)$D(y)\rightarrow \neg Q(y)$	T (7)(9) I
(11)$\forall y(D(y)\rightarrow \neg Q(y))$	T (10) UG

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

例 2.22 我国目前有三类银行在从事各种外币以及人民币的金融业务：一批国家以及地方资金控股的国有银行，若干家民营资本控股的私有银行以及外国资本控股的外资银行。有的银行专做资金大的大客户的业务(如外资银行)，有的银行兼做大客户和小客户的业务(如国有银行和私有银行)。已知 b 银行不是国有银行，但它兼做大客户和小客户的业务。证明它是一家私有银行。

证：设 G(x)：x 是国有银行，S(x)：x 是私有银行，W(x)：x 是外资银行，D(x)：x 做大客户业务，X(x)：x 做小客户业务。

则本论证形式化为：$\forall x(G(x) \vee S(x) \vee W(x))$，$\forall x(W(x) \rightarrow D(x) \wedge \neg X(x))$，$\forall x(G(x) \vee S(x) \rightarrow D(x) \vee X(x))$，$\neg G(b)$，$D(b)$，$X(b) \Rightarrow S(b)$

2.5.2 谓词演算推证举例

则本论证形式化为：$\forall x(G(x)\vee S(x)\vee W(x))$，$\forall x(W(x)\rightarrow D(x)\wedge\neg X(x))$，$\forall x(G(x)\vee S(x)\rightarrow D(x)\vee X(x))$，$\neg G(b)$，$D(b)$，$X(b)\Rightarrow S(b)$

用反证法证明

(1)$\neg S(b)$	P（结论的否定）
(2)$\forall x(G(x)\vee S(x)\vee W(x))$	P
(3)$G(b)\vee S(b)\vee W(b)$	T (2) US
(4)$G(b)\vee W(b)$	T (1)(3) I
(5)$\neg G(b)$	P
(6)$W(b)$	T (4)(5) I
(7)$\forall x(W(x)\rightarrow D(x)\wedge\neg X(x))$	P
(8)$W(b)\rightarrow D(b)\wedge\neg X(b)$	T (7) US
(9)$D(b)\wedge\neg X(b)$	T (6)(8) I
(10)$\neg X(b)$	T (9) I
(11)$X(b)$	P
(12)$X(b)\wedge\neg X(b)$	T (10)(11) I

由于 $X(b)\wedge\neg X(b)\Leftrightarrow 0$，所以推理正确。

证毕。

小结

- 谓词演算推证中利用 US,ES 规则可将谓词演算的推证转化为命题演算的推证，再通过 UG,EG 转化回来。
- 关于四条规则使用的特别提示：
  - （ 1 ）当既要使用规则 US 又要使用规则 ES 消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先使用规则 ES ，再使用规则 US 。然后再使用命题演算中的推理规则，最后使用规则 UG 或规则 EG 引入量词，得到所要的结论。
  - （ 2 ）如一个变量是用规则 ES 消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则 EG ，而不能使用规则 UG ；如使用规则 US 消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则 EG 和规则 UG 。
  - （ 3 ）如有两个含有存在量词的公式，当用规则 ES 消去量词时，不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。
  - （ 4 ）在用规则 US 和规则 ES 消去量词时，此量词必须位于整个公式的最前端（一般化为前束范式）。

小结

- 本小节内容思维形式注记图

作业

- 2.5 补充习题