第八讲 **留数**

§5.1 孤立奇点

- 1. 定义
- 2. 分类
- 3. 性质
- 4. 零点与极点的关系

1. 定义

定义 若$f(z)$在z_0处不解析，但在z_0的某个去心邻域$0<|z-z_0|<\delta$内解析，则称z_0为$f(z)$的孤立奇点.

例如 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ ----z=0 为孤立奇点

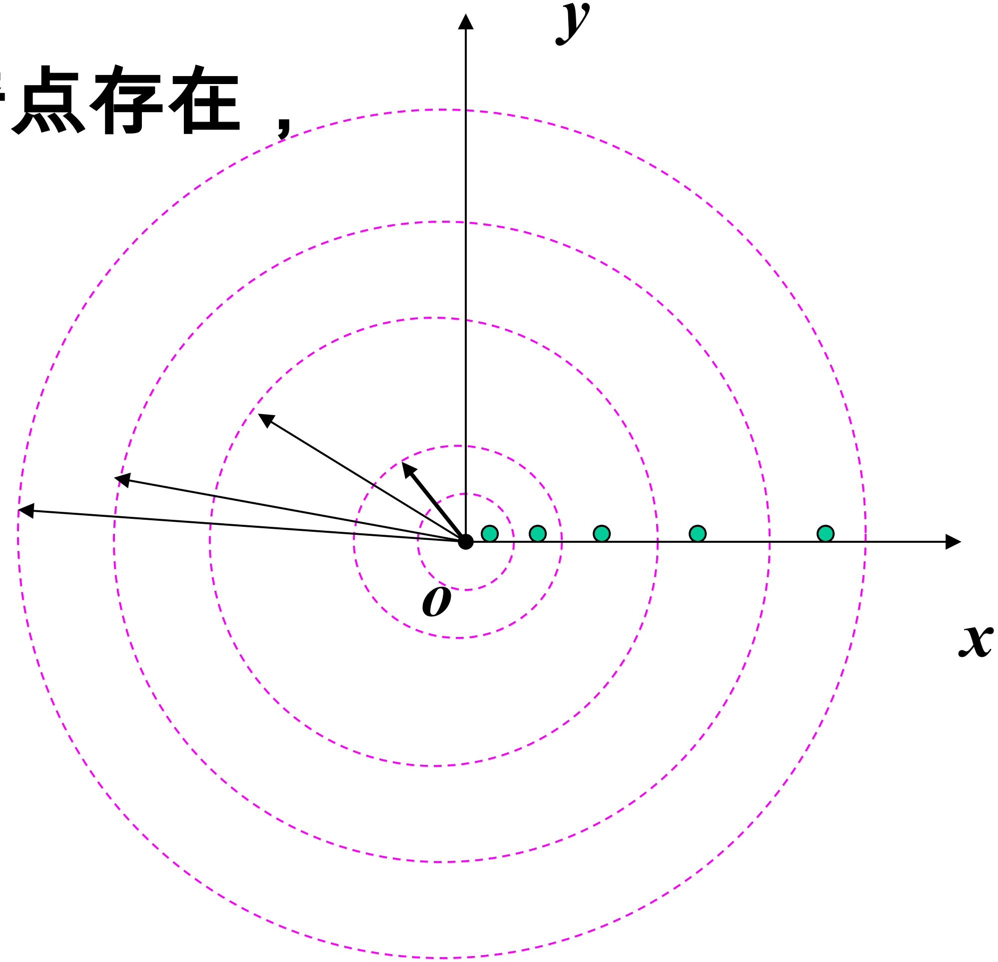
$$f(z)=\frac{1}{z-1}$$ ----z=1 为孤立奇点

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

----z=0 及 $z=1/n\pi\ (n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是它的奇点

但$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\pi}=0, \therefore$ 在$z=0$不论多么小的去心邻域内,总有$f(z)$的奇点存在，

故$z=0$不是$\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$的孤立奇点。



这说明奇点未必是孤立的。

2. 分类

以下将 $f(z)$ 在孤立奇点的邻域内展成洛朗级数，根据展开式的不同情况，将孤立点进行分类。**考察：**

$$(1)\ \frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

特点：没有负幂次项

$$(2)\ \frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots$$

特点：只有有限多个负幂次项

$$(3)\ e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$$

特点：有无穷多个负幂次项

定义　　设 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点，在 z_0 的去心邻域内，

若 $f(z)$ 的洛朗级数

$$(i)\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

没有负幂次项，称 $z=z_0$ 为可去奇点；

$$(ii)\ f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n(c_{-m}\neq 0, m\quad 1)$$

只有有限多个负幂次项，称 $z=z_0$ 为 m 级极点；

$$(iii)\ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

有无穷多个负幂次项，称 $z=z_0$ 为本性奇点。

3. 性质

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$$

补充定义：$f(z_0)=c_0$　　$f(z)$在z_0解析.

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m $(m\quad 1)$ 级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n (\, c_{-m}\neq 0, m \quad 1\,)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)|=\infty \Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m} g(z)$$

其中：$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots,$

$g(z)$在$|z-z_0|<\delta$内是解析函数且$g(z_0)\neq 0.$

例如：$f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{(z^2+1)(z-1)^4}$

$z=1$ 为 $f(z)$ 的一个三级极点， $z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的一级极点。

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点

$\Leftrightarrow f(z)$的洛朗级数有无穷多项负幂次项

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(z)$不存在，也不为$\infty$

4. 零点与极点的关系

定义 不恒等于 0 的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

其中：$\varphi(z_0)\neq 0, \varphi(z)$在$z_0$点解析$, m\in N$

则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 级零点。

例如：$z=0$与$z=1$分别是$f(z)=z(z-1)^3$的一级与三级零点。

定理 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

$(\varphi(z_0)\neq 0, \varphi(z)$在$z_0$点解析$, m\in N)$

$\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0(n=0,1,2,\cdots,m-1)\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

事实上，$\because\ \varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\quad c_0=\varphi(z_0)\neq 0$

$$\therefore f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^{n+m}$$

由*Taylor*级数的系数公式有：

$f^{(n)}(z_0)=0\ \ (n=0,1,2,\cdots,m-1),$

而 $\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}=c_0\neq 0$ 必要性得证！ 充分性略！

例如 $z=0$与$z=1$均为$f(z)=z(z-1)^3$的零点。

又$f'(z)=(z-1)^3+3z(z-1)^2$

$$f''(z)=6(z-1)^2+6z(z-1)$$

$$f'''(z)=12(z-1)+6(z-1)+6z$$

$\because\ f'(0)=(-1)^3\neq 0$

$\therefore z=0$为一级零点

$\because\ f'(1)=0 \quad f''(1)=0 \quad f'''(1)=6\neq 0$

$\therefore z=1$为三级零点

定理： 若z_0是$f(z)$的m级极点$\Leftrightarrow$ z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

证明 “$\Rightarrow$” 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点

$$\Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)\left(g(z)\text{在}z_0\text{解析,且}g(z_0)\neq 0\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{g(z)}=(z-z_0)^m h(z)\quad (z\neq z_0)$$

$$\left(h(z)\text{在}z_0\text{解析,且 }h(z_0)\neq 0\right).$$

$\because \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$,$\therefore$ 令 $\dfrac{1}{f(z_0)}=0$，则z_0是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

$\Leftarrow$"若 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点,则

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \varphi(z) \ \big(\ \varphi(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 解析, 且 } \varphi(z_0) \neq 0\ \big).$$

当 $z \neq z_0$ 时, $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^m} \boxed{\dfrac{1}{\varphi(z)}} = \dfrac{1}{(z - z_0)^m} \boxed{\psi(z)}$

$$\big(\ \psi(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 解析, 且 } \psi(z_0) \neq 0\ \big).$$

$\therefore z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点.

例 求$f(z)=\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$的奇点，

如果是极点指出它的级。

解 显然，$z=\pm i$ 是 $(1+z^2)$ 的一级零点

$$\because\ e^{\pi z}+1=0,\quad \text{即}\ e^{\pi z}=-1$$

$$\therefore \pi z=Ln(-1)=i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$$

故奇点为：$z_k=(2k+1)i\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$\because\ (1+e^{\pi z})'\Big|_{z=i(2k+1)}=\pi e^{\pi z}\Big|_{z=i(2k+1)}$$

$$=\pi[\cos\pi(2k+1)+i\sin\pi(2k+1)]=-\pi\neq 0$$

$\therefore z_k=i(2k+1)\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是$1+e^{\pi z}$的一级零点

综合 $z=\pm i$为$f(z)$的二级极点;

$z_k = i(2k+1) \quad (k=1,\pm 2,\cdots)$为$f(z)$的一级极点.

练习：考察下列函数的孤立奇点，奇点类型，如果是极点，指出它的级数。

$$(1)\ f(z)=\frac{1}{z^2(e^z-1)} \qquad (2)\ f(z)=\frac{\ln(1+z)}{z}$$

$$(3)\ f(z)=\frac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$$

$$(4)\ f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$$

$$(5)\ f(z)=\frac{1}{z^3-z^2-z+1}$$

$$(6)\ f(z)=\frac{1}{z-\sin z}$$

$$(7)\ f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$$

$$(8)\ f(z)=\frac{(z-1)^2(z-2)^2}{\left(\sin \pi z\right)^3}$$

§5.2 留数 (Residue)

- 1. 留数的定义
- 2. 留数定理
- 3. 留数的计算规则

1. 留数的定义

$$\oint_c f(z)dz = \begin{cases} 0 & f(z)\text{在}c\text{所围成的区域内解析} \\ \text{未必为}0 & c\text{所围成的区域内含有}f(z)\text{的奇点} \end{cases}$$

设$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, 0 < |z - z_0| < r$

(z_0是$f(z)$的孤立奇点， c包含z_0在其内部)

对上式两边沿简单闭曲 线c逐项积分得：

$$\oint_c f(z)dz = c_{-1}\oint_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i c_{-1}$$

定义　设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 邻域内的洛朗级数中负幂次项 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数 c_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 的**留数**，记作 $\text{Res}\,[f(z), z_0]$ 或 $\text{Res}\, f(z_0)$。

由留数定义，　$\text{Res}\,[f(z), z_0] = c_{-1}$　　(1)

故　$$\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz \qquad (2)$$

2. 留数定理

定理 设c是一条简单闭曲线，函数$f(z)$在c内有有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$，除此以外，$f(z)$在c内及c上解析，则

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z), z_k] \qquad (3)$$

证明 用互不包含，互不相交的正向简单闭曲线c_k $(k=1,2,\cdots n)$将c内孤立奇点z_k围绕，

由复合闭路定理得：

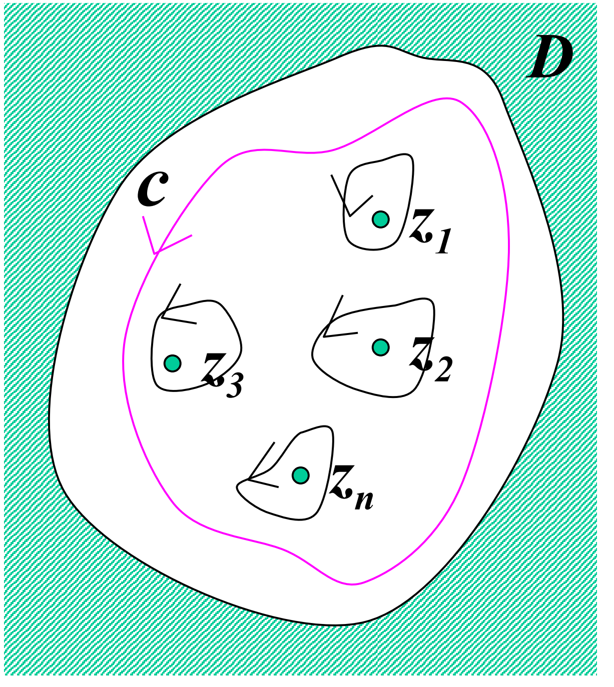
$$\oint_c f(z)dz = \oint_{c_1} f(z)dz + \oint_{c_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{c_n} f(z)dz$$

用 $2\pi i$ 除上式两边得：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_k} f(z)dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\,s[f(z), z_k]$$

故 $\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\,s[f(z), z_k]$



得证！

 求沿闭曲线 c 的积分，归之为求在 c 中各孤立奇点的留数。

3. 留数的计算规则

一般求 $\operatorname{Res}[f(z), z_0]$ 是采用将 $f(z)$ 在 z_0 邻域内展开成洛朗级数求系数 c_{-1} 的方法，但如果能先知道奇点的类型，对求留数更为有利。

以下就三类孤立奇点进行讨论：

(i)若$z=z_0$为可去奇点$\Rightarrow c_{-1}=0 \Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), z_0]=0$

(ii)若$z=z_0$为本性奇点 $\Rightarrow f(z) \overset{\text{展开}}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$

$\Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$

(iii)若$z=z_0$为极点时，求 $\operatorname{Res}[f(z), z_0]$有以下几条规则

规则 I 若z_0是$f(z)$的一级极点,$\Rightarrow$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) \qquad (4)$$

规则 II 若z_0是$f(z)$的m级极点$\Rightarrow$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \qquad (5)$$

事实上，由条件

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,\quad (c_{-m}\neq 0)$$

以$(z-z_0)^m$乘上式两边,得

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$

$$+c_0(z-z_0)^m+\cdots$$

两边求$m-1$阶导数得

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}=(m-1)!c_{-1}+m!(z-z_0)+\cdots$$

$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!c_{-1}$,移项得(5)式.

当 $m=1$ 时，式 (5) 即为式 (4).

规则 III 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $P(z),Q(z)$ 在 z_0 处解析，

$P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0 \Rightarrow$

z_0 是 $f(z)$ 的一级极点，且 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ (6)

事实上 $\because$ $Q(z_0)=0$ 及 $Q'(z_0)\neq 0$

$\therefore$ z_0 为 $Q(z)$ 的一级零点，从而 z_0 为 $\dfrac{1}{Q(z)}$ 的一级极点，

因此，$\dfrac{1}{Q(z)}=\dfrac{1}{z-z_0}\varphi(z)$ $\left(\varphi(z)\text{在} z_0 \text{处解析且} \varphi(z_0)\neq 0\right)$

故$f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}g(z)$　$(g(z)=\varphi(z)P(z)$在z_0解析,

且$g(z_0)\neq 0)$,　则z_0为$f(z)$的一级极点,由规则I

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}\quad \left(Q'(z_0)\neq 0\right)$$　得证！

例 1 计算：$\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz$

解 $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)^2}$ 在 $|z| = 2$ 的内部有一个一级极点 $z = 0$ 和一个二级极点 $z = 1$

由规则 I

$$\operatorname{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{5z-2}{(z-1)^2} = -2$$

由规则II

$$\operatorname{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz}\{(z-1)^2 \frac{5z-2}{z(z-1)^2}\}$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(\frac{5z-2}{z}\right)' = \lim_{z\to 1} \frac{2}{z^2} = 2$$

$$\therefore \oint_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z),0] + 2\pi i \operatorname{Res}[f(z),1] = 0$$

例 2 计算 $\oint_c \frac{z}{z^4-1}dz \quad c:$ 正向 $|z|=2$

解 $\because\ f(z)$ 有4个一级极点：$\pm1, \pm i$ 都在圆周 c 内，

由规则III $\quad \frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{z}{4z^3} = \frac{1}{4z^2}$

故 $\oint_c \frac{z}{z^4-1}dz$

$$= 2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),-1] + \operatorname{Res}[f(z),1] + \operatorname{Res}[f(z),i] + \operatorname{Res}[f(z),-i]\}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right] = 0$$

例 3 计算$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$

解 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$有一个 $z=0$的三级极点

由规则II

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}[z^3 f(z)]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(\cos z)''=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]=2\pi i(-\frac{1}{2})=-\pi i$$

例 4 计算$\oint_{|z|=n} \tan \pi z \, dz \quad (n \in N)$

解 $\tan \pi z = \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$ 令$\cos \pi z = 0$

解得$\pi z = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 即, $z = k + \dfrac{1}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$\because \ (\cot \pi z)' \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\pi \csc^2 \pi z \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} \neq 0$$

$\therefore z = k + \dfrac{1}{2}$为一级极点,由规则III得

$$\operatorname{Res}\left[\tan \pi z, k + \frac{1}{2}\right] = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\Bigg|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

故　由留数定理得：

$$\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz = 2\pi i \sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n} \mathrm{Res}\left[\tan \pi z, k+\tfrac{1}{2}\right] = 2\pi i\left(-\frac{2n}{\pi}\right) = -4ni$$

(1) 要灵活运用规则及洛朗级数展开来求留数，不要死套规则。

如　$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z-\sin z}{z^6}$$

由于$p(0)=0 \quad p'(0) = (1-\cos z)\big|_{z=0} = 0$

$$p''(0) = \sin z\big|_{z=0} = 0 \quad p'''(0) = \cos z\big|_{z=0} = 1 \neq 0$$

$\therefore z=0$是$p(z)$的三级零点，是$f(z)$的三级极点。

由规则II $\quad \mathrm{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6},0\right]=\dfrac{1}{(3-1)!}\lim\limits_{z\to 0}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^3}\right]''$

若将$f(z)$作*Laurent*级数展开：

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}[z-(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots)]$$

$$=\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}-\frac{1}{5!}\frac{1}{z}+\cdots$$

$$\therefore \mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=-\frac{1}{5!}$$

--- 该方法较规则 II 更简单！

(2) 由规则 II 的推导过程知，在使用规则 II 时，可将 m 取得比实际级数高，这可使计算更简单。

如

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}\left[z^6\left(\frac{z-\sin z}{z^6}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}(z-\sin z)=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z)=-\frac{1}{5!}$$

作 业

P147　1（1）（4）（7）
8（2）（4）（6）（8）
9（1）（2）（5）