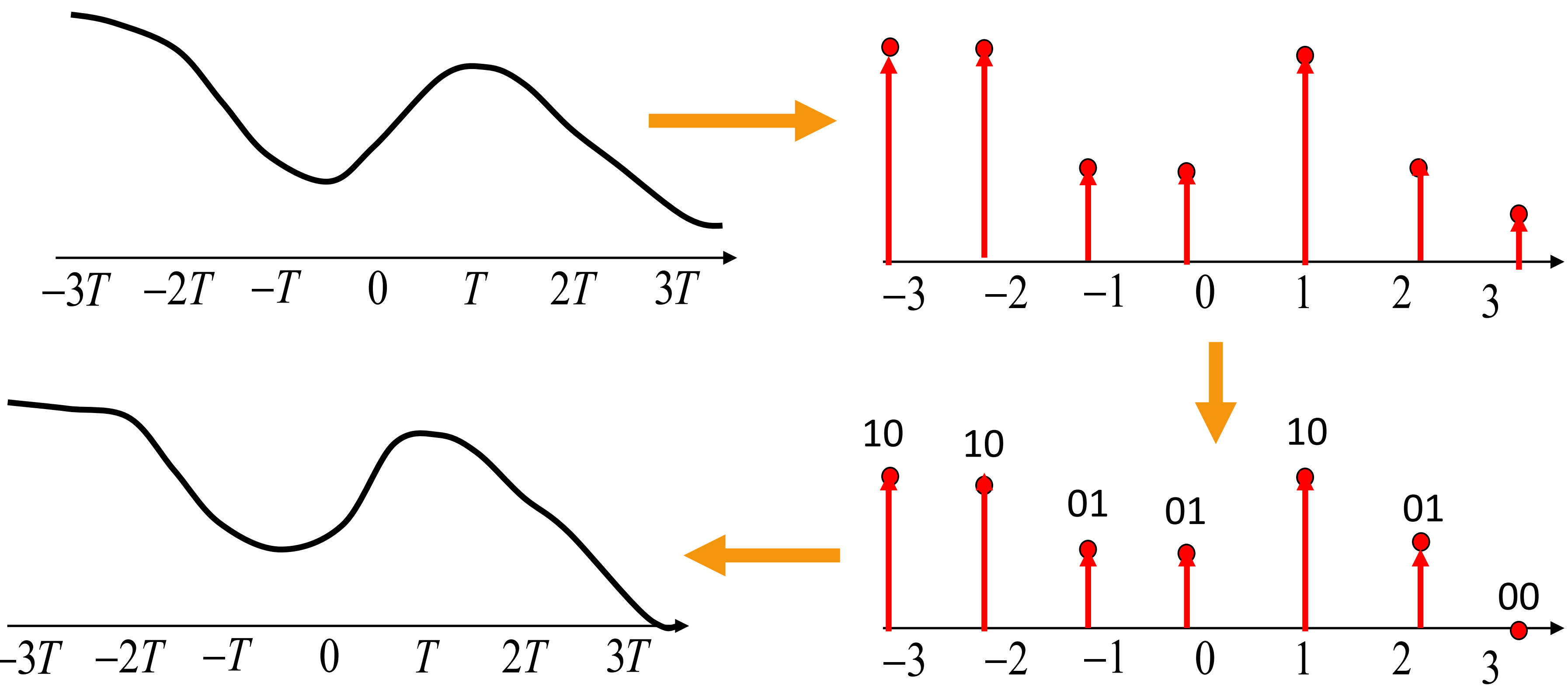
Chapter 7-1. 采样 Sampling

- **1** 信号的采样
- **2** 信号的重建
- **3** 欠采样

引言

- 对连续信号进行数字处理是信息处理技术发展的趋势.

连续信号 → 采样 → 量化 → 编码 → 数字信号 $\xrightarrow{\text{重建}}$ 连续信号



引言

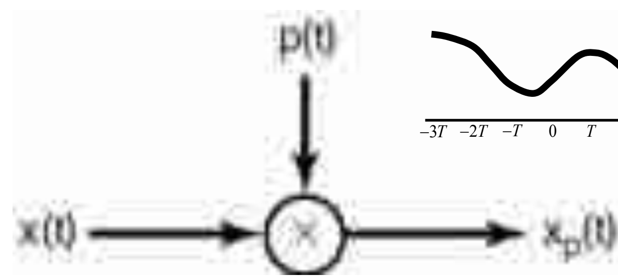
连续信号 → 采样 → 量化 → 编码 → 数字信号 $\xrightarrow{\text{重建}}$ 连续信号

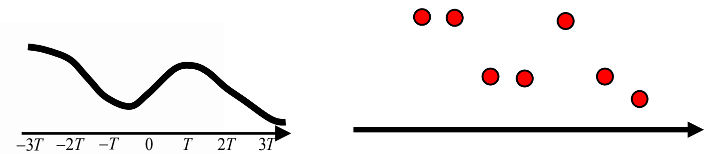
● **采样** 从一个连续时间信号中按照一定时间间隔提取一系列离散样本值的过程.

连续信号 → 采样 → 离散时间信号/采样信号

● **采样模型**

- 冲激串采样
- 零阶保持采样





$$x_p(t) = x(t)\,p(t)$$

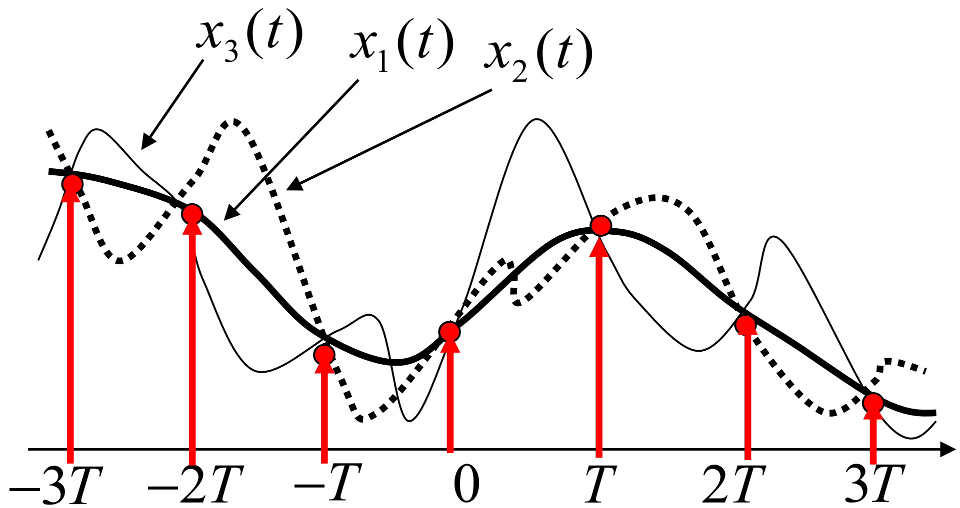
脉冲串采样

● **均匀采样与非均匀采样** 采样间隔相同为均匀采样，否则为非均匀采样

● **重建** 样本内插

- 带限内插重建（理想重建）
- N阶多项式的内插重建（非理想重建）

用样本表示连续时间信号

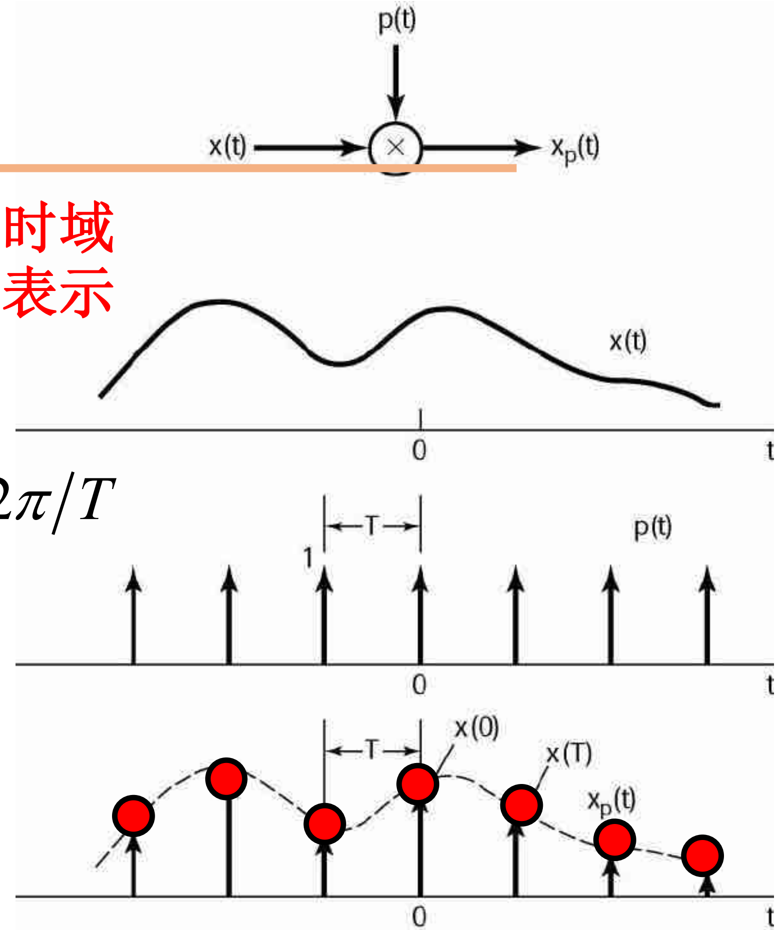


不同的连续信号采样后的样本序列可能完全相同，必须合理选择采样频率(间隔)。

同一个离散时间信号可能对应着不同的连续时间信号。

如何选择采样频率,保证信号表示的唯一性?

理想采样-----冲激串采样



时域
表示

采样函数

冲激串
函数

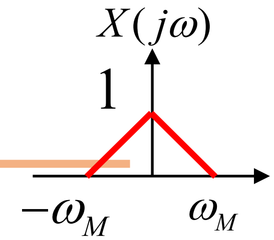
$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

$$x_p(t)=x(t)p(t)$$

$$\omega_s=2\pi/T$$

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

理想采样-----冲激串采样



时域分析

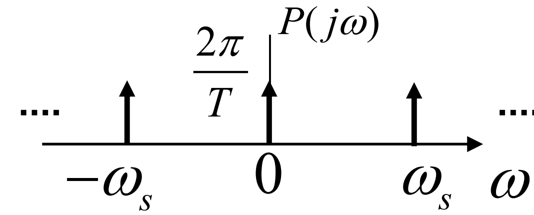
$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

$$x_p(t)=x(t)p(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

频域分析

$$\rightarrow P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$



相乘性质

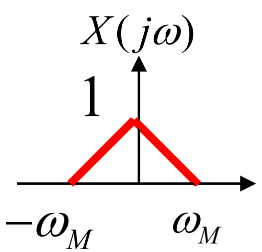
信号与单位冲激信号的卷积等于信号的移位

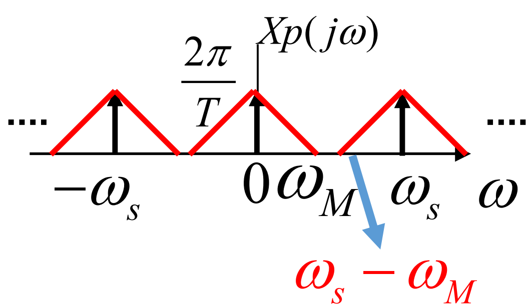
$$X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}[X(j\omega)*P(j\omega)]$$

$$=\frac{2\pi}{2\pi T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$

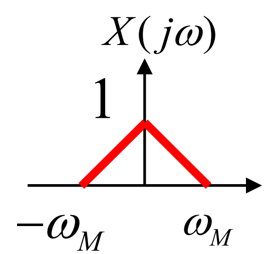
$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$

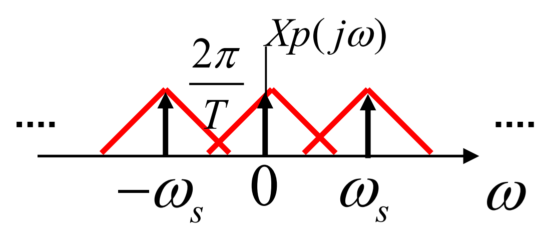
无重叠





有重叠





目标

$$\omega_s-\omega_M>\omega_M$$

$$\downarrow$$

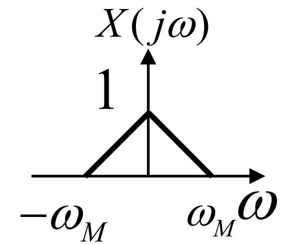
$$\omega_s>2\omega_M$$

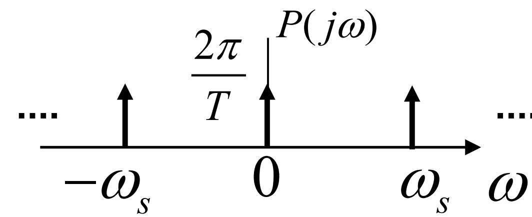
信号的理想采样与理想重建

采样定理

设x(t)是某一个**带限**信号，在$|\omega|>\omega_M$ 时，$X(j\omega)=0$。

若采样频率 $\omega_s > 2\omega_M$，其中 $\omega_s = 2\pi/T$，那么x(t)就**唯一**地由其样本x(nT) $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ 所确定。

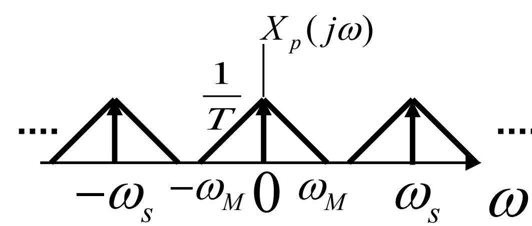




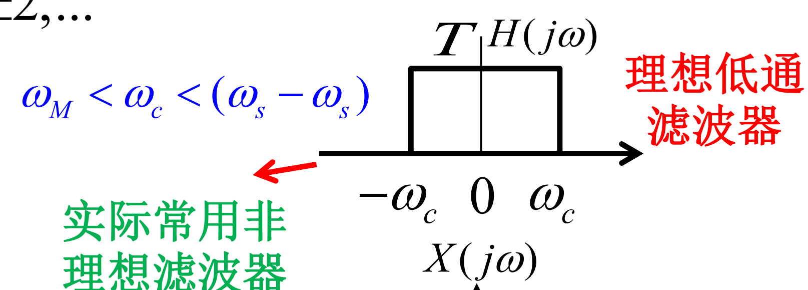
信号理想恢复/重建

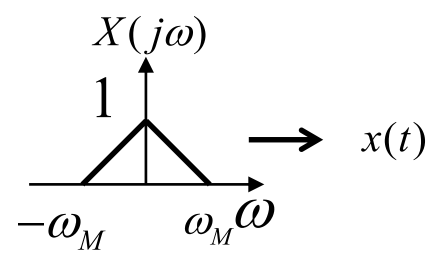
已知样本 x(nT) $n=0, n=\pm1,\pm2,\ldots$

恢复x(t)的方法是：产生一个**周期冲激**串，其幅度为采样样本值x(nT) $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$



使该冲激串通过一个**增益为T**，截止频率大于w_M，而小于w_s-w_M的**理想低通滤波器**，该滤波器的输出就是*x*(t)。



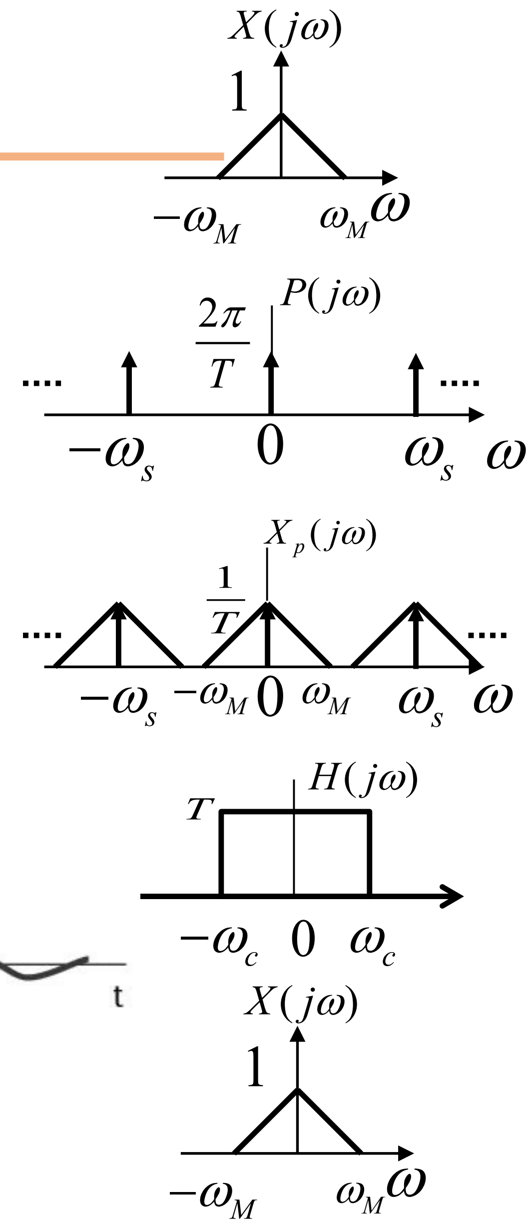


$2\omega_M$ **Nyquist rate** 奈奎斯特率

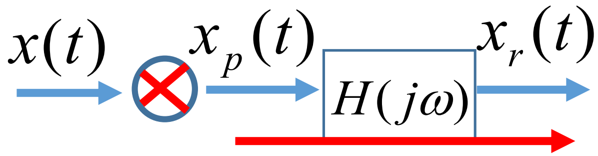
ω_M **Nyquist frequency** 奈奎斯特频率

7-1 7-2 7-3(a)(c) 7-4(b)(c)(d)

信号的理想采样与理想重建

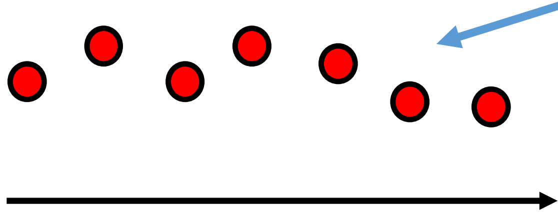


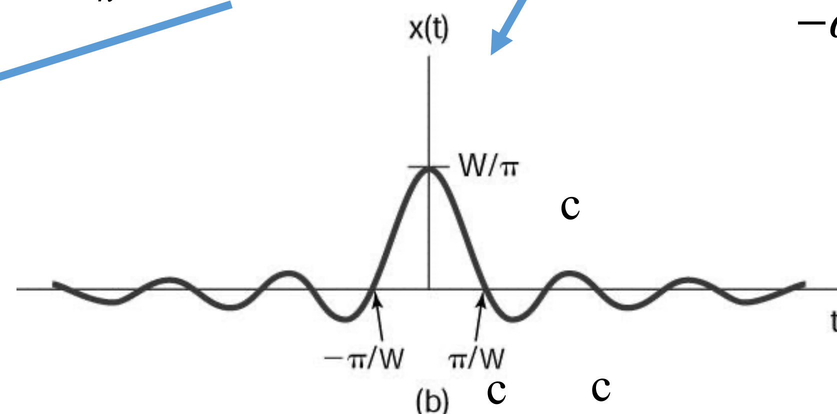
进一步解释



$$X_r(j\omega)=X_p(j\omega)H(j\omega)$$

$$x_r(t)=(x_p(t)*h(t)) \quad = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p(nT)h(t-nT)$$





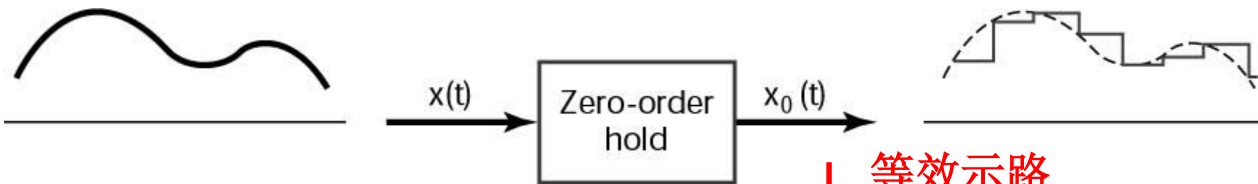
通过移位sinc信号h(t-nT)的加权叠加实现信号的重建，加权值就是原始信号的冲激采样值。

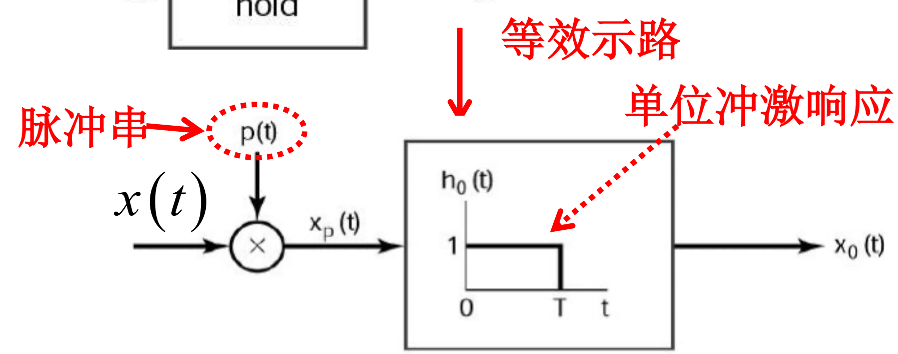
零阶保持采样与信号理想重建

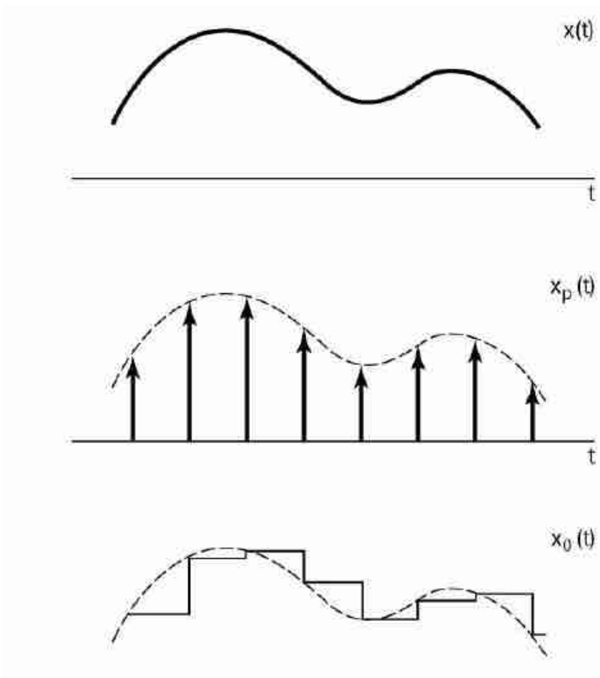
零阶保持采样的含义

理想脉冲信号产生困难，实际一般采用零阶保持方式产生采样信号：保持某瞬间nT对x(t)的采样值，直到下一个时刻的样本被采到为止。

零阶保持采样的等效表示





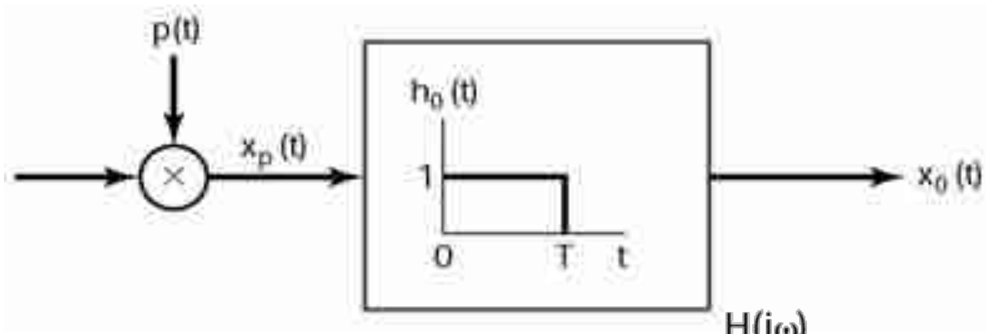


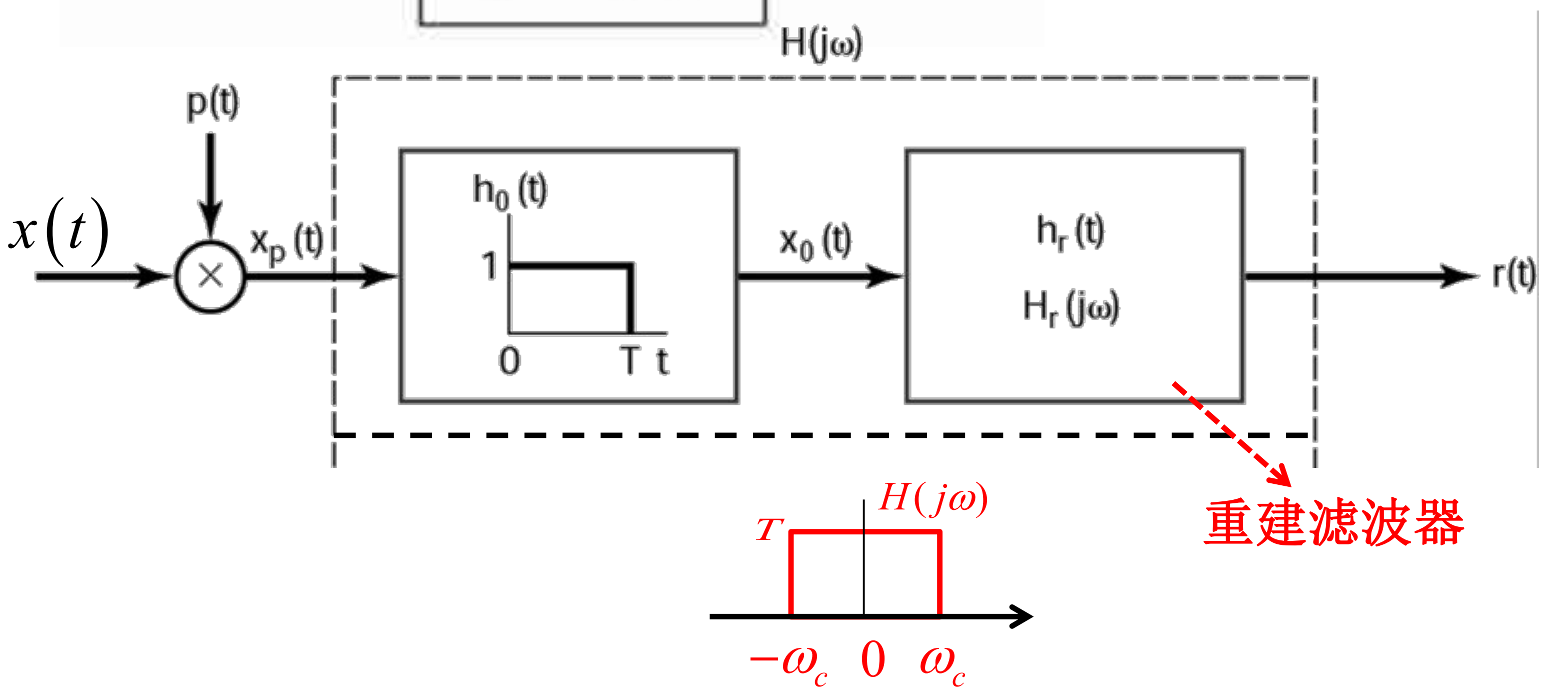
$$x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$x_0(t) = x_p(t) * h_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h_0(t-nT)$$

零阶保持采样与信号理想重建

零阶保持采样的信号理想重建 ----基于低通滤波器的理想重建

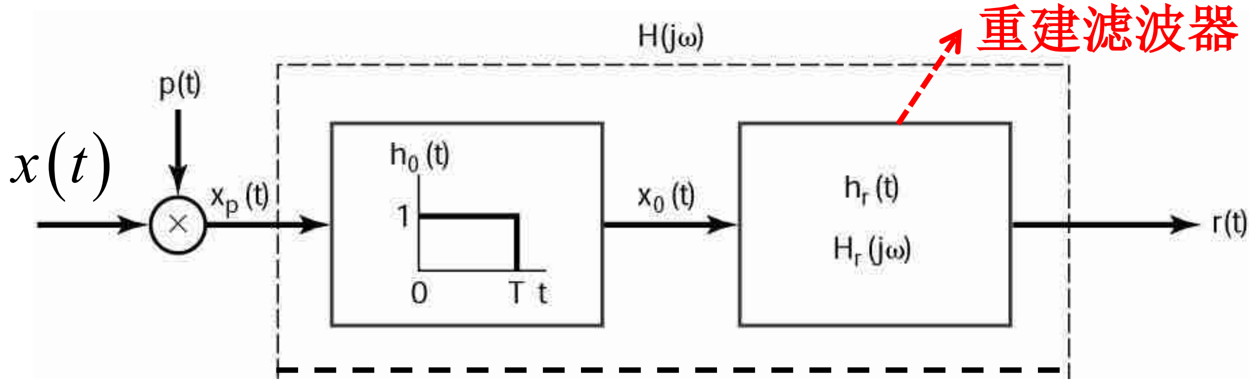


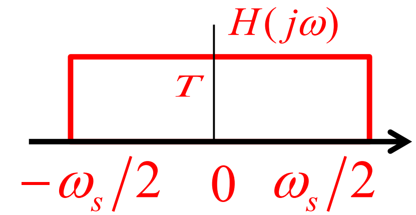


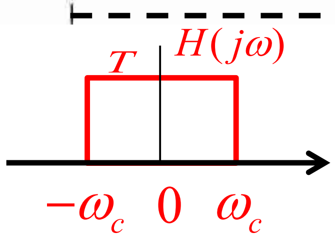
零阶保持采样与信号理想重建

零阶保持采样的信号理想重建 ----基于滤波器的理想重建

重建滤波器





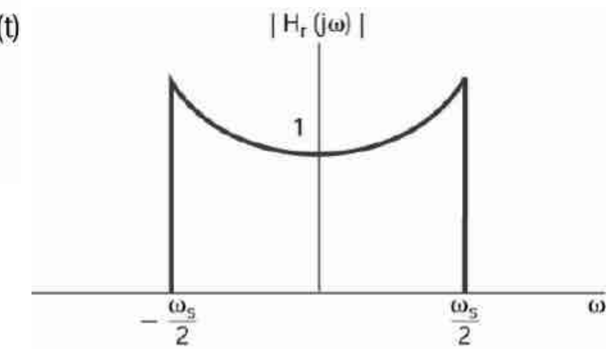


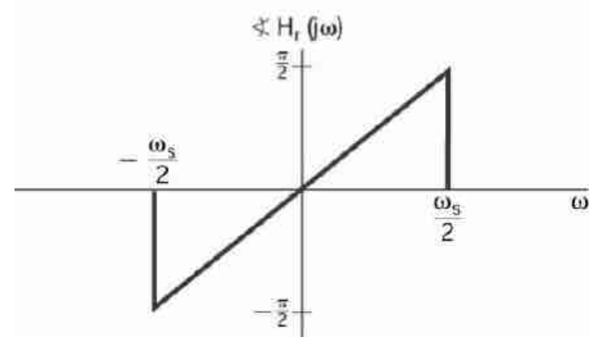
理想低通滤波器

$$H_0(j\omega)H_r(j\omega)=H(j\omega)$$

$$H_0(j\omega)=e^{-j\frac{\omega T}{2}}\frac{2\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}$$

$$H_r(j\omega)=\frac{H(j\omega)}{H_0(j\omega)}=e^{j\frac{\omega T}{2}}\frac{\omega H(j\omega)}{2\sin(\frac{\omega T}{2})}=e^{j\frac{\omega T}{2}}\frac{\omega T}{2\sin(\frac{\omega T}{2})}$$





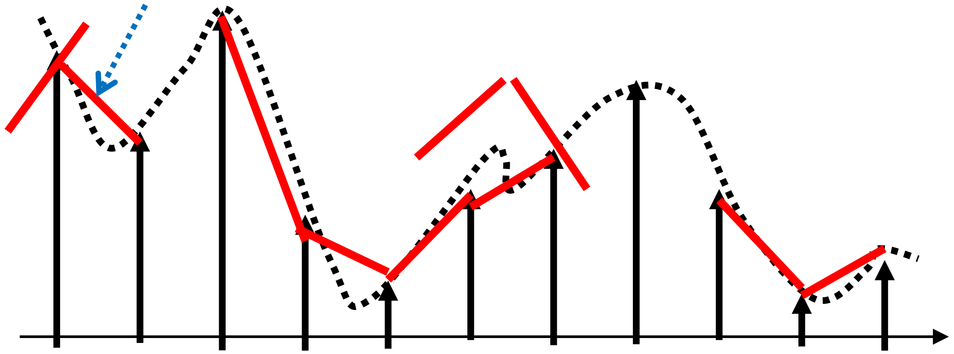
$\omega_c=\omega_s/2$ 时重建滤波器的频率特性

基于内插的信号重建

什么是内插

用离散样本值重建某一函数的过程。重建结果可以是近似的，也可以是精确的。

线性内插



简单内插方法

- 零阶保持　采样值直接作为输出
- 线性内插　将相邻样本点用直线直接连接起来

其它插方法

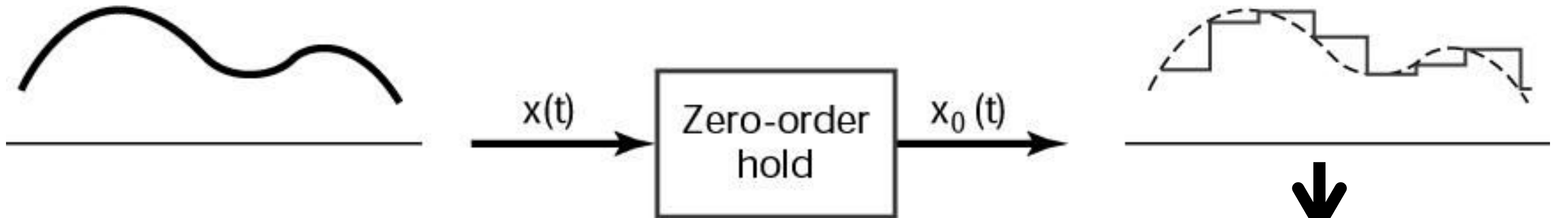
带限内插

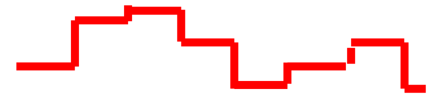
高阶保持

高阶多项式拟合等

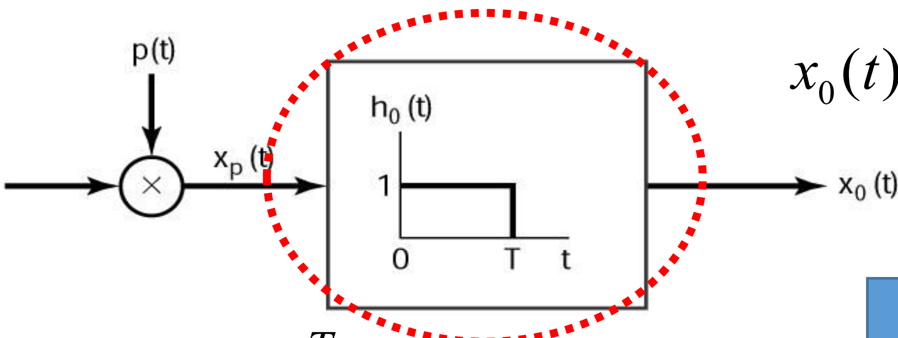
基于零阶保持内插的信号重建

零阶保持输出 采样值直接作为输出。

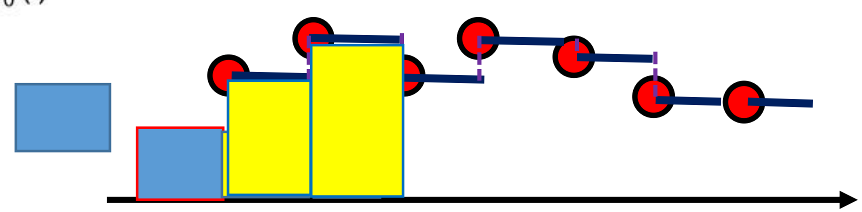




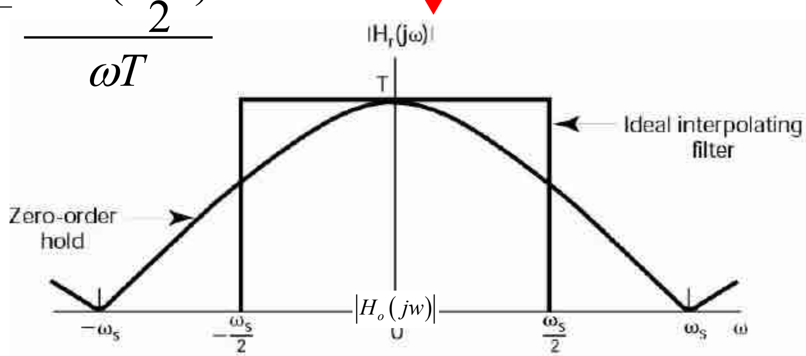
单位冲击响应与传输函数模特性



$$x_0(t) = x_p(t) * h_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h_0(t-nT)$$



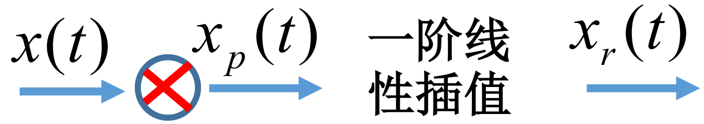
$$H_0(j\omega) = e^{-j\frac{\omega T}{2}} \frac{2\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T}$$



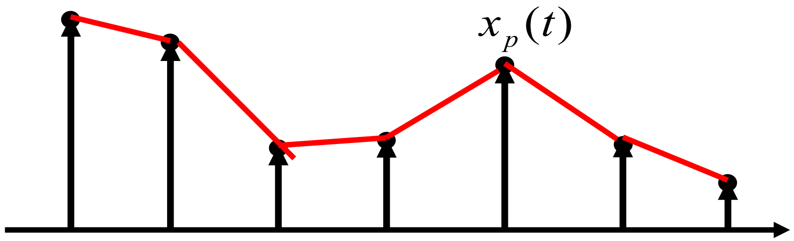
特点

实现简单；
不平滑；重建效果较粗糙

基于一阶保持的信号重建



线性插值（一阶保持）

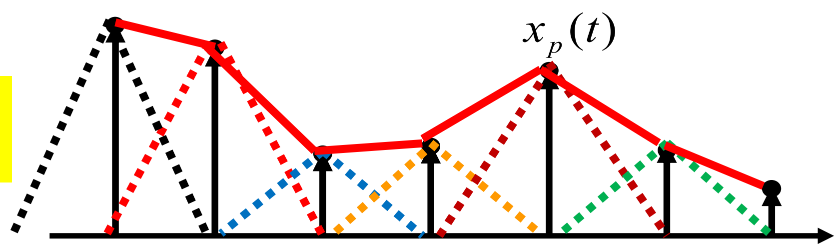


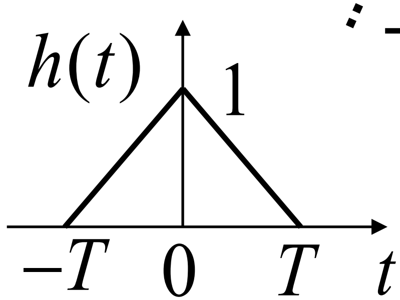
特点

重建的信号是连续的；
重建效果高于零阶保持。

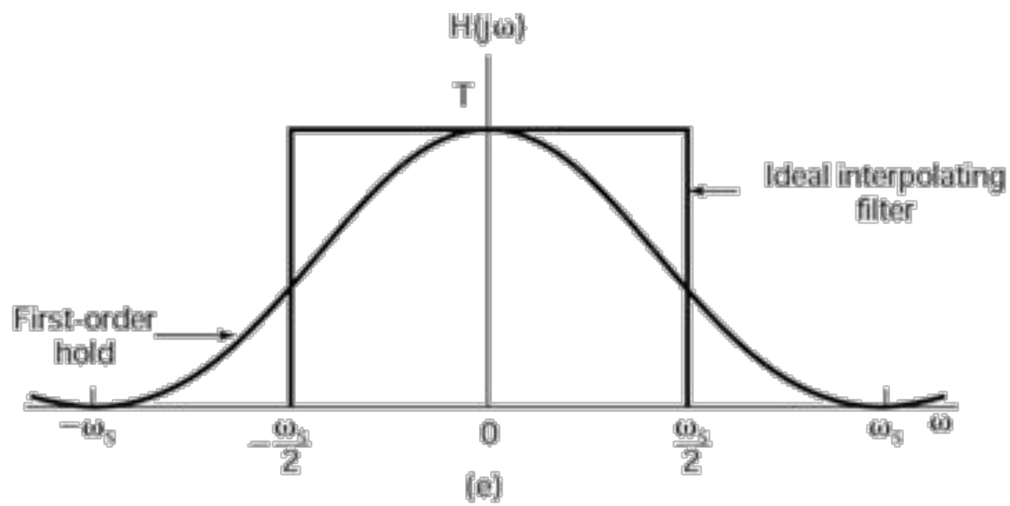
推导说明

传输函数



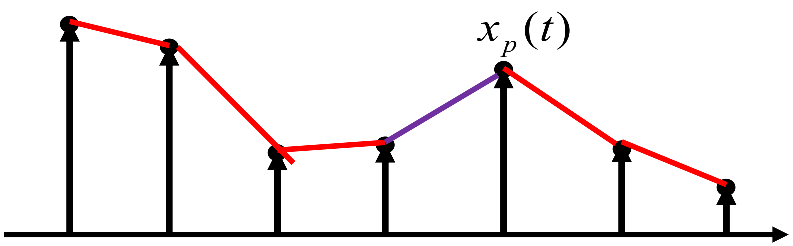


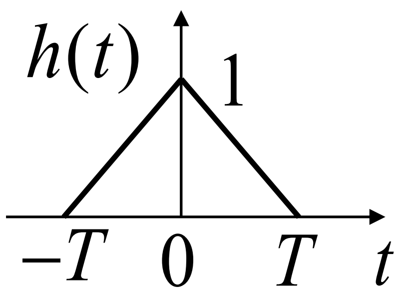
$$H(j\omega)=\frac{1}{T}\left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}\right]^2$$

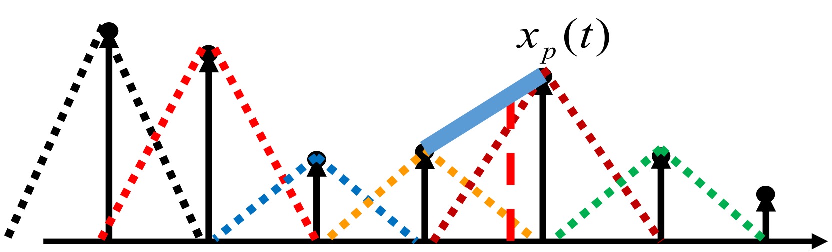


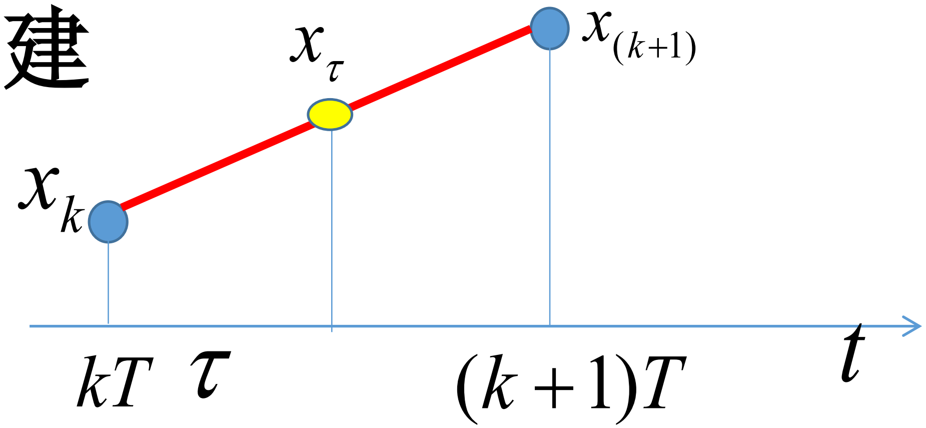
基于一阶保持的信号重建

线性插值的推导说明



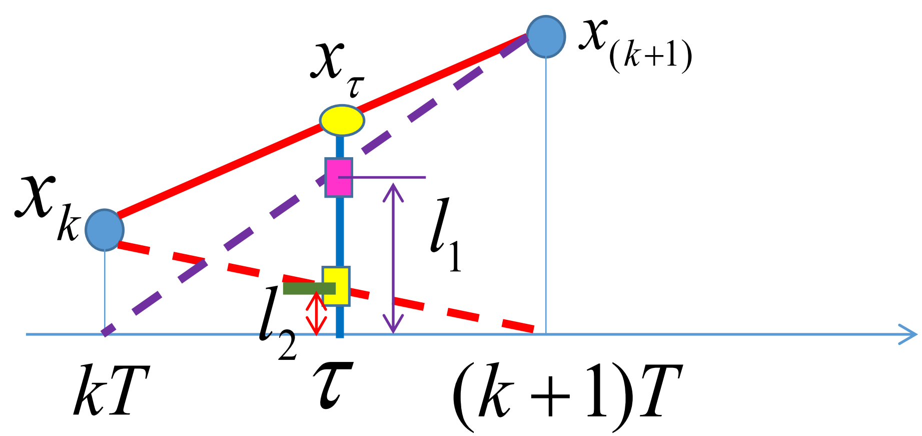






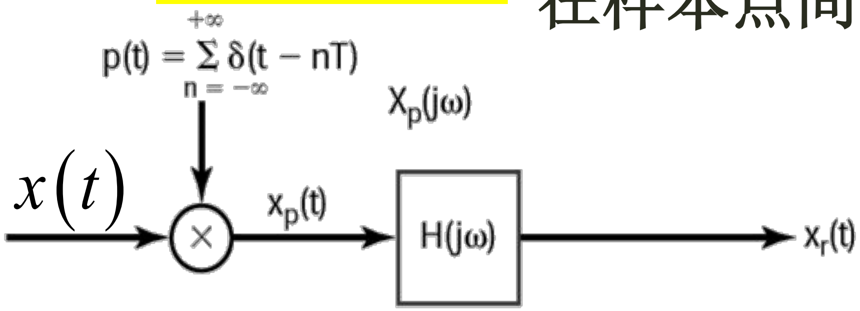
$$\frac{x_\tau - x_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\tau - kT}{(k+1)T - kT}$$

$$x_\tau = \underbrace{\frac{x_{k+1}(\tau - kT)}{(k+1)T - kT}}_{l_1} + \underbrace{\frac{x_k\left[(k+1)T - \tau\right]}{(k+1)T - kT}}_{l_2}$$

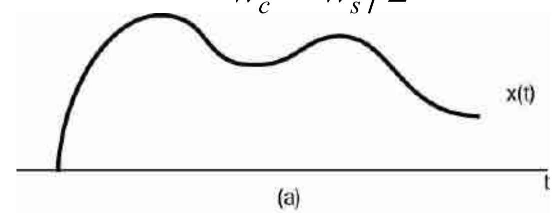


基于带限内插的信号重建（理想重建）

带限内插 用理想低通滤波器的单位冲激响应sinc函数在样本点间进行内插。

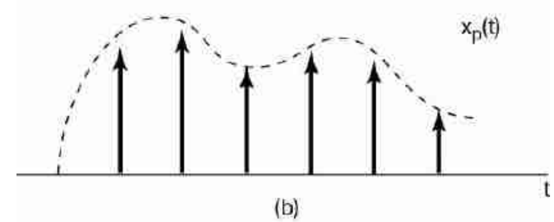


$$w_c = w_s/2$$



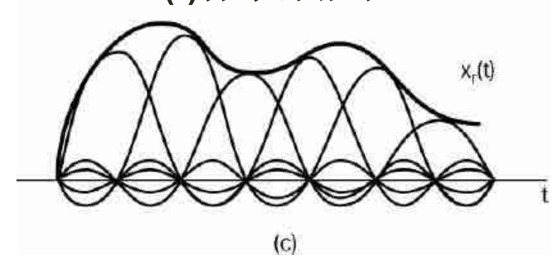
(a)

原始信号



(b)

x(t)样本冲激串



(c)

Sinc函数内插结果

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

$$H(j\omega)=\begin{cases}T & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \rightarrow \quad h(t)=\frac{T\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x_r(t)=x_p(t)*h(t)$$

$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)h(t-nT)$$

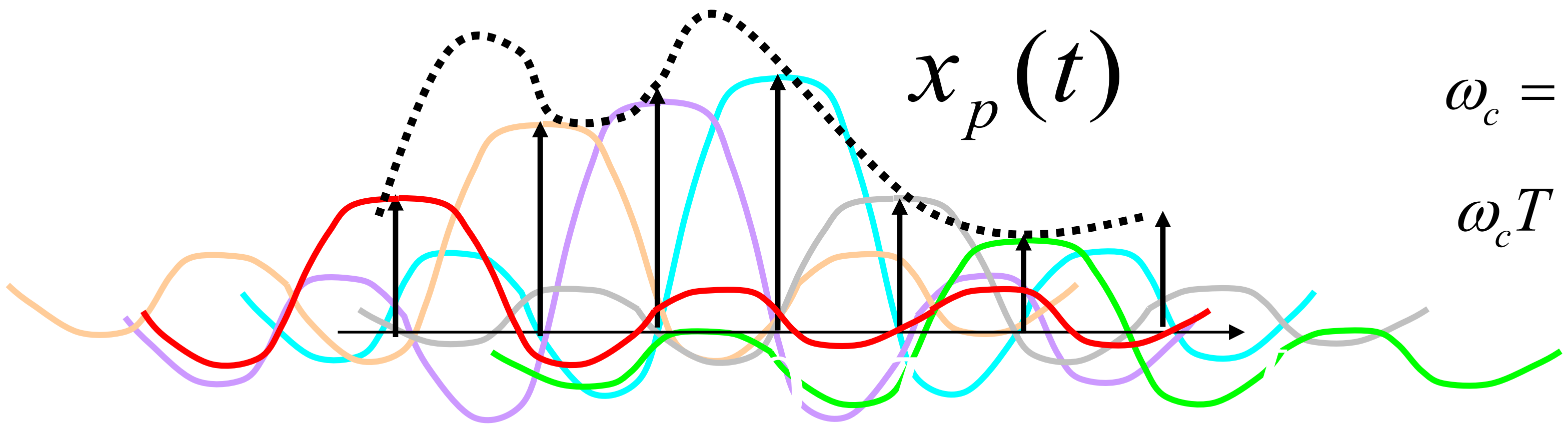
$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\frac{T\sin(\omega_c(t-nT))}{\pi(t-nT)}$$

$$h(t)=\frac{\omega_c T\sin(\omega_c t)}{\pi\omega_c t}$$

基于带限内插的信号重建

Sinc函数内插过程示意

$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\frac{\omega_c T}{\pi}\frac{\sin\left(\omega_c\left(t-nT\right)\right)}{\omega_c\left(t-nT\right)}$$



$$\omega_c=\frac{\omega_s}{2}$$

$$\omega_c T=\pi$$

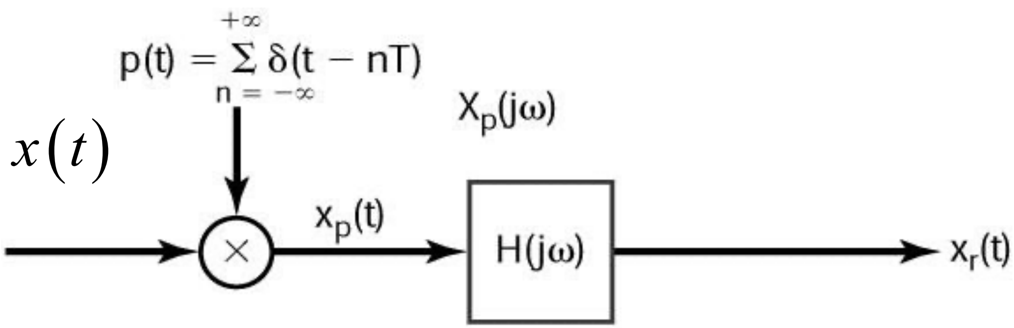
特点

- 利用理想低通滤波器的单位冲击响应进行内插，效果好；如果采样频率能够满足采样定理的要求，则能完全实现信号的重建。
- 计算复杂。

欠采样效果：混叠

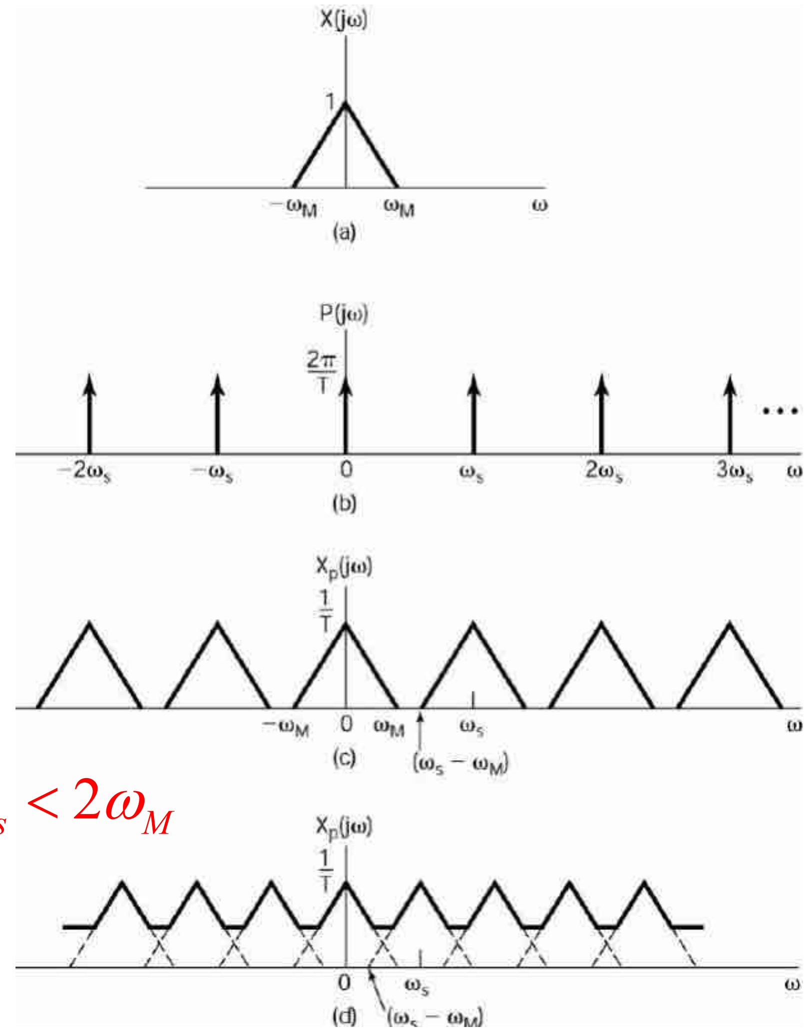
混叠现象　采样频率 $\omega_s < 2\omega_M$ 而产生的频谱重叠现象

$$x_r(t)\begin{cases} = x(nT) & n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \neq x(t) & \text{其它} \end{cases}$$



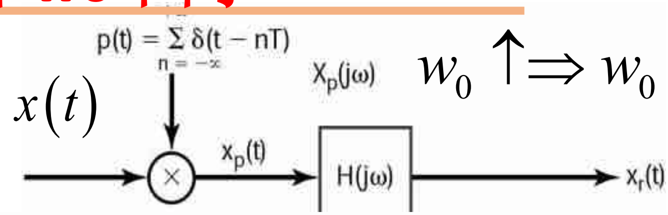
高于采样频率一半的频率成分将被重建成低于采样频率一半的信号。

$\omega_s < 2\omega_M$



欠采样效果：混叠

假设采样率固定，即ws固定，信号的频率w0不同

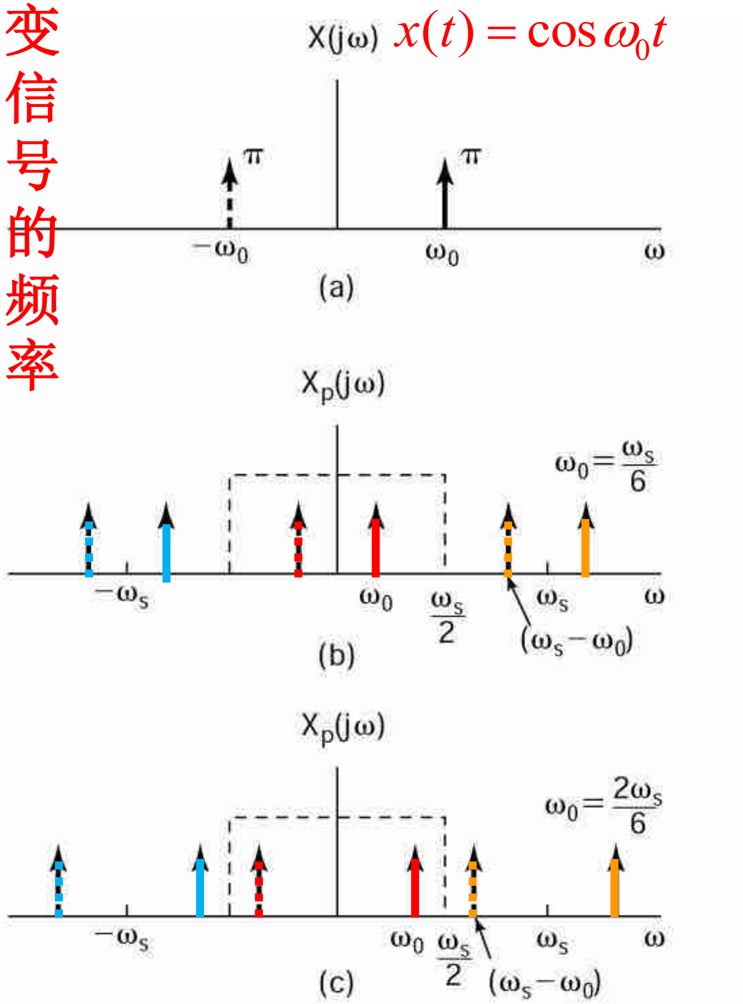


$w_0 \uparrow \Rightarrow w_0 > w_s/2$

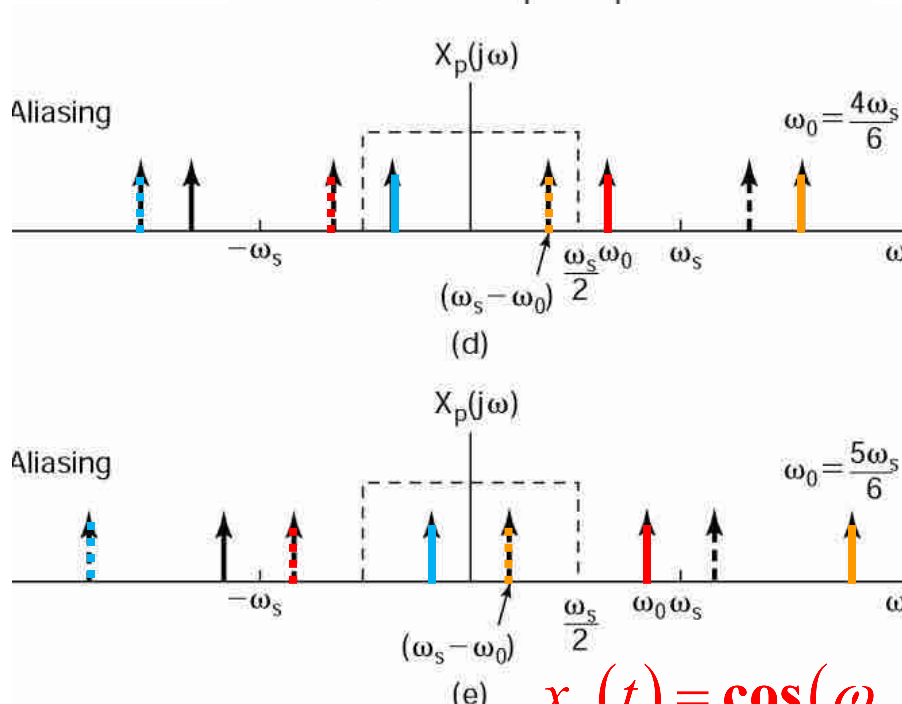
混叠现象的理解：图解分析

改变信号的频率

$x(t)=\cos\omega_0 t$



$x_r(t)=\cos(\omega_0)t$



$x_r(t)=\cos(\omega_s-\omega_0)t$

连续信号进行采样时，若不满足采样定理，采样后信号的频谱会重叠，**高频混成低频.**

欠采样效果：混叠

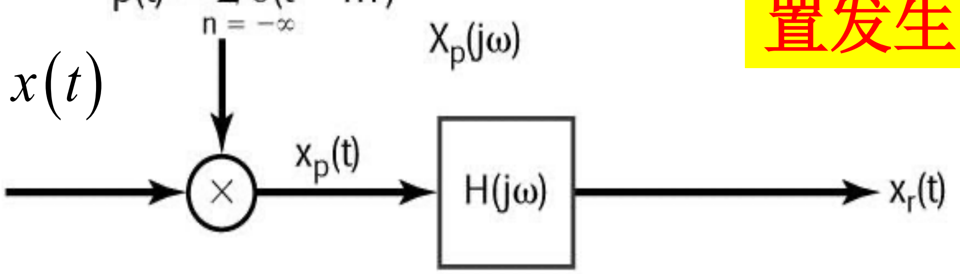
假设采样率固定，即ws固定，信号的频率w0不同

相位倒置 采样频率 $\omega_s < 2\omega_M$ 时而产生的相位符号改变的现象。

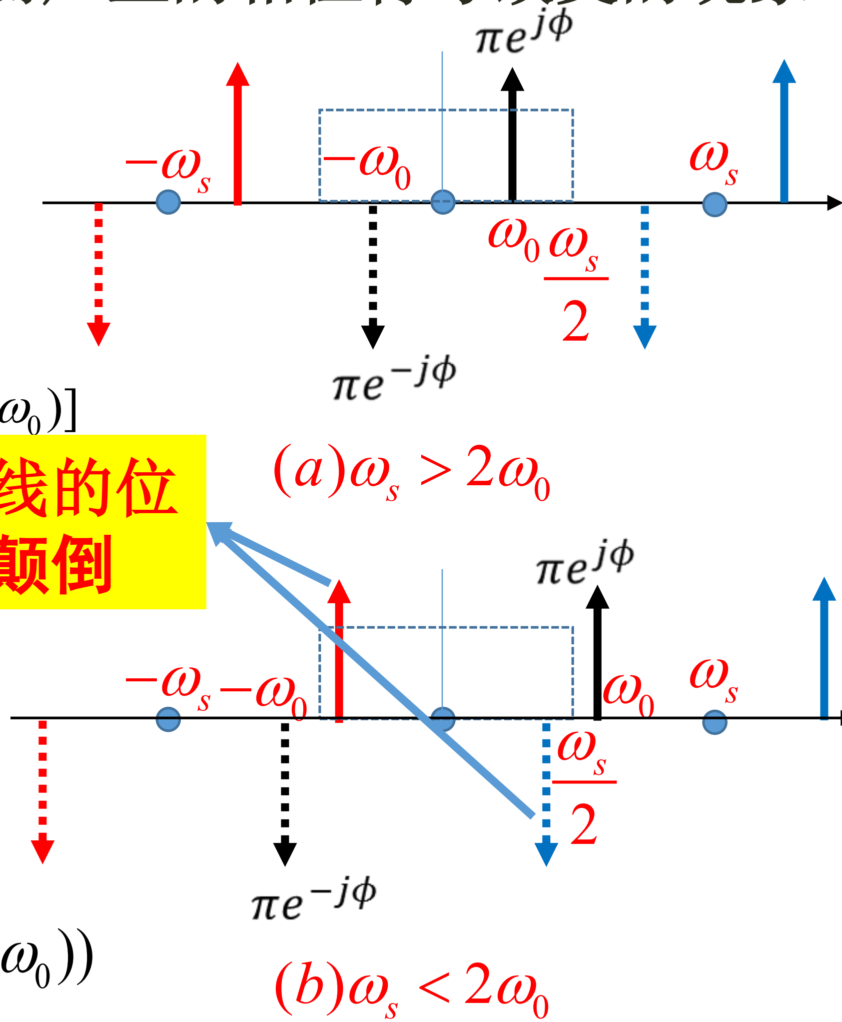
$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$X(j\omega) = \pi e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[e^{j\phi}\delta(\omega - n\omega_s - \omega_0) + e^{-j\phi}\delta(\omega - n\omega_s + \omega_0)]$$



实线与虚线的位置发生了颠倒



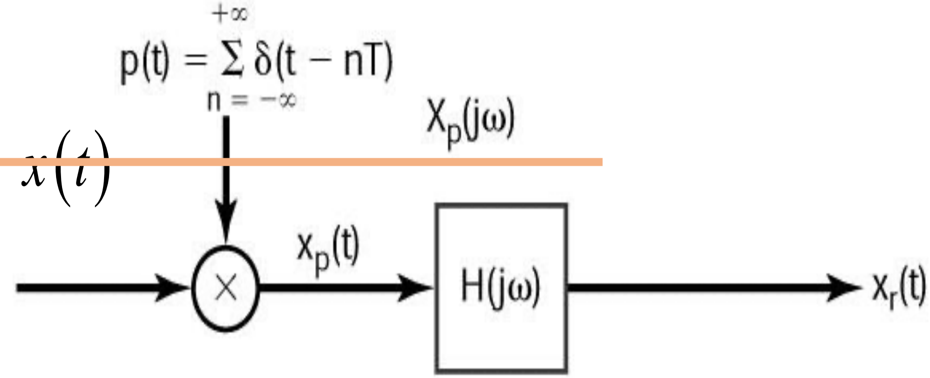
$$X_r(j\omega) = \pi(e^{-j\phi}\delta(\omega - \omega_s + \omega_0) + \delta e^{j\phi}(\omega + \omega_s - \omega_0))$$

$$x_r(t) = \cos((\omega_s - \omega_0)t - \phi) \neq x(t)$$

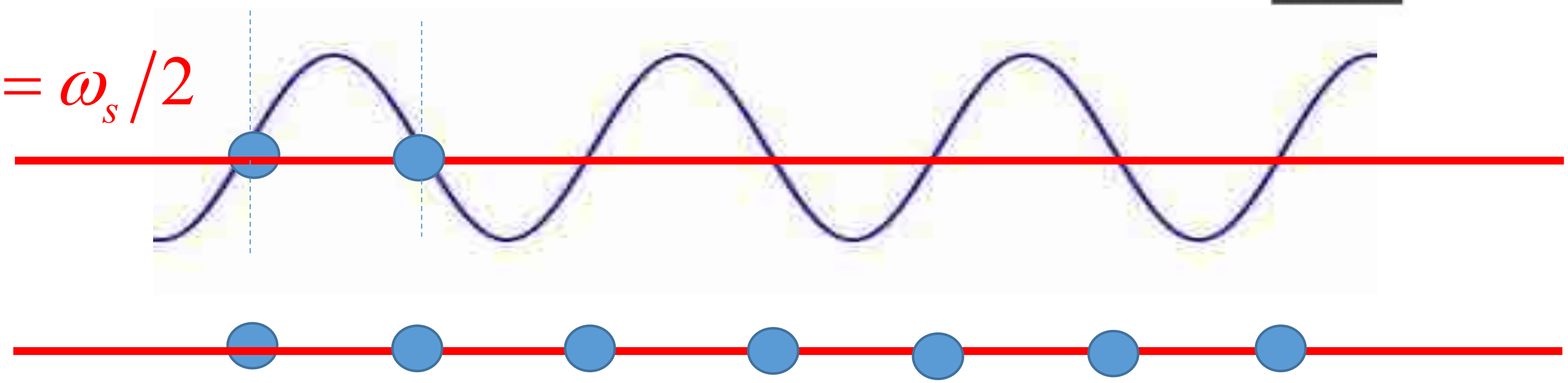
思考: $\omega_0 = \omega_s / 2$?

欠采样效果：混叠

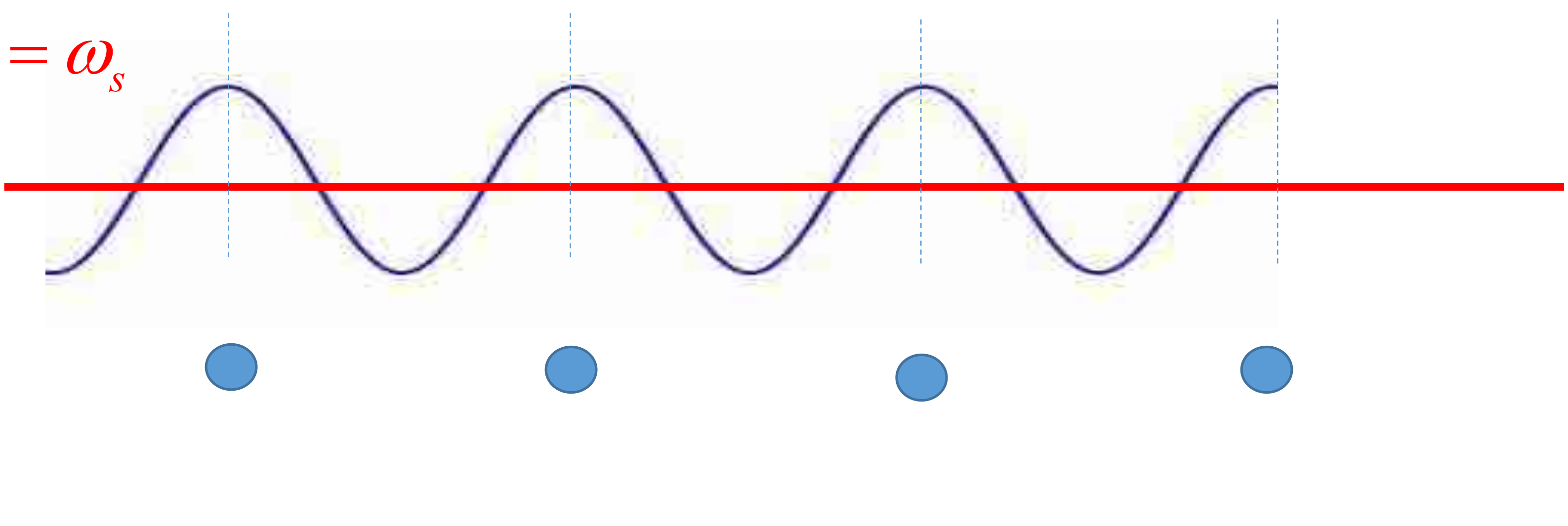
极端例子



$\omega_0=\omega_s/2$



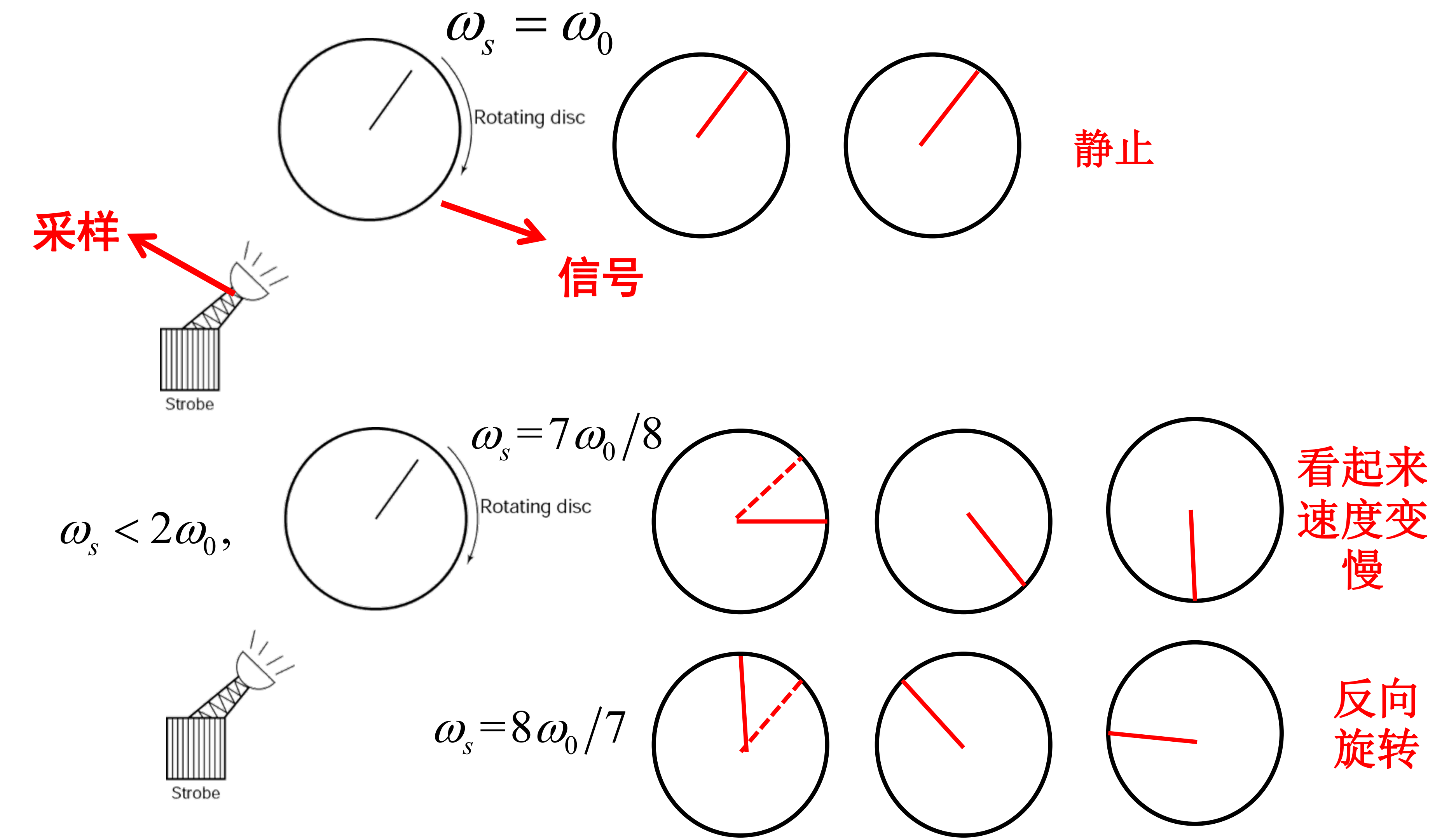
$\omega_0=\omega_s$



欠采样效果-混叠

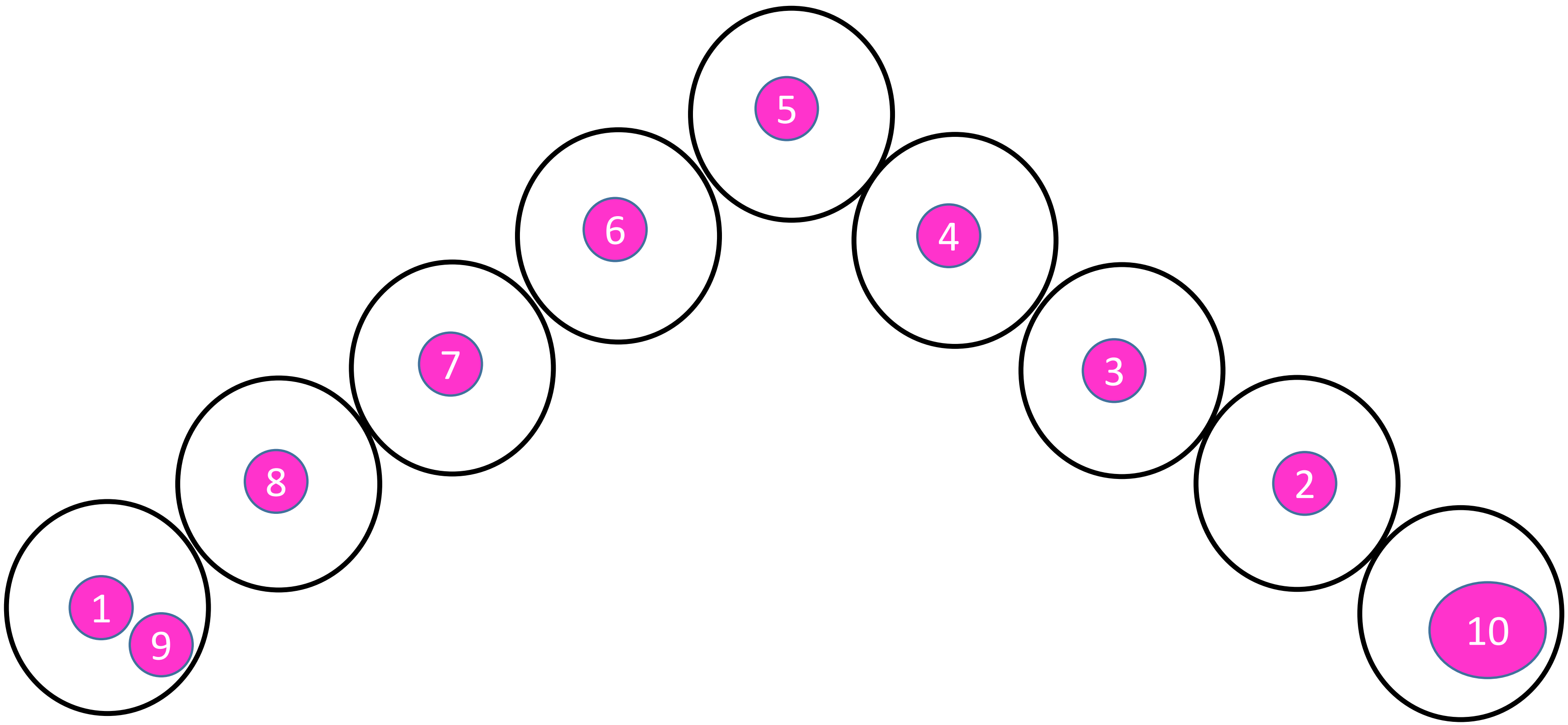
欠采样应用----频闪效应

较高频率被折转到较低的频率中去， 信号看起来变化变慢。



欠采样效果-混叠

欠采样应用----西升的太阳



作业 不考也不交

- **7.3(b)**
- **7.4(a)(d)**
- **7.7(a)**
- **7.8**