7.2 代数系统

代数系统：集合及其上的运算。

7.2 代数系统

- 一．什么是代数系统？
  - 粗略地说，代数系统是由一个特定的“集合”，以及定义于该集合上的若干“运算”所组成，换言之，它是一个“有组织的集合”。
  - **定义 7.12** 非空集合 S 和 S 上 k 个一元或二元运算 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ 组成的系统称为一个**代数系统**，简称**代数**，记作 $<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$.
  - 现代科学在研究各种不同现象时，为了探索它们之间的共同特点，常常利用代数系统这个框架进行研究，得出深刻的结果。

7.2 代数系统

❖ 实例：

- $<N, +>, <Z, +, \cdot>, <R, +, \cdot>$ 是代数系统，

  $+$ 和 $\cdot$ 分别表示普通加法和乘法.

- $<Mn(R), +, \cdot>$ 是代数系统，

  $+$ 和 $\cdot$ 分别表示 n 阶 $(n\geq 2)$ 实矩阵的加法和乘法.

- $<Zn, \oplus, \otimes>$ 是代数系统，$Zn = \{0, 1, \ldots, n-1\}$，

  $\oplus$ 和 $\otimes$ 分别表示模 n 的加法和乘法，对于 $x, y \in Zn$，

  $x \oplus y = (x+y) \bmod n$，$x \otimes y = (xy) \bmod n$

- $<P(S), \cup, \cap, \sim>$ 也是代数系统，

  $\cup$ 和 $\cap$ 为并和交，$\sim$ 为绝对补

7.2 代数系统

- 二．代数系统的成分与表示
- （1）构成代数系统的成分：
  - 集合（也叫载体，规定了参与运算的元素）
  - 运算（这里只讨论有限个二元和一元运算）
  - 代数常数（通常是与运算相关的特异元素：如单位元等）

研究代数系统时，如果把运算具有它的特异元素也作为系统的性质之一，那么这些特异元素可以作为系统的成分，叫做代数常数．

例如：代数系统 $<Z,+,0>$ ：集合 Z, 运算 $+$, 代数常数 0

7.2 代数系统

- （2）代数系统的表示
  - 列出所有的成分：集合、运算、代数常数（如果存在）

    如 $<Z,+,0>$, $<P(S),\cup,\cap,\sim,\Phi,S>$
  - 列出集合和运算，在规定系统性质时不涉及具有单位元的性质（无代数常数）

    如 $<Z,+>$, $<P(S),\cup,\cap,\sim>$
  - 用集合名称简单标记代数系统

    在前面已经对代数系统作了说明的前提下使用

    如代数系统 Z, $P(S)$

7.2 代数系统

❖ 三．同类型与同种代数系统

- **定义 7.13**
  - 1 ）如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们具有相同的构成成分，也称它们是同类型的代数系统．
  - 2 ）如果两个同类型的代数系统规定的运算性质也相同，则称为同种的代数系统．

7.2 代数系统

❖ 实例——三个代数系统的比较

- $V1 = \langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$,
- $V2 = \langle Mn(R), +, \cdot, \theta, E \rangle$, θ 为 n 阶全 0 矩阵，E 为 n 阶单位矩阵
- $V3 = \langle P(B), \cup, \cap, \varnothing, B \rangle$

V_1	V_2	V_3
+ 可交换，可结合 · 可交换，可结合 + 满足消去律 · 满足消去律 · 对 + 可分配 + 对 · 不可分配 + 与 · 没有吸收律	+ 可交换，可结合 · 不可交换，可结合 + 满足消去律 · 不满足消去律 · 对 + 可分配 + 对 · 不可分配 + 与 · 没有吸收律	∪ 可交换，可结合 ∩ 可交换，可结合 ∪ 不满足消去律 ∩ 不满足消去律 ∩ 对∪可分配 ∪ 对∩可分配 ∪ 与∩满足吸收律

- $V1, V2, V3$ 是同类型的代数系统
- *都不是*同种的代数系统

7.2 代数系统

- 从代数系统的构成成分和遵从的算律出发，将代数系统分类，然后研究每一类代数系统的共同性质，并将研究的结果运用到具体的代数系统中去，这种方法就是抽象代数的基本方法，也是代数结构课程的主要内容。

7.2 代数系统

❖ 四、子代数系统

- **定义 7.14** 设 $V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$ 是代数系统，B 是 S 的非空子集，如果 B 对 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ 都是封闭的，且 B 和 S 含有相同的代数常数，则称 $<B, f_1, f_2, \ldots, f_k>$ 是 V 的子代数系统，简称子代数. 有时将子代数系统简记为 B.
- 实例
  - N 是 $<Z, +>$ 的子代数，N 也是 $<Z, +, 0>$ 的子代数
  - $N-\{0\}$ 是 $<Z, +>$ 的子代数，但不是 $<Z, +, 0>$ 的子代数
- 说明：
  - 子代数和原代数是同种的代数系统
  - 对于任何代数系统 $V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$，其子代数一定存在.

7.2 代数系统

❖ 关于子代数的术语

- （1）最大的子代数：就是 V 本身
- （2）最小的子代数：如果令 V 中所有代数常数构成的集合是 B，且 B 对 V 中所有的运算都是封闭的，则 B 就构成了 V 的最小的子代数
- （3）平凡的子代数：最大和最小的子代数称为 V 的平凡的子代数
- （4）真子代数：若 B 是 S 的真子集，则 B 构成的子代数称为 V 的真子代数.

❖ 例 设 $V=\langle Z,+,0\rangle$, 令 $nZ=\{nz \mid z\in Z\}$, n 为自然数，则 nZ 是 V 的子代数

当 $n=1$ 和 0 时，nZ 是 V 的平凡的子代数，其他的都是 V 的非平凡的真子代数.

7.2 代数系统

- 设 V = <Z, +> ，问 3Z, {0}, V 是否为 V 的子代数系统？为什么？如果是，说明其中哪些是平凡的，哪些是真子代数？

解：都是 V 的子代数。

显然 {0} 和 V 关于 + 运算是封闭的。

对于任意的 $3m, 3n \in 3Z$,

$3m+3n=3(m+n) \in 3Z$

3Z 关于 + 运算也是封闭的。

{0} 和 V 是平凡的，{0} 和 3Z 是真子代数。

7.2 代数系统

❖ 例．设 V = <A, ⊕>, 其中 A = P({1,2,3}) ，⊕为集合的对称差，试给出 V 的所有的子代数，并说明哪些是平凡的子代数？哪些是真子代数？

解： A={Φ,{1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}

平凡的： B1={Φ}, V

2 元的： B2 = {Φ, {1}}, B3 = {Φ, {2}}, B4 = {Φ, {3}},

B5 = {Φ, {1, 2}}, B6 = {Φ, {1, 3}}, B7 = {Φ, {2, 3}}, B8 = {Φ,{1, 2, 3}}.

4 元的： B9 = {Φ, {1}, {2}, {1,2}} ， B10 = {Φ, {1}, {3}, {1,3}} ， B11 = {Φ, {2}, {3}, {2,3}}

以上子代数中除了 V 之外，都是真子代数。

7.2 代数系统

❖ 五、积代数

- **定义 7.15** 设 $V_1=<A,\circ>$ 和 $V_2=<B,*>$ 是同类型的代数系统，其中∘和 $*$ 是二元运算，在集合 $A\times B$ 上如下定义二元运算•，$\forall <a_1,b_1>, <a_2,b_2>\in A\times B$，有

$$<a_1,b_1> \bullet <a_2,b_2>=<a_1\circ a_2,\ b_1*b_2>$$

称 $V=<A\times B,\bullet>$ 为 V_1 与 V_2 的**积代数**，记作 $V_1\times V_2$，这时也称 V_1 和 V_2 为 V 的因子代数。

- **例** $V_1=<Z,+>$, $V_2=<M_2(R),\cdot>$, 积代数 $<Z\times M_2(R),\circ>$

$\forall <z_1,M_1>, <z_2,M_2>\in Z\times M_2(R)$，

$$<z_1,M_1>\circ<z_2,M_2> = <z_1+z_2,\ M_1\cdot M_2>$$

$$<5,\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}>\circ<-2,\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}>=<3,\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}>$$

7.2 代数系统

❖ 积代数的性质

- **定理 7.5** 设 $V_1=<S_1,\circ>$ 和 $V_2=<S_2,*>$ 是同类型的代数系统，其中∘和$*$是二元运算．V_1 与 V_2 的积代数是 $V=<S_1\times S_2,\cdot>$
  - (1) 若∘和$*$运算是可交换（可结合、幂等）的，那么•运算也是可交换（可结合、幂等）的
  - (2) 若∘和$*$运算分别具有单位元 e_1 和 e_2，那么•运算也具有单位元 $<e_1,e_2>$
  - (3) 若∘和$*$运算分别具有零元 θ_1 和 θ_2，那么•运算也具有零元 $<\theta_1, \theta_2>$
  - (4) 若 x 关于∘的逆元为 x^{-1}, y 关于$*$的逆元为 y^{-1}，那么 $<x,y>$ 关于•运算也具有逆元 $<x^{-1},y^{-1}>$

7.2 代数系统

$V_1=<Z_3, \oplus_3>$, $V_2=<A, \oplus_6>$, $Z_3=\{0,1,2\}$, $A = \{0,2,4\}$，其运算表为

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\oplus_6$	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

把左边表中 1 和 2 分别换成 2 和 4，就可以得到右边的表 . 这个替换可以表示为函数 :

$f = \{<0,0>, <1,2>, <2,4>\}$

在双射函数 f 的作用下，代数系统 V_1 转换为 V_2.

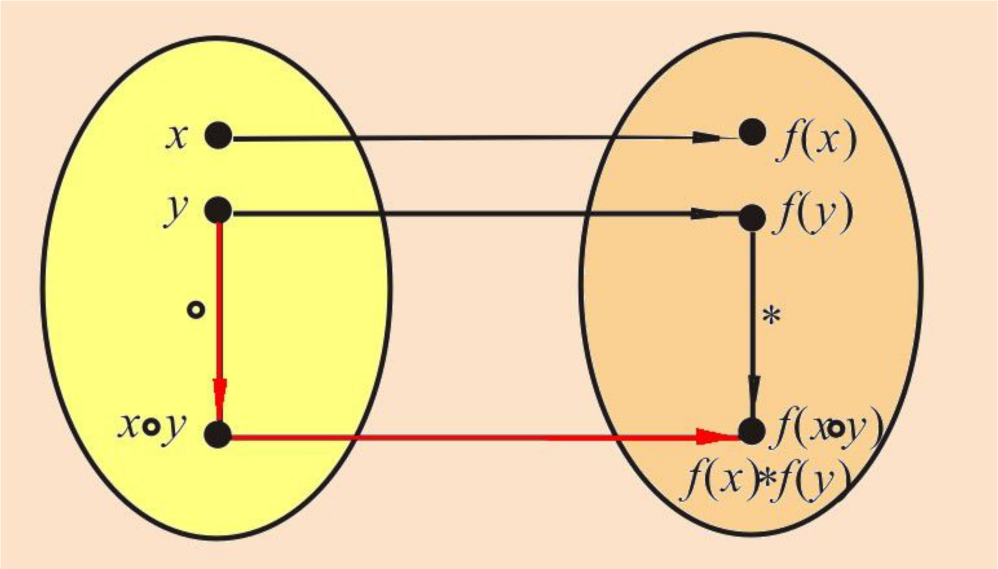
7.2 代数系统

❖ 六、同态映射的定义

- **定义 7.16** 设 $V_1=<A,\circ>$ 和 $V_2=<B,*>$ 是同类型的代数系统，其中 $\circ$ 和 $*$ 是二元运算．$f: A\rightarrow B$，且 $\forall x,y\in A$ ，有

$$f(x\circ y)=f(x)*f(y)$$

则称 f 为 V_1 到 V_2 的**同态映射**，简称**同态**．



7.2 代数系统

例 1 $V=\langle R^*,\cdot\rangle$，判断下面的哪些函数是 V 到 V 的同态？

(1) $f(x)=2x$　　(2) $f(x)=x^2$

(3) $f(x)=1/x$　　(4) $f(x)=-x$

解： (1) 不是同态，$f(2\cdot 2)=f(4)=8$, $f(2)\cdot f(2)=4\cdot 4=16$

(2) 是同态，$f(x\cdot y)=(x\cdot y)^2=x^2\cdot y^2=f(x)\cdot f(y)$

(3) 是同态，$f(x\cdot y)=1/(x\cdot y)=1/x\cdot 1/y=f(x)\cdot f(y)$

(4) 不是同态，$f(1\cdot 1)=f(1)=-1$, $f(1)\cdot f(1)=(-1)\cdot(-1)=1$

❖ 七、同态映射的分类

- 同态映射 f
  - 如果是单射，则称为**单一同态（或单同态）**；
  - 如果是多对一的映射，则称为**多一同态**；
  - 如果是满射，则称为**满同态**，这时称 V_2 是 V_1 的**同态像**，记作 $V_1 \sim V_2$ ；
  - 如果是双射，则称为**同构**，也称代数系统 V_1 同构于 V_2 ，记作 $V_1 \cong V_2$.
  - 对于代数系统 V ，它到自身的同态称为**自同态**.
  - 类似地可以定义**单自同态**、**满自同态**和**自同构**.
  - 任意 x 属于 V_1 ，若 f(x)=e', 其中 e' 是 V_2 的单位元，则 f 称作**零同态**

7.2 代数系统

❖ 八、同态映射的实例

(1) 设 $V=\langle Z,+\rangle$ ，$\forall a\in Z$ ，令

$$f_a : Z\to Z \ ,\ f_a(x)=ax$$

那么 f_a 是 V 的自同态．因为$\forall x,y\in Z$ ，有

$$f_a(x+y) = a(x+y) = ax+ay = f_a(x)+f_a(y)$$

当 $a = 0$ 时称 f_0 为零同态；当 $a=\pm 1$ 时，称 f_a 为自同构；除此之外其他的 f_a 都是单自同态．

(2) 设 $V_1=\langle Q,+\rangle$, $V_2=\langle Q^*,\cdot\rangle$ ，其中 $Q^*=Q-\{0\}$ ，令

$$f : Q\to Q^*, f(x)=e^x$$

那么 f 是 V_1 到 V_2 的同态映射，因为$\forall x,y\in Q$ 有

$$f(x+y)=e^{x+y}=e^x\cdot e^y=f(x)\cdot f(y).$$

不难看出 f 是单同态．

7.2 代数系统

（3）$V = <Z_6, \oplus>$，$f_p: Z_6 \to Z_6$，$f_p(x) = (px) \bmod 6,\ p = 0,1,2,3,4,5$

$p = 0$, f_0 零同态

$p = 1$，f_1 恒等映射，自同构

$p = 2$，$f_2 = \{<0,0>,<1,2>,<2,4>,<3,0>,<4,2>,<5,4>\}$,

$p = 3$，$f_3 = \{<0,0>,<1,3>,<2,0>,<3,3>,<4,0>,<5,3>\}$

$p = 4$，$f_4 = \{<0,0>,<1,4>,<2,2>,<3,0>,<4,4>,<5,2>\}$

$p = 5$，$f_5 = \{<0,0>,<1,5>,<2,4>,<3,3>,<4,2>,<5,1>\}$ 自同构

可以推广到 $f_p: Z_n \to Z_n$，存在 n 个自同态

$f_p(x \oplus y) = (p(x \oplus y)) \bmod n = (px) \bmod n \oplus (py) \bmod n = f_p(x) \oplus f_p(y)$

(4) $V_1=\langle Z,+\rangle$, $V_2=\langle Z_n,\oplus\rangle$, $f: Z\to Z_n$,

$$f(x) = (x) \bmod n$$

$\forall x, y\in Z$,

$$f(x+y) = (x+y) \bmod n$$

$$= (x) \bmod n \oplus (y) \bmod n = f(x) \oplus f(y)$$

例如，$n=3$.

$$f(3x)=0,\ f(3x+1)=1,\ f(3x+2) = 2$$

f 为满同态 .

7.2 代数系统

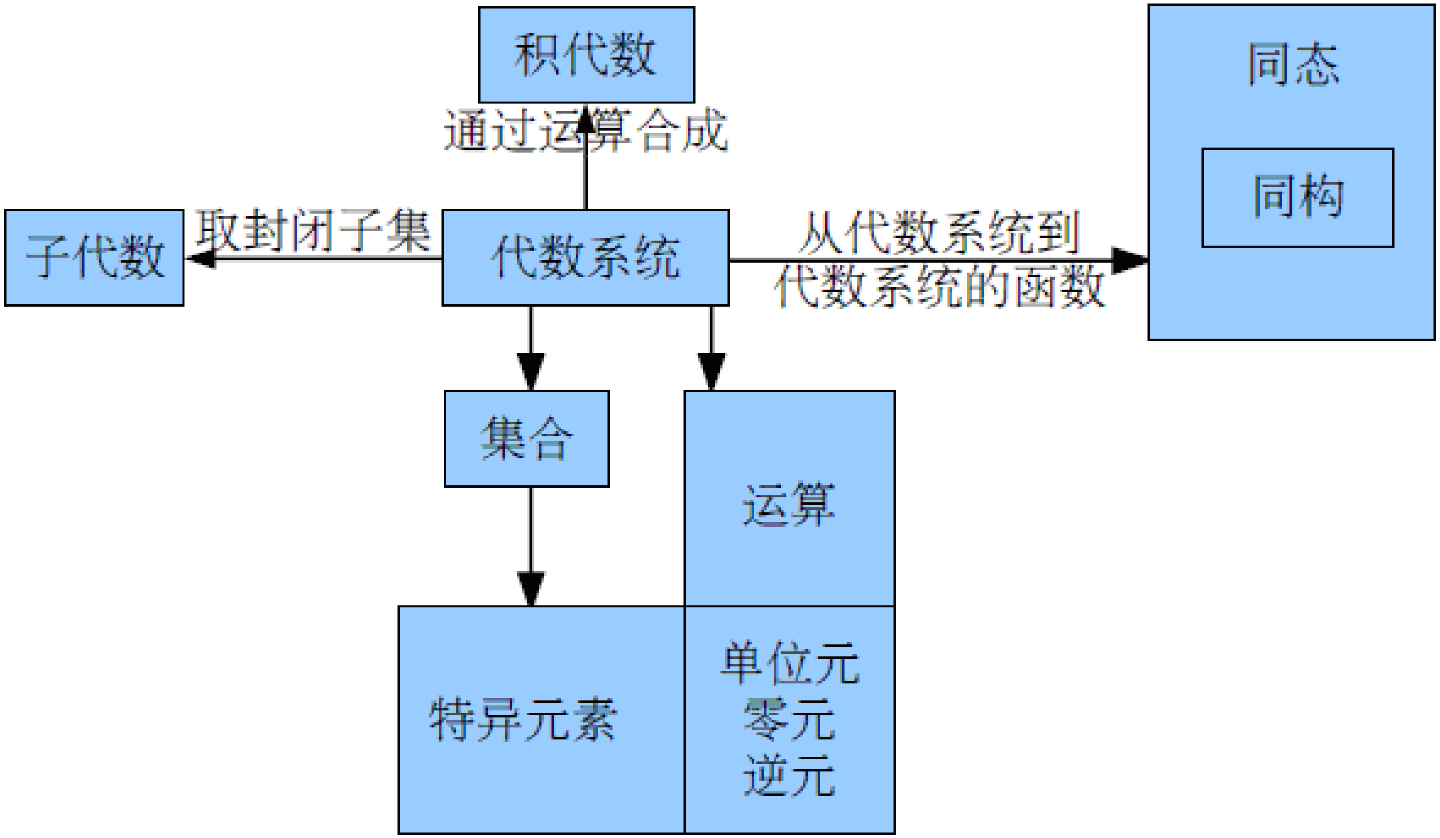
九、同态映射的性质

- 设 V_1 和 V_2 是代数系统，$f: V_1 \to V_2$ 是满同态映射，则
  - (1) 若 V_1 中的$\circ$运算是可交换（可结合，幂等）的，那么 V_2 中对应的 $\circ'$ 运算也是可交换（可结合、幂等的）的．
  - (2) 若 V_1 中的$\circ$对$*$运算是可分配的，那么 V_2 中对应的 $\circ'$ 对$*'$ 运算也是可分配的．
  - (3) 若 V_1 中的$\circ$和$*$运算是可吸收的，那么 V_2 中对应的 $\circ'$ 和$*'$ 运算也是可吸收的．
  - (4) 若 V_1 中$\circ$运算具有单位元 e_1(或零元θ_1)，那么 $f(e_1)$(或 $f(\theta_1)$) 是 V_2 中关于对应的$\circ'$运算的单位元（或零元）.
  - (5) 若 x 关于 V_1 中 $\circ$运算的逆元为 x^{-1}, 那么 $f(x)$ 在 V_2 中关于对应的$\circ'$ 运算的逆元为 $f(x^{-1})$.

小结

- 集合和集合上的运算共同构成代数系统。
- 集合中如果存在一些元素在运算中呈现出特定的性质，那么这些元素被称为特异元素（或代数常数）。
- 如果一个代数系统的子集和该代数系统上的运算也构成一个代数系统，则此代数系统是原来代数系统的子代数系统，简称子代数。
- 两个代数系统可以组合成一个新的代数系统——积代数。
- 代数系统之间满足一定条件的函数称为同态。

小结



积代数
通过运算合成
同态
同构
子代数
取封闭子集
代数系统
从代数系统到
代数系统的函数
集合
运算
特异元素
单位元
零元
逆元

作业

- **补充习题 7.2**

1．设 S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}，问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统$\langle S, *\rangle$？如果能，则判断*运算在是否满足交换律、结合律，并求出*运算的单位元、零元。

(1) $x*y=\gcd(x, y)$，$\gcd(x, y)$是 x 与 y 的最大公约数；

(2) $x*y$=不小于 x 和 y 的最小整数；

2．设 $V=\langle Z, +, *\rangle$，其中+和*分别代表普通加法和乘法，确定下面每个给定的集合是否能与+和*构成 V 的子代数，并说明原因。

(1) $S=\{2n \mid n \in Z\}$；

(2) $S=\{-1, 0, 1\}$.

常见题型解析

- 判断给定集合和运算能否构成代数系统
- 判断给定二元运算的性质
- 求二元运算的特异元素
- 子代数的判定
- 计算积代数
- 判断或证明函数是某一类型的同态

举例

设∘运算为 Q 上的二元运算，

$$\forall x, y\in Q,\ x\circ y = x+y+2xy,$$

(1) 判断∘运算是否满足交换律和结合律，并说明理由．

(2) 求出∘运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元．

解：(1) ∘ 运算可交换，可结合．

任取 $x, y\in Q$,

$$x\circ y = x+y+2xy = y+x+2yx = y \circ x,$$

任取 $x, y, z\in Q$,

$$(x\circ y)\circ z = (x+y+2xy)+z+2(x+y+2xy)z$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

$$x\circ(y\circ z) = x+(y+z+2yz)+2x(y+z+2yz$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz= (x\circ y)\circ z$$

举例

(2) 求出∘运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元．

设∘运算的单位元和零元分别为 e 和 θ，则对于任意 x 有

$x \circ e = x$ 成立，即

$$x+e+2xe = x \Rightarrow e = 0$$

由于∘运算可交换，所以 0 是幺元．

对于任意 x 有 $x \circ \theta = \theta$ 成立，即

$$x+\theta+2x\theta=\theta \Rightarrow x+2x\theta = 0 \Rightarrow \theta = -1/2$$

给定 x，设 x 的逆元为 y, 则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x+y+2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x} \quad (x \neq -1/2\ )$$

因此当 $x \neq -1/2$ 时，$-\frac{x}{1+2x}$ 是 x 的逆元．

举例

下面是三个运算表

(1) 说明那些运算是可交换的、可结合的、幂等的.

(2) 求出每个运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

举例

解：

(1) $*$ 满足交换律，满足结合律，不满足幂等律．

$\circ$ 不满足交换律，满足结合律，满足幂等律．

$\cdot$ 满足交换律，满足结合律，不满足幂等律．

(2) $*$ 的单位元为 b ，没有零元， $a^{-1}=c, b^{-1}=b, c^{-1}=a$

$\circ$ 的单位元和零元都不存在，没有可逆元素．

$\cdot$ 的单位元为 a ，零元为 c ， $a^{-1}=a$ ， b, c 不是可逆元素．

说明：关于结合律的判断

- 需要针对运算元素的每种选择进行验证，若 $|A|=n$ ，一般需要验证 n^3 个等式．
- 单位元和零元不必参与验证．
- 通过对具体运算性质的分析也可能简化验证的复杂性．

举例

设 G 为非 0 实数集 R^* 关于普通乘法构成的代数系统，判断下述函数是否为 G 的自同态？如果不是，说明理由．如果是，判别它们是否为单同态、满同态、同构．

(1) $f(x) = |x| + 1$

(2) $f(x) = |x|$

(3) $f(x) = 0$

(4) $f(x) = 2$

(1) $f(x) = |x| + 1$ (2) $f(x) = |x|$

(3) $f(x) = 0$ (4) $f(x) = 2$

解 (1) 不是同态，因为 $f(2\times2)=f(4)=5$, $f(2)\times f(2)=3\times3=9$

(2) 是同态，不是单同态，也不是满同态，因为 $f(1)= f(-1)$, 且 ran f 中没有负数.

(3) 不是 G 的自同态，因为 f 不是 G 到 G 的函数

(4) 不是 G 的自同态，因为 $f(2\times2)=2$, $f(2)\times f(2)=2\times2=4$

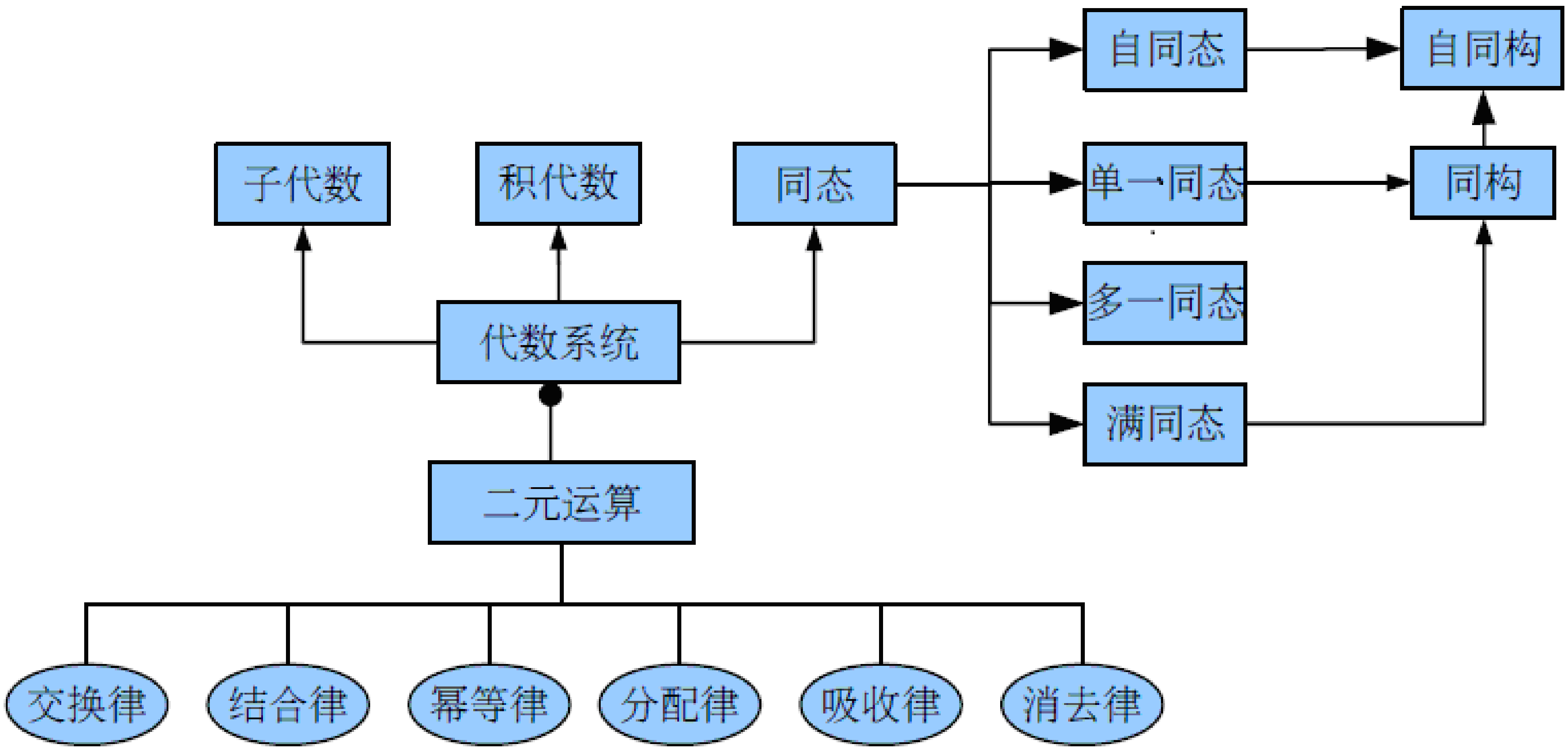
说明：判别或证明同态映射的方法

(1) 先判断（或证明）f 是 G_1 到 G_2 的函数 $f: G_1\to G_2$. 如果已知 $f: G_1\to G_2$，则这步判断可以省去.

(2) $\forall x, y \in G_1$, 验证 $f(xy) = f(x) f(y)$

(3) 判断同态性质只需判断函数的单射、满射、双射性即可.

本章小结


自同态
自同构
子代数
积代数
同态
单一同态
同构
多一同态
代数系统
满同态
二元运算
交换律
结合律
幂等律
分配律
吸收律
消去律