工科数学分析II期末复习总结课

一、多元函数微积分

二、空间解析几何与微分方程

主讲人：徐志华

空间解析几何

1. 向量运算及其基本性质

数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ $\quad \theta=\cos\left(\overrightarrow{\vec{a},\vec{b}}\right)$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$. (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

数量积的坐标表达式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

两向量的夹角余弦 $\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$,

$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

$\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$ $\quad |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

2. 空间直线与平面的方程

空间平面

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0$

点: (x_0, y_0, z_0) 法向量: $\vec{n} = (A, B, C)$

点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

空间直线

对称式 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

(x_0, y_0, z_0) 一点;

$\vec{s} = (m, n, p)$ 方向向量.

3. 线面之间的相互关系

平面: $Ax + By + Cz + D = 0,\ \vec{n} = (A, B, C)$

直线: $\dfrac{x - x}{m} = \dfrac{y - y}{n} = \dfrac{z - z}{p},\ \vec{s} = (m, n, p)$

垂直: $\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0} \iff \dfrac{m}{A} = \dfrac{n}{B} = \dfrac{p}{C}$

平行: $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \iff mA + nB + pC = 0$

夹角公式: $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$

4. 距离公式

(1)点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 Π： $Ax+By+Cz+D=0$

的距离为:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

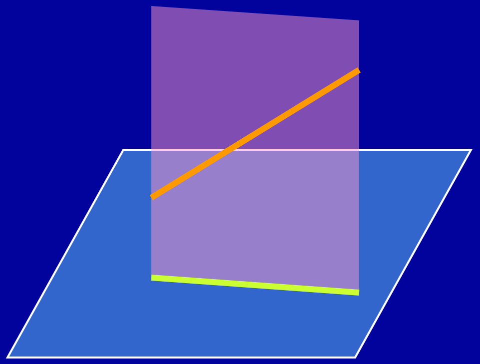
(2) 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 L: $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$

的距离为:

$$d=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n & p\end{vmatrix}\right|$$

例 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$

上的投影直线方程.



提示: 过已知直线的平面束方程

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$

从中选择 λ 使其与已知平面垂直:

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

得 $\lambda=-1$, 从而得投影直线方程

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \longleftarrow \text{这是投影平面}$$

多元函数微分学

1. 二元函数的定义域、极限与连续

- 判断极限不存在及求极限的方法
- 适当放缩、变量替换转化为一元函数的极限
- 连续的概念

2. 二元函数的偏导数与全微分

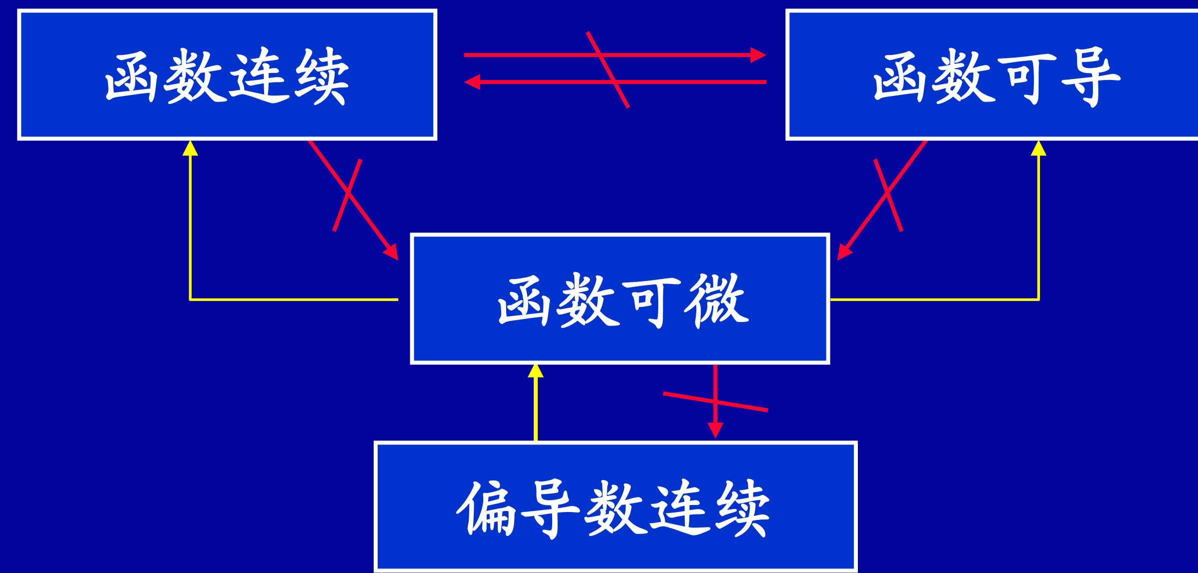
$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ f_x(x,y),\ f_1'(x,y)$$

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

分界点、不连续点处的偏导数要用定义求;

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

重要关系:



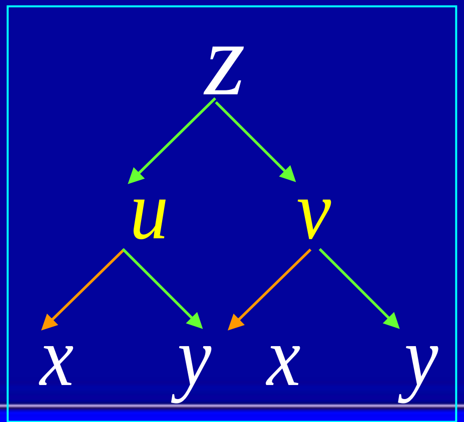
3. 多元函数的复合求导（链式法则）

(1) 分析复合结构 (画变量关系图)

(2) 正确使用求导法则　正确使用求导符号

$$z = f(u,v)\,,\quad u = \varphi(x,y),\quad v = \psi(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = f_1'\varphi_1' + f_2'\psi_1'$$



4. 方向导数与梯度

函数在某一方向上的变化率，称为方向导数。

函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$可微，则沿任一方向 l 的方向导数存在，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

$$\mathrm{grad} f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j},$$

函数在梯度方向上的方向导数最大

4. 空间曲面的切平面与法线

1) 隐式情况．空间曲面 $\Sigma: F(x, y, z)=0$

曲面 Σ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的**法向量**

$$\vec{n}=(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

2) 显式情况. 空间曲面$\Sigma: z = f(x, y)$

法向量 $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$

法线的**方向余弦**

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程 $$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

5. 多元函数的极值及其求法

拉格朗日乘数法：

求函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值。

（1）构造拉格朗日函数：

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

（2）联解方程组，求出问题的所有可能的极值点。

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) + \lambda\varphi_x(x,y) = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda\varphi_y(x,y) = 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

（3）求出符合实际问题的最值点及最值

$$F = f(x,y,z) + \lambda_1\varphi(x,y,z) + \lambda_2\psi(x,y,z)$$

例1. 设$F(x, y)$具有连续偏导数, 已知方程 $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$, 求 $\mathrm{d}z$.

解法1 利用偏导数公式. 设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$ 确定的隐函数, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1' \cdot \frac{1}{z}}{F_1' \cdot (-\frac{x}{z^2}) + F_2' \cdot (-\frac{y}{z^2})} = \frac{z F_1'}{x F_1' + y F_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2' \cdot \frac{1}{z}}{F_1' \cdot (-\frac{x}{z^2}) + F_2' \cdot (-\frac{y}{z^2})} = \frac{z F_2'}{x F_1' + y F_2'}$$

故 $$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{z}{x F_1' + y F_2'}(F_1'\mathrm{d}x + F_2'\mathrm{d}y)$$

解法2 微分法. 对方程两边求微分:

$$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$$

$$F_1'\cdot \mathrm{d}(\frac{x}{z})+F_2'\cdot \mathrm{d}(\frac{y}{z})=0$$

$$F_1'\cdot(\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2})+F_2'\cdot(\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2})=0$$

$$\frac{xF_1'+yF_2'}{z^2}\mathrm{d}z=\frac{F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y}{z}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$$

例2. 求球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\vec{n}=(2x,4y,6z)$ $\left.\vec{n}\right|_{(1,2,3)}=(2,8,18)=2(1,4,9)$

所以球面在点 $(1,2,3)$ 处有:

切平面方程 $2(x-1)+8(y-2)+18(z-3)=0$

即 $x+4y+9z-36=0$

法线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{9}$

例3. 求函数 $z = x\mathrm{e}^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数(沿直线的方向导数)

解: 这里方向 l 即向量 $\overrightarrow{PQ} = (1,-1)$ 的方向，与 l 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

因为函数可微分，且 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.\mathrm{e}^{2y}\right|_{(1,0)} = 1,$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \left.2x\mathrm{e}^{2y}\right|_{(1,0)} = 2,$$

所求方向导数为 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

例7. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的最短距离.

解: 设 $P(x, y, z)$ 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上任一点, 则 P 到平面 $x + y - 2z - 2 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right|$$

问题归结为

$$\begin{cases} \text{目标函数:}\ (x + y - 2z - 2)^2 \quad (\min) \\ \text{约束条件:}\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

作拉氏函数

$$F(x, y, z) = (x + y - 2z - 2)^2 + \lambda(z - x^2 - y^2)$$

$$F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

令 $\begin{cases} F'_x=2(x+y-2z-2)-2\lambda x=0 \\ F'_y=2(x+y-2z-2)-2\lambda y=0 \\ F'_z=2(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$

解此方程组得唯一驻点 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{8}.$

由实际意义最小值存在，故

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}$$

重积分

1. 二重积分的计算

直角坐标系情形：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

极坐标系情形:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$

选择合适的积分顺序：必要时交换积分顺序

利用区域的对称性与被积函数的奇偶性。

2. 三重积分的计算

球面坐标系

直角坐标系:

方法1. 投影法 ("先一后二")

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

方法2. 截面法 ("先二后一")

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_{c_1}^{c_2} dz\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

柱坐标系: 实质是将xoy面上的点用极坐标表示

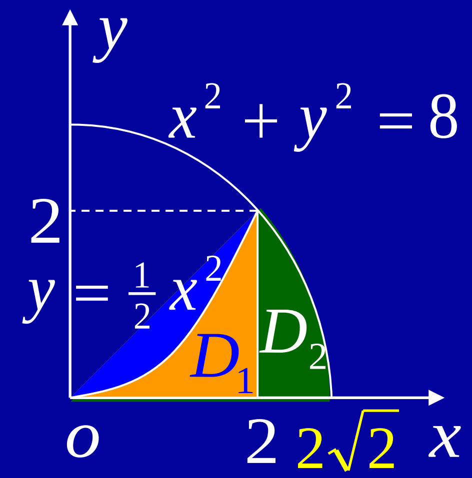
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega F(\rho,\theta,z)\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho\,\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)}^{z_2(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)} F(\rho,\theta,z)\,\mathrm{d}z$$

例1. 交换下列积分顺序

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解: 积分域由两部分组成:



$$D_1:\begin{cases}0\le y\le \frac{1}{2}x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}0\le y\le \sqrt{8-x^2}\\ 2\le x\le 2\sqrt{2}\end{cases}$$

将 $D=D_1+D_2$ 视为 Y–型区域，则

$$D:\begin{cases}\sqrt{2y}\le x\le \sqrt{8-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

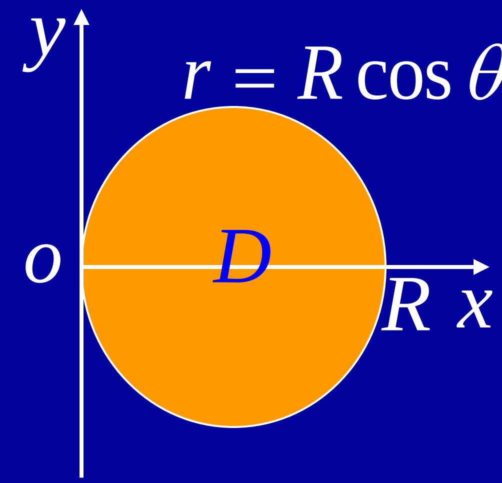
$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

例2. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，

其中 D 为圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域.

提示: 利用极坐标

$$D:\begin{cases} 0 \le r \le R\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

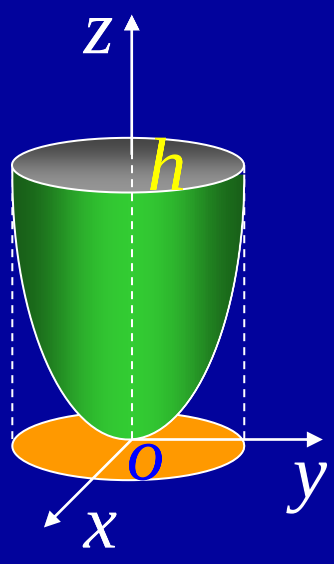


$$原式 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3}R^3(\pi - \frac{4}{3})$$

例3. 计算三重积分 $\iiint_\Omega \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$, 其中Ω由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\,(h>0)$ 所围成 .



解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\dfrac{r^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h-\frac{\rho^2}{4}\right)d\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

曲线与曲面积分

1. 曲线积分的计算

第一类曲线积分（弧长）

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

积分下限小于上限

第二类曲线积分（坐标）

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta \{ P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t) \}\mathrm{d}t$$

积分限从弧的起点到终点

2. 曲面积分的计算

第一类曲面积分（面积）

光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x{}^2(x, y) + z_y{}^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第二类曲面积分（坐标）： 曲面的侧

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3. **格林公式:** 将平面曲线积分转化为二重积分

条件1. 闭区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成,

条件2. 函数 $P(x,y), Q(x,y) D$ 上具有连续一阶偏导数

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

复连通区域上的格林公式:

外边界的正向是逆时针; 内边界的正向是顺时针

"挖洞法" 和 "封口法" 两类典型方法

4. 高斯公式： 将曲面积分转化为三重积分

设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成,

条件1： 闭曲面 Σ 的方向取外侧;

条件2： P, Q, R 在 Ω 上有连续一阶偏导数 ,

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \text{(Gauss 公式)}$$

$$= \oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

高斯公式中“封口法”的使用

5. 格林公式的应用：

（1） 平面曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在单连通区域 G 内

与路径无关 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

（2）二元函数的全微分求积问题

$Pdx + Qdy$ 为某个二元函数 u 的全微分 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

且 $u = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$

（3）利用积分与路径无关，适当改变积分路径，简化平面曲线积分。

例1. 计算 $\int_L x\mathrm{d}s$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O\,(0,0)$ 与点 $B\,(1,1)$ 之间的一段弧 .

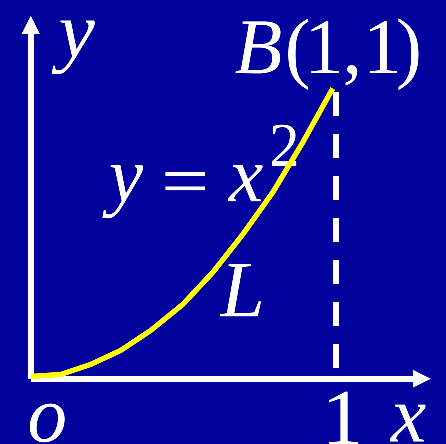
解: $\because L: y=x^2 \quad (0\le x\le 1)$

$$\therefore \int_L x\mathrm{d}s = \int_0^1 x\cdot\underbrace{\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}s}$$

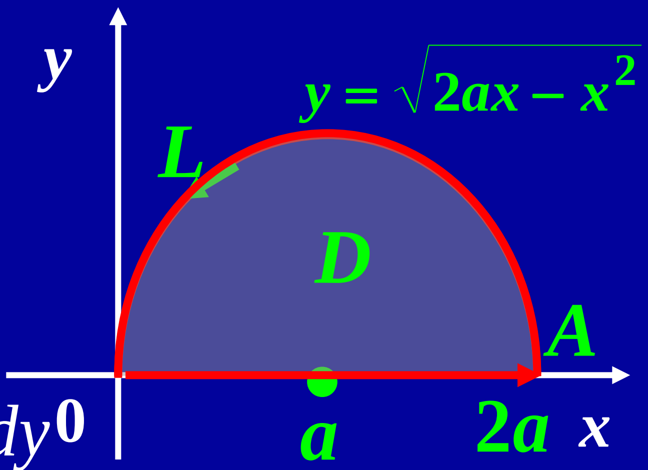
$$= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$



例2. 求 $I=\int_L[e^x\sin y-m(x+y)]dx+(e^x\cos y-m)dy$



解： $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=m$

补充有向线段OA，形成闭曲线，满足条件

$$\int_{L+OA}[e^x\sin y-m(x+y)]\,dx+(e^x\cos y-m)dy$$

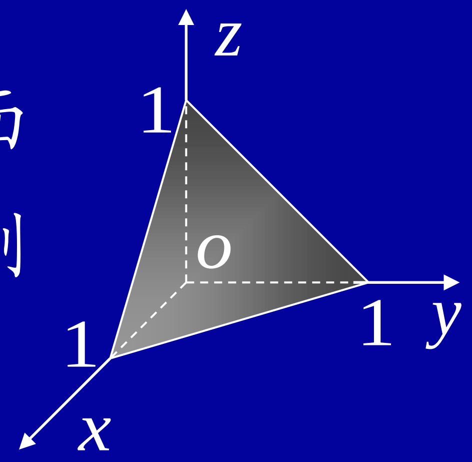
$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D m\,dxdy=\frac{m\pi a^2}{2}$$

$$I=\frac{m\pi a^2}{2}-\int_{OA}[e^x\sin y-m(x+y)]\,dx+(e^x\cos y-m)dy$$

在OA上，$y=0$，$dy=0$，x从0变到$2a$　　“封口法”

$$\therefore\ I=\frac{m\pi a^2}{2}-\int_0^{2a}-m\,x\,d\,x=\frac{3m\pi a^2}{2}$$

例3. 计算 $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$分别表示$\Sigma$ 在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分, 则

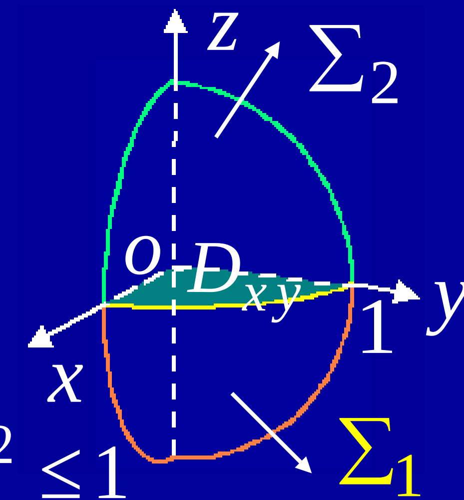
$$原式 = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S \qquad \mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\Sigma_4 : z = 1-x-y, \ (x,y)\in D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\big/120$$

例4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在第一和第八卦限部分.



解: 把 Σ 分为上下两部分

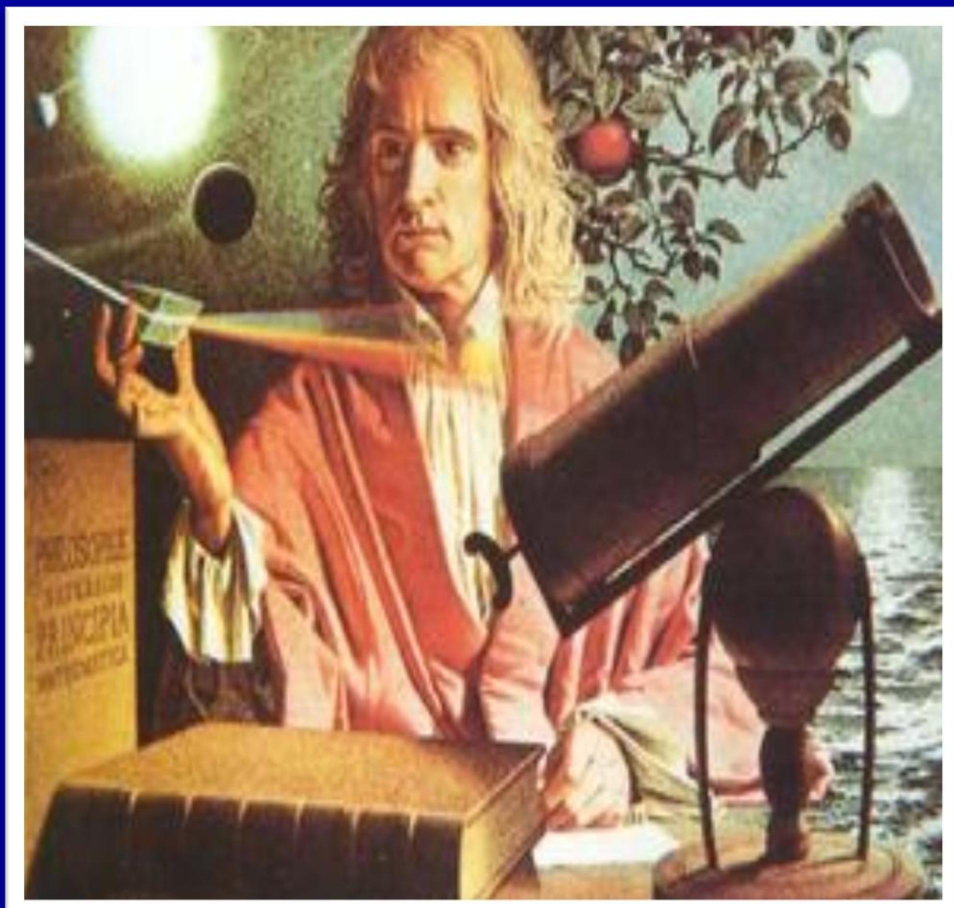
$$\begin{cases}\Sigma_1 : z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\end{cases} \quad (x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0\end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} xy\,(-\sqrt{1 - x^2 - y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} xy\,\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2/15$$

毕业寄语



艾萨克·牛顿

修炼高数的悲欢
我们这些努力不简单
快乐炼成泪水 是一种勇敢

注重积累，享受过程