第九讲　共形映射
分式线性映射

§1 共形映射的概念

- 1. 曲线的切线
- 2. 导数的几何意义
- 3. 共形映射的概念

1. 曲线的切线

设连续曲线 $C: z = z(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

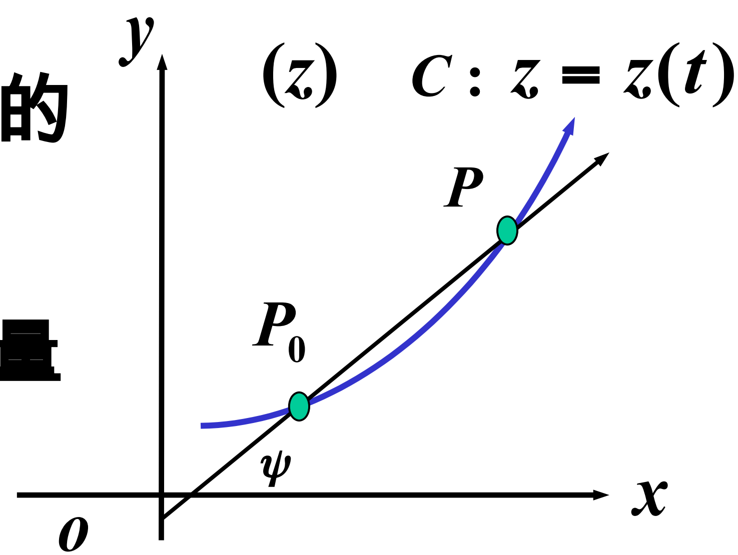
它的正向取t增大时点z移动的方向.

若$z'(t_0) \neq 0, t_0 \in (\alpha, \beta)$,取$P_0, P \in C, P_0, P$对应的参数分别为$t_0, t$,

割线$p_0 p$对应于参数t增大的方向。

则割线的方向向量$\overrightarrow{p_0 p}$与向量

$\dfrac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$方向相同.



割线方向$\overrightarrow{p_0 p}$的极限位置：

$$z'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}$$

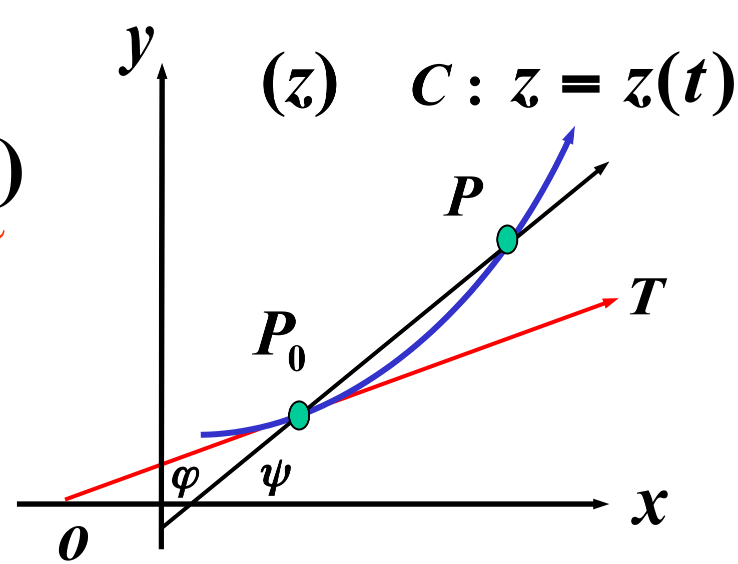
——曲线C在p_0处的切向量且方向与C正向一致.

$\therefore$ 若$z'(t_0)\neq 0, t_0\in(\alpha,\beta)$,

则曲线C在z_0有切线, $z'(t_0)$

就是切向量, 它的倾角

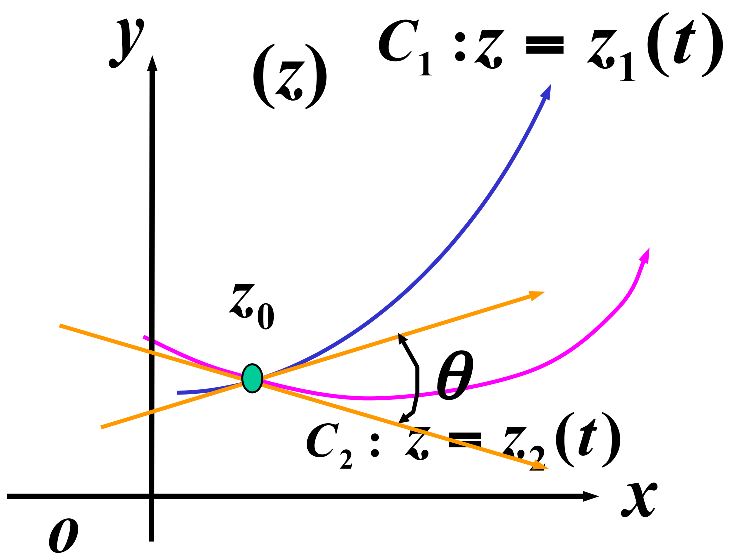
$\varphi=\arg z'(t_0)$.



定义 切线随切点的移动而连续转动的有向曲线称为有向光滑曲线.

(1) $Arg z'(t_0)$ -- 曲线 C 在点 z_0 处切线的正向与 x 轴正方向之间的夹角.

(2) 若曲线 C_1 与曲线 C_2 相交于点 z_0, 在交点处两曲线正向之间的夹角就是它们的两条切线正向之间的夹角.



2. 解析函数导数的几何意义（辐角和模）

设$w=f(z)$在区域D内解析，$z_0\in D$，且$f'(z_0)\neq 0$，

在D内过z_0引一条有向光滑曲线：

$$C: z=z(t) \quad t\in[\alpha,\beta]$$

取$t_0\in(\alpha,\beta)$ $\quad z_0=z(t_0)$ $\quad z'(t_0)\neq 0$ $\quad$ 则

z平面上$C: z=z(t)$ $\xrightarrow{\boxed{w=f(z)}}$ w平面上$\Gamma: w=f[z(t)]$

Γ—过点$w_0=f(z_0)$，正向取t增大方向的曲线.

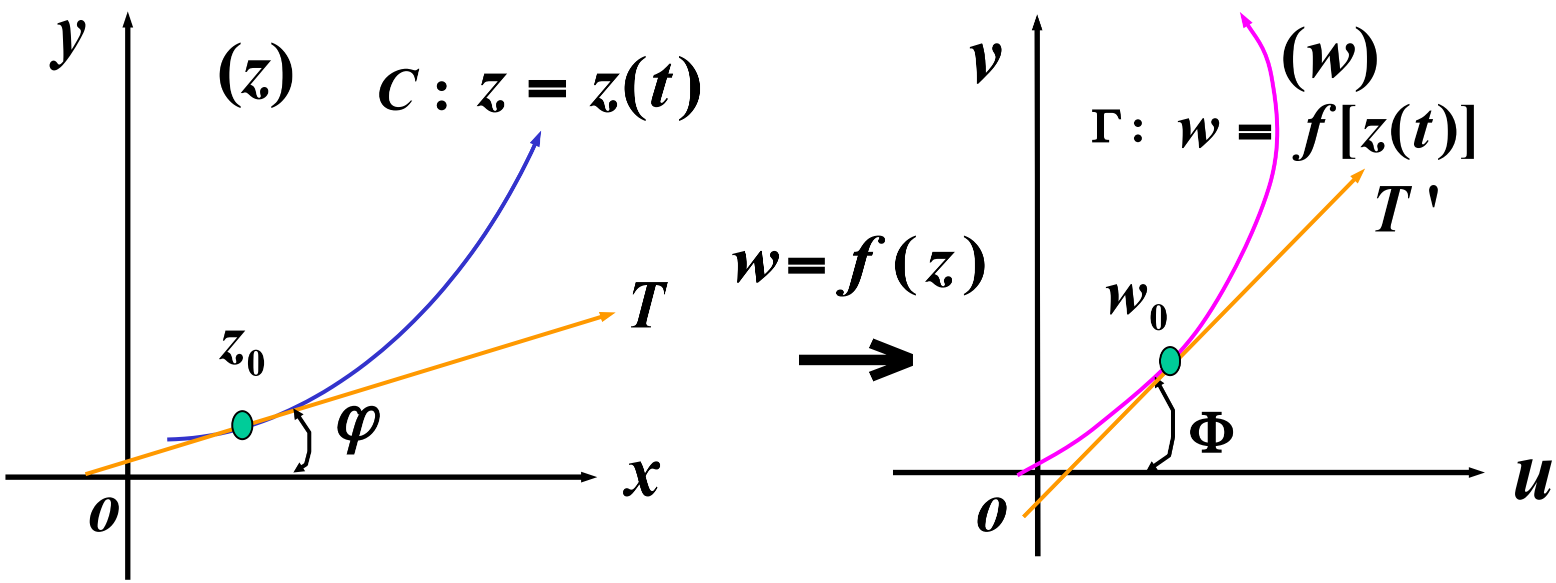
$\because\ w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$

$\Rightarrow Argw'(t_0) = Argf'(z_0) + Argz'(t_0)$

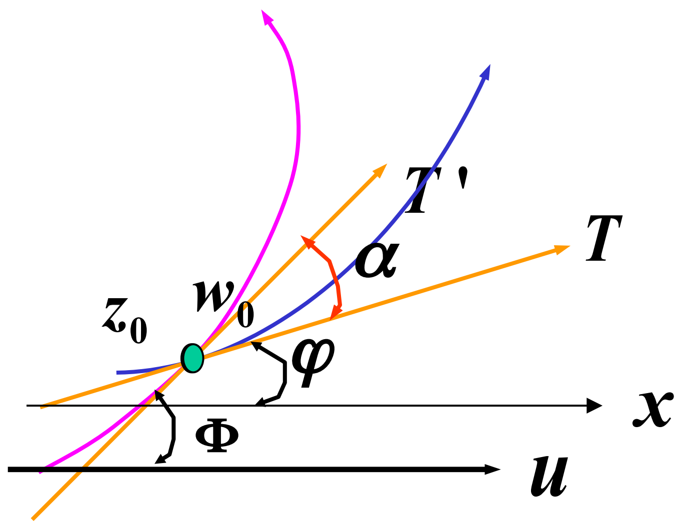
记 $\qquad \Phi \qquad\qquad \alpha \qquad\qquad \varphi$

即 $\quad Argf'(z_0) = Argw'(t_0) - Argz'(t_0)$

即 $\quad \alpha = \Phi - \varphi \qquad\qquad (1)$



若视x轴与u轴和y轴与v轴的正向相同，称曲线C的切线正向与映射后曲线Γ正向之间的夹角为(原曲线C经映射$w = f(z)$)在点z_0的转动角，记作α.



$\alpha = \Phi - \varphi$ 即$Arg f'(z_0) = Arg w'(t_0) - Arg z'(t_0)$

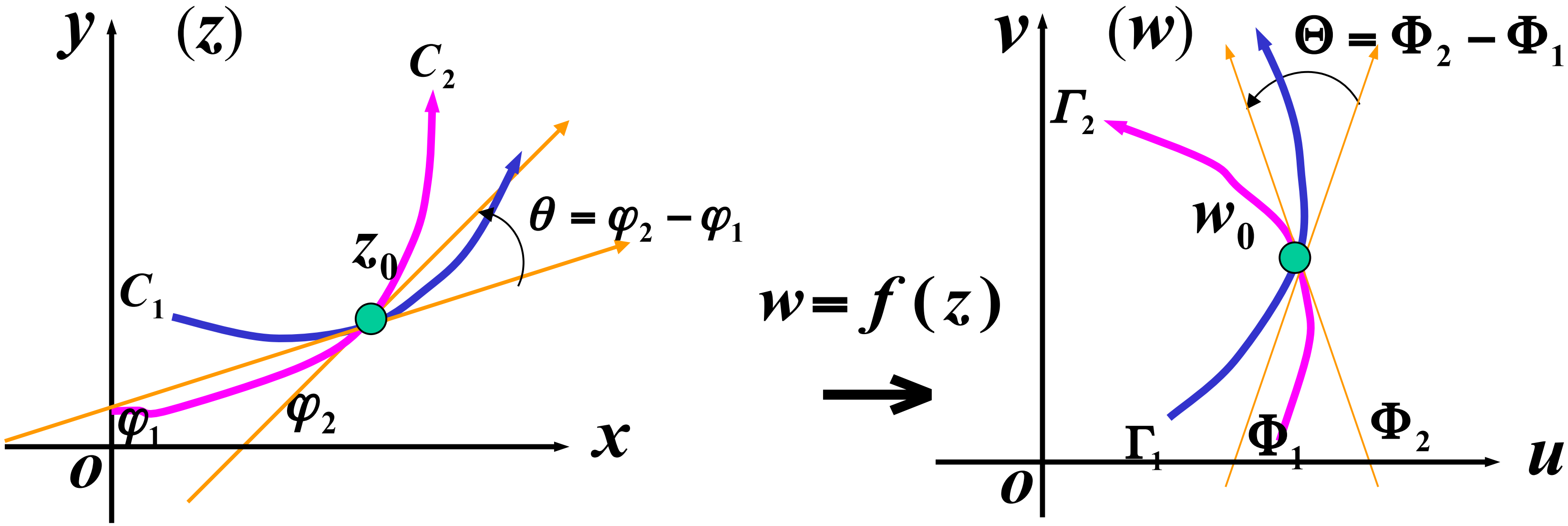
(1)导数幅角$Argf'(z)$的几何意义

①$Argf'(z_0)(f'(z_0)\neq 0)$是曲线$C$经过$w=f(z)$映射后在点$z_0$的转动角.

由(1)式α仅与映射$w=f(z)$及点z_0有关,则

② 转动角α的大小及方向与曲线C的形状与方向无关,这种性质称为映射具有转动角的不变性.

设$C_i(i=1,2)$在点z_0的夹角为θ，$C_i(i=1,2)$在变换$w=f(z)$下映射为相交于点$w_0=f(z_0)$的曲线$\Gamma_i(i=1,2)$，Γ_1,Γ_2的夹角为Θ.



由式(1)有，$\alpha=\Phi_i-\varphi_i \quad (i=1,2)$

$\Rightarrow \Phi_2-\Phi_1=\varphi_2-\varphi_1$

$\boxed{\therefore \Theta=\theta}$ —— 保角性

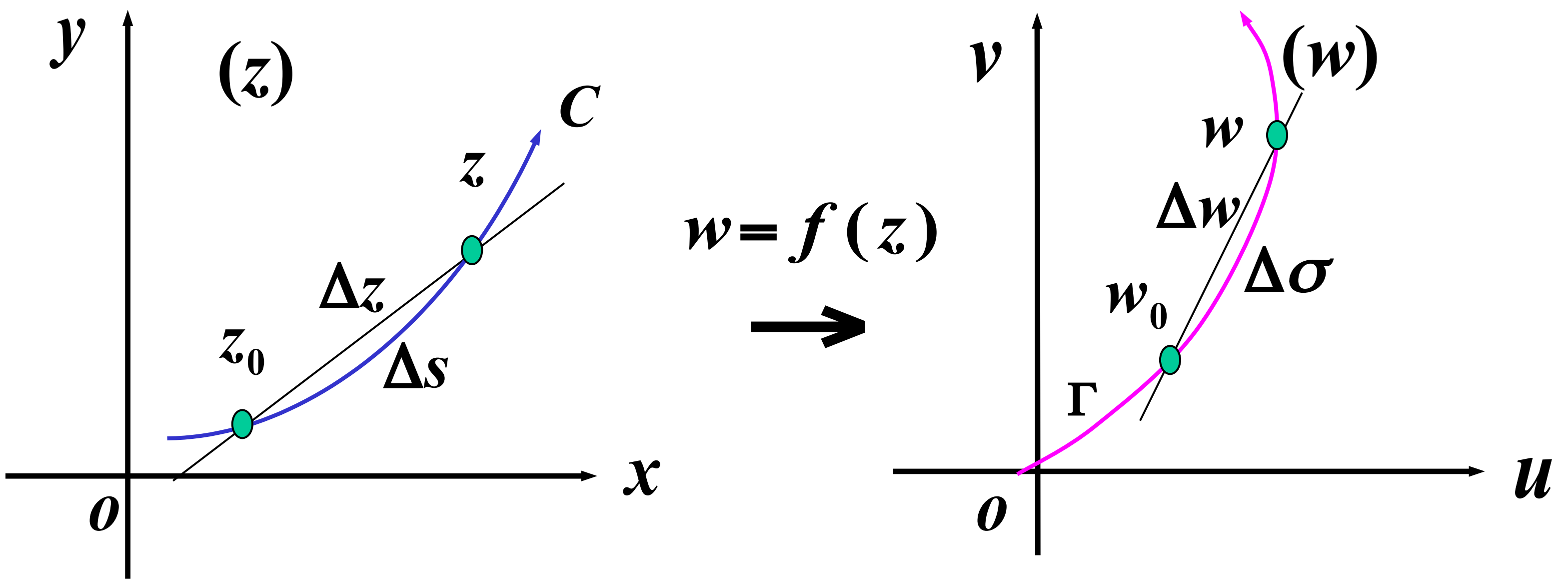
由上述讨论我们有

过z_0的$C_1, C_2 \xrightarrow{\boxed{w=f(z)}}$ 过w_0的$\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow (\widehat{C_1, C_2}) = (\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})$,

这种映射具有保持两曲 线间夹角的大小与方向不变的性质 －－ 保角性

(2)模$|f'(z)|$的几何意义

设$\Delta z = z - z_0 = re^{i\theta}$， $\Delta w = w - w_0 = \rho e^{i\varphi}$且用$\Delta s$表示$C$上的点$z_0$与$z$之间的一段弧长；$\Delta\sigma$表示$\Gamma$上的对应点$w_0$与$w$之间的弧长.



$$\because \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|}{\Delta s}=1 \qquad \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{|\Delta w|}{\Delta\sigma}=1$$

$$\therefore |f'(z_0)|=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{\Delta\sigma}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\frac{\Delta s}{|\Delta z|}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \qquad (3)$$

$|f'(z_0)|$ --称之为曲线C在z_0的伸缩率.

易见,$\left|f'(z_0)\right|$与映射$w=f(z)$及z_0有关,而与曲线的形状方向无关,沿任何曲线作映射f时,在同一点z_0处$A=\left|f'(z_0)\right|$均不变 −−伸缩率不变性.

3. 共形映射的概念

定义 设$w=f(z)$在 z_0的邻域内有定义，且在 z_0具有保角性和伸缩率不变性,则称映射$w=f(z)$在z_0为共形的，或称$w=f(z)$在z_0是共形映射.

若$w=f(z)$在D内每一点都是共形的，则称$w=f(z)$在区域D内是共形映射.

由定义及以上分析有：

定理 若$w=f(z)$在z_0点解析且$f'(z_0)\neq 0$,

$\Rightarrow w=f(z)$是共形(保角)映射，

且$\alpha = Argf'(z_0)$为转动角,$|f'(z_0)|$为伸缩率。

 若上述共形映射定义中，仅保持角度绝对值不变，而旋转方向相反，此时称第二类共形映射。从而，定义中的共形映射称为第一类共形映射。

设$w=f(z)\quad z\in D$

$z_0\in D\quad w_0=f(z_0)\quad f'(z_0)\neq 0$

又$\because$ $\left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right|=\dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\xrightarrow{z\to z_0}=|f'(z_0)|$

$\therefore \Delta w\approx|f'(z_0)||\Delta z|$（忽略高阶无穷小）

那么圆：$|z-z_0|=\delta\xrightarrow{w=f(z)}|w-w_0|=|f'(z_0)|\delta$

（忽略高阶无穷小）

这就是为什么称共形映射的原因.

§2 分式线性映射

- 1. 分式线性映射的定义
- 2. 分式线性映射的性质

1. 分式线性映射的定义

定义 映射$w = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)-(1)$

称为分式线性映射,其中a,b,c,d是复常数.

□ $(1) \because \; w' = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2} \quad \therefore ad-bc \neq 0$是必要的。

否则$w' = 0 \Rightarrow w \equiv c$(复常数).

(2)补充定义使分式线性函数在整个扩充平面上有定义：当$c \neq 0$时，$w = \begin{cases} \infty & z = -d/c \\ a/c & z = \infty \end{cases}$

当$c = 0$时，在$z = \infty$时，定义$w = \infty$.

$$(3)w=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow z=\frac{-dw+b}{cw-a}\quad(-d)(-a)-bc\neq 0$$

则,逆映射仍为分式线性的,

故又称$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$为双线性映射.

分式线性映射 (1) 总可以分解成下述三种特殊映射的复合:

$$(i)\,w=z+b\quad(ii)\,w=az(a\neq 0)\quad(iii)\,w=\frac{1}{z}$$

称为: 平移 整线性 反演

事实上， $(A, B$复常数$)$

当$c=0$时，$w=\dfrac{az+b}{cz+d} \Rightarrow w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}=Az+B$

当$c\neq 0$时，$w=\dfrac{a(z+\frac{d}{c})+b-\frac{ad}{c}}{c(z+\frac{d}{c})}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c}\dfrac{1}{cz+d}$

$$=A\frac{1}{cz+d}+B \quad (A=\frac{bc-ad}{c} \quad B=\frac{a}{c})$$

$\therefore w=\dfrac{az+b}{cz+d}$由$\xi_1=cz+d, \xi_2=\dfrac{1}{\xi_1}$和$w=A\xi_2+B$

复合而成.

$(i)w=z+b$

设$w=u+iv \quad z=x+iy \quad b=b_1+ib_2$

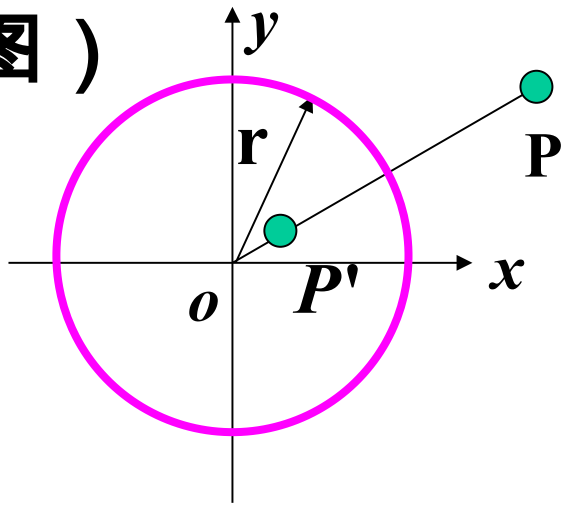
故 $\begin{cases} u=x+b_1 \\ v=y+b_2 \end{cases}$ $\therefore w=z+b$是一个平移映射.

$(ii)w=az$

设$z=re^{i\theta} \quad a=\lambda e^{i\alpha}$,则$w=r\lambda e^{i(\theta+\alpha)}$

$\therefore$把z先转一个角度α再将$|z|$伸长(或缩短)$|a|=\lambda$倍后就得w,$\therefore w=az$是旋转和伸缩合成的映射.

名词介绍：关于圆的对称点(见图)

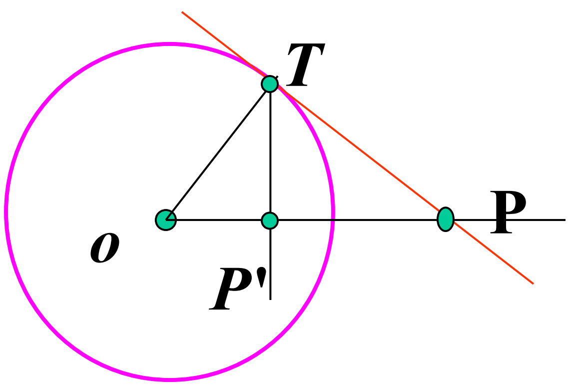


定义 若在半直线上有两点p, p'满足$\overline{op}\cdot\overline{op'}=r^2$,则称$p$与$p'$关于圆周$|z|=r$对称.

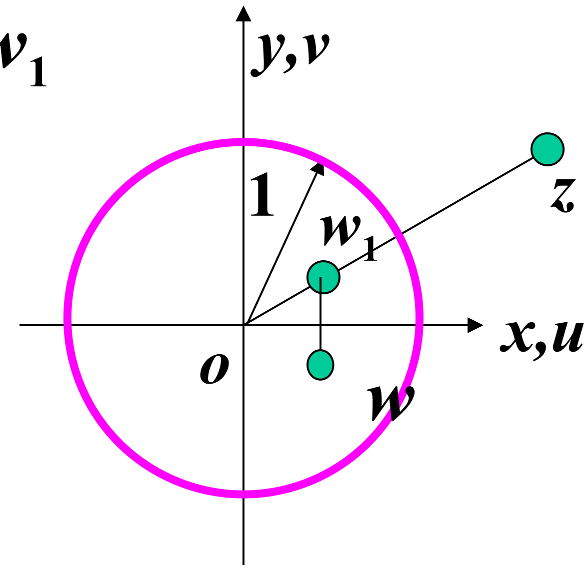
规定无穷远点的对称点为圆心o

如何由p找到关于圆周$|z|=r$的对称点p'呢？

设p在圆外,从p作圆周的切线pT,连接op,由T作op的垂线Tp',与op交于p',那么p与p'即互为对称点.



$(iii)\, w = \dfrac{1}{z}$　令　$w_1 = \dfrac{1}{\bar{z}}$,　$w = \overline{w_1}$



设$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\bar{z} = re^{-i\theta} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

$w_1 = \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{r}e^{i\theta} \Rightarrow w = \overline{w_1} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$

$w = \dfrac{1}{z}$的几何作图

$\because\ |z||w_1| = r\cdot\dfrac{1}{r} = 1$, z与w_1在同一射线上;

$\therefore z, w_1$关于$|z| = 1$对称.

1)作出点z关于圆周$|z| = 1$的对称点w_1.

2)作出点w_1关于实轴对称的点即得w(见图).

2. 分式线性映射的性质

先讨论以上三种特殊映射的性质,从而得出一般分式线性映射的性质.

(1)保角性

对于(iii)$w=\dfrac{1}{z}$的情况

$$\because\ |z|<1\Rightarrow|w|>1\quad |z|>1\Rightarrow|w|<1\quad |z|=1\Rightarrow|w|=1;$$

若$\arg z=\theta,\Rightarrow\arg w=-\theta$

因此映射$w=\dfrac{1}{z}$通常称为反演变换

$z=0\xrightarrow{w=f(z)}w=\infty;z=\infty\xrightarrow{w=f(z)}w=0$(见第一章§2)

又$\because\ w' = \dfrac{-1}{z^2} \quad (z \neq 0)$

$\therefore$适当规定∞处夹角的定义后,映射$w = \dfrac{1}{z}$

在扩充复平面上处处共形的,即为一共形映射.

（详见 P195 ）

对$(i),(ii)$的复合映射$w = az + b(a \neq 0)$

$\because\ w' = (az + b)' = a \neq 0 \quad \therefore$是共形映射.

由于分式线性映射是由三种特殊映射复合

而成的,有以下结论:

定理 1 分式线性映射在扩充复平面上是一一对应的,且具有保角性.

(2)保圆性

$\because\ w = az + b$是平移,旋转,伸缩的合成映射.

$\therefore\ z$平面上的圆周$C \xrightarrow{w=az+b} w$平面上的圆周Γ

z平面上的直线$l \xrightarrow{w=az+b} w$平面上的直线L

若把直线看作是半径无穷大的圆周,那么$w = az + b$在扩充复平面上把圆周映射成圆周,即具有保圆性.

对于$(iii)\,w=\dfrac{1}{z}$,

$$z=0\xrightarrow{w=1/z}\infty,\ z=\infty\xrightarrow{w=1/z}0$$

令$z=x+iy\quad w=\dfrac{1}{z}=u+iv$,

将$z=x+iy$代入$w=\dfrac{1}{z}$得

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

或 $$x=\frac{u}{u^2+v^2}\qquad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$\therefore C: a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

$$\xrightarrow{w=\frac{1}{z}} \Gamma: d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

$a,d\neq 0$ 圆周$C\to$圆周Γ

$a\neq 0, d=0$ 圆周$C\to$直线Γ

$a=0, d\neq 0$ 直线$C\to$圆周Γ

$a=0, d=0$ 直线$C\to$直线Γ

把直线看成是半径为∞的圆,那么反演变换就具有保圆性.

定理 2 分式线性映射将扩充 z 平面上圆周映射成扩充 w 平面上的圆周,即具有保圆性.

(3)保对称性

定理 3 设点 z_1, z_2 是关于 z 平面上圆周 C 的一对对称点 $\Rightarrow$ 在分式线性映射下,它们的象点 w_1 与 w_2 是关于象圆 Γ 的一对对称点.

 在分式线性映射下，圆周或直线上没有点趋于无穷点，则它映射成半径为有限的圆周；若有一点映射成无穷远点，它映射成直线。

作业

- P245 1,7,8(1)(5)