北京科技大学 2015-2016 学年第一学期

高等数学 AI 期末模拟试卷答案

一、填空题（1~2 每小题 3 分，3~4 每空 3 分，5 每空 2 分，共 18 分 ）

$$1.(1)D\ (2)B\ (3)B \quad 2.y=1, x=-3 \quad 3.\frac{3}{4}-\ln 2 \quad 4.\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$$

$$5.(1)\frac{4}{e}\ (2)\frac{1}{2}\ (3)1$$

二、选择题（每空 3 分，共 18 分）

$$6.C \quad 7.D \quad 8.A \quad 9.B \quad 10.C \quad 11.C$$

三、解答题（共 45 分）

12.(7')

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{(|\cos x|+2)^2}dx=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{(|\cos x|+2)^2}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(|\cos x|+2)^2}dx$$

$$=\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\cos x+2)^2}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{(-\cos x+2)^2}dx\right)=\frac{\pi}{3}$$

13.(10')

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5\\ 2t+\dfrac{dy}{dt}+k\sin y\dfrac{dy}{dt}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{2t}{1+k\sin y}\\ \dfrac{dx}{dt}=5\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{t}{1+k\sin y}$$

$$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}=-\frac{2}{5}\frac{1+k\sin y-tk\cos y\dfrac{dy}{dt}}{(1+h\sin y)^2}=\frac{(1+k\sin y)^2+2kt^2\cos y}{(1+k\sin y)^3}\ (-\frac{2}{5})$$

$$=-\frac{2((1+k\sin y)^2+2kt^2\cos y)}{25(1+k\sin y)^3}$$

14.(8')

$$R=\lim_{x\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim_{x\to\infty}\frac{n+1}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n+3)!}{n+2}=\infty$$

$\therefore$ 该幂级数的收敛域为$(-\infty,\infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{1}{2}(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!})'=\frac{1}{2}(x\sin x)'=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$$

15.(10')

$$(1)\int\frac{1}{x^6(x+1)}dx=\int\frac{1+x-x}{x^6(x+1)}dx=\int\frac{dx}{x^6}-\int\frac{1}{x^5(x+1)}dx=\int\frac{dx}{x^6}-\int\frac{dx}{x^5}+\int\frac{1}{x^4(x+1)}dx$$

$$=\int\frac{dx}{x^6}-\int\frac{dx}{x^5}+\int\frac{dx}{x^4}-\int\frac{dx}{x^3}+\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{1}{x(x+1)}dx$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-\ln(\frac{x}{x+1})+C$$

$$(2)\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$$

16.(10')

$$(1)a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\sec^2-1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd(\tan x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$$

$$=\frac{1}{n+1}-a_n$$

$$\therefore a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

(2)对$\forall n\in N^*,a_n>0,a_{n+2}=\frac{1}{n+1}-a_n<\frac{1}{n+1}$

$\therefore a_n<\frac{1}{n-1}(n\geq 2)$ $\quad\therefore\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{(n-1)n^\lambda}$

$\because\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n^\lambda}$收敛 $\quad\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛

17.(10')

(1) $\int_a^b e^x f(x)dx$ 可知，$\exists c\in(a,b) s.t. \int_a^b e^x f(x)dx = e^c(b-a)f(c)=0$

$\therefore e^c f(c)=0,\ f(c)=0$

假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内只有一个零点 $x=c$, 则

$a\le x<c$ 时，$f(x)>0, c<x\le b\ \ f(x)<0$ (1)

$or\ \ a\le x<c$ 时，$f(x)<0, c<x\le b\ \ f(x)>0$ (2)

对于(1)

$\int_a^b (e^x-e^c)f(x)dx = \int_a^c (e^x-e^c)f(x)dx + \int_c^b (e^x-e^c)f(x)dx$

且 $a\le x<c$ 时，$f(x)>0, e^x-e^c<0, i.e. \int_a^c (e^x-e^c)f(x)dx<0$

$c<x\le b\ \ f(x)<0, e^x-e^c>0, i.e. \int_c^b (e^x-e^c)f(x)dx<0$

$\therefore \int_a^b (e^x-e^c)f(x)dx<0$

又 $\because \int_a^b (e^x-e^c)f(x)dx = \int_a^b e^x f(x)dx - e^c\int_a^b f(x)dx = 0$，矛盾

$\therefore$ 假设不成立，同理可证(2)也有矛盾

$\therefore$ 原假设不成立

$\therefore f(x)$ 在 (a,b) 上至少有两个零点

(2) 令 $F(x)=\dfrac{\int_a^x f(x)dx}{x}$

可知 $F(a)=F(b)=0$，故 $\exists\varepsilon\in(a,b) s.t.\ F'(\varepsilon)=\dfrac{f(\varepsilon)\varepsilon-\int_a^\varepsilon f(x)dx}{\varepsilon^2}=0$

$i.e.\ \exists\varepsilon\in(a,b), s.t \int_a^\varepsilon f(x)dx = f(\varepsilon)\cdot\varepsilon$

18.(9')

令 $F(x)=\int_a^x f(x)dx$

将 $F(x)$ 在 $x=a$ 处进行泰勒展开

$\therefore F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{1}{2}F''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}F'''(\varepsilon_1)(x-a)^3\ \ \varepsilon_1\in(a,x)$

$= f(a)(x-a)+\frac{1}{6}f''(\varepsilon_1)(x-a)^3$

同理，将 $F(x)$ 在 $x=b$ 处进行泰勒展开

$$\therefore F(x)=F(b)+F'(b)(x-b)+\frac{1}{2}F''(b)(x-b)^2+\frac{1}{6}F'''(\varepsilon_2)(x-b)^3\ \ \varepsilon_2\in(x,b)$$
$$=\int_a^b f(x)dx+f(b)(x-b)+\frac{1}{6}f''(\varepsilon_2)(x-b)^3$$

将$x=\dfrac{a+b}{2}$分别代入得

$$F(\frac{a+b}{2})=\frac{1}{2}f(a)(b-a)+\frac{1}{8}f'(a)(b-a)^2+\frac{1}{48}f''(\varepsilon_1)(b-a)^3\ \ a<\varepsilon_1<\frac{a+b}{2}$$
$$F(\frac{a+b}{2})=\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}f(b)(b-a)+\frac{1}{8}f'(b)(b-a)^2-\frac{1}{48}f''(\varepsilon_2)(b-a)^3\ \ \frac{a+b}{2}<\varepsilon_2<b$$

$$\therefore\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)+\frac{1}{48}(f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2))(b-a)^3$$

对于函数$f''(x)$，由介值定理可知,

$$\exists\varepsilon\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2),s.t.\ f''(\varepsilon)=\frac{f''(\varepsilon_1)+f''(\varepsilon_2)}{2}$$

$$\therefore\exists\varepsilon\in(a,b)\ s.t.\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)+\frac{1}{24}f''(\varepsilon)(b-a)^3$$