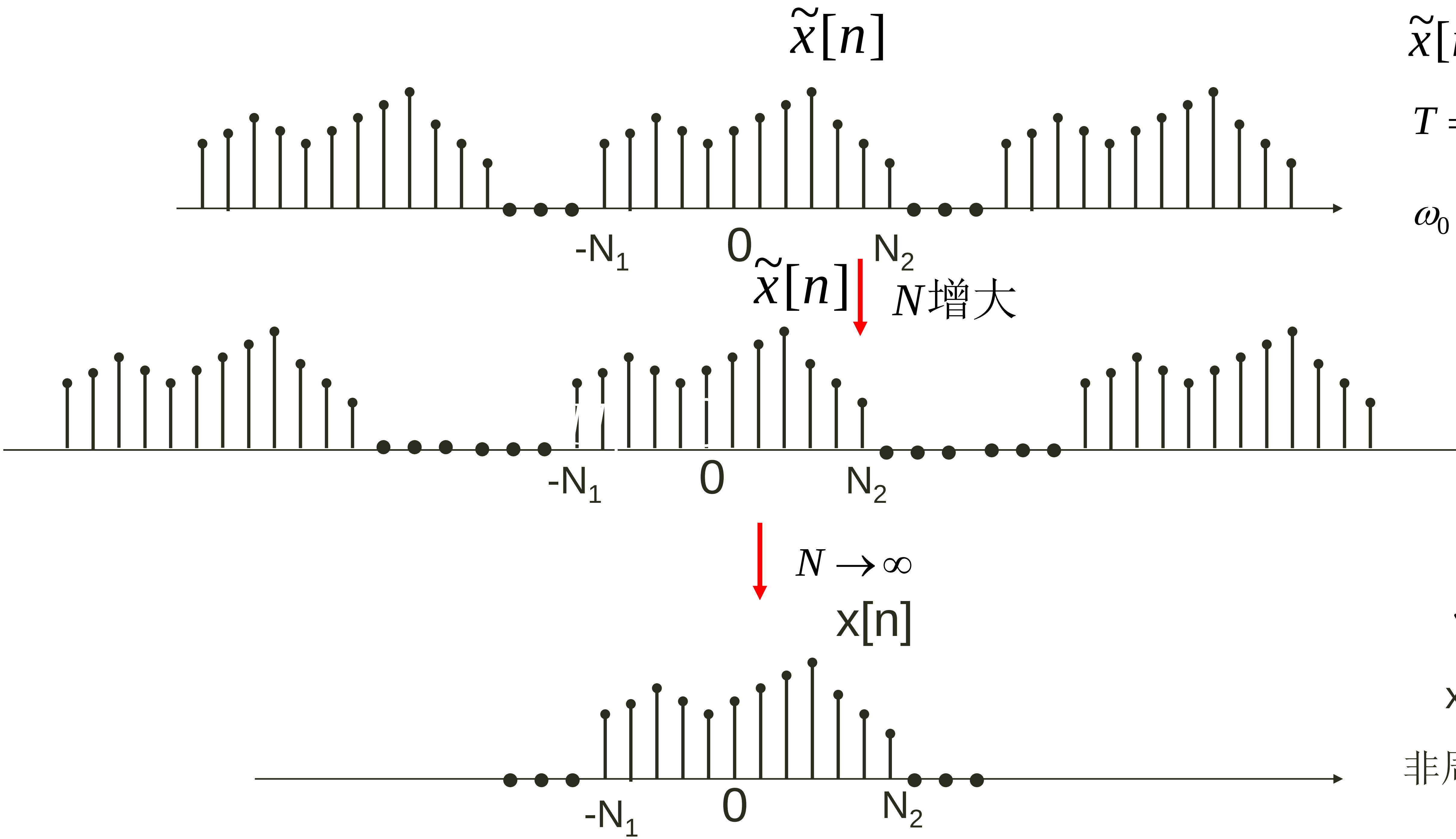
Chapter 5. 离散时间傅立叶变换

The Discrete-Time Fourier Transform

- **1 离散时间信号傅里叶变换的推导**
- **2 离散时间信号的收敛性**
- **3 离散周期信号的傅里叶变换**

离散时间傅里叶变换的导出

离散周期信号与非周期信号之间的转换



离散周期信号

$\tilde{x}[n]$

$T = N$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$

$N \rightarrow \infty$

x[n]

非周期信号

离散非周期信号的傅里叶变换对

- **傅里叶变换合成公式** $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{jk\omega n}d\omega$$

- **傅里叶变换分析公式** $$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

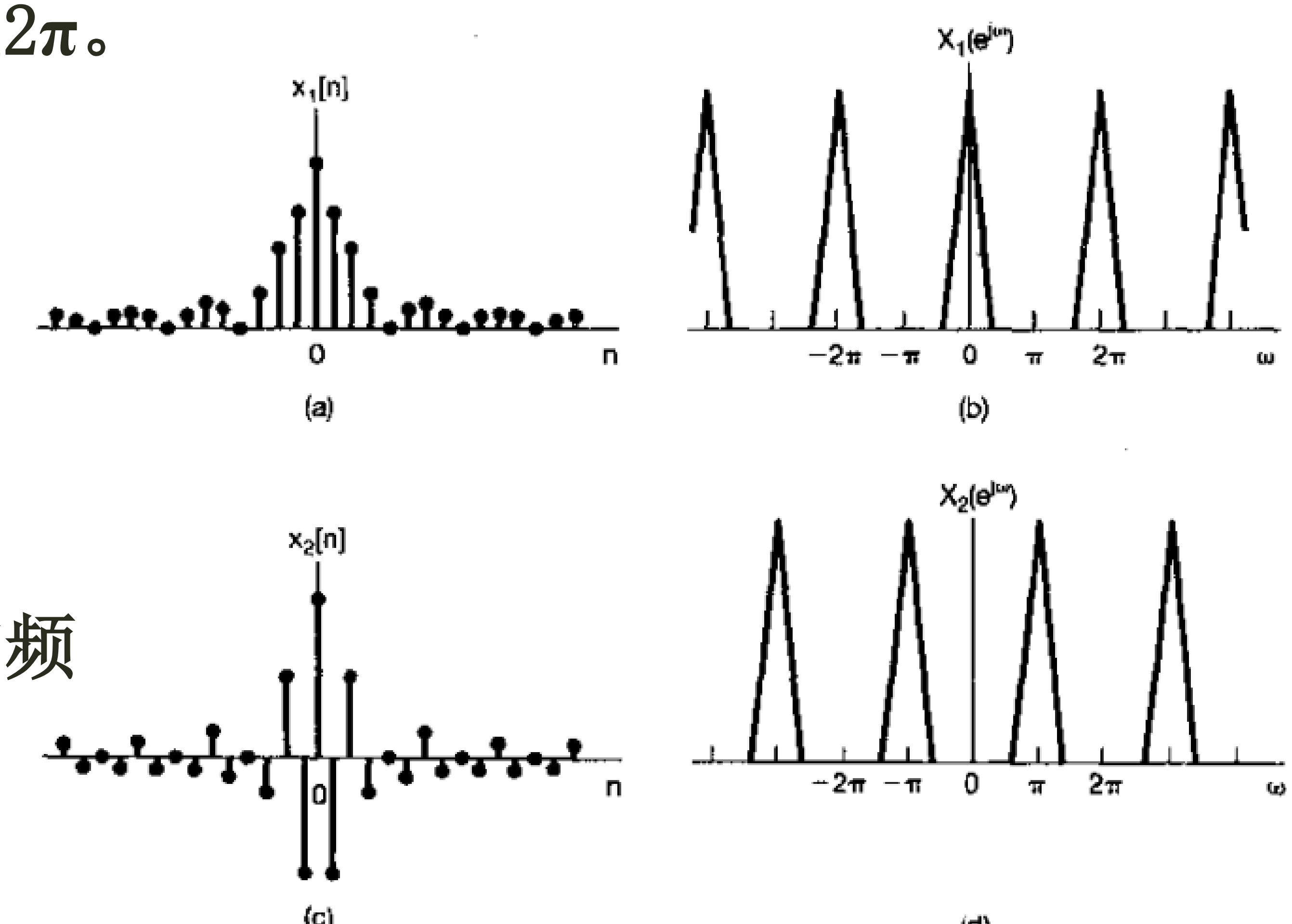
- **几点说明**

(1) $X(e^{j\omega})$ 称为 $x[n]$ 的频谱, 周期是2**π**。

$$X(e^{j(\omega+2\pi)})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_n e^{-j(\omega+2\pi)n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_n e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n}=X(e^{j\omega})$$

(2)低频信号集中在偶数**π**附近，高频信号集中在奇数**π**附近。



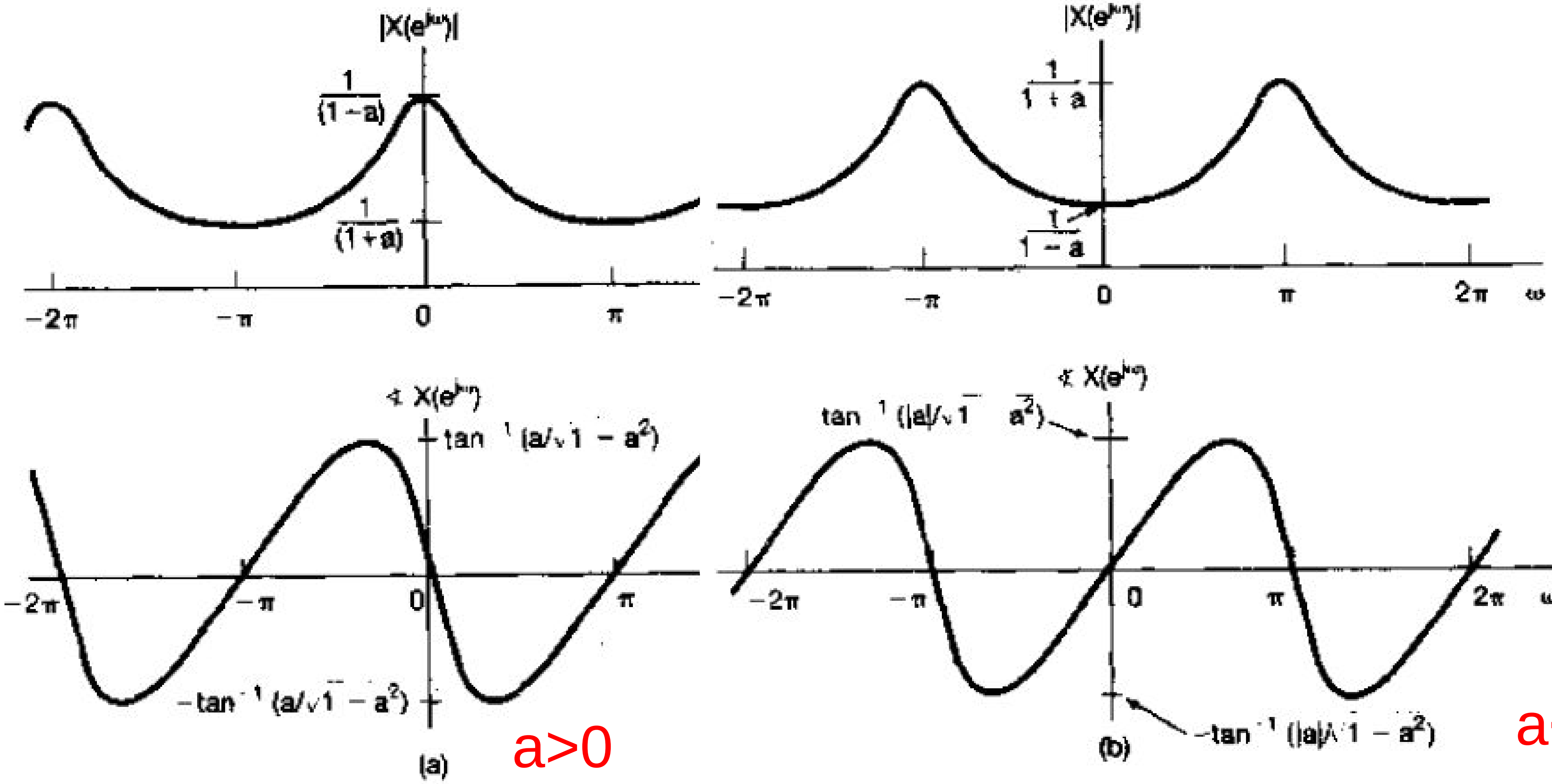
离散时间傅里叶变换举例

例5.1：计算x[n]的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_n e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=a^n u[n] \qquad |a|<1$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^n u[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(ae^{-j\omega})^n$$



a>0

a<0

$$=\frac{1-\left(ae^{-j\omega}\right)^{\infty}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

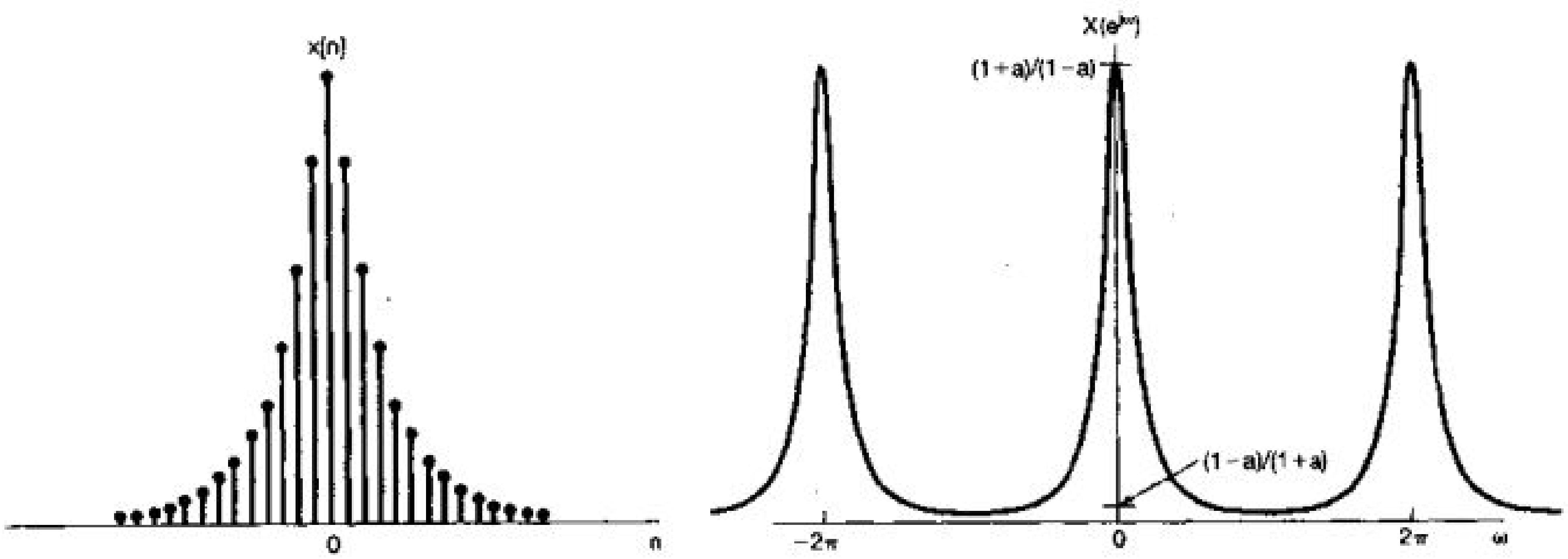
离散时间傅里叶变换举例

例5.2：计算x[n]的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$

$$x[n]=a^{|n|}\qquad |a|<1$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{|n|}e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(ae^{-j\omega}\right)^{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(ae^{j\omega}\right)^{n}$$

$$=\frac{1-(ae^{-j\omega})^{\infty}}{1-ae^{-j\omega}}+\left(\frac{1-(ae^{-j\omega})^{\infty}}{1-ae^{j\omega}}-\left(ae^{j\omega}\right)^{0}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}=\frac{1-a^{2}}{1-2a\cos\omega+a^{2}}$$



(a)

(b)

离散时间傅里叶变换举例

例5.3：计算$x[n]$的傅里叶变换

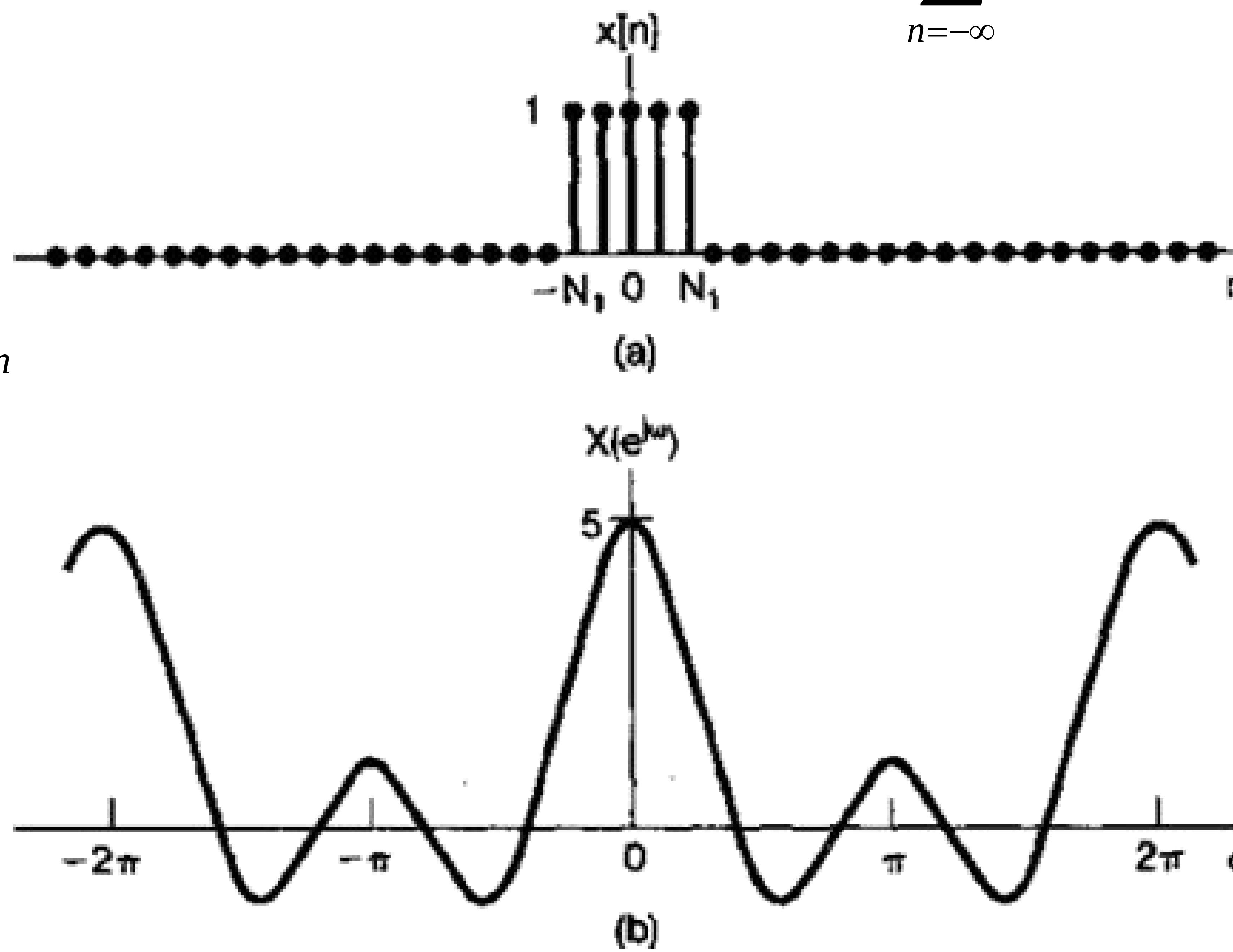
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & |n| \ge N_1 \end{cases}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-N_1}^{-N_1} 1 \bullet e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{\sin\omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin(\omega/2)}$$



非周期脉冲信号的频谱是周期性脉冲信号频谱的包络。见例**3.12**。

离散时间傅里叶变换举例

例5.4：计算x[n]的傅里叶变换

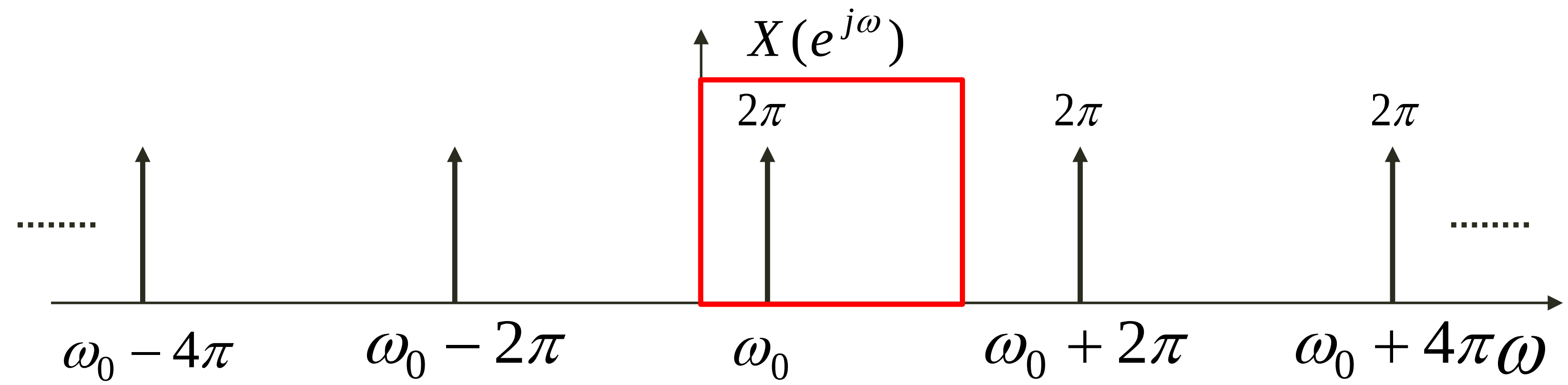
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{jk\omega n}d\omega$$

$$(1)\, x[n] = \delta[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\delta[n]e^{-j\omega n} = \delta[0]e^{-j\omega 0} = 1$$

$$\mathscr{F}\{\delta[n]\} = 1$$



$$(2)\, X(e^{j\omega n}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)e^{jk\omega n}d\omega = e^{j(\omega_0 + 2k\pi)n} = e^{j\omega_0 n}$$

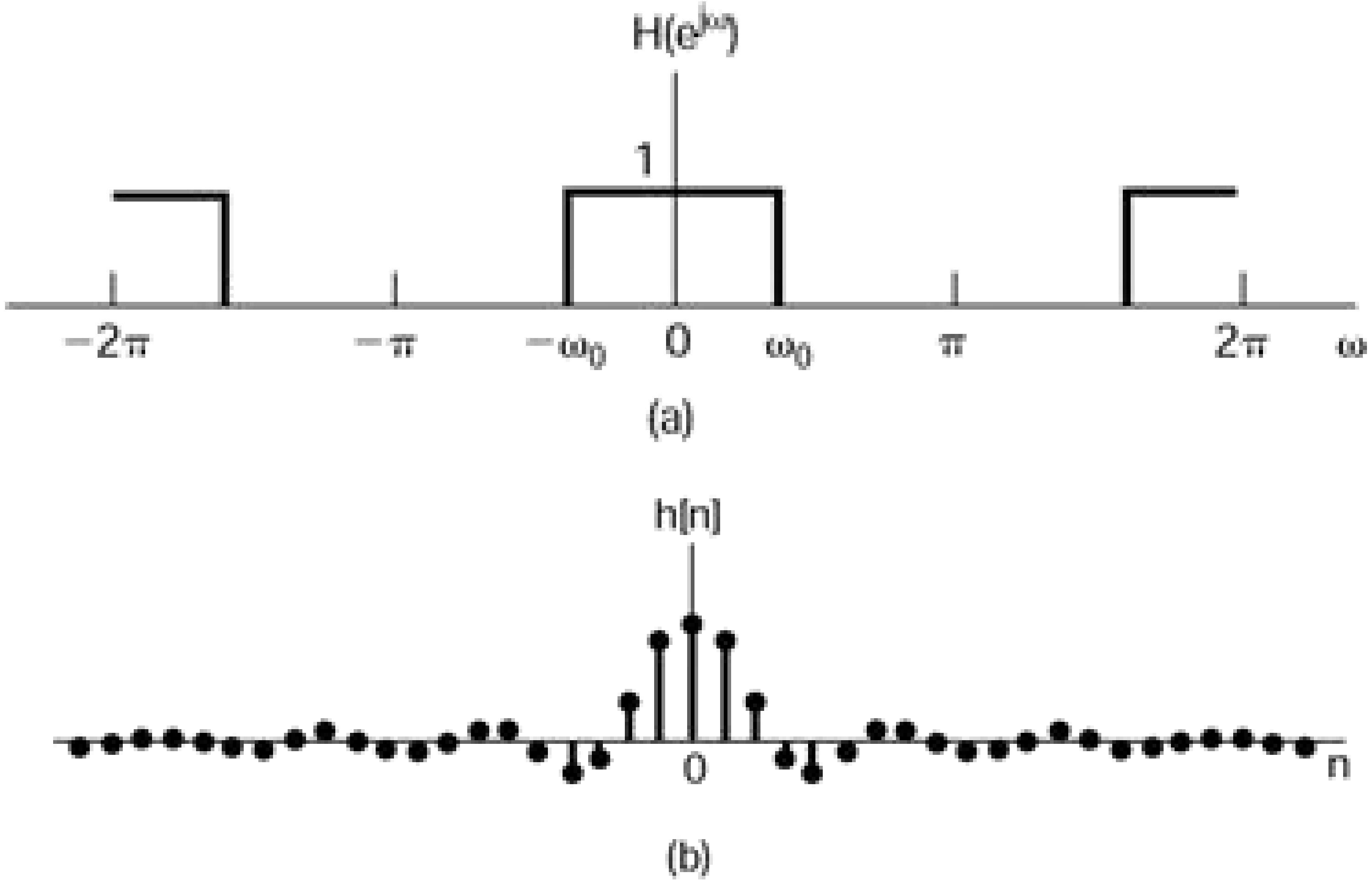
离散时间傅里叶变换举例

例5. 12 理想离散低通滤波器的频率响应如右图所示。计算其时域表达方式。

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}1\bullet e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_0}^{\omega_0}=\frac{\sin\omega_0 n}{\pi n}$$



(1)理想滤波器不是因果的。
(2)理想低通滤波器的单位脉冲响应是振荡型的。
(3)电路不好实现。

离散非周期信号傅里叶变换的收敛性

- **傅里叶变换公式是否收敛？**

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{jk\omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_n e^{-j\omega n}$$

- **收敛条件**

(1) 绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x_n|<\infty$$

(2) 平方可和

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x_n|^2<\infty$$

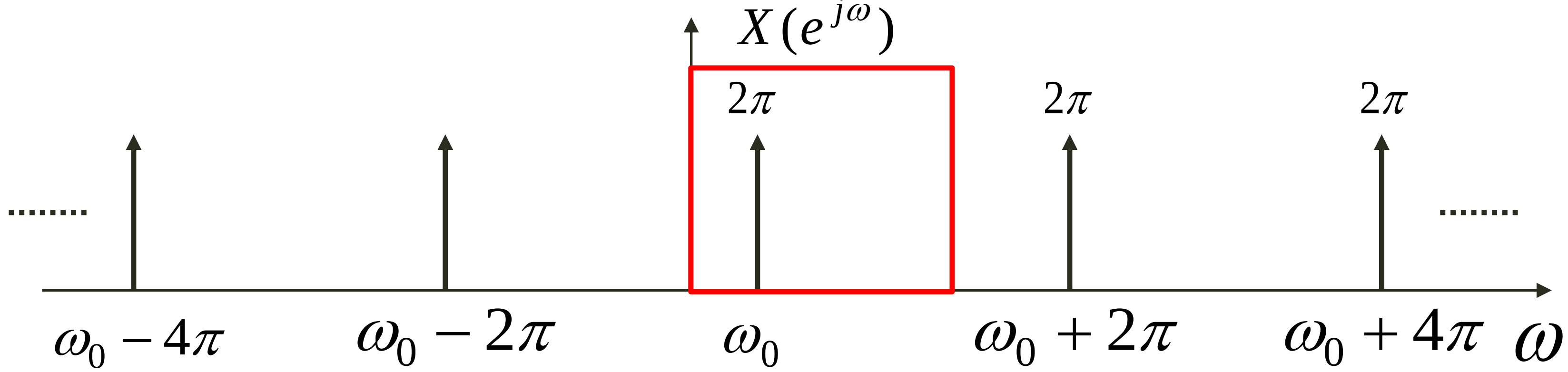
- **吉伯斯现象**

用有限项复指数信号的积分近似非周期离散信号x[n]，无吉伯斯现象。

$$\hat{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

周期离散时间信号的傅里叶变换

离散复指数信号 $x[n]=e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换



$$\boxed{X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)}$$

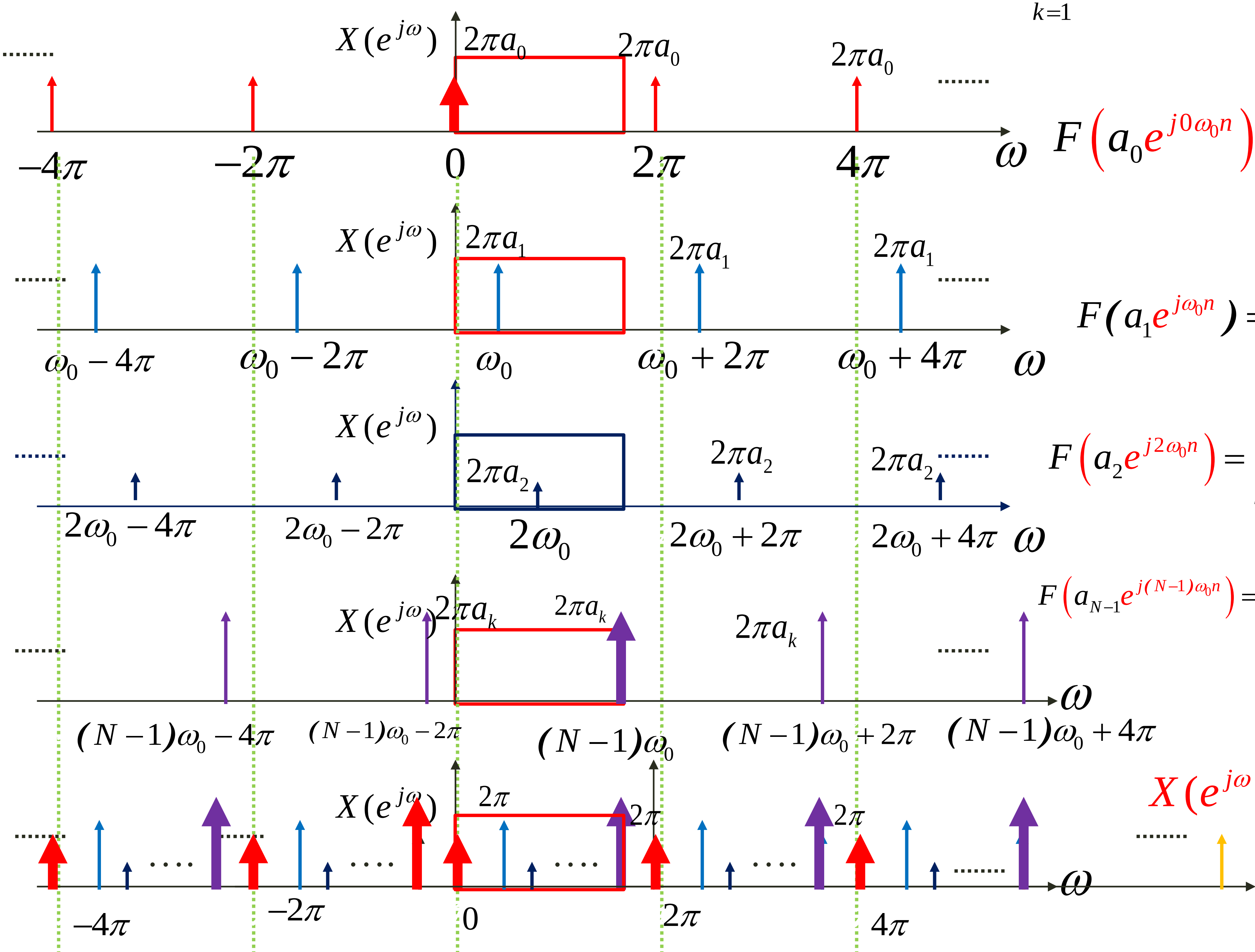
$$=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left[2\pi\delta\left(\omega-(Nl+1)\omega_0\right)\right]$$

周期离散时间信号的傅里叶变换

$$x[n]=e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

离散周期信号的傅里叶变换

$$x[n]=\sum_{k=1}^{N-1}a_k e^{jk\omega_0}$$



$$F\left(a_0e^{j0\omega_0 n}\right)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi a_0\delta(\omega-2\pi l)$$

$$F\left(a_1e^{j\omega_0 n}\right)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi a_1\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

$$F\left(a_2e^{j2\omega_0 n}\right)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi a_2\delta(\omega-2\omega_0-2\pi l)$$

$$F\left(a_{N-1}e^{j(N-1)\omega_0 n}\right)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi a_{N-1}\delta(\omega-(N-1)\omega_0-2\pi l)$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

周期离散时间信号的傅里叶变换

离散周期信号的傅里叶变换 $x[n]$

$$x[n]=e^{j\omega_0 n} \Longrightarrow X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk(2\pi/N)n} \Longrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

例5.5

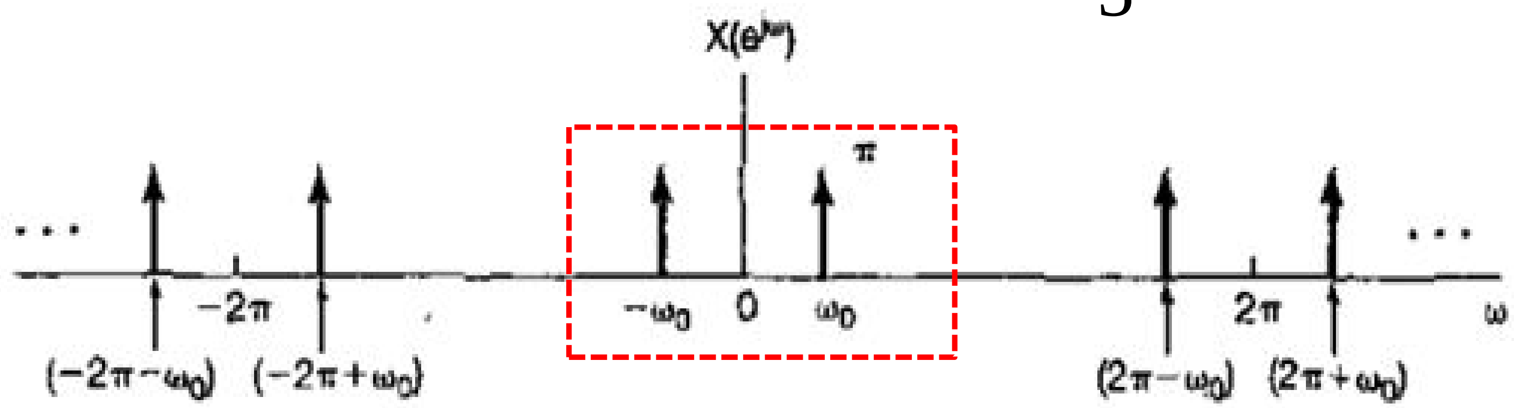
$$x[n]=\cos\omega_0 n \Longrightarrow F(x[n]) \quad \omega_0=\frac{2}{5}\pi,\quad T=5$$

$$x[n]=\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n} \Longrightarrow X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\pi\delta(\omega-\frac{2\pi}{5}+2\pi l)+\pi\delta(\omega+\frac{2\pi}{5}+2\pi l)\right)$$

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{-1}=\frac{1}{2},$$

$$a_0=a_{-2}=a_2=0$$

or $$X(e^{j\omega})=\pi\delta(\omega-\frac{2\pi}{5})+\pi\delta(\omega+\frac{2\pi}{5}) \quad -\pi\le\omega<\pi$$

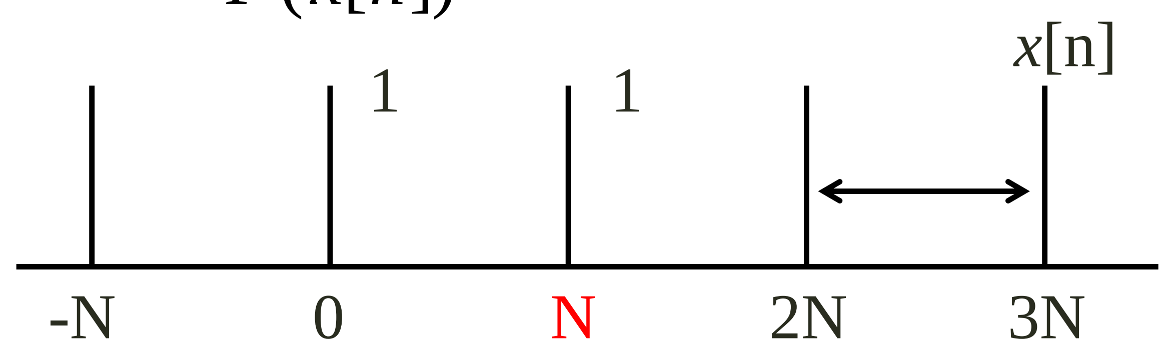


周期离散时间信号的傅里叶变换

离散周期信号的傅里叶变换 $x[n]$

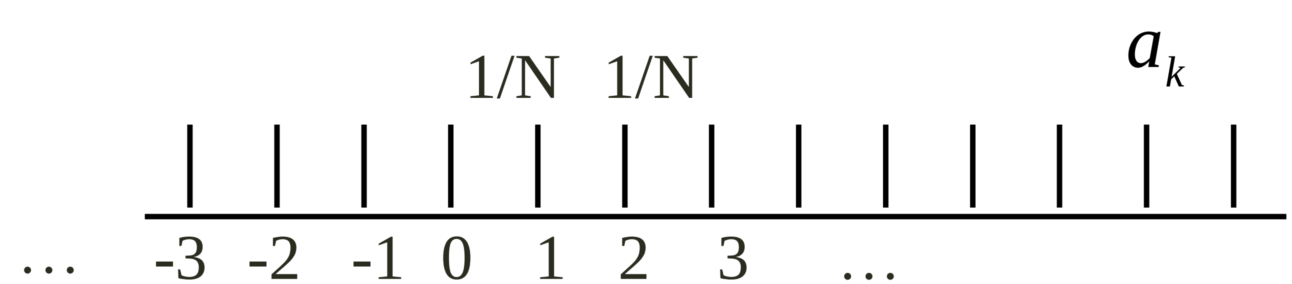
$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \Rightarrow X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0)$$

例5. 6 $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN] \longrightarrow F(x[n])$

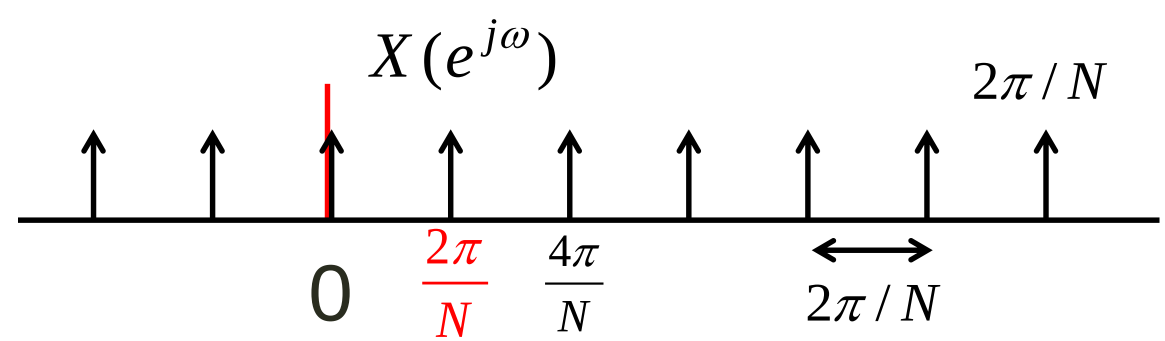


$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$=\frac{1}{N}1.e^{-jk(2\pi/N)0}=\frac{1}{N}$$



$$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$



常用性质

周期性 Periodicity

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1\left(e^{j\omega}\right) \Rightarrow X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = X\left(e^{j\omega}\right) \quad \text{周期为}\mathbf{2}\pi$$

奇偶性

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right) \text{ 且} x[n]=x[-n] \Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right) \text{ 且} x[n]=-x[-n] \Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=-X\left(e^{-j\omega}\right)$$

线性性 Linearity

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow ax_1[n]+bx_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)$$

常用性质

时移性 **Time shifting**

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x\left[n-n_0\right] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$$

频移性 **Frequency shifting**

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) \Rightarrow e^{j\omega_0 n} x\left[n\right] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

差分 **Differencing**

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x\left[n\right]-x\left[n-1\right] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \left(1-e^{-j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$$

累加 **Accumulation**

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{n} x\left[m\right] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X\left(e^{j\omega}\right)+\pi X\left(e^{j0}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left[\omega-2\pi k\right]$$

常用性质

- **时间反转** Time Reversal $x[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[-n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X\left(e^{-j\omega}\right)$

- **尺度变换**

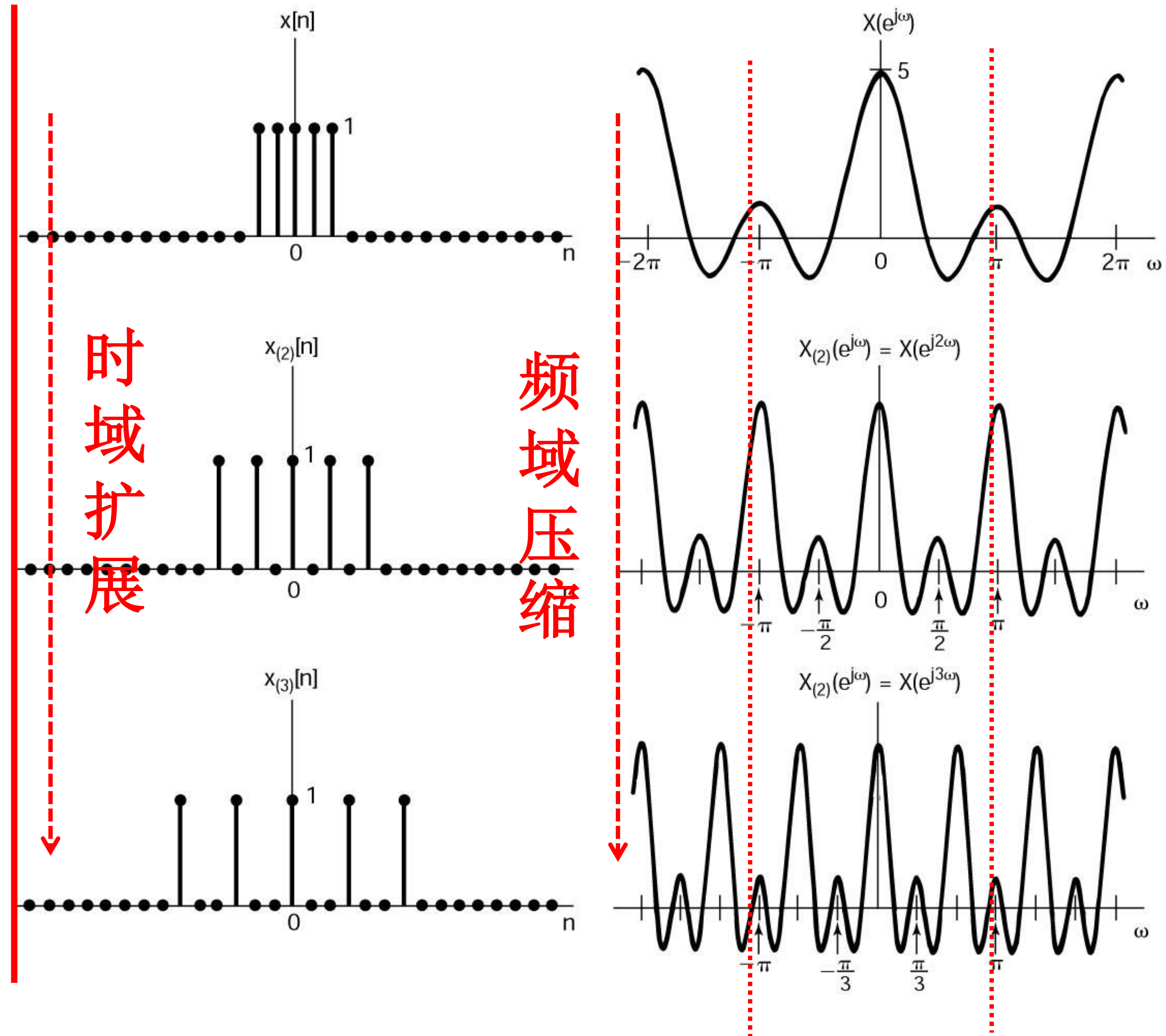
$$x[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})$$

$$\Downarrow$$

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x\left[n/k\right], & n\text{为}\mathbf{k}\text{的整倍数} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$X_{(k)}\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{jk\omega}\right)$$



常用性质

帕斯瓦尔定理 Parseval's Relation

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

(1)信号的总能量等于离散时间频率空间中**2π**区间上$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$的平均，即单位频率上的$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$。

(2)$\left|X\left(e^{jw}\right)\right|^2$称为能量密度谱**Energy-density spectrum**。

卷积定理

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right)$$

注意：只有稳定的**LTI**系统才有频率响应**H(jw)**。

相乘性质

与连续信号的相乘性质不相同！

$$y[n] = x_1[n] \bullet x_2[n] \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\underline{2\pi}} X_1\left(e^{j\theta}\right) X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$$

共轭及共轭对称性

- **共轭性** $x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x^*[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X^*\left(e^{-j\omega}\right)$

- **共轭对称性** 若**x[t]**为实信号，则 $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

- **实信号的其它性质**

$$\begin{cases} x[n] = x_e[n] + x_o[n] \\ x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x_e[n]) = \operatorname{Re} X(e^{j\omega}) \\ F(x_o[n]) = j \operatorname{Im} X(e^{j\omega}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} X(e^{j\omega}) = \operatorname{Re} X(e^{-j\omega}) & \text{偶函数} \\ \operatorname{Im} X(e^{j\omega}) = -\operatorname{Im} X(e^{-j\omega}) & \text{奇函数} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{实偶} \xrightarrow{\text{DFT}} \text{实偶} \\ \text{实奇} \xrightarrow{\text{DFT}} \text{虚奇} \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|X(e^{j\omega})\right| & \text{偶函数} \\ \angle X(e^{j\omega}) & \text{奇函数} \end{cases}$$

- **虚信号的性质** $X(e^{j\omega}) = -X^*(e^{-j\omega})$

$$\begin{cases} \text{虚偶} \xrightarrow{\text{DFT}} \text{虚偶} \\ \text{虚奇} \xrightarrow{\text{DFT}} \text{实奇} \end{cases}$$

例题

已知$x[n] \overset{F}{\Rightarrow} X(j\omega)$ (1)计算 $x[-n-1]$ 的傅里叶变换

时移+反转性质

$$x_1[n]=x[n-1] \longrightarrow X_1(e^{j\omega})=e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$$

$$x_2[n]=x[-n-1] \longrightarrow X_2\left(e^{j\omega}\right)=X_1\left(e^{-j\omega}\right)=e^{j\omega}X\left(e^{-j\omega}\right)$$

(2) $y[n]=n(n-1)x[n]$ 的傅里叶变换 频域微分性质

$$y[n]=n^2x[n]-nx[n]$$

$$x_1[n]=nx[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})=j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$x_2[n]=n^2x[n]=nx_1[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})=j\frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega}=-\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2}$$

$$Y(e^{j\omega})=X_2(e^{j\omega})-X_1(e^{j\omega})=-\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2}-j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

例题

- **表达式** $x[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega}) \Rightarrow x_{(k)}[n]=\begin{cases}x\left[n/k\right], & n为\mathbf{k}的整数倍\\ 0, & 其它\end{cases} \leftrightarrow X_{(k)}\left(e^{j\omega}\right)= X\left(e^{jk\omega}\right)$

- **例子5.9**

$$x[n]=y_{(2)}[n]+2y_{(2)}[n-1]$$

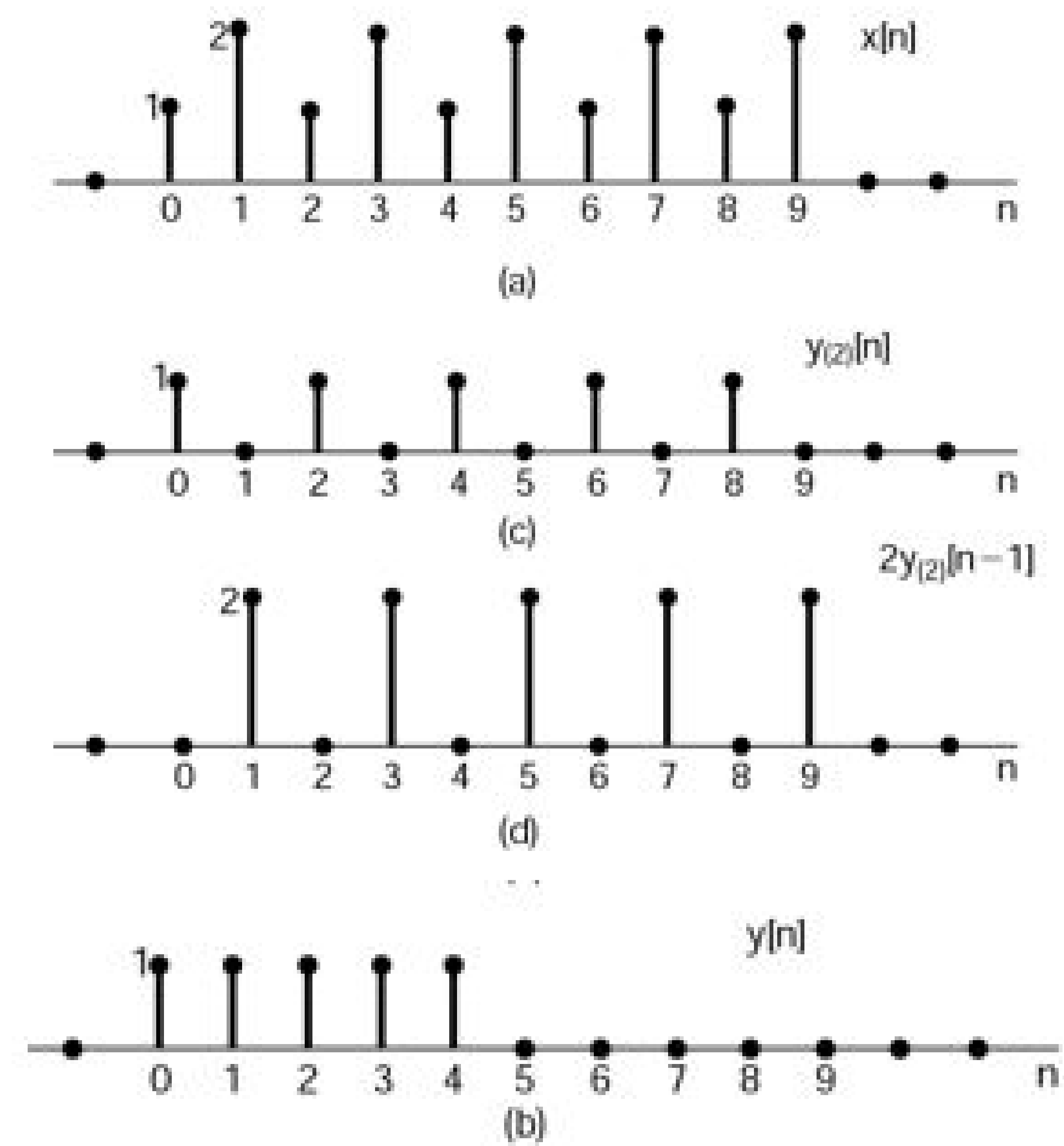
$$y[n]=g[n-2]$$

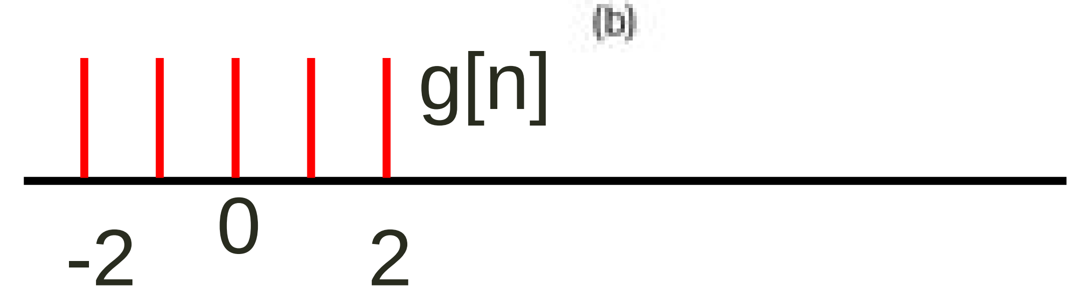
$$g[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{\sin\omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j2\omega}\frac{\sin\omega\left(\frac{5}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$y_{(2)}[n] \rightarrow Y_2(e^{j\omega})=e^{-4j\omega}\frac{\sin 5\omega}{\sin\omega}$$

$$2y_{(2)}[n-1] \rightarrow 2e^{-j\omega}Y_2(e^{j\omega})=2e^{-5j\omega}\frac{\sin 5\omega}{\sin\omega}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j4\omega}\left(1+2e^{-j\omega}\right)\frac{\sin 5\omega}{\sin\omega}$$

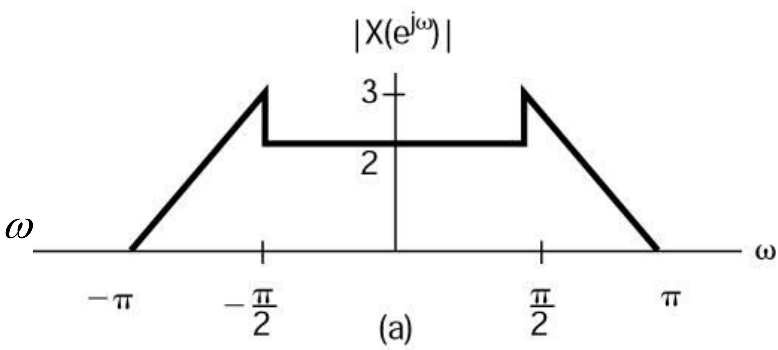




例5.10 已知信号x[n]的频谱如右图所示。判断时域中该信号是否为周期信号、实信号、偶信号、有限能量信号。

（1）周期信号的频谱为离散频谱，因此该信号是非周期的。

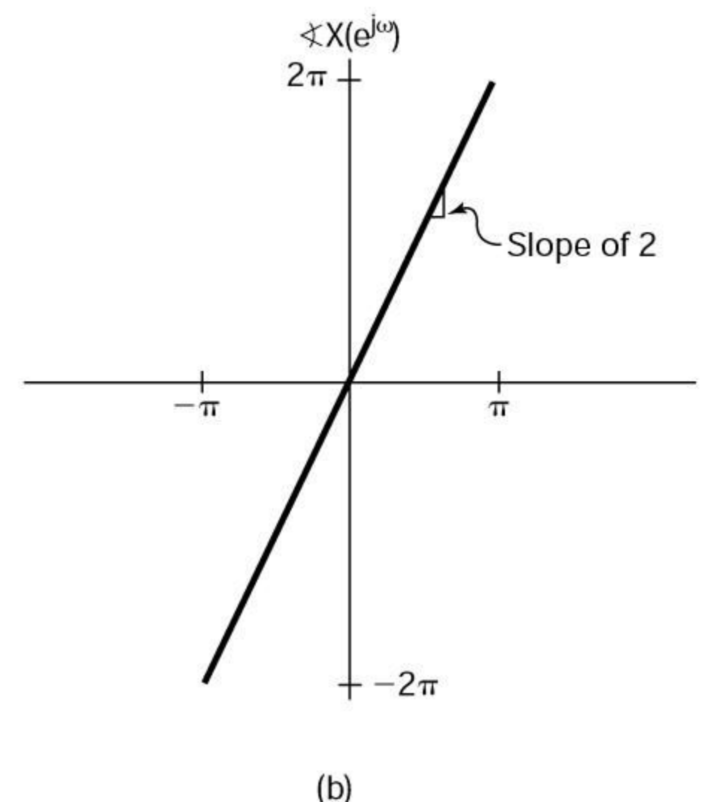
（2）实信号的共轭对称性：**是实信号**



$$X(e^{j\omega})=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j2\omega}\qquad X(e^{-j\omega})=\left|X(e^{-j\omega})\right|e^{-j2\omega}=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{-j2\omega}$$

$$X^*(e^{-j\omega})=\left|X(e^{-j\omega})\right|e^{j2\omega}=X(e^{-j\omega})$$

（3）偶信号的傅里叶变换是偶函数



$X(e^{j\omega})\neq X(e^{-j\omega})$　　$X(e^{j\omega})$ 不是偶函数。

（4）2π区间上的积分是有限值，因此该信号是有限能量信号。

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega<\infty$$

例题

$$x[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega}) \Rightarrow nx[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} \quad \text{or} \quad -jnx[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

已知$x[n]=\alpha^n u[n]\rightarrow X(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$，$Y(e^{j\omega})=\dfrac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$，则y$[n]=?$

$$x[n]=\alpha^n u[n]\rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

频域微分

$$x_2[n]=nx[n]=n\alpha^n u[n]\rightarrow X_2(e^{j\omega})=j\frac{d\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)}{d\omega}=j\left(-jae^{-j\omega}\right)\frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}=ae^{-j\omega}\frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$$

化简

$$n\alpha^n u[n]\rightarrow X_2(e^{j\omega})=ae^{-j\omega}\frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$$

$$Y(e^{j\omega})=\left(\underbrace{\frac{1}{a}e^{j\omega}}_{\text{对应时移}x_2(n+1)}\right)\underbrace{X_2(e^{j\omega})}_{na^n u[n]} \Rightarrow y(t)=\frac{(n+1)a^{n+1}u[n+1]}{a}=(n+1)a^n u[n+1]$$

例题

例5. 13 一个LTI系统，其单位脉冲响应为 $h[n]=\alpha^n u[n], |\alpha|<1$

其输入为 $x[n]=\beta^n u[n], |\beta|<1$，计算输出**y[n]**。

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \qquad X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}} \longrightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)\left(1-\beta e^{-j\omega}\right)}$$

$$(1)\alpha\neq\beta, Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}}+\frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$A=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}, \quad B=-\frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

$$\longrightarrow y[n]=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n]-\frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u[n]$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n+1}u[n]-\beta^{n+1}u[n]\right]$$

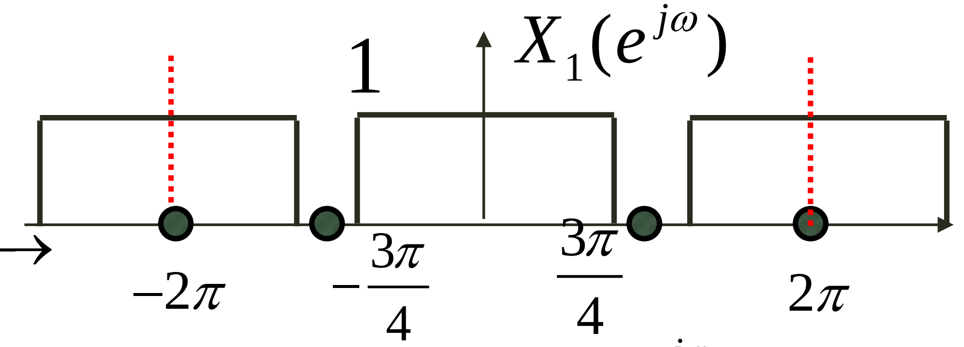
$$(2)\alpha=\beta, Y\left(e^{j\omega}\right)=\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2 \longrightarrow \boxed{y[n]=(n+1)\alpha^n u[n+1]}$$

相乘性质例题

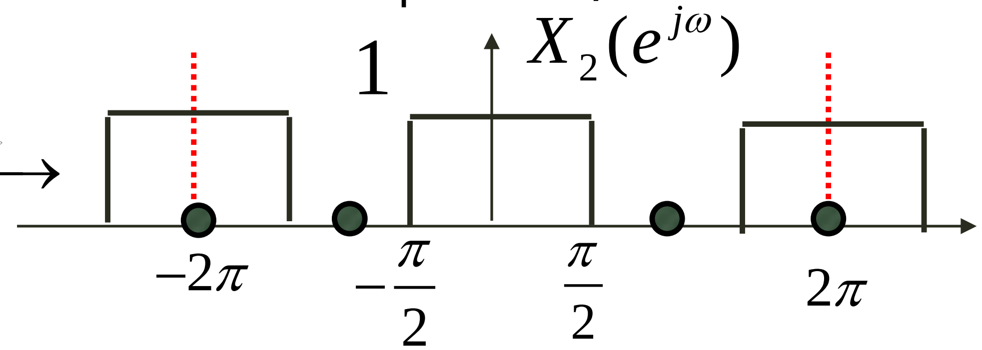
表达式 $y[n]=x_1[n]\bullet x_2[n]\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}Y\left(e^{jw}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1\left(e^{j\theta}\right)X_2\left(e^{j(w-\theta)}\right)d\theta$

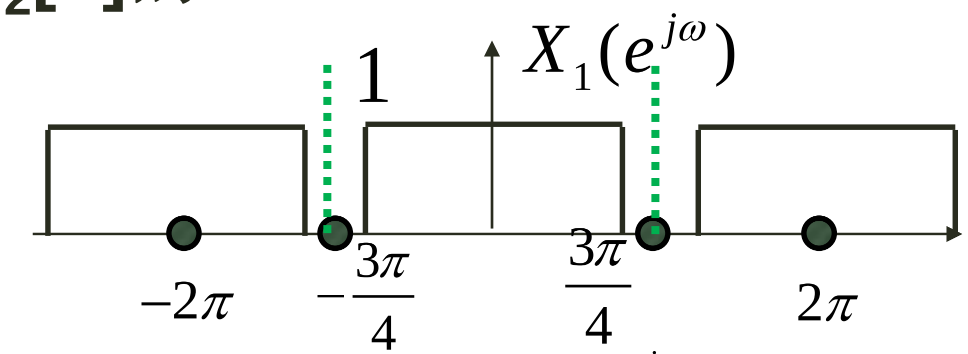
例5.15 已知信号x[n]是信号$x_1[n]$与$x_2[n]$的乘积，计算其傅里叶变换。

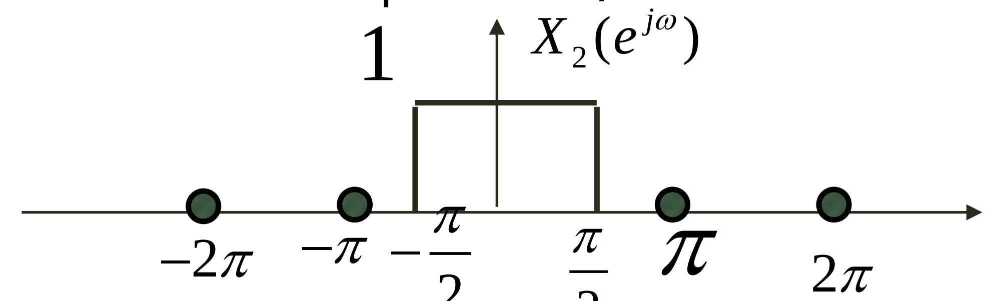
$$x_1[n]=\frac{\sin(\frac{3\pi}{4}n)}{n\pi}\xrightarrow{\mathcal{F}}$$

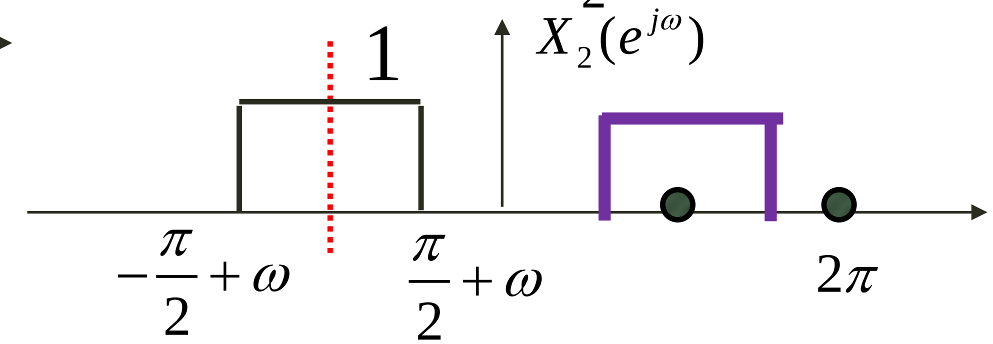


$$x_2[n]=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}\xrightarrow{\mathcal{F}}$$

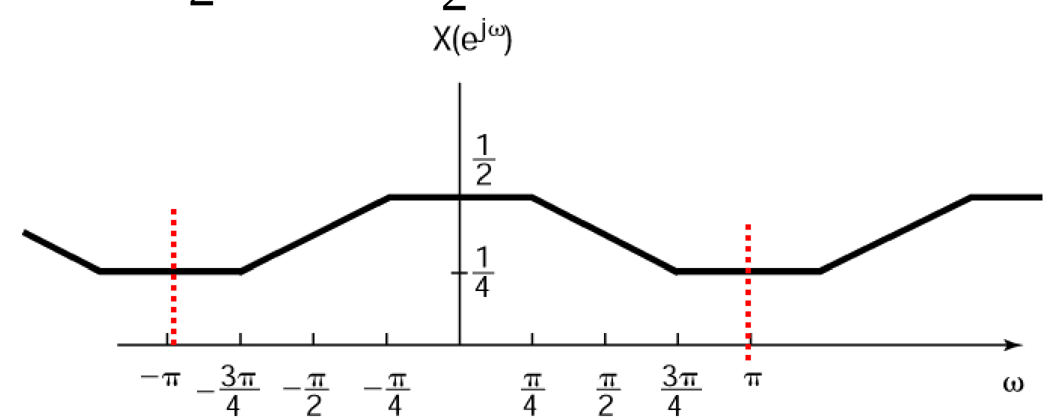








$$\mathcal{F}\{x_1[n]x_2[n]\}=?=\begin{cases}\frac{1}{4} & -\pi<\omega\le-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi<\omega\le\pi\\ \frac{\omega}{2\pi}+\frac{5}{8} & -\frac{3}{4}\pi<\omega\le-\frac{1}{4}\pi\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\pi<\omega\le\frac{1}{4}\pi\\ -\frac{\omega}{2\pi}+\frac{5}{8} & \frac{1}{4}\pi<\omega\le\frac{3}{4}\pi\end{cases}$$



综合性质的应用

$(1)n>0$时，$x[n]=0$ $(2)x[0]>0$ 计算x[n]

$(3)\operatorname{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\}=\sin\omega-\sin 2\omega$ $(4)\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^{2}d\omega=3$

由（3）$\dfrac{x[n]-x[-n]}{2}\overset{FT}{\longleftrightarrow}j(\sin\omega-\sin 2\omega)=\dfrac{1}{2}\left(e^{j\omega}-e^{-j\omega}+e^{j2\omega}-e^{2j\omega}\right)$

$$\frac{x[n]-x[-n]}{2}=\frac{1}{2}\left(\delta[n+1]-\delta[n-1]+\delta[n+2]-\delta[n-2]\right)$$

由**(1)**$n<0$时，$\dfrac{x[n]}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\delta[n+1]+\delta[n+2]\right)$ ⇒ $x[n]=\left(\delta[n+1]+\delta[n+2]\right)$

$n<0$时，$x[-1]=1, x[-2]=1$，其它$x[n]=0$

由**(4)** $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^{2}d\omega=3\leftrightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^{2}=3$

由**(1)(2)** $x[0]>0$ $x[n>0]=0$

⇒ $x[0]=1$

$$x[n]=\left(\delta[n+1]+\delta[n+2]+\delta[n]\right)$$

对偶性Duality （不考）

4组基本的傅立叶级数与傅里叶变换基本公式

离散 Fs

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n} \\ x[n] = \sum\limits_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \end{cases}$$

组内对偶

连续 FS

$$\begin{cases} x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \dfrac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \end{cases}$$

组内不对偶

F/FS →

← F

离散 F

$$\begin{cases} x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\ X\left(e^{j\omega}\right) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \end{cases}$$

组内不对偶

连续 F

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \end{cases}$$

组内对偶

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

离散时间傅里叶级数的对偶性Duality

表达式 Duality in the Discrete-Time Fourier Series

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n} \qquad x[n] \xrightarrow{FS} a_k$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad \boxed{a_k \xrightarrow{FS} \frac{1}{N}x[-n]} \text{ 或 } \boxed{a_n \xrightarrow{FS} \frac{1}{N}x[-k]}$$

证明

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} \xrightarrow[\text{第一步：变量置换}]{\text{令}n=-n} a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[-n]e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Big\downarrow \text{定义}$$

$$a_n \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} (1/N)x[-k] \xleftarrow[\text{第二步：变量交换}]{\text{k=n,n=k}} a_k \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} (1/N)x[-n]$$

离散时间傅里叶级数的对偶性Duality

表达式 Duality in the Discrete-Time Fourier Series

$$x[n] \xrightarrow{FS} a_k \qquad \boxed{a_k \xrightarrow{FS} \frac{1}{N} x[-n]} \text{ 或 } \boxed{a_n \xrightarrow{FS} \frac{1}{N} x[-k]}$$

基本题

5.17

例题

$T=2,\ x[n]=(-1)^n \xrightarrow{Fs} a_k$ 利用对偶性，计算 $g[n]=a_k$ 的傅立叶级数 b_k

$$b_n \overset{\text{FS}}{\leftrightarrow} (1/N)\, x[-k] = \frac{1}{2}(-1)^k$$

离散时间傅里叶级变换和连续周期时间傅里叶级数之间的对偶性

分析

离散时间信号傅里叶变换　　连续周期时间信号傅里叶级数

离非
$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \quad (1)$$

连周
$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n} \quad (2)$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3)$$
连周

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \quad (4)$$
离非

$$\omega=\frac{2\pi}{T}t$$

对偶表达式1

$$\mathrm{F}\{x[n]\}=X(e^{j\omega}) \longrightarrow X(e^{j\omega_0 t})\xrightarrow{FS}x[-k]$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

第1步: 对(1)进行变量替换,n= -n

$$x[-n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega$$

第2步: w与t之间的变量替换

设: $\omega=\frac{2\pi}{T}t \qquad \omega=\omega_0 t$

$$x[-n]=\frac{1}{T}\int_T X(e^{j\omega_0 t})e^{-jn\omega_0 t}dt=a_k$$

第3步: 常规变量替换　n=k, k=n

$$x[-k]=\frac{1}{T}\int_T X(e^{j\omega_0 t})e^{-jk\omega_0 t}dt=a_k$$

$$X(e^{j\omega_0 t})\xrightarrow{FS}x[-k]$$

离散时间傅里叶级变换和连续周期时间傅里叶级数之间的对偶性

分析

离散时间信号傅里叶变换

离非 $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$ (1)

连周 $X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$ (2)

$\omega=\frac{2\pi}{T}t$

连续周期时间信号傅里叶级数

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ (3) 连周

$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ (4) 离非

对偶表达式1

$$\mathrm{F}\{x[n]\}=X(e^{j\omega})\longrightarrow X(e^{j\omega_0 t})\xrightarrow{FS}x[-k]$$

已知$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]\overset{FT}{\longleftrightarrow}\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ 计算$\frac{e^{-j\omega_0 t}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}}\xrightarrow{FS}a_k$?

$$a_k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-k-1}u[-k-1]$$

离散时间傅里叶级变换和连续时间傅里叶级数之间的对偶性

表达式分析

离散时间信号傅里叶变换

$$\begin{cases} x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})e^{jwn}dw & (1) \\ X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jwn} & (2) \end{cases}$$

连续时间信号傅里叶级数

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t} & (3) \\ a_k = \dfrac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jkw_0 t}dt & (4) \end{cases}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}t$$

对偶表达式2 $x(t) \xrightarrow{Fs} a_k \longrightarrow a_n \xrightarrow{F} x(-\omega/\omega_0)$ $\omega = \omega_0 t$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jkw_0 t}dt \xrightarrow{t=-t} a_k = \frac{1}{T}\int_T x(-t)e^{jkw_0 t}dt \xrightarrow{\omega = \omega_0 t \quad t = \omega/\omega_0}$$

$$a_k = \frac{1}{T\omega_0}\int_{\frac{1}{T\omega_0}} x\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{jk\omega}d\omega \xrightarrow{2\pi = \omega_0 T} a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} x\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{jk\omega}d\omega$$

$$\downarrow n = k, k = n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} x\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)e^{jn\omega}d\omega \longrightarrow a_n \xrightarrow{F} x(-\omega/\omega_0)$$

离散时间傅里叶级变换和连续时间傅里叶级数之间的对偶性

表达式分析

离散时间信号傅里叶变换

$$\begin{cases} x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})e^{jwn}dw & (1) \\ X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jwn} & (2) \end{cases}$$

连续时间信号傅里叶级数

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t} & (3) \\ a_k = \dfrac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jkw_0 t}dt & (4) \end{cases}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}t$$

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \longrightarrow X(e^{j\omega_0 t}) \xrightarrow{FS} x[-k]$$

$$x(t) \xrightarrow{Fs} a_k \longrightarrow a_n \xrightarrow{F} x(-\omega/\omega_0) \quad \omega = \omega_0 t$$

例5.17

$$F\left\{\sin(\frac{\pi n}{2})\Big/\pi n\right\} \longrightarrow T = 2\pi \quad \omega_0 = 1$$

解法1:带入公式

已知 $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T_1 \\ 0, & T_1 < |t| \le T/2 \end{cases} \xrightarrow{Fs} \dfrac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$ $\xrightarrow{\text{对偶性关系式}}$ $\dfrac{\sin(n\omega_0 T_1)}{\pi n} \xrightarrow{F} x(-\dfrac{\omega}{\omega_0}) = \begin{cases} 1, & |\dfrac{\omega}{\omega_0}| \le T_1 \\ 0, & T_1 < |\dfrac{\omega}{\omega_0}| \le T/2 \end{cases}$

$T_1 = \pi/2$

带入相应参数

$$\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} \to X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

离散时间傅里叶级变换和连续时间傅里叶级数之间的对偶性

表达式分析

离散时间信号傅里叶变换　　　　连续时间信号傅里叶级数

$$\begin{cases} x[n]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi}X\left(e^{jw}\right)e^{jwn}dw & (1) \\ X\left(e^{jw}\right)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jwn} & (2) \end{cases} \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}t \qquad \begin{cases} x(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jkw_0t} & (3) \\ a_k=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T x(t)e^{-jkw_0t}dt & (4) \end{cases}$$

例5.17

$$F\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\Big/\pi n\right\} \longrightarrow T=2\pi \quad \omega_0=1$$

解法2：逐步凑公式推理法

已知 $x(t)=\begin{cases}1, & |t|\le T_1 \\ 0, & T_1<|t|\le T/2\end{cases} \xrightarrow{FS} \dfrac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi} \longrightarrow \begin{cases} T_1=\pi/2 \\ \dfrac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi}=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T x(t)e^{-jkw_0t}dt \end{cases}$

$$\downarrow \omega=\omega_0 t$$

$$\frac{\sin(n\omega_0T_1)}{\pi n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-T_1\omega_0}^{T_1\omega_0}1\bullet e^{-jn\omega}d\omega \xleftarrow[\text{t写为w}]{\text{k写为n}} \frac{\sin(k\omega_0T_1)}{\pi k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-T_1\omega_0}^{T_1\omega_0}1\bullet e^{-jkt}dt$$

求F $\downarrow$ 公式(1) -ω→ω

$$\frac{\sin(n\omega_0T_1)}{\pi n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-T_1\omega_0}^{T_1\omega_0}1\bullet e^{j\omega n}d\omega \xrightarrow[\text{整理形式}]{\text{根据定义}} \frac{\sin(n\omega_0T_1)}{\pi n} \to X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|\le T_1\omega_0=\pi/2 \\ 0, & T_1\omega_0=\pi/2<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

由线性常系数差分方程表征的系统

N阶线性常系数差分方程

Linear Constant-Coefficient DifferenceEquation

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{m} b_k x[n-k]$$

系统响应求解方法

第三章的复指数函数分析方法

傅里叶变换的差分性质

傅里叶差分性质求解法

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} \longrightarrow h[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{m} b_k x[n-k] \xrightarrow{\text{两端各傅里叶变换}} \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\downarrow$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} = X\left(e^{j\omega}\right)\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

$$\downarrow$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) \to h[\mathbf{n}]$$

由线性系数微分方程表征的系统

例5.18 $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{m} b_k x[n-k]$ $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$

已知：一稳定LTI系统有下列方程表征，求其单位冲击响应。

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], |a| < 1$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \rightarrow h[n] = a^n u[n]$$

由线性系数微分方程表征的系统

例5.19 $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{m} b_k x[n-k]$ $\quad H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$

已知：一稳定LTI系统有下列方程表征，求其单位冲击响应。

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega}}$$

$$= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

由线性系数微分方程表征的系统

例5.20 已知一稳定**LTI**系统有下列方程表征，求输入为**x[n]**时的输出。

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n] \qquad x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{4}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}-\frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \qquad X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)=\left(\frac{4}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}-\frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$$=\frac{B_1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}+\frac{B_2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}+\frac{B_3}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} \longrightarrow B_1=-4 \quad B_2=-2 \quad B_3=8$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2 \longrightarrow a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$y[n]=\left[-4\left(\frac{1}{4}\right)^n-2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n+8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

作业　不用上交了

- 5.1(b)　分析公式
- 5.3(a)　周期函数
- 5.5　　合成公式
- 5.6(a)　时移与反转性质
- 5.7(b)　共轭性的应用
- 5.13　（卷积应用）线性组合与反变换
- 5.19