

# 什么是信道？

- 信道是传送信息的载体——信号所通过的通道。信息是抽象的，信道则是具体的。
- 信道是指信息传输的通道，包括**空间传输**和**时间传输**。我们在实际通信中所利用的各种物理通道是空间传输信道的最典型的例子，时间传输是指将信息保存，供以后读取，如磁带、光盘等在时间上将信息进行传输的信道。
- 这里最关键的是信道有一个输入以及一个与输入有关的输出。

# 信道的输入输出关系

- 信号在信道中传输会引入噪声或干扰，它使信号通过信道后产生错误和失真；
- 信道的输入和输出之间一般不是确定的函数关系，而是统计依赖关系；
- 知道了信道的输入信号、输出信号以及它们之间的依赖关系，信道的全部特性就确定了。
- 一般来说，输入和输出信号都是广义的时间连续的随机信号，可用随机过程来描述。

- 信道本身的物理结构可能是千差万别的，信息论研究的信道其输入点和输出点在一个实际物理通道中所处位置的选择完全取决于研究的目的。
  
- 关于信道的主要问题有：
  - 1. 信道的建模（信道的统计特性的描述）
  - 2. 信道容量的计算
  - 3. 在有噪信道中能不能实现可靠传输？怎样实现可靠传输？

# 第四章 信道及其信道容量

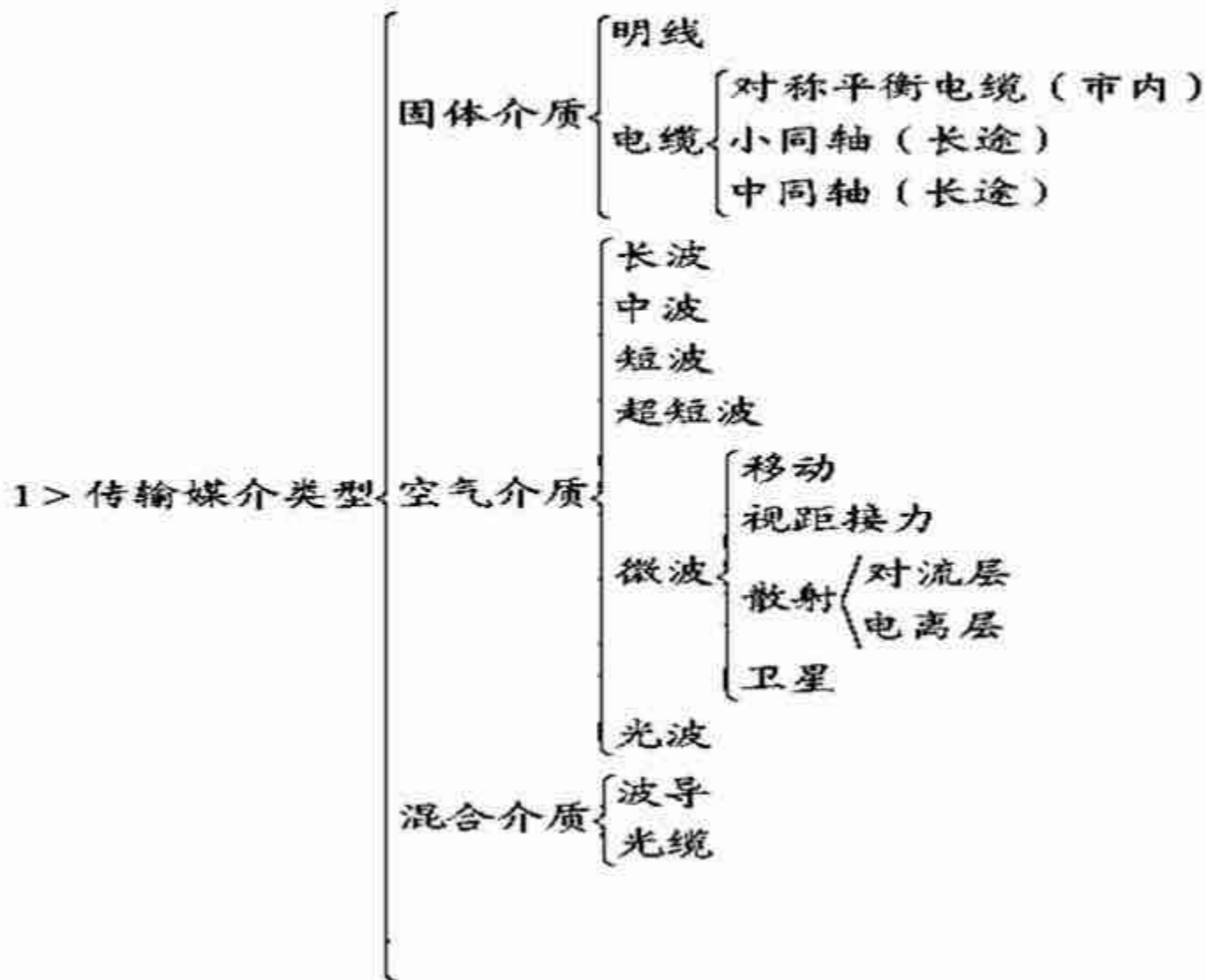
- 4.1 信道分类及信道通用模型
- 4.2 离散单符号信道及其信道容量
- 4.3 离散多符号信道及其信道容量
- 4.4 组合信道及其信道容量



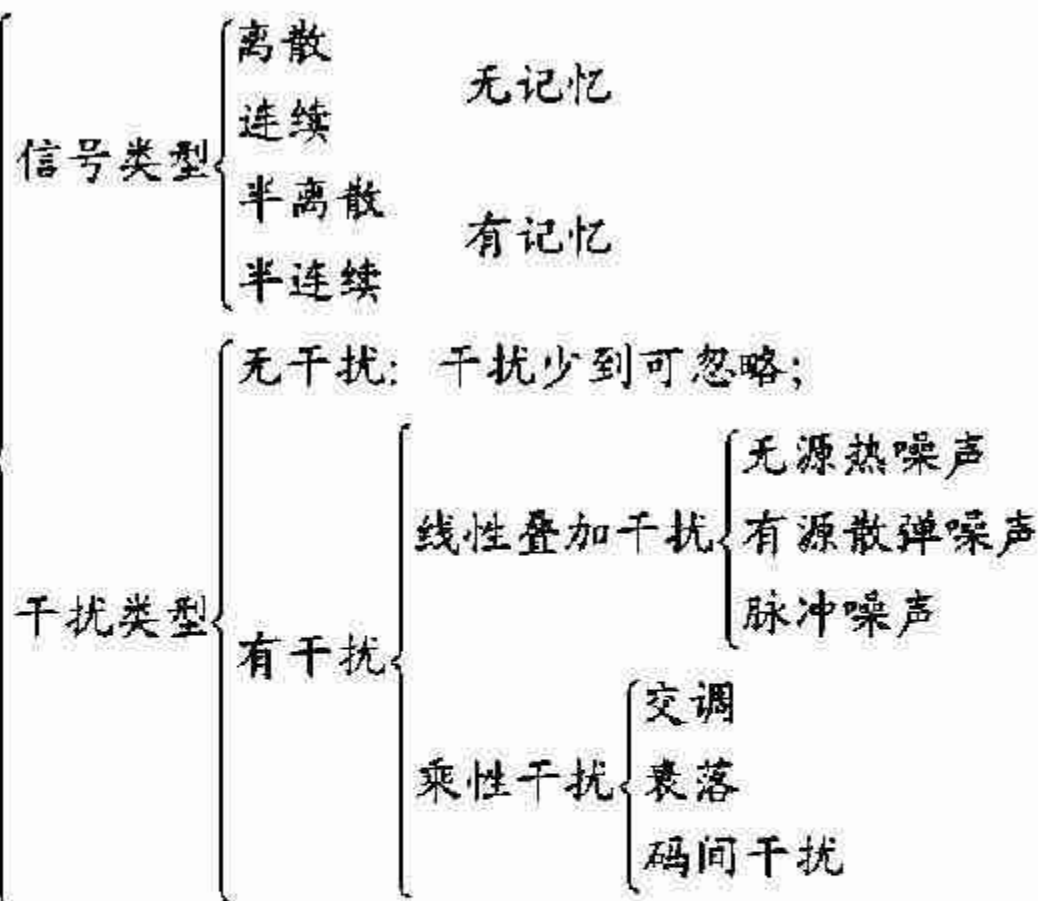
## 4.1 信道分类及信道通用模型

- 1、直观认识上的分类
- 2、从研究角度给出的信道分类
- 3、信道模型

# 1、直观认识上的分类



## 2) 信号与干扰类型



3) 信道参量类型

- 恒参信道 (时不变信道)
- 变参信道 (时变信道)

4) 用户类型

- 二用户信道 (点对点通信)
- 多用户信道 (通信网)

## 2、从研究角度给出的信道分类

- ①根据输入输出随机信号的特点分类
- ②根据输入输出随机变量个数的多少分类
- ③根据信道输入和输出的个数
- ④根据信道上有无干扰分类
- ⑤根据信道有无记忆特性分类
- ⑥根据信道的统计特性是否随时间变化



## ①根据输入输出随机信号的特点分类

- 离散信道：输入、输出随机变量都取离散值。
- 连续信道：输入、输出随机变量都取连续值。
- 半离散/半连续信道：输入变量取离散值而输出变量取连续值，或反之。

## ②根据输入输出随机变量个数的多少分类

- **单符号信道：**输入和输出端都只用一个随机变量来表示。
- **多符号信道：**输入和输出端用随机变量序列/随机矢量来表示。

### ③根据信道输入和输出的个数可分为

- **两端信道（单用户信道）**：只有一个输入端和一个输出端的单向通信的信道。
- **多端信道（多用户信道）**：双向通信或三个或更多个用户之间相互通信的情况。
- 本课程主要研究两端信道的情况。

## ④根据信道上有无干扰分类

- **有干扰信道：**存在干扰或噪声或两者都有的信道。实际信道一般都是有干扰信道。
- **无干扰信道：**不存在干扰或噪声，或干扰和噪声可忽略不计的信道。
- **有噪声信道和无噪声信道。**



## ⑤根据信道有无记忆特性分类

- **无记忆信道：**输出仅与当前输入有关，而与过去输入无关的信道。
- **有记忆信道：**信道输出不仅与当前输入有关，还与过去输入和（或）过去输出有关。

## ⑥根据信道的统计特性是否随时间变化

- **恒参信道（平稳信道）**：信道的统计特性不随时间变化。
- **随参信道（非平稳信道）**：信道的统计特性随时间变化。
- 本课程主要研究恒参信道的情况。

### 3、信道模型

- 信息论不研究信号在信道中传输的物理过程，它假定信道的传输特性是已知的，这样信道就可以用下图所示的抽象的数学模型来描述。在信息论中，信道通常表示成： $\{X, P(Y|X), Y\}$  即信道输入随机变量 $X$ 、输出随机变量 $Y$ 以及在输入已知的情况下，输出的条件概率分布  $P(Y|X)$

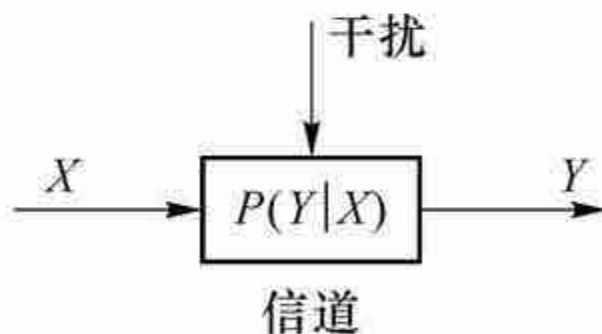
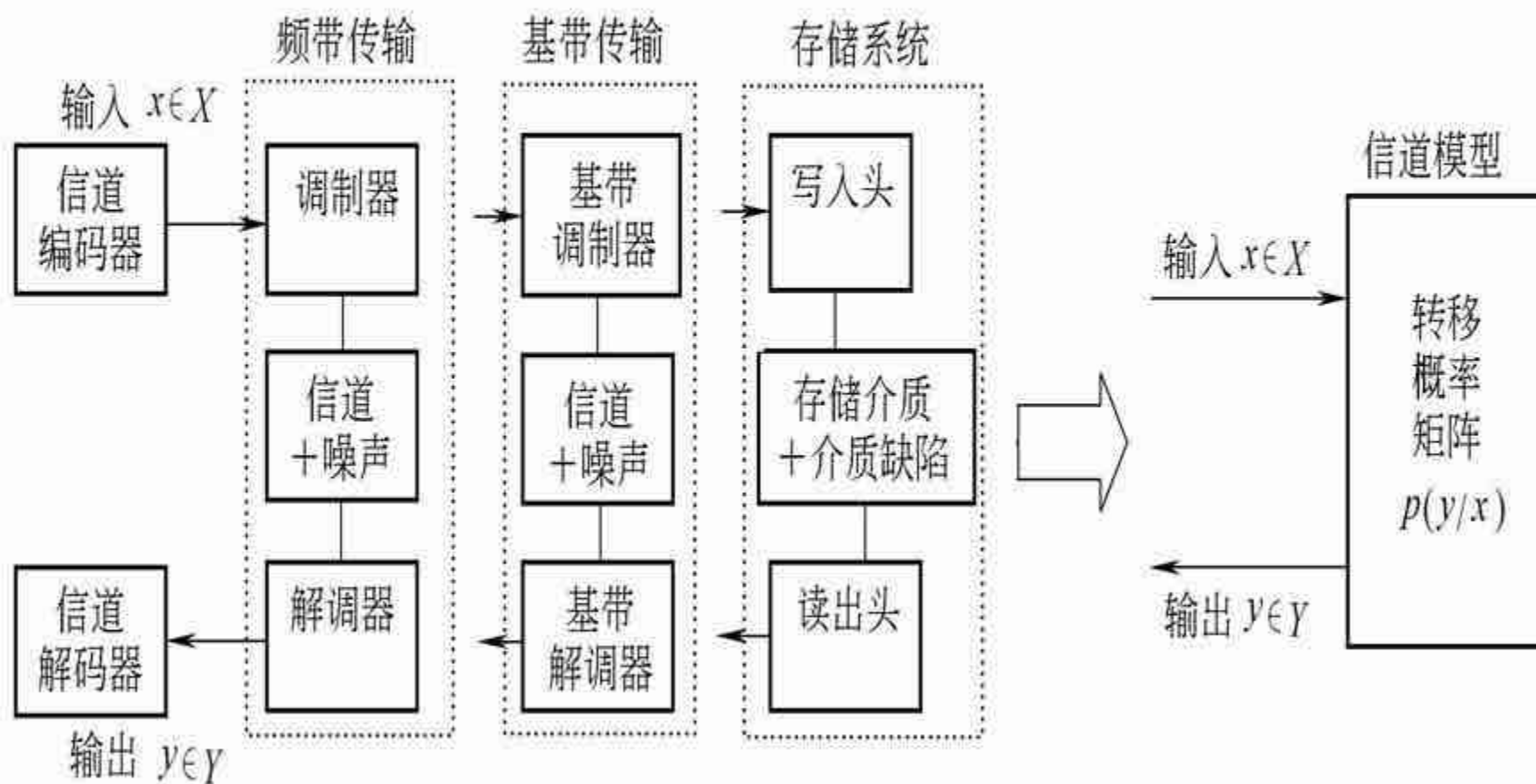


图4.1 信道模型

# 信道模型—对实际通信过程的抽象





## 信道的建模（信道的统计特性的描述）

信道统计特性描述：由信道转移概率描述。

信道转移概率/信道传递概率：条件概率 $p(y_j/x_i)$ 。

信道特性表示：用信道转移概率矩阵，简称信道矩阵。

反信道矩阵：由条件概率 $p(x_i/y_j)$ 表示。

## 4.2 离散单符号信道及其信道容量

1

离散单符号信道的数学模型

2

信道容量的概念

3

BSC信道、三种特殊信道的信道容量

4

离散对称信道的信道容量、准对称信道容量

5

一般离散信道的信道容量

6

信道容量定理

# 1、离散单符号信道的数学模型

- 信道的输入、输出都取值于离散符号集，且都用一个随机变量来表示的信道就是**离散单符号信道**。
- 设离散单符号信道的输入随机变量为  $X, X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ ，输出随机变量为  $Y, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ ，由于信道中存在干扰，因此输入符号在传输中将会产生错误，这种信道干扰对传输的影响可用传递概率来描述：

$$p(y_j | x_i) = P\{Y = y_j | X = x_i\} \quad i = 1, 2, \dots, r ; j = 1, 2, \dots, s$$

信道传递概率实际上是一个传递概率矩阵，称为信道矩阵，记为： $p(y_j | x_i)$

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_s \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{matrix} & \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \cdots & p(y_s|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \cdots & p(y_s|x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p(y_1|x_r) & p(y_2|x_r) & \cdots & p(y_s|x_r) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

为了表述简便，常常写成

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix}$$



下面推导一般离散单符号信道的一些概率关系：

(1) 输入输出随机变量的联合概率分布为  $P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i y_j)$

则有  $p(x_i y_j) = p(x_i) p(y_j | x_i) = p(y_j) p(x_i | y_j)$

其中  $p(y_j | x_i)$  是信道传递概率，即输入为  $x_i$ ，通过信道传输输出  $y_j$  的概率，通常称为**前向概率**。它是由于信道噪声引起的，所以通常用它描述信道噪声的特性。而  $p(x_i | y_j)$  是已知信道输出符号  $y_j$ ，输入符号为  $x_i$  的概率，称为**后向概率**。有时把  $p(x_i)$  称为输入符号的**先验概率**。而对应的把  $p(x_i | y_j)$  称为输入符号的**后验概率**。

(2) 由全概率公式, 可从先验概率和信道传递概率求输出符号的

概率:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^r p(x_i) p(y_j | x_i)$$

写成向量的形式:

$$[p(y_1) \ p(y_2) \ \cdots \ p(y_s)] = [p(x_1) \ p(x_2) \ \cdots \ p(x_r)] \cdot \mathbf{P}$$

或记成  $\mathbf{P}_Y = \mathbf{P}_X \mathbf{P}_{Y|X}$

(3) 根据贝叶斯公式, 可由先验概率和信道的传递概率求后向概率:

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i) p(y_j | x_i)}{\sum_{i=1}^r p(x_i) p(y_j | x_i)} \quad i=1, 2, \dots, r ; j=1, 2, \dots, s$$

## 2 信道容量的概念

■ **平均互信息**  $I(X;Y)$  是接收到输出符号集  $Y$  后所获得的关于输入符号集  $X$  的信息量。信源的不确定性为  $H(X)$ ，由于干扰的存在，接收端收到  $Y$  后对信源仍然存在的不确定性为  $H(X|Y)$ ，又称为**信道疑义度**。信宿所消除的关于信源的不确定性，也就是获得的关于信源的信息为  $I(X;Y)$ ，它是平均意义上每传送一个符号流经信道的信息量，从这个意义上来说，平均互信息又称为信道的**信息传输率**，通常用表示  $R$  即

$$R = I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \quad \text{比特/符号}$$

- 有时我们所关心的是信道在单位时间内平均传输的信息量。如果平均传输一个符号为 $t$ 秒，则信道平均每秒钟传输的信息量为

- $$R_t = \frac{1}{t} I(X;Y) \quad \text{比特/秒}$$

- 一般称为**信息传输速率**。



如果信源熵为 $H(X)$ ，希望在信道输出端接收的信息量就是 $H(X)$ ，由于干扰的存在，一般只能接收到 $I(X;Y)$ 。

信道的信息传输率：就是平均互信息  $R=I(X;Y)$ 。

输出端 $Y$ 往往只能获得关于输入 $X$ 的部分信息，这是由于平均互信息性质决定的： $I(X;Y) \leq H(X)$ 。

$I(X;Y)$ 是信源输入概率分布 $p(x_i)$ 和信道转移概率 $p(y_j/x_i)$ 的二元函数：

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i) p(y_j / x_i) \quad p(x_i y_j) = p(x_i) p(y_j / x_i)$$

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i y_j) \log_2 \frac{p(y_j / x_i)}{p(y_j)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i) p(y_j / x_i) \log_2 \frac{p(y_j / x_i)}{\sum_{i=1}^n p(x_i) p(y_j / x_i)}$$

## 信道容量

- 对于固定的信道，总存在一种信源（某种输入概率分布），使信道平均传输一个符号接收端获得的信息量最大，也就是说对于每个固定信道都有一个最大的信息传输率，这个最大的信息传输率即为**信道容量**，而相应的输入概率分布称为**最佳输入分布**。

■ **定义4.1** 信道容量为平均互信息对于输入概率分布的最大值:

$$C \stackrel{def}{=} \max_{p(x)} \{I(X;Y)\}$$

■ 若平均传输一个符号需要  $t$  秒钟, 则信道在单位时间内平均传输的最大信息量

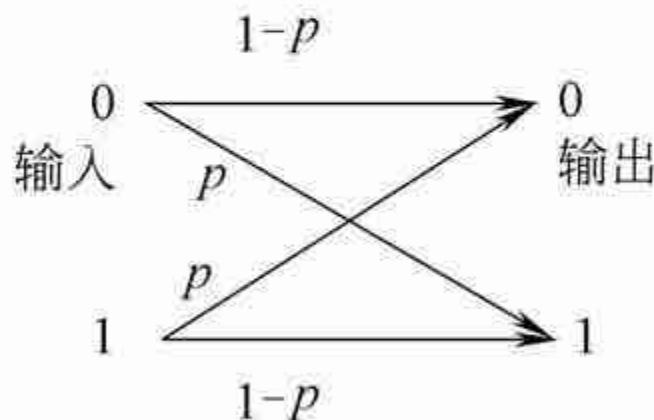
$$C_t \stackrel{def}{=} \frac{1}{t} \max_{p(x)} \{I(X;Y)\}$$

■ 信道容量是信道传送信息的最大能力的度量, 信道实际传送的信息量必然不大于信道容量。

### 3 BSC信道和三种特殊信道的信道容量

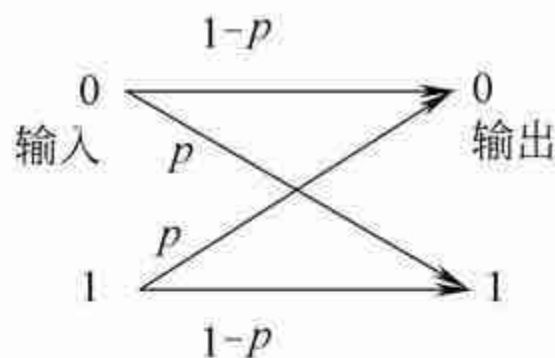
#### ■ 二进制离散信道

二进制对称信道, 简称为BSC 信道: 对称的二进制输入、二进制输出信道.





# BSC信道

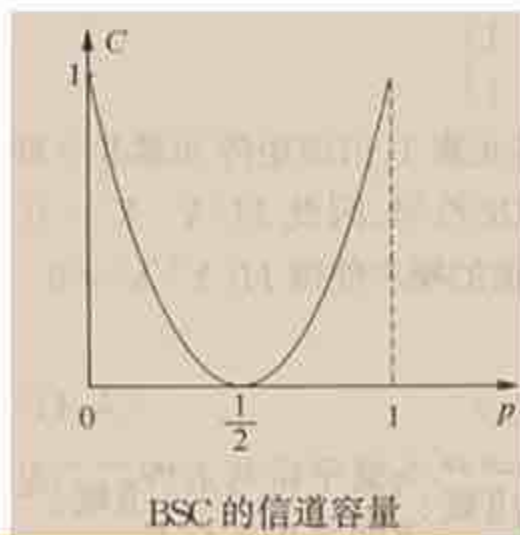


信道矩阵为  $P = \begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix}$ ,  $p$  为信道错误传递概率.

输入概率分布  $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega & \bar{\omega} \end{bmatrix}$

二元对称信道的平均互信息

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(\omega \bar{p} + \bar{\omega} p) - H(p)$$



当  $p = 1/2$  时, 是一种最坏的信道, 这时  $C = 0$ , 即该信道不能传递任何信息, 信息全部损失在信道中了. 而当  $p = 0$  或  $p = 1$  时,  $C = 1$ , 这是最好的情况, 信道能够无失真地传送信源信息.

## 三种特殊信道

- (1) .具有扩展性能的无损信道
- 无损信道是一个输入对应多个输出。
- 如图所示，信道矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- 无损信道信道矩阵中每一列只有一个非零元素，接收到信道输出符号后对输入符号将不存在不确定性。

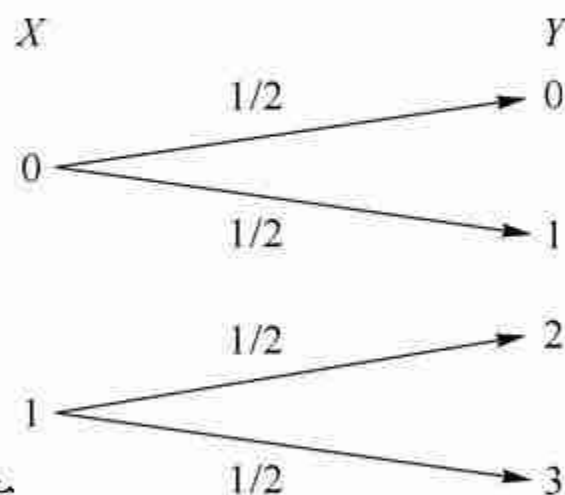


图4.4 无损信道

## (2) .具有归并性能的无噪信道

无噪信道是一个输出对应多个输入。

如图所示，信道矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

无噪信道每一行只有一个非零元素1，信道矩阵元素非零即1。已知信道输入符号，必能确定输出符号。

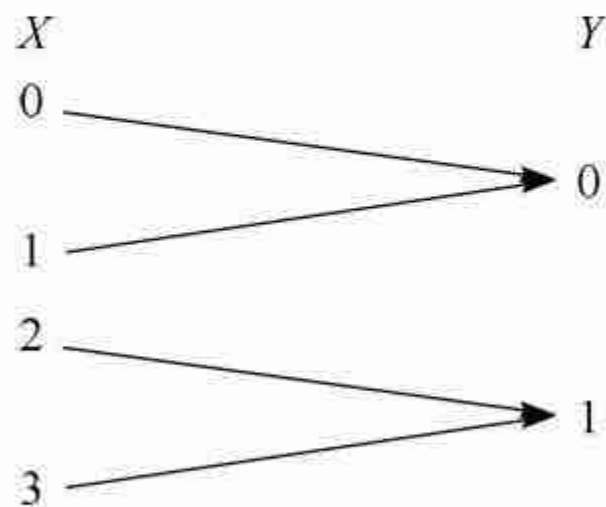


图4.5 无噪信道



- (3) .具有一一对应关系的无噪无损信道
- 无噪无损信道输入、输出之间有确定的一一对应关系，即  $y = f(x)$  。
- 信道传递概率为

$$p(y_j | x_i) = \begin{cases} 1 & y_j = f(x_i) \\ 0 & y_j \neq f(x_i) \end{cases}$$

- 如图4.6所示，信道矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

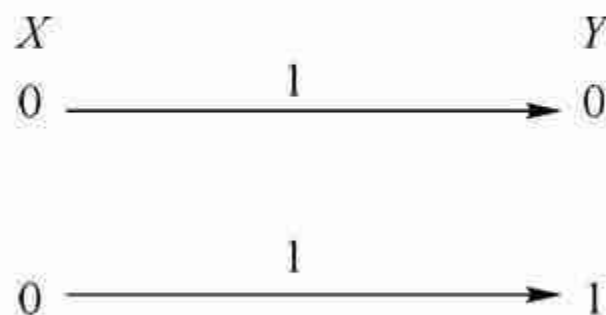
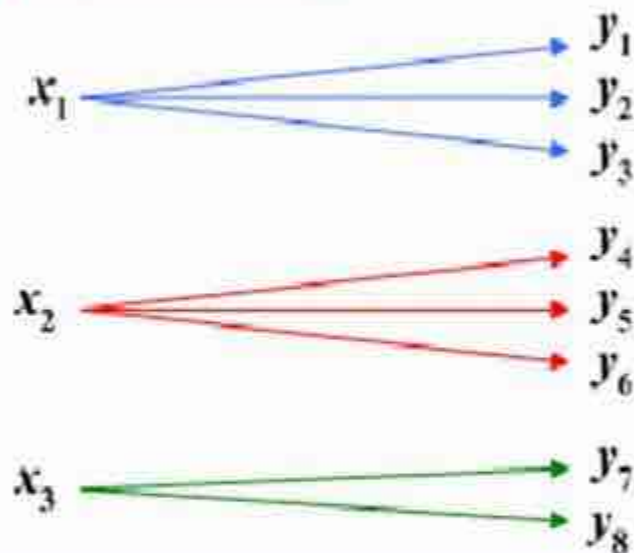


图4.6 无噪无损信道

# 三种特殊信道的信道容量

## (1)、具有扩展性能的无损信道



■ 对应的信道矩阵是：

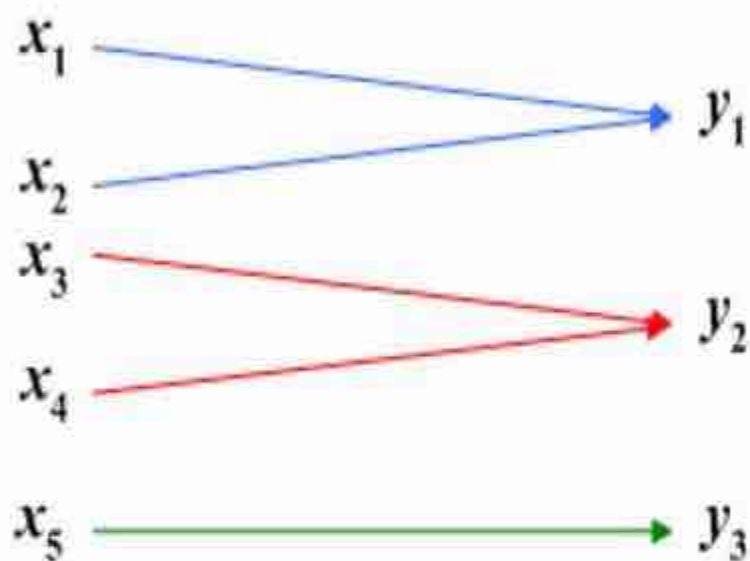
$$\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(y_4/x_2) & p(y_5/x_2) & p(y_6/x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(y_7/x_3) & p(y_8/x_3) \end{bmatrix}$$

- 接收到符号 $Y$ 后，对发送的符号 $X$ 是完全确定的，损失熵为零，但噪声熵不为零。这类信道被称为有噪无损信道。
- 若信道的传递矩阵中每一列有一个也仅有一个非零元素时，该信道一定是有噪无损信道，其平均互信息等于信源熵。即信道容量为

$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)} H(X) = \log_2 n$$

- 此时输入端符号熵小于输出端符号熵， $H(X) < H(Y)$ 。

## (2) 具有归并性能的无噪信道



■ 对应的信道矩阵是：

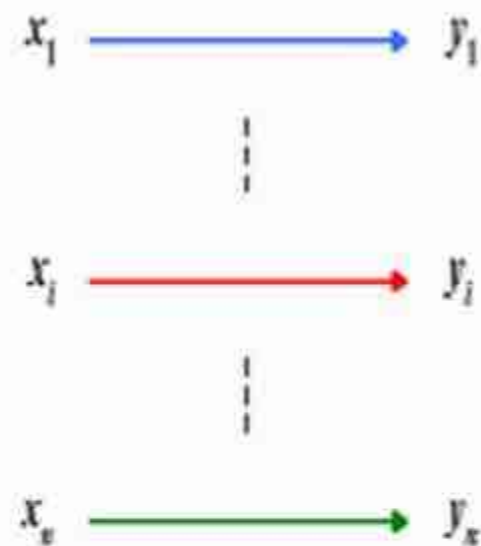
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



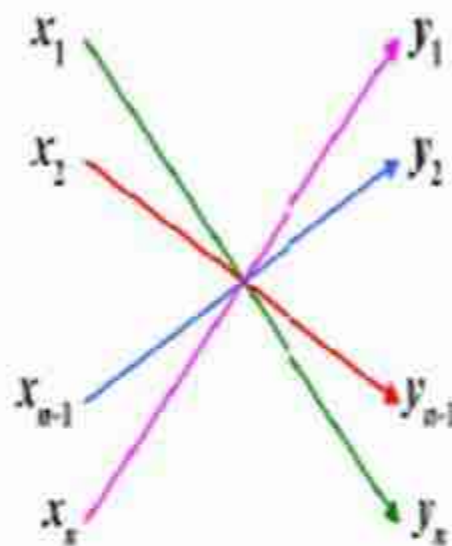
- 在这类信道中，接收到符号 **Y** 后不能完全消除对 **X** 的不确定性，信息有损失。但输出端 **Y** 的平均不确定性因噪声熵等于零而没有增加，所以这类信道称为无噪有损信道。

- 信道容量为：
$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)} H(Y) = \log_2 m$$

### (3) 具有一一对应关系的无噪无损信道



(a)



(b)

■ 对应的信道矩阵是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 接收到符号  $\mathbf{Y}$  后，平均获得的信息量就是信源发出每个符号所含有的平均信息量，信道中无信息损失，而且噪声熵也等于零，输出端  $\mathbf{Y}$  的不确定性没有增加。严格地讲，这种输入输出有确定的一一对应关系的信道，称为无噪无损信道。

- 当信源呈等概率分布时，具有一一对应确定关系的无噪信道达到信道容量

$$C = \max_{p(x_i)} I(X; Y) = \max_{p(x_i)} H(X) = \log_2 n$$

# 结论

- 综合上述三种情况，若严格区分的话，凡损失熵等于零的信道称为无损信道；凡噪声熵等于零的信道称为无噪信道，而一一对应的无噪信道则为无噪无损信道。
- 对于无损信道，其信息传输率 $R$ 就是输入信源 $X$ 输出每个符号携带的信息量(信源熵 $H(X)$ )，因此其信道容量为式中假设输入信源 $X$ 的符号共有 $n$ 个，所以等概率分布时信源熵最大。



- 对于无噪信道，其信道容量为

$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)} H(Y) = \log_2 m$$

- 式中假设输出信源 $Y$ 的符号共有 $m$ 个，等概率分布时 $H(Y)$ 最大，而且一定能找到一种输入分布使得输出符号 $Y$ 达到等概率分布。
- 可见这些信道的信道容量 $C$ 只决定于信道的输入符号数 $n$ ，或输出符号数 $m$ ，与信源无关。

## 4 离散对称(准对称)信道的信道容量

- 离散信道中有一类特殊的信道，其特点是信道矩阵具有行对称性，利用这个对称性我们可以简化信道容量的计算。
- **定义4.2** 若信道矩阵中，每行都是第一行元素的不同排列，则称此类信道为**行对称信道**。
- **定义4.3** 若信道矩阵中，不仅每行都是第一行元素的不同排列，而且每列都是第一列元素的不同排列，这类信道称为**对称信道**。
- **定义4.4** 若信道矩阵中，每行都是第一行元素的不同排列，每列并不都是第一列元素的不同排列，但是可以按照信道矩阵的列将信道矩阵划分成若干对称的子矩阵，则称这类信道为**准对称信道**。

- **定义4.5** 若对称信道中输入符号和输出符号个数相同，且信道中总的错误概率为 $p$ ，对称地平均分配给 $r-1$ 个输出符号， $r$ 为输入输出符号的个数，即信道矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1-p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \frac{p}{r-1} & \frac{1-p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{1-p}{r-1} \end{bmatrix}$$

- 
- 则称此信道为**强对称信道**或**均匀信道**。

## 对称信道的信道容量

- **定理4.1** 对于对称信道，当输入分布为等概分布时，输出分布必能达到等概分布。
- **定理4.2** 若一个离散对称信道具有 $r$ 个输入符号， $s$ 个输出符号，则当输入为等概分布时达到信道容量，且
$$C = \log s - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s)$$

- 其中  $p'_1, p'_2, \dots, p'_s$  为信道矩阵中的任一行。

- **推论：**均匀信道的信道容量为
$$C = \log r - p \log(r-1) - H(p)$$



**推论** 均匀信道的信道容量为  $C = \log_2 r - p \log_2(r-1) - H(p)$ .

**证明**

均匀信道中输入、输出符号数相等,  $r = s$ , 所以

$$\begin{aligned} C &= \log_2 r - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s) \\ &= \log_2 r - H(\bar{p}, \frac{p}{r-1}, \dots, \frac{p}{r-1}) \\ &= \log_2 r + \bar{p} \log_2 \bar{p} + \frac{p}{r-1} \log_2 \frac{p}{r-1} + \dots + \frac{p}{r-1} \log_2 \frac{p}{r-1} \\ &= \log_2 r + \bar{p} \log_2 \bar{p} + p \log_2 \frac{p}{r-1} \\ &= \log_2 r - p \log_2(r-1) + \bar{p} \log_2 \bar{p} + p \log_2 p \\ &= \log_2 r - p \log_2(r-1) - H(p) \end{aligned}$$

其中,  $p$  是总的错误传递概率,  $\bar{p}$  是正确传递概率.

**证毕**



**【例 4.2】**

设某离散对称信道的信道矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\log 3 = 1.5850$$

$$\log 5 = 2.3219$$

$$\log 7 = 2.8074$$

$$\log 11 = 3.4594$$

求信道容量。

- 当输入为等概分布时，输出为等概分布，信道达到信道容量。当 $r=2$ 时的均匀信道常称为二元对称信道，这时 $C = 1 - H(p)$ 。
- 对于一般的离散行对称信道，信道容量 $C$ 仍然可以写成：
$$C = \max_{p(x)} \{H(Y)\} - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s)$$
- 但是不一定存在一种输入分布能使输出达到等概分布，此时的信道容量  $C \leq \log s - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s)$
- 而离散对称信道的信道矩阵中每一列都是由同一组元素的不同排列组成，所以保证了当输入符号 $X$ 为等概分布时，输出符号 $Y$ 一定也是等概分布，输出随机变量熵可以达到  $\log s$ 。

【例 4.5】

已知信道的转移矩阵为  $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$ , 求信道容量.

解

设输入概率分布  $p(x_1) = \alpha, p(x_2) = 1 - \alpha$ , 则输出  $y_1, y_2, y_3$  的概率分布为

$$P_Y = P_X P_{Y|X} = (\alpha, 1 - \alpha) \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} = (0.3 + 0.2\alpha, 0.5 - 0.2\alpha, 0.2)$$

其中,  $p(y_3)$  固定, 与  $x_i$  的分布无关.

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= - \sum_j p(y_j) \log_2 p(y_j) + \sum_i p(x_i) \sum_j p(y_j | x_i) \log_2 p(y_j | x_i) \\ &= - (0.3 + 0.2\alpha) \log_2 (0.3 + 0.2\alpha) - (0.5 - 0.2\alpha) \log_2 (0.5 - 0.2\alpha) \\ &\quad - 0.2 \log_2 0.2 + 0.5 \log_2 0.5 + 0.3 \log_2 0.3 + 0.2 \log_2 0.2 \end{aligned}$$

$$\text{由 } \frac{\partial I(X; Y)}{\partial \alpha} = 0, \text{ 得 } 0.2 \log_2 (0.3 + 0.2\alpha) - 0.2 + 0.2 \log_2 (0.5 - 0.2\alpha) + 0.2 = 0$$

解得  $\alpha = 1/2$ , 即输入等概分布时  $I(X; Y)$  达到极大值, 且

$$C = \max I(X; Y) = 0.036 \text{ 比特/符号}$$

# 对于准对称信道

- 若信道矩阵中，每行都是第一行元素的不同排列，每列并不都是第一列元素的不同排列，但是可以按照信道矩阵的列将信道矩阵划分成若干对称的子矩阵，则称这类信道为**准对称信道**。

当输入为等概分布时，准对称信道可以达到信道容量。



# 根据定义求解信道容量

【例】 信道输入符号集 $X = \{x_1, x_2\}$ , 输出符号集 $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ , 给定信道转移概率矩阵 $p = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$ , 求该信道的信道容量 $C$ 。

这是一个准对称信道, 根据定理, 当 $X$ 等概分布,  $p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2}$ 时, 达到信道容量

$$C = I(X; Y) \Big|_{p(x_1)=p(x_2)=\frac{1}{2}}$$

平均互信息量  $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$

$$= -\sum_{j=1}^4 p(y_j) \log_2 p(y_j) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 p(x_i) p(y_j|x_i) \log_2 p(y_j|x_i)$$



由  $p(y_j) = \sum_{i=1}^2 p(x_i)p(y_j|x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p(y_j|x_i)$  , 先算出

$$\begin{cases} p(y_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p(y_1|x_i) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{16} \\ p(y_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p(y_2|x_i) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \\ p(y_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p(y_3|x_i) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{16} \\ p(y_4) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p(y_4|x_i) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} \end{cases}$$

可算得信道容量

$$\begin{aligned} C = I(X;Y) \Big|_{p(x_1)=p(x_2)=\frac{1}{2}} &= -\sum_{j=1}^4 p(y_j) \log_2 p(y_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 p(y_j|x_i) \log_2 p(y_j|x_i) \\ &= 0.0325 \text{ (比特/符号)} \end{aligned}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \text{言道容量}$$

$$\text{则 } p(y_j) = \sum_{i=1}^2 p(x_i) p(y_j/x_i) \quad j=1,2,3,4 \quad p(x_1)=p(x_2)=1/2$$

$$\begin{cases} p(y_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p(y_1/x_i) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} \\ p(y_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p(y_2/x_i) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} \\ p(y_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p(y_3/x_i) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} \\ p(y_4) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 p(y_4/x_i) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{可计算得 } C = - \sum_{j=1}^4 p(y_j) \log_2 p(y_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 p(y_j/x_i) \log p(y_j/x_i) = 0.0612 \text{ bit/symbol}$$

# 准对称信道的信道容量

**定义 4.4** 若信道矩阵中,每行都是第一行元素的不同排列,每列并不都是第一列元素的不同排列,但是可以按照信道矩阵的列将信道矩阵划分成若干对称的子矩阵,则称这类信道为准对称信道.

例如: 
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

一般情况下, 信道容量  $C \leq \log s - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s)$

当输入为等概分布时, 准对称信道可以达到信道容量:

$$C = \log_2 r - \sum_{k=1}^n N_k \log_2 M_k - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s)$$

其中,  $N_k$  是  $n$  个子矩阵中第  $k$  个子矩阵中行元素之和,

$M_k$  是第  $k$  个子矩阵中列元素之和

【例 4.3】

求二元对称删除信道的信道容量.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p-q & q & p \\ p & q & 1-p-q \end{pmatrix}$$



## 5 一般离散信道的信道容量

凸函数性：

**定理2.1** 当条件概率分布  $\{p(y_j | x_i)\}$  给定时，平均互信息  $I(X; Y)$  是输入分布  $\{p(x_i)\}$  的上凸函数。

**定理2.2** 对于固定的输入分布  $\{p(x_i)\}$ ，平均互信息量  $I(X; Y)$  是条件概率分布  $\{p(y_j | x_i)\}$  的下凸函数。

- 平均互信息  $I(X; Y)$  是输入概率分布  $p(x)$  的上凸函数，因此极大值必定存在。



- 在信道固定的条件下，平均互信息是 $r$ 个变量

$p(x_i), i=1,2,\dots,r$  的多元函数，且满足约束条件  $\sum_{i=1}^r p(x_i)=1$  故可用拉格朗日乘子法来求这个条件极值。

即在<sup>1</sup>  $\begin{cases} p(x_i) \geq 0 & i=1,2,\dots,r \\ \sum_i p(x_i)=1 \end{cases}$  的条件下求 $I(X;Y)$ 的极大值

- 设辅助函数： $F = I(X;Y) - \lambda \sum p(x_i)$ ，当 $\frac{\partial F}{\partial p(x_i)} = 0$  时求得的  $I(X;Y)$  的值即为信道容量。

- 通过计算可得平均互信息的极大值  $C$ ，即  $C = \log e + \lambda$

- 这样得到的信道容量有一个参数 $\lambda$ 。在某些情况下可以消去 $\lambda$ 得到信道容量值。
- 1. 当输入概率分布只有一个变量时, 例如 $r=2$ , 可以设输入概率分布为 $\alpha$ 和  $1-\alpha$ , 因此输入概率分布只有一个变量, 这时我们可以直接对  $I(X;Y)$ 求导求出, 从而得出 $I(X;Y)$ 的极大值 $C$ 。
- 2. 对于信道矩阵为可逆矩阵的信道, 我们可以采用解方程组的方法。
- 在一般信道的信道容量的推导中有如下结果:

$$\sum_j p(y_j | x_i) \log \frac{p(y_j | x_i)}{p(y_j)} = \log e + \lambda = C \quad i=1, 2, \dots, r$$

■ 移项得 
$$\sum_j p(y_j | x_i) \log p(y_j | x_i) = \sum_j p(y_j | x_i) \log p(y_j) + C$$
$$= \sum_j p(y_j | x_i) [\log p(y_j) + C]$$

令  $\beta_j = \log p(y_j) + C$

则 
$$\sum_j p(y_j | x_i) \log p(y_j | x_i) = \sum_j p(y_j | x_i) \beta_j$$

■ 当  $r=s$ ，且信道矩阵是可逆矩阵时，该方程组有唯一解。这时就可以求出  $\beta_j$ 。

由  $\beta_j = \log p(y_j) + C \Rightarrow p(y_j) = 2^{\beta_j - C}$

■ 然后根据  $\sum_j p(y_j) = 1$  可求出信道容量:

$$\sum_j 2^{\beta_j - C} = 1 \quad \text{所以} \quad C = \log \sum_j 2^{\beta_j}$$

■ 由  $\beta_j$  和  $C$  就可以求得输出概率分布  $p(y_j) = 2^{\beta_j - C}$

再根据  $p(y_j) = \sum_i p(x_i) p(y_j | x_i)$  列方程组求  $p(x_i)$

■ 将计算步骤总结如下：

■ (1) 由  $\sum_j p(y_j | x_i) \beta_j = \sum_j p(y_j | x_i) \log p(y_j | x_i)$  列方程组求出  $\beta_j$ ;

■ (2) 由  $C = \log \sum_j 2^{\beta_j}$  求出  $C$ ;

■ (3) 由  $p(y_j) = 2^{\beta_j - C}$  求出  $p(y_j)$ ;

■ (4) 由  $p(y_j) = \sum_i p(x_i) p(y_j | x_i)$  列方程组求  $p(x_i)$ 。



求如下信道的信道容量：

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

解

信道矩阵中  $r=s$ , 且为可逆矩阵(满秩矩阵), 所以以下方程组有唯一解.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_2 + \frac{1}{4}\beta_4 = \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{4} \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_3 + \frac{1}{2}\beta_4 = \frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} \end{cases}$$

解方程组得

$$\beta_2 = \beta_3 = 0, \beta_1 = \beta_4 = -2$$

$$C = \log_2 \sum_j 2^{\beta_j} = \log_2 (2^{-2} + 2^0 + 2^0 + 2^{-2}) = \log_2 5 - 1$$

再根据  $p(y_j) = 2^{\beta_j - C}$  求  $p(y_j)$ , 得

$$p(y_1) = p(y_4) = 2^{-2 - \log_2 5 + 1} = \frac{1}{10}$$

$$p(y_2) = p(y_3) = 2^{0 - \log_2 5 + 1} = \frac{4}{10}$$

最后根据  $p(y_j) = \sum p(x_i)p(y_j|x_i)$  列方程组求  $p(x_i)$ , 求出最佳输入分布:

$$p(x_1) = p(x_4) = \frac{4}{30}, p(x_2) = p(x_3) = \frac{11}{30}$$

上述求得的  $p(x_i)$ ,  $i=1,2,3,4$  都大于 0, 故求得的结果是正确的.

## 6 信道容量定理

- 从以上的讨论可知，求信道容量的问题实际上是在约束条件下求多元函数极值的问题，在通常情况下，计算量是非常大的。下面我们介绍一般离散信道的平均互信息  $I(X;Y)$  达到信道容量的充要条件，在某些情况下它可以帮助我们较快地找到极值点。
- **定理4.3** 设有一般离散信道，它有  $r$  个输入信号， $s$  个输出信号。当且仅当存在常数  $C$  使输入分布  $p(x_i)$  满足：
  - (1)  $I(x_i;Y)=C$  当  $p(x_i) \neq 0$  时， $I(X;Y)$  达到最大值。
  - (2)  $I(x_i;Y) \leq C$  当  $p(x_i) = 0$
- 其中，
$$I(x_i;Y) = \sum_j p(y_j|x_i) \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$
- 它表示信道输入  $x_i$  时，所给出关于输出  $Y$  的信息量。常数  $C$  即为所求的信道容量。

定理的证明过程不要求。

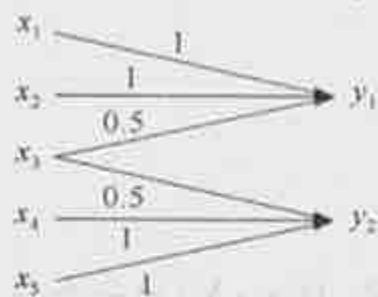
- **信道容量定理**告诉我们，平均互信息  $I(X;Y)$  取到极大值也就是信道容量时，对于任意  $x_i$ ，只要它出现的概率大于0， $I(X;Y)$  都相等。

- 信道容量定理只给出了达到信道容量时，最佳输入概率分布应满足的条件，并没有给出最佳输入概率分布值，也没有给出信道容量的数值。另外，定理本身也隐含着达到信道容量的最佳分布不一定是唯一的，只要输入概率分布满足充要条件式，就是信道的最佳输入分布。在一些特殊情况下，我们常常利用这一定理寻求输入分布和信道容量值。



### 【例 4.7】

设离散信道如图 4.7 所示, 输入符号集  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , 输出符号集  $\{y_1, y_2\}$ , 求  $C$ .



该信道信道矩阵  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 不是对称信道. 由于  $x_3$

图 4.7 例 4.7 的离散信道 传递到  $y_1, y_2$  是等概率的, 如果令  $p(x_3)=0$ , 则会减少收到  $Y$  以后对输入  $X$  的不确定性, 这时,  $x_1, x_2$  与  $x_4, x_5$  分别转移到  $y_1, y_2$ . 如果 又令  $p(x_2)=p(x_4)=0$ , 信道就变成了一一对应的信道, 接收到  $Y$  后对输入端  $X$  是完全确定的, 这时 再令  $p(x_1)=p(x_5)=1/2$ , 检查它是否满足信道容量定理的条件, 若满足, 则该输入分布就是最佳输入分布.

可计算得

$$I(x_1; Y) = I(x_5; Y) = \log_2 2, I(x_2; Y) = I(x_4; Y) = \log_2 2, I(x_3; Y) = 0$$

满足信道容量定理的充要条件, 因此信道容量

$$C = \log_2 2 = 1 \text{ 比特/符号}$$

若设  $p(x_1)=p(x_2)=p(x_4)=p(x_5)=\frac{1}{4}, p(x_3)=0$  也满足信道容量定理的充要条件, 这时

$$I(x_1; Y) = I(x_2; Y) = I(x_4; Y) = I(x_5; Y) = \log_2 2, I(x_3; Y) < \log_2 2$$

所以该分布也是最佳分布.



- 可见，这个信道的最佳输入分布不是唯一的，由于  $I(x_i; Y)$  仅直接与信道传递概率及输出符号概率有关，因而达到信道容量的输入概率分布不是唯一的，但是输出概率分布是唯一的。
- 对于某些比较简单直观的信道，可以利用已上方法求信道容量。

## 4.3 离散多符号信道及其信道容量

- 如果在不同时刻有多个来自于同一信源的随机变量（多符号信源）通过离散信道传输，称这种信道为多符号离散信道。
- 实际离散信道的输入和输出常常是随机变量序列，用随机矢量来表示，称为**离散多符号信道**，如图4.8所示。实际离散信道往往是有记忆信道，为了简化起见，我们主要研究离散无记忆信道。



图4.8 离散多符号信道

## 离散无记忆信道-DMC

- **定义4.6** 若在任意时刻信道的输出只与此时刻信道的输入有关，而与其他时刻的输入和输出无关，则称之为**离散无记忆信道**，简称为**DMC**(discrete memoryless channel)。
- 输入、输出随机序列长度为 $N$ 的离散无记忆平稳信道通常称为离散无记忆信道的 $N$ 次扩展信道。
- $N$ 次扩展信道的信道矩阵是一个  $r^N \times s^N$  的矩阵。



图4.8 离散多符号信道

■ 离散无记忆信道的数学模型仍然表示为:  $\{X, P(Y|X), Y\}$  , 注意这时输入、输出均为随机矢量。

■ 根据信道无记忆的特性, 其转移概率

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) &= P(Y_1 Y_2 \cdots Y_N | X_1 X_2 \cdots X_N) \\ &= P(Y_1 | X_1) P(Y_2 | X_2) \cdots P(Y_N | X_N) = \prod_{k=1}^N P(Y_k | X_k) \end{aligned}$$

■ **定理4.4** 若信道的输入和输出分别是 $N$ 长序列 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ , 且信道是无记忆的, 则存在

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k)$$

■ 这里 $X_k$ 、 $Y_k$ 分别是序列 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 中第 $k$ 位随机变量。



证明

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) \quad (4.77)$$

根据熵函数的链规则和条件熵与无条件熵的关系, 可得

$$\begin{aligned} H(\mathbf{Y}) &= H(Y_1 Y_2 \cdots Y_N) \\ &= H(Y_1) + H(Y_2 | Y_1) + \cdots + H(Y_N | Y_1 Y_2 \cdots Y_{N-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^N H(Y_k) \end{aligned} \quad (4.78)$$

根据熵函数的链规则和离散无记忆信道的定义, 可得

$$\begin{aligned} H(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) &= H(Y_1 Y_2 \cdots Y_N | X_1 X_2 \cdots X_N) \\ &= H(Y_1 | X_1 X_2 \cdots X_N) + H(Y_2 | X_1 X_2 \cdots X_N Y_1) + \cdots \\ &\quad + H(Y_N | X_1 X_2 \cdots X_N Y_1 Y_2 \cdots Y_{N-1}) \\ &= \sum_{k=1}^N H(Y_k | X_k) \end{aligned} \quad (4.79)$$

所以,

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq \sum_{k=1}^N H(Y_k) - \sum_{k=1}^N H(Y_k | X_k) = \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k)$$

即对于离散无记忆信道, 其平均互信息  $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$  小于等于序列  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  中所有对应时刻的随机变量  $X_k, Y_k$  的平均互信息  $I(X_k; Y_k)$  之和, 当且仅当信源也是无记忆信源时等号成立。



当信源是无记忆信源时

$$P(\mathbf{X}) = \prod_{k=1}^N P(X_k)$$

$$P(\mathbf{XY}) = P(\mathbf{X})P(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$$

$$= \prod_{k=1}^N P(X_k) \prod_{k=1}^N P(Y_k|X_k)$$

$$= \prod_{k=1}^N P(X_k)P(Y_k|X_k)$$

$$= \prod_{k=1}^N P(X_k Y_k)$$

(4.80)

所以

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^r p(x_i y_j) = \sum_{i=1}^r p(x_{i_1} y_{j_1}) p(x_{i_2} y_{j_2}) \cdots p(x_{i_N} y_{j_N})$$

$$= \sum_{i_1=1}^r p(x_{i_1} y_{j_1}) \sum_{i_2=1}^r p(x_{i_2} y_{j_2}) \cdots \sum_{i_N=1}^r p(x_{i_N} y_{j_N})$$

$$= \prod_{k=1}^N p(y_{j_k})$$

(4.81)

即

$$P(\mathbf{Y}) = \prod_{k=1}^N P(Y_k)$$

因此

$$H(\mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^N H(Y_k)$$

(4.82)

这时

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k)$$

(4.83)

即信源和信道均为无记忆时,其序列  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  的平均互信息  $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$  等于序列中所有对应时刻随机变量  $X_k, Y_k$  的平均互信息  $I(X_k; Y_k)$  之和.

证毕

# 离散无记忆 $N$ 次扩展信道

- 对于离散无记忆 $N$ 次扩展信道，当信源是平稳无记忆信源时，其平均互信息 $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ 等于单符号信道的平均互信息的 $N$ 倍。
- 离散无记忆信道的 $N$ 次扩展信道的信道容量为
$$C^N = \max_{P(\mathbf{X})} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \max_{P(\mathbf{X})} \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k) = \sum_{k=1}^N \max_{P(X_k)} I(X_k; Y_k) = \sum_{k=1}^N C_k$$
- 因为现在输入随机序列在同一信道中传输，所以任何时刻通过离散无记忆信道传输的最大信息量都相同，即  $C_k = C$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ )
- 所以  $C^N = NC$
- 当信源也是无记忆信源并且每一时刻的输入分布各自达到最佳输入分布时，才能达到这个信道容量 $NC$ 。
- 一般情况下，消息序列在离散无记忆 $N$ 次扩展信道中传输时，其平均互信息量  $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq NC$

- 因为离散无记忆信道 **$N$** 次扩展信道可以用 **$N$** 个单符号离散信道来等效，这 **$N$** 个信道之间没有任何关联关系，若输入端的 **$N$** 个随机变量之间也没有任何关联关系的话，就相当于 **$N$** 个毫不相干的单符号离散信道在分别传送各自的信息，所以在扩展信道的输出端得到的平均信息量必然是单个信道的 **$N$** 倍。



### 【例 4.8】

求二元对称信道的二次扩展信道的信道矩阵。

解

二元对称信道的二次扩展信道的输入、输出序列的每一个随机变量均取值于  $\{0,1\}$ , 输入共有  $r^N=2^2=4$  个取值, 输出共有  $s^N=2^2=4$  个取值. 根据  $P(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \prod_{k=1}^N P(Y_k|X_k)$  可求出

$$p(y_1|x_1) = p(00|00) = p(0|0)p(0|0) = \bar{p}^2$$

$$p(y_2|x_1) = p(01|00) = p(0|0)p(1|0) = \bar{p}p$$

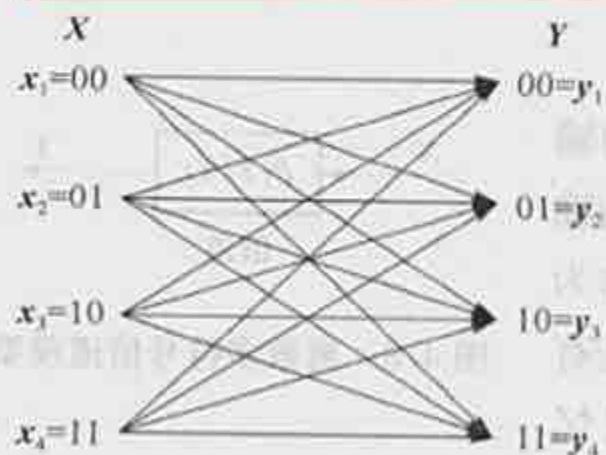
$$p(y_3|x_1) = p(10|00) = p(1|0)p(0|0) = p\bar{p}$$

$$p(y_4|x_1) = p(11|00) = p(1|0)p(1|0) = p^2$$

同理可求出其他的转移概率  $p_{ij}, i=2,3,4; j=1,2,3,4$ , 得到信道矩阵:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \bar{p}^2 & \bar{p}p & p\bar{p} & p^2 \\ \bar{p}p & \bar{p}^2 & p^2 & p\bar{p} \\ p\bar{p} & p^2 & \bar{p}^2 & \bar{p}p \\ p^2 & p\bar{p} & \bar{p}p & \bar{p}^2 \end{bmatrix}$$

二元对称信道的二次扩展信道如图 4.9 所示.



## 4.4 组合信道及其信道容量

■ 前面我们分析了单符号离散信道和离散无记忆信道的扩展信道。实际应用中常常会遇到两个或更多个信道组合在一起使用的情况。例如，待发送的消息比较多时，可能要用两个或更多个信道并行发送，这种组合信道称为**并联信道**；有时消息会依次地通过几个信道串联发送，例如无线电中继信道，数据处理系统，这种组合信道称为**级联信道**。在研究较复杂信道时，为使问题简化，往往可以将它们分解成几个简单的信道的组合。这一节我们将讨论这两种组合信道的信道容量与其组成信道的信道容量之间的关系。



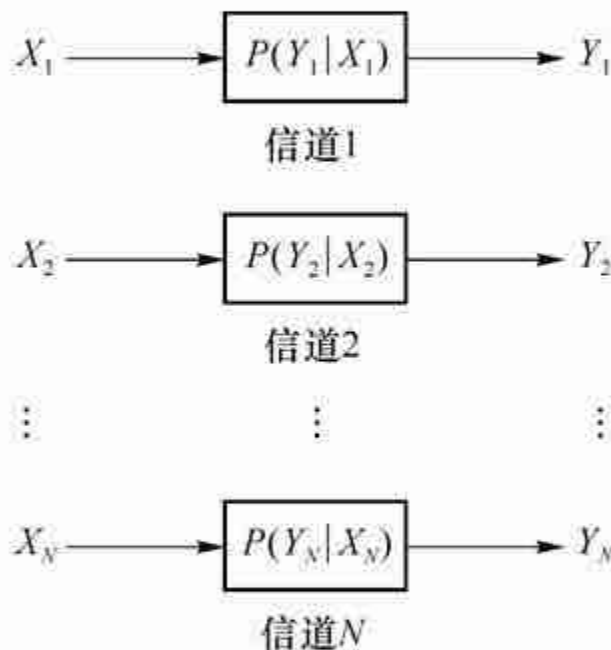
# 1 独立并联信道

- 一般独立并联信道如图4.10所示。
- 可以把定理4.2的结论推广到 $N$ 个独立并联信道中来：

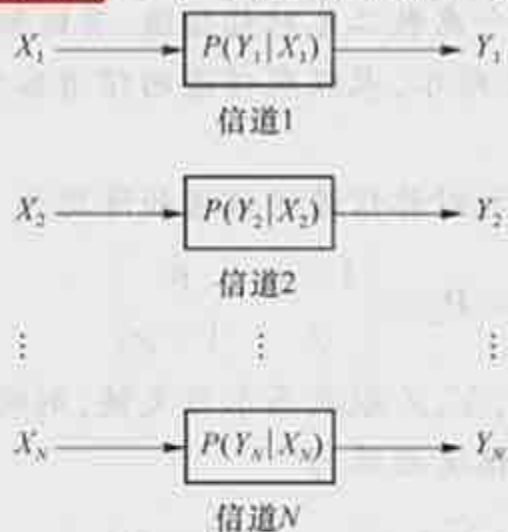
$$C_{\text{并}} = \max_{P(X_1 \cdots X_N)} I(X_1 \cdots X_N; Y_1 \cdots Y_N) \leq \sum_{k=1}^N C_k$$

- 只有当每个输入随机变量的概率分布均达到各自信道的最佳输入分布时，独立并联信道的信道容量才等于各信道容量之和：
- $$C_{\text{并}} = \sum_{k=1}^N C_k$$

- 当 $N$ 个独立并联信道的信道容量都相同时，图4.10 独立并联信道
- $$C_{\text{并}} = NC$$



设有  $N$  个信道并联, 它们的输入分别为  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , 输出分别是  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ ,  $N$  个信道的传递概率分别是  $P(Y_1|X_1), P(Y_2|X_2), \dots, P(Y_N|X_N)$ . 在这  $N$  个独立信道中, 每一个信道的输出  $Y_k$  只与本信道的输入  $X_k$  有关, 而与其他的信道的输入、输出无关. 这  $N$  个信道的联合传递概率满足以下关系:



$$P(Y_1 Y_2 \cdots Y_N | X_1 X_2 \cdots X_N) = P(Y_1 | X_1) P(Y_2 | X_2) \cdots P(Y_N | X_N) \quad (4.88)$$

这相当于离散无记忆信道应满足的条件, 因此可以把定理 4.4 的结论推广到  $N$  个独立并联信道:

$$I(X_1 X_2 \cdots X_N; Y_1 Y_2 \cdots Y_N) \leq \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k)$$

即联合平均互信息不大于各信道的平均互信息之和. 因此独立并联信道的信道容量

$$C_{\text{并}} = \max_{P(X_1 \cdots X_N)} I(X_1 \cdots X_N; Y_1 \cdots Y_N) = \sum_{k=1}^N C_k \quad (4.89)$$

图 4.10 独立并联信道

式中,  $C_k = \max_{P(X_k)} I(X_k; Y_k)$  是各个独立信道的信道容量.

所以独立并联信道的信道容量等于各个信道的信道容量之和. 只有输入随机变量相互独立且当每个输入随机变量的概率分布均达到各自信道的最佳输入分布时, 独立并联信道的信道容量才等于各信道容量之和, 即

$$C_{\text{并}} = \sum_{k=1}^N C_k \quad (4.90)$$

当  $N$  个独立并联信道的信道容量都相同时,

$$C_{\text{并}} = NC \quad (4.91)$$

## 2 级联信道

级联信道是信道最基本的组合形式，许多实际信道都可以看成是其组成信道的级联。图4.11是由两个单符号信道组成的最简单的级联信道。

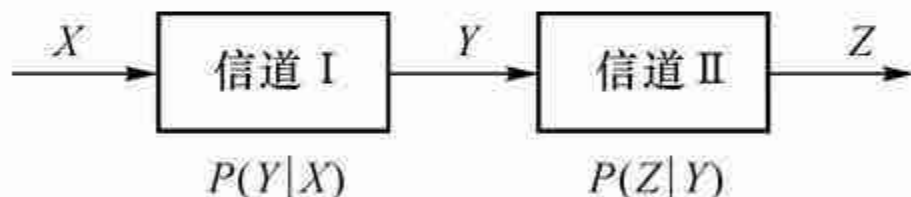


图4.11 级联信道

$X \rightarrow Y \rightarrow Z$  组成一个马尔可夫链。根据马尔可夫链的性质，级联信道的总的信道矩阵等于这两个串接信道的信道矩阵的乘积。求得级联信道的总的信道矩阵后，级联信道的信道容量就可以用求离散单符号信道的信道容量的方法计算。



级联信道的总的信道矩阵后,级联信道的信道容量就可以用求离散单符号信道的信道容量的方法计算。

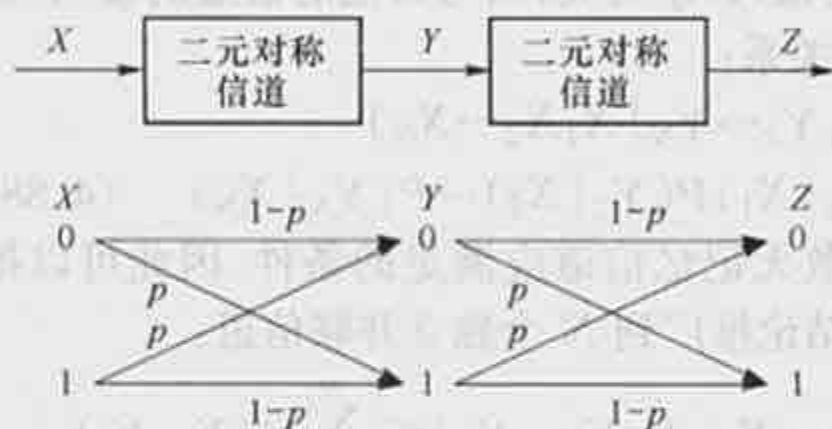


图 4.12 二元对称信道的级联信道

#### 【例 4.9】

设有两个离散二元对称信道,其级联信道如图 4.12 所示,求级联信道的信道容量。

解

两个二元对称信道的信道矩阵均为

$$P_1 = P_2 = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

因为  $X, Y, Z$  组成马尔可夫链,则级联信道的总的信道矩阵为

$$P = P_1 P_2 = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p)^2 + p^2 & 2p(1-p) \\ 2p(1-p) & (1-p)^2 + p^2 \end{bmatrix}$$

因此级联信道仍然是一个二元对称信道。

$$C_{\text{级}} = 1 - H[2p(1-p)]$$

## 练习：

- 对称信道的信道容量计算及最佳输入
- 一般信道的信道容量计算
- 根据信道容量分析信道特点
- 组合信道的信道容量计算
- 准对称信道信道容量计算