§6.3 复合求积法

§6.3.1 复合求积公式

将[a,b]等分成n个子区间，在每个区间上使用低阶求积公式进行计算，然后求和。

分区间利用梯形公式：

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]=\frac{b-a}{2n}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

复合梯形公式：

$$T_n = \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

复合Simpson公式：

$$S_n = \frac{b-a}{6n}[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

复合Cotes公式：

$$S_n = \frac{b-a}{90n}[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/4}) + 12\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+1/2}) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+3/4}) + 14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b)]$$

【例 6.4】 依次用 $n=8$ 的复合梯形公式、$n=4$ 的复合 Simpson 公式及 $n=2$ Cotes 公式计算定积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 。

k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1.000 000 0	5	0.625	0.936 1556
1	0.125	0.997 397 8	6	0.75	0.908 851 6
2	0.25	0.989 615 8	7	0.875	0.877 192 5
3	0.375	0.976 726 7	8	1	0.841 470 9
4	0.5	0.958 851 0			

$$T_8 = \frac{1}{16}\left(f(0) + 2\sum_{k=1}^{n} f(x_k) + f(1)\right) = 0.9556909$$

$$S_4 = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} f(0) + f(1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)) \\ + 4(f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875)) \end{bmatrix} = 0.9460833$$

$$C_2 = \frac{1}{180}\begin{bmatrix} 7(f(0) + f(1)) + 14f(0.5) + 32(f(0.125) + f(0.375) + \\ f(0.625) + (0.875)) + 12(f(0.25) + f(0.75)) \end{bmatrix} =$$

$$0.9460832$$

精确值：**I=0.9640831**

§6.3.2 复合求积公式的余项与收敛的阶

复合梯形公式余项：

$$I - T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{h^3}{12}f''(\eta_k)\right) = -\frac{n\cdot h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{f''(\eta_k)}{n}\right)$$

$$\min_{a\le x\le b}[f''(x)] \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) \le \max_{a\le x\le b}[f''(x)]$$

根据介值定理：

$$I - T_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta) \quad \eta\in(a,b)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{I-T_n}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k)h\right)$$

$$=\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx=-\frac{1}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

复合梯形公式余项：

$$\boxed{I-T_n\approx-\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)]}$$

复合Simpson公式余项：

$$I - S_n = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta) \qquad (\eta \in (a,b))$$

$$\lim \frac{I - S_n}{h^4} = -\frac{1}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4 [f'''(b) - f'''(a)]$$

$$\boxed{I - S_n \approx -\frac{1}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 [f'''(b) - f'''(a)]}$$

复合Cotes公式余项：

$$I - C_n = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta) \qquad (\eta \in (a,b))$$

$$\lim \frac{I - C_n}{h^4} = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{1}{4}\right)^6 [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)]$$

$$\boxed{I - C_n \approx -\frac{2}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)]}$$

定义6.2 如果一种复合求积公式$\mathbf{I_n}$，当$\mathbf{h \to 0}$时，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{I-I_n}{h^P}=c \quad (c\neq 0)$$

则称求积公式$\mathbf{I_n}$是$\mathbf{P(\geq 1)}$阶收敛的。

$\mathbf{T_n}$、$\mathbf{S_n}$、$\mathbf{C_n}$分别是**2**、**4**、**6**阶收敛。

§ 6.3.3 步长的自动选择

- 计算精度与步长有关；
- 高阶导数不易求，根据余项估计不可行。
- 通过计算自动选择：

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \qquad I - T_{2n} \approx -\frac{1}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 [f'(b) - f'(a)]$$

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4} \qquad \boxed{I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}\left(T_{2n} - T_n\right)}$$

以T_{2n}为近似，截断误差绝对值约为$\Delta \approx \frac{1}{3}|T_{2n} - T_n|$

令$h=b-a$，计算T_1;

步长折半，计算T_2及$\Delta=\frac{1}{3}|T_2-T_1|$;

反复计算，真到误差满足要求$\Delta\leq\varepsilon$

Simpson公式：

$$\boxed{I-S_{2n}\approx\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n)} \qquad \Delta=\frac{1}{15}\left|S_{2n}-S_n\right|$$

Cotes公式：

$$\boxed{I-C_{2n}\approx\frac{1}{63}(C_{2n}-C_n)} \qquad \Delta=\frac{1}{63}\left|C_{2n}-C_n\right|$$

例6.5 用变步长的复合*Simpson*公式计算定积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$,

给定误差$\varepsilon=\frac{1}{2}\times 10^{-6}$。

$$h=b-a=1$$

$$S_1\approx\frac{1}{6}(f(0)+4f(0.5)+f(1))=0.9461459$$

步长折半$h=0.5$

$$S_2\approx\frac{1}{12}(f(0)+4(f(0.25)+f(0.75))+2f(0.5)+f(1))$$

$$=0.94608688$$

$$\Delta=\frac{1}{15}|S_2-S_1|=0.39\times 10^{-4}>\varepsilon$$

$h=0.25, S_4=0.9460833\quad \Delta=\frac{1}{15}|S_4-S_2|=2.4\times 10^{-7}$

§6.4 龙贝格(Romberg)求积法

§6.4.1 梯形法的递推化

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)]$$

步长折半，增加节点$x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$,

在$[x_i, x_{i+1}]$积分为$\frac{h}{4}[f(x_i) + 2f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})]$

$$T_{2n} = \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + 2f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})$$

$$\boxed{T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})}$$

§ 6.4.2 龙贝格求积法

由：$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$

得：$\overline{T} = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{4-1}T_{2n} - \frac{1}{4-1}T_n$

即*Simpson*公式：$S_n = \frac{4}{4-1}T_{2n} - \frac{1}{4-1}T_n$

由*Simpson*公式：

$$I \approx S_{2n} + \frac{1}{4^2-1}(S_{2n} - S_n) = \frac{4^2}{4^2-1}S_{2n} - \frac{1}{4^2-1}S_n$$

即*Cotes*公式：$C_n = \frac{4^2}{4^2-1}S_{2n} - \frac{1}{4^2-1}S_n$

由$Cotes$公式得$Romberg$公式：$R_n = \frac{4^3}{4^3-1}C_{2n} - \frac{1}{4^3-1}C_n$

继续下去，以$T_0^{(k)}$表示二分k次后的梯形值，

$T_m^{(k)}$表示序列$\{T_0^{(k)}\}$的m次线性组合，得：

$$\boxed{T_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m-1}T_{m-1}^{(k)} = T_{m-1}^{(k+1)} + \frac{1}{4^m-1}(T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)})}$$

K=0,1,2,...; m=1,2,3,...

表 6-4　$T_m^{(k)}$ 三角形表

k	$n=2^k$	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	…
0	1	$T_0^{(0)}$				
1	2	$T_0^{(1)}$	$T_1^{(0)}$			
2	4	$T_0^{(2)}$	$T_1^{(1)}$	$T_2^{(0)}$		
3	8	$T_0^{(3)}$	$T_1^{(2)}$	$T_2^{(1)}$	$T_3^{(0)}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Romberg求积算法:

$$(1)\ T_0^{(0)} = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],\quad k=1$$

$$(2)\ T_0^{(k)} = \frac{1}{2}T_0^{(k-1)} - \frac{b-a}{2^k}\sum_{i=0}^{2^{k-1}} f[a+(2i-1)\frac{b-a}{2^k}]$$

$$(3)\ T_i^{(k-i)} = \frac{4^i T_{i-1}^{(k-i+1)} - T_{i-1}^{(k-i)}}{4^i-1},\ i=1,2,\ldots,k$$

(4) 若$\left|T_k^{(0)} - T_{k-1}^{(0)}\right| < \varepsilon$，则输出$T_k^{(0)}$；否则$k=k+1$返回(2)。

第(2)步举例： $$T_0^{(1)} = \frac{1}{2}T_0^{(0)} + \frac{b-a}{2}f(\frac{a+b}{2})$$

$$T_0^{(2)} = \frac{1}{2}T_0^{(1)} + \frac{b-a}{4}\left[f(\frac{b-a}{4}) + f(\frac{3(b-a)}{4})\right]$$

【例6.6】用龙贝格求积法计算 $I[f]=\int_0^1 x^2e^x dx$

k	2^k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	1	1.3591409			
1	2	0.8856606	0.7278338		
2	4	0.7605963	0.7189082	0.7183132	
3	8	0.7288902	0.7183215	0.7182823	0.7182819

积分准确值：e-2=0.718281828

【例6.7】用龙贝格求积法求积分$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$的近似值，要求误差不超过$0.5*10^{-5}$。

解:记 $f(x)=\frac{4}{1+x^2}$，$a=0$，$b=1$

$$f(0)=\frac{4}{1+0^2}=4,\quad f(1)=\frac{4}{1+1^2}=2$$

$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1-0}{2}[f(0)+f(1)]=3$$

$$f(0.5)=\frac{4}{1+0.5^2}=3.2$$

$$T_2=\frac{1}{2}[T_1+f(0.5)]=\frac{1}{2}[3+3.2]=3.1$$

$$S_1=\frac{1}{3}(4T_2-T_1)=3.3133333$$

$$f(0.25) = \frac{4}{1+0.25^2} = 3.7647059, \quad f(0.75) = \frac{4}{1+0.75^2} = 2.5600000$$

$$T_4 = \frac{1}{2}\left[T_2 + \frac{1}{2} \times (f(0.25) + f(0.75))\right] = 3.1311765$$

$$S_2 = \frac{1}{3}(4T_4 - T_2) = 3.1415687, \quad \frac{1}{15}|S_2 - S_1| = 0.549 \times 10^{-3}$$

$$C_1 = \frac{1}{15}(16S_2 - S_1) = 3.1421197$$

$$f(0.125) = \frac{4}{1+0.125^2} = 3.9384615$$

$$f(0.375) = \frac{4}{1+0.375^2} = 3.5068493$$

$$f(0.625) = \frac{4}{1+0.625^2} = 2.8764045$$

$$f(0.875) = \frac{4}{1+0.875^2} = 2.2654867$$

$$T_8 = \frac{1}{2}\left[T_4 + \frac{1}{4} \times (f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875))\right]$$

$$= 3.1389885$$

$$S_4 = \frac{1}{3}(4T_8 - T_4) = 3.1415925$$

$$\frac{1}{15}|S_4 - S_2| = 0.1587 \times 10^{-5} < \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$I \approx 3.14159$$

§6.4.3 龙贝格算法的收敛性

每线性组合一次，误差乘因子δh^2(δ为定数),

m次组合后以$T_m^{(k)}$作为积分近似值，误差为$O[h^{2(m+1)}]$

当$f(x)$在$[a,b]$上充分光滑时：

$$\lim_{m\to\infty} T_m^{(k)} = \int_a^b f(x)dx \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$\lim_{k\to\infty} T_m^{(k)} = \int_a^b f(x)dx \quad (m=0,1,2,\ldots)$$

课 后 作 业

第六章习题的3、4、5、6、7、9。