#### 第六章 二次型

### 第六章 二次型

- 6.1 二次型的定义及其矩阵表示
- 二次型的标准形 6. 2
- 6.3 正定二次型与正定矩阵

#### 6.1 二次型的定义及其矩阵表示

定义6.1 含n个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次多项式  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n$  $+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$  $+a_{nn}x_n^2$ 

称为n元二次型,简称二次型.

当系数 a; 均为实数时, 称为实二次型.

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

只含有平方项的二次型  $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \dots + k_n y_n^2$ 称为n元二次型的标准形.

例如 
$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

都为3元二次型:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2$$

为3元二次型的标准形.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 二次型的矩阵及秩



对二次型

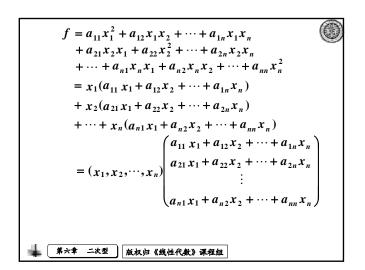
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$
取 $a_{ji} = a_{ij}$ ,则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$ ,于是
$$f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n$$

$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n$$

$$+ \dots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$



$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$记 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$则 二次型可记作  $f = x^T A x, \sharp + A \beta$  对称矩阵.$$

$$f = x^T A x$$

在二次型的矩阵表示中,任给一个二次型, 就唯一地确定一个对称矩阵; 反之, 任给一个对 称矩阵, 也可唯一地确定一个二次型. 这样, 二 次型与对称矩阵之间存在——对应的关系.

对称矩阵A叫做二次型f 的矩阵; f 叫做对称矩阵A的二次型; 对称矩阵A的秩叫做二次型f的秩.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

例1 写出二次型

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

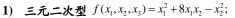
 $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ 的矩阵.

 $a_{12} = a_{21} = 2$ ,  $a_{13} = a_{31} = 0$ ,  $a_{23} = a_{32} = -3$ .

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

例2 求下列二次型的矩阵



2) 二元二次型  $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 - x_2^2$ .

解 1) 这是三元二次型,所求矩阵为三阶实对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) 这是二元二次型,所求矩阵为三阶实对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$
.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

例3 求
$$n$$
元二次型 
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i\neq j}x_ix_j$$
 的矩阵  $\Lambda$ 

的矩阵A.

**M**:  $a_{ii} = 0 \quad \forall 1 \le i \le n$  $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}$   $1 \le i; j \le n$ 

$$\therefore \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 求n阶对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

所对应的二次型.

解: 所对应的二次型为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i \le n} 2x_i x_j.$$

作业

习题6.1:

A: 1(1)(3)(5); 4

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 二次型的标准形 6. 2

- 6.2.1 用正交变换化二次型为标准形
- 6.2.2 用配方法化二次型为标准形
- 6.2.3 惯性定理与规范型
- 6.2.4\* 二次型的一些应用

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 6.2.1 用正交变换化二次型为标准形

二次型的标准形:  $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \dots + k_n y_n^2$ 对于二次型, 我们讨论的主要问题是: 寻求 可逆的线性变换,将二次型化为标准形.

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记 $C = (c_{ij})$ ,则上述可逆线性变换可记作

x = Cy

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

将其代入 $f = x^T A x$ ,有 x = Cv

 $f = x^{T}Ax = (Cy)^{T}A(Cy) = y^{T}(C^{T}AC)y.$ 

结论 任给可逆矩阵C,令 $B = C^T A C$ ,如果A为对称 矩阵,则B也为对称矩阵,且r(B)=r(A).

定义6.2 若A,B都是n阶对称矩阵,如果存在n阶可 逆矩阵C使得 $B=C^TAC$ 则称矩阵A与B是合同的。

性质6.1 矩阵的合同关系是一种等价关系,即

- (1)反身性 A与A本身合同.
- (2)对称性 若A与B合同,⇒B与A合同.
- (3)传递性 若A与B合同,B与C合同,

 $\Rightarrow A \mapsto C$ 合同.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 说明

1. 二次型经可逆变换x = Cy后, 其秩不变, 但f的矩阵由A变为 $B = C^T A C$ ;

2.要使二次型f经可逆变换x = Cy变成标准形, 就是要使

$$y^{T} C^{T} A C y = k_{1} y_{1}^{2} + k_{2} y_{2}^{2} + \dots + k_{n} y_{n}^{2}$$

$$= (y_{1}, y_{2}, \dots, y_{n}) \begin{pmatrix} k_{1} & & & \\ & k_{2} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & k_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1} \\ y_{2} \\ \vdots \\ y_{n} \end{pmatrix}$$

也就是要使CTAC成为对角矩阵

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

由于对任意的实对称矩阵A,总有正交矩阵 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ ,即 $P^{T}AP = \Lambda$ .把此结论应用于二次

定理6.2 任给二次型  $f = \sum a_{ij} x_i x_j (a_{ij} = a_{ji}),$ 

总有正交变换 x = Py, 使 f 化为标准型,

 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$ 

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是矩阵  $A = (a_{ii})$ 的特征值.

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤

- 1. 将二次型表成矩阵形式 $f = x^T A x$ ,求出A;
- 2. 求出A的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ;
- 3. 求出对应于特征值的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ;
- 4. 将特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 正交化,单位化,得  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , 记 $C = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ;
- 5. 作正交变换x = Cy,则得f的标准形  $f = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

例1 将二次型

 $f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 通过正交变换x = Py,化成标准形.

解 1. 写出对应的二次型矩阵,并求其特征值

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$
$$|\lambda E - A| = \begin{pmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 14 \end{pmatrix} = (\lambda - 18)^{2} (\lambda - 9)$$

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

从而得特征值  $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18.$ 

2. 求特征向量

 $将\lambda_1 = 9$ 代入 $(\lambda E - A)x = 0$ ,得基础解系  $\xi_1 = (1/2,1,1)^T$ .

将 $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ 代入 $(\lambda E - A)x = 0$ ,得基础解系  $\xi_2 = (-2,1,0)^T$ ,  $\xi_3 = (-2,0,1)^T$ .

3. 将特征向量正交化

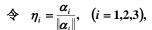
取  $\alpha_1 = \xi_1, \alpha_2 = \xi_2, \alpha_3 = \xi_3 - \frac{[\alpha_2, \xi_3]}{[\alpha_2, \alpha_2]} \alpha_2$ 

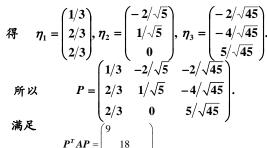
得正交向量组

 $\alpha_1 = (1/2,1,1)^T$ ,  $\alpha_2 = (-2,1,0)^T$ ,  $\alpha_3 = (-2/5, -4/5, 1)^T$ .

🗼 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

4. 将正交向量组单位化, 得正交矩阵 P





第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

于是所求正交变换为 x=Py, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有  $f = x^T A x = (Py)^T A (Py) = y^T (P^T A P) y$ .  $=9 y_1^2 + 18 y_2^2 + 18 y_2^2$ .

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

例2 用正交变换化二次型

 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ 

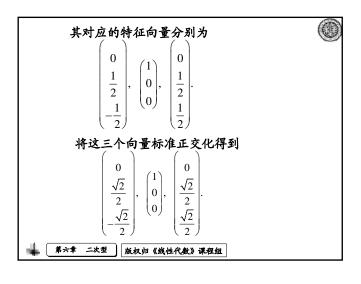
为标准型.

解: 二次型的矩阵

 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$ 

A 的特征多式

 $f_{\lambda}(A) = |\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5),$ 特征值为 $\lambda=1,\lambda=2,\lambda=5$ ,



令 
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
则 
$$Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & & & \\ & 5 \end{pmatrix}$$
 做正交变换 $X = QY$ , 二次型 $f(x_{1}, x_{2}, x_{3})$  化为标准型  $y_{1}^{2} + 2y_{2}^{2} + 5y_{3}^{2}$ .

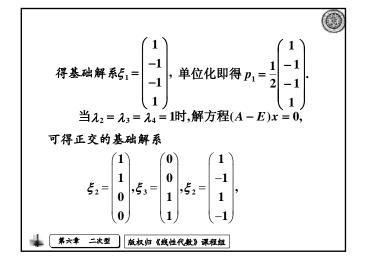
例 3 求一个正交
$$x=Py$$
,把二次型 
$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3\\ +2x_2x_4+2x_3x_4$$
 化为标准形. 
$$\mathbf{P}$$
 二次型的矩阵为  $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$  它的特征多项式为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
计算特征多项式:把二,三,四列都加到第一列上,有
$$|A - \lambda E| = (-\lambda + 1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
把二,三,四行分别减去第一行,有

$$|A-\lambda E| = (-\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -\lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -2 \\ -2 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+1)^2 (\lambda^2+2\lambda-3) = (\lambda+3)(\lambda-1)^3.$$
于是A的特征值为 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$ 
当 $\lambda_1 = -3$ 时,解方程 $(A+3E)x = 0$ ,



单位化即得  $p_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$  于是正交变换为  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$  且有  $f = -3 y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$   $( x_1 p_1 )$  版权归《线性代数》课程组

思考题

求一正交变换,将二次型  $f(x_1,x_2,x_3)$   $=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$  化为标准型,并指出  $f(x_1,x_2,x_3)=1$  表示何种二次 曲面.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

### 思考题解答

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ ,

可求得 $det(\lambda E - A) = -\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9)$ , 于是A的特征值为 $\lambda_1 = 0$ , $\lambda_2 = 4$ , $\lambda_3 = 9$ , 对应特征向量为

$$p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

将其单位化得

$$q_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{p_2}{\|p_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$q_3 = \frac{p_3}{\|p_3\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

故正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

化二次型为  $f = 4y_2^2 + 9y_3^2$ .

可知 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示椭圆柱面.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 6.2.2 用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形,其特点是保 持几何形状不变.

下面介绍另一种行之有效的化二次型 为标准形方法——拉格朗日配方法.

拉格朗日配方法的步骤

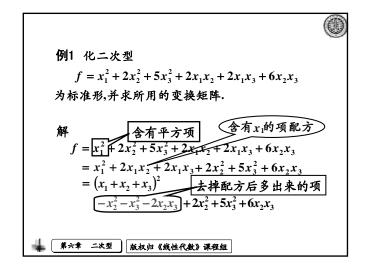
1. 若二次型含有x;的平方项,则先把含有x;的乘积项集中,然后配方,再对其余的变量同样进行,直到都配成平方项为止,经过非退化线性变换,就得到标准形;

2. 若二次型中不含有平方项,但是  $a_{ij} \neq 0$   $(i \neq j)$ ,则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n \coprod k \neq i, j)$$

化二次型为含有平方项的二次型,然后再按1中方 法配方.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组



 $= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3$  $= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2.$ 

$$\Leftrightarrow \begin{cases}
y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\
y_2 = x_2 + 2x_3 \\
y_3 = x_3
\end{cases}
\Rightarrow \begin{cases}
x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\
x_2 = y_2 - 2y_3 \\
x_3 = y_3
\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

→ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

 $\therefore f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$  $= y_1^2 + y_2^2.$ 

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (|C| = 1 \neq 0).$$

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

例2 化二次型

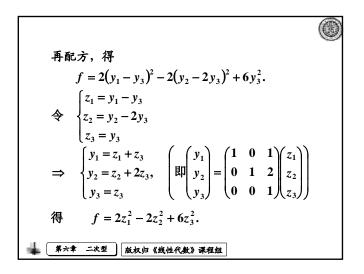
$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

成标准形,并求所用的可逆矩阵.

解 由于所给二次型中无平方项,所以

代入  $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ ,

得 
$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$$
.



所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (|C| = -2 \neq 0).$$

🕌 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

例3 用配方法化二次型 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$  为标准型. 解: 由  $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ , 配方有

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2$$
.

作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x - \frac{y}{2}, & \text{if } x = x_1 - \frac{y_1}{2}, \\ y_1 = y, & \text{if } y = y_1 \end{cases}$$

有  $f(x,y) = x_1^2 + \frac{3}{4}y_1^2$ .

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

当然我们也可以采用另一种配方的办法, 即

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 = \frac{3}{4}x^2 + (\frac{x}{2} - y)^2.$$

这样作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = \frac{x}{2} - y \end{cases}, \quad \text{end} \begin{cases} x = x_2 \\ y = \frac{x_2}{2} - y_2 \end{cases},$$

可将二次型化为标准型  $\frac{3}{4}x_2^2 + y_2^2$ .

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

如果选取可逆线性代换

$$\begin{cases} x_3 = \frac{x+y}{2} \\ y_3 = \frac{x-y}{2} \end{cases}, \quad \text{III} \quad \begin{cases} x = x_3 + y_3 \\ y = x_3 - y_3 \end{cases},$$

同样可以把二次型化为标准型 $x_3^2 + 3y_3^2$ .

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 6. 2. 3 惯性定理与规范型

可以看到,二次型经不同的可逆线性变换可能得到 不同的标准形,即二次型的标准形不惟一.

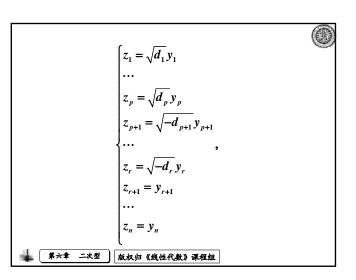
设秩为 r 的实二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 

经可逆线性变换 X = CY 化为标准形

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

不妨设  $d_1, d_2, \dots, d_p > 0$ ,  $d_{p+1}, d_{p+2}, \dots, d_r < 0$ ,  $d_{r+1} = d_{r+2} = \cdots = d_r = 0$ , 再作可逆线性变换

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组



第六章 二次型

二次型进一步化为标准形

$$f = z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$$

称上式为实二次型  $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$  的规范型.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

定理6.3 (Sylvester惯性定律)

实二次型都能用可逆的线性代换化为规范形, 且规范形是惟一的.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

由惯性定理知,尽管实二次型  $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的标准形不惟一, 但标准形中正平方项的个数 P 是惟一确定的,负平方项的个数 q=r-p也是惟一确定的(r为二次型的秩),

分别称之为实二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的正惯性指数和负惯性指数,

p-q 称为二次型的符号差.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

惯性定理用矩阵表述为:

定理6.4 任意一个秩为 r 的 n 阶实对称矩阵A都合同于一个形如

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_{p} & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

的对角阵.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 6.2.4\* 二次型的一些应用

例6.10 设三元二次型

 $f(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz$ 在空间直角坐标系O-xyz中,方程f(x,y,z)=0、 f(x,y,z)=6 及 f(x,y,z)=-6 分别是什么曲面?

解 二次型 f(x,y,z) 的矩阵为三阶对称矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

经过简单计算可以得到, A的特征多项式为  $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36$ ,

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

它有三个不同的特征值-2,3,6,它们的特征向量单位 化后依次为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

其中正交矩阵

那么,二次型 f(x,y,z) 就化为关于变量  $x_1,y_1,z_1$ 的二次型  $g(x_1, y_1, z_1) = -2x_1^2 + 3y_1^2 + 6z_1^2$ .

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

在空间直角坐标系O-xyz 中,二次曲面 f(x,y,z)=0的方程可以经变换

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{z}_1 \end{pmatrix}$$

化为空间直角坐标系  $O-x_1y_1z_1$  中的方程  $g(x_1,y_1,z_1)=0$ , 也就是 $3y_1^2 + 6z_1^2 = 2x_1^2$ , 可以看到这是一个椭圆锥面. 因此,在 O-xyz 坐标系中, 二次曲面 f(x,y,z)=0是一个椭圆锥面.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

同理,可以得到在 O-xyz 坐标系中,

二次曲面 f(x,y,z)=6 是一个单叶双曲面; 二次曲面 f(x,y,z) = -6 是一个双叶双曲面.

📥 🛘 第六章 二次型 📗 版权归《线性代数》课程组

例6.11 已知二次型

 $f(x, y, z) = 5x^{2} + 5y^{2} + cz^{2} - 2xy + 6xz - 6yz$ 的秩为2.

- (1) 求出参数c 及二次型的矩阵的全部特征值:
- (2) 指出方程 f(x,y,z) = 36 表示何种曲面.

解 (1)首先易得二次型f的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix},$$

且r(A) = 2, 这就是说|A| = 0.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

计算得到 |A| = 24c - 72, 因此 c = 3.

其次, 在 c=3 时, A 的特征多项式为  $\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$ , 三个特征值为 0, 4, 9.

(2)由(1)的分析计算可知,二次型在某个正交 变换下的标准形为  $4x_1^2 + 9y_1^2$ , 于是方程 f = 36

就化为  $\frac{x_1^2}{\Omega} + \frac{y_1^2}{4} = 1$ , 这是椭圆柱面.

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

小结

将一个二次型化为标准形,可以用正交变换 法, 也可以用拉格朗日配方法, 或者其它方法, 这取决于问题的要求. 如果要求找出一个正交矩 阵, 无疑应使用正交变换法; 如果只需要找出一 个可逆的线性变换,那么各种方法都可以使用. 正交变换法的好处是有固定的步骤,可以按部就 班一步一步地求解,但计算量通常较大;如果二 次型中变量个数较少,使用拉格朗日配方法反而 比较简单. 需要注意的是,使用不同的方法,所 得到的标准形可能不相同, 但标准形中含有的非 零项的项数必定相同,项数等于所给二次型的 秩.

作业

习题6.2 A: 1 (1) (4)、2 (3)、4 (1) (3) (5)、5 (1), B: 3 (1)

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 思考题

(

化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
  
为标准形,并写出所作的可逆线性变换.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 思考题解答

解 由于所给二次型不含平方项,故令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$
有  $f = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2,$ 
再令 
$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$$

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 得标准形

 $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2,$ 

所用可逆线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

#### 6.3 正定二次型与正定矩阵

一、正负定二次型的概念

定义6.3 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 是一个实二次型,若对于任意的非零向量X,

都有 $X^T AX > 0$ 、 $X^T AX < 0$ 、 $X^T AX \ge 0$ 、 $X^T AX \le 0$ ,

则称二次型分别为正定的、负定的、半正定的、 半负定的. 否则称为不定的.

相应的矩阵分别称为正定矩阵、负定矩阵、半正 定矩阵、半负定矩阵、不定矩阵.

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

# 例6.1 二次型 $f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ 是正定的;

但二次型
$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$$
不是正定的,因 $X = (0, 0, \dots, 1)^T \neq 0$ ,但 $f(X) = 0$ .

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

二、正负定二次型的判别

定理6.1 二次型 $f(x_1, x_2, \dots x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$ 是正定的 充分必要件是 $d_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

证明: 必要性 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)$  的矩阵为

 $A = diag(d_1, d_2, \dots, d_n),$ 

由于二次型是正定的,对任意的 $X \neq 0$ ,有 $X^TAX > 0$ . 特别取  $X_i = (0,\dots,0,1,0\dots 0)^T \neq 0 (i=1,2,\dots,n)$ , 则有  $d_i = X_i^T A X_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n).$ 

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

充分性 设  $d_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 对任意的

 $X = (x_1, x_2, \dots x_n)^T \neq 0,$ 

则有某个 $x_k \neq 0$ , 于是 $d_k x_k^2 > 0$ , 而其余的 $d_i x_i^2 \geq 0$ , 所以

 $f(x_1, x_2, \dots x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2 > 0,$ 

于是二次型  $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$  为正定二次型.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

定理 6.2 可逆线性变换不改变二次型的正定型. 证明 设实二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$  是正定的, 且经可逆线性变换 X=CY 变成二次型

 $g(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T(C^TAC)Y = Y^TBY$ ,  $\# PB = C^TAC$ .

下面证明 $g(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T B Y$ 是正定二次型.

对任意一个n元向量 $Y_0$ ,由于矩阵C可逆,则 $X_0 = CY_0 \neq 0$ , 于是由 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 正定二次型知  $X_0^T A X_0 > 0$ , 因此

 $Y_0^T B Y_0 = Y_0^T (C^T A C) Y_0 = (C Y_0)^T A (C Y_0) = X_0^T A X_0 > 0,$ 

由定义知二次型  $g(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T B Y$ 是正定二次型.

🕌 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

 $\mathbf{n}$ 元实二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  正定的 充分必要条件是其规范型为  $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$ .

推论2 n元实二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  正定的 充分必要条件是其正惯性指数为n.

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

把上述二次型的有关结论用相应的矩阵语言来叙述 我们有:

定理6.3 实对称矩阵A正定的充分必要条件是 A 合同于单位方阵.

定理6.4 n阶实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 A 的正惯性指数为n.

上述两个定理用推论1、推论2易证.

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

定理6.5 实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 A 的特征值全部为正值.

证明 设A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,

可知存在正交变换 X = QY,使得二次型

 $f(X) = X^T A X = Y^T Q^T A Q Y$  $=Y^{T}diag(\lambda_{1},\lambda_{2},\cdots,\lambda_{n})Y$  $= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$ 

矩阵 A 正定 $\Leftrightarrow$  二次型 $f(X) = X^T A X$ 正定  $\Leftrightarrow \lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n).$ 

下面从实对称矩阵本身讨论正定矩阵的性质.

A 是对称矩阵,  $1 \le i_i < i_2 < \dots < i_k \le n$ , 子式



称为 A 的主子式, 而子式

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为A 的顺序主子式。

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

定理6.6 正定矩阵的行列式大于零.

证明 若A正定,则存在可逆矩阵 P,

使得 $A = P^{T}EP = P^{T}P$ , 所以 $|A| = |P^{T}P| = |P|^{2} > 0$ .

定理6.7 设A是实对称矩阵,则 A正定的充分必要件是 其顺序主子式均大于零.

定理6.8 设A 是实对称矩阵,则A正定的充分必要件是 其主子式全大于零.

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

判断是对称矩阵 例1

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & -2 \\
-1 & 4 & -1 \\
-1 & -1 & 5
\end{pmatrix}$$

是否正定.

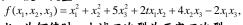
解 由于

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11 > 0, \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 46 > 0,$$

根据定理6.7知这个矩阵是正定的.

🗼 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

例2 设二次型



当t 为何值时, 上述二次型为正定二次型.

解: 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

二次型正定的充分必要条件是A 的各阶顺序主子式

均大于零,即

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 1 \\ t \end{vmatrix} = (1 - t^2) > 0, |A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5t^2 - 4t > 0,$$

解得 $-\frac{4}{5} < t < 0$ ,因此 $-\frac{4}{5} < t < 0$ 时,二次型为正定二次型.

第六章 二次型 ] 版权归《线性代数》课程组

例3 若A, B是n 阶正定矩阵,则 A+B也是正定矩阵.

证明: 1) 因 $A^T = A$ ,  $B^T = B$ , 故 $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$ . 即A+B 是实对称矩阵.

> 2) 因A,B正定,故对任意n维列向量  $X \neq 0$ , 均有  $X^TAX > 0$ ,  $X^TBX > 0$ , 从而  $X^{T}(A+B)X = X^{T}AX + X^{T}BX > 0,$ 即A+B 为正定矩阵.

▲ 第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

例4 设A为 $m \times n$  实矩阵且rankA = n, 证明 $A^T A$ 正定.

证明: B = n,  $A \ge m \times n$  矩阵,  $A \ge n$ 

于是 $\forall X \neq 0$ , X不是AX = 0的解, 所以 $AX \neq 0$ ,

故 $(AX)^T(AX) > 0$ , 因此 $\forall X \neq 0$ , 有

 $X^{T}(A^{T}A)X = (AX)^{T}(AX) > 0.$ 

由定义知, $X^{T}(A^{T}A)X$ 是正定二次型,

 $A^{T}A$  是正定矩阵.

常见的证明题:已知一矩阵正定,证明该矩阵运算后所得的新矩阵也正定.例如:

例5 设A 为正定矩阵,则 $A^{-1}$ , kA(其中k > 0), $A^*$  也是正定矩阵.

例6 如果C 是可逆矩阵,A 为正定矩阵,证明  $CAC^T$  也是正定矩阵。

第六章 二次型 版权归《线性代数》课程组

总之,下面几个条件是相互等价的:
1) 二次型X<sup>T</sup>AX是正定二次型;
2) A是正定矩阵;
3) A 的正惯性指数是n;
4) A合同于单位矩阵;
5) A 的特征值都是正数;
6) A 的顺序主子式都大于零.

作业
习题 6.3
A: 1(1)(3)、2、3(1)