4.6 偏序关系

- 偏序关系：同时具有自反、反对称和传递性

4.6 偏序关系

定义 4.21 设 R 为非空集合 A 上的一个二元关系，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系，记作≤。设≤是偏序关系，若 $<x, y>\in\leq$ ，则记作 $x\leq y$ ，读作 x“ 小于或等于” y 。集合 A 与 A 上的偏序关系≤一起组成的有序对 $<A, \leq>$ 叫做偏序集。

如以下关系都是偏序关系：

（ 1 ）非空集合 A 上的恒等关系 I_A 、空关系∅。

（ 2 ）实数集 R 上的“≤”、“”关系。

（ 3 ）正整数集 $Z+$ 上的整除关系。

例 4.30 设 R 是非空集合 A 上的一个二元关系，求证若 R 是一个偏序关系，则其逆关系 R^{-1} 也是一个偏序关系。

证：因为 R 是一个偏序关系，则它具有自反、反对称和传递性，容易证明 R^{-1} 也具有自反、反对称和传递性。故 R^{-1} 也是一个偏序关系。

4.6 偏序关系

定义 4.22　设 $<A, \leq>$ 为偏序集，定义

（1）$\forall x, y \in A$，$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$，$x<y$ 读作 x“小于”y，这里所说的“小于”是指在偏序中 x 排在 y 的前边。

（2）$\forall x, y \in A$，x 与 y 可比$\Leftrightarrow$ $x \leq y \vee y \leq x$

例如，$<A, \leq>$ 是偏序集，其中 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，是 A 上的整除关系，则有

（1）$1<2<4$，$1<3$ 等。

（2）$1=1$，$2=2$，$3=3$ 等。

（3）2 与 3 是不可比的。

4.6 偏序关系

定义 4.23 设 <A, ≤> 为偏序集，若∀ x, y∈A ， x 与 y 都是可比的，则称≤为 A 上的**全序关系**（或线序关系）。且称 <A, ≤ > 为**全序集**。

例如，集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的

（ 1 ）“小于等于”关系是全序关系，因为任何两个数总是可比大小的。

（ 2 ）“整除关系”不是全序关系，因为 2 与 3 是不可比的。

4.6 偏序关系

定义 4.24 设 $<A, \leq>$ 为偏序集，对于任意的 $x, y \in A$ ，如果 $x < y$ 并且不存在 $z \in A$ 使得 $x<z<y$ ，则称 y 盖住 x 。作为集合 A 上的一个二元关系，盖住关系 COV A 可表示为：

$$\mathrm{COV}\ A=\{<x, y> \mid x, y \in A \wedge y \text{ 盖住 } x\}$$

根据定义 4.24 ，$\forall <x, y>$ ，

$<x, y> \in \mathrm{COV}\ A$

$\Leftrightarrow y$ 盖住 x

$\Rightarrow x \leq y$

$\Leftrightarrow <x, y> \in \leq$

所以 $\mathrm{COV}\ A \subseteq \leq$ 。

4.6 偏序关系

对于偏序集 $<A, \leq>$ ，它的盖住关系 COV A 是唯一的，所以可以利用盖住关系作图，表示该偏序集 $<A, \leq>$ 。这个图叫作哈斯图。

偏序集 $<A, \leq>$ 的哈斯图的画法如下：

（ 1 ）用“°”表示 A 中的每一个元素；

（ 2 ）$\forall x, y \in A$ ，若 $x<y$ ，则把 x 画在 y 的下面；

（ 3 ）$\forall x, y \in A$ ，若 y 盖住 x ，则用一条线段连接 x 和 y 。

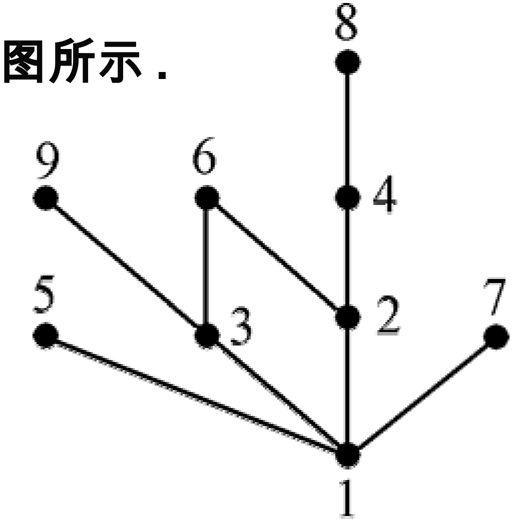
4.6 偏序关系

例 32　画出偏序集 <{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, $R_{整除}$ > 和 <P({ a, b, c }), $R_{\subseteq}$> 的哈斯图 .

解 :

COV({ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }) ={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<1,5>,<2,6>, <3,6>,<1,7>,<4,8>,<3,9>}

偏序集 <{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, $R_{整除}$ > 的哈斯图如右图所示 .



$\langle\{1,2,\cdots,9\},R_{整除}\rangle$

4.6 偏序关系

P({a, b, c}) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}} 。

P({a, b, c}) 上的盖住关系为：

COV *P*({a, b, c}) = {<∅, {a}>, <∅, {b}>, <∅, {c}>,

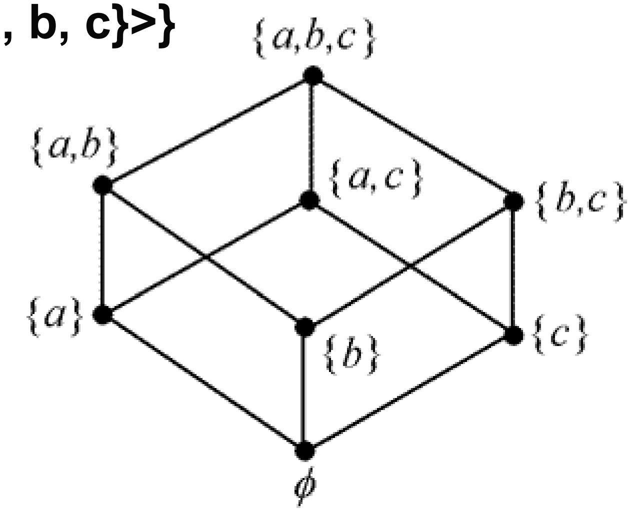
<{a}, {a, b}>, <{a}, {a, c}>,

<{b}, {a, b}>, <{b}, {b, c}>,

<{c}, {a, c}>, <{c}, {b, c}>,

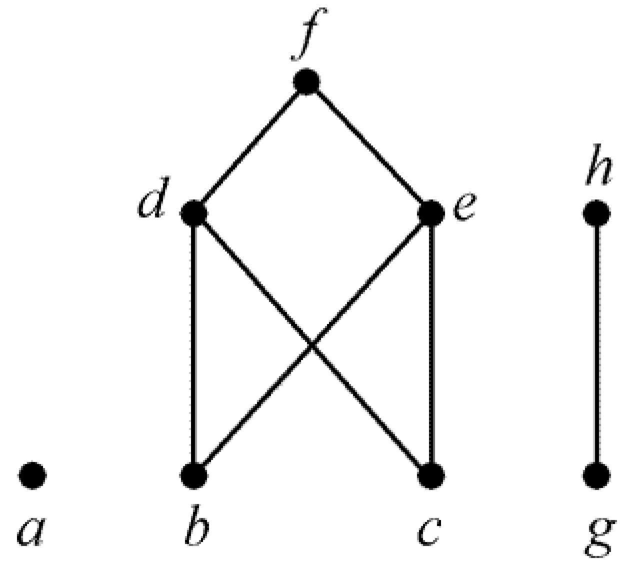
<{a, b}, {a, b, c}>, <{a, c}, {a, b, c}>, <{b, c}, {a, b, c}>}

哈斯图如右图所示：



$\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq}\rangle$

例 33　已知偏序集 <A, R> 的哈斯图如下图，试求出集合 A 和关系 R 的表达式 .



解

A = { a, b, c, d, e, f, g, h }

R = { <b,d>, <b,e>, <b,f>, <c,d>, <c,e>, <c,f>, <d,f>, <e,f>, <g,h> } ∪ I_A

4.6 偏序关系

定义 4.25　设 $<A, \leq>$ 为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in B$，

（1）若$\forall x(x\in B \rightarrow y \leq x)$成立，则称 y 是 B 的最小元。

（2）若$\forall x(x\in B \rightarrow x \leq y)$成立，则称 y 是 B 的最大元。

（3）若$\neg\exists x(x\in B \wedge x \leq y)$成立，则称 y 是 B 的极小元。

（4）若$\neg\exists x(x\in B \wedge y \leq x)$成立，则称 y 是 B 的极大元。

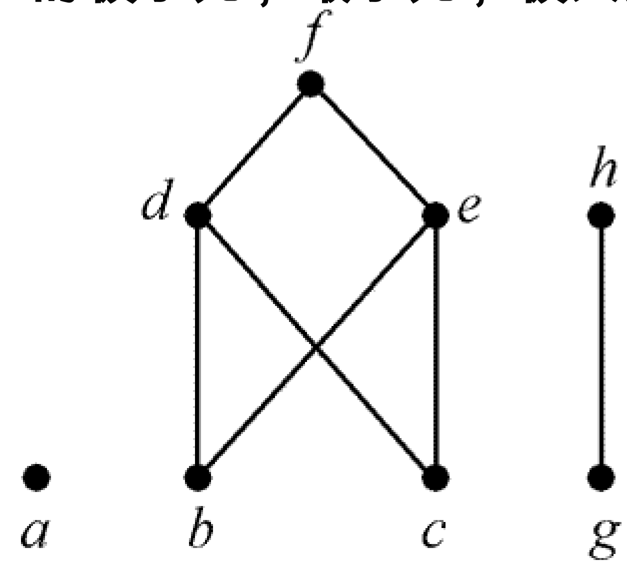
- 最小元是 B 中最小的元素，它与 B 中其它元素都可比；
- 极小元不一定与 B 中元素都可比，只要没有比它小的元素，它就是极小元.
- 对于有穷集 B，极小元一定存在，而且还可能有多个.
- 若 B 中只有一个极小元，则它一定是 B 的最小元.
- 类似的，极大元与最大元也有这种区别.

4.6 偏序关系

当B = A时，B的最大元、最小元、极大元和极小元称为偏序集<A, ≤>的最大元、最小元、极大元和极小元。

定理4.24 设<*A*, ≤>是偏序集，$B \subseteq A$，如果B有最大元（最小元），则必唯一。

例 34　设偏序集 <A, ≤ > 如下图所示，求 A 的极小元，最小元，极大元，最大元 .



解　极小元 : a, b, c, g.

极大元 : a, f, h.

没有最小元与最大元 .

由这个例子可以知道，哈斯图中的孤立顶点既是极小元也是极大元 .

例 35　设 X 为集合，$A=P(X)-\{\phi\}-\{X\}$，且 $A\neq\phi$.

若 $|X| = n$，问：

(1) 偏序集 <A, R⊆> 是否存在最大元？

(2) 偏序集 <A, R⊆> 是否存在最小元？

(3) 偏序集 <A, R⊆> 中极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由．

解　因为 $A=P(X)-\{\phi\}-\{X\}$，且 $A\neq\phi$，所以 $n\geq 2$。

<A, R⊆> 不存在最小元和最大元，因为 $n\geq 2$。

考察幂集 P(X) 的哈斯图：

最底层的顶点是空集，记作第 0 层；

第 1 层是单元集；

第 2 层是二元子集；

…

第 n-1 层是 X 的 n-1 元子集；

第 n 层（最高层）只有一个顶点 X.

偏序集 <A, R⊆> 与 <P(X), R⊆> 相比，恰好缺少第 0 层与第 n 层．

因此，<A, R⊆> 的极小元就是 X 的所有单元集 $\{x\}(x\in X)$，极大元恰好少一个元素 $X-\{x\}(x\in X)$.

4.6 偏序关系

定义 4.26 设 $<A, \leq>$ 为偏序集，$B \subseteq A$ ，$y \in A$ ，

（1）若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立，则称 y 是 B 的上界。

（2）若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立，则称 y 是 B 的下界。

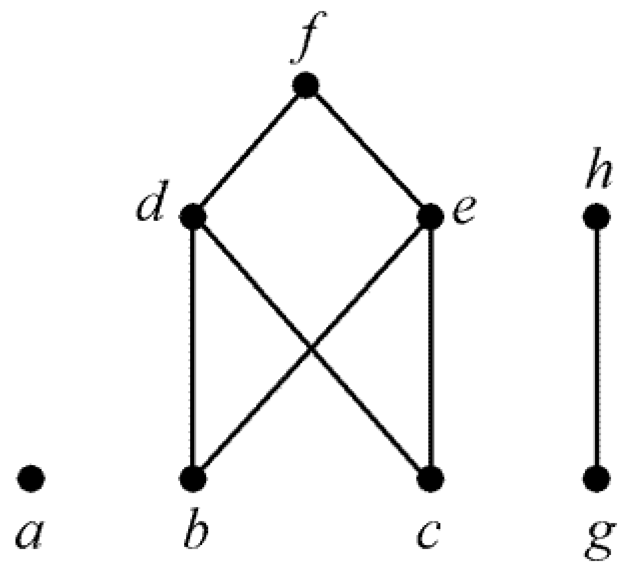
（3）令 $C=\{y \mid y$ 为 B 的上界$\}$，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界。

（4）令 $D=\{y \mid y$ 为 B 的下界$\}$，则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界。

由上面定义可知：

- B 的最小元一定是 B 的下界，同时也是 B 的最大下界；
- B 的最大元一定是 B 的上界，同时也是 B 的最小上界 .
- 反过来不一定正确，B 的下界不一定是 B 的最小元，因为它可能不是 B 中的元素，B 的上界也不一定是 B 的最大元 .
- B 的上界，下界，最小上界，最大下界都可能不存在 . 如果存在，最小上

考虑下图中的偏序集．令 B = { b, c, d }, 求 B 的极小元、最小元、极大元、最大元、下界，最大下界，上界，最小上界．（练习）



小结

（1）偏序关系同时具有自反、反对称和传递性，可以通过关系矩阵和关系图判断某关系是否是偏序关系。

（2）偏序集、全序关系、小于、可比和盖住等常用的概念。

（3）哈斯图是偏序关系的简化关系图，哈斯图的画法。

（4）偏序集中的一些特殊元素的定义、性质与求解：最大元、最小元、极大元和极小元；上界、上确界、下界和下确界。

作业

- **补充习题 4.6**

1．对于下列集合与整除关系画出哈斯图：

（1） $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

（2） $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

2．分别画出下列各偏序$\langle A,R_{\leq}\rangle$的哈斯图. 并找出$A$的极大元、极小元、最大元和最小元.

（1） $A=\{a,b,c,d,e\}$

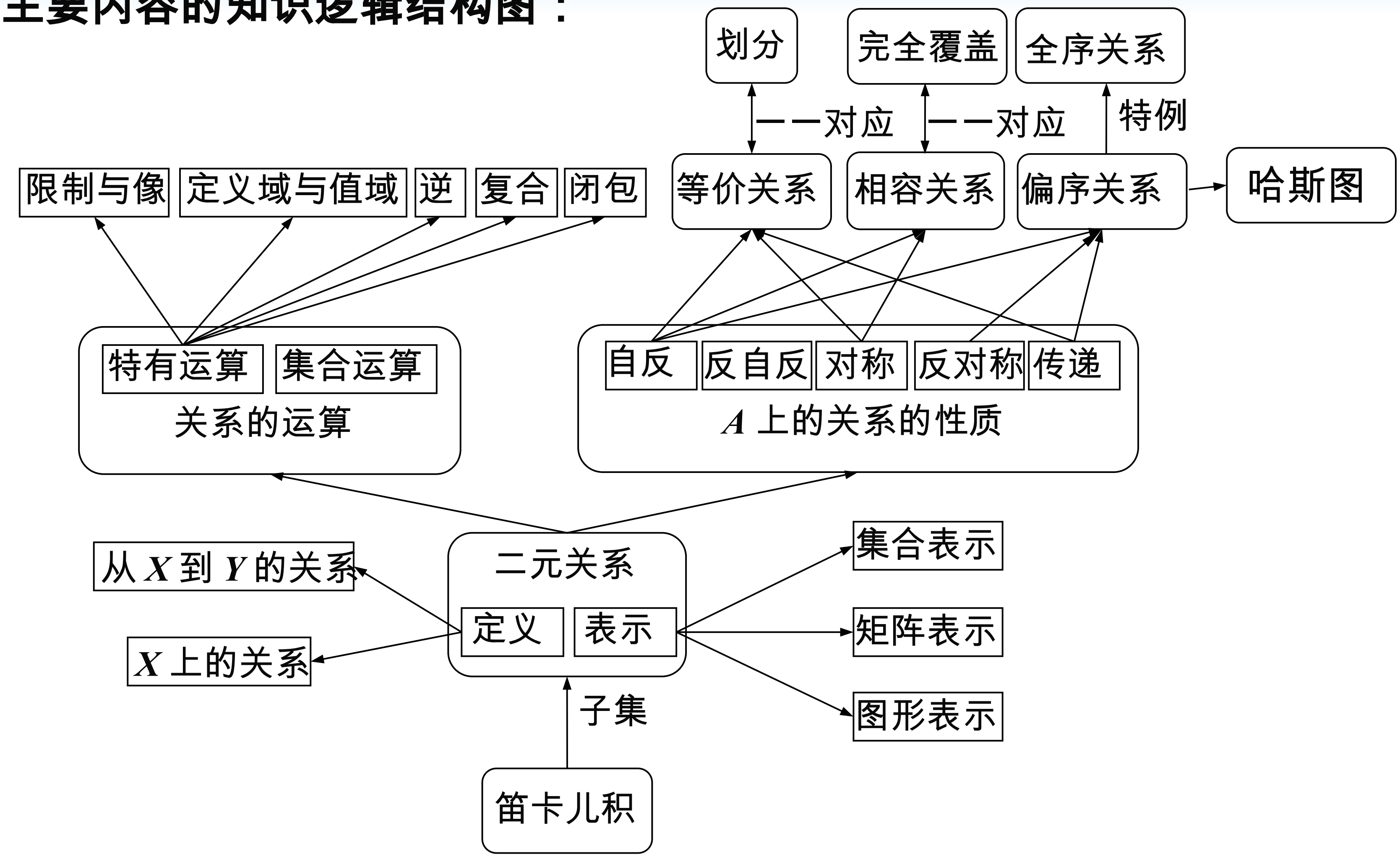
$$R_{\leq}=\{\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\}\cup I_A.$$

（2） $A=\{a,b,c,d,e\}$

$$R_{\leq}=\{\langle c,d\rangle\}\cup I_A$$

本章小结

本章主要内容的知识逻辑结构图：



常见题型

- 求某关系的集合表示；画出某关系的关系矩阵或关系图
- 关系的运算，可利用集合表示、关系图或关系矩阵求得运算结果
- 判断或证明关系的性质。
- 计算关系的闭包。
- 根据等价关系求集合的划分，或由集合的划分求集合上的等价关系。
- 画出偏序关系的哈斯图，或根据哈斯图求偏序关系的集合表示。
- 求最大元、最小元、极大元和极小元；求上界、最小上界、下界和最大下界。

关系性质的证明方法

1. 证明 R 在 A 上自反

   任取 x,

   $x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$

   前提　　　推理过程　　　结论

2. 证明 R 在 A 上对称

   任取 $\langle x,y\rangle$ ，

   $\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$

   前提　　　推理过程　　　结论

关系性质的证明方法

3. 证明 R 在 A 上反对称

任取 $<x,y>$ ，

$<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow$ …………………….. $\Rightarrow x = y$

前提　　推理过程　　结论

4. 证明 R 在 A 上传递

任取 $<x,y>,<y,z>$ ，

$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow$ …………………….. $\Rightarrow <x,z>\in R$

前提　　推理过程　　结论

关系等式或包含式的证明方法

证明中用到关系运算的定义和公式，如：

- $x \in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in R)$
- $y \in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(<x,y> \in R)$
- $<x,y> \in R \Leftrightarrow <y,x> \in R^{-1}$
- $<x,y> \in R \circ S \Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \wedge <t,y> \in S)$
- $<x,y> \in R \restriction A \Leftrightarrow x \in A \wedge <x,y> \in R$
- $y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge <x,y> \in R)$
- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$

例题

例 4.40 R 是二元关系，且 $R=R^\circ R^\circ R^\circ R$ ，选择下面的哪一个一定是传递的。

（ 1 ）R　　（ 2 ）$R^\circ R$　　（ 3 ）$R^\circ R^\circ R$　　（ 4 ）$R^\circ R^\circ R^\circ R$

解　根据定理 4.12 知，若二元关系 R 是传递的，一定有 $R^\circ R \subseteq R$ 。

由于 $R=R^\circ R^\circ R^\circ R$ ，所以

$$R^\circ R^\circ R=R^\circ R^\circ(R^\circ R^\circ R^\circ R)=(R^\circ R^\circ R)^\circ (R^\circ R^\circ R)$$

于是，R 的三次幂一定是传递的。那么正确答案是（ 3 ）。

例题

例 4.41　设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，那么 A 上有多少个是等价关系？

解由于某集合上的划分与该集合上的等价关系之间是一一对应的关系，所以 A 有多少种划分就有多少个等价关系。以划分中等价类中元素数目分类：

① 等价类中元素最多的只有一个元素的划分只有 1 种；

② 等价类中元素最多的有两个的划分共有 $C_5^3 + C_5^2 \times C_3^2 / P_2^2$ =25 种；

③ 等价类中元素最多的有三个的划分共有 $C_5^3 + C_5^2$ =20 种

④ 等价类中元素最多的有四个的划分共有 C_5^4 =5 种；

⑤ 等价类中元素最多的有五个的划分只有 1 种。

因此，总共的等价关系共有 1+25+20+5+1=52 种。

例题

例 4.42 已知自然数集 N 及 N 上的关系 R 如下，

$R=\{<ni, nj> \mid ni/nj$ 能表示成 2^n 形式， $ni, nj \in N$ ， $n \in Z\}$

试证明 R 是等价关系，并指出等价类是什么。

解：（ 1 ）$\forall\ ni \in N$ ，有 $ni/ni = 1 = 2^0$ ，故 $<ni, ni> \in R$ ，所以 R 是自反的。

（ 2 ）$\forall\ ni, nj \in N$ ，若 $<ni, nj> \in R$ ，即 $ni/nj=2^k$（ k 是整数），所以 $nj/ni=2^{-k}$ ，所以 $<nj, ni> \in R$ ，所以 R 是对称的。

（ 3 ）$\forall\ ni, nj, np \in N$ ，若 $<ni, nj> \in R \wedge <nj, np> \in R$ ，则 $ni/nj=2^{k1} \wedge nj/np=2^{k2}$（ $k1$, $k2$ 是整数），则 $ni/np=2^{k1+k2}$ ，则 $<nj, np> \in R$ ，故 R 是传递的。

总之， R 是 N 上的等价关系，等价类是：

$[1]_R=\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots\}$

$[3]_R=\{3, 3\times2_1, 3\times2^2, \ldots, 3\times2^n, \ldots\}$

$[5]_R=\{5, 5\times2_1, 5\times2^2, \ldots, 5\times2^n, \ldots\}$

例题

例 4.44 图 4.29（ a ）为一偏序集 $<A, R>$ 的哈斯图。

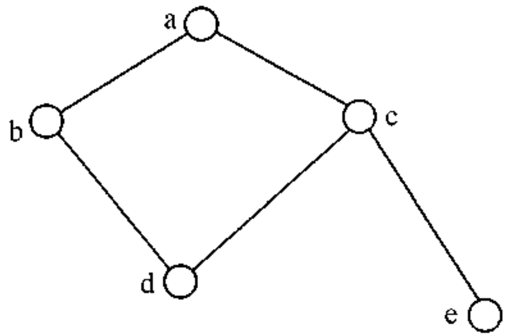
（ 1 ）下列命题哪些为真？

aRb ， dRa ， cRd ， cRb ， bRe ， aRa ， eRa

（ 2 ）恢复 R 的关系图。

（ 3 ）指出 A 的最大、最小元，极大、极小元。

（ 4 ）求出子集 $B1$={c, d, e} ， $B2$={b, c, d, e} ， $B3$={b, c, d, e} 的上、下界，上、下确界。



（a）