第四章　小　结

1 阐述了数学期望、方差的概念及背景，要掌握它们的性质与计算，会求随机变量函数的数学期望和方差。

2 要熟记两点分布、二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布的数学期望与方差。

3 给出了契比雪夫不等式，要会用契比雪夫不等式作简单的概率估计。

4 引进了协方差、相关系数的概念，要掌握它们的性质与计算。

5 要掌握二维正态随机变量的不相关与独立的等价性。

6 给出了矩与协方差矩阵。

作业：　$P_{116-117}$ 25,26,28,30,31,33,34.

返回主目录

第四章　小　结

一、 阐述了数学期望、方差的概念及背景，要掌握它们的性质与计算，会求随机变量函数的数学期望和方差。

1、数学期望：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_k p_k \qquad E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

p_{110}

性质　E(aX+bY)=aEX+bEY

若 X,Y 独立，则 E(XY)=E(X)E(Y)

p_{119}

2、随机变量函数的数学期望

设 Y=g(X), g(x) 是连续函数，

p_{115}

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k \qquad E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$$

返回主目录

若 (X,Y) 是二维随机变量，(x,y) 是二元连续函数，$Z=g(X,Y)$

(1) 若 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$ ，

则 $$\boxed{E(Z)=\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij} \qquad (1.6)}$$

(2). 若 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$,

则 $$\boxed{E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy \qquad (1.5)}$$

$\boxed{p_{116}}$

返回主目录

若二维连续型随机变量（X，Y）的联合密度为 $f(x,y)$，则

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right\}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy$$

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy$$

返回主目录

3、方差　**定义：** $DX = E(X - EX)^2$

计算公式： $DX = E(X-EX)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - EX)^2 \cdot p_i$，**离散型**

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}(x - EX)^2 f(x)dx$$ **连续型。**

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$ $\boxed{p_{122}}$

性质

$$D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2abE(X - EX)(Y - EY),$$

若X，Y独立，则 $D(aX+bY) = a^2DX + b^2DY$ $\boxed{p_{124-125}}$

特别,当X、Y相互独立时，$D(X \pm Y) = DX + DY$。

返回主目录

二、要熟记两点分布、二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布的数学期望与方差。

1. 两点分布

X	0	1
p_k	$1-p$	p

EX=p，

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = pq$$。

2. 二项分布 $X \sim B(n,p)$　$\boxed{EX = np}$　$\boxed{DX = npq}$

3．泊松分布 $X \sim \pi(\lambda)$　$\boxed{EX = \lambda = DX}$

4. 均匀分布 $X \sim U(a,b)$　$\boxed{EX = \frac{a+b}{2}}$　$\boxed{DX = \frac{(b-a)^2}{12}}$

5．正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$　$\boxed{EX = \mu \quad , \quad DX = \sigma^2}$

6. 指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$\boxed{E(X) = \theta \quad , D(X) = \theta^2}$

$\boxed{p_{123-126}}$

返回主目录

三、 给出了契比雪夫不等式，要会用契比雪夫不等式作简单的概率估计。

$$EX = \mu, \quad DX = \sigma^2$$

p_{128}

$$P\{|X-\mu| \quad \varepsilon\} \le \sigma^2/\varepsilon^2$$

$$P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \quad 1-\sigma^2/\varepsilon^2$$

随机变量的标准化：

$$\boxed{Y = (X - EX)/\sqrt{DX}\ ,}$$

p_{123}

称 Y 是随机变量 X 的标准化了的随机变量。

返回主目录

四、 引进了协方差、相关系数的概念，要掌握它们的性质与计算。

1 、协方差及相关系数的定义

协方差定义： COV(X,Y)= E(X-EX)(Y-EY)

特别 COV（X，X）=DX

p_{129}

计算公式：COV（X，Y）=E(XY)- E(X)E(Y)

D(aX+bY)= $a^2DX+b^2DY+2abCOV(X,Y)$

特别 $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2COV(X,Y)$

相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{COV(X,Y)}{\sqrt{DX}.\sqrt{DY}}$

p_{131}

返回主目录

X,Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0 \Leftrightarrow COV(X,Y)=0$

$\Leftrightarrow E(XY)=EXEY \Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$

X ，Y 独立与 X,Y 不相关的关系：

p_{131}

定理：若 X ，Y 独立，则 X,Y 不相关

但是，X ，Y 不相关，不一定有 X ，Y 相互独立。

2、协方差的性质

1) COV(X,Y)=COV(Y,X);

2) COV(aX , bY)=abCOV(X,Y);

p_{129}

3) COV(X+Y,Z)=COV(X,Z)+COV(Y,Z);

返回主目录

3、相关系数的性质

1) $|\rho_{XY}| \le 1$;

2) $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b$, 使 $P\{Y = bX + a\} = 1$

当 $b > 0$ 时，$\rho_{XY} = 1$；　当 $b < 0$ 时，$\rho_{XY} = -1$.

说　明

相关系数是表征随机变量 X 与 Y 之间线性关系紧密程度的量.

当 $|\rho_{X,Y}| = 1$ 时，X 与 Y 之间以概率1存在着线性关系；

当 $|\rho_{X,Y}|$ 越接近于0时，X 与 Y 之间的线性关系越弱；

当 $|\rho_{X,Y}| = 0$ 时，X 与 Y 之间不存在线性关系(不相关).

X 与 Y 之间没有线性关系并不表示它们之间没有关系。

五、 要掌握二维正态随机变量的不相关与独立的等价性。

设(X,Y)服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

则 X ，Y 独立⇔$\rho_{XY}=\rho$ =0⇔X ，Y 不相关。

p_{133}

5、n 维正态分布的性质

p_{136}

1) n维随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 服从n维正态分布 $\Leftrightarrow X_1,\cdots,X_n$ 的任意线性组合 $l_1X_1+\cdots+l_nX_n$ 服从一维正态分布.

2) 若 $(X_1,\cdots,X_n)$ 服从n维正态分布，$Y_1,\cdots,Y_k$ 是 $X_j\ (j=1,\cdots,n)$ 的线性函数，则 $(Y_1,\cdots,Y_k)$ 也服从多维正态分布.

3) 若 $(X_1,\cdots,X_n)$ 服从n维正态分布，则 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow X_1,\cdots,X_n$ 两两不相关.

4) 相互独立的一维 正态随机变量的线性组合服从正态分布

返回主目录

5) n 维 正态随机变量的边缘分布是一维正态分布；反之，若 $X_1,\cdots,X_n$ 服从正态分布，且相互独立，则 $(X_1,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布。

注：1) 若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，

则 $aX+bY \sim N(a\mu_1+b\mu_2, a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$

2) 若 X，Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

则 $aX+bY \sim N(a\mu_1+b\mu_2, a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$

返回主目录

第四章　习题课

例 1　设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$,$Y \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$COV(X,Y)=\frac{1}{8}$，则 X 与 Y 的联合分布为______　。

解： $E(X)=\frac{3}{4}, E(Y)=\frac{1}{2},$

$$E(XY)=COV(X,Y)+E(X)E(Y)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2},$$

$$E(XY)=P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}$$

$$\therefore P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}$$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

返回主目录

例 2　设$X,Y\sim U[0,1]$，且相互独立。

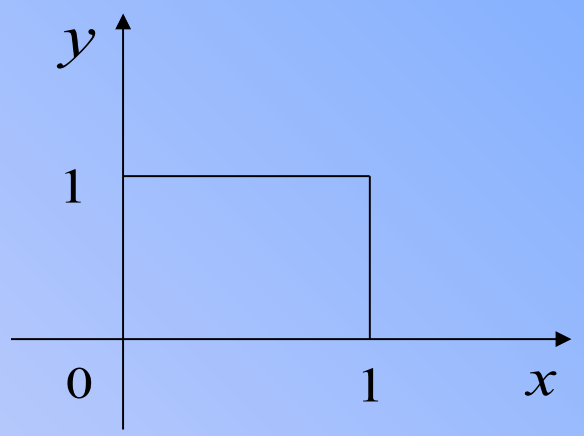
求：$E|X-Y|,D|X-Y|$

解：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

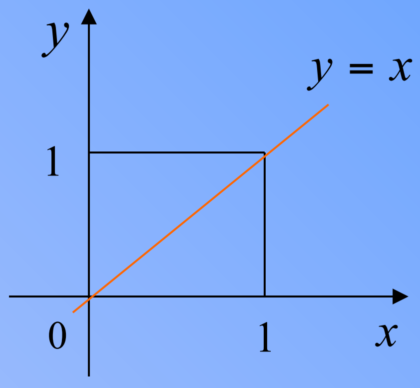
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



例 2 续

$$E|X-Y| = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1|x-y|dxdy$$



$$= \int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy + \int_0^1 dy\int_0^y (y-x)dx$$

$$= 2\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy = 2\int_0^1 (x^2 - \frac{x^2}{2})dx = \frac{1}{3}$$

$$D|X-Y| = E|X-Y|^2 - (E|X-Y|)^2$$

先求：$E|X-Y|^2 =$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^2 f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1|x-y|^2 dxdy$$

例 2（续）

$$=\int_0^1\int_0^1 (x-y)^2 dxdy = \int_0^1\int_0^1 (x^2-2xy+y^2)dxdy = \frac{1}{6}$$

则：$$D|X-Y| = E|X-Y|^2 - (E|X-Y|)^2$$

$$=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$$

思考题：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim N(\mu,\sigma^2)$,且它们独立，

求：$E|X-Y|, D|X-Y|$

例 2’　若 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，

且它们独立，求：$E|X-Y|, D|X-Y|$

分析：$E|X-Y| = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x-y| f(x,y)dxdy$

解：令 $Z = X - Y$，则 $Z \sim N(0, 2\sigma^2)$，

$$E(Z)=0, \quad D(Z)=2\sigma^2, E(Z^2)=2\sigma^2 .$$

$$E|X-Y| = E(|Z|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2\sigma^2}} dz$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2\sigma^2}} dz \qquad = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

返回主目录

例 2’（续）

$$D|X-Y| = E|X-Y|^2 - (E|X-Y|)^2$$

$$= E|Z|^2 - (E|Z|)^2$$

$$= 2\sigma^2(1-\frac{2}{\pi})$$

返回主目录

例 3

将一枚硬币重复抛掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数为

(A) –1,　(B) 0,　(C) $\frac{1}{2}$,　(D) 1

解： $\because X+Y=n$，即 $Y=n-X$

$\therefore b=-1<0$　　$\therefore \rho_{XY}=-1.$

故 (A) 正确。

例 4

设$X \sim B(n,p), E(X)=2.4, D(X)=1.44$

则 $p=$_____，　$n=$_____.

解： $\because \quad E(X)=np, D(X)=np(1-p)$

$\therefore \quad p=0.4, \quad n=6.$

例 5　设$X \sim \pi(\lambda), E[(X-1)(X-2)]=1$

则 $\lambda=$_____.

例 5（续）

$DX = EX^2 - (EX)^2$　　$DX = EX = \lambda$

解：$\because \quad 1 = E(X^2 - 3X + 2)$

$$= E(X^2) - 3E(X) + 2$$

$$= D(X) + E(X)^2 - 3E(X) + 2$$

$$= \lambda + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\therefore \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = 1$$

返回主目录

例 6 设X、Y相互独立，$X \sim N\left(2, \frac{1}{18}\right)$

$Y \sim N\left(3, \frac{1}{8}\right)$，则 $P\{3X < 2Y\} =$ ____ .

解：$\because \quad E(3X - 2Y) = 3E(X) - 2E(Y) = 0$

$$D(3X - 2Y) = 9D(X) + 4D(Y) = 1$$

$$\therefore \quad 3X - 2Y \sim N(0,1)$$

$$\therefore \quad P\{3X < 2Y\} = P\{3X - 2Y < 0\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

返回主目录

例 7

（ 1 ）设随机变量 X 的方差为 2 ，则根据切比晓夫（ Chebyshev ）不等式有估计：

$$P\{|X-\mu| \quad \varepsilon\} \leq \sigma^2/\varepsilon^2$$

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\} \quad 1-\sigma^2/\varepsilon^2$$

$$P\{|X-E(X)| \quad 2\} \leq \frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

（ 2 ）设相互独立的随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2 ，方差分别为 1 和 4 ，则根据切比晓夫（ Chebyshev ）不等式有估计：

$$P\{|X+Y| \quad 6\} = P\{|Z-E(Z)| \quad 6\} \leq \frac{5}{6^2}=\frac{5}{36}$$

令　$Z=X+Y$　则　$E(Z)=E(X)+E(Y)=0$

$$D(Z)=D(X)+D(Y)=1+4=5$$

返回主目录

例 8 将 n 只球 (1~n 号) 随机地放进 n 只盒子 (1~n 号) 中去，
一只盒子装一只球，若一只球装入与球同号的盒子中 ，称为一个配对。记 X 为总的配对数，求 E(X)

解 引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第}i\text{号球装入第}i\text{号盒子中} \\ 0, & \text{若第}i\text{号球未装入第}i\text{号盒子中} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

则总的配对数 X 可表示成

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

可得

$$P\{X_i=1\}=\frac{1}{n}\quad P\{X_i=0\}=1-\frac{1}{n}\quad i=1,2,\cdots,n$$

即有

$$EX_i=\frac{1}{n}\quad i=1,2,\cdots,n$$

于是

$$EX=EX_1+EX_2+\cdots+EX_n$$

$$=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

例 9 若有 n 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁。设取到每只钥匙是等可能的。若把钥匙试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望。（ 1 ）写出 X 的分布律；（ 2 ）不写出 X 的分布律。

解 (1)以$A_k(k=1,2,\cdots,n)$表示事件“第 k次试开是成功的”.$\{X=k\}$表示前$k-1$次所取的钥匙均未能打开门，而第k次所取的钥匙将门打开，则有

$$P\{X=k\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k)$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\times\cdots\times P(A_k\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$$

$$k=1,2,\cdots,n$$

因此

$$EX=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n-1}{2}$$

(2)引入随机变量X_k如下：

$$X_1=1$$

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{前}k-1\text{次试开均未成功}\\ 0 & \text{前}k-1\text{次中有一次试开成功}\end{cases}\text{，}k=2,3,\cdots,n$$

则

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

沿用（ 1 ）中的记号，则有 $EX_1=1$

$$EX_k=1\times P(X_k=1)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)\times\cdots\times P(\overline{A}_{k-1}\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-2})$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}=\frac{n-k+1}{n}$$

故有

$$EX = 1 + \sum_{k=2}^{n} E(X_k)$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n-k+1}{n}$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

例 10 设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 P(A)>0 ，P(B)>0 ，并定义随机变量 X ， Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & 若A发生\\ 0, & 若A不发生\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & 若B发生\\ 0, & 若B不发生\end{cases}$$

证明若$\rho_{XY}=0$，则X和Y必定相互独立。

解 X ，Y 的边缘分布列为

X	0	1
p_k	$P(\overline{A})$	P(A)

Y	0	1
p_k	$P(\overline{B})$	P(B)

由 X ，Y 的定义，XY 只能取 0 ，1 两个值。且 P{XY=1}=P(X=1, Y=1)=P(AB) ，于是得 XY 的分布律为

XY	0	1
p_k	$1-P(AB)$	P(AB)

即得

$$EX=P(A),\ EY=P(B),\ E(XY)=P(AB)。$$

由假设$\rho_{XY}=0$，得$E(XY)=EX\cdot EY$，即

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

故知A和B相互独立，从而知A和$\overline{B}$、$\overline{A}$和B、$\overline{A}$和$\overline{B}$也是相互独立。

于是

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=P(A)P(B)$$

$$=P\{X=1\}P\{Y=1\}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$$

$$=P\{X=1\}P\{Y=0\}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=1\}$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

例 11 假设一部机器在一天内发生故障的概率是 0.2 ，机器发生故障时全天停止工作。若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生两次故障所获利润 0 万元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求一周内期望利润是多少？

解 设 X 表示一周 5 天内机器发生故障的天数，则 X~B(5, 0.2)。

$$P(X=k)=C_5^k\times 0.2^k\times 0.8^{5-k}$$

可得

$$P(X=0)=0.8^5=0.328$$

$$P(X=1)=C_5^1\cdot 0.2\cdot 0.8^4=0.410$$

$$P(X=2)=C_5^2\times 0.2^2\times 0.8^3=0.205$$

$$P(X\quad 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=0.057$$

以 Y 表示所获利润，则利润表达式为

$$Y=f(X)=\begin{cases}10, & X=0\\ 5, & X=1\\ 0, & X=2\\ -2, & X\quad 3\end{cases}$$

期望利润

$$EY=10\times 0.328+5\times 0.410+0\times 0.205-2\times 0.057$$

$$=5.216(\text{万元})$$

例 12　设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对X独立地重复观察4次。用Y表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求Y^2的数学期望。

$$DY=EY^2-(EY)^2$$

分析：$p=P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\pi/3}^{\infty}f(x)dx$

$$Y\sim B(4,p)\quad E(Y)=4p,\ D(Y)=4pq$$

返回主目录

例 12

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

解：

$$p=P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\pi/3}^{\infty}f(x)dx$$

$$=\int_{\pi/3}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\pi/3}^{\pi}=\frac{1}{2}$$

$$Y\sim B(4,\frac{1}{2})\qquad E(Y)=2,\ D(Y)=1$$

$$EY^2=D(Y)+(EY)^2=5$$

返回主目录

例 13　设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 [10 ，30] 上的均匀分布的随机变量，而经销商店进货的数量为区间 [10 ，30] 中的整数，商店每销出一单位商品可得利润 500 元；若供大于求，则削价处理，每处理一单位商品亏损 100 元；若供不应求，商店可从外部调剂供应，每单位商品仅获利润 300 元。为使商店所获利润不小于 9 280 元，试确定最少进货的数量。

分析：设 y 为经销商店的进货量，Z 为商店所获利润，

第一步：确定利润 Z 与需求量 X 、进货量 y 的关系；

第二步：固定 y ，求 $E(Z)$；

第三步：求 y ，使 $E(Z) \geq 9280$.

返回主目录

例 12

解：设 y 为经销商店的进货量 $10 \le y \le 30$，

Z 为商店所获利润，

$$Z = g(X) = \begin{cases} 500y + 300(X - y), & X \quad y \\ 500X - 100(y - X), & X < y \end{cases}$$

$$Z = g(x) = \begin{cases} 200y + 300x, & x \quad y \\ 600x - 100y, & x < y \end{cases}$$

返回主目录

（例 13 续） $Z = g(x) = \begin{cases} 200y + 300x, & x \quad y \\ 600x - 100y, & x < y \end{cases}$

$10 \le y \le 30$

$X \sim U[10,30]$

X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, 10 \le x \le 30 \\ 0, \qquad 其它; \end{cases}$

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{10}^{y} \frac{600x - 100y}{20} dx + \int_{y}^{30} \frac{200y + 300x}{20} dx$$

$$E(Z) = -7.5y^2 + 350y + 5250 \quad 9280$$

$$20\frac{2}{3} \le y \le 26,$$

故最少进货量为 21 。

例 14 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 [10 ，20] 上的均匀分布的随机变量，经销商店进货的数量也是服从区间 [10 ，20] 上的均匀分布的随机变量，且 X ，Y 相互独立。商店每销出一单位商品可得利润 1000 元；若供不应求，商店可从外部调剂供应，每单位商品仅获利润 500 元。试求商店所获利润的期望值。

分析：Z 为商店所 利润，
第一步：确定利润 Z 与需求量 X 、进货量 Y 的关系；
第二步：求 E（ Z ）；

返回主目录

例 1

解： Z 为商店所获利润，

$$Z = g(X,Y) = \begin{cases} 1000Y + 500(X - Y), & X \quad Y \\ 1000X, & X < Y \end{cases}$$

$$Z = g(x.y) = \begin{cases} 500y + 500x, & x \quad y \\ 1000x, & x < y \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}, & 10 \le x \le 20 \\ 0, & \text{其它}; \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}, & 10 \le y \le 20 \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$$

返回主目录

（例 14 续）

$$Z = g(x.y) = \begin{cases} 500y + 500x, & x \quad y \\ 1000x, & x < y \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}, & 10 \le x \le 20, 10 \le y \le 20 \\ 0, & \text{其它；} \end{cases}$$

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$$

$$= \int_{10}^{20} dx \int_{10}^{x} \frac{500y + 500x}{100} dy + \int_{10}^{20} dx \int_{x}^{20} \frac{1000y}{100} dy = 14166.67$$

例 15 设二维随机变量 (X, Y) 服从矩形

$$D=\{(x,y):0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$$

上的均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0 & X\le Y\\ 1 & X>Y\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0 & X\le 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases}$$

试求U与V的相关系数ρ，并判断U与V是否相互独立？

解 由题意知，(X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 2,0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以，

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=P\{\Phi\}=0$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y\le X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=1,V=1\}=1-\frac{1}{4}-0-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

(U, V) 的联合分布律及各自的边缘分布律为

V / U	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.25	0	0.25
1	0.25	0.5	0.75
$p_{\cdot j}$	0.5	0.5	

所以，

$$EU=\frac{3}{4}, DU=\frac{3}{16}, EV=\frac{1}{2}, DV=\frac{1}{4}, E(UV)=\frac{1}{2}$$

因此，

$$\operatorname{cov}(U,V)=E(UV)-EU\cdot EV=\frac{1}{8}$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{DU}\cdot\sqrt{DV}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

由于$\rho\neq 0$，所以U与V相关，从而U与V不独立。

例 16 袋中有 n 张卡片，号码分别为 1,2, …,n ，从中有放回抽出 k 张卡片来，求所得号码之和的数学期望。

解 设X =“所得号码之和”； X_i =“抽出第 i张卡片的号码”

则$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$

X_i的所有可能取值为$1,2,\cdots,n$ ，

$$P(X_i = j) = \frac{1}{n} \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$E(X_i) = \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \qquad i = 1,2,\cdots,k$$

所以，

$$EX = \sum_{i=1}^{k} EX_i = \frac{k(n+1)}{2}.$$

例 17

用某台机器生产某种产品，已知正品率随着该机器所用次数的增加而指数下降，即

P{ 第 k 次生产出的产品是正品 }$=e^{-\lambda k}, k=1,2,\cdots,\lambda>0.$

假设每次生产 100 件产品，试求这台机器前 10 次生产中平均生产的正品总数。

解 :设 X 是前 10 次生产的产品中的正品数，并设 X_k 表示第 k 次生产的100件产品中的正品数

$k=1,2,\cdots,10,$ 则

$$X=\sum_{k=1}^{10} X_k$$

返回主目录

例 17（续）

而 X_k 服从参数为 $(100, e^{-\lambda k})$ 的二项分布，

$E(X_k) = 100e^{-\lambda k}$. $k = 1,2,\cdots,10$, 所以

$$E(X) = \sum_{k=1}^{10} EX_k = 100\sum_{k=1}^{10} e^{-k\lambda}$$

$$= \frac{100e^{-\lambda}(1-e^{-10\lambda})}{1-e^{-\lambda}}$$

例 18

对产品进行抽样，只要发现废品就认为这批产品不合格，并结束抽样。若抽样到第 n 件仍未发现废品则认为这批产品合格。

假设产品数量很大，抽查到废品的概率是 p ，试求平均需抽查的件数。

解 :设 X 为停止检查时，抽样的件数，则 X 的可能取值为 1,2,…,n ，且

$$P\{X=k\}=\begin{cases} q^{k-1}p, & k=1,2,\cdots,n-1; \\ q^{n-1}, & k=n. \end{cases}$$

其中$q=1-p$，于是

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}p+nq^{n-1}$$

返回主目录

例 18（续）

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}(1-q)+nq^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k}+nq^{n-1}$$

$$=(1+2q+3q^2+\cdots+(n-1)q^{n-2})-$$

$$-(q+2q^2+\cdots+(n-2)q^{n-2}+(n-1)q^{n-1})+nq^{n-1}$$

$$=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$$

$$=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-(1-p)^n}{p}$$

例 19 (1) 设 X,Y 独立，$X\sim N(1,4), Y\sim N(2,9)$,

求 :$2X-Y$ 的分布；

(2) 若 $(X,Y)\sim N(1,2,4,9,\frac{1}{2})$, 即 $X\sim N(1,4), Y\sim N(2,9)$

且 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$,　　求 :$2X-Y$ 的分布；

解：(1)　$E(2X-Y)=2EX-EY=0$

$$D(2X-Y)=4DX+DY=4\times 4+9=25$$

则 :$2X-Y\sim N(0,25)$

(2)　$D(2X-Y)=4DX+DY-2\times 2COV(X,Y)$

$$=25-4\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=25-4\times\frac{1}{2}\times 2\times 3=13$$

则 :$2X-Y\sim N(0,13)$

返回主目录

例20

设随机变量 $X \sim N(0,\ \sigma^2)$，试求 $E(X^n)$．

解：

令：$Y = \dfrac{X - EX}{\sqrt{DX}} = \dfrac{X}{\sigma}$　　则　$Y \sim N(0,\ 1)$．

所以，

$$E(X^n) = \sigma^n E(Y^n) = \sigma^n \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f_Y(y)dy = \frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

(1)．当n为奇数时，由于被积函数是奇函数，所以

$$E(X^n) = 0 .$$

返回主目录

(2)．当n为偶数时，由于被积函数是偶函数，所以

$$EX^n=\frac{2\sigma^n}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}y^n e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

令：$\frac{y^2}{2}=t$, **则**　$y=\sqrt{2}\sqrt{t}$,

$$dy=\frac{\sqrt{2}}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=2^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

其中　$\Gamma(t)=\int_0^{\infty}x^{t-1}e^{-x}dx.$

$$EX^n=\frac{2\sigma^n}{\sqrt{2\pi}}2^{\frac{n}{2}-1}\int_0^{+\infty}t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t}dt$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\frac{\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-t}dt=2^{\frac{n}{2}}\frac{\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

返回主目录

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

利用$\Gamma-$函数的性质：$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$，得

$$E\left(X^n\right)=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\pi}=\sigma^n(n-1)!!$$

返回主目录

因而，

$$E\left(X^n\right)=\begin{cases}\sigma^n(n-1)!! & n\text{为偶数}\\ 0 & n\text{为奇数}\end{cases}$$

其中，

$$n!!=\begin{cases}1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot n & n\text{为奇数}\\ 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot n & n\text{为偶数}\end{cases}$$

特别，若 $X\sim N(0,\ 1)$，则

$$E\left(X^n\right)=\begin{cases}(n-1)!! & n\text{为偶数}\\ 0 & n\text{为奇数}\end{cases},\quad n=4\text{时},\quad EX^4=3.$$

例 21 设随机变量X的分布律为$P\{X=(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}\}=\frac{2}{3^j}, \quad j=1,2,\cdots$，说明$X$的数学期望不存在。

解：只需证明$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|p_j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{j}=+\infty$。

设$S_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$，假设$\lim_{n\to\infty}S_n=a<+\infty$，则有$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=a$.

而

$$|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

矛盾。因此随机变量 X 数学期望不存在。