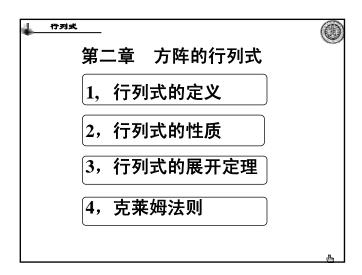
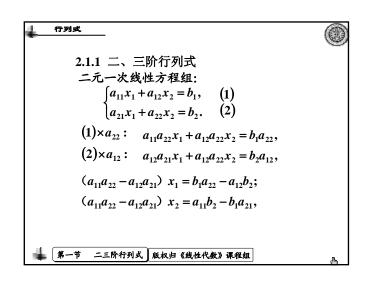
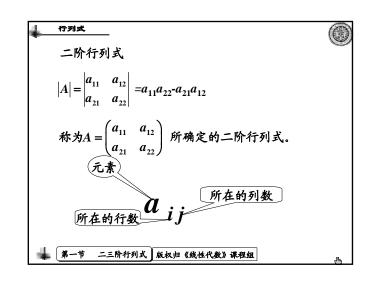
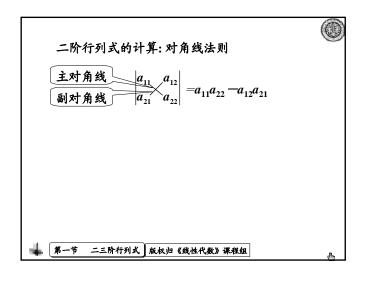
第二章 行列式

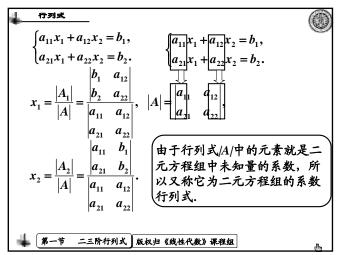


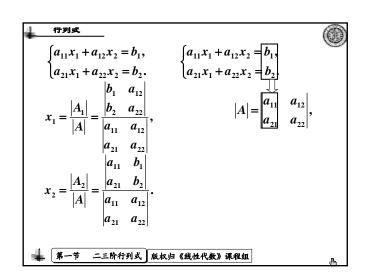
★ 行列式
 第一节 行列式的定义
 ② 二、三阶行列式
 ② 排列与逆序
 ② n 阶行列式

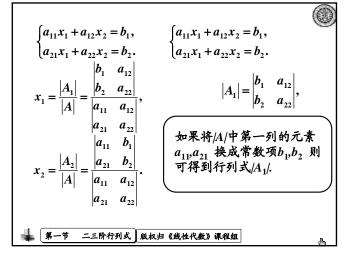


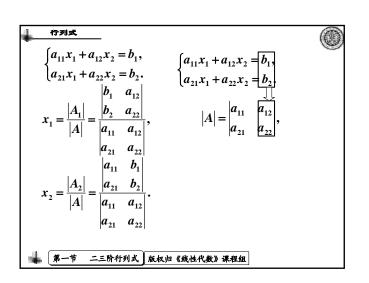


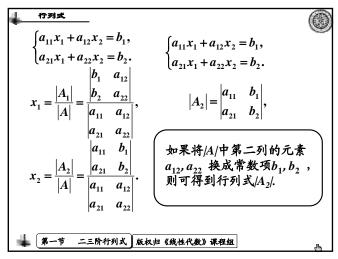




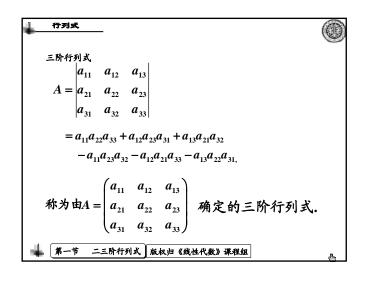


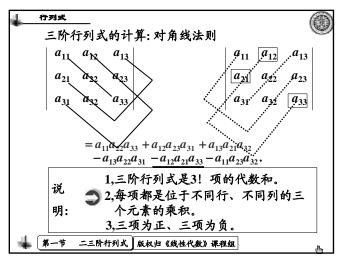


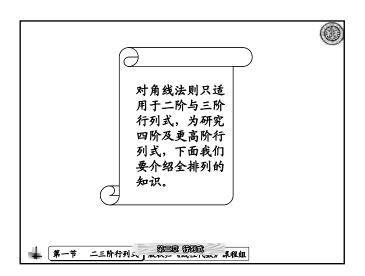


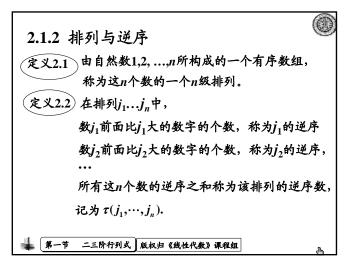


第二章 方阵的行列式









例1 求排列32514的逆序数.

解 在排列32514中,

3排在首位,逆序数为0;

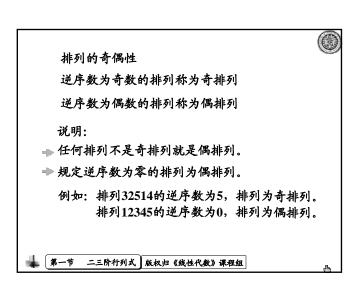
2的前面比2大的数只有一个3,故逆序数为1;

5的前面没有比5大的数,其逆序数为0;

1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;

4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1;

所以排列32514的逆序数为5。



对换的定义

(定义2.3)在一个排列中,某两个数互换位置,其 余的数不动,就得到一个新排列,这样 的对换称为一个对换。若对换的两个数 相邻,则称为相邻对换。

例如

第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

对换与排列的奇偶性的关系:

定理2.1 对换改变排列的奇偶性。

 $a_1 \cdots a_l \ ab \ b_1 \cdots b_m \longrightarrow a_1 \cdots a_l \ ba \ b_1 \cdots b_m$ 除a.b 外,其它元素的逆序数不改变. 当a < b时,

> 经对换后 a 的逆序数 增加1.b的逆序数不变: 当a > b时,

经对换后 a 的逆序数不变, b的逆序数减少1. 因此对换相邻两个元素,排列改变奇偶性.

🛓 第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

设排列为 $a_1\cdots a_n\underline{a}b_1\cdots b_m\underline{b}c_1\cdots c_n$ 素,排列改变奇 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$

对换相邻两个元

m 次相邻对换 $a_1 \cdots a_l$ $ab \ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$

m+1 次相邻对换 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$

 $\therefore a_1 \cdots a_l ab_1 \cdots b_m bc_1 \cdots c_n$

2m+1次相邻对换 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$,

▲ 第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

定理2.1 对换改变排列的奇偶性。

★ 推论2.1: 奇排列经过奇数次对换可变成自然排列; 偶排列经过偶数次对换可变成自然排列;

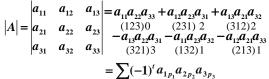
证明: 对换改变排列的奇偶性,

对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,

自然排列是偶排列, 所以结论成立。

▲ 第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

2.1.3 n阶行列式



说明:

1,三阶行列式共有6项,即3!项。

2.每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

3,三项为正、三项为负。

🕌 第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

式的定义:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}.$$

其中 $P_1P_2P_3$ 为1, 2, 3三个数的某个排列。 t为的P₁P₂P₃逆序数。

类似地,我们引出n阶行列式的定义。

🗼 [第一节 二三阶行列式]版权归《线性代数》课程组

第二章 方阵的行列式

n阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(a_{ij})$ 为方阵A的行列式,也称为n阶行列式。

n阶行列式是一个数,其值按如下代数式运算: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 其中,和号是对所有的n级排列求和(共n!项)。

说明:

1, n阶行列式是n!项的代数和;

2, n阶行列式的每项都是位于不同行, 不同列的 n个元素的乘积。

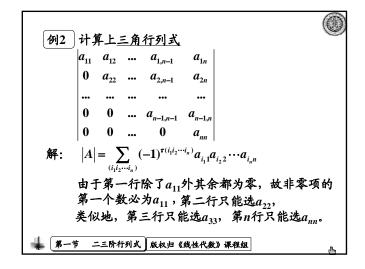
3、每项的行标排列为标准排列,正负号都取决于 列标排列的逆序数。

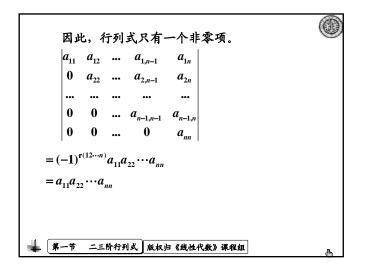
▲ 第一节 二三阶行列式 版权归《线性代数》课程组

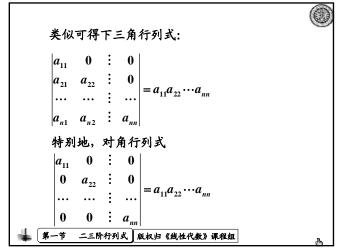
请问: 一阶行列式|a|与绝对值|a|是否相等?
答: 一阶行列式与绝对值记号含义不同;
一阶行列式: |-5|=-5
绝对值: |-5|=5

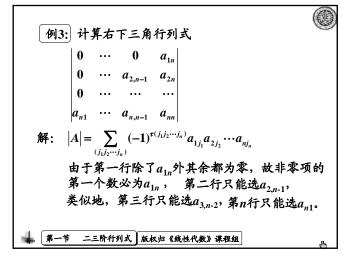
定理2. 2: n 所方阵A 的行列式可定义为 $|A| = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$ 其中t 为行标排列的逆序数。 证明: n 所行列式的定义为 $|A| = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

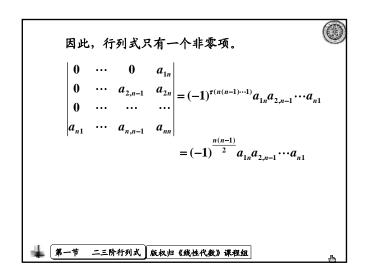
对于行列式的任意一项 $(-1)^{\mathfrak{r}(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 将其元素做r次对换,化为 $(-1)^{\mathfrak{r}(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ 此时,列标排列由 $j_1j_2\cdots j_n$ 变为自然排列;同时行标排列由自然排列变为 $i_1i_2\cdots i_n$ 。由于列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数与对换次数r有相同的奇偶性,行标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数与对换次数r有相同的奇偶性,于是



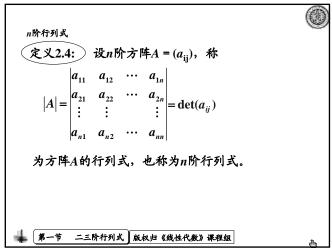






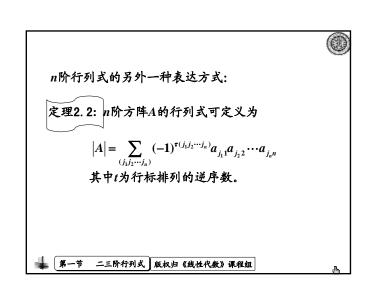






说明:
1、 n 阶行列式是 n! 项的代数和;
2、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个 元素的乘积;
3、每项的行标排列为标准排列,正负号都取决于列 标排列的逆序数。

■ 第一节 二三阶行列式 版权归《做性代数》课程组

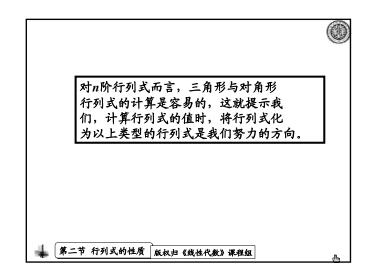


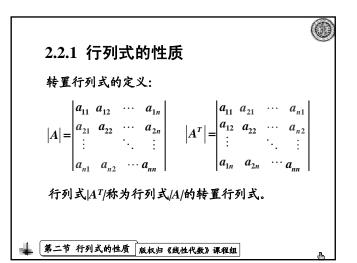
作业:
习题2.1A: 3,5,6
习题2.1B: 1,3
预习行列式的性质

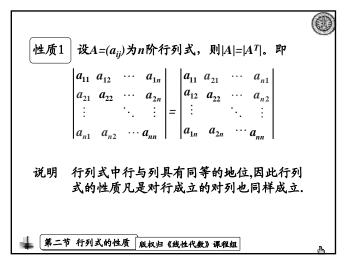
第二章 方阵的行列式

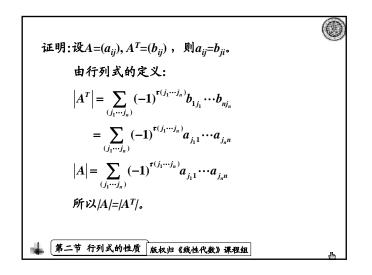
第二节 行列式的性质

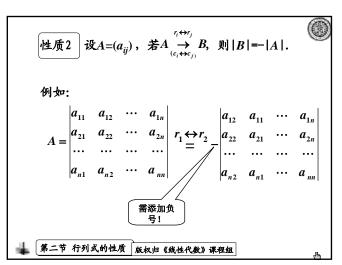
- 🤏 行列式的性质
- 🤏 应用举例

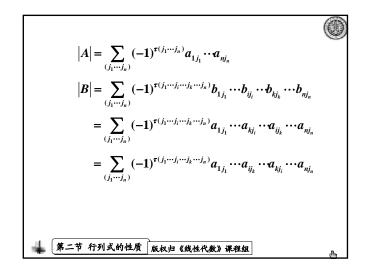




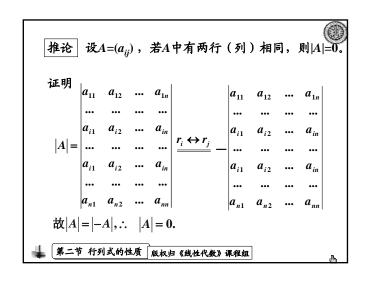


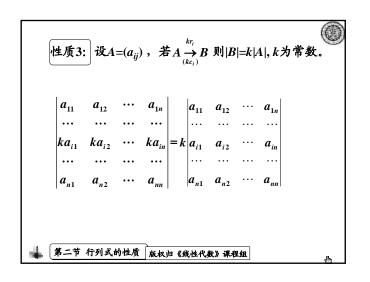


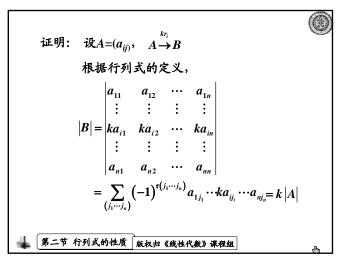




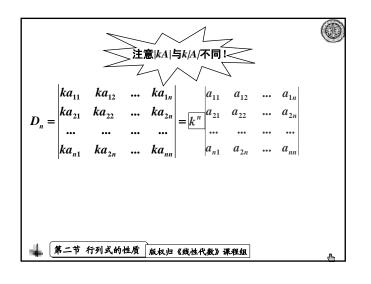
因为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} = -(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}$ 所以 $|B| = \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$ $= -\sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$ = -|A| = -|A| 第二节 行列式的性质 版权归《线性代数》课程组

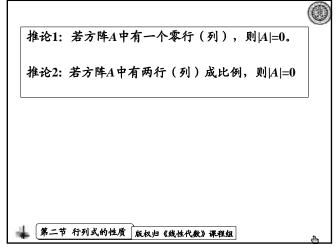


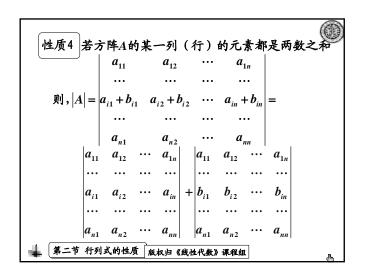




第9页, 共28页 第二章 方阵的行列式







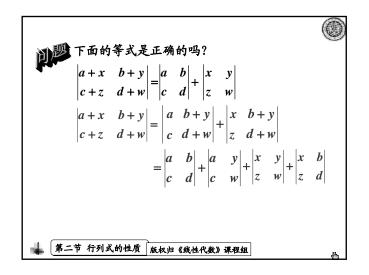
$$|A| = \sum_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\mathsf{r}(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

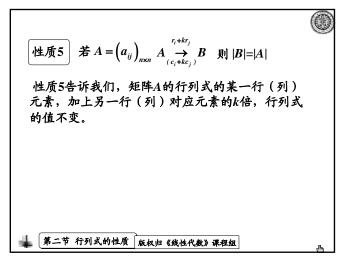
$$= \sum_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\mathsf{r}(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$+ \sum_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\mathsf{r}(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

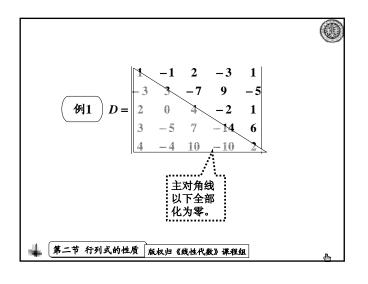
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

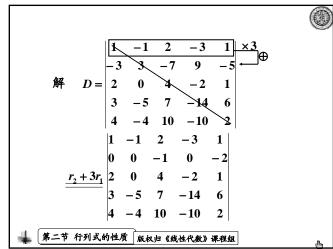
$$\implies (第二节 行列式的性质 版权归《级性代数》课程组)$$

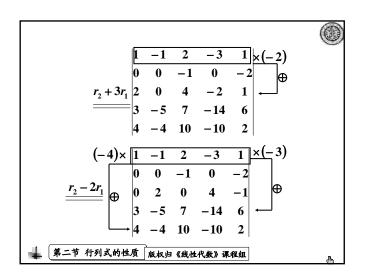


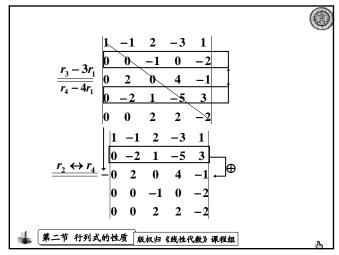


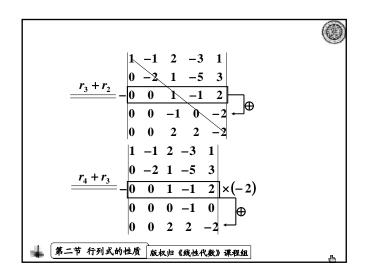
第10页, 共28页 第二章 方阵的行列式

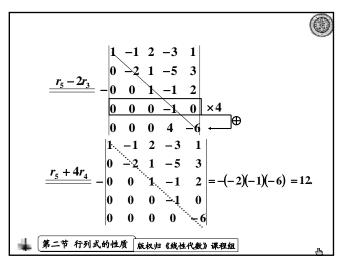












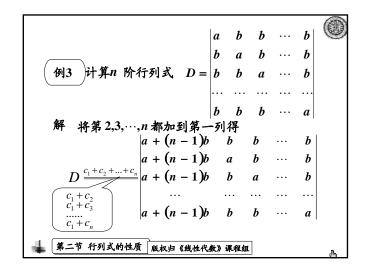
第11页, 共28页 第二章 方阵的行列式

评注 本题利用行列式的性质,采用"化零"的方法,逐步将所给行列式化为三角形行列式. 化零时一般尽量选含有1的行(列)及含零较多的行(列);若没有1,则利用行列式性质将某行(列)中的某数化为1;若所给行列式中元素间具有某些特点,则应充分利用这些特点,应用行列式性质,以达到化为三角形行列式之目的.

第二节 行列式的性质 版权归《线性代数》课程组



方法二: $\begin{vmatrix} a+d & d+g & g \\ b+e & e+h & h \\ c+f & f+l & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d+g & g \\ b & e+h & h \\ c & f+l & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d+g & g \\ e & e+h & h \\ f & f+l & l \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & g & g \\ f & f+l & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d & g \\ f & f+l & l \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & g & g \\ f & l & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d & g \\ e & e & h \\ f & f & l \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$



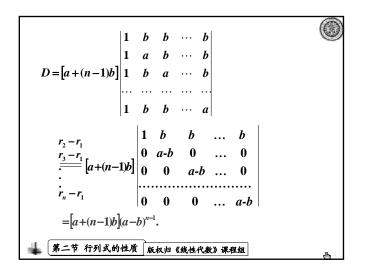
$$D = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ & & & & & & & \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + (n-1)b \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + (n-1)b \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b & a & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 + (n-1)b \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b & a & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 + (n-1)b \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b & a & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$



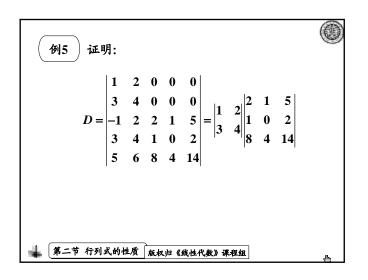
证明:
$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$
 (其中 n 为奇数)
$$|A^T| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

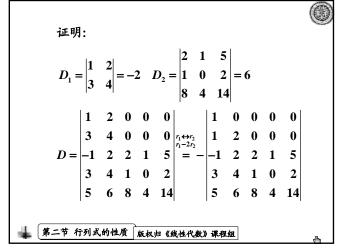
$$\begin{vmatrix} A^T | = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n |A|$$

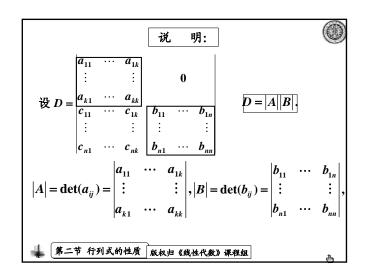
$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

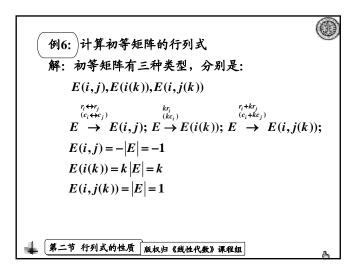
$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

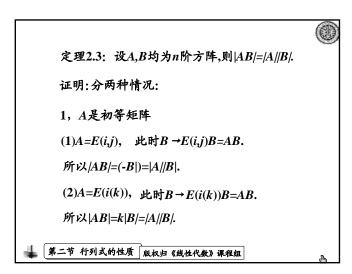


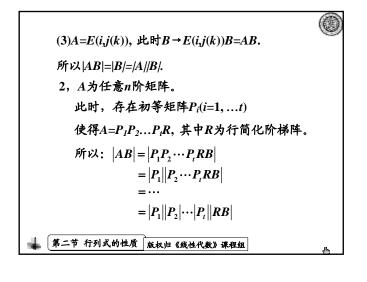


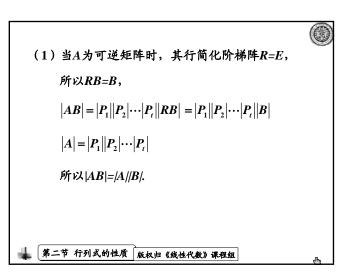
第13页, 共28页 第二章 方阵的行列式







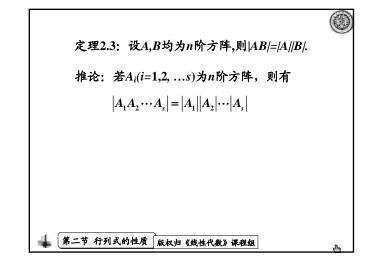




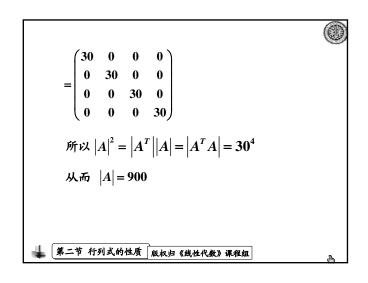
(2) 当A为不可逆矩阵时,其行简化阶梯阵R有零行, 所以RB有零行,故|R|=|RB|=0。

$$ig|ABig|=ig|P_1ig|ig|P_2ig|\cdotsig|P_tig|Big|=0$$
 $ig|Aig|=ig|P_1ig|P_2ig|\cdotsig|P_tig|Big|=0$ Figure $ABig|=A/B/B$.

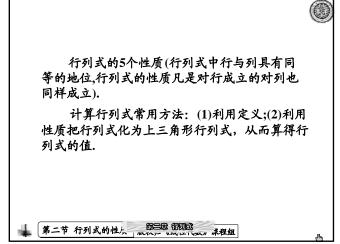
▲ 第二节 行列式的性质 成权归《线性代数》课程组



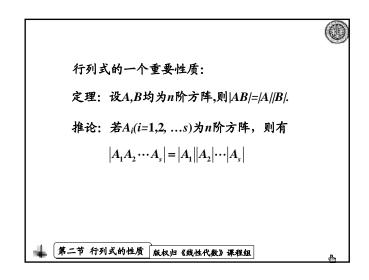
例7 $\partial A = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 \\
-2 & 1 & 4 & -3 \\
-3 & -4 & 1 & 2 \\
-4 & 3 & -2 & 1
\end{pmatrix}$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
1 & -2 & -3 & -4 \\
2 & 1 & -4 & 3 \\
3 & 4 & 1 & -2 \\
4 & -3 & 2 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 \\
-2 & 1 & 4 & -3 \\
-3 & -4 & 1 & 2 \\
-4 & 3 & -2 & 1
\end{pmatrix}$ $\blacksquare \quad A^T A = \begin{pmatrix}
1 & -2 & -3 & -4 \\
2 & 1 & -4 & 3 \\
-3 & 4 & 1 & 2 \\
-4 & 3 & -2 & 1
\end{pmatrix}$ $\blacksquare \quad A^T A = \begin{pmatrix}
1 & -2 & -3 & -4 \\
2 & 1 & -4 & 3 \\
-3 & -4 & 1 & 2 \\
-4 & 3 & -2 & 1
\end{pmatrix}$

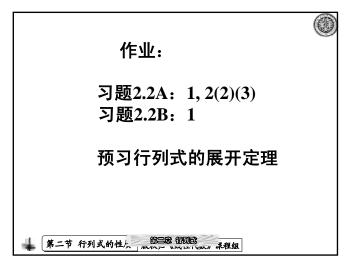






第二章 方阵的行列式





第 17 页, 共 28 页



第三节 行列式的展开定理

- □ 行列式按一行(列)展开
- □ 伴随矩阵与矩阵求逆



2.3.1 行列式按一行(列)展开

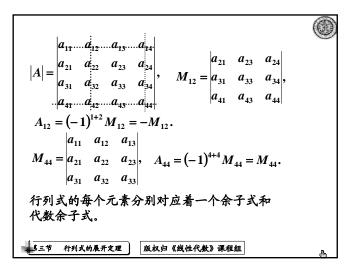
定义2.5

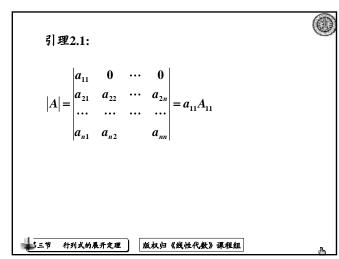
在n阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第i行和第j列划去后,剩下的元素按原来的相对位置排列,形成的n-1阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} .

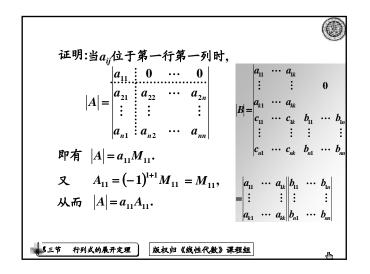
$$A_{ii} = (-1)^{i+j} M_{ii}$$
, 叫做元素 a_{ii} 的代数余子式.

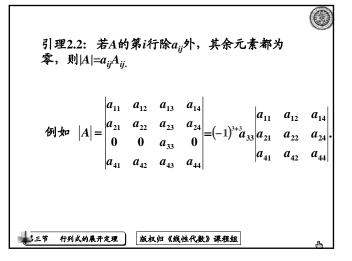
3三节 行列式的展开定理

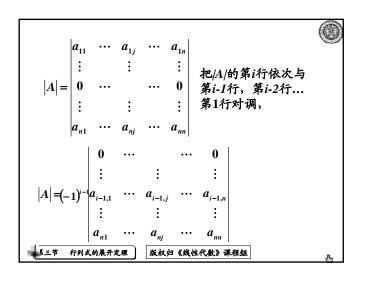
版权归《线性代数》课程组

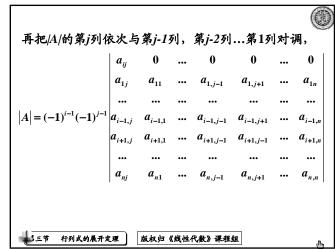








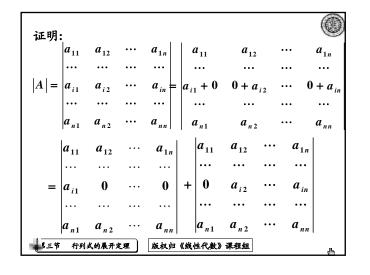


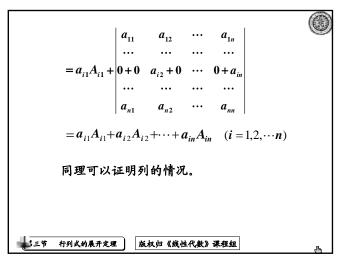


所以 $|A|=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$ 引理2.2: 一个n阶行列式,如果其中第i行所有 元素除 a_{ij} 外都为零,那末这行列式等于 a_{ij} 与它的 代数余子式的乘积。

版权归《线性代数》课程组

定理2. 4: 设 n 所矩阵 $A=(a_{ij})$,则A 的行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即 $|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$ $|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$





推论 设n阶矩阵 $A=(a_{ii})$,则A的行列式等于某 一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的 代数余子式乘积之和等于零,即

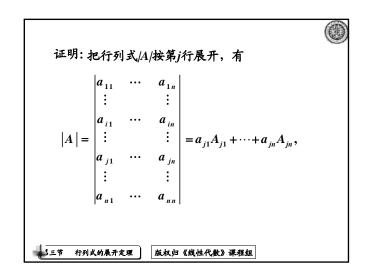
$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, i = j. \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} |A|, i = j. \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

$$0, i \neq j.$$

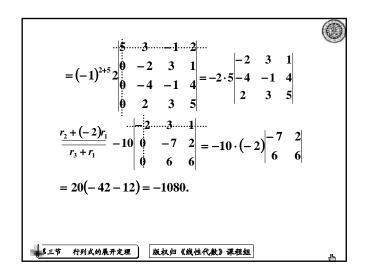
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} |A|, i = j. \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

真三节 行列式的展开定理 版权归《线性代数》课程组



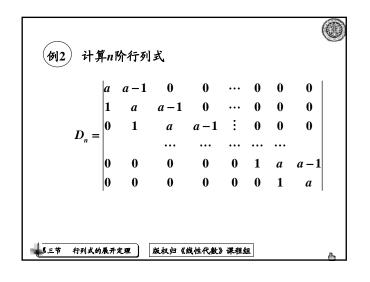
当
$$a_{jk}=a_{ik}(k=1,...,n)$$
时,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn} & = \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{in} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$
当 $i\neq j$ 时,
$$\begin{vmatrix} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn} & = 0, \\ a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn} & = 0, \end{vmatrix}$$
同理可证明列的情况。



评注 本题是利用行列式的性质将所给行列 式的某行(列)化成只含有一个非零元素,然后 按此行(列)展开,每展开一次,行列式的阶数 可降低1阶,如此继续进行,直到行列式能直接 计算出来为止(一般展开成二阶行列式). 这种 方法对阶数不高的数字行列式比较适用. ★3三节 行列式的展开定理 版权归《线性代数》课程组

第二章 方阵的行列式 第 19 页, 共 28 页



解:按第一行展开,得
$$D_n = aD_{n-1} - (a-1)D_{n-2}$$
 等号两端减 D_{n-1} ,得
$$D_n - D_{n-1} = (a-1)D_{n-1} - (a-1)D_{n-2}$$
 这是一个关于 $D_n - D_{n-1}$ 的递推公式,反复 使用递推公式,得:
$$D_n - D_{n-1} = (a-1)(D_{n-1} - D_{n-2})$$
 …
$$= (a-1)^{n-2}(D_2 - D_1)$$
 版权归《线性代数》课程组

因为
$$D_2 = \begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a + 1$$

$$D_1 = a, \quad D_2 - D_1 = (a-1)^2$$

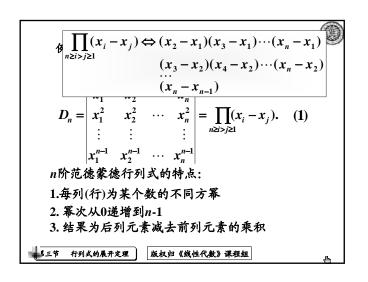
$$\therefore \quad D_n - D_{n-1} = (a-1)^{n-2}(D_2 - D_1)$$

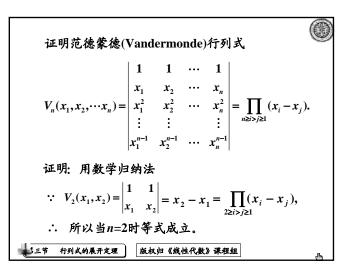
$$= (a-1)^n$$

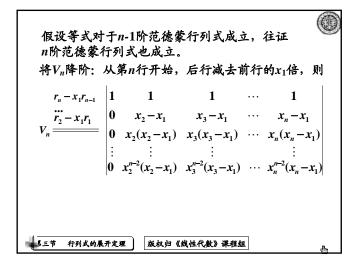
$$\therefore \quad D_n = D_{n-1} + (a-1)^n$$

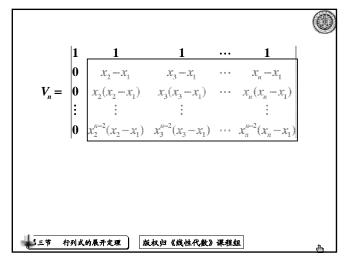
$$= D_{n-2} + (a-1)^{n-1} + (a-1)^n \cdots$$

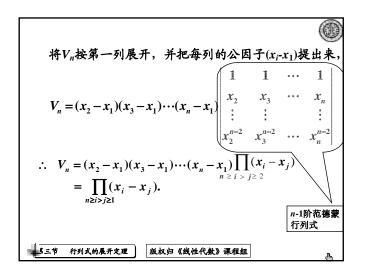
$$= a + (a-1)^2 + \cdots + (a-1)^{n-1} + (a-1)^n$$

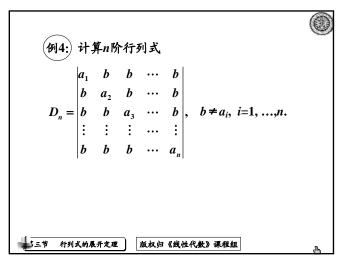


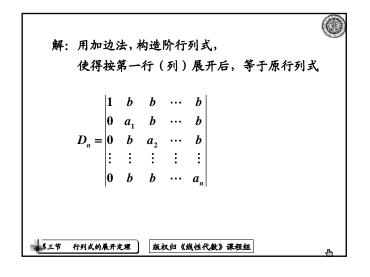


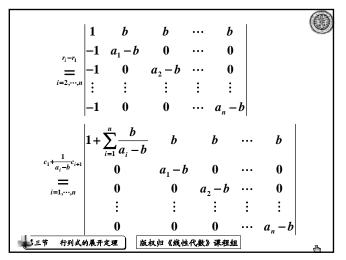


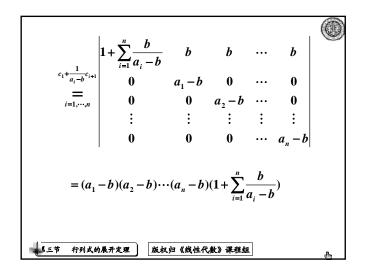


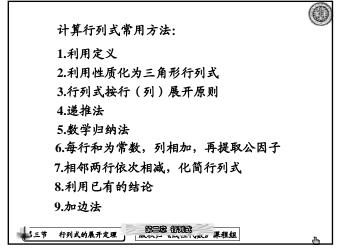


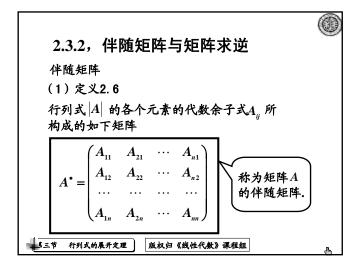


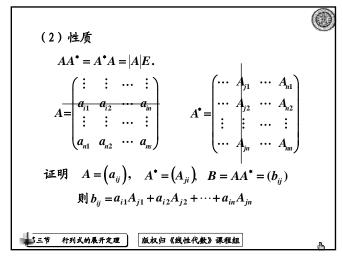


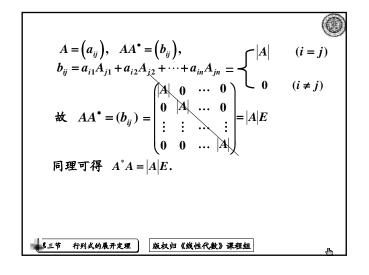


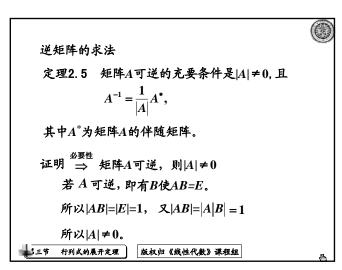




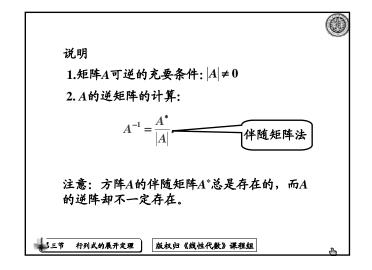




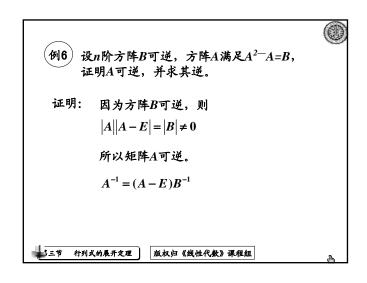


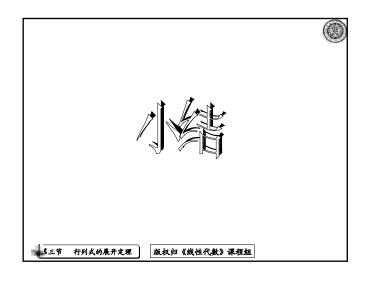


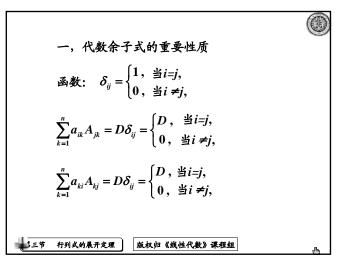
 $\frac{\pi \beta \gamma \psi}{\Leftarrow}$ \Leftarrow $E |A| \neq 0, \quad M$ 矩阵A 可 $E |A|^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$ $AA^* = A^*A = |A|E$ $\therefore |A| \neq 0,$ $\frac{AA^*}{|A|} = \frac{A^*A}{|A|} = \frac{|A|E}{|A|}$ 即 $A\frac{A}{|A|} = \frac{A}{|A|} A = E,$ 按 逆 矩 阵 的 定 义 得 $A^{-1} = \frac{A}{|A|}.$

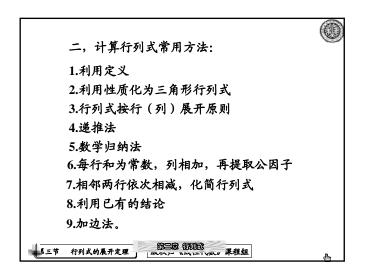


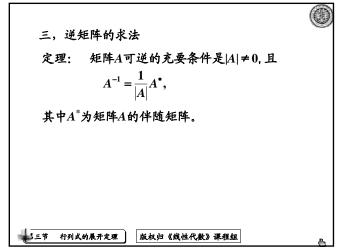
例5: 判断下列矩阵是否可逆,若可逆,求其逆矩阵。 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 解: 由于|A|=0; |B|=-2,故A不可逆,B可逆。 $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

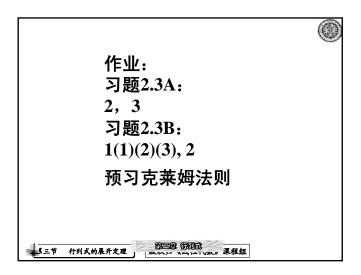












第四节 克莱姆(Cramer)法则

定理2.6(克莱姆法则) 设有n元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots & (简记为Ax=b) \end{cases}$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n$$

当系数行列式D不为零时,方程组有唯一解:

$$x_j = \frac{D_j}{D}, 1 \le j \le n$$

其中 D_j 是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式.

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

第二年 行列式

证明: 若D= | A | ≠0,矩阵A可逆;

此时方程组有唯一解:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{D}A^*b$$
 其中 A^* 为伴随矩阵
$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^n A_{ij}b_i}{D} = \frac{D_j}{D}(1 \le j \le n)$$

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

说 明

- 1. 用克莱姆法则解方程组的两个条件
- (1)方程个数等于未知量个数;
- (2) 系数行列式不等于零.
- 克莱姆法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系。它主要适用于理论推导。

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

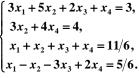
第 25 页, 共 28 页

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
(1)

定理2.7 如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零.

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

例1 用克莱姆法则解方程组



 $M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 67 \neq 0,$

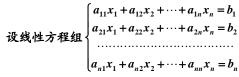
第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

第二章 方阵的行列式

1

 $\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{2}, \ x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$

非齐次与齐次线性方程组的概念



若常数项 $b_1 \dots b_n$ 不全为零,则称此方程组为非 齐次线性方程组:

若常数项 $b_1...b_n$ 全为零, 此时称方程组为齐 次线性方程组.

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

齐次线性方程组的相关定理

第四节 克莱姆(Cramer)法则 版权归《线性代数》课程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$(2)$$

定理2.8 如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 D≠0则齐次线性方程组 (2)没有非零解.

定理2.9 如果齐次线性方程组(2)有非零解,则它 的系数行列式必为零.

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

例2) 给定齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = 0 \end{cases}$$

当a取何值时,方程组有非零解?

解: 若齐次方程组有非零解,则它的系数行列式必为零 而方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (3+a)a^3$$

当a=3或a=0时,系数行列式D=0, 容易验证,此时方程组的确有非零解。

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

第 26 页, 共 28 页

例3:)求通过平面上两个不同点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 的直线方程。

解: 直线方程为: ax+by+c=0

因为点 (x_1,y_1) , (x_2,y_2) 在直线上,所以

 $ax_1 + by_1 + c = 0$

 $ax_2 + by_2 + c = 0$

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

将三个方程联立,则

$$\int ax + by + c = 0$$

$$\left\{ax_1 + by_1 + c = 0\right\}$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

由于方程有非零解,所以

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & a \end{vmatrix} = 0$$

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

将行列式按第一行展开,有

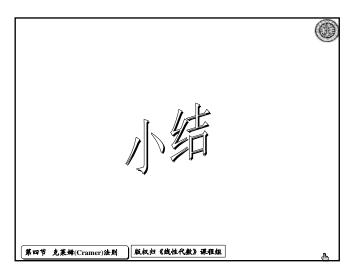
$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

由于给定两点是不同的,

所以 y_1-y_2 , x_1-x_2 不全为零,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
 就是所求直线方程。

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组



一,克莱姆法则

 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$$\int a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

 $|a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$

当系数行列式不为零时,方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 D_i 是把系数行列式D中第i列的元素用方程 组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式.

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

说



- (1)方程个数等于未知量个数;
- (2)系数行列式不等于零.
- 2. 克莱姆法则建立了线性方程组的解和已知的系 数与常数项之间的关系. 它主要适用于理论推导.

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组

, 重要定理

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

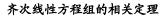
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$$
 (1)

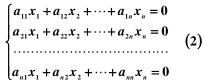
$$|a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

定理1 如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$, 则(1)一定有解,且解是唯一的.

定理2 如果线性方程组(1)无解或有两个不同的 解,则它的系数行列式必为零.

第四节 克莱姆(Cramer)法則 版权归《线性代数》课程组





定理3 如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D \neq 0$ 则齐次线性方程组(2)没有非零解.

定理4 如果齐次线性方程组(2)有非零解,则它的系数行列式必为零.

第四节 克莱姆(Cramer)法则 版权归《线性代数》课程组

