北京科技大学
University of Science and Technology Beijing

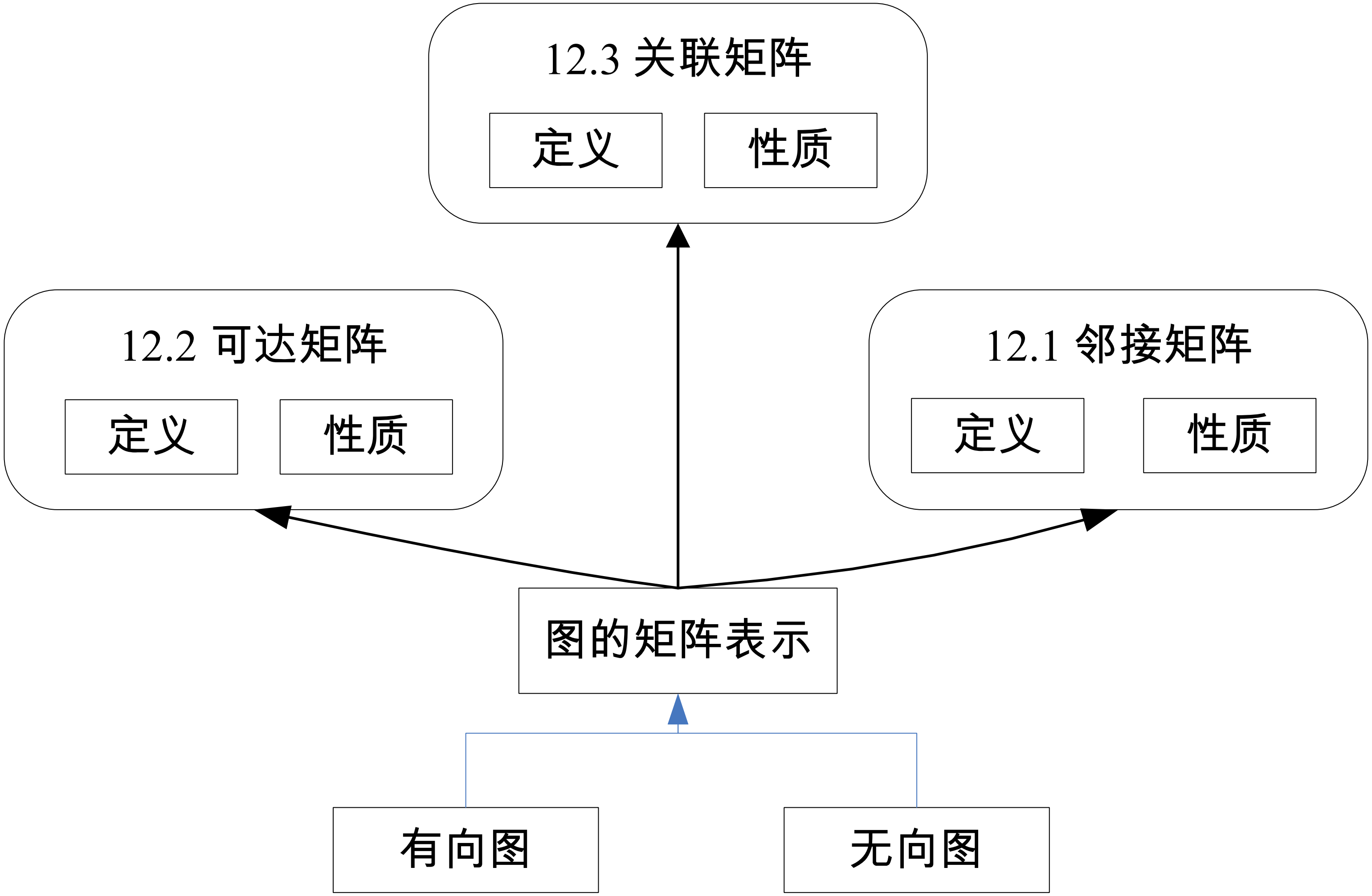
第四篇 图论

Graph Theory

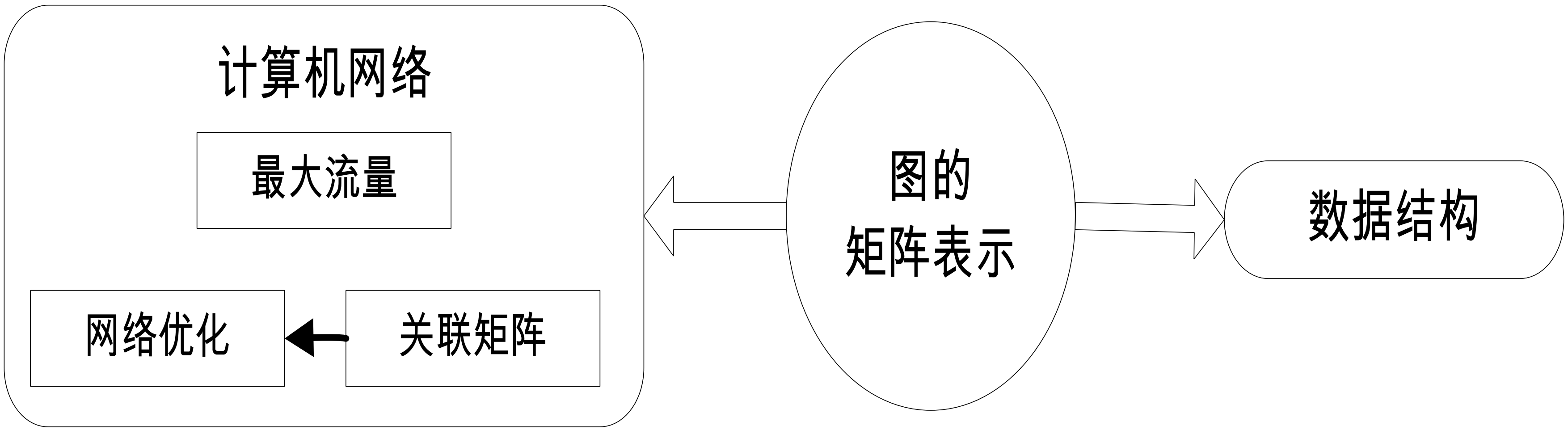
北京科技大学
University of Science and Technology Beijing

第十二章 图的矩阵表示

本章各节间的关系概图



图的矩阵表示在计算机科学技术相关领域的应用

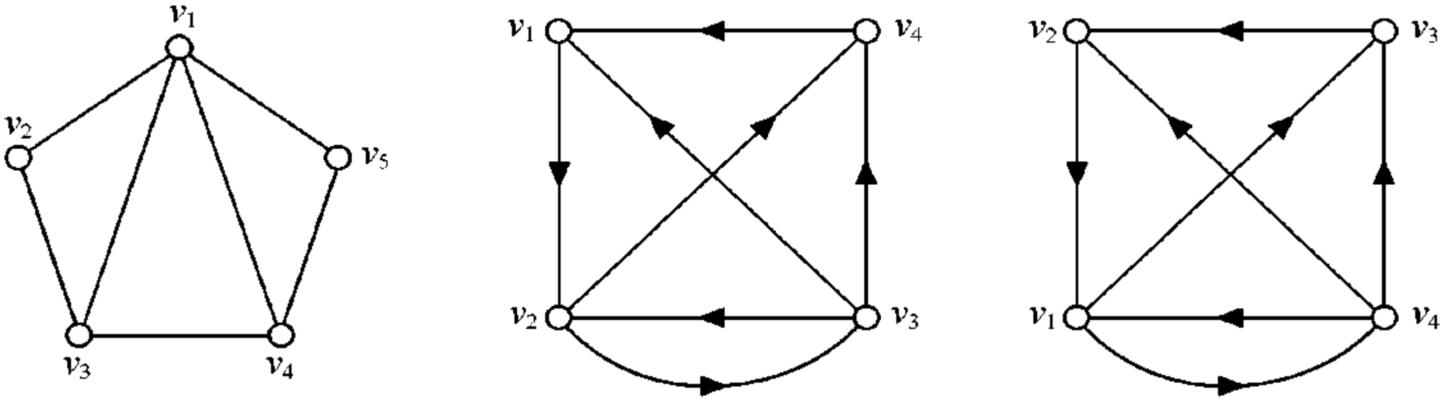


12.1 邻接矩阵

定义 12.1 设 G=<V, E> 为简单图，它有 n 个结点 V={ }，v_1，v_2，…，v_n 称为 G 的 $A(G)=(a_{ij})$。

其中，$a_{ij}=\begin{cases}1, & \boldsymbol{v_i}\text{邻接}\boldsymbol{v_j}\\ 0, & \boldsymbol{v_i}\text{不邻接}\boldsymbol{v_j}\text{或}\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\end{cases}$

邻接矩阵举例：



（a） （b） （c）

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A(G_1)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A(G_2)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

邻接矩阵的性质：

设 G=<V, E> 是有向图，|V|=n ，A 是 G 的邻接矩阵。

1) AA^T的元素的意义：

$B=[b_{ij}]=AA^T$

$$
=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{j1} & \cdots & a_{n1} \\
a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{j2} & \cdots & a_{n2} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
a_{1k} & a_{2k} & & a_{jk} & & a_{nk} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{jn} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

若有 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{jk}=m(m\ge 0)$，存在 m 个 k 使得 a_{ik} 和 a_{jk} 于 1。

如图：

b_{ij}表示这样的结点个数：从 v_i 和 v_j 有边引出（指向）到该结点。

2 A^TA的元素的意义：

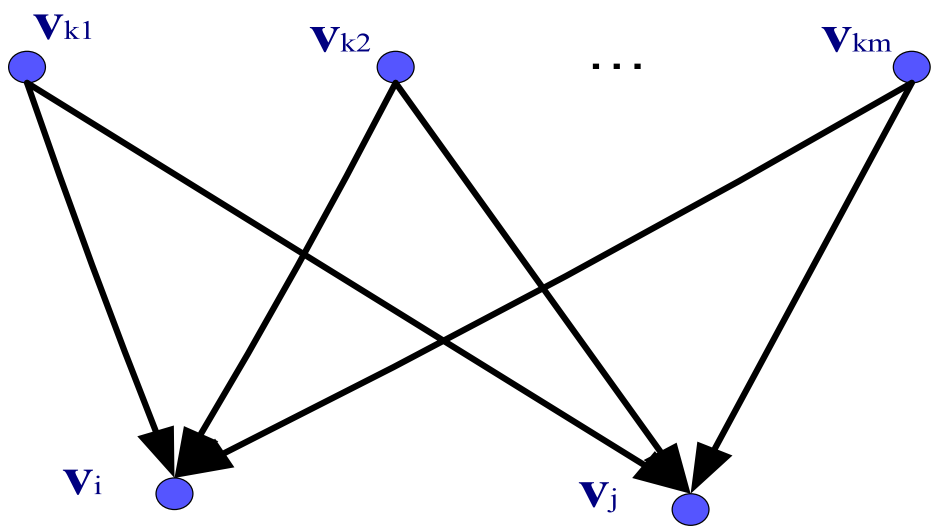
$$B=[b_{ij}]=A^TA$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{j1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{j2} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{1k} & a_{2k} & & a_{jk} & & a_{nk} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{jn} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

若有 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\cdot a_{kj}=m\ \ (m\geq 0)$ 存在 m 个 k 使得　　均 a_{ki} 和 a_{kj}

。

如图：



b_{ij} 表示这样的结点个数：以该结点为始点既有边引入（指向）到 v_i，又有边引入（指向）到 v_j。

2 ）$A^{(n)}$的元素的意义：

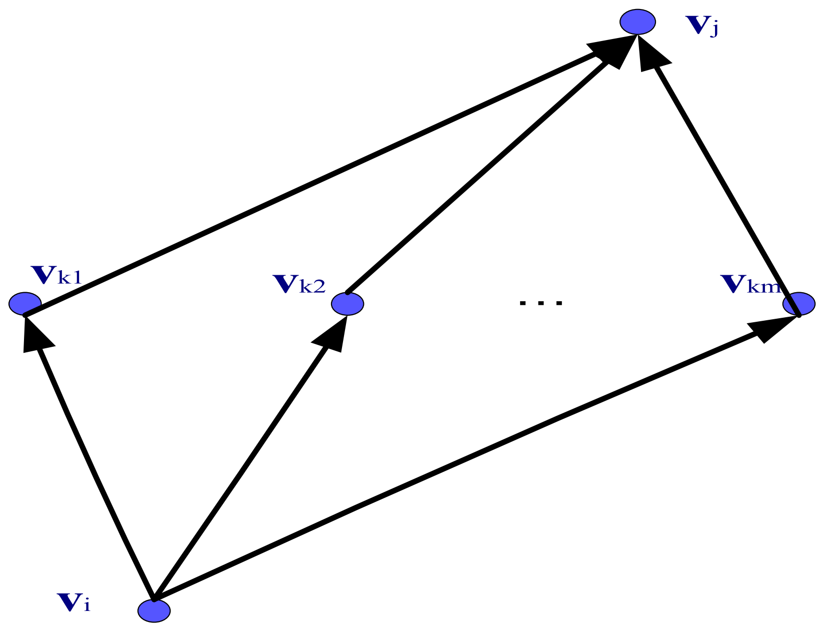
$$B=[b_{ij}]=A^{(2)}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

若有 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj}=m\ \ (m\geq 0)$ 表存在 m 个 k 使得 均等 a_{ik} 和 a_{kj}

。

如图：



b_{ij}表示从 v_i 到 v_j 长度为 2 的路径的总数。

定理 12.1 设 A(G) 为图 G 的邻接矩阵，$(A(G))^l$ 中的 i 行 j 列元素 $a_{ij}^{(l)}$ 等于 G 中连接结点 v_i 与 v_j 长度为 *l* 的路的数目。

证：用归纳法证明。

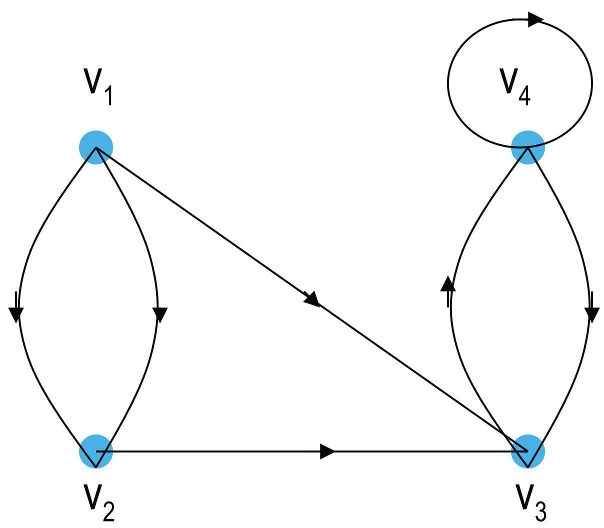
1 ）当 *l* =2 时，由上得知是显然成立。

2 ）设命题对 *l* 成立，由 $(A(G))^{l+1} = A(G)\cdot(A(G))^l$ $a_{ij}^{(l+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj}^{(l)}$

根据邻接矩阵的定义 a_{ik} 表示连接 v_i 与 v_k 长度为 1 的路径的数目，而 $\cdot a_{kj}^{(l)}$ 是连接 v_k 与 v_j 长度为 *l* 的路径的数目，上式的每一项表示由 v_i 经过一条边到 v_k，再由 v_k 经过长度为 *l* 的路到 v_j 的，长度为 *l*+1 的路的数目。对所有的 k 求和，即是所有从 v_i 到 v_j 的长度为 *l*+1 的路的数目，故命题成立。

证毕

定义（推广）设有向图 $D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数，称为 D 的邻接矩阵，记作 $A(D)$，或简记为 A.



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

定理设 A 为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l （l1）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设 $B_l=A+A^2+\ldots+A^l$ （l1），则 B_l 中元素

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数.

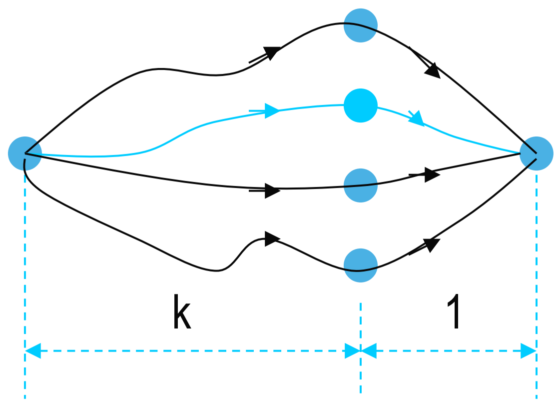
$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数

❖ 证明：(归纳法) (1)r=1: $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}$, 结论显然 .

(2) 设 r≤k 时结论成立，当 r=k+1 时，

$a_{it}^{(k)}a_{tj}^{(1)}$= 从 v_i 到 v_j 最后经过 v_t 的长度为 k+1 的通路总数，

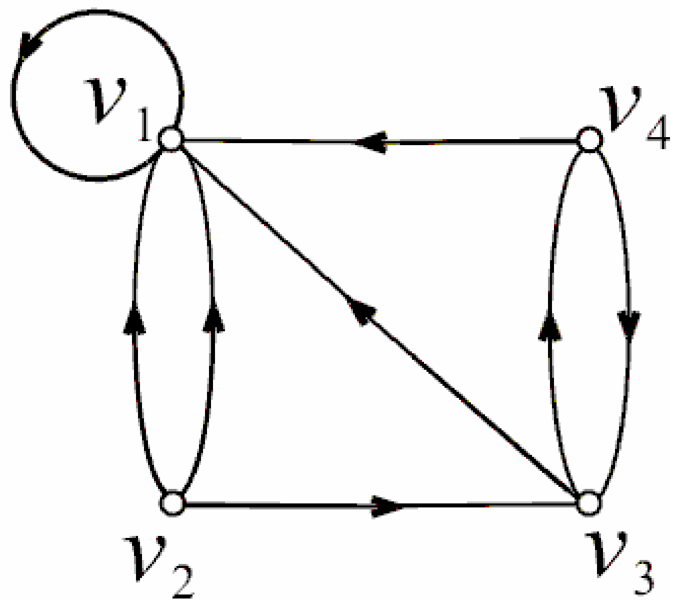
$$a^{(k+1)}_{ij}=\sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)}a_{tj}^{(1)}$$ = 从 v_i 到 v_j 的长度为 k+1 的通路总数 .



例 有向图 D 如图所示，求 A, A^2, A^3, A^4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为 1, 2, 3, 4 的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于 4 的通路为多少条？其中有多少条回路？



$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) D 中长度为 1 的通路为 8 条，其中有 1 条是回路 .

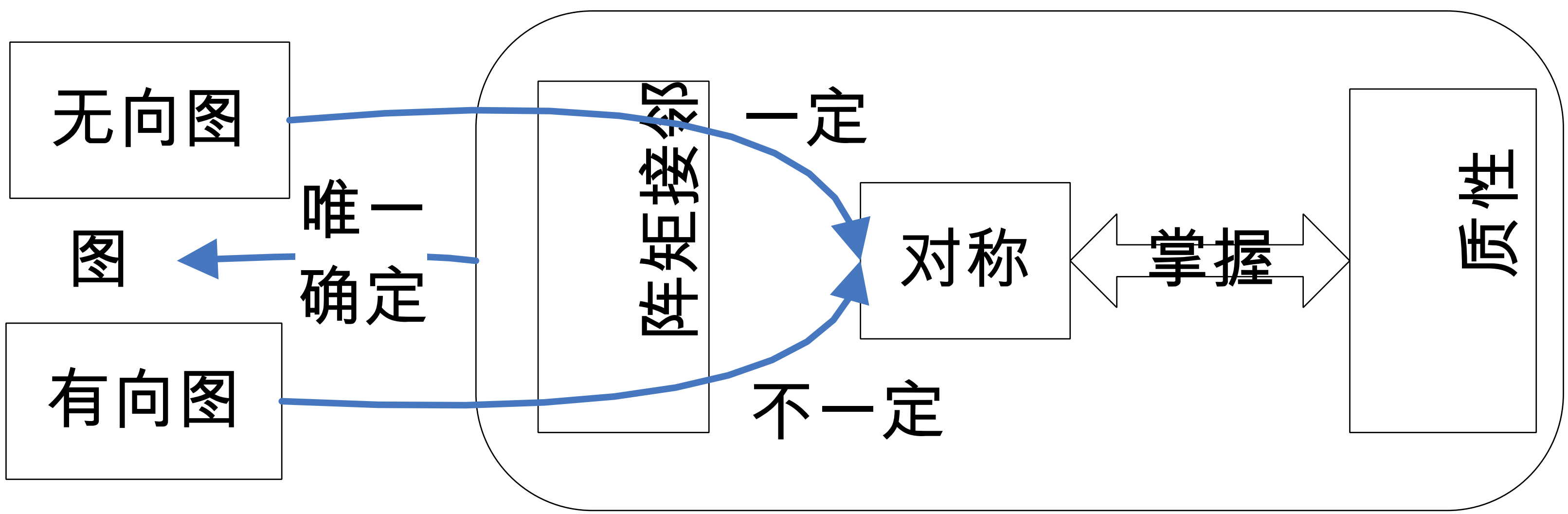
D 中长度为 2 的通路为 11 条，其中有 3 条是回路 .

D 中长度为 3 和 4 的通路分别为 14 和 17 条，回路分别为 1 与 3 条 .

(2) D 中长度小于等于 4 的通路为 50 条，其中有 8 条是回路 .

小结：

掌握图的邻接矩阵的定义与性质；关于邻接矩阵的思维形式注记图如下图所示。



12.2 可达矩阵

定义 12.2 设 $D=<V,E>$ 为有向图 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，令

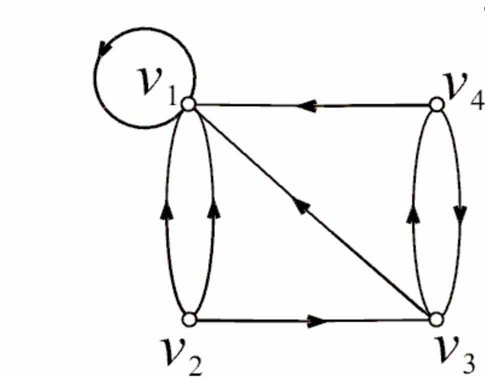
$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为 D 的可达矩阵，记作 $P(D)$ ，简记为 P.

由于$\forall v_i\in V$ ，v_i 可达 v_i ，所以 $P(D)$ 主对角线上的元素全为 1.

由定义不难看出，D 强连通当且仅当 $P(D)$ 为全 1 矩阵 .

由 B_{n-1} 的元素 $b_{ij}^{(n-1)}$(i,j=1,2,...n 且 i<>j) 是否为 0 可写出有向图 D 的可达矩阵，但 P 总为 1. 下图所示有向图 D 的可达矩阵为



$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

结论：如果把邻接矩阵看作是结点集 V 上关系 R 的关系矩阵，则可达矩阵 P 即为 $E+M_t$。

求可达矩阵的方法：

求 $C_n=E+A^1+\ldots+A^{n-1}$ → 将 C_n 中不为 0 的元素改为 1，为 0 的不变

可达矩阵的概念可以推广到无向图中，只要将无向图的每条边看成是具有相反方向的两条边即可，无向图的邻接矩阵是对称矩阵，其可达矩阵称为连通矩阵。

无向图 G 是连通图当且仅当它的可达矩阵 P 的所有元素均为 1.

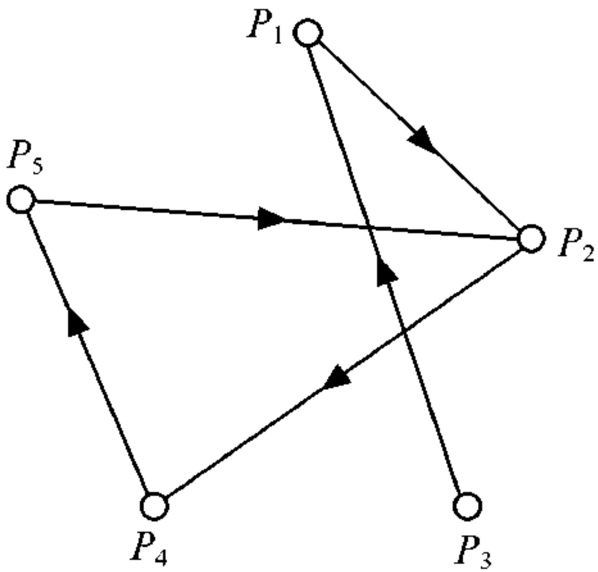
利用邻接矩阵 A 和可达矩阵矩阵 P ，可以判断图的连通性：

1 ）有向图 G 是强连通图，当且仅当它的可达矩阵 P 的所有元素均为 1 ；

2 ）有向图 G 是单侧连通图，当且仅 $P \vee P^T$ 的所有元素均为 1 ；

3 ）有向图 G 是弱连通图，当且仅当 $A \vee A^T$ 作为邻接矩阵求得的可达矩阵 P' 中所有元素均为 1 。

例 12.1 ：求图所示的可达矩阵



解：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

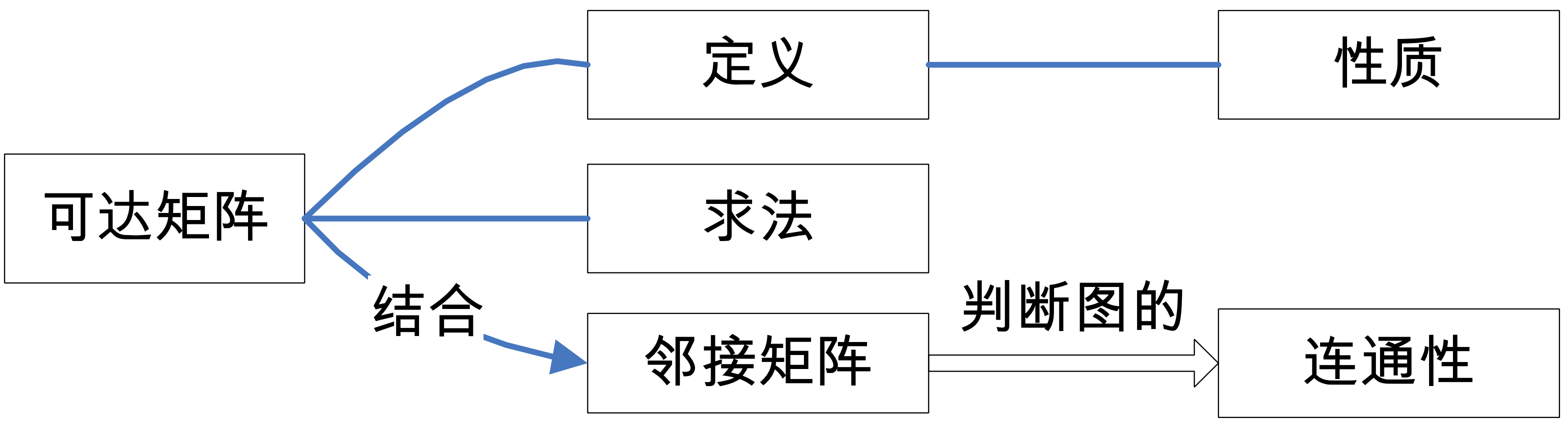
同样可求出：

$$A^4=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$P=E\vee A^1\vee A^2\vee A^3\vee A^4=\begin{bmatrix}1&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

小结：

掌握图的可达矩阵的定义与性质，掌握求可达矩阵的方法步骤。关于图的可达矩阵的思维形式注记图如下图所示。



12.3 关联矩阵

定义 12.3 无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$，令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数，称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的**关联矩阵**，记为 $M(G)$.

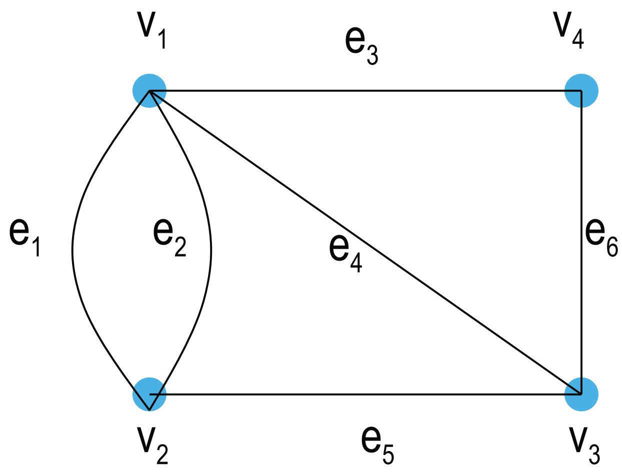
性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=2 \quad (j=1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=d(v_i) \quad (i=1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij}=2m$

(4) 平行边的列相同



$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

定义 12.4 设有向图 $D=<V,E>$ 中无环， $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\},E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ ，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0\ , & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1\ , & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 D 的关联矩阵，记为 $M(D)$.

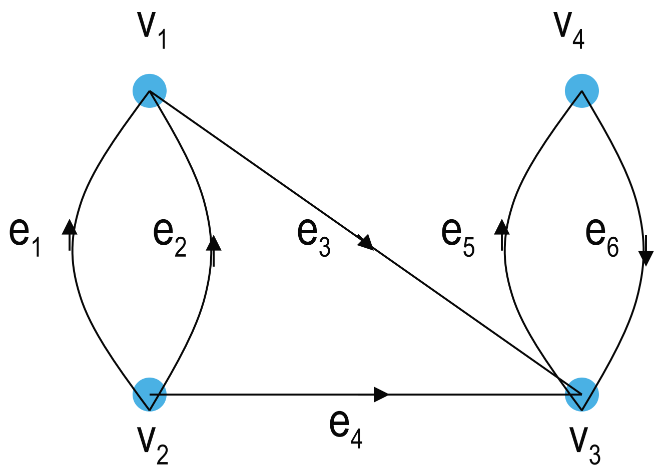
性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^{+}(v_i),\quad \sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=-d^{-}(v_i),\quad i=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij}=0$

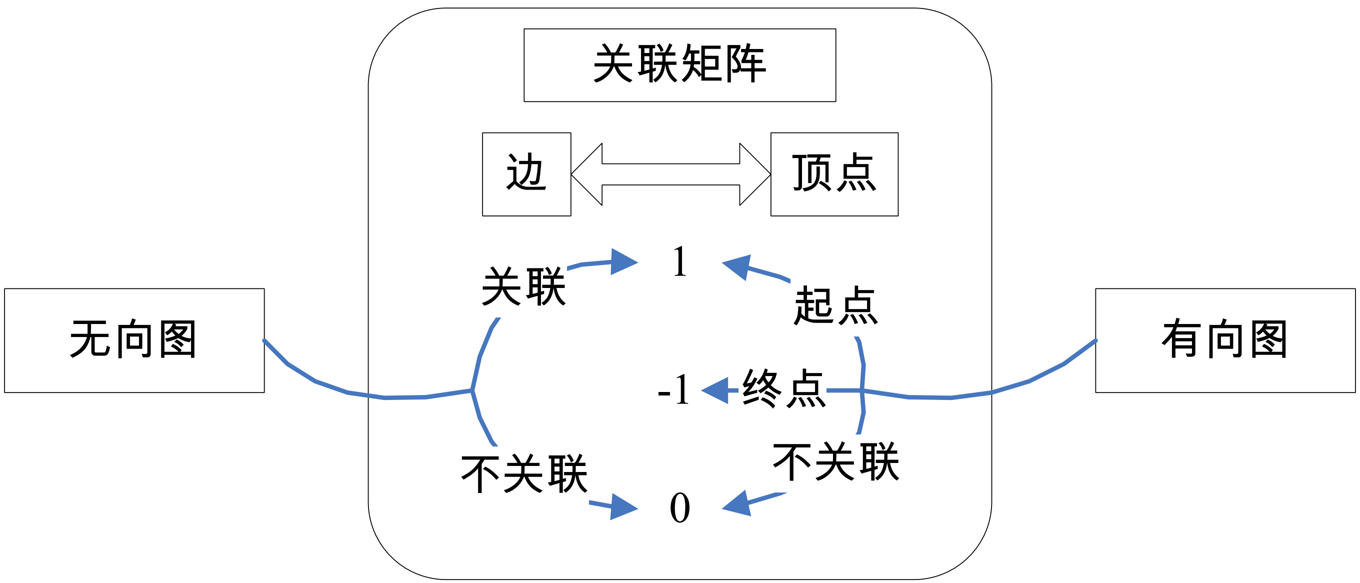
(4) 平行边对应的列相同



$$M(D)=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}\\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

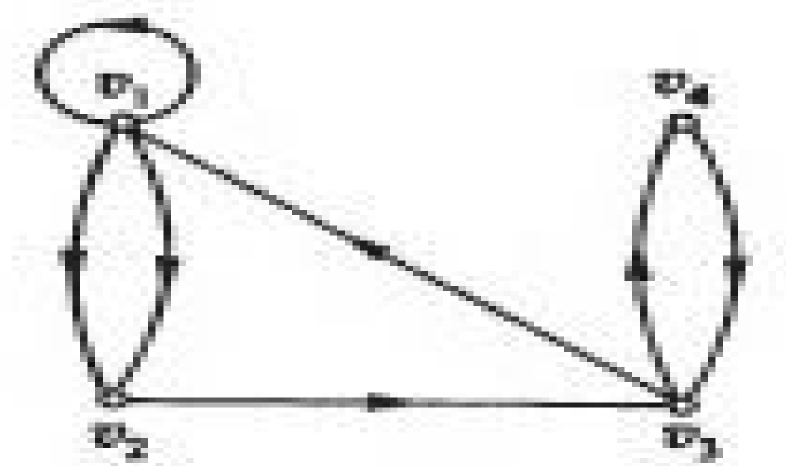
小结：

掌握关联矩阵的定义与性质。关于图的关联矩阵的思维形式注记图如下图所示。



作业

- 有向图 D 如下图所示 .
- (1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路各为几条 ?
- (2) D 中 v_1 到 v_1 长度为 1, 2, 3, 4 的回路各为几条 ?
- (3) D 中长度为 4 的通路（不含回路）有多少条 ? 长度为 4 的回路为多少条 ?
- (4) D 中长度小于或等于 4 的通路为多少条 ? 其中有多少条为回路 ?
- (5) 写出 D 的可达矩阵 .



12.4 常见题型解析

1）邻接矩阵和可达矩阵。

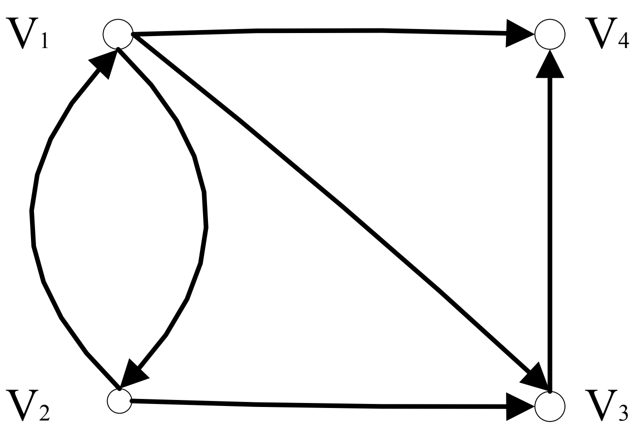
2）邻接矩阵和关联矩阵。

3）给出一种矩阵形式求另一种。

例 12.2 设有向图 D=<V, E> 如下图所示，请用计算回答下面的问题：

（ 1 ）D 中 v_1 到 v_4 长度为 3 的基本路径有多少条？

（ 2 ）D 是哪种类型的连通图？



解：（1）G的邻接矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

分别计算A^2、A^3得到：

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}0&1&1&2\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由 A^3（1，4）=2　共v_1到v_4长度为3的路径。计算过程：

$A^3(1,4)=A^2(1,1)\times A(1,4)+A^2(1,2)\times A(2,4)+A^2(1,3)\times A(3,4)$

$+A^2(1,4)\times A(4,4)=1\times 1+0\times 0+1\times 1+1\times 0=2$

$A^2(1,1)=A(1,1)\times A(1,1)+A(1,2)\times A(2,1)+A(1,3)\times A(3,1)$

$+A(1,4)\times A(4,1)=0\times 0+1\times 1+1\times 0+1\times 0=1$

$A^2(1,3)=A(1,1)\times A(1,3)+A(1,2)\times A(2,3)+A(1,3)\times A(3,3)$

$+A(1,4)\times A(4,3)=0\times 1+1\times 1+1\times 0+1\times 0=1$

即这两条长度为 3 的路径为（v_1，v_2，v_1，v_4（ v_1，v_2，v_3，v_4 ）是v_1，v_2，v_3，v_4，所以 D 中到长度为 3 的基本路径 有 1 条。

（２）计算 G 的可达矩阵：

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

显然 G 不是强连通的。G 是单侧连通的，因为对于任意顶点偶对，至少一个结点到另一个结点是可达的

2）邻接矩阵和关联矩阵

例 12.3 设 M 是无向图 G 的关联矩阵，而 A 是图 G 的邻接矩阵。

1）试证明： M 的列和为 2 。

2）A 的列和是多少？

证：（1）按 M 的定义，它的第 j 列是对应 e_j 和 V(G) 中结点的关联次数所成的向量，由于一条边只有两个端点，故 M 的列和为 2 。

（2）根据定义，A 的第 i 列的列和恰为与 v_i 关联的边的数目。

证毕

3）给出一种矩阵形式求另一种

例 12.4 设图 G 的邻接矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

求 G 的可达性矩阵。

解：

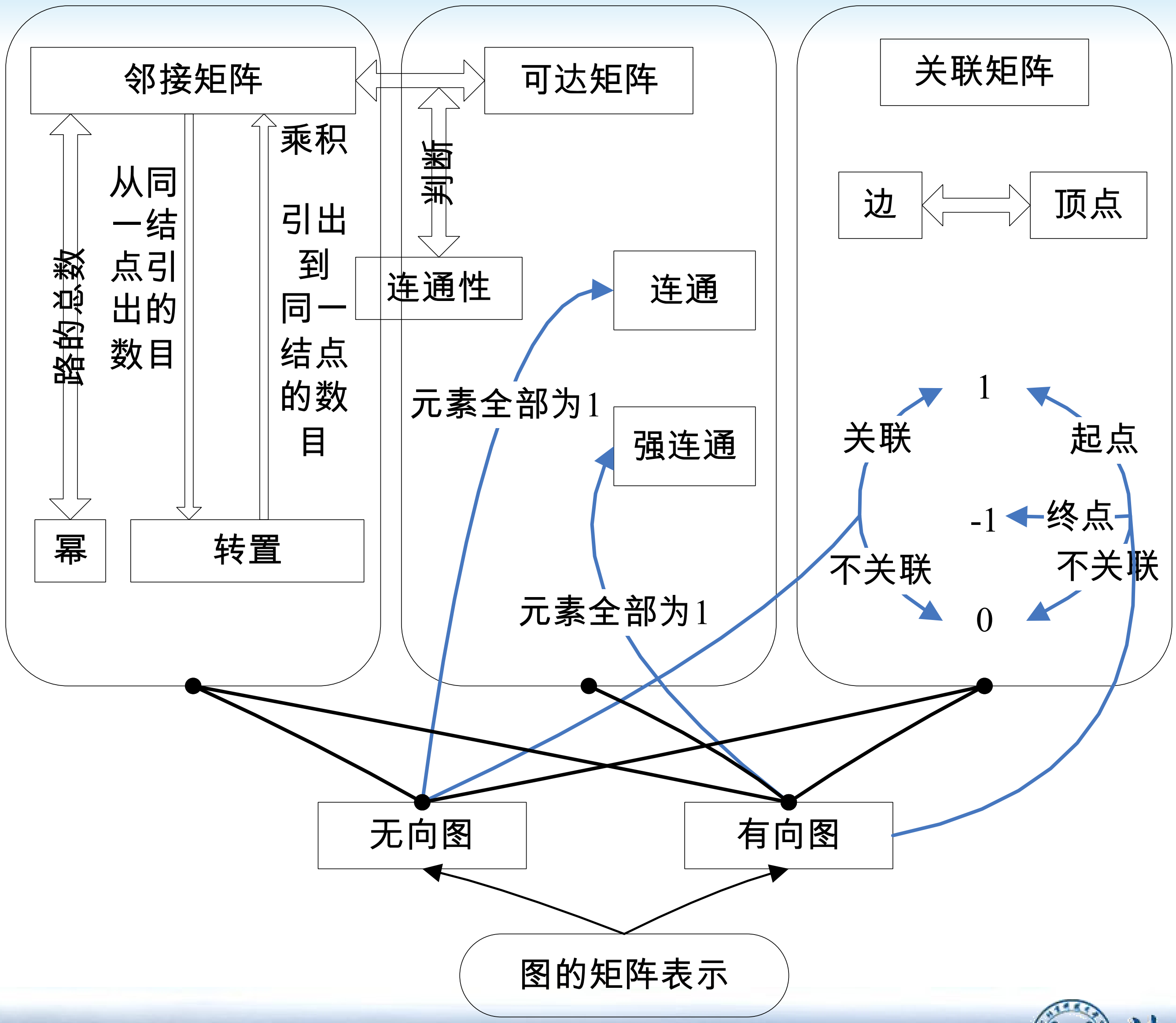
$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

故：

$$C_4=A^0+A^1+A^2+A^3=\begin{bmatrix}3&2&1&2\\3&4&2&3\\4&4&3&5\\1&1&1&2\end{bmatrix}\quad P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

由此可知图 G 中任意两个结点间均是可达的，此图是连通图。

本章小结



邻接矩阵
可达矩阵
关联矩阵
路的总数
从同一结点引出的数目
乘积
引出到同一结点的数目
判断
幂
转置
连通性
连通
强连通
元素全部为1
元素全部为1
边
顶点
1
关联
起点
-1
终点
不关联
不关联
0
无向图
有向图
图的矩阵表示