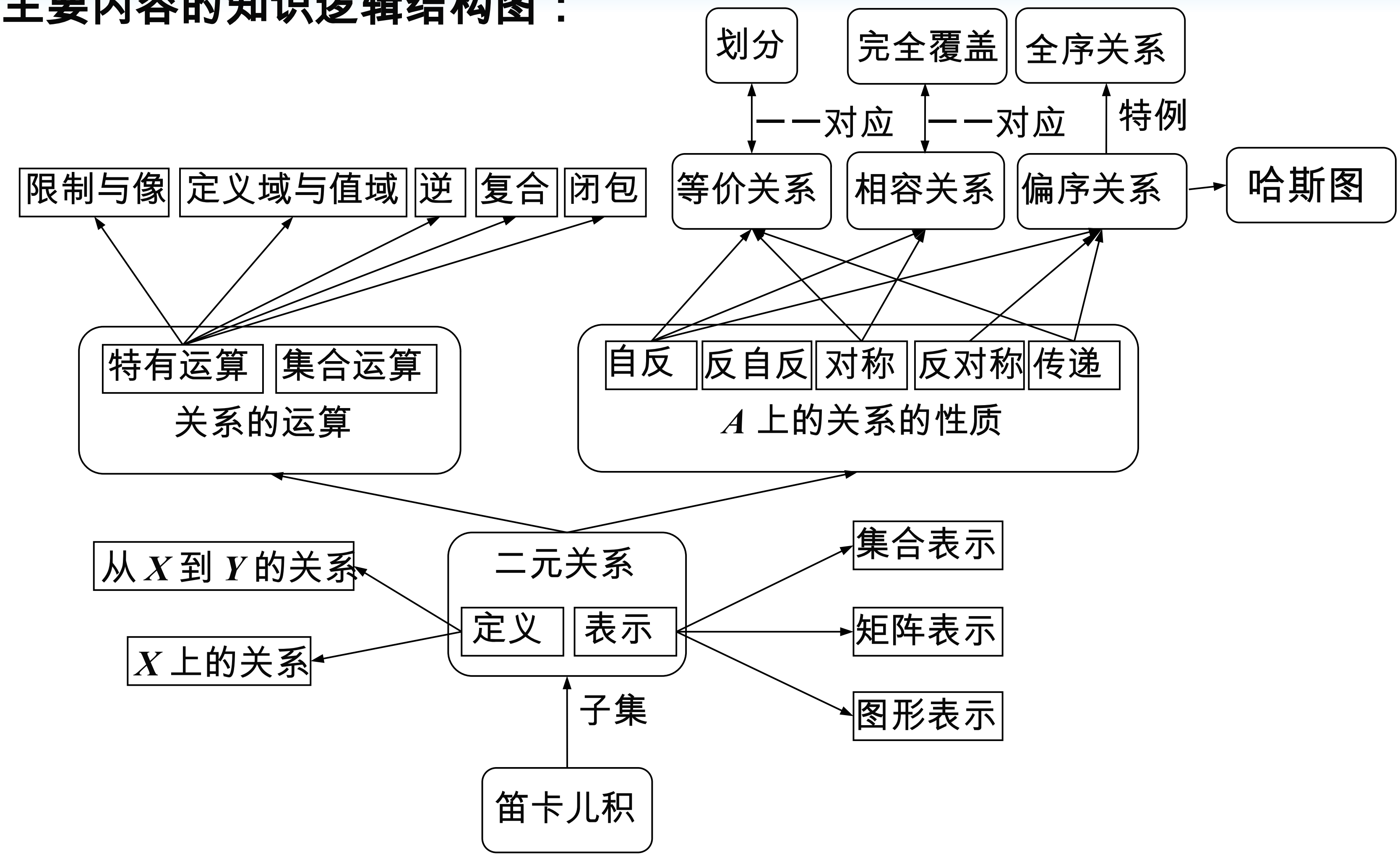
# 本章小结

**本章主要内容的知识逻辑结构图：**



# 常见题型

- 求某关系的集合表示；画出某关系的关系矩阵或关系图
- 关系的运算，可利用集合表示、关系图或关系矩阵求得运算结果
- 判断或证明关系的性质。
- 计算关系的闭包。
- 根据等价关系求集合的划分，或由集合的划分求集合上的等价关系。
- 画出偏序关系的哈斯图，或根据哈斯图求偏序关系的集合表示。
- 求最大元、最小元、极大元和极小元；求上界、最小上界、下界和最大下界。

# 关系性质的证明方法

1. 证明 R 在 A 上自反

   任取 x,

   $x\in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x\rangle\in R$

   前提　　　推理过程　　　结论

2. 证明 R 在 A 上对称

   任取 <x,y> ，

   $\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle y,x\rangle\in R$

   前提　　　推理过程　　　结论

# 关系性质的证明方法

3. 证明 $R$ 在 $A$ 上反对称

任取 $\langle x,y \rangle$ ，

$\langle x,y \rangle \in R \land \langle y,x \rangle \in R \Rightarrow$ …………………….. $\Rightarrow x = y$

前提　　推理过程　　结论

4. 证明 $R$ 在 $A$ 上传递

任取 $\langle x,y \rangle, \langle y,z \rangle$ ，

$\langle x,y \rangle \in R \land \langle y,z \rangle \in R \Rightarrow$ …………………….. $\Rightarrow \langle x,z \rangle \in R$

前提　　推理过程　　结论

# 关系等式或包含式的证明方法

证明中用到关系运算的定义和公式，如：

- $x \in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle \in R)$
- $y \in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(\langle x,y\rangle \in R)$
- $\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R^{-1}$
- $\langle x,y\rangle \in R \circ S \Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in R \wedge \langle t,y\rangle \in S)$
- $\langle x,y\rangle \in R \restriction A \Leftrightarrow x \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R$
- $y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R)$
- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$

# 例题

例 4.40 $R$ 是二元关系，且 $R=R^\circ R^\circ R^\circ R$ ，选择下面的哪一个一定是传递的。

（1）$R$ （2）$R^\circ R$ （3）$R^\circ R^\circ R$ （4）$R^\circ R^\circ R^\circ R$

解 根据定理 4.12 知，若二元关系 $R$ 是传递的，一定有 $R^\circ R \subseteq R$ 。

由于 $R=R^\circ R^\circ R^\circ R$ ，所以

$$R^\circ R^\circ R=R^\circ R^\circ(R^\circ R^\circ R^\circ R)=(R^\circ R^\circ R)^\circ (R^\circ R^\circ R)$$

于是，R 的三次幂一定是传递的。那么正确答案是（3）。

# 例题

例 4.41　设 $A$={1, 2, 3, 4, 5}，那么 A 上有多少个是等价关系？

解由于某集合上的划分与该集合上的等价关系之间是一一对应的关系，所以 A 有多少种划分就有多少个等价关系。以划分中等价类中元素数目分类：

① 等价类中元素最多的只有一个元素的划分只有 1 种；

② 等价类中元素最多的有两个的划分共有 $C_5^2 + C_5^2 \times C_5^3$ =40 种；

③ 等价类中元素最多的有三个的划分共有 $C_5^3 + C_5^3$ =20 种；

④ 等价类中元素最多的有四个的划分共有 $C_5^4$ =5 种；

⑤ 等价类中元素最多的有五个的划分只有 1 种。

因此，总共的等价关系共有 1+40+20+5+1=67 种。

# 例题

例 4.42 已知自然数集 N 及 N 上的关系 R 如下，

$R=\{<ni, nj> \mid ni/nj$ 能表示成 $2^n$ 形式， $ni, nj \in N$ ， $n\in Z\}$

试证明 $R$ 是等价关系，并指出等价类是什么。

解：（ 1 ）$\forall\, ni\in N$ ，有 $ni/ni = 1 = 2^0$ ，故 $<ni, ni>\in R$ ，所以 $R$ 是自反的。

（ 2 ）$\forall\, ni, nj\in N$ ，若 $<ni, nj>\in R$ ，即 $ni/nj=2^k$（ $k$ 是整数），所以 $nj/ni=2^{-k}$ ，所以 $<nj, ni>\in R$ ，所以 R 是对称的。

（ 3 ）$\forall\, ni, nj, np\in N$ ，若 $<ni, nj>\in R \wedge <nj, np>\in R$ ，则 $ni/nj=2^{k1} \wedge nj/np=2^{k2}$（ $k1$, $k2$ 是整数），则 $ni/np=2^{k1+k2}$ ，则 $<nj, np>\in R$ ，故 $R$ 是传递的。

总之， $R$ 是 $N$ 上的等价关系，等价类是：

$[1]_R=\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots\}$

$[3]_R=\{3, 3\times2_1, 3\times2^2, \ldots, 3\times2^n, \ldots\}$

$[5]_R=\{5, 5\times2_1, 5\times2^2, \ldots, 5\times2^n, \ldots\}$

**例 4.44 图 4.29（ a ）为一偏序集 $<A, R>$ 的哈斯图。**

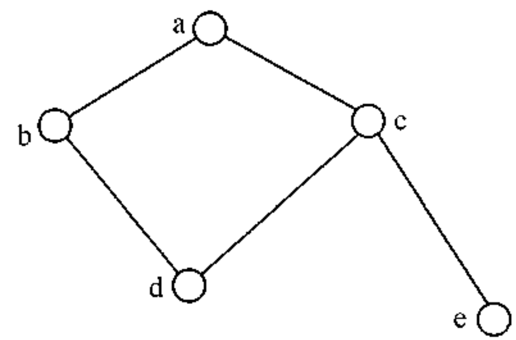
**（ 1 ）下列命题哪些为真？**

a$R$b ， d$R$a ， c$R$d ， c$R$b ， b$R$e ， a$R$a ， e$R$a

**（ 2 ）恢复 R 的关系图。**

**（ 3 ）指出 A 的最大、最小元，极大、极小元。**

**（ 4 ）求出子集 $B1$={c, d, e} ， $B2$={b, c, d, e} ， $B3$={b, c, d, e} 的上、下界，上、下确界。**




(a)