

(c) 部分分式法:

$$X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}, \quad x[n] \text{ 绝对可和。}$$

10.5. 本题列出了几个 z 变换。对于每一个变换, 试用两种方法 (部分分式展开法和基于长除法的泰勒级数法) 求其 z 逆变换。

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2},$$

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > \frac{1}{a}.$$

10.6. 试研究具有下列 z 变换的右边序列 $x[n]$

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} \quad (\text{P10.6})$$

- (a) 试将式 (P10.6) 进行部分分式展开 (表示成 z^{-1} 的多项式之比), 然后根据展开式确定 $x[n]$ 。
 (b) 将式 (P10.6) 改写为 z 的多项式之比, 并对 $X(z)$ 进行部分分式展开 (表示成 z 的多项式), 然后根据展开式确定 $x[n]$, 并证明该序列与 (a) 中所得序列相等。

10.7. 研究具有下列 z 变换的右边序列 $x[n]$,

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} \quad (\text{P10.6})$$

- (a) 试将 $X(z)$ 写成 z 而不是 z^{-1} 的多项式之比。
 (b) 试用部分分式展开法, 将 $X(z)$ 表示为各项之和, 每一项表示 (a) 中答案的一个极点。
 (c) 确定 $x[n]$ 。

10.8. 一右边序列 $x[n]$ 具有 z 变换 $X(z)$ 为

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

试确定 $n < 0$ 时 $x[n]$ 值。

10.9. (a) $x_1[n]$ 为左边序列, 其 z 变换为 $X_1(z) = e^z$, 在 $z=0$ 邻域内, 将 $X(z)$ 用泰勒级数展开, 试确定 $x_1[n]$ 。

(b) $x_2[n]$ ① 为右边序列, 其 z 变换为 $X_2(z) = e^{-1/z}$, 试确定 $x_2[n]$ 。

10.10. 试用幂级数展开式

$$\lg(1-w) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{w^i}{i}, \quad |w| < 1,$$

确定下列每一 z 变换的逆变换:

① 原文误为 $x_3[n]$ 。——译者注

(a) $X(z) = \lg(1 - 2z)$, $|z| < \frac{1}{2}$;

(b) $X(z) = \lg\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)$, $|z| > \frac{1}{2}$ 。

10.11. (a) 确定下面序列的 z 变换,

$$x[n] = \delta[n] - 0.95\delta[n-6]$$

(b) 画出 (a) 中序列的极点—零点图。

(c) 通过研究单位圆旋转时的极点和零点矢量的特性, 画出 $x[n]$ 的傅里叶变换幅度的近似图。

10.12. 通过研究 10.4 节所讨论的频率响应的几何判定, 画出与图 P 10.12 中每一极点—零点图所对应的傅里叶变换的幅度。

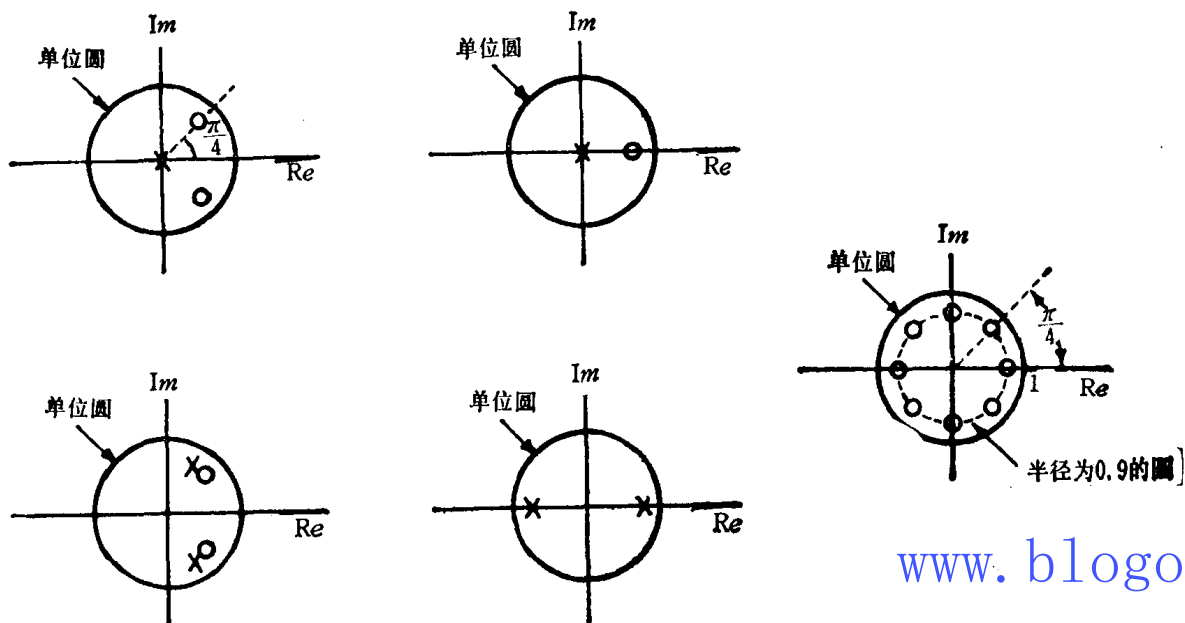


图 P 10.12

10.13. 具有图 P 10.13—1 所示极点—零点图的离散时间系统被称为一阶全通系统, 因为其频率响应的幅度是当频率无关的常数。

(a) 用代数法证明 $|H(e^{j\Omega})|$ 是常数。

为了用几何法证明上述性质, 分析图 P 10.13—2 中矢量, 需要证明 V_2 的长度与 V_1 的长度成正比, 而不受 Ω 的限制。

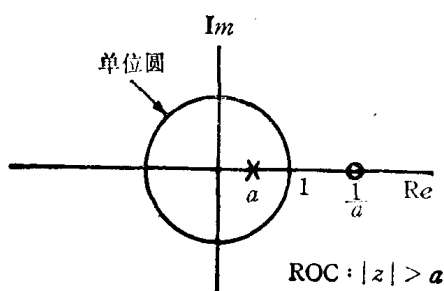


图 P 10.13—1

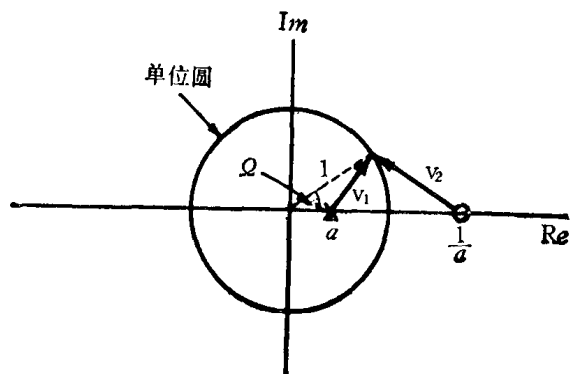


图 P 10.13—2

(b) 用余弦定理表示 V_1 的长度, 实际上 V_1 是三角形中的一条边, 这个三角形的另外两条边是单位矢量和长度为 a 的矢量。

(c) 用类似于(b)的方法, 求出 V_2 长度, 并证明它和 V_1 长度成正比, 而不受 Ω 的限制。

10.14. 试研究一个具有有理 z 变换 $X(z)$ 的实值序列 $x[n]$ 。

(a) 根据 z 变换的定义, 证明

$$X(z) = X^*(z^*)$$

(b) 根据(a)的结果, 证明如果 $X(z)$ 的一个极点(零点)出现在 $z=z_0$ 处, 则必定还有一个极点(零点)出现在 $z=z_0^*$ 处。

(c) 对于下列每一序列, 验证(b)的结果。

1. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

2. $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$

10.15. 试研究一个具有 z 变换 $X_1(z)$ 的序列 $x_1[n]$ 和一个具有 z 变换 $X_2(z)$ 的序列 $x_2[n]$, 其中 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 具有下面关系

$$x_2[n] = x_1[-n]$$

证明 $X_2(z) = X_1(1/z)$, 并由此证明, 如果 $X_1(z)$ 有一个极点(或零点)在 $z=z_0$ 处, 则 $X_2(z)$ 有一个极点(或零点)在 $z=1/z_0$ 处。

10.16. 试研究一个具有有理 z 变换 $X(z)$ 的偶序列 $x[n]$ (即, $x[n] = x[-n]$)。

(a) 根据 z 变换的定义, 证明

$$X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

(b) 根据(a)的结果, 证明如果 $X(z)$ 的一个极点(零点)出现在 $z=z_0$ 处, 则必定还有一个极点(零点)出现在 $z=1/z_0$ 处。

(c) 对于下列每一个序列, 验证(b)的结果,

1. $\delta[n+1] + \delta[n-1]$,

2. $\delta[n+1] - \frac{5}{2}\delta[n] + \delta[n-1]$ 。

(d) 联系(b)的结果和习题10.14(b)的结果, 试证明对于一个实偶序列, 如果 $H(z)$ 有一个极点(零点)在 $z=Pe^{j\theta}$ 处, 则 $H(z)$ 也有一个极点(零点)在 $z=(1/P)e^{j\theta}$ 和 $z=(1/P)e^{-j\theta}$ 处。

10.17. (a) 完成表10.1中下列各性质的证明。

1. 性质10.5.2;

2. 性质10.5.3;

3. 性质10.5.4。

(b) 在用 $X(z)$ 表示 $x[n]$ 的 z 变换和用 R_x 表示 $X(z)$ 的 ROC 时, 试确定下列每一序列的 z 变换和相应的 ROC, 分别用 $X(z)$ 和 R_x 表示。

1. $x^*[n]$;

2. $z_0^n x[n]$, 式中 z_0 是复数。

10.18. 10.5.7节中, 我们叙述和证明了因果系统的初值定理。

(a) 如果 $x[n]$ 是逆因果的 (即, $x[n]=0, n>0$), 试叙述和证明其相应定理。

(b) 试证明: 如果 $x[n]=0, n<0$, 则

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z(X(z) - x[0])$$

10.19. 先对 $X(z)$ 微分, 并使用 z 变换的适当性质, 确定下列每一个 z 变换的序列,

(a) $X(z) = \lg(1-2z), |z| < \frac{1}{2}$

(b) $X(z) = \lg\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right), |z| > \frac{1}{2}$

www.blogoil.com

将 (a) 和 (b) 的结果与习题 10.10 中用幂级数展开所得到的结果相比较。

10.20. 假定 $x[n]$ 表示因果序列 (即, $x[n]=0, n<0$), 它的 $x[0]$ 是非零和有限值。

(a) 试用初值定理, 证明 $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处没有极点或零点。

(b) 试证明, 作为 (a) 的结果的推论, 在有限 z 平面上 (有限 z 平面是指除去 $z=\infty$ 的平面) $X(z)$ 的极点数等于零点数。

10.21. 在 10.5.5 节中, 我们已经阐述了 z 变换的卷积性质。为了证明该性质, 我们先做卷积和如下,

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k] \quad (\text{P 10.21})$$

(a) 利用 (10.3) 式, 取式 (P 10.21) 的 z 变换。试证明,

$$X_3(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \hat{X}_2(z)$$

式中 $\hat{X}_2(z) = z\{x_2[n-k]\}$ 。

(b) 试用 (a) 的结果和性质 10.5.2, 证明,

$$X_3(z) = X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] z^{-k}$$

(c) 根据 (b), 试证明式 (10.59), 即

$$X_3(z) = X_1(z) X_2(z)$$

10.22. 一个序列 $x[n]$ 的自相关序列 $\phi_{xx}[n]$ 定义为

$$\phi_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] x[n+k]$$

按照 $x[n]$ 的 z 变换, 确定 $\phi_{xx}[n]$ 的 z 变换。

10.23. 假设 $x[n]$ 是一个具有 z 变换 $X(z)$ 的离散时间信号, 确定下列每一个信号的 z 变换, 用 $X(z)$ 来表示。

(a) $\Delta x[n]$ 由下式定义 (其中 Δ 是一次后向差分算符)。

$$\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$(b) x_1[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n \text{ 偶数,} \\ 0, & n \text{ 奇数.} \end{cases}$$

(c) $x_1[n] = x[2n]$ 。

10.24. (a) 试确定具有下列差分方程的因果 LTI 系统的系统函数

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

(b) 如果

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

试用 z 变换确定 $y[n]$ 。

10.25. 序列 $x[n]$ 为 LTI 系统在输入为 $s[n]$ 时的输出, 这个系统由差分方程

$$x[n] = s[n] - e^{-\alpha} s[n-8]$$

描述, 其中 $0 < \alpha < 1$ 。

(a) 求系统函数

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}$$

并在 z 平面上画出极点和零点, 指出收敛域。

(b) 我们希望利用一个 LTI 系统从 $x[n]$ 中恢复 $s[n]$, 求能使 $y[n] = s[n]$ 的系统函数

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

指出 $H_2(z)$ 所有可能的收敛域, 对每一收敛域, 说明该系统是否因果的和稳定的。

(c) 求出所有能使

$$y[n] = h_1[n] * x[n] = s[n]$$

的单位抽样响应 $h_2[n]$ 。

10.26. 已知一 LTI 系统, 用下列差分方程描述:

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

(a) 求出该系统的系统函数 $H(z) = Y(z)/X(z)$, 画出 $H(z)$ 的极点和零点并指出其收敛域。

(b) 求出该系统的单位抽样响应。

(c) 读者将会发现它是一个不稳定系统, 试求满足上述差分方程的一个稳定 (但非因果) 的单位抽样响应。

10.27. 设有一个 LTI 系统, 其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足差分方程

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

该系统是否稳定和/或因果的。

研究这个差分方程的极点—零点图, 求系统单位抽样响应的三种可能选择方案, 并证明每一种选择方案都满足差分方程。

10.28. 研究一个线性离散时间移位不变系统, 它的输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足差分方程

$$y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

并已知该系统是稳定的, 试求其单位抽样响应。

10.29. 已知如下四个 z 变换式, 试确定哪些可以作为离散时间线性系统的传递函数, 该系统不需要是稳定的, 但要求 $n < 0$ 时其单位抽样响应为零。请阐明理由。

$$(a) \frac{(1-z^{-1})^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},$$

$$(b) \frac{(z-1)^2}{z-\frac{1}{2}},$$

$$(c) \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6},$$

$$(d) \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^6}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6}.$$

10.30. 研究一个 LTI 系统, 其冲激响应 $h[n]$ 和输入 $x[n]$ 为

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0; \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

(a) 直接计算 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的离散卷积, 求输出 $y[n]$ 。

(b) 把输入和单位抽样响应的 z 变换相乘, 计算乘积的 z 逆变换来求输出 $y[n]$ 。

10.31. 习题 9.18 中, 研究了最小相位连续时间系统。可以用类似方法定义最小相位离散时间系统。具体说, 最小相位系统是一个因果和稳定的系统, 而且它的逆系统也是因果和稳定的。

试确定对最小相位系统的系统函数的极点和零点在 z 平面上位置的必要约束条件。

10.32. 研究如图 P 10.32 所示的数字滤波器结构。

(a) 求这个因果滤波器的 $H(z)$, 画出极点—零点图, 并指出其收敛域。

(b) k 为何值时, 该系统是稳定的。

(c) 如果 $k=1$ 和假定对于所有 n 值, $x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, 试求 $y[n]$ 。

www.blogoil.com

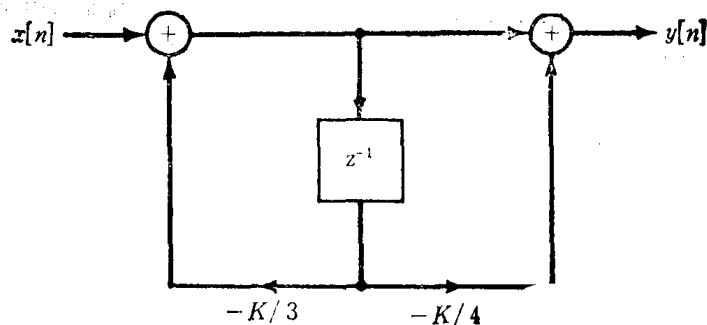


图 P 10.32

10.33. 我们希望设计这样一个系统：在每一个 N 点，其输出 $y[n]$ 就等于 $n, n-1, \dots, n-M+1$ 点输入的平均值。

(a) 试确定联系该系统 $y[n]$ 和 $x[n]$ 的差分方程。

(b) 求该系统的 $H(z)$ 。

(c) 画出 $M=3$ 时的极点—零点图。

(d) $M=3$ 时，利用加法器、系数乘法器及单位延时元件，画出实现该系统的草图，并使用尽量少的单位延时元件。

(e) 由 (a)~(b) 所描述的系统通常具有过多的存储要求。作为另一种方案，我们通常采用

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta x[n]$$

形式的递归系统。求 α 和 β 之间的关系，使得该系统对“恒定”输入的响应具有和 (a)~(d) 中描述的系统相同。

(f) 假定输入 $x[n]$ 由两个分量组成，即

$$x[n] = c + w[n]$$

式中 c 是常数， $w[n]$ 是频率约为 $\Omega = \pi$ 的污染噪声。我们希望设计一个系统来估计 c 值。为了完成这个任务，必须在 (a)~(d) 中所描述的系统 ($M=3$ 时) 和 (e) 中所描述的系统形式 ($\alpha=0.7$ 时) 之间进行选择，应选用哪一种系统为好？为什么。

10.34. 一个离散时间 LTI 系统，其输入为 $x[n]$ 和输出为 $y[n]$ ，已知下述情况：

1. 如果对所有 n 值， $x[n] = (-2)^n$ ，则对所有 n 值， $y[n] = 0$ 。

2. 如果对所有 n 值， $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ，则对所有 n 值， $y[n]$ 具有下列形式

$$y[n] = \delta[n] + a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

式中 a 为常数

(a) 试求常数 a 的值。

(b) 如果输入 $x[n]$ 为

$$x[n] = 1, \text{ 对所有 } n \text{ 值}$$

试求响应 $y[n]$ 。

10.35. 在 10.8.1 节中讨论冲激不变法时，已经研究了具有 (10.84) 形式的仅有一阶极点的 $H_o(s)$ 。本题中，我们研究式 (10.84) 中存在的二阶极点在式 (10.87) 中将如何反映。为此，研究下列形式的 $H_o(s)$ ，

$$H_o(s) = \frac{A}{(s-s_0)^2}$$

(a) 参考表 9.2 求 $h_o(t)$ (假定系统是因果性的)。

(b) 试确定 $h_d[n]$ ($h_d[n]$ 定义为 $h_d[n] = h_o[nT]$)。

(c) 参考表 10.2，求 $h_d[n]$ 的 z 变换 $H_d(z)$ 。

(d) 通过把冲激不变法应用于连续时间系统

$$H_c(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

获得离散时间系统, 确定这个系统的系统函数和极点—零点图。

- 10.36. 假定 $h_c(t)$, $s_c(t)$ 和 $H_c(s)$ 表示连续时间线性时不变滤波器的冲激响应、阶跃响应和系统函数。并设 $h[n]$ 、 $s[n]$ 和 $H(z)$ 表示离散时间线性移位不变数字滤波器的单位抽样响应、跃阶响应和系统函数。

(a) 如果 $h[n] = h_c(nT)$, 是否有 $s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h_c(kT)$ 。

(b) 如果 $s[n] = s_c(nT)$, 是否有 $h[n] = h_c(nT)$ 。

- 10.37. 研究一个具有系统函数

$$H_c(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$$

和冲激响应 $h_c(t)$ 的连续时间系统。试求基于下列条件, 根据该系统设计的离散时间系统的系统函数 $H_d(z)$ 。

(a) 冲激不变法, 即,

$$h_d[n] = h_c[nT]$$

(b) 阶跃不变法, 即,

$$s_d[n] = s_c[nT]$$

其中

$$s_d[n] = \sum_{k=-\infty}^n h_d[k]$$

和

$$s_c(t) = \int_{-\infty}^t h_c(\tau) d\tau$$

- 10.38. 研究一个连续时间系统, 其冲激响应为 $h_c(t)$, 频率响应为 $H_c(j\omega)$, 如图 P 10.38 所示, 假设该系统能够用如下形式的线性常系数微分方程来表示,

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y_c(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x_c(t)}{dt^k}$$

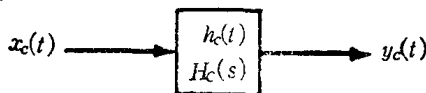


图 P 10.38

我们想用离散时间系统近似这个系统。用前向差分来近似微分运算, 即, 作如下近似,

$$\left. \frac{dx_c(t)}{dt} \right|_{t=nT} \approx \frac{x_c(nT+T) - x_c(nT)}{T} = \frac{x[n+1] - x[n]}{T}$$

因此, 我们定义 $x[n]$ 的一阶前向差分为

$$\nabla^{(1)}\{x(n)\} = \frac{x[n+1] - x[n]}{T}$$

$x[n]$ 的 k 阶前向差分为

$$\nabla^{(k)}\{x[n]\} = \nabla^{(k-1)}\{\nabla^{(1)}\{x[n]\}\},$$

式中 $\nabla^{(0)}\{x[n]\} = x[n]$, 则离散时间系统的差分方程将确定为

$$\sum_{k=0}^N a_k \nabla^{(k)}\{y[n]\} = \sum_{k=0}^M b_k \nabla^{(k)}\{x[n]\}$$

(a) 如果 $h_c(t)$ 的拉普拉斯变换 $H_c(s)$ 为

$$H_c(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

试确定离散时间系统的系统函数 $H_d(z)$ 。

- (b) 一般情况下, $H_c(s)$ 和 $H_d(z)$ 之间的关系是什么?
- (c) 我们知道, 抽样可以设想为 s 平面的 $j\omega$ 轴映射到 z 平面的单位圆, 那末通过差分近似, s 平面中 $j\omega$ 轴映射到 z 平面上是什么围线?
- (d) 如果连续时间滤波器 $H_c(s)$ 是稳定的, 那末离散时间滤波器 $H_d(z)$ 能保证是稳定的吗? (假设两个系统都是因果性的)。

10.39. 研究一个输入为 $x_c(t)$ 和输出为 $y_c(t)$ 的连续时间滤波器, 该滤波器可用下列形式的线性常系数微分方程描述,

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y_c(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x_c(t)}{dt^k}$$

通过用中心差分代替导数把上述滤波器映射成具有输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 的离散时间滤波器。具体说, 令 $\nabla^{(k)}\{x[n]\}$ 表示 $x[n]$ 的 k 阶中心差分, 定义如下:

$$\begin{aligned}\nabla^{(0)}\{x[n]\} &= x[n] \\ \nabla^{(1)}\{x[n]\} &= \left[\frac{x[n+1] + x[n-1]}{2} \right] \\ \nabla^{(k)}\{x[n]\} &= \nabla^{(1)}[\nabla^{(k-1)}\{x[n]\}] \end{aligned}$$

那末, 根据微分方程(P 10.39)得到数字滤波器的差分方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k \nabla^{(k)}\{y[n]\} = \sum_{k=0}^M b_k \nabla^{(k)}\{x[n]\}$$

- (a) 如果连续时间滤波器的传递函数是 $H_c(s)$, 相应的离散时间滤波器的传递函数是 $H_d(z)$, 试确定 $H_d(z)$ 与 $H_c(s)$ 具有什么关系?
- (b) 当连续时间频率响应 $H_c(j\omega)$ 如图 P 10.39 所示, 根据 (a) 所确定的映射结果, 画出离散时间频率响应 $H_d(e^{j\Omega})$ 。

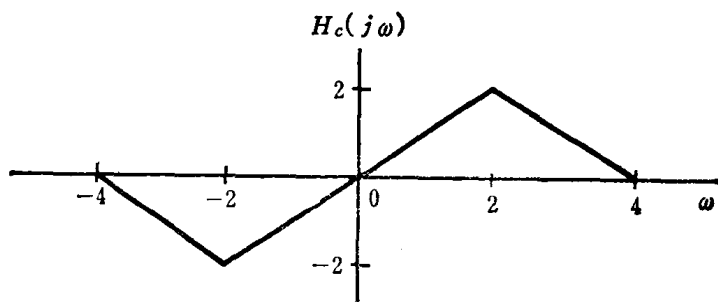


图 P 10.39

- (c) 假设 $H_c(s)$ 相当于一个因果稳定滤波器, 如果规定 $H_d(z)$ 的收敛域包含单位圆, 那末, $H_d(z)$ 必须相当于一个因果滤波器吗?

10.40. 如 10.8.3 节所述, 从 s 平面映射到 z 平面的双线性变换, 可以解释为由于在数值解积分微分方程中使用梯形规则所引起的。

- (a) 研究一个连续时间系统, 其微分方程为

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad (\text{P 10.40-1})$$

或等效为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (\text{P 10.40-2})$$

试确定该连续时间系统的系统函数 $H(s)$ 。

在数值分析中, 通常所说梯形积分法则是通过把连续时间函数近似为一组邻接的梯形, 如图 P 10.40(a) 所示, 然后, 将它们的面积相加就可以算出总的积分值。每个梯形面积 A 为

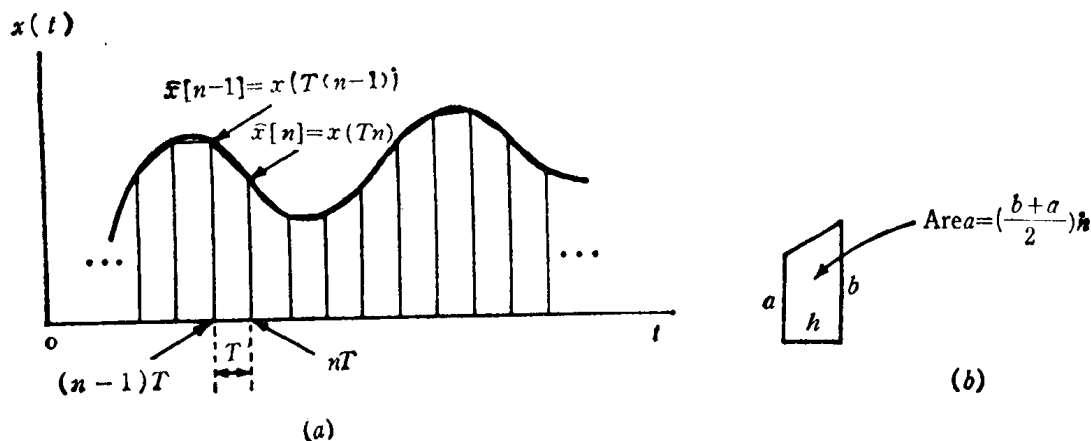


图 P 10.40

$$A = \left(\frac{b+a}{2} \right) h$$

其尺寸表示在图 P 10.40(b) 中。

(b) 在 $x[(n-1)T]$ 和 $x[nT]$ 之间梯形近似中的面积 A_n 是什么?

(c) 根据式(P 10.40-2), $y[nT]$ 表示到时间 $t=nT$ 为止曲线 $x(t)$ 下面的面积。假定 $\hat{y}[n]$ 表示利用梯形积分法则所获得的 $y[nT]$ 的近似值, 即

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=-\infty}^n A_k$$

证明:

$$\hat{y}[n] = \hat{y}[n-1] + A_n$$

(d) 当 $\hat{z}[n]$ 定义为 $\hat{z}[n] = x[nT]$ 时, 证明对式(P 10.40.2)的梯形法则近似为:

$$\hat{y}[n] = \hat{y}[n-1] + \frac{T}{2} \{ \hat{z}[n-1] + \hat{z}[n] \} \quad (\text{P 10.40-3})$$

(e) 试确定相应于(d)中差分方程的系统函数。详细证明该系统函数和通过双线性变换应用到对应于式(P 10.40-1)的连续时间系统时所获得的系统函数是一样的。

10.41. 连续时间二阶带通滤波器的系统函数为

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{P 10.41})$$

这种滤波器的中心频率 ω_0 是 $|H(j\omega)|^2$ 达到最大值时所对应的频率, 而定义半功率点的频率为 $|H(j\omega)|^2$ 等于它在 $\omega = \omega_0$ 处的最大值的一半时所对应的频率, 定义带宽为 ω_0 两边半功率点对应频率之间的频带宽度。

(a) $0 < \zeta \leq 1$ 和 $\omega_n \gg 0$ 时, 画出 $H(s)$ 的极点—零点图, 并通过分析极点和零点到 $j\omega$ 轴的矢量画出 $|H(j\omega)|$ 略图。并证明 ω_0 近似等于 ω_n 和带宽近似等于 $2\zeta\omega_n$ 。

(b) 现在希望通过双线性变换应用到式(P 10.41)的系统来设计一个离散时间二阶带通滤波器。该离散时间通带滤波器具有 $\Omega_0 = \pi/4$ 的中心频率和 0.01π 的带宽。试用适当的近似法, 确定相应的连续时间滤波器的中心频率和带宽。

(c) 对应(b)①中的中心频率和带宽, 及式(10.106)中取 $T=2$ 的情况, 确定式(P. 10.41)中的 ζ 和 ω_n , 以便当双线性变换应用到 $H(s)$ 时, 能形成所需要的离散时间滤波器。

10.42. 通过在传递函数中用 $1/s$ 代替 s , 即可从一个连续时间低通滤波器获得一个连续时间高通滤波器, 即, 如果 $G_o(s)$ 是低通滤波器的传递函数, 若

$$H_o(s) = G_o\left(\frac{1}{s}\right)$$

则 $H_o(s)$ 就是高通滤波器的传递函数, 假设利用双线性变换分别从 $G(s)$ 和 $H_o(s)$ 获得离散时间

①原书误为(a)。——译者注

低通滤波器 $G_d(z)$ 和离散时间高通滤波器 $H_d(z)$ 。试证明 $H_d(z)$ 可在 $G_d(z)$ 中用 z 的某种函数 (用 $m(z)$ 表示) 代替 z 而得到, 试确定 $m(z)$ 。以上所述表示了把一个低通滤波器变换到高通滤波器的一种离散时间变换。

10.43. 设计一个具有频率响应为 $H(e^{j\Omega})$ 的离散时间低通滤波器以满足下列技术指标:

$$0.8 < |H(e^{j\Omega})| < 1.2, \text{ 对于 } 0 \leq \Omega \leq 0.2\pi$$

$$|H(e^{j\Omega})| < 0.2, \text{ 对于 } 0.8\pi \leq |\Omega| \leq \pi$$

设计方法是把双线性变换应用到一个合适的连续时间巴特沃兹滤波器上。

(a) 当式 (10.106) 和式 (10.111) 中 $T=2$ 时, 试确定连续时间巴特沃兹滤波器所必需的技术指标。使得当通过双线性变换的映射时, 这个巴特沃兹滤波器能得出所需的离散时间滤波器。

(b) 试确定满足 (a) 中技术指标的最低阶连续时间巴特沃兹滤波器。

(c) 把双线性变换应用到 (b) 中滤波器, 以确定离散时间滤波器的传递函数。

(d) 当 $T=1$ 时, 重复做 (a) ~ (c)。

(e) 首先比较 (c) 和 (d) 中最后所得到的离散时间滤波器, 尔后讨论式 (10.106) 和式 (10.111) 中的参数 T 对按 (a) ~ (c) 方法获得的离散时间滤波器的一般影响。

10.44. 通信系统中经常碰到的一种系统是 90° 分相器, 图 P 10.44—1 描绘了它的连续时间形式。该系统

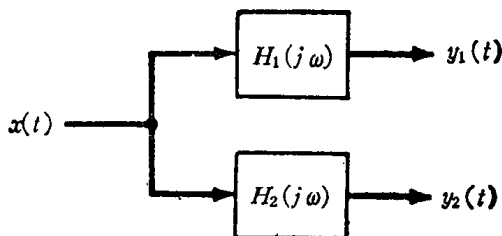


图 P 10.44—1

的 $H_1(j\omega)$ 和 $H_2(j\omega)$ 具有下列性质

$$H_1(j\omega) = e^{j\theta_1(\omega)},$$

$$H_2(j\omega) = e^{j\theta_2(\omega)},$$

式中

$$\theta_1(\omega) - \theta_2(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega < 0. \end{cases}$$

在图 P 10.44—2 中绘出了一个数字 90° 分相器, 其中

$$G_1(e^{j\Omega}) = e^{j\phi_1(\Omega)},$$

$$G_2(e^{j\Omega}) = e^{j\phi_2(\Omega)},$$

式中

$$\phi_1(\Omega) - \phi_2(\Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < \Omega < \pi, \\ -\frac{\pi}{2}, & -\pi < \Omega < 0. \end{cases}$$

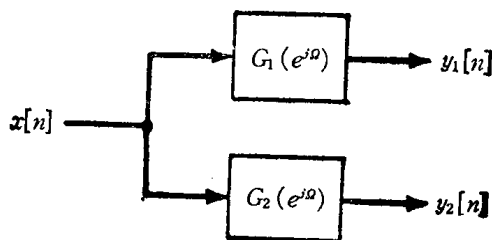


图 P 10.44—2

如果连续时间90°分相器的 $H_1(j\omega)$ 和 $H_2(j\omega)$ 利用双线性变换分别映射成数字滤波器的 $G_1(e^{j\Omega})$ 和 $G_2(e^{j\Omega})$, 试确定其结果是否是一个数字90°分相器。

- 10.45. 设计一具有系统函数 $H_d(z)$ 的数字滤波器, 该滤波器是由具有有理系统函数 $H_o(s)$ 的连续时间滤波器通过下面变换

$$H_d(z) = H_o(s) \Big|_{s = \beta \frac{1-z^\alpha}{1+z^\alpha}}$$

得到的, 式中 α 是一个非零整数, β 是实数。

- (a) 如果 $\alpha > 0$, 试确定 β 的数值范围, 使得一个具有有理系统函数 $H_o(s)$ 的稳定、因果连续时间滤波器, 总可导致一个具有有理系统函数 $H_d(z)$ 的稳定、因果的数字滤波器。
 (b) 如果 $\alpha < 0$, 试确定 β 的数值范围, 使得一个具有有理 $H_o(s)$ 的稳定、因果连续时间滤波器, 总能导致一个具有有理 $H_d(z)$ 的稳定、因果的数字滤波器。
 (c) $\alpha = -1$ 时, 试确定 s 平面上的 $j\omega$ 轴映射成 z 平面上什么样的围线。
 (d) 已知如图 P 10.45 所示的 $H_o(j\omega)$, 试画出 $\beta = 1$, $\alpha = -1$ 时的 $H_d(e^{j\Omega})$ 。

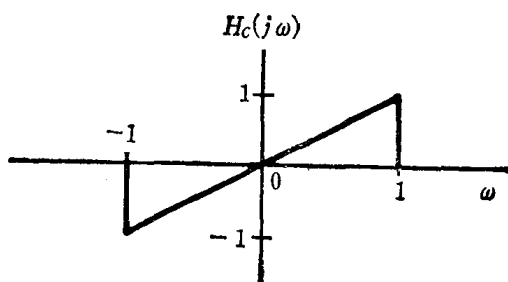


图 P 10.45

- 10.46. 试求习题10.1中每一序列的单边 z 变换。

- 10.47. 如果 $\tilde{X}(z)$ 表示 $x[n]$ 的单边 z 变换, 试求用 $\tilde{X}(z)$ 表示的下列单边 z 变换 www.blogoil.com

(a) $x[n+1]$;

(b) $x[n-3]$;

(c) $\sum_{k=-\infty}^n x[k]$.

- 10.48. 对下列每一个差分方程和相应的输入及初始条件, 试用单边 z 变换确定响应 $y[n]$ 。

(a) $y[n] + 3y[n-1] = x[n]$,

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad y[-1] = 1.$$

(b) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$,

$$x[n] = u[n], \quad y[-1] = 0.$$

(c) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$,

$$x[n] = u[n], \quad y[-1] = 1.$$

第十一章 线性反馈系统

11.0 引言

人们早已认识到,在许多情况下,利用反馈,即利用系统的输出以控制或修正其输入,会得到一些特别的好处。例如,在机电系统中这是很平常的,如为使一台电动机的转轴位置保持在一恒定角度,可测量传动轴预期位置 and 实际位置之间的误差,并利用这一误差信号以合适的方向转动传动轴。这种情况如图11.1所示,图中所示为用一个直流电动机使望远镜精确瞄准。

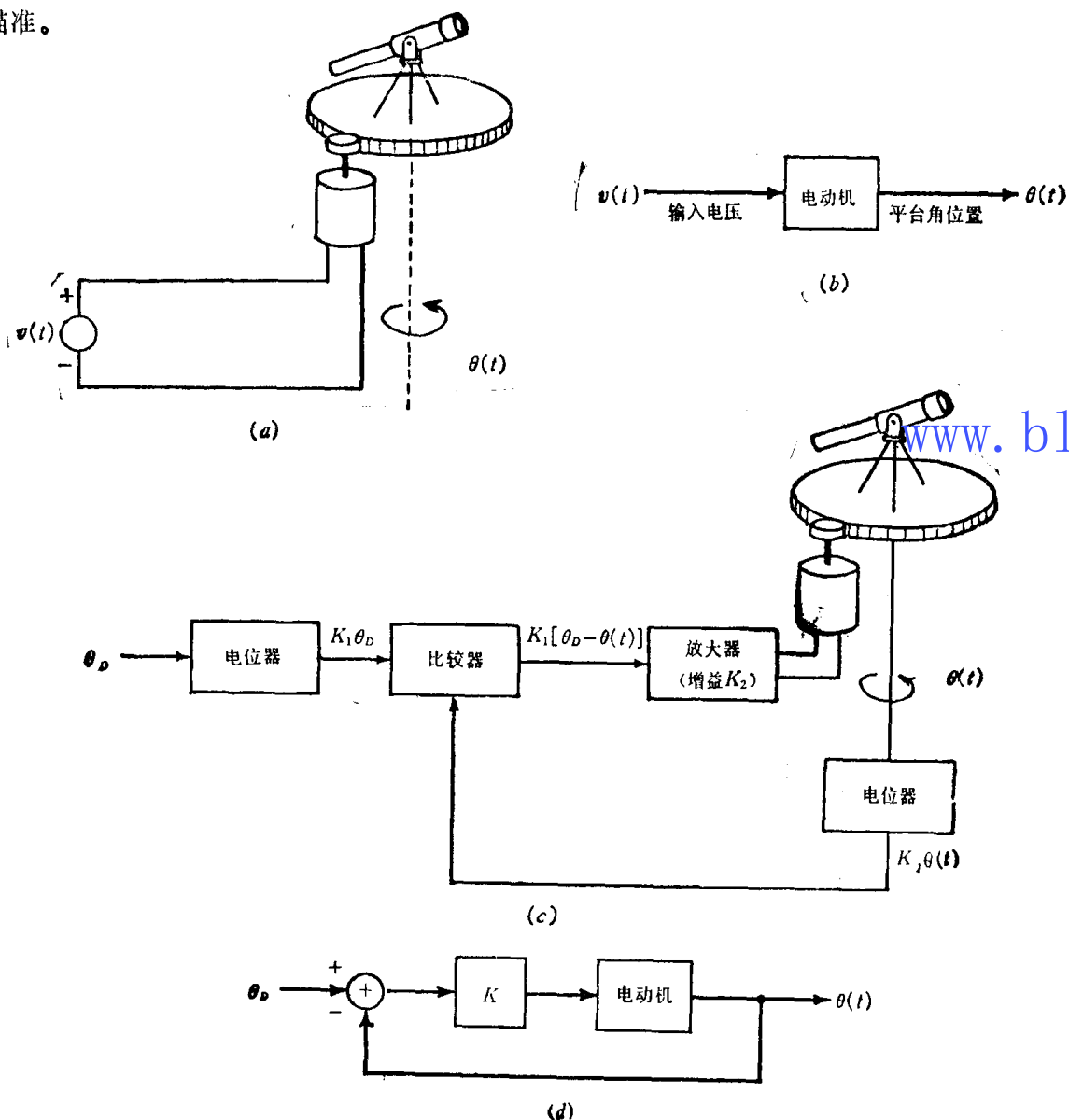


图11.1 利用反馈控制望远镜角度位置: (a)驱动望远镜平台的直流电动机; (b)(a)图系统的方框图; (c)望远镜瞄准反馈系统; (d)(c)图系统的方框图(图中 $K=K_1K_2$)

在图 11.1(a) 中, 用图形表示这种系统的大概情况, 图中 $v(t)$ 是电动机的输入电压, $\theta(t)$ 是望远镜平台的角位置。电动机驱动瞄准系统的方框图示于图 11.1(b)。控制望远镜角位置的反馈系统示于图 11.1(c), 而等效于该系统的方框图示于图 11.1(d), 这个系统的外部输入或参考输入是预定的传动轴角度 θ_D , 用一个电位器把这一预定的角度变换为正比于 θ_D 的电压 $k_1\theta_D$ 。类似地, 另一个电位器产生一个正比于实际平台角度的电压 $k_1\theta(t)$ 。比较这两个电压产生一个误差电压 $k_1[\theta_D - \theta(t)]$, 此电压经放大后用来驱动电动机。

图 11.1 绘出了两种不同的望远镜瞄准方法。其中之一是图 11.1(c) 和 (d) 的反馈系统。这里, 我们必须提供的输入是预定角度或参考角度 θ_D 。另一方面, 若起始角、预定角以及详细的电动机传动轴组件的电学和力学特性已确切知道, 我们就可精确地规定输入电压 $v(t)$ 随时间变化的曲线。此电压使传动轴先是加速然后减速, 从而使平台在不用反馈的情况下停止在预定的位置上, 如图 11.1(a) 和 (b) 所示那样。与图 11.1(c) 和 (d) 中的闭环系统相对照, 按图 11.1(a) 和 (b) 所示方式运行的系统, 一般称为开环系统。在实际场合, 采用闭环系统而不采用开环系统来控制电动机转轴的角度有明显的优点。例如, 在闭环系统中, 当轴已转到正确位置时, 偏离这一位置的任何扰动会被传感, 而得出的误差信号可用来提供校正。而在开环系统中, 不存在提供校正的机理。作为闭环系统的另一个优点, 可考虑在模拟电动机——传动轴组件特性时误差的影响。在开环系统中, 为设计正确的输入, 需要有系统的精确的特性描述; 而在闭环系统中, 输入仅是所希望的传动轴角度, 而并不需要有关系统的知识。闭环系统对于扰动以及对系统的不确切了解的不敏感性, 是反馈系统的两个重要的优点。

电动机控制只是反馈起重要作用的大量例子之一。反馈的类似应用, 可在诸如化工过程控制、自动燃料系统、房屋保温系统和空间系统等广泛多样的应用中看到。此外, 反馈也存在于许多生物过程和人类运动控制过程中, 例如, 当我们用手抓一个物体时, 在抓的过程中通常目测监视手和目标间的距离, 以便手的速度可以平稳地随手与目标间的距离 (即误差) 减小而减小。利用系统输出 (手的位置) 以控制输入的效果, 可由交替地在用或不用视觉反馈的情况下抓物体而清楚地说明。

反馈除了用来提供一个可以减小对扰动和对被控系统建模误差敏感度的误差修正机制以外, 它的另一个重要性能是能使一个本来不稳定的系统变得稳定的潜力。我们来考虑试图平衡手掌中扫把的问题 [图 11.2(a)], 若手保持稳定, 则小的扰动 (例如微风和手的偶然运

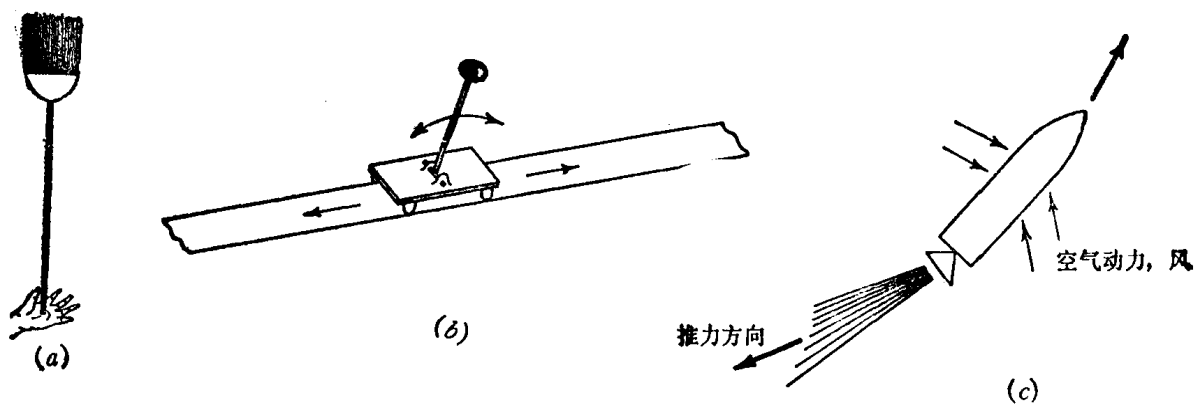


图 11.2 反馈用于使不稳定系统稳定的三个例子: (a) 扫把的平衡; (b) 倒置摆; (c) 火箭轨道的控制

动)会导致扫把跌落。当然,假如人们精确地知道会发生什么样的扰动,且可以完美地控制手的运动,就可能预先确定怎样移动手以平衡扫把,但这显然是不切实际的。然而,由总是朝扫把正要倒下的方向移动手,扫把就可被平衡,当然,这需要反馈以感知扫把倒下的方向。与扫把平衡密切相关的第二个例子是所谓倒置摆控制的问题,如图11.2(b)所示,倒置摆是由顶端带有一个重锤的细杆组成,细杆的底部安装在一辆可沿轨道的两个方向移动的小车上,若小车保持不动,则倒置摆将倒下。使倒置摆稳定的问题,就是一个控制小车的运动以保持摆垂直的反馈系统的设计问题,这个例子在习题11.6中进行研究。在图11.2(c)中,我们用图形说明了第三个例子,它与扫把的平衡问题仍然有某种类似性,这是一个火箭轨道控制问题。在这种情况下,与用手的移动来补偿扫把位置的扰动相似,火箭推力的方向用来修正空气动力和风扰动的变化,否则会引起火箭偏离其航线。反馈仍然是重要的,因为这些力和扰动不可能精确预知。

上面的例子提供了为什么反馈可能是有用的一些示意。在后面两节中,我们介绍连续时间和离散时间两种情况下,线性反馈系统的基本方框图和基本方程式,并更加详细地讨论反馈的一些应用。我们还要指出,为什么反馈除了有用的影响外还可能有其有害的作用。反馈的各种应用和影响的这些例子,将在一定程度上使我们认识到,反馈系统参数的改变怎样导致系统特性的改变。在设计具有预定特性的反馈系统时,弄清楚这个关系是很重要的。然后,以此为基础,在本章以后各节中,将阐述在连续时间和离散时间反馈系统的设计和分析中有重要价值的几种特殊方法。

11.1 线性反馈系统

连续时间线性反馈系统的一般形式,如图11.3(a)所示,而离散时间线性反馈系统,如图11.3(b)所示。

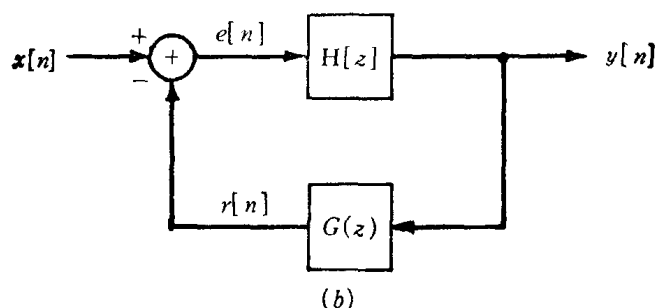
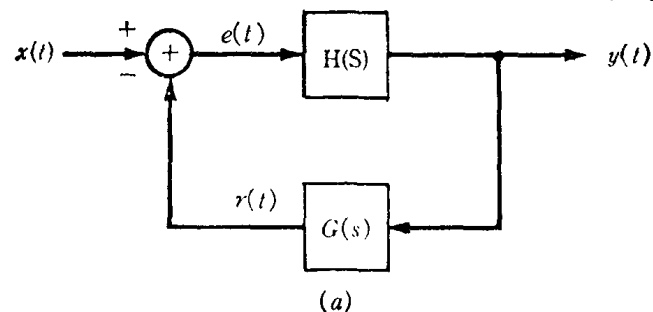


图11.3 基本的反馈系统形式, (a) 连续时间; (b) 离散时间

把图11.3(a)和(b)中的系统限于因果系统是自然的,因为这种系统中反馈的应用是最典型的,本章中将假定始终只涉及因果系统。也应当注意,图11.3(a)中所用的习惯规定是

输入 $x(t)$ 减去反馈信号 $r(t)$ 以形成 $e(t)$ ，在离散时间系统中采用相同的习惯规定。在历史上，这种规定是在跟踪系统中产生的，其中 $x(t)$ 代表一个预定的指令，而 $e(t)$ 代表指令 $x(t)$ 和实际响应 $r(t)$ 之间的误差，例如，前述望远镜瞄准的问题讨论中就是这种情况。在更加一般的反馈系统中， $e(t)$ 和 $e[n]$ 也许并不相当于误差信号，或者也许可直接被看作是误差信号。

图11.3(a)中的系统函数 $H(s)$ 或图11.3(b)中的 $H(z)$ ，被称作前向支路系统函数，而 $G(s)$ 或 $G(z)$ 称作反馈支路系统函数，图11.3(a)或(b)的整个系统的系统函数称作闭环系统函数，并将用 $Q(s)$ 和 $Q(z)$ 表示。在9.7.2节和10.7.2节中，我们导出过LTI系统反馈互连的系统函数表达式，把这些结果应用于图11.3的反馈系统时，得到

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (11.1)$$

$$Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (11.2)$$

式(11.1)和(11.2)是用于线性反馈系统研究的基本方程。在以后各节中，我们用这些方程为基础，以深入了解反馈系统的性质，并导出一些反馈系统的分析方法。

11.2 反馈的一些应用和结果

在引言中，我们对反馈系统的某些性质和应用作了简短、直观的考察。这一节我们从基本反馈方程(11.1)和(11.2)出发，进一步定量地分析反馈系统的一些特性和应用。本节的目的对反馈系统的应用作一介绍，以便对反馈系统的应用有所了解，而不对任何具体应用作详细的阐述。在以后各节，我们再比较深入地着重阐述几种分析反馈系统的具体方法，这些方法对于包括许多即将叙述的应用在内的大量问题的研究是有用的。

11.2.1 逆系统设计

在某些应用中，人们想要综合成某一给定连续时间系统的逆系统。假设该系统具有系统函数 $P(s)$ ，并设有如图11.4所示的反馈系统。在 $H(s)=K$ 和 $G(s)=P(s)$ 时，应用方

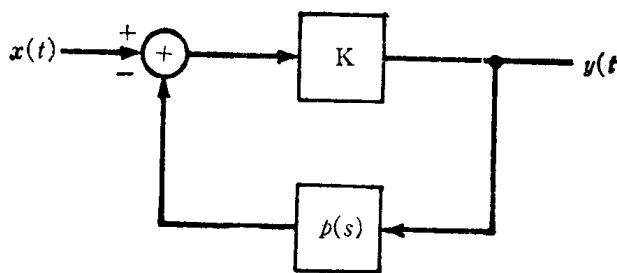


图11.4 用于实现系统函数为 $P(s)$ 的逆系统的反馈系统形式

程(11.1)，可得闭环系统函数为

$$Q(s) = \frac{K}{1 + KP(s)} \quad (11.3)$$

若增益 K 足够大，致使 $KP(s) \gg 1$ ，则

$$Q(s) \approx \frac{1}{P(s)} \quad (11.4)$$

因此, 图11.4的反馈系统近似于系统函数 $P(s)$ 的逆系统。

重要的是, 要注意到式(11.4)中所得的结果要求增益 K 足够高, 但另一方面与增益的准确数值无关。提供这种增益的一类器件称作运算放大器, 它被广泛地应用于各种反馈系统^①。这个一般性原理的一个普通的应用, 是积分器的实现。电容器具有这样一种性质, 即流经电容器的电流与电容器上电压的导数成正比, 在运算放大器前后的反馈支路中插入一个电容器, 就倒置成积分器, 这一具体应用在习题11.3中作更详细的研究。

虽然我们的大多数讨论限于线性系统, 但值得指出的是, 和上面相同的基本方法, 常常用来倒置非线性系统, 例如, 输出是输入对数的系统, 一般可利用二极管的指数电流——电压特性作为运算放大器的输出输入端间的反馈元件来实现, 这在习题11.3中作更详细的研究。

11.2.2 非理想单元的补偿

反馈的另一种普通应用, 是对开环系统的某些非理想特性进行校正。例如, 反馈常用于在给定频带中具有恒定增益的放大器的设计中。具体说, 考虑一个开环频率响应 $H(j\omega)$, 它在规定的频带内提供放大, 但在该频带内放大倍数不是恒定的。若图11.3(a)中的 $G(s)$ 选为常数 $G(s)=K$, 则闭环频率响应 $Q(j\omega)$ 是

$$Q(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + KH(j\omega)} \quad (11.5)$$

若在指定频率范围内有

$$|KH(j\omega)| \gg 1 \quad (11.6)$$

则

$$Q(j\omega) \approx \frac{1}{K} \quad (11.7)$$

亦即, 闭环频率响应是所希望的恒定值。当然, 这里假定反馈支路中的系统可以设计得使其频率响应 $G(j\omega)$ 在指定频带上具有恒定增益 K , 这恰好是我们已假定 $H(j\omega)$ 不能具备的性质。然而, 对 $H(j\omega)$ 与对 $G(j\omega)$ 的要求差别在于: $H(j\omega)$ 必须提供放大, 而由式(11.7)可以看出, 为使整个闭环系统的增益大于1, K 必须小于1, 亦即, $G(j\omega)$ 在规定的频率范围内必须是一个衰减器。而一般来说, 一个具有近似平坦频率特性的衰减器, 较之具有平坦频率响应的放大器要容易实现得多(因为衰减器可由无源器件构成)。

然而, 利用反馈使频率响应展平要招致一些损失, 由式(11.6)和(11.7), 可以看出,

$$|H(j\omega)| \gg \frac{1}{K} \approx Q(j\omega)$$

因此, 闭环增益将明显地小于开环增益。这一结果具体应用于扩展放大器带宽, 在习题11.1中探讨。

11.2.3 不稳定系统的稳定化

如在引言中所述, 反馈系统的另一种重要应用, 是使在没有反馈时不稳定的系统稳定化。利用反馈稳定作用的例子包括火箭轨道控制, 核电厂核反应堆的控制, 飞机的稳定作用

^① 见 J.K. Roberge, Operational Amplifiers Theory and Practice (New York: John Wiley and Sons, INC., 1975)。

以及动物种群量的自然控制和受限控制。

为说明何以反馈可用以使一个不稳定的系统稳定,我们来考虑一个简单的一阶连续时间系统

$$H(s) = \frac{b}{s-a} \quad (11.8)$$

当 $a > 0$ 时,系统是不稳定的。选定系统函数 $G(s)$ 为恒定增益 K 时,式(11.1)中的闭环系统函数为

$$Q(s) = \frac{H(s)}{1+KH(s)} = \frac{b}{s-a+Kb} \quad (11.9)$$

若极点移入 s 平面的左半平面时,闭环系统将是稳定的,当

$$K > \frac{a}{b} \quad (11.10)$$

时就是这种情况。因此,若在反馈环路中选择增益满足式(11.10),就能在这一恒定增益下使系统稳定。由于反馈的信号正比于系统的输出,这种类型的反馈系统称为比例反馈系统。

作为另一个例子,我们来考虑二阶系统

$$H(s) = \frac{b}{s^2+a} \quad (11.11)$$

若 $a > 0$,系统是一振荡器(即, $H(s)$ 在 $j\omega$ 轴上有极点)且系统的冲激响应是正弦波;若 $a < 0$, $H(s)$ 在右半平面有一个极点,因此,在以上两种情况下系统都是不稳定的。事实上,正如在习题11.6中研究的,当 $a < 0$ 时,式(11.11)中的系统函数可用来模拟在引言中描述过的倒置摆的动态特性。

对这个例子,假定先考虑采用比例反馈,即取

$$G(s) = K \quad (11.12)$$

在这种情况下,代入到式(11.1),可得

$$Q(s) = \frac{b}{s^2+(a+Kb)} \quad (11.13)$$

在第4章和第9章关于二阶系统的讨论中,曾经研究过如下形式的传递函数

$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \quad (11.14)$$

为使这样的系统稳定, ω_n^2 必须是正实数(即 $\omega_n^2 > 0$)而 ζ 必须为正数(相当于正阻尼)。比较式(11.13)和(11.14),可看出用比例反馈只能影响 ω_n^2 的数值,结果,因为不能引入任何阻尼,就不能使系统稳定。

为提出一种可用于稳定这种系统的反馈型式,回顾一下4.12节中在分析二阶系统时描述过的质量——弹簧——减震器机械系统,对于这个系统,可以看到系统中的阻尼作用是由于包含了一个减震器的缘故,它提供了一个与质量速度成比例的回复力。于是启发我们考虑用比例加微分的反馈,亦即,用如下形式的 $G(s)$

$$G(s) = K_1 + K_2 s \quad (11.15)$$

由此得到

$$Q(s) = \frac{b}{s^2+bK_2 s+(a+K_1 b)} \quad (11.16)$$

只要我们选择 K_1 和 K_2 以保证

$$bK_2 > 0, a+K_1 b > 0 \quad (11.17)$$

则闭环极点将位于左半平面，因此闭环系统是稳定的。

上述讨论说明反馈怎样用来稳定连续时间系统。对于离散时间系统来说，不稳定系统的稳定化同样是反馈的重要应用。一个没有反馈时不稳定的离散时间系统的普通例子，是种群量增长模型。为了说明反馈怎样可用于防止种群量的无限制增长，我们来考虑单一小动物种族总数计算的简单模型。令 $y[n]$ 表示第 n 代的动物数目，并假定不存在任何阻碍增长的影响，出生率是使总数每代加倍。在此情况下，这类动物总数不断变化的基本方程为

$$y[n] = 2y[n-1] + e[n] \quad (11.18)$$

式中 $e[n]$ 表示由外界影响引起总数的任何增加或减少。

这一种群量模型显然是不稳定的，它有一个指数增长的脉冲响应。然而，在任何生态系统中，总存在一些抑制种群增长的因素。例如，当动物数目很大时，供给这类动物的食物限制，将通过其总数增长的下降而显示出来。类似地，若物种有天敌，则当捕获物的总数增长时，作为掠夺者的总数也将上升的假定是合理的，因此天敌的存在将使物种增长放慢。除了以上那些自然影响之外，还可能有人为的影响，其目的是在于控制种群量。例如，食物供应以及掠夺者数目的控制将影响那些天然作用。此外，湖泊的禁渔或从其他区域引进小动物，可用来使总数加速增长，而狩猎或捕鱼控制也可提供调节作用。因为在这一阶段中描述的所有调节作用都取决于物种总数的多少（自然的和人为的两者），故它们代表了反馈作用。

根据前面的讨论，可以把 $e[n]$ 分为两部分，

$$e[n] = x[n] - r[n] \quad (11.19)$$

其中 $r[n]$ 代表以上描述的调节作用的影响，而 $x[n]$ 包括了任何其他的外部影响，例如动物的迁移或诸如自然灾害或疾病流行之类的异常事件的影响。注意在式 (11.19) 中包含了一个减号，这与我们采用负反馈的习惯相符，但在这里还有其物理解释，由于种群量的无阻碍增长是不稳定的，因此反馈项所引起的是延缓增长的作用。为了解释种群量是怎么能被这一反馈项的存在而受到控制，假设调节的影响导致每一代的总数以固定比例 β 减少，因为根据我们的模型，每一代残存部分的数目要加倍，故得到

$$y[n] = 2(1-\beta)y[n-1] + x[n] \quad (11.20)$$

把式 (11.20) 与式 (11.18)、(11.19) 相比较，可以看出，这意味着

$$r[n] = 2\beta y[n-1] \quad (11.21)$$

式中，系数 2 表示现存总数的减少将导致下一代出生数降低的事实。

这一反馈应用的例子，由图 11.5 说明，图中前向支路的系统函数由式 (11.8) 求得为

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad (11.22)$$

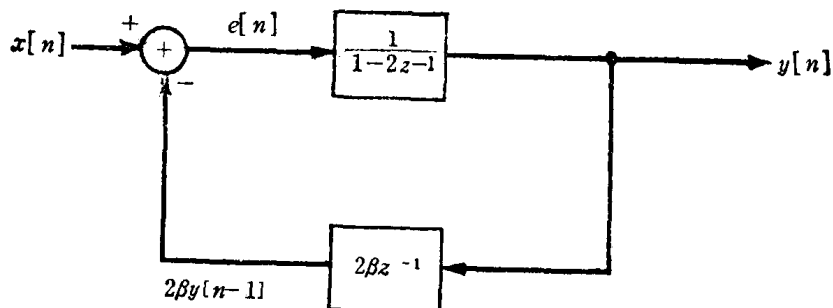


图 11.5 种群量动态特性简单反馈模型框图

而由式 (11.21)，反馈支路的系统函数为

$$G(z) = \beta z^{-1} \quad (11.23)$$

因此, 闭环系统函数为

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{1}{1 - 2(1 - \beta)z^{-1}} \quad (11.24)$$

若 $\beta < 1/2$, 闭环系统仍然是不稳定的, 而若 $\frac{1}{2} < \beta < 1$, 则系统是稳定的。

显然, 这个种群增长和控制的例子是极为简化的。例如, 式(11·21)的反馈模型并未考虑由于天敌的存在而引起的部分 $r[n]$ 与掠夺者的总数有关, 而掠夺者总数又有其自己的增长动态特性的情况。要包括这样的影响可通过使反馈模型更加复杂, 从而能反映生态系统中其他动态变化的存在。所得出的相互制约的物种发展模型, 在生态学研究是非常重要的。然而, 即使没有这些影响加入, 这里描述的简单模型已能说明反馈如何能防止物种的无限止繁殖或灭绝的基本概念。尤其是, 我们可初步看到怎样采用人工诱导的因素。例如, 若一次自然灾害或天敌总数的增加而引起物种总数的急剧降低时, 可采取对狩猎或捕鱼的严格限制和努力加速增长种群量来降低 β 值, 以便使系统不稳定而急剧增长, 直到正常规模的种群量再次获得为止。

还要注意, 对这类问题, 在通常情况下人们并不要求有严格的稳定。具体说, 若调节作用是使得 $\beta = 1/2$, 且若所有其他外部影响为零 (即, 若 $x[n] = 0$), 则 $y[n] = y[n-1]$, 因此, 只要 $x[n]$ 很小, 且经几代的平均值为零, $\beta = 1/2$ 时, 将导致一个基本上不变的种群量。然而, 对于这一 β 值, 系统是不稳定的, 因为在这种情况下, 式(11·20)简化为

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

亦即, 系统等效于一个累加器。因此, 若 $x[n]$ 是一个单位阶跃, 输出就会无限止地增长。因此, 若预料 $x[n]$ 有稳定的趋势, 例如, 这可由于小动物迁入一个区域所引起, 则为稳定此系统而保持种群量在限度以内, 以维持生态平衡, 就应当采用 $\beta > \frac{1}{2}$ 。

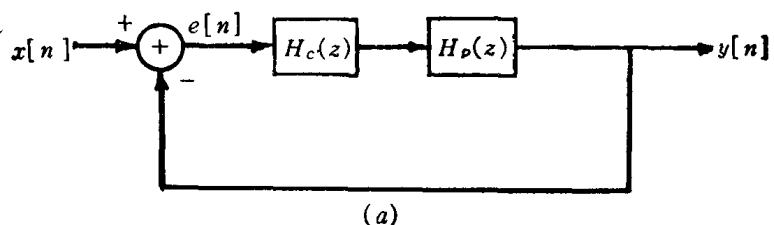
除了刚才已描述的一类问题以外, 离散时间反馈技术在包括与连续时间系统有关的广泛多样的应用中, 也是很重要的。具体说, 由于数字系统异常的灵活性, 使得抽样数据反馈系统的实现成为一种非常吸引人的方案。在这样的系统中, 连续时间系统的输出先被抽样, 对抽样得到的序列进行一些离散处理, 并形成反馈信号的离散序列, 然后, 这个序列被变换为一个连续时间信号, 它被送回并从外部输入中减去, 以形成连续时间系统的实际输入。习题11.14研究了一个采用抽样数据的反馈系统, 这是使一个不稳定连续时间系统达到稳定的例子。

11.2.4 跟踪系统

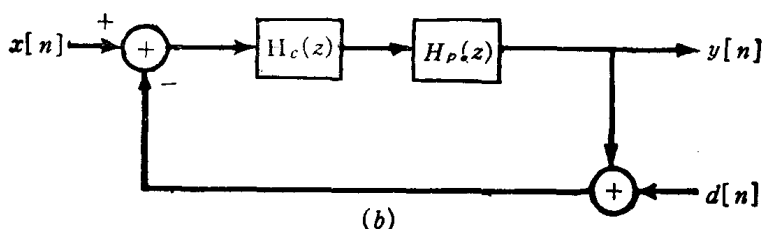
如11.1节所述, 反馈的重要应用之一, 是用于使输出跟踪或跟随输入的系统的设计中。在大量的课题中, 跟踪是一个重要的组成部分。例如, 在11.0节中所讨论的望远镜瞄准问题就是一个跟踪问题, 具体说, 图11.1(c)和(d)的反馈系统有预定的瞄准角作为其输入, 而反馈环路的目的是提供能驱动望远镜以跟踪指令输入的机制。在飞机的自动驾驶中, 输入是预定的飞机飞行路径, 而自动驾驶反馈系统利用飞机的各种控制翼面 (舵、副翼和升降舵) 以保持飞机处在预定的航线上。

为了说明跟踪系统设计中的某些问题, 考虑图11.6(a)所示的离散时间反馈系统, 这种形式的离散时间跟踪系统的研究, 常常出现在各种用于连续时间的抽样数据跟踪系统的

特性分析中（这种系统的一个例子是数字自动驾驶系统）。在图 11.6 (a) 中, $H_p(z)$ 表示输出受控系统的系统函数, 这个系统常常称作设备, 这一术语起源于例如电厂控制, 加热系统, 以及化学加工设备等的应用中。系统函数 $H_c(z)$ 表示补偿器, 它是要进行设计的部件。这里, 补偿器的输入是跟踪误差, 即输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 间的差值 $e[n]$, 补偿器的输出是设备的指令输入（例如, 图 11.1 (c) 和 (d) 的反馈系统中, 加至电动机的实际电压, 或飞行器舵的操纵系统的实际物理输入）。



(a)



(b)

图 11.6 (a) 离散时间跟踪系统; (b) (a) 中的跟踪系统, 在反馈支路中由测量误差引起的干扰 $d[n]$

为简化符号, 令 $H(z) = H_c(z)H_p(z)$, 在此情况下, 应用式 (11.2) 得到关系式

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)} X(z)$$

并且, 由于 $Y(z) = H(z)E(z)$, 可见有

$$E(z) = \frac{1}{1 + H(z)} X(z) \quad (11.25)$$

或指定 $z = e^{j\Omega}$ 时,

$$E(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 + H(e^{j\Omega})} X(e^{j\Omega}) \quad (11.26)$$

式 (11.26) 使我们对跟踪系统设计的某些问题得到深刻的认识。具体说, 为了得到良好的跟踪性能, 我们希望 $e[n]$ 或等价于 $E(e^{j\Omega})$ 要小, 即应

$$\frac{1}{1 + H(e^{j\Omega})} X(e^{j\Omega}) \approx 0$$

从而, 对于 $X(e^{j\Omega})$ 非零的频率范围来说, 我们希望 $|H(e^{j\Omega})|$ 要大。于是, 我们得出反馈系统设计的基本原则之一: 良好的跟踪性能要求有高的增益。然而, 由于一些原因, 这种高增益的要求一般来说应该适当。其中一个原因是, 若增益太大, 闭环系统可能会出现不希望有的特性（例如阻尼太小）, 或实际上可能变得不稳定。这种可能性在下一小节中讨论, 并且还要留待本章其余各节所阐述的一些方法来解决。

除了稳定性的问题以外, 还存在要限制跟踪系统增益的其他原因。例如, 在实现一个跟踪系统时, 我们必须测量输出 $y[n]$, 以便把它与指令输入 $x[n]$ 作比较, 而所用的任何测量

装置都会有各种不精确性和误差源（例如测量装置的电子热噪声）。在图11.6(b)中，我们已经用反馈环路中干扰输入 $d[n]$ 的形式包括了这种误差源。经过一些简单的系统函数代数运算，得出 $Y(z)$ 与 $x[n]$ 及 $d[n]$ 的变换 $X(z)$ 及 $D(z)$ 之间的关系式：

$$Y(z) = \left[\frac{H(z)}{1+H(z)} X(z) \right] - \left[\frac{H(z)}{1+H(z)} D(z) \right] \quad (11.27)$$

从这一表达式中，我们看到，为使 $d[n]$ 对 $y[n]$ 的影响最小，我们希望 $H(z)$ 要小，以使式(11.27)右端第二项减小。

从前面的分析中看到，提高跟踪性能与使测量误差影响最小，这两个目标是矛盾的。因而，人们必须在提出可接受的系统设计时考虑到这一点。一般来说，设计与输入 $x[n]$ 及干扰 $d[n]$ 特性的更加详细的信息有关，例如，在许多应用中， $x[n]$ 的很大部分能量集中在低频段，而像热噪声这样的测量误差源的极大部分能量是在高频段，因此，人们通常设计补偿器 $H_c(z)$ ，以使 $|H(e^{j\Omega})|$ 值在低频处大而在 Ω 靠近 $\pm\pi$ 时小。

在设计跟踪系统时，人们还必须考虑其他种种问题，比如在反馈环路的其他点上出现干扰（例如，在设计自动驾驶系统时，风对于飞行器运动的影响必须考虑）。在这一章中所介绍的反馈系统分析的各种方法，为研究每一种这类问题提供了必须的工具。在习题11.9中，则利用其中某些方法研究了跟踪系统设计问题的一些其他方面。

11.2.5 由反馈引起的不稳定

正如我们在引言中并又在上一小节讲过的那样，反馈除了有许多应用之外，也可能有我们所不希望的影响，而且实际上能引起不稳定。例如，考虑图11.1中说明的望远镜瞄准系统，从前一节讨论中知道，为获得对预定瞄准角位置良好的跟踪性能，希望放大器增益要大。另一方面，如果以降低系统阻尼为代价增加增益而获得较快的跟踪响应，则在预定角度的变化响应时，将导致相当大的过冲和振铃。而且，若增益增加太大，则可能引起不稳定。

反馈的另一个可能引起不稳定影响的普通例子，是声频系统中的反馈。考虑图11.7(a)所描绘的情形，这里扬声器产生一个声信号，它是由微音器检得的声信号经放大后的形式。注意，除了其他声音输入以外，来自扬声器的声音本身也同扬声器与话筒间的距离有关。具体说，由于空气的衰减性质，这一距离愈大，则到达话筒的信号愈弱。此外，由于声波的有限传播速度，故由扬声器产生的与由话筒传感的信号间有时间延迟。

这个声频反馈系统可表示为图11.7(b)中的框图形式，图中反馈支路中的常数 K_2 表示衰减， T 是传播延迟。常数 K_1 是放大器增益。在这一例子中，还要注意，反馈支路的输出是与外部输入相加的，这是一个正反馈的例子。如在本节开头讨论过的那样，在图11.3的基本反馈系统的定义中，负号的采用纯粹是由于习惯，而正反馈和负反馈可采用同样的方法分析。例如，像在图11.7(c)中说明的那样，图11.7(b)的反馈系统可以通过在反馈支路的系统函数前加一个负号而写成负反馈系统，根据此图以及式(11.1)，我们可求得闭环系统函数为

$$Q(S) = \frac{K_1}{1 - K_1 K_2 e^{-ST}} \quad (11.28)$$

在例题11.7中，我们将回过头来讨论这一例子，并要用在11.4节中阐明的方法，可以证明当

$$K_1 K_2 > 1 \quad (11.29)$$

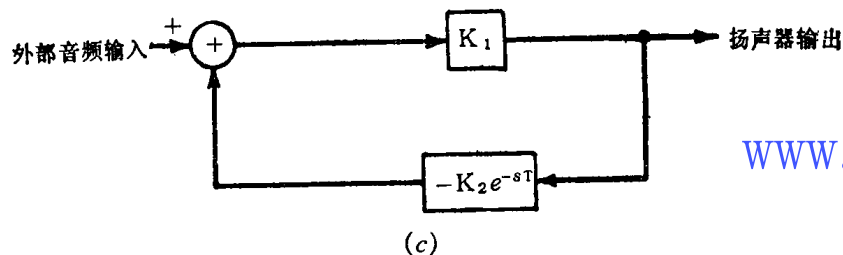
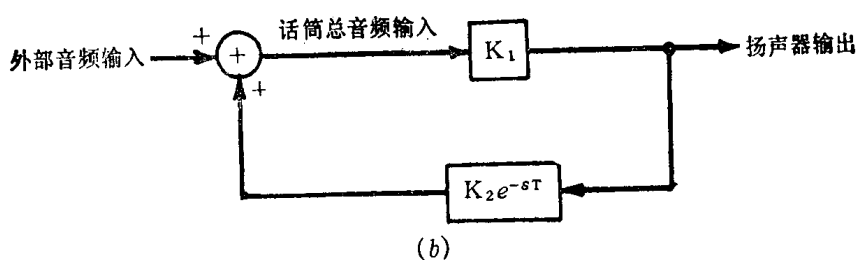
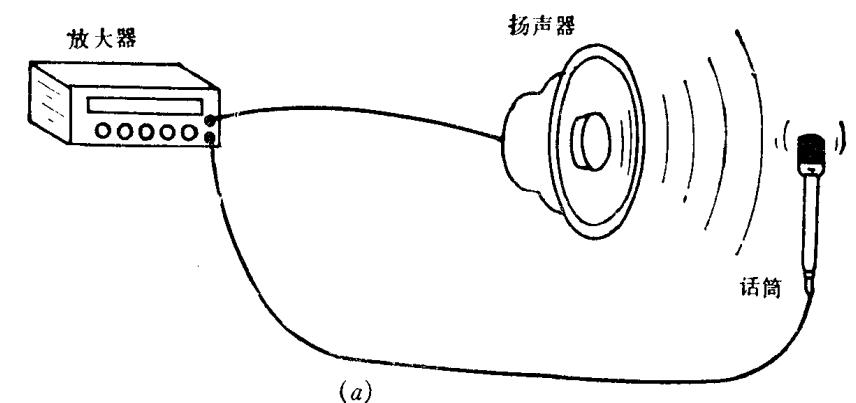


图11.7 (a)声反馈现象的示意图; (b)(a)的方框图表示; (c)框图(b)画成负反馈系统。
注: e^{-sT} 是 T 秒时延的系统函数

时, 图11.7 的系统是不稳定的。由于声音通过空气传播时的衰减随着扬声器与微音器间的距离减小而减小 (即 K_2 增大), 我们看到, 若微音器放置得太靠近扬声器而使式 (11.29) 满足, 则系统是不稳定的。这种不稳定性的结果是声信号的过度放大和失真。

在这一节中, 已经叙述了反馈的一些应用。这样的和其他的各种应用, 比如递归离散时间滤波器的实现中反馈的应用 (习题 11.5), 在一些习题中将更加详细地进行研究。根据我们对于反馈的应用及其可能的不稳定效应的分析, 显然, 在设计和分析反馈系统时必须小心, 以保证得到预定形式的闭环系统特性。具体说, 在11.2.3节和11.2.5节中, 已经看到一些反馈系统的例子, 它们的闭环系统特性可通过改变反馈系统中一、两个参数而显著的改变。在本章其余各节, 为分析闭环系统中改变这些参数时的影响, 我们要推导出几种方法。

11.3 线性反馈系统的根轨迹分析法

正如我们已在讨论过的一些例子和应用中看到的那样, 一种有用且经常碰到的反馈系统

类型,是在反馈系统中含有一个与该系统有关的可调增益 K 。由于闭环系统极点的位置能告诉关于该系统特性的许多情况,故当这一增益变化时,考察闭环系统极点怎样改变是有意义的。例如,要使一个不稳定的系统稳定时,对连续时间系统来说,可调节增益以使极点移入左半平面,或对离散时间系统来说移入单位圆内。此外,在习题 11.1 中,我们表明,通过移动极点以减小系统的时间常数,反馈就可用来展宽一阶系统的频带。而且,正如反馈可用来重新安置极点以改善系统性能那样,像我们在 11.2.5 节看到过的,在反馈选择不适当时,存在着使稳定系统变得不稳定的潜在危险,一般说来,这是所不希望的。

在这一节中,我们讨论,当可调增益改变时,研究闭环系统的极点在复平面上的轨迹(即,路径)的一种特殊方法,这种方法称为根轨迹法。它是一种以增益值函数的形式,标绘有理系统函数 $Q(s)$ 或 $Q(z)$ 的闭环极点曲线的作图法。对于连续时间和离散时间两种情况,根轨迹法使用的方式相同。

11.3.1 一个初步例子

为说明反馈系统根轨迹法的本质,我们重新来研究上一节中考虑过的离散时间系统的例子,它由如下的系统函数表示

〔式(11.22)〕

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2} \quad (11.30)$$

〔式(11.23)〕

$$G(z) = 2\beta z^{-1} = \frac{2\beta}{z} \quad (11.31)$$

现在,式中的 β 看作一个可调增益。因此,如前所述,闭环系统函数为 www.blogoil.com

$$Q(z) = \frac{1}{1-2(1-\beta)z^{-1}} = \frac{z}{z-2(1-\beta)} \quad (11.32)$$

在这个例子中,可以明确的看出闭环极点位于 $z=2(1-\beta)$ 。在图 11.8 (a) 中我们已画出了当 β 从 0 变化至 $+\infty$ 时系统极点的轨迹曲线,在图 (b) 中,画出了当 β 从 0 至 $-\infty$ 变化时的轨迹。在每一根轨迹图中已指明了开环极点 $z=2$ 的位置(即,它是 $\beta=0$ 时 $Q(z)$ 的极点)。如果 β 从零开始增加,极点沿实轴移向点 $z=2$ 的左边,我们已用带有箭头的粗线以表明随着 β 增加极点怎样改变。类似地,当 $\beta < 0$ 时, $Q(z)$ 的极点移向点 $z=2$ 的右边,而

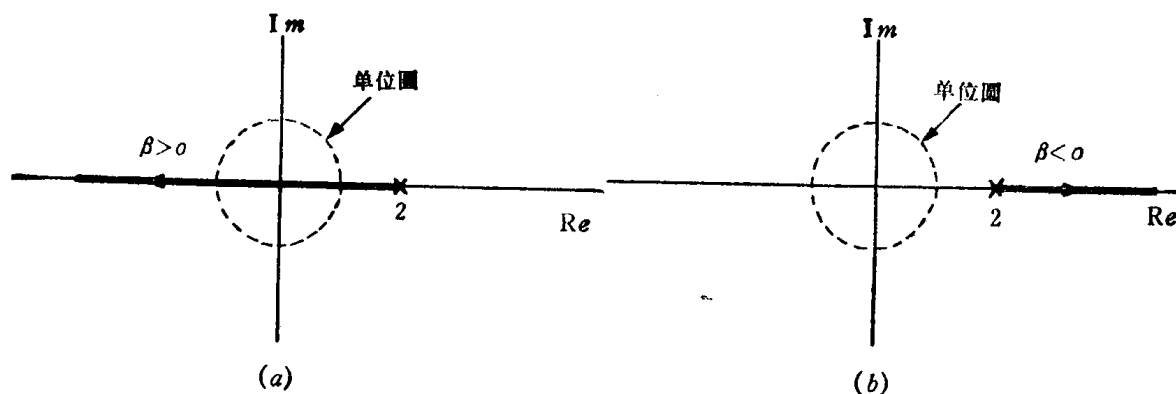


图 11.8 当式 (11.32) 的 β 值变化时,闭环系统的根轨迹: (a) $\beta > 0$; (b) $\beta < 0$ 。
注意,图中已标出点 $z=2$,它相当于在 $\beta=0$ 时的极点位置

图11.8(b)中箭头的方向指出,随着 β 值的增加极点是如何改变的。当 $1/2 < \beta < 3/2$ 时,极点位于单位圆内,因而,系统是稳定的。

作为第二个例子,考虑一连续时间反馈系统,其系统函数为

$$H(s) = \frac{s}{s-2} \quad (11.33)$$

$$G(s) = \frac{2\beta}{2} \quad (11.34)$$

式中 β 仍然表示可调增益。除 z 用 s 替代之外,这个例子中的 $H(s)$ 和 $G(s)$ 在代数学上与前一例子是相同的,其闭环系统函数

$$Q(s) = \frac{s}{s-2(1-\beta)} \quad (11.35)$$

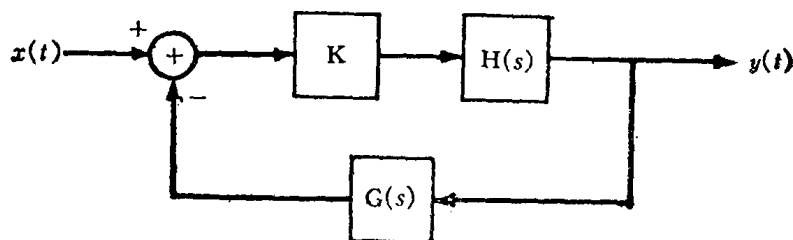
也是这样,因而,极点轨迹与 β 的函数关系与前面一个例子相同。

这两个例子的关系着重指出,极点的轨迹是由前向支路和反馈支路系统函数的代数表达式所确定,与系统是连续时间还是离散时间系统没有内在的关系。然而,所得到的根轨迹图的解释与它是连续时间系统还是离散时间系统有密切关系,在离散时间系统时,重要的是极点相对于单位圆的位置,而在连续时间情况下,则是极点相对于虚轴的位置。因此,像已经看到的那样,对于式(11.32)的离散时间的例子来说,当 $1/2 < \beta < 3/2$ 时,系统是稳定的,而对于式(11.35)的连续时间系统,则当 $\beta > 1$ 时,系统才是稳定的。

11.3.2 闭环极点方程

在上节研究过的简单例子中,根轨迹是容易画出的,因为可以首先求出闭环极点与增益参数间的显函数关系式,然后,当改变增益时就可画出极点的位置。而对于比较复杂的系统,就难以求出闭环极点的这种简单的闭合表达式。然而,当增益参数值从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 改变时,正确地画出极点轨迹的示意图仍然是可能的,而且实际上不用对任何指定的增益值解出极点位置。这种确定根轨迹的方法,对于深刻理解反馈系统的特性是极为有用的。此外,在导出这种方法时,我们还可看到,一旦求得了根轨迹,对于轨迹上任何指定位置处闭环极点的增益参数值,就有一个简单的确定方法。为了能同样好地应用于离散时间情况,我们将用拉普拉斯变换的变量 s 来进行讨论。

考虑图11.3(a)的基本反馈系统的修正形式,如图11.9所说明的,图中, $G(s)$ 或 $H(s)$ 是与一个可调增益 K 相级联。在这两种情况下的任何一种系统中,闭环系统函数的分



$$Q(s) = \frac{KH(s)}{1+KH(s)G(s)}$$

(a)

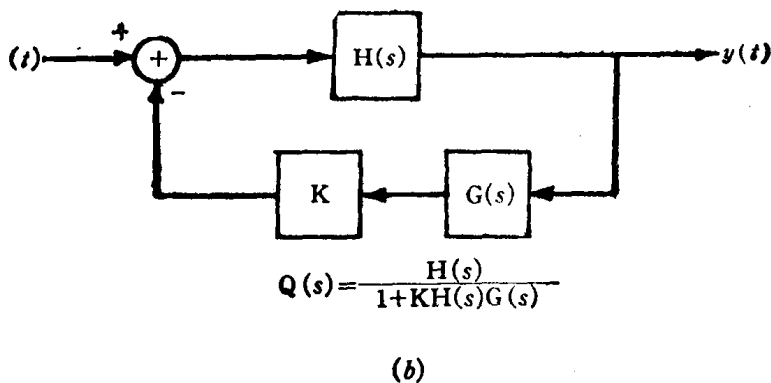


图11.9 包含可调增益的反馈系统：(a) 增益位于正向支路的系统；(b) 增益位于反馈支路中的系统

母都是 $1 + KG(s)H(s)$ ①。因此闭环系统的极点方程是下列方程的解

$$1 + KG(s)H(s) \quad (11.36)$$

改写式(11.36)，可求得确定闭环极点的基本方程为

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \quad (11.37)$$

绘制根轨迹图的方法就是根据这个方程及其解的各种性质。在本节的其余部分，将讨论其中某些性质，并将指出怎样利用它们来确定根轨迹。

11.3.3 根轨迹的端点：K=0 和 K=∞ 时的闭环极点

也许关于根轨迹我们可进行的最直接的观察，是当 $K=0$ 和 $K=|\infty|$ 时由考察式(11.37)所得的结果。尤其是当 $K=0$ 时，因为 $1/K=\infty$ ，式(11.37)的解必定为 $G(s)H(s)$ 的极点。为说明这一性质，我们回忆由式(11.33)和(11.34)所给出的例子，当以 β 替代 K 时，可见式(11.37)成为

$$\frac{2}{s-2} = -\frac{1}{\beta} \quad (11.38)$$

因此，由以上观察可以得出，当 $\beta=0$ 时，系统的极点应位于 $2/(s-2)$ 的极点（即在 $s=2$ 处），这与我们在图11.8中所画的一致。

现在，假定 $|K|=\infty$ ，在这种情况下 $1/K=0$ ，所以式(11.37)的解必定趋向 $G(s)H(s)$ 的零点。若 $G(s)H(s)$ 分子的阶数小于分母的阶数，则数目等于分子和分母阶数差的一些零点将位于无穷远处（见第9章）。

仍然参照式(11.38)给出的例子，由于 $2/(s-2)$ 中分母的阶数为1，而分子的阶数为零。在这个例子里，可知在无穷远处有一个零点。因此，若 $|\beta| \rightarrow \infty$ ，闭环极点就趋向无穷远。这一点仍然是与图11.8相符的，我们在图中看到，对于 $\beta > 0$ 或 $\beta < 0$ ，当 $|\beta| \rightarrow \infty$ 时，极点的幅值无限增大。

刚才的观察提供了 K 为极端值时闭环极点位置的基本信息，而下一小节所作的观察，是使我们能画出根轨迹而不需实际解出闭环极点与增益的显函数关系的关键。

①为简单起见，在以下的讨论中，假定在乘积 $G(s)H(s)$ 中无极点—零点相消。但对有极点—零点相消的情况，不会引起任何实际困难，本节中概述的方法很容易推广到这一情况（习题11.16）。实际上，本节开头的简单例子〔式(11.33)和式(11.34)〕确实包含有在 $s=0$ 处的极点—零点相消。

11.3.4 角度判据

再一次考虑式(11.37), 因为这一方程的右边为实数, 故仅当式(11.37)左边的 $G(s_0)H(s_0)$ 也是实数时, 点 s_0 才可能是一个闭环极点。写出下式

$$G(s_0)H(s_0) = |G(s_0)H(s_0)| e^{j\angle G(s_0)H(s_0)} \quad (11.39)$$

可以看到, 要使 $G(s_0)H(s_0)$ 为实数时, 下式必须满足

$$e^{j\angle G(s_0)H(s_0)} = \pm 1$$

也就是, 当 s_0 是一闭环极点时, 必定有

$$\angle G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的整数倍} \quad (11.40)$$

回到式(11.38)的例子, 立即可以看出, 为使 $2/(s_0-2)$ 为实数, s_0 必须是实数。对于更加复杂的系统函数来说, 要确定 $G(s_0)H(s_0)$ 为实数时的 s_0 值, 就不是这样容易。然而, 正如我们将看到的那样, 应用式(11.40)所给出的角度判据, 连同第9章中所描述过的计算 $\angle G(s_0)H(s_0)$ 的几何方法, 就极大地方便了根轨迹的确定。

由式(11.40)给出的角度判据, 为我们提供了一种直接的方法, 用以确定一个点 s_0 是否有可能是某个增益 K 值时的闭环极点。对式(11.37)的进一步研究, 为我们提供了计算对应于根轨迹上任何点的增益值的一种方法。具体说, 假设 s_0 满足

$$\angle G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的奇数倍} \quad (11.41)$$

则 $e^{j\angle G(s_0)H(s_0)} = -1$, 而从式(11.39)可以看出,

$$G(s_0)H(s_0) = -|G(s_0)H(s_0)| \quad (11.42)$$

把式(11.42)代入式(11.37), 我们发现, 若

$$K = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} \quad (11.43)$$

则 s_0 是方程的一个解, 因而是一个闭环极点。

类似地, 若 s_0 满足条件

$$\angle G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的偶数倍} \quad (11.44)$$

则

$$G(s_0)H(s_0) = |G(s_0)H(s_0)| \quad (11.45)$$

因此, 若

$$K = -\frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} \quad (11.46)$$

则 s_0 是式(11.37)的一个解, 因而也是一个闭环极点。

对于式(11.38)中给出的例子, 若 s_0 是在实轴上, 且 $s_0 < 2$, 则

$$\angle \left(\frac{2}{s_0 - 2} \right) = -\pi$$

而从式(11.43), s_0 是闭环极点时的 β 值由下式给出,

$$\beta = \frac{1}{\left| \frac{2}{s_0 - 2} \right|} = \frac{2 - s_0}{2}$$

也就是

$$s_0 = 2(1 - \beta)$$

此式与式(11.35)相一致。

把以上两个观察结果概括起来, 可以看到, 闭环系统的根轨迹, 也就是当 K 从 $-\infty$ 到

$+\infty$ 改变时, 对于某些 K 值而言的闭环极点在复平面 s 上的点集, 确切地说, 就是满足式(11.40)角度条件的那些点。而且,

1. 满足式

$$\angle G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的奇数倍} \quad (11.47)$$

的点 s_0 位于根轨迹上, 且是某些 $K > 0$ 时的闭环极点, 使得 s_0 为闭环极点的增益值由式(11.43)给出。

2. 满足式

$$\angle G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的偶数倍} \quad (11.48)$$

的点 s_0 位于根轨迹上, 且是某些 $K < 0$ 时的闭环极点, 使得 s_0 为闭环极点的增益值由式(11.46)给出。

因此, 我们现在已把确定根轨迹的问题, 简化为寻找满足角度条件式(11.47)和(11.48)的点的问题。这些方程可以进一步仔细推敲, 而归纳为有助于绘出根轨迹的一组性质。然而, 在讨论这些性质之前, 我们先考虑一个简单的例子。

例11.1 设有

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (11.49)$$

回忆在第9.4节中, 曾经讨论过拉普拉斯变换的几何求值, 具体说, 我们看到过有理拉普拉斯变换

$$\frac{\prod_{k=1}^m (s - \beta_k)}{\prod_{h=1}^n (s - \alpha_h)}$$

在复平面上某点 s_0 处算得的角度, 等于从每个零点到 s_0 的各矢量的角度和减去从每个极点到 s_0 的角度和。把这一结论应用到由式(11.49)给出的乘积 $G(s)H(s)$, 就可以用几何方法在 s 平面上确定那些满足角度判据式(11.47)和(11.48)的点, 并因此可画出根轨迹的示意图。

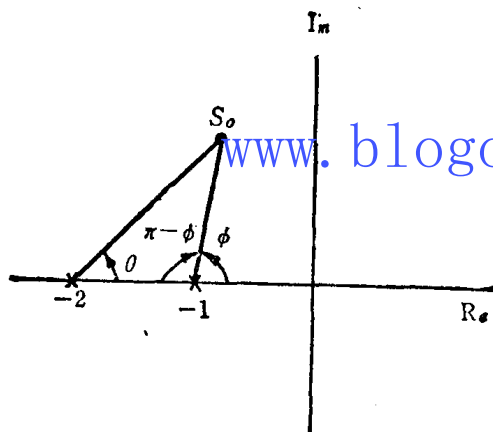


图11.10 例11.1中角度计算的几何方法

在图11.10中, 已标出了 $G(s)H(s)$ 的极点, 并用 θ 和 ϕ 表示从各个极点到点 s_0 的角度, 设先检验实轴上的点 s_0 的角度判据, 首先我们注意, 当 s_0 ①在实轴上-1的右边时, 由两个极点提供的角度为零。于是,

$$\angle G(s_0)H(s_0) = 0 = 0 \cdot \pi, \quad s_0 \text{ 是大于 } -1 \text{ 的实数}$$

而由式(11.48), 这些点位于 $K < 0$ 时的根轨迹上。对于这两个极点之间的各点来说, -1处极点提供的角度为 π 角, 而在-2处的极点提供的角度为零。因此,

$$\angle G(s_0)H(s_0) = -\pi, \quad s_0 \text{ 是实数, } -2 < s_0 < -1$$

这些点在 $K > 0$ 时的轨迹上。最后, 当 s_0 为小于-2的实数时, 每个极点提供的角度为 $-\pi$ 。因此, 当 $K < 0$ 时, 这些点均在根轨迹上。

现在来考察 s 平面上半平面上的各点。因为我们知道复数极点是共轭成对出现的, 在考

①原文为 s ——译者注。

察上半平面以后, 就可以立即确定下半平面上的极点。参照图11.10, $G(s_0)H(s_0)$ 在点 s_0 处的角度是

$$\angle G(s_0)H(s_0) = -(\theta + \phi)$$

此外, 显然若 s_0 在整个上半平面内变化(但不包括实轴), 则我们有

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < \pi$$

于是,

$$-2\pi < \angle G(s)H(s) < 0$$

因此, 立即可以看出, 在上半平面没有点能位于 $K < 0$ 时的根轨迹上(由于 $\angle G(s)H(s)$ 决不会等于 π 的偶数倍)。此外, 若 s_0 是在 $K > 0$ 的根轨迹上, 则必定有

$$\angle G(s_0)H(s_0) = -(\theta + \phi) = -\pi$$

或

$$\theta = \pi - \phi$$

考察图11.10的几何关系, 可以看出, 只有在平行于虚轴且二等分极点 -1 和 -2 间连线的直线上的那些点, 才满足这个条件。现在我们已考察了整个 s 平面, 且已确定了全部位于根轨迹上的点。此外, 我们知道, 当 $K=0$ 时, 闭环极点等于 $G(s)H(s)$ 的极点; 而当 $|K| \rightarrow \infty$, 则闭环极点趋向 $G(s)H(s)$ 的零点, 在这种情况下, 两者均位于无穷远处。综合以上各点就可以画出图11.11所示的整个根轨迹曲线, 图中, 对于 $K > 0$ 和 $K < 0$ 两种情况, 我们已指明了 $|K|$ 增加的方向。

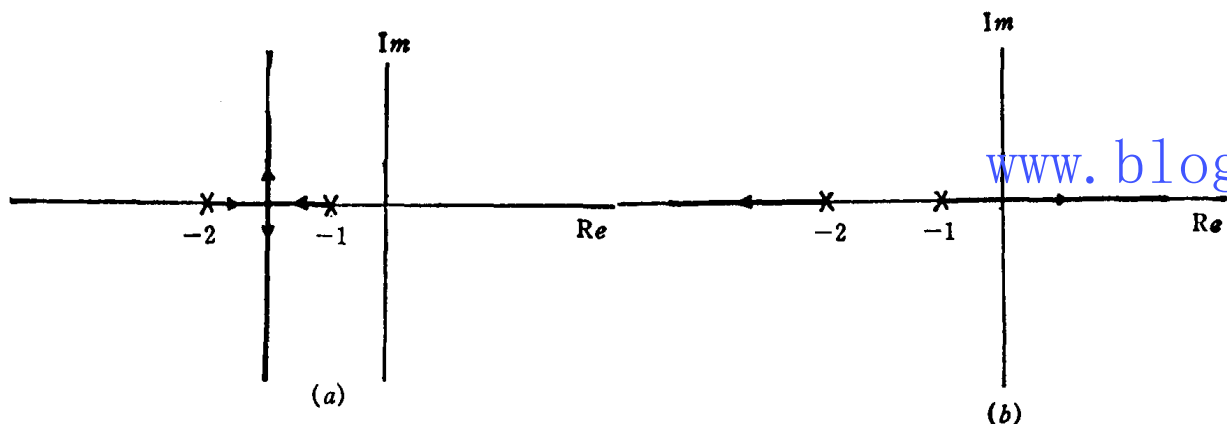


图11.11 例11.1的根轨迹, (a) $K > 0$; (b) $K < 0$ 。已经指明位于 $s = -1$ 和 $s = -2$ 的 $G(s)H(s)$ 的极点

注意在 $K > 0$ 时, 图中有两条根轨迹的分支, 而当 $K < 0$ 时也是一样。对于这个例子中存在两个分支的原因, 是因为闭环系统为二阶系统, 因此, 对任何指定的 K 值有两个极点。于是, 根轨迹具有两个分支, 当 K 改变时, 每一条分支就是沿着其中一个闭环极点位置改变的路线, 而对任何特定的 K 值, 在每一个分支上有一个闭环极点。此外, 若我们希望计算闭环极点轨迹上的指定点 s_0 时的 K 值, 则可以利用式(11.43)和(11.46)。

11.3.5 根轨迹的性质

在上一节中叙述的方法和例子, 原则上已为我们提供了任何连续或离散时间 LTI 反馈系统根轨迹的确定方法。亦即, 我们用几何的或其他的方法就能确定满足式(11.47)或(11.48)的所有点。幸而, 存在一些有关根轨迹的其他几何性质, 这些性质可使绘制轨迹曲线不致于冗长乏味。为着手讨论这些性质, 假定已把 $G(s)H(s)$ 整理成如下标准形式:

$$G(s)H(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\prod_{k=1}^m (s - \beta_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \alpha_k)} \quad (11.50)$$

式中 β_k 表示各个零点, α_k 表示极点, 一般, 它们可能是复数。我们假定式(11.50)的分子和分母的第一个系数是 +1, 这总是可以通过用分母 s^n 的系数去除分子和分母, 并把所得分子 s^m 的系数并入增益 K 而达到。例如,

$$K \frac{2s+1}{3s^2+5s+2} = K \frac{\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}}{s^2 + \frac{5}{3}s + \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}K \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + \frac{5}{3}s + \frac{2}{3}}$$

而量

$$\frac{2}{3}K$$

则被看作在确定根轨迹时要改变的总增益。

为简化讨论, 我们还假定

$$m \leq n$$

而习题11.17研究 $m > n$ 的情况。下面是包括以前的观察结果在内的, 有助于我们绘制根轨迹的一些性质。

性质 1: 当 $K=0$ 时, 式(11.37)的解是 $G(s)H(s)$ 的极点。由于我们假定有 n 个极点, 故根轨迹有 n 个分支, 每一个分支始于(对于 $K=0$) $G(s)H(s)$ 的一个极点。

性质 1 是在例11.1中说明过的性质的一般形式, 对每一个闭环极点存在一个根轨迹分支。下面一个性质只是以前一个观察结果的重新陈述。

性质 2: 若 $|K| \rightarrow \infty$, 根轨迹的每一条分支趋向 $G(s)H(s)$ 的一个零点。由于假定 $m \leq n$, 有 $n-m$ 个零点位于无穷远处。

性质 3: 位于奇数个 $G(s)H(s)$ 的实数极点和零点左边的那部分实 s 轴, 是在 $K > 0$ 时的根轨迹上。位于偶数个(可能为零个) $G(s)H(s)$ 的实极点和零点左边的那部分实 s 轴, 是在 $K < 0$ 时的根轨迹上。

从以下所述, 可以看出性质 3 是正确的。根据在例11.1中的讨论以及从图11.12(a), 可以看到, 若实 s 轴上的一点在 $G(s)H(s)$ 的一个实数极点或零点的右边, 则极点或零点对 $\angle G(s_0)H(s_0)$ 提供的角度为零。另一方面, 若 s_0 是在一个零点的左边, 该零点提供的角度为 $+\pi$; 若 s_0 在一个极点的左边, 则所得到的角度为 $-\pi$ (由于要减去极点角度)。因此, 若 s_0 是在奇数个实极点和零点的左边, 这些极点和零点提供的总角度是 π 的奇数倍。而若 s_0 是在偶数个实数极点和零点的左边, 则提供的总角度是 π 的偶数倍。根据式(11.47)和式(11.48), 若我们能证明由所有具有非零虚部的极点和零点提供的总角度是 π 的偶数倍, 我们就有性质 3 所述的结论。在这里关键是这样的极点和零点是以复共轭成对出现的, 我们可认为每个这样的复共轭对提供的角度, 如图11.12(b)所示。图形的对称性清楚地表明, 从这一共轭对到任何位于实轴上的 s_0 点的角度和正好是 2π 。把全部共轭零点对的角度相加并减去全部共轭极点对的角度和, 就得到所要求的结果。因此, 在实极点或实零点间的任何实轴段, 若不

是位于当 $K > 0$ 时根轨迹上, 就是位于当 $K < 0$ 时的根轨迹上, 这与线段是在 $G(s)H(s)$ 的奇数个还是偶数个极点和零点的左边有关。

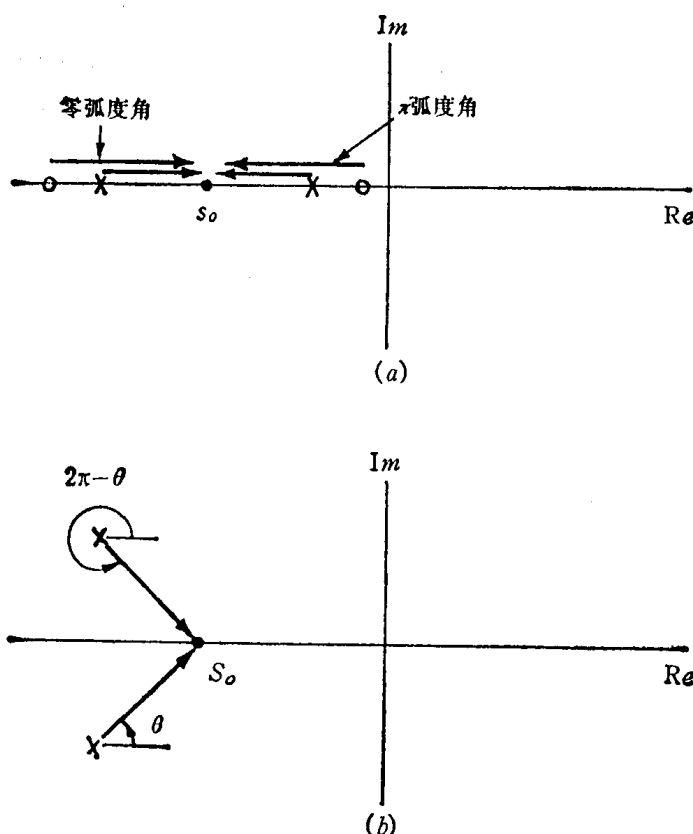


图11.12 (a)从实极点和实零点到实轴上一点提供的总角度; (b)从复共轭极点对到实轴上一点提供的总角度

作为性质 1 到 3 的一个结果, 考虑在 $G(s)H(s)$ 的两个极点间的一段实轴, 同时这些极点间没有零点。根据性质 1, 根轨迹从极点开始, 而根据性质 3, 这两个极点间的全部实轴将位于当 K 值为正或为负时的根轨迹上。因此, 如 $|K|$ 从零开始增加, 从这些极点开始的两条根轨迹分支沿着极点间的实轴彼此移近。根据性质 2, 如 $|K|$ 增加并趋向无穷大, 每一条根轨迹分支必定趋于一个零点。由于在那一段实轴上不存在零点, 这一情况可能发生的唯一途径是假定 $|K|$ 充分大时, 各分支折入复平面。这一点已在图11.11中说明, 图中 $K > 0$ 时的轨迹有一段在两个实数极点之间, 当 K 增加时, 根轨迹最终离开实轴而形成两个复共轭分支。概括这一讨论, 可得出下述根轨迹的性质。

性质 4: 在两个实极点间的根轨迹分支, 当 $|K|$ 充分大时, 必定折入复平面。

性质 1 到 4 说明, 怎样由式 (11.37) (11.47) 和 (11.48) 可以推断出根轨迹的特性。在许多情况下, 标出 $G(s)H(s)$ 的极点和零点, 然后利用这四个性质足以提供一个合理精度的根轨迹示意图(见后面的例11.2和11.3)。然而, 除了这些性质以外, 还存在其他许多根轨迹的特性, 这些特性使我们可求得高精度的根轨迹图。例如, 由性质 2, 我们知道有 $n-m$ 个根轨迹分支趋于无穷大。实际上, 在可计算出的特定角度上, 这些分支趋于无穷大, 因此, 这些分支是渐近平行于这些角度方向的直线的, 此外, 画出渐近线, 特别是要确定渐近线的交点是可能的。这两个性质以及某些其他性质, 由习题11.21~25说明, 根轨迹法的更加详细的研

究，可在更高一级的教科书中找到^①。

以下提供两个例子，一个是连续时间系统的，另一个是离散时间系统的，用以说明前面叙述过的四种性质怎样使我们能画出根轨迹示意图，并使我们能推断当增益 K 改变时反馈系统的稳定性。

例11.2 设有

$$G(s)H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

在这个例子中，根据性质1和性质2，对于 K 为正和 K 为负两种情况，根轨迹从点 $s=-1$ 和 $s=-2$ 出发，一条终止于 $s=1$ 处的零点，而另一条终止于无穷远处。

先研究 $K>0$ ，这种情况下的根轨迹由图11.13(a)说明，根据性质3，可以确定在根轨迹上的实轴范围；具体来说是 $\text{Re}\{s\} < -2$ 和 $-1 < \text{Re}\{s\} < 1$ 。因此， $K>0$ 时的根轨迹之一，是从点 $s=-1$ 出发并在 $K \rightarrow +\infty$ 时趋于 $s=1$ ；另一条从 $s=-2$ 开始，并在 $K \rightarrow +\infty$ 时向左伸展趋向 $\text{Re}\{s\} = -\infty$ 。

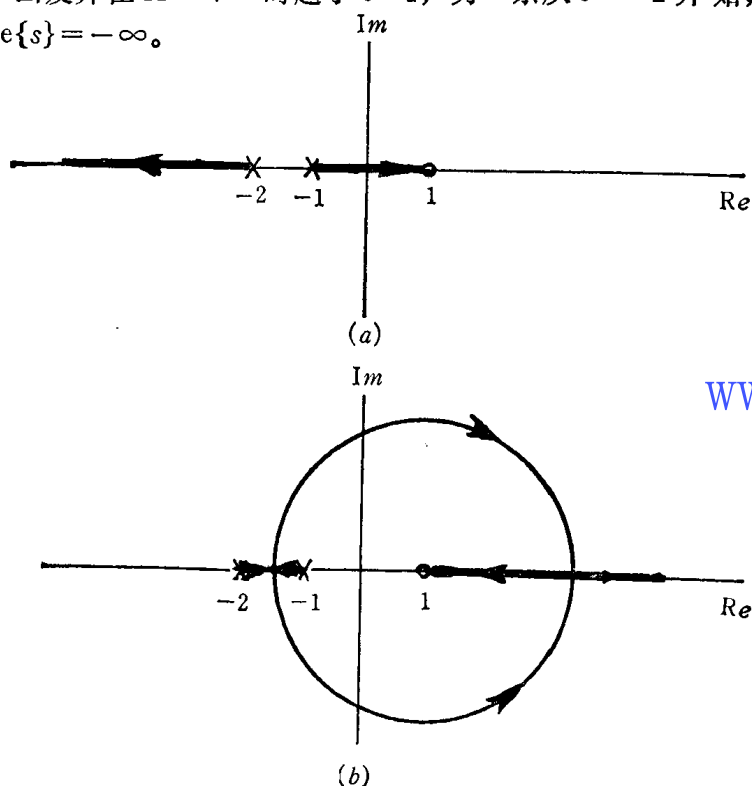


图11.13 例11.2的根轨迹：(a) $K>0$ ；(b) $K<0$ 。 $G(s)H(s)$ 的极点位于 $s=-1$ 和 $s=-2$ ， $G(s)H(s)$ 的零点位于 $s=1$ 均已在图中标明

因此，我们看出，当 $K>0$ 时，若 K 足够地大，随着闭环极点之一移入右半平面，系统就成为不稳定。当然，我们所用的画根轨迹图的方法，并没有指明不稳定性出现时的 K 值，然而，从这个特定的例子，可以看到，出现不稳定时的 K 值与根轨迹穿过点 $s=0$ 时的 K 值相对应，因此，从式(11.43)，相应的 K 值是

$$K = \frac{1}{|G(0)H(0)|} = 2$$

于是，对于 $0 \leq K < 2$ ，系统是稳定的，但当 $K \geq 2$ 时，系统是不稳定的。

^①请阅列于本书末参考书目中有关反馈的任何教科书。

当 $K < 0$ 时, 处于根轨迹上的那部分实轴是 $\text{Re}\{s\} > 1$ 和 $-2 < \text{Re}\{s\} < -1$ 。因此, 根轨迹仍然从 $s = -2$ 和 $s = -1$ 出发, 并移入区域 $-2 < |\text{Re}\{s\}| < -1$ 。在某一点处它折入复平面, 并沿着一条轨迹而返回到 $s > 1$ 的实轴。回到实轴后, 一条分支向左移动至 $s = 1$ 处的零点, 而另一条分支向右移动趋向 $s = \infty$, 如图 11.3(b) 所示, 图中我们已示出了 $K < 0$ 时的一个准确的根轨迹图。

也可以导出能指明根轨迹离开和进入实轴时位置的一些规则。然而, 即使没有那种严格的叙述, 我们仍可画出图 11.13(b) 中根轨迹的一般形状, 由此可以推断, 在 $K < 0$ 时, 若 $|K|$ 足够大, 系统也会变得不稳定。

例 11.3 考虑如图 11.14 所示的离散时间反馈系统, 在此情况下

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \quad (11.51)$$

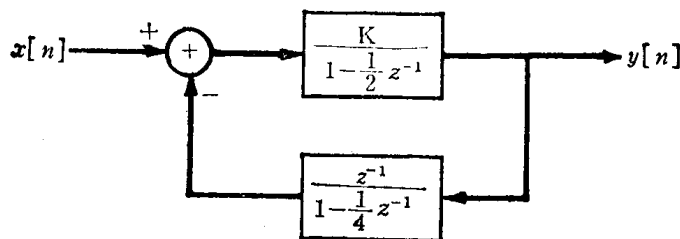
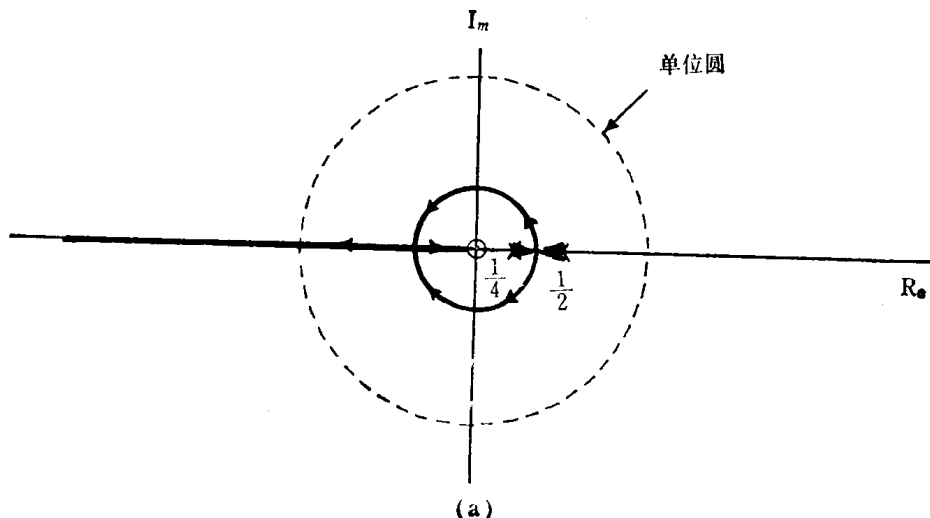


图 11.14 例 11.3 的离散时间反馈系统

如已在本节开头讨论过的, 画离散时间反馈系统根轨迹图的方法与连续时间系统时相同。因此, 按照非常类似于前述例子的方法, 我们可以导出这个例子根轨迹的基本形式, 它由图 11.15 所示。在此情况下, $G(z)H(z)$ 的两个极点 (在 $z = 1/4$ 和 $z = 1/2$) 间的实轴部分是在 $K > 0$ 时的根轨迹上, 而随着 K 增加, 轨迹折入复平面, 并在左半平面的某点处返回到实轴, 从该点出发, 其中一条分支趋于 $G(z)H(z)$ 在 $z = 0$ 处的零点; 而当 $K \rightarrow \infty$ 时, 另一条分支趋于无穷远。当 $K < 0$ 时, 根轨迹由在实轴上的两个分支组成, 一条分支趋于零, 而另一条趋于无穷大。



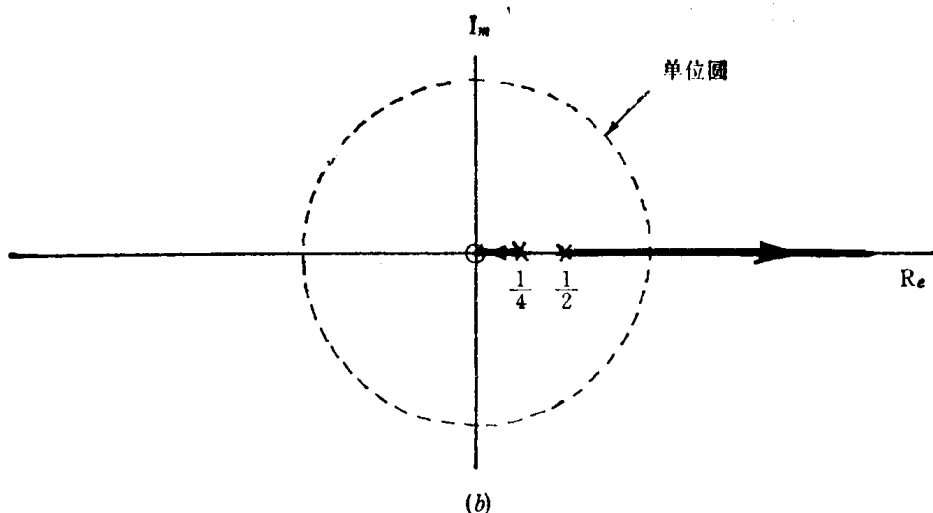


图11.15 例11.3的根轨迹, (a) $K > 0$; (b) $K < 0$ 。图中已表明 $G(z)H(z)$ 的极点在 $z=1/4$ 和 $1/2$, 而 $G(z)H(z)$ 的零点在 $z=0$ 处

如前所述, 尽管根轨迹的形式与系统是连续时间系统还是离散时间系统无关, 但根据根轨迹分析得出的有关稳定性的任何结论, 当然与系统是连续系统还是离散系统有关。特别是, 对于这个例子, 当 K 足够大时, 由于两个极点中的一个极点的幅值大于 1, 我们可以断定, 该系统是不稳定的。

11.4 奈奎斯特稳定性判据

如在11.13节研究过的, 根轨迹法为我们提供了在系统增益变化时闭环极点位置的详细信息。根据这种曲线图, 我们可以确定当 K 变化时系统的阻尼和系统的稳定特性。根轨迹的确定, 需要有前向支路和反馈支路系统函数的解析描述, 而且仅当这些变换是有理函数时才可应用。例如, 当关于系统函数的知识完全来自实验的情况下, 根轨迹法就不能直接应用。

在这一节, 我们要介绍作为可调增益参数的函数的反馈系统稳定性的另一种确定方法。这一方法称为奈奎斯特判据, 它与根轨迹法的差别在两个基本方面。与根轨迹法不同, 奈奎斯特判据并不提供与 K 有函数关系的闭环极点位置的详细信息, 而仅对任何指定的 K 值确定系统是否稳定。另一方面, 奈奎斯特判据可以应用于非有理系统函数, 并且也适用于没有前向支路和反馈支路系统函数解析描述的情况。

在这一节中, 我们的目的是要概述连续时间系统和离散时间系统两种情况下奈奎斯特判据的基本概念。正如我们将会看到的那样, 离散时间和连续时间奈奎斯特判据都是同一基本概念的结果, 虽然, 如同根轨迹法一样, 因为连续时间和离散时间之间存在差别, 故实际的稳定性判据不同。奈奎斯特判据的各种概念的更加详细的研究, 以及它们在反馈系统设计中的应用, 可在反馈系统和自动控制系统分析和综合方面的教科书中找到^①。

为介绍这种方法, 我们记得图11.9的闭环系统的极点以及对应的离散时间闭环系统的极点, 是以下方程的解

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (\text{连续时间}) \quad (11.52)$$

和

$$1 + KG(z)H(z) = 0 \quad (\text{离散时间}) \quad (11.53)$$

^① 见列于书末参考书目中有关反馈系统的教科书。

对于离散时间系统，我们要确定式(11.53)是否有一些解位于单位圆外，而对于连续时间系统，则要确定式(11.52)是否有一些解位于 s 平面的右半平面。奈奎斯特判据通过分析 $G(s)H(s)$ 沿 $j\omega$ 轴的值，或 $G(z)H(z)$ 沿单位圆的值来确定这一点。这些判据的基础，是下一小节中要研究的包围性质。

11.4.1 包围性质

考虑一个一般的有理函数 $W(p)$ ，这里 p 是复变量^①，并假定以顺时针方向沿着 p 平面中一条闭合围线上的 p 值来画出 $W(p)$ 。当函数 $W(p)$ 具有两个零点而没有极点时，其图形示于图11.16所示。在图11.16(a)中表示 p 平面中一条闭合围线 C ，而在图11.16(b)中画出了当 p 沿围线 C 变化时 $W(p)$ 值的闭合围线。在这一例子中，有一个 $W(p)$ 的零点位于围线以内，并有一个 $W(p)$ 的零点在围线以外。在围线 C 上的任意一点 p ， $W(p)$ 的角度是零点到 p 点的两个矢量 V_1 和 V_2 的角度和，如我们通过围线一次，从围线内零点出发的矢量的角度 ϕ_1 有 -2π 弧度的净变化，而从围线外零点出发的矢量的角度 ϕ_2 没有净变化。因此，在 $W(p)$ 曲线图上，具有 -2π 的角度净变化。换一种说法，就是图11.16(b)中的 $W(p)$ 曲线以顺时针方向包围原点一次。更一般地说，对于一个任意有理函数 $W(p)$ ，当以顺时针方向通过闭合围线时，围线外 $W(p)$ 的任何极点和零点将对 $W(p)$ 的角度不提供净变化，而围线内的每个零点将提供 -2π 的净变化，围线内的每个极点将提供 $+2\pi$ 的净变化。因为 $W(p)$ 曲线的每一次 -2π 的净变化相应于 $W(p)$ 曲线图上对原点的一次顺时针方向包围，故可以指出以下基本的包围性质：

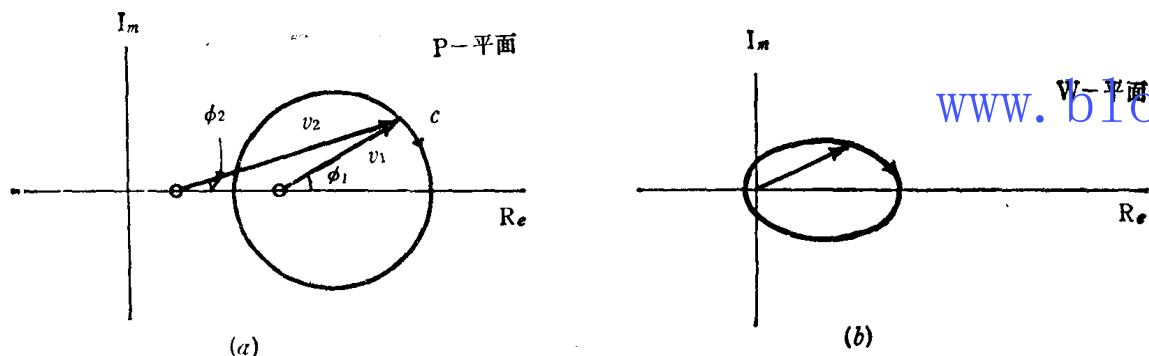


图11.16 基本的包围性质

当 p 平面中的一闭合路径 C 以顺时针方向通过一次，则 $W(p)$ 曲线沿着围线以顺时针方向包围原点，包围的净次数等于围线内所包含的零点数减去极点数。

在应用这个结论时，一次逆时针方向包围可看作一次顺时针方向包围的负数，例如，若在围线内有一个极点而没有零点则会有一次逆时针方向包围，或等价地减去一次顺时针方向包围。

例11.4 考虑函数

$$W(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p^2+p+1)} \quad (11.54)$$

^①因为要在连续时间和离散时间反馈系统两种情况下利用将要推导的包围特性，故用一个通用的复变量 p 来说明一般特性。在下一小节，利用这个特性分析连续时间反馈系统，在那里复变量是 s 。随后，在11.43节，利用包围特性分析离散时间反馈系统，在那时，复变量是 z 。

在图11.17中, 已在复 p 平面上画出了几种闭合围线, 以及其相应的沿每一条围线的 $W(p)$ 的曲线图。在图11.17(a)中, 围线 C_1 并不包围 $W(p)$ 的任何零点或极点, 因此, $W(p)$ 曲线没有对原点的净包围。在图11.17(b)中, 围线 C_2 仅包围极点 $p = -1$, 因此, $W(p)$ 曲线以逆时针方向包围原点一次。在图11.17(c)中, C_3 包围了所有三个极点, 故 $W(p)$ 曲线以逆时针方向包围原点三次。在图11.17(d)中, C_4 包围一个极点和一个零点, 因此, $W(p)$ 曲线没有对原点的净包围。最后, 在图11.17(e)中, $W(p)$ 的全部极点和一个零点包含在 C_5 以内, 于是沿围线 C_5 的 $W(p)$ 曲线图对原点有两次逆时针方向的净包围。

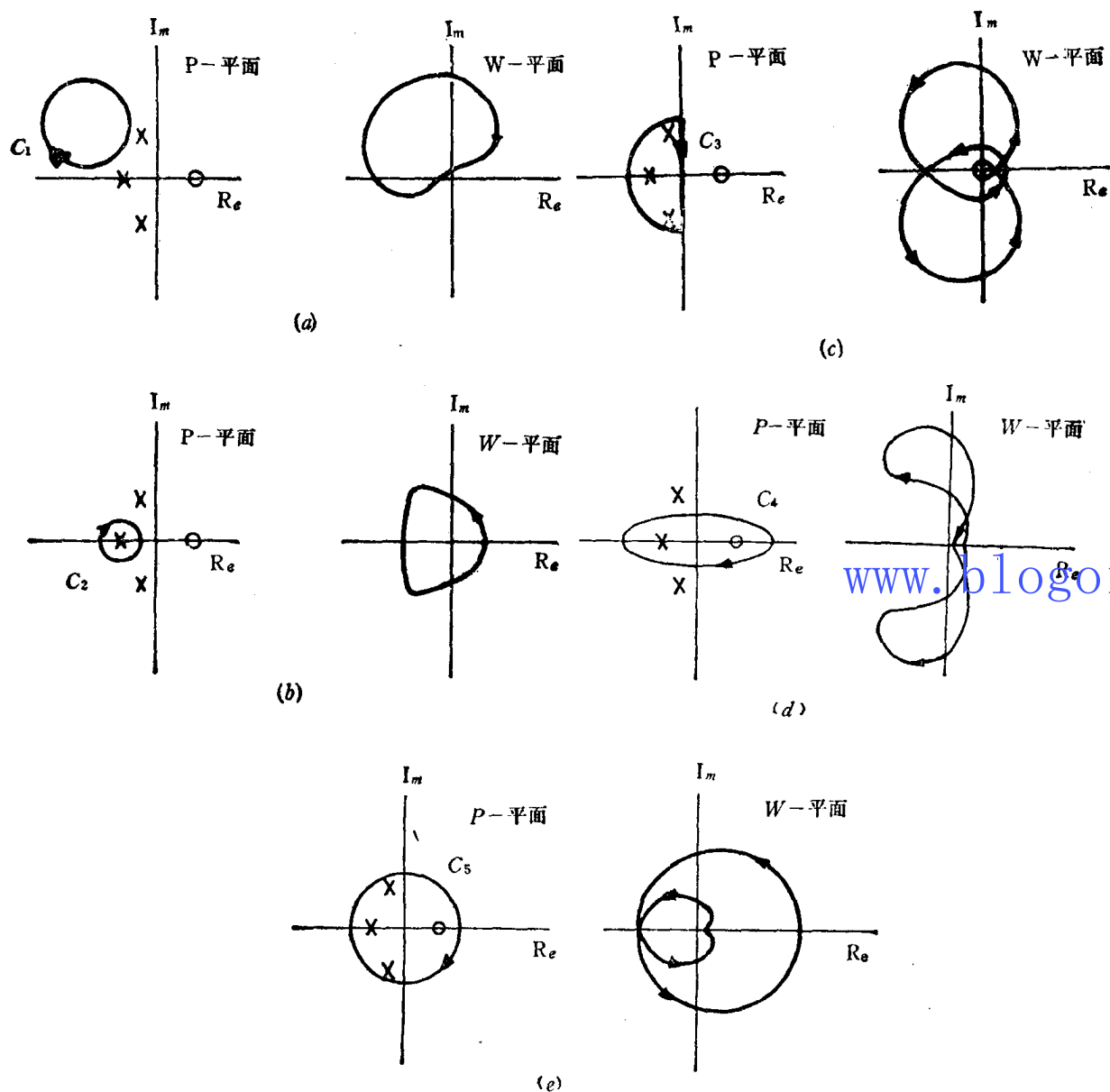


图11.17 例11.4的基本包围性质

11.4.2 连续时间 LTI 反馈系统的奈奎斯特判据

在这一节中, 要利用包围性质, 以研究图11.9的连续时间反馈系统的稳定性。这个系统的稳定性要求 $1 + G(s)H(s)$ 或等价地函数

$$R(s) = \frac{1}{K} + G(s)H(s) \quad (11.55)$$

没有零点位于右半 s 平面。于是，在应用上面得出的一般结论时，可以考虑如图11.18所示的围线，根据 s 沿围线绕行时 $R(s)$ 的曲线图，可以通过计算 $R(s)$ 曲线对原点的顺时针方向包围的总数，而求得包含在围线内的 $R(s)$ 的零点总数减去极点总数的得数。当 M 增至无穷大时，则这个数目就相当于在右半 s 平面上的 $R(s)$ 的零点总数减去极点总数的得数。

我们来研究当 M 增加至无穷大时，沿图 11.18 的围线 C 的 $R(s)$ 的计算。沿着伸展至右半平面的围线的半圆部分，当 M 增加时必须保证 $R(s)$ 保持有界。具体说，要假定 $R(s)$ 至少具有与零点同样多的极点，在这种情况下，

$$R(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

以及

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} R(s) = \frac{b_n}{a_n} = \text{常数}$$

因此，如 M 增至无穷大，当通过围线的半圆部分时， $R(s)$ 的值并不改变，结果，沿着这一半圆部分的常数值等于 $R(s)$ 在半圆端点的值（即 $R(j\omega)$ ，在 $\omega = \pm \infty$ 时）。

因此，沿图11.18围线的 $R(s)$ 曲线，可以通过绘制沿与虚轴吻合的那部分围线的 $R(s)$ 而得到，亦即通过绘制 ω 从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 变化时的 $R(j\omega)$ 曲线而得到。由于 $R(j\omega)$ 等于 $1/K + G(j\omega)H(j\omega)$ ，故沿围线的 $R(s)$ 可根据 $G(j\omega)$ 和 $H(j\omega)$ 画出。若前向和反馈支路系统均是稳定的，这些就是前向和反馈支路系统的频率响应函数。然而，一般函数 $W(p)$ 的包围性质，仅仅是复变函数的一种性质。它与这一函数是否表现为某种信号的拉普拉斯变换还是 z 变换毫无关系，因此与收敛域无关。于是，即使前向和反馈支路系统是不稳定的，若我们研究函数 $R(j\omega) = \frac{1}{K} + G(j\omega)H(j\omega)$ 在 $-\infty < \omega < +\infty$ 时的曲线，仍可利用包围性质以计数 $R(s)$ 位于右半平面的零点总数减去极点总数的数目。

而且，从式(11.55)可以看到， $R(s)$ 的极点就是 $G(s)H(s)$ 的极点，而 $R(s)$ 的零点就是闭环极点。此外，由于 $G(j\omega)H(j\omega) = R(j\omega) - 1/K$ ，从而 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线对点 $-1/K$ 的包围次数恰好是 $R(j\omega)$ 包围原点的次数。当 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 的曲线图称为奈奎斯特曲线。根据包围特性，我们看到，奈奎斯特曲线对于点 $-1/K$ 的顺时针方向包围的净次数，等于右半平面闭环极点总数减去右半平面 $G(s)H(s)$ 的极点总数。为使闭环系统稳定，就要求右半平面没有闭环极点，这就得出奈奎斯特稳定性判据：

为使闭环系统稳定，点 $-1/K$ 被 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈奎斯特曲线顺时针方向包围的净次数，必须等于 $G(s)H(s)$ 的右半平面极点总数的负值。等价地说，逆时针方向包围的净次数必须等于 $G(s)H(s)$ 的右半平面极点的数目。

例如，若前向和反馈支路系统是稳定的，则奈奎斯特曲线就是这两个系统级联的频率响应曲线。在此情况下，由于在右半平面不存在 $G(s)H(s)$ 的极点，为了稳定，则奈奎斯特判据

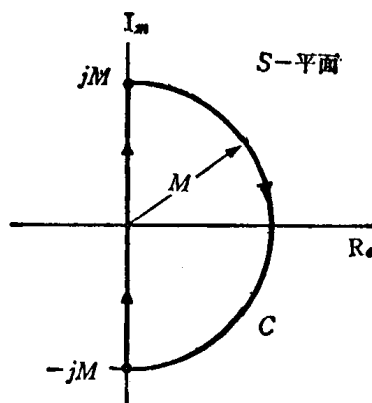


图11.18 包含右半平面一部分的闭合围线；当 $M \rightarrow \infty$ 时，围线包围整个右半平面

要求对点 $-1/K$ 的净包围次数必须为零。

例11.5 设

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = \frac{1}{\frac{1}{2}s+1}$$

$G(j\omega)H(j\omega)$ 的波特图示于图11.19。图 11.20 中所画的奈奎斯特图是直接根据 $G(j\omega)$

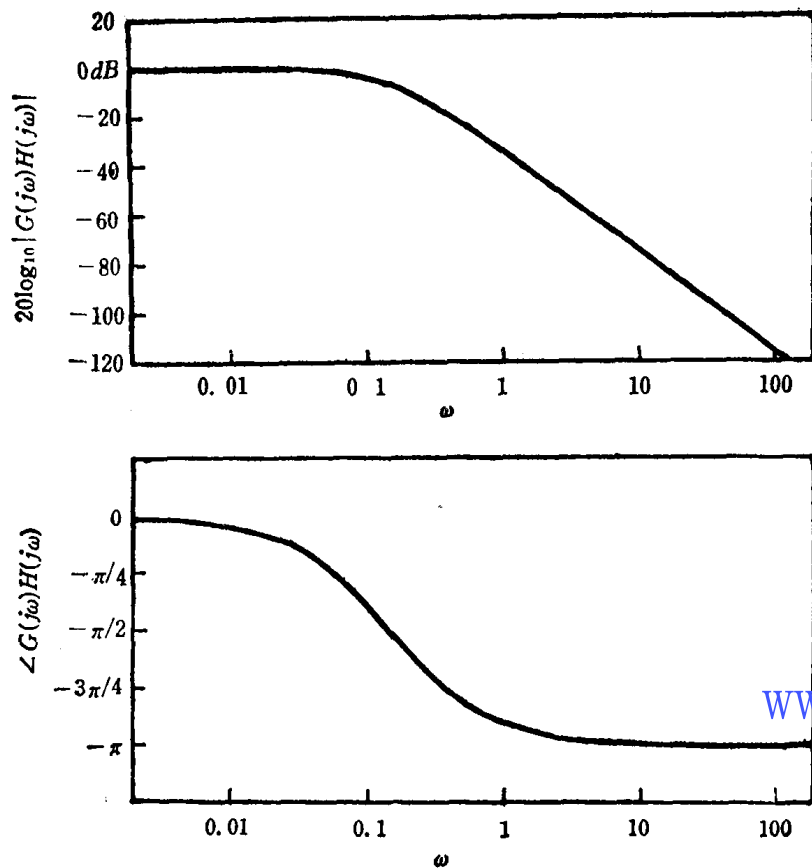


图11.19 例11.5中 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的波特图

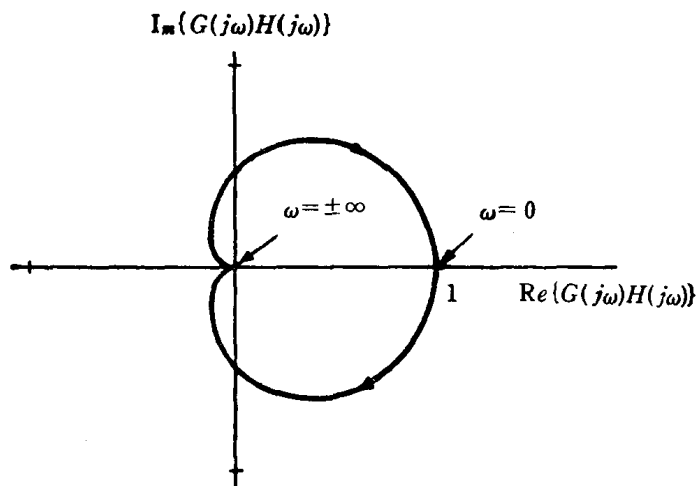


图11.20 例11.5的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈奎斯特图。曲线上的箭头方向指明 ω 增加的方向

$H(j\omega)$ 的这些对数幅度和相位曲线构成的。也就是说奈奎斯特曲线上的每一点，是由某一

ω 值时的幅度 $|G(j\omega)H(j\omega)|$ 和角度 $\angle G(j\omega)H(j\omega)$ 组成的极坐标。对于 $\omega < 0$ 时 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的坐标, 是根据 $\omega > 0$ 时的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 值通过应用共轭对称性而得到的。这个性质在几何上表现为一种非常简单的方法, 这种方法使描绘由实冲激响应系统组成的任何反馈系统的奈奎斯特图变得方便。具体说, 由于 $|G(-j\omega)H(-j\omega)| = |G(j\omega)H(j\omega)|$ 以及 $\angle G(-j\omega)H(-j\omega) = -\angle G(j\omega)H(j\omega)$, 故 $\omega \leq 0$ 时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈奎斯特曲线, 是 $\omega \geq 0$ 时的奈奎斯特曲线关于实轴的映射。还要注意的, 在图11.20的奈奎斯特曲线上标出了箭头, 这个箭头指明 ω 增加的方向。也就是说, 在奈奎斯特判据的应用中, 箭头指出了在计算包围次数时通过奈奎斯特曲线的方向。

在这个例子中, 右半平面没有开环极点, 因此, 为要系统稳定, 奈奎斯特判据要求对点 $-1/K$ 无净包围。所以, 根据对图11.20的观察, 若点 $-1/K$ 落在奈奎斯特围线之外, 则闭环系统将是稳定的, 也就是说, 若

$$-\frac{1}{K} \leq 0 \quad \text{或} \quad -\frac{1}{K} > 1$$

这等效于

$$K \geq 0 \quad \text{或} \quad 0 > K > -1$$

把这两个条件结合起来, 可以得到结论: 当选 K 为大于 -1 的任何值时, 闭环系统将是稳定的。

例11.6 现在考虑

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s-1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)}$$

这个系统的奈奎斯特图示于图11.21。对于这个例子, $G(s)H(s)$ 有一个右半平面极点。因此, 为了系统稳定, 要求对点 $-1/K$ 有一次逆时针方向包围, 从而要求点 $-1/K$ 落在围线内部。因此, 当且仅当 $-1 < -1/K < 0$, 也就是当 $K > 1$ 时, 将能使系统稳定。

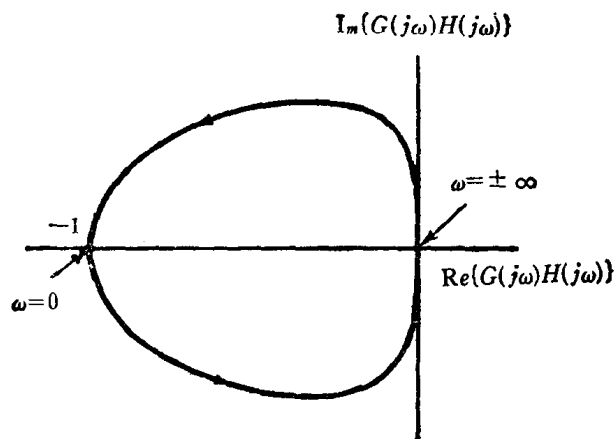


图11.21 例11.6的奈奎斯特图, 曲线上的箭头指示 ω 增加的方向

在前面的讨论中, 已提供了确定系统稳定性的奈奎斯特判据简化形式。这种方法, 还有许多改进形式。例如, 像已经推导过的那样, 对于稳定的或不稳定的 $G(s)H(s)$, 只要 $G(s)H(s)$ 没有恰好位于 $j\omega$ 轴上的极点, 奈奎斯特图就可以没有任何困难的画出来。当这样的极点确实存在时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 在这些点上的值就是无穷大。然而, 如习题11.30中所

研究的,可修正奈奎斯特判据以适用于 $j\omega$ 轴上有 $G(s)H(s)$ 极点的情况。此外,如本节开头所述,奈奎斯特判据还可推广到 $G(s)$ 和 $H(s)$ 为非有理函数的情况。例如,若前向和反馈支路系统都是稳定的,可以证明,当系统函数是非有理函数时,其奈奎斯特判据与有理函数时的判据是一样的。也就是,若对点 $-1/K$ 没有净包围,则闭环系统是稳定的,为了说明奈奎斯特判据对非有理系统函数的应用,我们给出如下的例子。

例11.7 考虑在11.2.5节中讨论过的声反馈的例子,参照图11.7(b),设 $K=K_1K_2$ 以及

$$G(s)H(s) = -e^{-sT} = e^{-(sT+j\pi)}$$

式中利用了 $e^{-j\pi} = -1$ 的关系,在这种情况下

$$G(j\omega)H(j\omega) = e^{-j(\omega T + \pi)}$$

当 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 以顺时针方向描出一个半径为 1 的圆,当 ω 每改变 $2\pi/T$ 时,描出完整的一圈,这由图11.22所示。因为前向支路和反馈支路系统都是稳定的

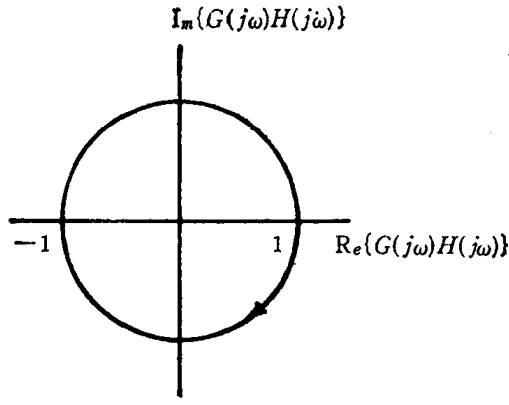


图 11.22 例11.7的奈奎斯特图

www.blogoil.com

[级联 $G(s)H(s)$ 只不过是时间延迟],奈奎斯特稳定性判据指出,当且仅当点 $-1/K$ 不落在单位圆内时,闭环系统才是稳定的,等价地说,为了稳定,我们要求

$$|K| < 1$$

因为 K_1 和 K_2 分别表示声音的增益和衰减,它们都是正的,这就得出稳定性条件

$$K_1K_2 < 1$$

11.4.3 离散时间 LTI 反馈系统的奈奎斯特判据

如在连续时间情况时那样,离散时间系统的奈奎斯特稳定性判据,是根据以下事实,即在一围线内的极点和零点个数的差,对于一个有理函数来说,可通过考察沿该围线的函数值的曲线图来确定。连续时间情况和离散时间情况间的差别在于围线的选择,对于离散时间情况来说,闭环反馈系统的稳定性要求在单位圆外没有

$$R(z) = \frac{1}{K} + G(z)H(z) \tag{11.56}$$

的零点。

回想包围性质是与任一规定的围线内的极点和零点有关的。另一方面,在考察一个离散时间系统的稳定性时,要涉及到单位圆外 $R(z)$ 的零点。因此,为要利用包围性质,首先要作一简单的修正。具体地,设我们考虑用 z 的倒数替代 z 而得到的有理函数

$$\hat{R}(z) = R\left(\frac{1}{z}\right)$$

像在习题 P 10.15 中所看到的那样, 若 z_0 是 $R(z)$ 的零点 (极点), 则 $1/z_0$ 是 $\hat{R}(z)$ 的零点 (极点)。因为若 $|z_0| > 1$, 则 $1/|z_0|$ 小于 1, 故任何单位圆外 $R(z)$ 的零点或极点相当于单位圆内 $\hat{R}(z)$ 的零点和极点。

根据基本的包围性质, 我们知道, 当 z 以顺时针方向通过单位圆, 原点被 $\hat{R}(z)$ 曲线顺时针方向包围的净次数等于单位圆内它的零点和极点数之差。然而, 要注意, 根据以上的讨论, 这等于单位圆外 $R(z)$ 的零点数和极点数之差。此外, 在单位圆上, $z = e^{j\Omega}$, $1/z = e^{-j\Omega}$, 因此,

$$\hat{R}(e^{j\Omega}) = R(e^{-j\Omega})$$

根据这一点, 可以看到, 当 z 以顺时针方向通过单位圆时计算 $\hat{R}(z)$, 与当 z 以逆时针方向通过单位圆时计算 $R(z)$ 是相同的。概括地说, 当以逆时针方向通过单位圆一次 (例如, 当 Ω 从 0 增加到 2π), 则 $R(e^{j\Omega})$ 的曲线图以顺时针方向包围原点的净次数等于单位圆外 $R(z)$ 的零点数减去极点数。

很像在连续时间情况那样, 计数 $R(e^{j\Omega})$ 包围原点的次数等价于计数 $G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$ 曲线包围点 $-1/K$ 的次数, $G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$ 曲线图仍然称为奈奎斯特曲线, 它是当 Ω 从 0 变化到 2π 时绘出的。同样地, $R(z)$ 的极点正好就是 $G(z)H(z)$ 的极点, 而 $R(z)$ 的零点则是闭环极点。因此, 在前面一段中阐明的包围特性意味着奈奎斯特图顺时针方向包围点 $-1/K$ 的净次数等于单位圆外的闭环极点数减去单位圆外 $G(z)H(z)$ 的极点数。为了闭环系统稳定, 要求在单位圆外没有闭环极点。这就得出离散时间奈奎斯特判据:

为要闭环系统稳定, 当 Ω 从 0 变化到 2π 时, $G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$ 的奈奎斯特曲线顺时针方向包围点 $-1/K$ 的净次数, 必须等于位于单位圆外 $G(z)H(z)$ 的极点数的负值。等价地说, 逆时针方向包围的净次数必须等于单位圆外 $G(z)H(z)$ 的极点数。

例 11.8 设

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{z\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

这个例子的奈奎斯特图示于图 11.23, 因为 $G(z)H(z)$ 在单位圆外没有极点, 为使闭环系统稳定, 必须对点 $-1/K$ 没有包围。由图可见, 若 $-1/K < -1$ 或若 $-1/K > 2$, 就将是这种情况, 因此, 当 $-\frac{1}{2} < K < 1$ 时, 系统是稳定的。

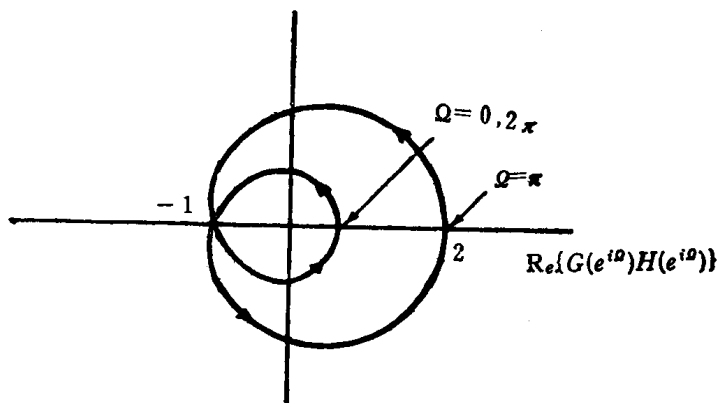


图 11.23 例 11.8 的奈奎斯特图, 曲线上的箭头表示当 Ω 从 0 到 2π 增加时通过曲线的方向

正像在连续时间情况时那样，若前向和反馈支路系统是稳定的，则奈奎斯特图可以根据这些系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 和 $G(e^{j\Omega})$ 求得。若前向和反馈支路系统是不稳定的，则这些频率响应没有定义。然而，函数 $G(z)H(z)$ 仍然可在这围线上计算，故奈奎斯特判据还是可以应用。

正如在这一节已看到的，奈奎斯特判据为决定增益 K 值的范围提供了一种有用的方法，对这个增益 K 的范围来说，连续时间或离散时间反馈系统是稳定的（或不稳定的）。奈奎斯特判据以及根轨迹法在反馈系统的设计和实现中是非常重要的工具，每种方法都各有其用途和局限性。例如，奈奎斯特图可用于非有理系统函数，而根轨迹法则不能。另一方面，根轨迹图使我们不仅能研究稳定性，还能研究闭环系统响应的其他特性，例如阻尼、振荡频率等等，根据闭环系统极点的位置，这些特性是容易鉴别的。在下一节，要介绍分析反馈系统的另一种方法，它集中注意于闭环系统性能的另一重要特性。

11.5 增益余量和相位余量

在这一节中，要介绍和研究反馈系统稳定度余量的概念，明确地说，我们常常关心的不仅是要知道系统是否稳定，而且还要确定系统增益可有多大的扰动，以及系统可加多大的附加相移而不致引起不稳定。这些信息是重要的，由于在许多应用中，前向和反馈系统函数只是近似地了解，或者因为耗损、高温对元件的影响或类似的种种影响，使得在运行期间系统函数可能稍有改变。

作为一个例子，考虑在11.0节中描述过的望远镜瞄准系统。这个系统由一个电动机，一个把传动轴角度变换为电压的电位器和一个用来放大代表传动轴预定角度和实际角度间差值的电压的放大器组成。假如我们已经获得了每一个部件的近似描述，www.blogoil.com 我们就可设定放大器的增益，使得若这些近似描述为准确时系统是稳定的。然而，放大器的增益和描述电位器的角度——电压特性的比例常数是不能精确知道的。因此，反馈系统的实际增益与系统设计时假设的标称值可能不一致，而且，电动机的阻尼特性不能绝对精确地确定，于是电动机响应的实际时间常数可能与近似指标不同。例如，若实际的电动机时间常数大于设计中所用的标称值，则电动机响应较预料的更加缓慢，因此，在反馈系统中产生一个等效的时间延迟。像已在前几章中讨论过的，且将再要在例11.11中讨论的那样，时间延迟具有在系统的频率响应中增加负相位的效果，而这一相移可能引起系统的不稳定。因为像刚才描述过的那些增益和相位误差可能存在，显然要求设置放大器增益，以使能有一些误差余量，也就是说，即使系统与设计过程中所用的近似模型有点差别，仍然可使实际系统保持稳定。

在这一节，要介绍一种定量表示反馈系统稳定度余量的方法。为此，设有图11.24所示的闭环系统，假定在已给定的前向和反馈支路系统函数的标称值时，系统已经设计成稳定的。为了讨论方便，这里令 $H(s)$ 和 $G(s)$ 表示这些标称值。同样地，由于连续时间和离散

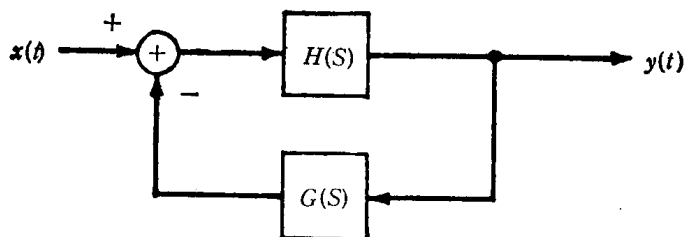


图11.24 典型的反馈系统。在假设的 $H(s)$ 和 $G(s)$ 的标称值时，系统已设计成稳定的