Chapter 3-2. 周期信号的傅立叶级数表示
——连续时间傅立叶级数的性质

Properties of Continuous-Time Fourier Series

线性与时移性质

约定

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=Fs^{-1}\{a_k\}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=Fs\{x(t)\}$$

$$x(t)\overset{Fs}{\longleftrightarrow}a_k$$

奇偶性 偶信号的傅里叶级数为偶信号，奇信号的傅里叶级数为奇信号。

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad x(-t)\overset{偶函数}{=}x(t),\quad x(-t)\overset{奇函数}{=}-x(t)$$

偶函数 $$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt\overset{偶函数}{=}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=a_k$$

奇函数 $$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt\overset{偶函数}{=}-\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=-a_k$$

连续时间傅立叶级数的性质

线性

$x(t)$和$y(t)$为周期为T的连续信号，其傅立叶级数系数分别为 a_k b_k

$$x(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k$$

$$y(t)\overset{\mathcal{F}S}{\leftrightarrow}b_k$$

$$z(t)=Ax(t)+By(t)\overset{\mathcal{F}S}{\leftrightarrow}c_k=Aa_k+Bb_k$$

时移性

$$x(t)\overset{\mathcal{F}S}{\leftrightarrow}a_k$$

$$x(t+t_0)\overset{\mathcal{F}S}{\leftrightarrow}e^{jk\omega_0 t_0}a_k=e^{jk\left(2\pi/T\right)t_0}a_k$$

$$x(t-t_0)\overset{\mathcal{F}S}{\leftrightarrow}e^{-jk\omega_0 t_0}a_k=e^{-jk\left(2\pi/T\right)t_0}a_k$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \xrightarrow{x(t-t_0)} b_k=\frac{1}{T}\int_T x(t-t_0)e^{-jk\omega_0 t}dt \xrightarrow{\tau=t-t_0} b_k=\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)}d\tau$$

$$\downarrow$$

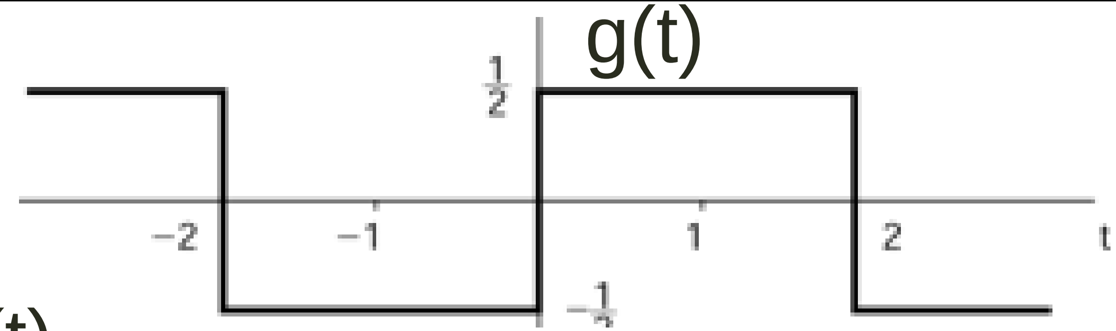
$$b_k=e^{-jk\omega_0 t_0}a_k \longleftarrow b_k=e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

当周期信号在时间上移位时，傅立叶级数系数的模保持不变

连续时间傅立叶级数的性质

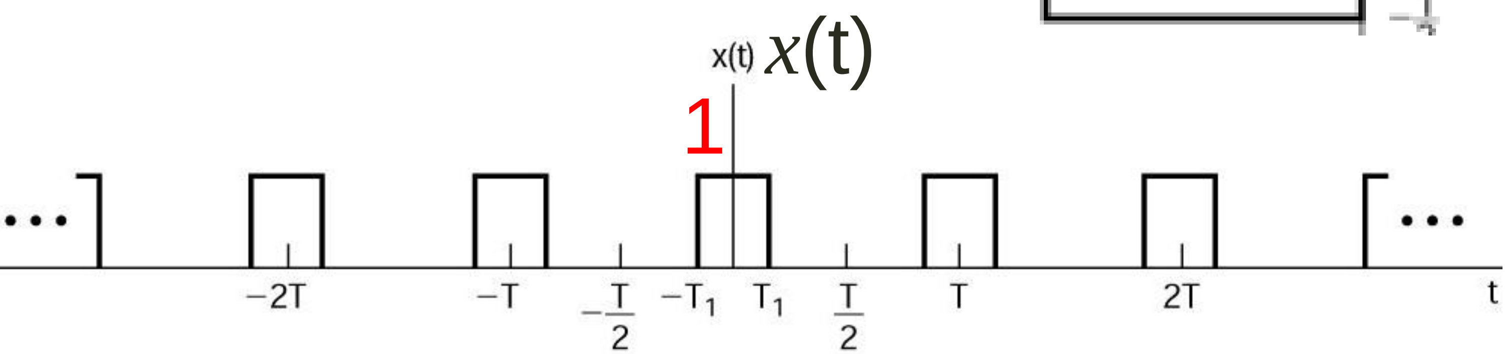
$$a_k == \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}$$

例3.6



dc offset

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \qquad T = 4$$



$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2} \qquad T = 4, T_1 = 1$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, |t| < T_1 \\ 0, T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \longrightarrow x(t-1) \xrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0} a_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_k$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, k \neq 0$$

$$-\frac{1}{2} \xrightarrow{FS} \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & k = 0 \end{cases}$$

$$x(t-1) \xrightarrow{FS} \begin{cases} e^{-jk\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}, k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, \quad k = 0 \end{cases}$$

$$g(t) \xrightarrow{FS} d_k \longrightarrow d_k = \begin{cases} \frac{\sin(k\pi/2) e^{-jk\pi/2}}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

连续时间傅立叶级数的性质

频移性

X(t)为周期为T的连续信号，其傅立叶级数系数为 a_k

$$x(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k \qquad e^{jM\omega_0 t_0}x(t)\overset{\mathcal{F}S}{\leftrightarrow}b_k=a_{k-M}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$b_k=\frac{1}{T}\int_T\left(x(t)e^{jM\omega_0 t}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \Rightarrow b_k=\frac{1}{T}\int_T\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_l e^{-jl\omega_0 t}\right)e^{j(M-k)\omega_0 t}dt$$

$$b_k=\frac{1}{T}\int_T\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_l e^{j(M-k-l)\omega_0 t}\right)dt$$

$$b_k=\frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\int_T\left(a_l e^{j(M-k-l)\omega_0 t}\right)dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=\begin{cases}T & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

$M-k-l=0$ $\quad l=M-k$

$$b_k=\frac{1}{T}a_{M-k}\int_T 1dt \Rightarrow b_k=a_{M-k}$$

连续时间傅立叶级数的性质

时域尺度变换　傅立叶级数系数不变

$$x(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k \Rightarrow \overset{a>0}{x(at)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k} \Rightarrow x(\alpha t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(\alpha w_0)t}\quad a>0$$

注意：周期信号经尺度变换后，傅立叶级数系数不变，但是基波频率变化了，因此傅立叶级数的表达式也改变了。

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad x(at)\to T_1=\frac{T_0}{a},\omega_1=a\omega_0$$

$$b_k=\frac{1}{T_1}\int_{T1}x(at)e^{-jk\omega_1 t}dt=\frac{a}{T}\int_{T/a}x(at)e^{-jka\omega_0 t}dt \xrightarrow{\text{令}at=t'} b_k=\frac{1}{T}\int_T x(t')e^{-jk\omega_0 t'}dt'$$

思考：

$$x(at+\beta)\overset{FS}{\leftrightarrow}\ e^{jk\omega_0\beta}a_k=e^{jk\left(2\pi/T\right)\beta}a_k$$

连续时间傅立叶级数的性质

相乘　时域的乘积对应频域的卷积

$$x(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} a_k \quad y(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} b_k \Rightarrow x(t)y(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$$

周期信号的卷积　时域的卷积对应频域的乘积

$$x(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} a_k \quad y(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} b_k \Rightarrow x(t) * y(t) = \int_T x(\tau) y(t-\tau) d\tau \xrightarrow{FS} T a_k b_k$$

二者周期都是T

连续时间傅立叶级数的性质

时间反转

$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} a_k \Rightarrow x(-t) \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} a_{-k}$

–x(t) is **even** $\quad a_{-k} = a_k$

–x(t) is **odd** $\quad a_{-k} = -a_k$

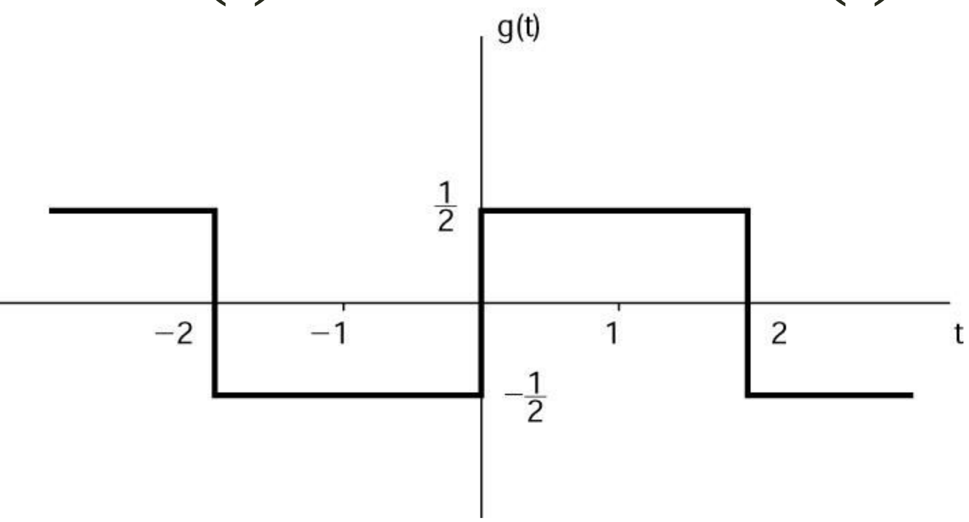
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} \longrightarrow x(-t) \overset{k=-k}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k} e^{jk\omega_0 t}$$

$$\downarrow$$

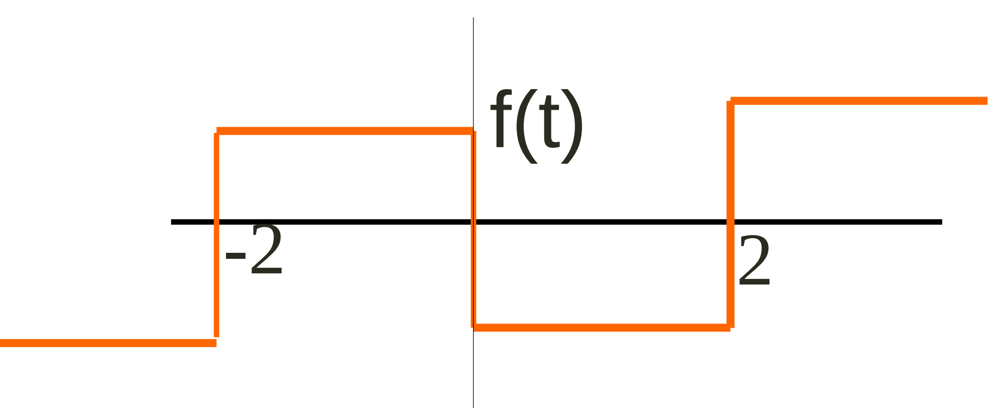
$$x(-t) \overset{\mathcal{FS}}{\leftrightarrow} a_{-k}$$

–x(t) is **even** $\longrightarrow$ x(t)=x(-t) $\longrightarrow a_{-k} = a_k$

–x(t) is odd $\longrightarrow$ x(t)=-x(-t) $\longrightarrow a_{-k} = -a_k$



$$g_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(k\pi/2)e^{-jk\pi/2}}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$



$$f_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(k\pi/2)e^{jk\pi/2}}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

连续时间傅立叶级数的性质

时间反转与平移 $x(-t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} a_{-k}$ $\quad x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$

$x(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} a_k$ $\quad x(-t-t_0) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} b_k = ?$ $\quad x(-t+t_0) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} b_k = ?$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{x(-t-t_0)} x(-t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0(-t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t_0} e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\overset{k=-k}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k} e^{jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(-t-t_0) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = a_{-k} e^{jk\omega_0 t_0}$$

$$x(-t+t_0) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} b_k = a_{-k} e^{-jk\omega_0 t_0}$$

连续时间傅立叶级数的性质

共轭及其共轭对称性

一般信号 $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k \Rightarrow x^*(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$

实信号 $x(t) = x^*(t) \Rightarrow a_k = a^*_{-k} \Leftrightarrow a_{-k} = a^*_k \Rightarrow |a_{-k}| = |a^*_k| = |a_k|$

$$\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\} \qquad \mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$$

$$|a_k| = |a_{-k}| \qquad \angle a_k = -\angle a_{-k}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t} \xrightarrow{\text{两边取共轭}} x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}\right)^* \longrightarrow x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k{}^* e^{-jkw_0 t}\right)$$

变量替换

$$x^*(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a^*_{-k} \longleftarrow x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}{}^* e^{jkw_0 t}\right)$$

连续时间傅立叶级数的性质

共轭及其共轭对称性

一般信号 $x(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} a_k \Rightarrow x^*(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} a^*{}_{-k}$

实信号 $x(t)=x^*(t) \Rightarrow a_k = a^*{}_{-k} \Leftrightarrow a_{-k} = a^*{}_k \Rightarrow |a_{-k}| = |a_k^*| = |a_k|$

x(t) is 实偶信号

实 $a_{-k} = a_k^*$

偶 $a_k = a_{-k}$

$\Rightarrow a_k = a_k^* = a_{-k} \Rightarrow a_k$ 为实偶

x(t) is 实奇信号

实 $a_{-k} = a_k^*$

奇 $a_k = -a_{-k}$

$\Rightarrow a_k = -a_k^* = -a_{-k}$

$a_0 = 0$

奇+纯虚

实信号x(t) 的偶部 $\dfrac{x(t)+x(-t)}{2} \rightarrow \dfrac{a_k + a_{-k}}{2} = \dfrac{a_k + a^*}{2}$ $x_e(t) \rightarrow \mathrm{Re}\{a_k\}$

实信号x(t) 的奇部 $\dfrac{x(t)\text{-}x(-t)}{2} \rightarrow \dfrac{a_k - (a_{-k})}{2} = \dfrac{a_k - a_k^*}{2}$ $x_o(t) \rightarrow j\,\mathrm{Im}\{a_k\}$

连续时间傅立叶级数的性质

共轭及其共轭对称性

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

一般信号 $x(t)\overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k \Rightarrow x^*(t)\overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$

实信号 $x(t)=x^*(t) \Rightarrow a_k = a^*_{-k} \Leftrightarrow a_{-k}=a^*_k \Rightarrow |a_{-k}|=|a^*_k|=|a_k|$

x(t) is 实偶信号 $a_k = a_k^* = a_{-k}$ 实+偶

x(t) is 实奇信号 $a_k = -a_k^* = -a_{-k}$ 奇+纯虚 $a_0 = 0$

$\mathcal{Re}\{a_k\} = \mathcal{Re}\{a_{-k}\}$

$\mathcal{Im}\{a_k\} = -\mathcal{Im}\{a_{-k}\}$

$|a_k| = |a_{-k}|$

$\angle a_k = -\angle a_{-k}$

实信号x(t)的奇、偶部分解

$x_e(t) \rightarrow \mathrm{Re}\{a_k\}$

$x_o(t) \rightarrow j\,\mathrm{Im}\{a_k\}$

基本3.6(a)

$$x(t)=\sum_{k=0}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

是否为实函数，若是，判断奇/偶性

$$a_k=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^k & 0\le k\le 100 \\ 0 & 其它\end{cases}$$

非实 非奇 非偶

$$x(t)=\sum_{k=-100}^{100}(-1)^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

实偶

$$x(t)\overset{Fs}{\longleftrightarrow} a_k = \begin{cases}(1/2)^k & otherwise \\ 0 & k=0\end{cases}$$

连续时间傅立叶级数的性质

连续信号的帕斯瓦尔定理

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$ 一个周期内的平均功率

一个周期信号的总平均功率等于它的全部谐波分量的平均功率之和。

$$\frac{1}{T}\int_T \left|a_k e^{jkw_0 t}\right|^2 dt=\frac{1}{T}\int_T |a_k|^2 dt=|a_k|^2$$ 第**k**次谐波的平均功率

连续时间傅立叶级数的性质

积分与微分性质

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FS} = jk\omega_0 a_k \quad (\text{ or } jk\frac{2\pi}{T}a_k)$$

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} x(t) \xrightarrow{FS} = \frac{a_k}{jk\omega_0} \quad (\text{ or } \frac{Ta_k}{2\pi jk})$$

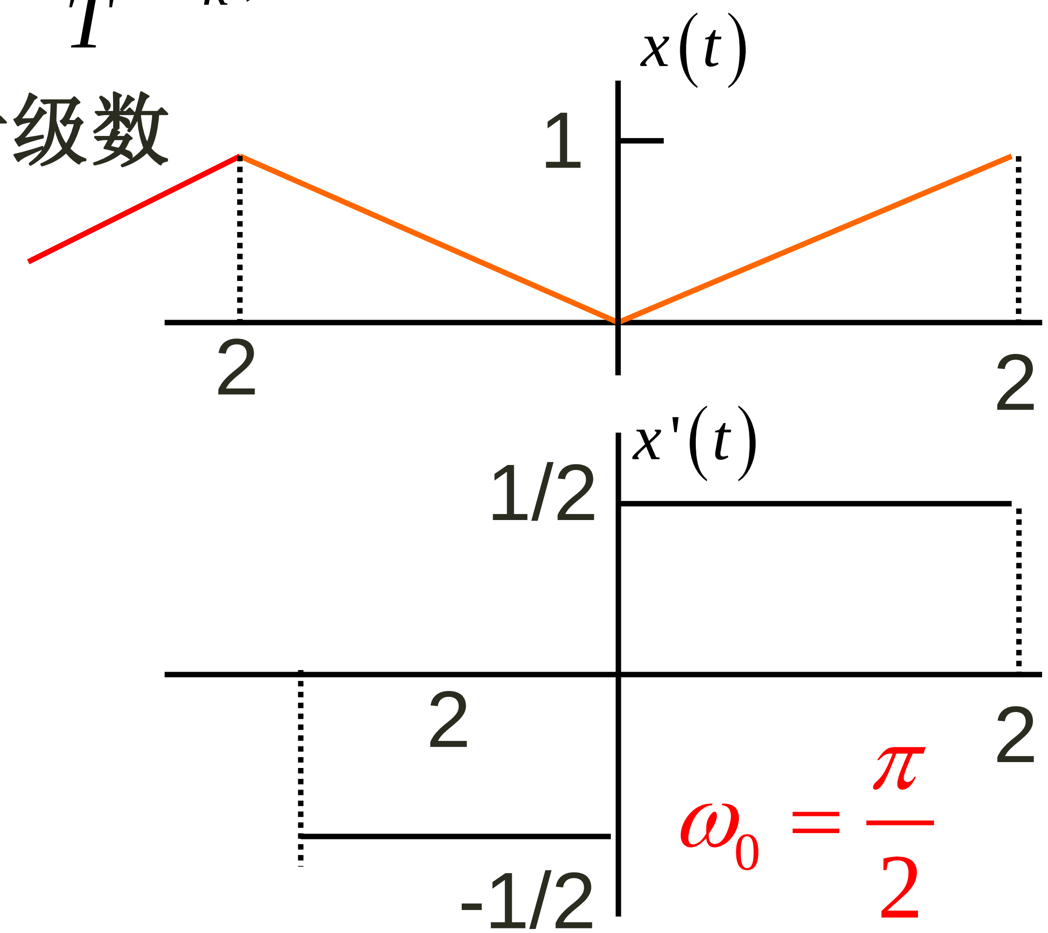
注意积分性质***k*=0**时要单独处理

例子

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FS} = jk\omega_0 a_k$$

例3.7 $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FS} = jk\omega_0 a_k \quad (\text{or } jk\frac{2\pi}{T}a_k)$

周期为**T=4**的三角波信号**x(t)**，计算其傅里叶级数



$$x(t) \longrightarrow a_k \qquad x'(t) \longrightarrow b_k$$

$$b_k = jk\omega_0 a_k = jk\frac{\pi}{2}a_k$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

例3.6

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(k\pi/2)e^{-jk\pi/2}}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{b_k}{jk\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} \dfrac{2\sin(k\pi/2)e^{-jk\pi/2}}{jk\pi} & k \neq 0 \\ \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} & k = 0 \end{cases}$$

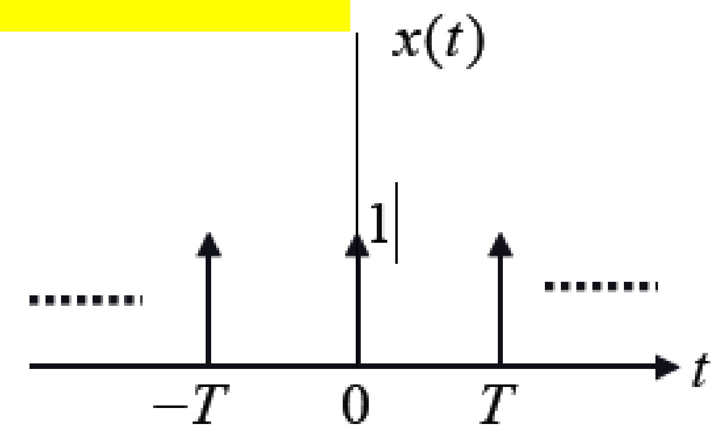
例子 $x(t) \overset{\mathcal{F}S}{\leftrightarrow} a_k$

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}S}{\leftrightarrow} e^{-jkw_0t_0}a_k$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{FS}{\rightarrow} = jk\omega_0 a_k$$

例3.8

计算 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ 的傅里叶级数



$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jkw_0t}dt=\frac{1}{T}\int_T \delta(t)e^{-jk\left(2\pi/T\right)t}dt=\frac{1}{T}$$

例子

例3.9　性质的综合应用

1. 信号x(t) 是一个实信号;

2. x(t) 是周期信号，周期为T=4;

3. Fs系数a_k=0 for |k|>1;

4. FS为$b_k = e^{-j\frac{k\pi}{2}} a_{-k}$ 的信号y(t)是奇信号.

5. $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$

$a_k = a_{-k}^*$, $|a_k| = |a_{-k}|$ a_0为实数

$\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

可能$a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_{-1} \neq 0$

$y(t) \to b_k \Rightarrow y(t) = x(-t+1)$

y(t)是实奇信号，b_k必纯虚+奇函数，b_0=0

$b_k = -b_k^* = -b_{-k}$

$b_0 = a_0 \longrightarrow b_0 = a_0 = 0$

$$b_1 = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_{-1} = (\cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2}) a_{-1} = -ja_{-1}$$

$$b_{-1} = e^{jk\frac{\pi}{2}} a_1 = (\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) a_1 = ja_1$$

$$b_{-1} = -b_1$$

b_k纯虚 $a_1 = a_{-1}$且为实数

$$|a_{-1}|^2 + |a_1|^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow |a_1| = \frac{1}{4} \longrightarrow a_1 = a_{-1} = \pm\frac{1}{2}$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \quad x_t = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}t} = \cos\frac{\pi}{2}t$$

$$a_1 = a_{-1} = -\frac{1}{2} \quad x_t = -\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}t} = -\cos\frac{\pi}{2}t$$

例子

基本题3.8 性质的综合应用

1. 信号x(t) 是一个实奇信号; $\rightarrow$ $a_k = -a_k^* = -a_{-k},\ a_0 = 0,\ |a_k| = |a_{-k}|$, a_k纯虚奇

2. x(t) 的周期为T=2; $\rightarrow$ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

3. Fs系数a_k=0 for |k|>1; $\rightarrow$ 可能$a_0 \neq 0,\ \ a_1 \neq 0,\ \ a_{-1} \neq 0$

4. $\dfrac{1}{2}\int_2 |x(t)|^2 dt = 1$ $\rightarrow$ $|a_{-1}|^2 + |a_1|^2 + |a_0|^2 = 1 \rightarrow |a_{-1}|^2 + |a_1|^2 = 1$

$$\downarrow$$

$$|a_1| = |a_{-1}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} j, a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} j, \quad or \quad a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} j, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} j$$

$$x(t) = j\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi t} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}e^{j\pi t}$$
$$= -\sqrt{2}\sin \pi t$$

or

$$x(t) = -j\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi t} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}e^{j\pi t}$$
$$= \sqrt{2}\sin \pi t$$

作业

- **3.5 平移 +反转**

$$x(-t-t_0)\overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = a_{-k}e^{jk\omega_0 t_0} \qquad x(-t+t_0)\overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k = a_{-k}e^{-jk\omega_0 t_0}$$

- **3.6判断x2(t)的实偶性**

实信号 $a_k = a^*_{-k}$

实偶 $a_k = a^*_k = a_{-k}$

虚奇 $a_k = -a^*_k = -a_{-k}$

$$a_0 = 0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{FS}{\rightarrow} = jk\omega_0 a_k \quad (\text{ or } jk\frac{2\pi}{T}a_k)$$

- **3.7 微分性质**