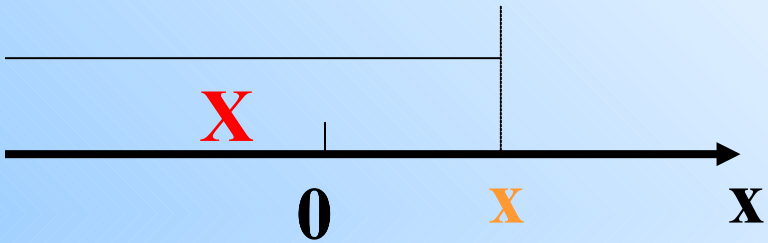
§3　随机变量的分布函数

一．分布函数的定义及其性质

定义　设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

称为 X 的分布函数．



$$F(x)=P\{X\le x\}$$

说明　分布函数 $F(x)$ 是 x 的实值单值函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,1]$。

返回主目录

§3 随机变量的分布函数

分 布 函 数 的 性 质

1^0 $F(x)$ 是一个不减的函数，

即当$x_2 > x_1$时，$F(x_2) \quad F(x_1)$.

事实上，$\because \ x_1 < x_2$，$\therefore \ \{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$,

$$\therefore \quad F(x_1) = P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\} = F(x_2).$$

2^0 $0 \le F(x) \le 1$,且

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \ F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

返回主目录

3^0 $F(x+0)=F(x)$, 即 $F(x)$是右连续的.

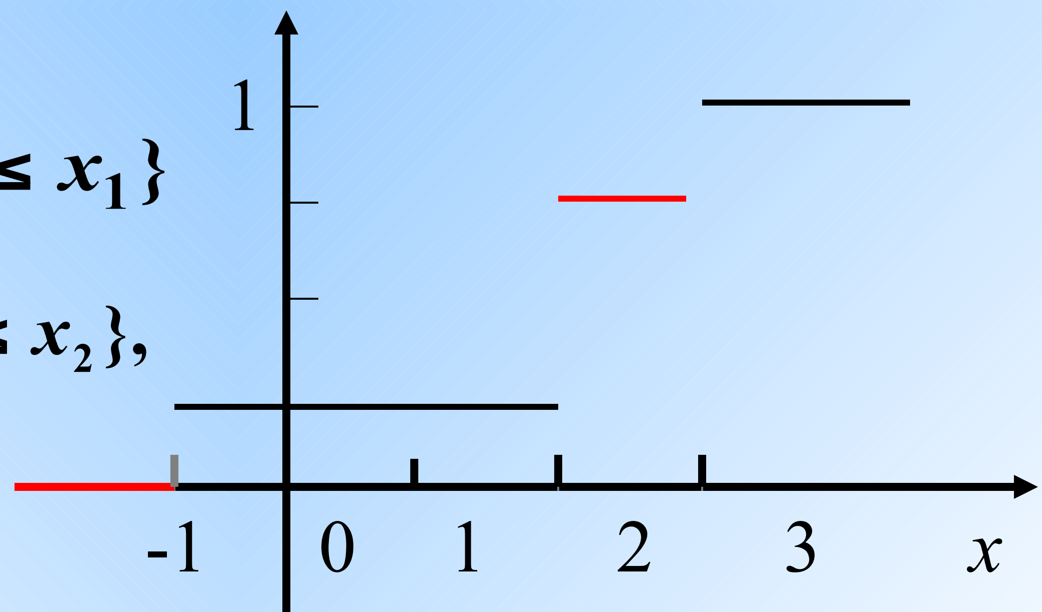
4^0 对于任意的实数 $x_1, x_2\ (x_1 \le x_2)$ ，有：

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\}$$
$$= F(x_2) - F(x_1).$$

$\because \quad \{x_1 < X \le x_2\}$

$= \{X \le x_2\} - \{X \le x_1\}$

而 $\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$,



§3 随机变量的分布函数

应用：1。用分布函数计算某些事件的概率

设 $F(x)=P\{X\le x\}$ **是随机变量** X **的分布函数，则**

$$P\{X<a\}=F(a-0)$$

$$P\{X=a\}=P\{X\le a\}-P\{X<a\}$$

$$=F(a)-F(a-0)$$

$$P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}$$

$$=F(b)-F(a)$$

返回主目录

用分布函数计算某些事件的概率

$$P\{a \le X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X < a\}$$

$$= F(b) - F(a-0)$$

$$P\{a < X < b\} = P\{X < b\} - P\{X \le a\}$$

$$= F(b-0) - F(a)$$

$$P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\}$$

$$= F(b-0) - F(a-0)$$

用分布函数计算某些事件的概率

$$P\{X > b\} = 1 - P\{X \le b\} = 1 - F(b)$$

$$P\{X \quad b\} = 1 - P\{X < b\} = 1 - F(b - 0)$$

§3 随机变量的分布函数

例 1 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{2} & 0\le x<1\\ \dfrac{2}{3} & 1\le x<2\\ \dfrac{11}{12} & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

则

(1) $.P\{X\le 3\}=F(3)=1$

(2) $.P\{X<3\}=F(3-0)=\dfrac{11}{12}$

(3) $.P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(4) $.P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}=1-F\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

(5) $.P\{2<X<4\}=F(4-0)-F(2)=1-\dfrac{11}{12}=\dfrac{1}{12}$

(6) $.P\{1\le X<3\}=F(3-0)-F(1-0)=\dfrac{11}{12}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{12}$

返回主目录

2。用分布函数的性质确定$F(x)$ 中的待定常数

例2 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = A + B\operatorname{arctg} x \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

试求常数A、B .

解：由分布函数的性质，我们有

$$0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}(A + B\operatorname{arctg} x) = A - \frac{\pi}{2}B$$

$$1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(A + B\operatorname{arctg} x) = A + \frac{\pi}{2}B$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi} .$$

返回主目录

例 3 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ A\sin x & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 1 & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

则 $A=?$

解：由分布函数的右连续性，我们有

$$1=F(\tfrac{\pi}{2}+0)=F(\tfrac{\pi}{2})=A$$

返回主目录

§3 随机变量的分布函数

二 离散型随机变量的分布函数

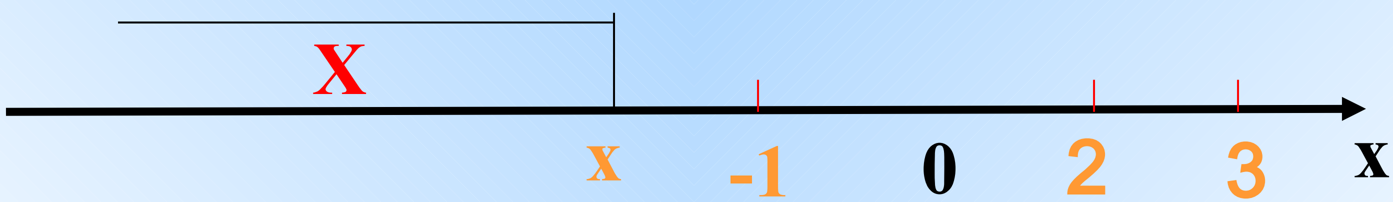
例 4 设随机变量 X 的分布律为：

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数.

解： 当 $x < -1$ 时，$\{X \le x\} = \varnothing$，

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\varnothing\} = 0.$$

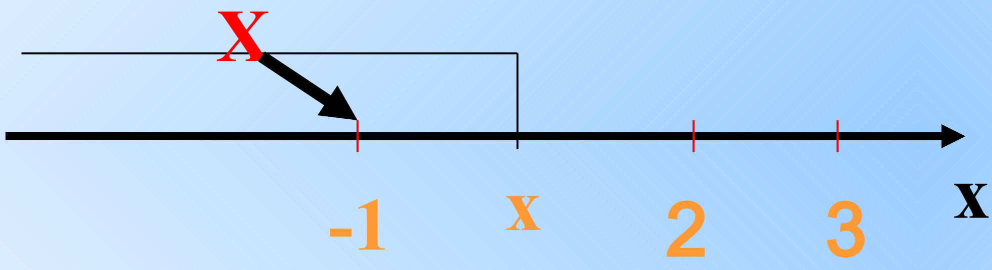


返回主目录

§3 随机变量的分布函数

当 $-1 \le x < 2$ 时，$\{X \le x\} = \{X = -1\}$

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}.$$



X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

当 $2 \le x < 3$ 时，$\{X \le x\} = \{X = -1\} + \{X = 2\}$

$$F(x) = P\{X \le x\} = P(\{X = -1\} + \{X = 2\})$$

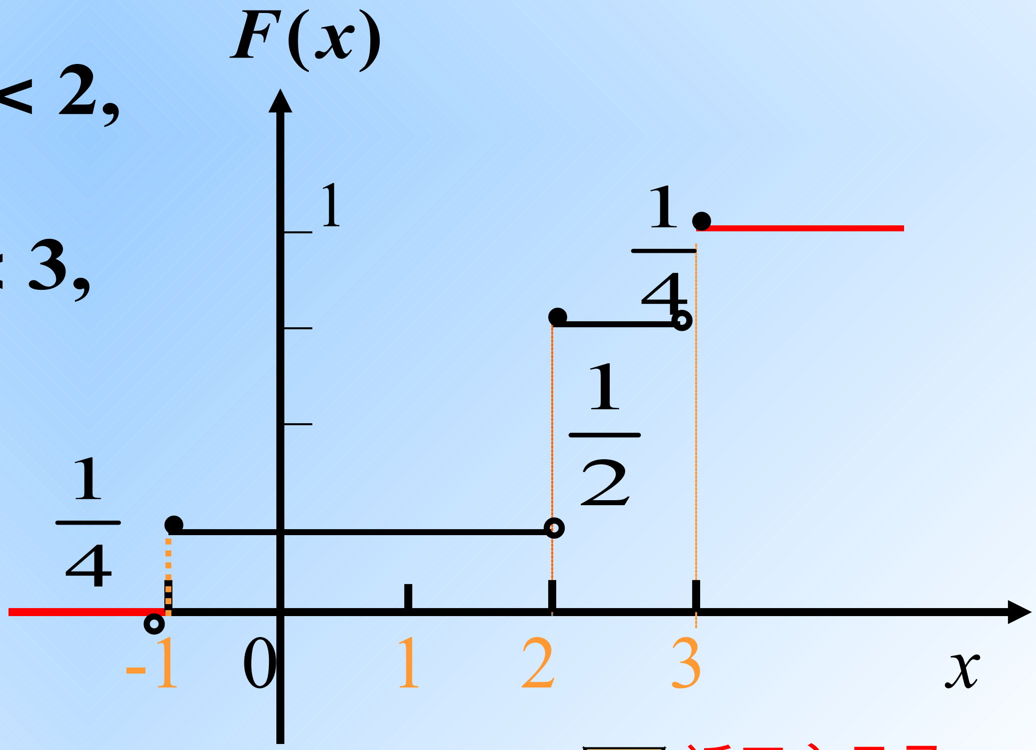
$$= P\{X = -1\} + P\{X = 2\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

返回主目录

同理当 $3 \le x$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1 \text{或} X = 2 \text{或} X = 3\} = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{4}, & -1 \le x < 2, \\ \dfrac{3}{4}, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \quad 3. \end{cases}$$



返回主目录

例 4

$$P\{X \le \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{4}, & -1 \le x < 2, \\ \dfrac{3}{4}, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \quad 3. \end{cases}$$

$$P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2})$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \le X \le 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

或 $$P\{2 \le X \le 3\} = F(3) - F(2-0)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

§3　随机变量的分布函数

小结：设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots)$$

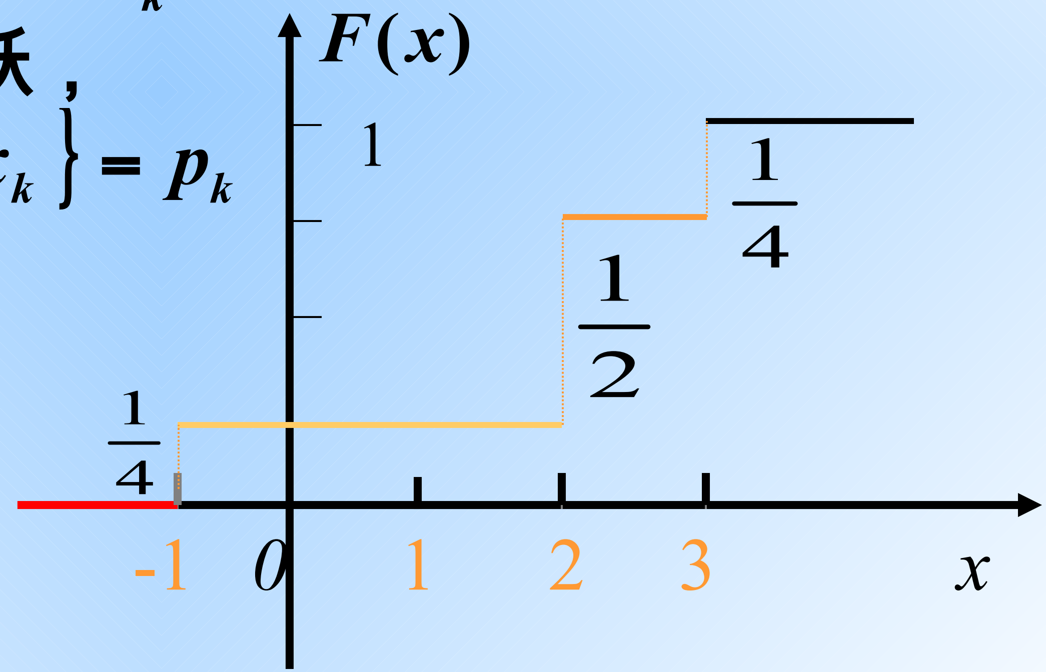
则X的分布函数 $F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} P\{X = x_k\}$

为阶梯函数，　且在 $X = x_k$

(k =1, 2 ,…) 处有跳跃，

其跳跃值为 $P\{X = x_k\} = p_k$

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



返回主目录

例 5 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{3} & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2} & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$

求 X 的分布律。

解：X 的可能取值为 0 ，1 ，2 。

$\because \quad P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$, $\quad \therefore P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}$

$$P\{X=1\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \qquad P\{X=2\}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

返回主目录

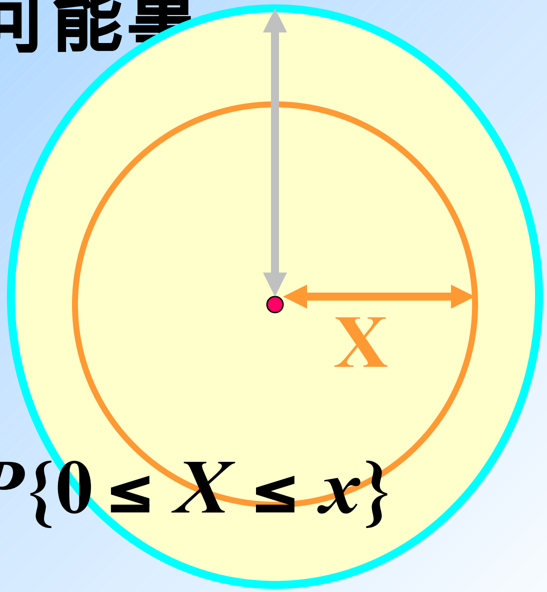
§3 随机变量的分布函数

例 6 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离．试求随机变量 X 的分布函数．

解： $X \quad 0$ $\quad \because \quad F(x) = P\{X \le x\}$

（1）若 $x < 0$，则 $\{X \le x\}$ 是不可能事件，

于是 $F(x) = P\{X \le x\} = P(\varnothing) = 0.$



（2）若 $0 \le x \le 2,$

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X < 0\} + P\{0 \le X \le x\}$$

$$P\{0 \le X \le x\} = k\,x^2,$$

取$x = 2$,由已知得$P\{0 \le X \le 2\} = 1$,与上式对比

得$k = 1/4$, 即 $P\{0 \le X \le x\} = \dfrac{x^2}{4}$.

于是，$0 \le x \le 2$时

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X < 0\} + P\{0 \le X \le x\}$$

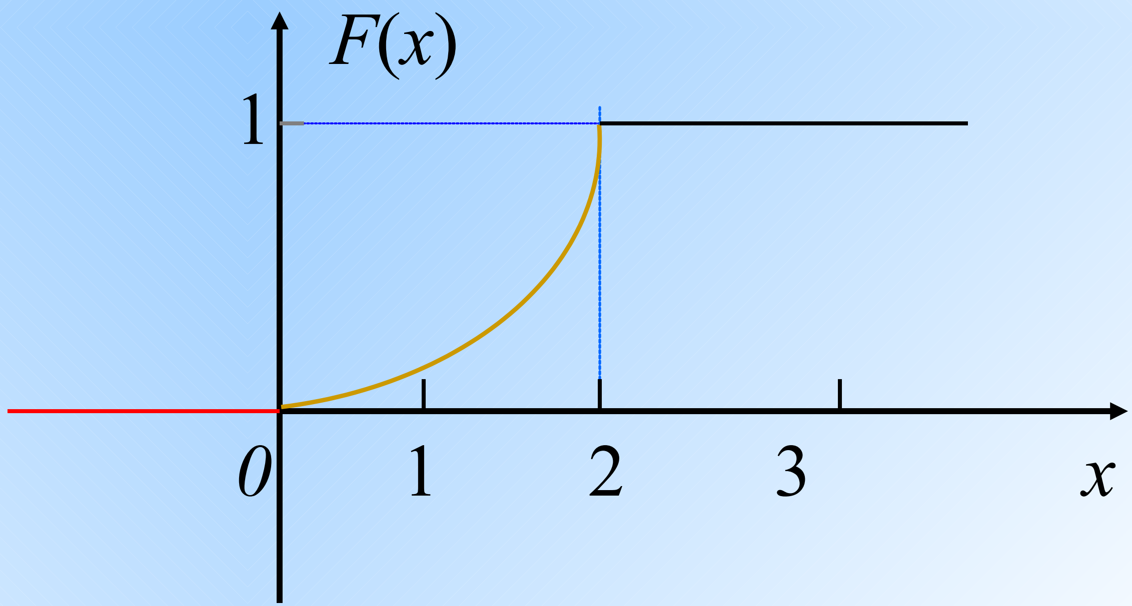
$$= \frac{x^2}{4}.$$

（3）若$x \quad 2$，则$\{X \le x\}$是必然事件，于是

$$F(x) = P\{X \le x\} = 1.$$

§3　随机变量的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ 1, & x\quad 2\end{cases}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad , \quad (f(x)\quad 0)$$



作业： p_{57} **18,19.**

返回主目录