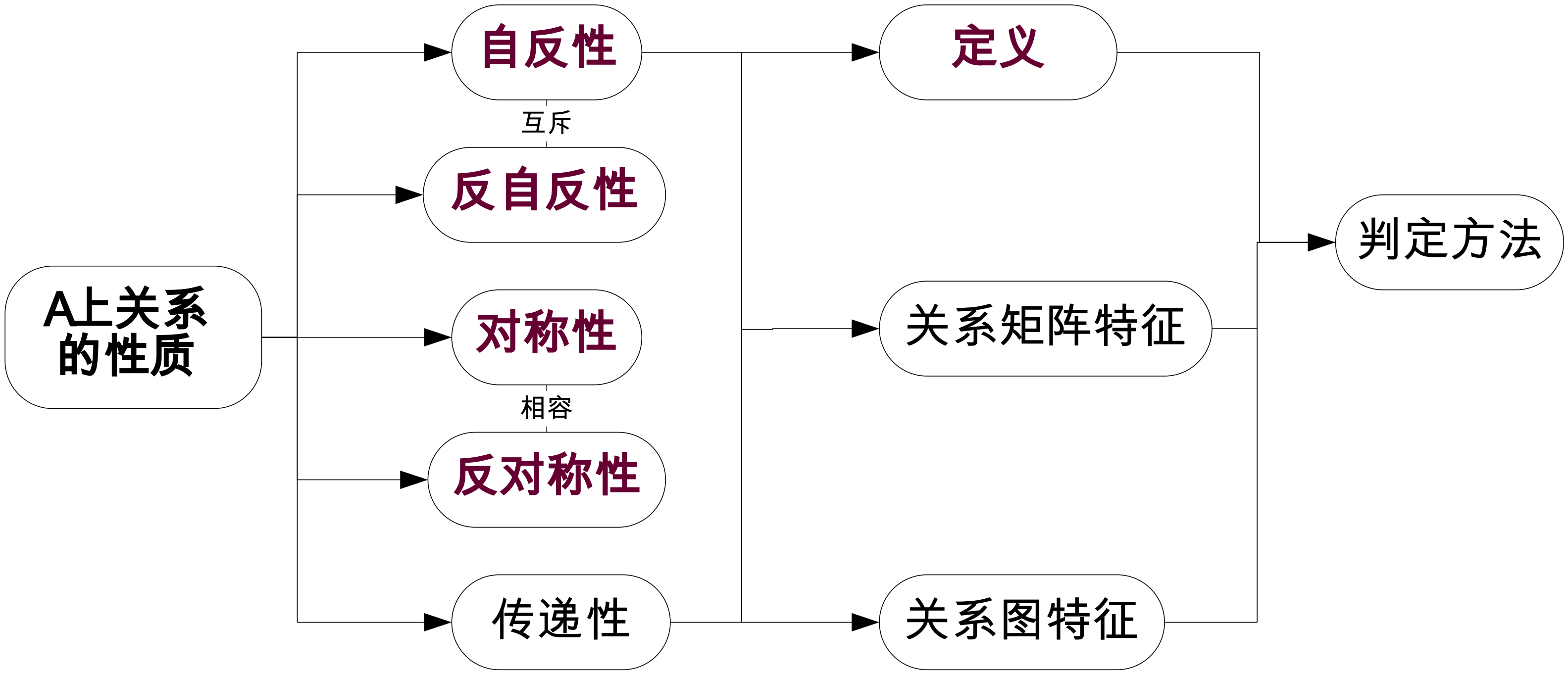
上节复习



4.3 关系的运算

- 关系是有序对的集合。所以集合的并、交、补、对称差等运算也适用于关系。
- 本节我们介绍关系所特有的 7 种基本运算及性质。

4.3.1 定义域与值域

定义 4.7 设 R 是二元关系，

（1）R 中所有有序对的第一元素构成的集合称为 R 的**定义域**，记作 $domR$，可表示为：

$$\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y(<x, y> \in R)\}$$

（2）R 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 R 的**值域**，记作 $ranR$，可表示为：

$$\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists x(<x,y> \in R)\}$$

（3）定义域和值域的并集称为 R 的**域**，记作 $fldR$，可表示为：

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

4.3.1 定义域与值域

例 4.11 已知 $R = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <4, 2>\}$ ，则

$\mathrm{dom}R = \{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R = \{1,2,3,4\}$

定理 4.2 若 R 和 S 是集合 A 到 B 的两个二元关系，则：

（1）$\mathrm{dom}R\cup S = \mathrm{dom}R\cup \mathrm{dom}S$

（2）$\mathrm{dom}R\cap S \subseteq \mathrm{dom}R\cap \mathrm{dom}S$

（3）$\mathrm{dom}R-\mathrm{dom}S \subseteq \mathrm{dom}R-S$

（4）$\mathrm{ran}R\cup S = \mathrm{ran}R\cup \mathrm{ran}S$

（5）$\mathrm{ran}R\cap S \subseteq \mathrm{ran}R\cap \mathrm{ran}S$

（6）$\mathrm{ran}R-\mathrm{ran}S \subseteq \mathrm{ran}R-S$　　证明略，见教材。

4.3.2 限制与像

定义 4.8 设 R 为二元关系，A 为集合，

（1）R 在 A 上的限制记作 $R\restriction A$，其中

$$R\restriction A = \{<x, y>|xRy \wedge x\in A\}$$

（2）A 在 R 下的像记作 $R[A]$，其中

$$R[A]=\mathrm{ran}\,(R\restriction A)$$

由定义可得出，R 在 A 上的限制 $R\restriction A$ 是 R 的子关系，而 A 在 R 下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集。

例 4.13 设 $R = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 4>, <3, 2>\}$

$R\restriction\{2\} = \{<2, 2>, <2, 4>\}$, $\quad R\restriction\varnothing = \varnothing$

$R\restriction\{1,3\} = \{<1,2>, <1,3>, <3,2>\}$, $\quad R[\{2\}] = \{2,4\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$, $\quad R[\{3\}] = \mathrm{ran}(R\restriction\{3\}) = \mathrm{ran}(\{<3,2>\}) = \{2\}$

4.3.2 限制与像

定理 4.3 设 R 为二元关系，A 和 B 为集合，则有

（1）$R\upharpoonright(A\cup B) = R\upharpoonright A\cup R\upharpoonright B$

（2）$R[A\cup B] = R[A]\cup R[B]$

（3）$R\upharpoonright(A\cap B) = R\upharpoonright A\cap R\upharpoonright B$

（4）$R[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$

证：（3）对任意的 $<x, y>$ ，

$<x, y>\in R\upharpoonright(A\cap B) \Leftrightarrow <x, y>\in R\wedge x\in A\cap B$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R\wedge(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow (<x, y>\in R\wedge x\in A)\wedge(<x, y>\in R\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R\upharpoonright A\wedge<x, y>\in R\upharpoonright B \Leftrightarrow <x, y>\in R\upharpoonright A\cap R\upharpoonright B$

所以有 $R\upharpoonright(A\cap B) = R\upharpoonright A\cap R\upharpoonright B$ 。

其他证明略。

4.3.3 逆运算

定义 4.9 设 R 是二元关系，R 的逆关系简称 R 的逆，记作 R^{-1}，定义如下：

$$R^{-1}=\{<x, y> \mid <y, x>\in R\}$$

例 4.14 已知 $A=\{0, 1, 2\}$，$R=\{<0, 0>, <0, 1>, <1, 2>, <2, 2>\}$ 是 A 上的二元关系，则

$$R^{-1} = \{<0, 0>, <1, 0>, <2, 1>, <2, 2>\}$$

容易证明，

（1）R^{-1} 的关系矩阵 是 R 的关系矩阵 M_R 的转置矩阵，即 $= M_R^T$。

（2）在 R 的关系图中，简单地颠倒每条边的箭头方向就得到 R^{-1} 的关系图。

4.3.3 逆运算

定理 4.4 设 R 是任意的关系，则有

（1）$(R^{-1})^{-1} = R$

（2）$\mathrm{dom}R^{-1} = \mathrm{ran}R$，$\mathrm{ran}R^{-1} = \mathrm{dom}R$

定理 4.5 设 R、S 是任意的关系，则有

（1）$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$。

（2）$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$。

（3）$(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

（4）$(X \times Y)^{-1} = Y \times X$

4.3.4 复合运算

定义 4.10 设 R ，S 为任意的二元关系，R 与 S 的复合记作 R∘S ，定义为：

$$R \circ S=\{<x, y> \mid \exists z(xRz \wedge zSy)\}$$

复合运算是关系的二元运算，它能够由两个关系生成一个新的关系。

例 4.15 设 $R = \{<1,2>, <2,2>, <3,4>\}$ ，$S = \{<1,3>, <2,5>, <3,1>, <4,2>\}$ ，则

$$R \circ S = \{<1,5>, <2,5>, <3,2>\}$$

$$S \circ R = \{<1,4>, <3,2>, <4,2>\}$$

由该例可以看出，关系的复合运算不满足交换律，即 $R \circ S \neq S \circ R$ 。

4.3.4 复合运算

关系矩阵 M_R 和 M_S 的布尔乘法：

设集合 $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ ，$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ，$Z=\{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$ ，R 是从 X 到 Y 的二元关系，其关系矩阵是 M_R ，S 是从 Y 到 Z 的二元关系，其关系矩阵是 M_S ，求 $R\circ S$ 的关系矩阵 $M_{R\circ S}$ 的方法如下：

$$M_R=[a_{ik}]_{m\times n} \qquad M_S=[b_{kj}]_{n\times p}$$

$$M_{R\circ S}=M_R\circ M_S=[c_{ij}]_{m\times p}$$ ，其中

$$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(c_{ik}\wedge b_{kj})\ ,\ i=1, 2, \ldots, m\ ,\ j=1, 2, \ldots, p$$

与线性代数中的矩阵乘法公式相比，只要把矩阵乘法公式中的数乘改为合取，把数加改为析取，就得到了关系矩阵的布尔乘法公式。

4.3.4 复合运算

定理 4.6　设 R、S、T 是任意的关系，则有

（1）$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

（2）$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$

证：（2）对于任意的 $<x,y>$，

$$<x,y>\in(R\circ S)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y, x>\in R\circ S$$

$$\Leftrightarrow \exists u(<y,u>\in R \wedge <u,x>\in S)$$

$$\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in S^{-1} \wedge <u,y>\in R^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in S^{-1}\circ R^{-1}$$

所以 $(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$。

4.3.4 复合运算

定理 4.7 设 R 是 A 上的关系，则有

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

定理 4.8 设 R、S、T 为任意的关系，则有

（1）$R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$

（2）$(S \cup T) \circ R = S \circ R \cup T \circ R$

（3）$R \circ (S \cap T) \subseteq R \circ S \cap R \circ T$

（4）$(S \cap T) \circ R \subseteq S \circ R \cap T \circ R$

定理 4.9 设 R、S、T、Q 为任意的关系，满足 $S \subseteq T$，则有：

（1）$R \circ S \subseteq R \circ T$

（2）$S \circ Q \subseteq T \circ Q$

4.3.4 复合运算

定义 4.11 设 R 为 A 上的关系，n 为自然数，则 **R 的 n 次幂**定义为：

（1）$R^0 = \{<x, x>|x \in A\} = I_A$

（2）$R^{n+1} = R^n \circ R, n0$

由该定义可以看出，A 上的任何二元关系的 0 次幂都相等，等于 A 上的恒等关系 I_A，并且有：

$$R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R$$

给定 A 上的关系 R 和自然数 n，怎样计算 R^n 呢？若 n 是 0 或 1，结果是很简单的。下面考虑 $n \geq 2$ 的情况：

（1）如果 R 是用集合表达式给出的，可以根据定义通过 n-1 次右复合计算得到 R^n。

4.3.4 复合运算

（2）如果 R 是用关系矩阵 M_R 给出的，则 R^n 的关系矩阵是 n 个矩阵 M_R 的布尔乘法：

$$M_{R^n} = \underbrace{M_R \circ M_R \circ \cdots \circ M_R}_{n\text{个}} = M_R^{\ n}$$

（3）如果 R 是用关系图 G 给出的，可以直接由图 G 得到 R^n 的关系图 G^n：

① G^n 的顶点集与 G 相同。

② 考察 G 的每个顶点 x_i，如果在 G 中从 x_i 出发经过 n 步长的路径到达顶点 x_j，则在 G^n 中加一条从 x_i 到 x_j 的边。

③ 当把所有这样的边都找到以后，就得到图 G^n。

4.3.4 复合运算

例 4.17 设 $A=\{a, b, c, d\}$, $R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$，求 R 的各次幂。

解：（1）根据定义求：

$$R^0 = I_A$$

$$R^1 = R$$

$$R^2 = R\circ R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle,\langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$$

$$R^3 = R^2\circ R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle,\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$$

$$R^4 = R^3\circ R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle,\langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\}= R^2$$

由此可以得到

$$R^2 = R^4 = R^6 = \ldots$$

$$R^3 = R^5 = R^7 = \ldots$$

用关系矩阵、关系图求可得到相同的结果 .

4.3.4 复合运算

R 的关系矩阵为

$$M_R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M_R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = M_R^2 M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3.4 复合运算

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = M_R^2 M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^4 = M_R^3 M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此 , $M^4 = M^2$, 即 $R^4 = R^2$. 由此可得 :

$R^2 = R^4 = R^6 = \ldots$

$R^3 = R^5 = R^7 = \ldots$

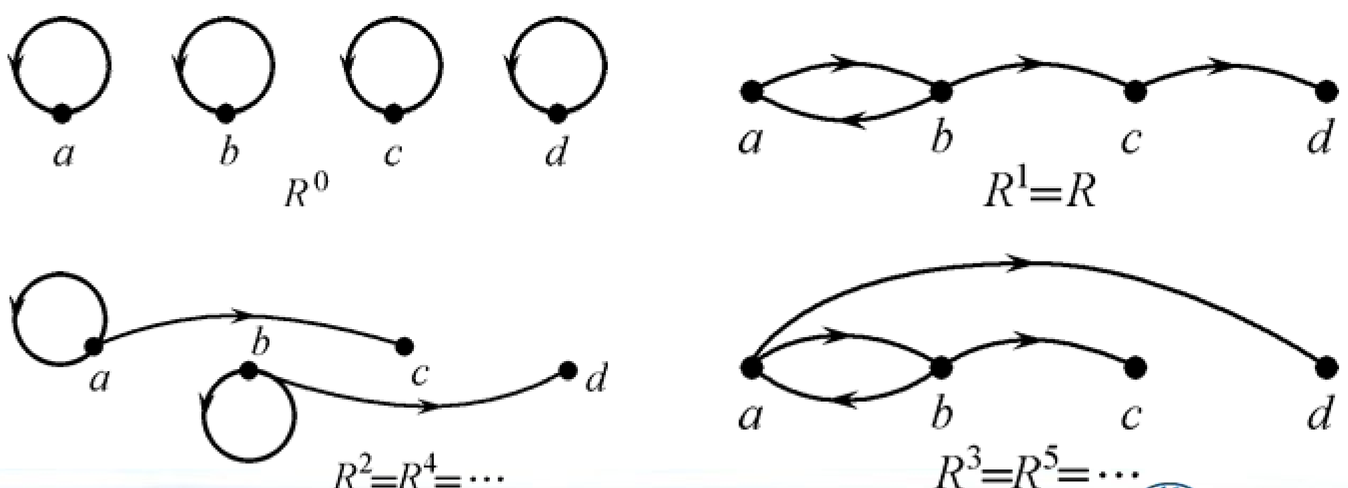
4.3.4 复合运算

关系 R^0, 即 : I_A 的关系矩阵是

$$M_{I_A}^{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

至此 , R 各次幂的关系矩阵都得到了 .

用关系图的方法得到 R^0, R^1, R^2, R^3, …, 的关系图如下图所示 .



4.3.4 复合运算

幂运算的性质：

定理 4.10 设 R 是集合 A 上的二元关系，m ，n 是任意自然数，则

（1）$R^m \circ R^n = R^{m+n}$

（2）$(R^m)^n = R^{mn}$

定理 4.11 设 A 是具有 n 个元素的有限集，R 为 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t ，使得 $R^s = R^t$。

证：R 为 A 上的关系，对任何自然数 k ，R^k 都是 A 上的关系。由定理 4.1 ，A 上的二元关系共有 2^{n^2} 种，所以当列出 R 的各次幂 $R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots$ 时，必存在自然数 s 和 t ，使得 $R^s = R^t$（鸽笼原理）。

鸽笼原理(抽屉原理)

- "如果有五个鸽子笼,养鸽人养了 6 只鸽子,那么当鸽子飞回笼中后,至少有一个笼子中装有 2 只鸽子."这个简单的事实就是著名的鸽笼原理,在我们国家更多地称为抽屉原理.
- 抽屉原理的更一般的叙述是:有 n+1 件或 n+1 件以上的物品要放到 n 个抽屉中,那么至少有一个抽屉里有两个或两个以上物品.

4.3.5 关系的性质与运算的联系

第 4.2 节我们讨论过，非空集合 A 上的关系的性质主要有自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性等五种。下面给出这五种性质成立的充分必要条件，可用于判断一个关系是否具有某种性质。

定理 4.12 设 R 是 A 上的关系，则

（1）R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$。

（2）R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$。

（3）R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$。

（4）R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

（5）R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq \mathrm{R}$。

4.3.5 关系的性质与运算的联系

证 (1.1) 必要性

R 在 A 上自反的，任取 <x, x>

$\langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$.

即：$I_A \subseteq R$.

(1.2) 充分性

$I_A \subseteq R$ ，任取 x,

$x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$.

因此，R 在 A 上是自反的 .

4.3.5 关系的性质与运算的联系

(2). R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \phi$

证 (2.1) 必要性 (用反证法)

假设 $R \cap I_A \neq \phi$，那么一定存在 $\langle x, y\rangle \in R \cap I_A$. 由于 I_A 是 A 上的恒等关系，从而推出 $x \in A$ 且 $\langle x, x\rangle \in R$. 这与 R 在 A 上是反自反的相矛盾 .

(2.2) 充分性

任取 x，则有 :

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \notin R \quad (\text{由于 } R \cap I_A = \phi)$$

从而证明了 R 在 A 上是反自反的 .

4.3.5 关系的性质与运算的联系

(3). R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

证　(3.1) 必要性

任取 $<x, y>$，有：

$$<x, y> \in R \Leftrightarrow <y, x> \in R \Leftrightarrow <x, y> \in R^{-1}$$

所以，$R = R^{-1}$.

(3.2) 充分性

任取 $<x, y>$，由“$R = R^{-1}$”可得：

$$<x, y> \in R \Leftrightarrow <y, x> \in R^{-1} \Leftrightarrow <y, x> \in R$$

所以，R 在 A 上是对称的 .

4.3.5 关系的性质与运算的联系

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

证 **(4.1) 必要性**

任取 <x, y>，有：

$\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \land \langle x, y\rangle \in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \land \langle y, x\rangle \in R$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in I_A$

(4.2) 充分性

任取 <x, y>，有：

$\langle x, y\rangle \in R \land \langle y, x\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \land \langle x, y\rangle \in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in I_A$

$\Rightarrow x = y$

从而证明了 R 是 A 上是反对称的．

4.3.5 关系的性质与运算的联系

(5)R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证 (5.1) 必要性

任取 $\langle x, y\rangle$，有：

$\langle x, y\rangle \in R \circ R$

$\Rightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in R \wedge \langle t, y\rangle \in R)$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R$

所以，$R \circ R \subseteq R$.

(5.2) 充分性

任取 $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R$，有：

$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \circ R (R \circ R \subseteq R)$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$

所以，R 是 A 上是传递的 .

4.3.5 关系的性质与运算的联系

除基本定义之外，五种性质的基本判定方法.

性质 表示	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \phi$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	对称矩阵	若 $r_{ij}=1$ 且 $i \neq j$, 则，$r_{ji} = 0$	对 M^2 中 1 所在的位置，M 中相应的位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边（无单边）	如果两个顶点之间有边，一定是一条有向边（无双向边）	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 也有边

4.3.5 关系的性质与运算的联系

下面研究关系的性质和运算之间的联系。

下表给出了关系的性质和运算之间的联系，其中的√和×分别表示“能保持”和“不一定能保持”的含义。

原有性质 运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

4.3.5 关系的性质与运算的联系

例 4.18 **设 A 是集合**，R_1, R_2 是 A 上的关系，证明:

若 R_1, R_2 是自反的和对称的，则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反的和对称的。

证：由于 R_1 **和** R_2 是 A 上的自反关系，故有

$$I_A \subseteq R_1 \text{ 且 } I_A \subseteq R_2$$

从而得到 $I_A \subseteq R_1 \cup R_2$。根据定理 4.12 可知 $R_1 \cup R_2$ 在 A 上是自反的。

再由 R_1 和 R_2 的对称性有

$$R_1 = R_1^{-1} \text{ 且 } R_2 = R_2^{-1}$$

根据定理 4.5 有

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$$

根据定理 4.12 可知 $R_1 \cup R_2$ 在 A 上是对称的。

4.3.6 关系的闭包运算

关系 *R* 的闭包：对 *R* 扩充最少的有序对而得到具有某种性质的新关系。

定义 4.12　设 *R* 是非空集合 *A* 上的任意关系，若 *A* 上存在一个关系 R’ 满足：

（1）*R*’ 是自反的（对称的或传递的）。

（2）$R \subseteq R'$。

（3）对 *A* 上的任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 *R*”，都有 $R' \subseteq R''$。

则称 *R*’ 是 *R* 的自反闭包（对称闭包或传递闭包）。

一般将 R 的自反闭包记作 *r*(*R*)，对称闭包记作 *s*(*R*)，传递闭包记作 *t*(*R*)。

例如设 *R* 是集合 *A*={a, b, c} 上的二元关系，且 *R*={<a, b>, <a, c>}，则

r(*R*)={<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <a, c>}

s(*R*)={<a, b>, <b, a>, <a, c>, <c, a>}

t(*R*)=*R*

4.3.6 关系的闭包运算

下面的定理给出了构造闭包的方法。

定理 4.13 设 R 是非空集合 A 上的关系，则有

（1）$r(R) = R \cup R^0$

（2）$s(R) = R \cup R^{-1}$

（3）$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

证明思路：

- (1) 根据定义及符号化表示，等值演算；
- (2) 根据前已有的定理进行推导；
- (3) (1)(2) 的综合利用。

4.3.6 关系的闭包运算

(1) $r(R) = R\cup R^0$

证

(1) 由 $I_A = R^0 \subseteq R\cup R^0$ 可知：$R\cup R^0$ 是自反的，且满足：$R \subseteq R\cup R^0$.

设 R'' 是 A 上包含 R 的自反关系，则有 $R \subseteq R''$ 和 $I_A \subseteq R''$

任取 $<x, y>$，一定有：

$<x, y>\in R\cup R^0$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R \vee <x, y>\in R^0 \quad \Rightarrow <x,y>\in R'' \vee <x, y>\in R'' \Leftrightarrow <x,y>\in R''$

从而证明了 $R\cup R^0 \subseteq R''$.

综上所述 $R\cup R^0$ 满足“自反闭包定义”中的三个条件.

所以，$r(R) = R\cup R^0$.

4.3.6 关系的闭包运算

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(2) 显然 $R \subseteq R \cup R^{-1}$ ，

对任意的 $<x,y> \in R \cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R \vee <x,y> \in R^{-1}$

若 $<x,y> \in R$ 则 $<y,x> \in R^{-1}$、

从而 $<y,x> \in R \cup R^{-1}$ ，

若 $<x,y> \in R^{-1}$ 则 $<y,x> \in R$、

从而 $<y,x> \in R \cup R^{-1}$ ，

故 $R \cup R^{-1}$ 具有对称的性质。

4.3.6 关系的闭包运算

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

设 S 是 A 上另外任一个满足对称性且 $R \subseteq S$ 的二元关系

对任意的 $< x,y > \in R \cup R^{-1}$

必定有 $< x,y > \in R$ 或 $< x,y > \in R^{-1}$ ，

若 $< x,y > \in R$ 则 $< x,y > \in S$;

若 $< x,y > \in R^{-1}$ 则必定有 $< y,x > \in R$ ，

必定有 $< y,x > \in S$ ，

又因为 S 是对称的，故 $< x,y > \in S$ 。

所以 $R \cup R^{-1} \subseteq S$ 。因此 $s(R) = R \cup R^{-1}$ 。

4.3.6 关系的闭包运算

(3) $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots$

(3) 先证：$R^1 \cup R^2 \cup \ldots \subseteq t(R)$

证明对任意的正整数 n，有：$R^n \subseteq t(R)$. 用归纳法．

(3.1) n=1 时，有：$R^1 = R \subseteq t(R)$.

(3.2) 假设：$R^n \subseteq t(R)$ 成立，那么，对任意的 $\langle x, y\rangle$，有：

$$\langle x, y\rangle \in R^{n+1} = R^n \circ R^1$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in R^n \wedge \langle t, y\rangle \in R^1)$$

$$\Rightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in t(R) \wedge \langle t, y\rangle \in t(R))$$

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in t(R)$$ （因为 t(R) 是传递的）

这就证明了 $R^{n+1} \subseteq t(R)$，由归纳法命题得证．

4.3.6 关系的闭包运算

再证：$t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \ldots$,

首先证明 $R^1 \cup R^2 \cup \ldots$ 是传递的.

任取 $<x, y>$, $<y, z>$, 则：

$$<x, y> \in (R^1 \cup R^2 \cup \ldots) \land <y, z> \in (R^1 \cup R^2 \cup \ldots)$$

$$\Rightarrow \exists s(<x, y> \in R^s) \land \exists t(<y, z> \in R^t)$$

$$\Rightarrow \exists s \exists t(<x, z> \in R^s \circ R^t)$$

$$\Rightarrow \exists s \exists t(<x, z> \in R^{s+t})$$

$$\Rightarrow <x, z> \in R^1 \cup R^2 \cup \ldots$$

由此可见，关系 $R^1 \cup R^2 \cup \ldots$ 具有传递性.

再根据传递闭包的定义可知：$t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \ldots$ 。

根据上述证明过程可知：$t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots$ 。

4.3.6 关系的闭包运算

推论 4.1　设 A 是含有 n 个元素的集合，则 $\exists\, t \in Z^{+}$，满足

$$t(R) = R \cup R^{2} \cup R^{3} \cup \ldots \cup R^{t}$$。

定理证明略，见教材。

4.3.6 关系的闭包运算

根据定理 4.13 ，可以得到求闭包的三种方法：

（ 1 ）根据定理 4.13 通过集合运算求得。

（ 2 ）利用关系矩阵求闭包。

设关系 R 、 r(R) 、 s(R) 、 t(R) 的关系矩阵分别是 M 、 M_r 、 M_s 和 M_t ，定理 4.13 中的公式转换成矩阵表示：

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$$

其中， E ：与 M 同阶的单位矩阵。

M' ： M 的转置。

“+” ：矩阵中对应元素的逻辑加 (按位或) 。

4.3.6 关系的闭包运算

（ 3 ）利用关系图求闭包。

设关系 R 、 r(R) 、 s(R) 、 t(R) 的关系图分别是 G 、 Gr 、 Gs 和 Gt ，则 Gr 、 Gs 、 Gt 的顶点集与 G 的顶点集相等。除了 G 的边以外，依下述方法添加新的边：

Gr ：考察 G 的每个顶点，如果没有环就加上一个环，最终得到的是 Gr 。

Gs ：考察 G 的每一条边，如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边， $i \neq j$ ，则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边．最终得到 Gs 。

Gt ：考察 G 的每个顶点 x_i, 找 x_i 可达的所有顶点 x_j(允许 i=j) ，如果没有从 x_i 到 x_j 的边，就加上这条边，得到图 Gt 。

4.3.6 关系的闭包运算

例 4.20 设 A = { a, b, c, d }, R = { <a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <d, b> }, 从 R 的关系图得到 r(R), s(R), t(R) 的关系图 .

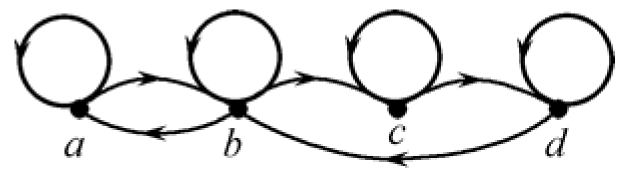
(练习)

R

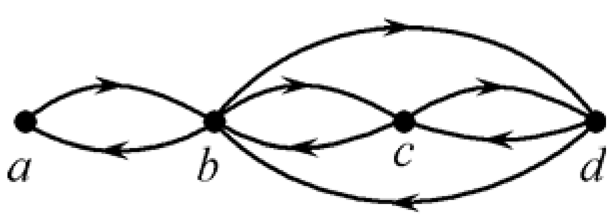
4.3.6 关系的闭包运算

例 4.20 设 A = { a, b, c, d }, R = { <a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <d, b> }, 则 R 和 r(R), s(R), t(R) 的关系图如下图所示 . 其中 r(R), s(R), t(R) 的关系图就是使用上述方法直接从 R 的关系图得到的 .

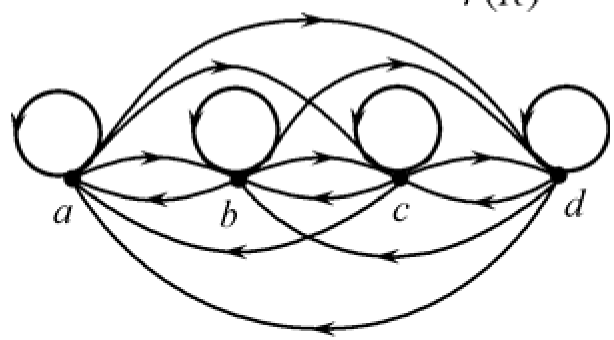
R



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

4.3.6 关系的闭包运算

- 利用计算机求关系的传递闭包可以采用矩阵的表示方法．设 $A = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$, R 为 A 上的二元关系，其关系矩阵为 M，那么，
- $$M_t = M + M^2 + \ldots + M^n$$
- 因为在 R 的关系图中，从顶点 x_i 到 x_j 且不含回路的路径最多 n 步长．只要找到所有这样的路径，就可找到那些在传递闭包关系图中的边．

4.3.6 关系的闭包运算

一个更有效的方法沃舍尔 (Warshall) 算法 . （ Warshall 在 1962 年提出）。

考虑 n+1 个矩阵的序列 $M_0, M_1, \ldots, M_n$.

$M_k[i,j]=1$ 当且仅当在 R 关系图中存在一条从 x_i 到 x_j 的路径，并且这条路径除端点外中间只经过 $\{ x_1, x_2, \ldots, x_k \}$ 中的结点 .

不难证明 M_0 是 R 的关系矩阵，而 M_n 就对应 R 的传递闭包 .

沃舍尔算法从 M_0 开始，顺序计算 $M_1, M_2, \ldots$ 直到 M_n 为止 .

4.3.6 关系的闭包运算

假设已有 M_k，如何计算 M_{k+1}?

$M_{k+1}[i, j] = 1$ 当且仅当在 R 的关系图中存在一条 xi 到 xj，并且中间只经过 $\{ x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \}$ 的路径 .

这时可将路径分成两种情况：

- $M_k[i, j] = 1$;
- $M_k[i, k+1] = 1$ 且 $M_k[k+1, j] = 1$

4.3.6 关系的闭包运算

算法 Warshall

输入：M (R 的关系矩阵)

输出：Mt (t(R) 的关系矩阵)

1. Mt ← M
2. for k ← 1 to n do
3. for i ← 1 to n do
4. for j ← 1 to n do
5. Mt[i, j] = Mt[i, j] + Mt[i, k] * Mt[k, j]

逻辑加

逻辑乘

考虑例 4.20 中的关系 R，利用沃舍尔算法计算的矩阵序列如下面所示，所得到的传递闭包实际上就是全域关系 E_A.

$$M_0=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad M_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}\quad M_3=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\quad M_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

4.3.6 关系的闭包运算

下面我们讨论关系闭包的主要性质。

定理 4.14 设 R 是非空集合 A 上的一个二元关系，则

（1）R 是自反的，当且仅当 $r(R) = R$。

（2）R 是对称的，当且仅当 $s(R) = R$。

（3）R 是传递的，当且仅当 $t(R) = R$。

证 只证 (1) 的必要性.

因为 $r(R) = R \cup R^0$.

显然有 $R \subseteq r(R)$, 又由于 R 是自反关系，根据自反闭包的定义，有：$r(R) \subseteq R$, 从而得到 $r(R) = R$.

4.3.6 关系的闭包运算

定理 4.15 设 R_1、 R_2 是非空集合 A 上的二元关系，若 $R_1 \subseteq R_2$，则

（1） $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2） $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3） $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明见教材。

定理 4.16 设 R_1， R_2 都为集合 A 上的二元关系，则

（1） $r(R_1 \cup R_2)=r(R_1) \cup r(R_2)$ 。

（2） $s(R_1 \cup R_2)=s(R_1) \cup s(R_2)$ 。

（3） $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$ 。

证明见教材。

4.3.6 关系的闭包运算

定理 4.17 设 R 是非空集合 A 上的一个二元关系，那么：

（1）$rs(R)=sr(R)$

（2）$rt(R)=tr(R)$

（3）$ts(R)\supseteq st(R)$

证明略，见教材。

定理 4.18 设 R 是非空集合 A 上的一个二元关系，那么：

（1）若 R 是自反的，则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的。

（2）若 R 是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的。

（3）若 R 是传递的，则 $r(R)$ 是传递的。

证明略，见教材。

4.3.6 关系的闭包运算

说明：定理 4.18 讨论了关系性质和闭包运算之间的联系：

（1）如果关系 R 是自反的，那么经过求闭包的运算以后所得到的关系仍旧是自反的。

（2）如果关系 R 是对称的，那么经过求闭包的运算以后所得到的关系仍旧是对称的。

（3）但是对于传递的关系则不然，它的自反闭包仍旧保持传递性，而对称闭包就有可能失去传递性。

因此，在计算关系 R 的自反、对称、传递的闭包时，为了不失传递性，传递闭包运算应放在对称闭包运算的后边．若令 tsr(R) 表示 R 的自反、对称、传递闭包，则

$$tsr(R) = t(s(r(R)))$$

小结

- 关系的运算
  - 分类：
    - 集合运算：并、交、补和对称差等。
    - 特有运算：定义域与值域，限制与像，逆运算，复合运算与幂运算
  - 运算的优先级
  - 运算的性质
  - 关系矩阵和关系图：
    - 逆运算
    - 复合运算
    - 幂运算
  - 关系的性质和运算之间的联系，见表 4.2 。
  - 关系的闭包
    - 分类：自反闭包，对称闭包，传递闭包。
    - 构造闭包：
      - $r(R) = R \cup R^0$
      - $s(R) = R \cup R^{-1}$
      - $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$
      - 构造方法
        - ① 集合运算
        - ② 关系矩阵法
        - ③ 关系图法
    - 闭包运算的主要性质。

作业

❖ **补充习题 4.3**

1．设

$$A=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$B=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

求 $A\cup B$，$A\cap B$，$domA$，$domB$，$dom(A\cup B)$，$ranA$，$ranB$，$ran(A\cap B)$，$fld(A-B)$.

2．课本 P189 习题第 15 题