### 第五章 矩阵的对角化

### 5.1 特征值与特征向量

- ► 5.1.1 特征值与特征向量 的概念与计算
- ▶ 5.1.2 特征值和特征向量的性质

### 5.1.1 特征值与特征向量的概念与计算



1. 特征值与特征向量的概念

定义5.1 设A是n阶方阵,如果存在复数 $\lambda$ 和n维列向量  $x \neq 0$  使得等式  $Ax = \lambda x$ 

成立,则称 $\lambda$ 为矩阵A的一个特征值,非零向量x称为矩阵A的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量,简称为特征向量. 注: (1) 特征向量 $x \neq 0$ ,特征值问题是对方阵而言的 (2) 若x是矩阵A的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量, $k \neq 0$ ,则非零向量 $\lambda x$ 也是矩阵A的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量.

$$A(\underline{kx}) = kAx = k(\lambda x) = \lambda(\underline{kx}),$$

特征值2对应的特征向量不唯一

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

例1 若 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
, 取  $\lambda = 5$ ,  $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ , 则



$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5x$$

因此  $\lambda = 5$  是矩阵A的特征值,  $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  是属于  $\lambda = 5$  的特征向量.

如果取
$$\lambda = -2$$
,  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 则有
$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

因此  $\lambda = -2$  也是矩阵A的特征值, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 

是属于1=-2 的特征向量.

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

例2 x<sub>1</sub>,x<sub>2</sub>是A的属于特征值λ的线性无关特征向量,证明:对任意不全为零的k<sub>1</sub>,k<sub>2</sub>,k<sub>1</sub>x<sub>1</sub>+k<sub>2</sub>x<sub>2</sub>都是矩阵A的属于特征值λ的特征向量.

证明:由已知  $Ax_1 = \lambda x_1$ ,  $Ax_2 = \lambda x_2$ 而  $k_1 x_1 + k_2 x_2 \neq 0$   $A(\underline{k_1 x_1 + k_2 x_2}) = k_1 Ax_1 + k_2 Ax_2$   $= k_1 (\lambda x_1) + k_2 (\lambda x_2)$  $= \lambda (k_1 x_1 + k_2 x_2)$ 

所以  $k_1x_1 + k_2x_2$  是属于 $\lambda$  的特征向量.

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

#### 2. 特征方程与特征多项式



 $\lambda$ 为矩阵A的特征值,x为A的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量  $x \neq 0, Ax = \lambda x \Leftrightarrow x \neq 0, 使得<math>Ax = \lambda x$   $\Leftrightarrow \exists x \neq 0, \lambda x - Ax = 0 \Leftrightarrow \exists x \neq 0, (\lambda E - A)x = 0$ 

 $\Leftrightarrow x \not\ni (\lambda E - A)x = 0 \Leftrightarrow x \not\ni (\lambda E - A) = 0$ 

$$|f_A(\lambda)| = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 $\lambda$ 的n 次多项式, 通常称为矩阵A的特征多项式,记作  $f_{A}(\lambda)$  或  $f(\lambda)$ ,  $|\lambda E - A| = 0$  称为A的特征方程, 它的根称为A的特征根.(特征值)

在复数域内, A有n 个特征值 (可能相同)

### 3. 特征值与特征向量的求法



A为矩阵A的特征值, x为A的属于特征值A的特征向量  $x \neq 0, Ax = \lambda x$ 

 $\Leftrightarrow x \not \to (\lambda E - A)x = 0$  的非零解  $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$ 

- (1) 计算矩阵A的特征多项式 $f_A(\lambda) = |\lambda E A|$ ;
- (2) 求解  $f_A(\lambda) = |\lambda E A| = 0$ ,得A的全部特征值;
- (3) 对每一特征值  $\lambda_0$  ,求出( $\lambda_0 E A$ )x = 0 一个基础 解系  $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$ , 其中  $r(\lambda_0 E - A) = r$ ,

则A的属于特征值2的特征向量为:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_{n-r} x_{n-r}$$

 $(k_1,k_2,\cdots,k_{n-r})$ 为不全为零的任意常数)

5.1 特征值与特征向量

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

### 注:对角矩阵的特征值就是主对角线上的元素



分析:

$$A$$
的特征多项式:
$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_1 \\ \lambda - a_2 \\ & \ddots \\ & \lambda - a_n \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n)$$

所以A的特征值为: $\lambda_1 = a_1, \lambda_2 = a_2, \dots, \lambda_n = a_n$ 

5.1 特征值与特征向量

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

#### -3 1 的全部特征值和 例3 求出二阶方阵 A= 相应的特征向量.



解 ① 方阵A的特征多项式为

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8$$

所以,方阵A有两个特征值  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -4$ 

(2) 当  $\lambda_1 = -2$  时,解齐次线性方程组(-2E - A)x = 0

$$\begin{pmatrix} -2E - A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系:  $x_1 =$ 

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组 所以 $\lambda_1 = -2$ 的全部特征向量是  $kx_1 = \binom{k}{k}$ ,  $k \neq 0$ 

当  $\lambda_2 = -4$  时,解齐次线性方程组(-4E - A)x = 0

$$\begin{pmatrix} -4E - A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

得基础解系: x<sub>2</sub>=

所以 $\lambda_2 = -4$ 的全部特征向量是 $kx_2 =$ 

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

例4 求出三阶方阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
的全部特征值和相应的特征向量.



第 2 页, 共 18 页

解 ① A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

 $= (\lambda - 1)^{2}(\lambda - 3) - 1 - 1 - (\lambda - 3) + (\lambda - 1) + (\lambda - 1)$  $=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$ 

所以A的特征值为:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ .

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组 (2) 当礼=1时,

解齐次线性方程组 (E-A)x=0

$$E - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $kx_1(k \neq 0)$  是属于  $\lambda_1 = 1$  的全部特征向量

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

例 5 求出三阶方阵
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
 的全部特征值和相应的特征向量。 $\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \\ = (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$  所以 $A$ 的特征值为: 
$$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$$

(2) 当 
$$\lambda_1 = 2$$
 时, 
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
 解方程组  $(2E - A)x = 0$  
$$2E - A = \begin{pmatrix} 2+1 & -1 & 0 \\ 4 & 2-3 & 0 \\ -1 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 得基础解系:  $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  所以 $kx_1(k \neq 0)$  是属于  $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量

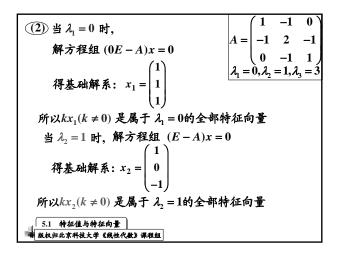
例 6 求出三阶方阵 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
 的全部特征值和相应的特征向量。

解 ①  $A$ 的特征多项式:

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) - (\lambda - 1) - (\lambda - 1)$$

$$= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$
所以 $A$ 的特征值为:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ 



5.1.2 特征值和特征向量的性质
定理5.1 方阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关
证明 设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是方阵A的两个不同的特征值,  $x_1,x_2$ 分别是属于这两个特征值的特征向量,则有  $\lambda_1x_1=Ax_1,\,\lambda_2x_2=Ax_2,\,\lambda_1\neq\lambda_2,$ 设  $k_1x_1+k_2x_2=0$  ①  $A(k_1x_1+k_2x_2)=0\quad k_1\lambda_1x_1+k_2\lambda_2x_2=0$  ②
②一①× $\lambda_2$   $k_1(\lambda_2-\lambda_1)x_1=0$ 由于 $\lambda_1\neq\lambda_2,\,x_1\neq0$ ,所以 $k_1=0$ ,从而 $k_2=0$ 所以  $x_1,x_2$ 线性无关.

5.1 特征值与特征向量

版权与北京科技大学《战性代数》课程组

定理5.2 n阶方阵A的m个不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$  所对应的特征向量  $x_1, x_2, \cdots, x_m$  线性无关证明 设n阶方阵A的互不相同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$  所对应的特征向量为  $x_1, x_2, \cdots, x_m$  下证  $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性无关.  $Ax_i = \lambda_i x_i, i = 1, 2, \cdots, m$  设有常数  $k_1, k_2, \cdots, k_m$  使  $k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_m x_m = 0$  即  $A(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_m x_m) = 0$  即  $A(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_m x_m) = 0$  即  $A(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_m x_m) = 0$  得  $A_1^2 k_1 x_1 + \lambda_2^2 k_2 x_2 + \cdots + \lambda_m^2 k_m x_m = 0$ ,

定理5.2 n阶方阵A的m个不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$  所对应的特征向量  $x_1, x_2, \cdots, x_m$  线性无关  $k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m = 0 \quad 1$   $\lambda_1k_1x_1 + \lambda_2k_2x_2 + \cdots + \lambda_mk_mx_m = 0,$   $1 \times A^2 \quad \lambda_1^2k_1x_1 + \lambda_2^2k_2x_2 + \cdots + \lambda_m^2k_mx_m = 0,$   $1 \times A^3 \quad \lambda_1^3k_1x_1 + \lambda_2^3k_2x_2 + \cdots + \lambda_m^3k_mx_m = 0,$   $\cdots \qquad 1 \times A^{m-1} \quad \lambda_1^{m-1}k_1x_1 + \lambda_2^{m-1}k_2x_2 + \cdots + \lambda_m^{m-1}k_mx_m = 0,$   $k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m = 0$   $\lambda_1k_1x_1 + \lambda_2k_2x_2 + \cdots + \lambda_mk_mx_m = 0,$   $\lambda_1^{m-1}k_1x_1 + \lambda_2^{m-1}k_2x_2 + \cdots + \lambda_m^{m-1}k_mx_m = 0$   $\sum_{k_1}^{m-1}k_1x_1 + \lambda_2^{m-1}k_2x_2 + \cdots + \lambda_m^{m-1}k_mx_m = 0$   $\sum_{k_1}^{m-1}k_1x_1 + \lambda_2^{m-1}k_2x_2 + \cdots + \lambda_m^{m-1}k_mx_m = 0$ 

定理5.3 若n阶方阵
$$A=\left(a_{ij}\right)$$
的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,$ 那么 (1)  $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn};$  这里  $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$  称为  $A$  的迹,记 $trA$  (2)  $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|.$  证明 
$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})+\cdots\cdots=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$
 比较等式两边多项式中 $\lambda^{n-1}$ 项的系数,可知 
$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$
 版权归北京科技大学《《维代数》课程组

定理5.4 任一特征值的代数重数不小于它的几何重数.  $P = (x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$  则有  $AP = A(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$   $= (Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_m, Ax_{m+1}, \cdots, Ax_n)$   $= (\lambda_0 x_1, \lambda_0 x_2, \cdots, \lambda_0 x_m, Ax_{m+1}, \cdots, Ax_n)$   $= (x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_0 E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$   $= P \begin{pmatrix} \lambda_0 E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  其中B是 $m \times (n-m)$ 矩阵,C是n-m阶方阵. 由于P是可逆矩阵,所以满足上式的B,C总是存在的.

定理5.4 任一特征值的代数重数不小于它的几何重数.  $A = P \begin{pmatrix} \lambda_0 E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \qquad AP = P \begin{pmatrix} \lambda_0 E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$   $f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{pmatrix} \lambda E_m & 0 \\ 0 & \lambda E_{n-m} \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} \lambda_0 E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix} P^{-1}$   $= |P| \begin{pmatrix} \lambda E_m & 0 \\ 0 & \lambda E_{n-m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0 E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix} |P^{-1}|$   $= \begin{vmatrix} (\lambda - \lambda_0) E_m & -B \\ 0 & \lambda E_{n-m} - C \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_0)^m |\lambda E_{n-m} - C|$  由于 $\lambda_0$  仍有可能是多项式 $|\lambda E_{n-m} - C|$  的很数重数 $\geq m$ .  $\lambda_0$  的代数重数 $\geq m$ .

例 4中, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  的特征值:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ . 当  $\lambda_1 = 1$  时,解 (E - A)x = 0 得基础解系:  $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 当  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$  时,解 (2E - A)x = 0 得基础解系为:  $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  特征值1的代数重数是1,几何重数是1特征值2的代数重数是2,几何重数是2 任一特征值的代数重数不小于它的几何重数 (E - A)x = 0 任一特征值的代数重数不小于它的几何重数

例9 (特征子空间) 如果 $\lambda$ 是方阵A的特征值,则  $(\lambda E - A)x = 0$  的解空间称为A的特征子空间,记作 $V_{\lambda}$ , 即  $V_{\lambda} = \{x \mid (\lambda E - A)x = 0\} = \{x \mid Ax = \lambda x\}$  特征子空间 $V_{\lambda}$ 的维数就是特征值 $\lambda$ 的几何重数. 例8中, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  解方程组 (2E - A)x = 0,得到基础解系 特征值2的几何重数是1,特征子空间为  $\{kx \mid x = (1,0,0)^T\}$ 

 例 4 中, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  的特征值:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ .

当  $\lambda_1 = 1$  时,解 (E - A)x = 0 得基础解系:  $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 当  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$  时,解 (2E - A)x = 0 得基础解系为:  $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  特征值1的几何重数是1,特征子空间为:  $\{kx_1 | x_1 = (-1,1,1)^T \}$  特征值2的几何重数是2,特征子空间为  $\{k_2x_2 + k_3x_3 | x_2 = (1,0,1)^T, x_3 = (0,1,1)^T \}$  [5.1 特征值与特征向量]

小结

一、特征值与特征向量的概念与计算

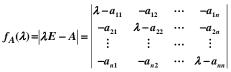
1. 特征值与特征向量的概念

定义5.1 设A是n阶方阵, 如果存在复数 $\lambda$  和n维列向量  $x \neq 0$  使得等式  $(Ax = \lambda x)$ 

成立,则称2为矩阵A的一个特征值,非零向量x称为矩阵A的属于特征值2的特征向量,简称为特征向量.

说明 (1) 特征向量x≠0,特征值问题是对方阵而言的 (2) 若x是矩阵A的属于特征值λ的特征向量,k≠0,则非零向量kx也是矩阵A的属于特征值λ的特征向量.特征值λ对应的特征向量不唯一

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组 2. 特征方程与特征多项式



是 $\lambda$ 的n 次多项式,称为矩阵A的特征多项式,记作  $f_{A}(\lambda)$ 或  $f(\lambda)$ 

|AE-A|=0称为A的特征方程,它的根称为A的特征根. 在复数域内,A有n 个特征值(可能相同) (特征值)

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

### 3. 特征值与特征向量的求法



 $\lambda$ 为矩阵A的特征值,x为A的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量  $x \neq 0, Ax = \lambda x$ 

 $\Leftrightarrow x \not \to (\lambda E - A)x = 0$  的非零解  $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$  步骤:

- (1) 计算矩阵A的特征多项式 $f_A(\lambda) = |\lambda E A|$ ;
- (2) 求解  $f_{\lambda}(\lambda) = |\lambda E A| = 0$ , 得A的全部特征值;
- (3) 对每一特征值 $\lambda_0$ ,求出( $\lambda_0 E A$ )x = 0 一个基础解系  $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ ,其中 $r(\lambda_0 E A) = r$ ,则A的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量为:

(k1, k2, ···, kn-r) 为不全为零的任意常数)

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

### 二、特征值和特征向量的性质

小结

- (1)方阵A的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.
- (2) 若n阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 那么
  - 1)  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn};$ 这里  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$  称为 A 的迹,记trA
  - 2)  $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$ .
- (3) 任一特征值的代数重数不小于它的几何重数.

特征子空间 如果 $\lambda$ 是方阵A的特征值,则  $(\lambda E - A)x = 0$ 的解空间称为A的特征子空间,记作  $V_{\lambda}$ ,即  $V_{\lambda} = \{x \mid (\lambda E - A)x = 0\} = \{x \mid Ax = \lambda x\}$  特征子空间 $V_{\lambda}$ 的维数就是特征值 $\lambda$ 的几何重数.

5.1 特征值与特征向量 版权归北京科技大学《线性代数》课程组



### 作业

习题5.1

A: 1(1)(3)(5) 4

5.1 特征值与特征向量

### 5.2 相似矩阵及 矩阵的对角化

- ► 5.2.1 相似矩阵
- **►** 5.2.2\* 矩阵的对角化

### 5.2.1 相似矩阵



1. 相似矩阵的定义

定义5.2 若A, B都是n阶方阵,如果存在n阶可逆矩阵P,使得 $P^{-1}AP=B$ ,则称矩阵矩阵A与B相似,记作 $A \sim B$ .

- 2. 相似矩阵的性质
- (1)定理5.5 矩阵的相似关系是一种等价关系

反身性 矩阵A与A相似;  $E^{-1}AE = A$ 对称性 如果矩阵A与B相似,则矩阵B与A相似;  $P^{-1}AP = B \Rightarrow PBP^{-1} = A$ 

传递性 如果矩阵A与B相似,B与C相似,则A与C相似。

$$\frac{P^{-1}AP}{5.2 \text{ #似矩阵}} = B \qquad Q^{-1}BQ = C \qquad \therefore (PQ)^{-1}B(PQ) = C$$

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

# (2) 定理5.6 相似矩阵有相同的特征多项式, 进而有相同的特征值。

证明: 设A与B相似,则有  $P^{-1}AP = B$   $f_B(\lambda) = \left| \lambda E - B \right| = \left| P^{-1}(\lambda E)P - P^{-1}AP \right|$   $= \left| P^{-1}(\lambda E - A)P \right|$   $= \left| P^{-1} \right| \left| \lambda E - A \right| \left| P \right| = \left| \lambda E - A \right| = f_A(\lambda)$ 

注:相似矩阵亦有相同的行列式、相同的秩、相同的迹.

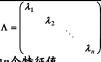
由定理5.3可知相似矩阵亦有相同的行列式、相同的迹.

秩: 
$$P^{-1}AP = B \Rightarrow r(B) \le r(A)$$
  
 $PBP^{-1} = A \Rightarrow r(A) \le r(B)$   $r(B) = r(A)$ 

版权归北京科技大学《线性代數》课程组

52 相似矩阵

### (3) 若n 阶方阵A与对角阵 Λ=



相似,则礼,礼,…,礼,是A的n个特征值

例1 已知
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$
与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似,

解 因为相似矩阵有相同的特征值,故A与B

有相同的特征值 2, y,-1 根据特征方程根与系数的关系,有

5.2 相似矩阵 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

### 例2 与单位矩阵 E 相似的矩阵有多少?

分析:与单位矩阵E相似的矩阵为: $P^{-1}EP=E$ 

说明:与E相似的矩阵只有E本身

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^3$  · · 矩阵A = B的特征值是:

 $|\lambda E - B| = (\lambda - 1)^3$   $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 

但A与B不相似

有相同特征值的矩阵不一定相似

5.2 相似矩阵 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

### 

如果 $x_0$ 是B的属于特征值 $\lambda_0$ 的特征向量, $Px_0$ 是A的属于特征值 $\lambda_0$ 的特征向量.

证明 由题意有,  $Bx_0 = \lambda_0 x_0$ 

由  $P^{-1}AP = B$ , 可得AP = PB

右乘 x<sub>0</sub>得到

$$A(Px_0) = PBx_0 = \lambda_0 Px_0$$

5.2 相似矩阵

5.2 相似矩阵

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

### 5.2.2\* 矩阵的对角化

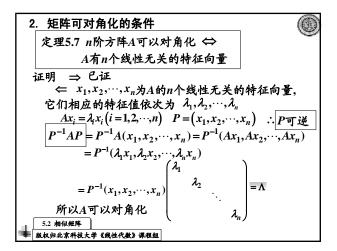
所谓方阵A可以对角化,是指A与对角阵相似。即存在可逆矩阵P,使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 成立。

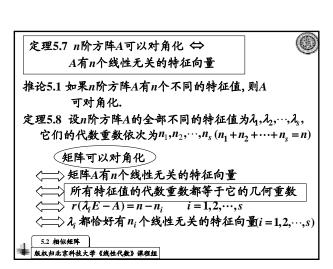
1. 可对角化矩阵的性质

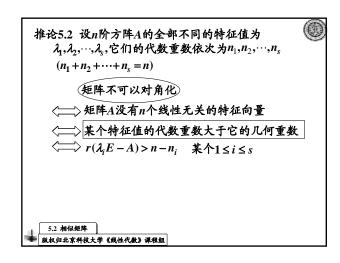
若A与对角阵相似,即存在可逆矩阵P,使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 成立,那么:

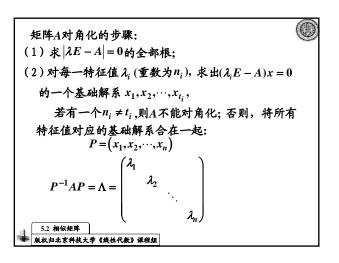
- (1)  $A^k = P\Lambda^k P^{-1} = Pdiag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)P^{-1}$
- (2)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  即是A的 n个特征值;而P的第i列 $x_i$  是A的对应于特征值 $\lambda_i$ 的特征向量

5.2 相似矩阵 版权归北京科技大学《线性代数》课程组 (2)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  即是A的 n个特征值;而P的第i列 $x_i$  是A的对应于特征值 $\lambda_i$ 的特征向量证明 记 $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , A可对角化,存在n阶可逆矩阵P,使得  $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  上式两边左乘矩阵P:  $AP = P\Lambda$   $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\Lambda$   $\Rightarrow (Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n)$  于是有  $Ax_i = \lambda_i x_i$   $(i = 1, 2, \dots, n)$  又由于P可逆,所以结论成立。



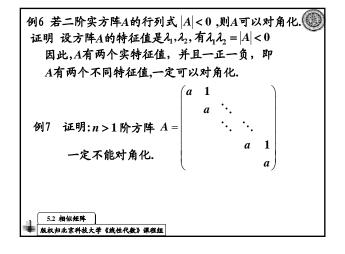


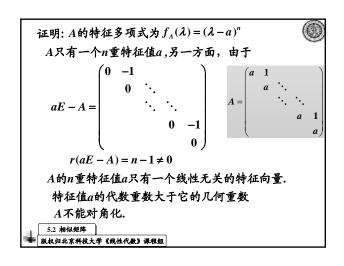


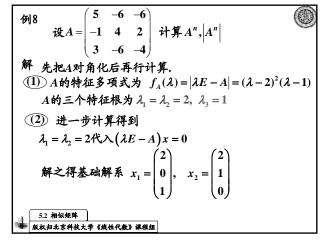


例4 上节例4中,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 的特征值: 
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$
 当  $\lambda_1 = 1$  时,解 $(E - A)x = 0$  得基础解系:  $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 当  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$  时,解 $(2E - A)x = 0$  得基础解系为:  $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  特征值—1的代数重数是1,几何重数是1 特征值2的代数重数是2,几何重数是2  $A$  可以对角化  $5.2$  相似矩阵  $3.2$  相似矩阵  $3.2$  机似矩件  $3.2$  机  $3.2$  机  $3.2$  机  $3.2$  机  $3.2$  和  $3.2$  和

例5 上节例8中, 方阵 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 的特征多项式为: 
$$f_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$
  $A$  有一个三重特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ . 解方程组  $(2E - A)x = 0$ , 得到基础解系 特征值2的代数重数是3,几何重数是1  $A$  不能对角化







$$A^{n} = \begin{pmatrix} P \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} P^{-1} \end{pmatrix}^{n} = P \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^{n} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n} \\ 2^{n} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n} & 0 & 0 \\ -2^{n} + 1 & 3 \times 2^{n} - 2 & 2^{n+1} - 2 \\ 3 \times 2^{n} - 3 & -3 \times 2^{n+1} + 6 & -5 \times 2^{n} + 6 \end{pmatrix}$$

$$|A^{n}| = |A|^{n} = [2 \times 2 \times 1]^{n} = 4^{n}$$

$$A^{n} = \begin{bmatrix} 3 \times 2 \times 1 \end{bmatrix}^{n} = 4^{n}$$

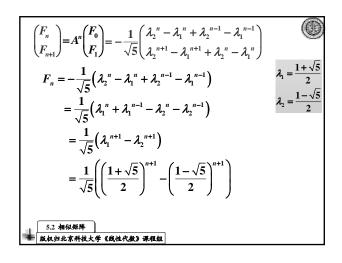
$$A^{n} = \begin{bmatrix} 3 \times 2 \times 1 \end{bmatrix}^{n} = 4^{n}$$

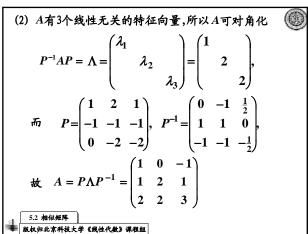
$$A^{n} = \begin{bmatrix} 3 \times 2 \times 1 \end{bmatrix}^{n} = 4^{n}$$

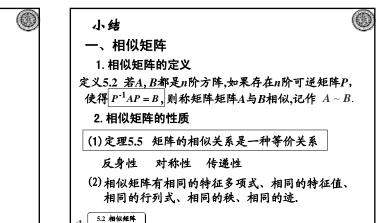
注:
$$P = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$
 若令 $P = (x_3, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ 

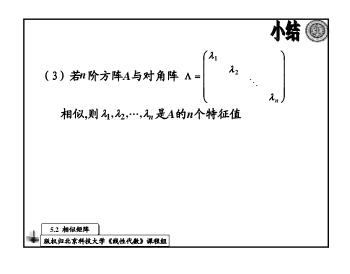
例 
$$F_n$$
  $F_n$   $F$ 

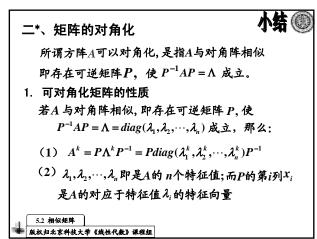
則A的特征多项式为 
$$f_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$
 
$$A的特征根是 \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
 对应的特征向量为  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$  , 取  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  , 
$$P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$
 于是有 
$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$
 代入①式得到

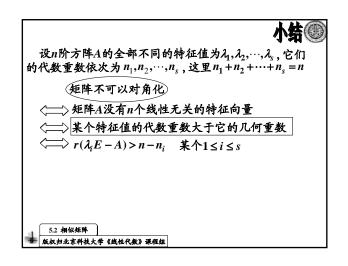








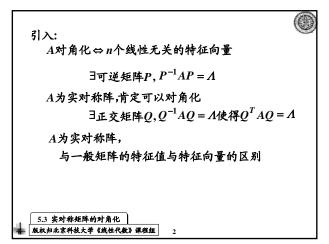






### 5.3 实对称矩阵的对角化

- 实对称矩阵的性质
- 实对称矩阵的对角化



### 、实对称矩阵的性质

定理5.9 实对称矩阵的特征值为实数

須延え=え

证明:  $\lambda$ 是A的特征值, x是特征向量, 即  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ ,  $A\overline{x} = \overline{A}\overline{x} = \overline{A}\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$ 

$$(\overline{x}^{T})Ax = (\overline{x}^{T})(Ax) = (\overline{x}^{T})(\lambda x) = \lambda(\overline{x}^{T})x \qquad \boxed{1}$$

$$(\overline{x}^T)Ax = (\overline{x}^T A)x = (\overline{x}^T A^T)x = (A\overline{x})^T x$$

$$(\lambda - \overline{\lambda})(\overline{x}^T)x = 0$$

$$= (\overline{\lambda}\overline{x})^T x = \overline{\lambda}(\overline{x}^T)x$$

$$\therefore x \neq 0, \quad \therefore \quad \overline{x}^T x = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^n \left| x_i \right|^2 \neq 0,$$

$$\therefore (\overline{x}^T)x \neq 0 \quad \therefore \lambda = \overline{\lambda}$$

5.3 实对称矩阵的对角化

### 定理5.10 实对称矩阵的属于不同特征值的特征 向量必正交

证明 设礼,礼对称矩阵是A的两个不同的特征值,

 $x_1, x_2$ 分别是属于这两个特征值的特征向量,则有

$$\lambda_1 x_1 = Ax_1, \ \lambda_2 x_2 = Ax_2, \ \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

$$\lambda_1 x_1^T = x_1^T A^T$$

:: A对称,  $A = A^T$ ,

$$\frac{\lambda_{1}x_{1}^{T}x_{2} = (x_{1}^{T}A^{T})x_{2} = x_{1}^{T}(Ax_{2}) = x_{1}^{T}(\lambda_{2}x_{2}) = \frac{\lambda_{2}x_{1}^{T}x_{2}}{(\lambda_{1} - \lambda_{2})x_{1}^{T}x_{2} = 0}$$

$$\therefore \lambda_1 \neq \lambda_2, \qquad \therefore x_1^T x_2 = 0$$

5.3 实对称矩阵的对角化

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

#### 定理5.11 设A为n阶对称矩阵,则必有n阶正交矩阵Q,

$$otin Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是A的n个特征值.

证明 对矩阵A的阶数n用归纳法.

当 n=1,结论显然成立. 设此结论对n-1阶方阵成立, 下面证明对n阶方阵也成立.

设 P1是属于A的特征值A的单位特征向量,即  $Ap_1 = \lambda_1 p_1$ ,  $\mathbf{1} |p_1| = 1$ 

构造正交矩阵 $Q_1 = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , 记 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ 

5.3 实对称矩阵的对角化

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

$$Q_1e_1 = (p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = p_1$$

由于正交矩阵一定可逆,因此 $Q_1^{-1}p_1=e_1$ 用矩阵  $Q_1^{-1}$  左乘等式  $Ap_1 = \lambda_1 p_1$  的两端

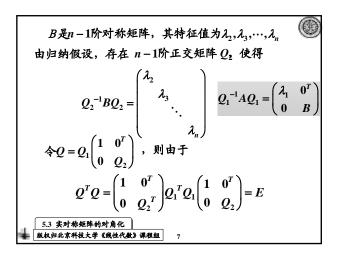
$$Q_1^{-1}AQ_1\underline{Q_1^{-1}p_1} = \lambda_1Q_1^{-1}p_1$$

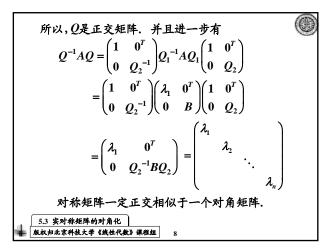
 $(Q_1^{-1}AQ_1)e_1 = \lambda_1 e_1$ 

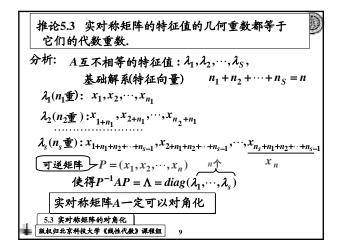
 $Q_1^T = Q_1^{-1}$ , 因此,  $Q_1^{-1}AQ_1 = Q_1^T AQ_1$  是对称矩阵,

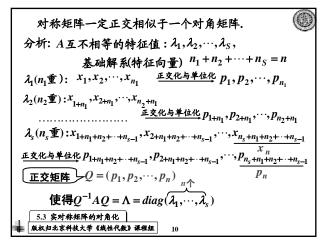
且与 A有相同的特征值. 记  $Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 

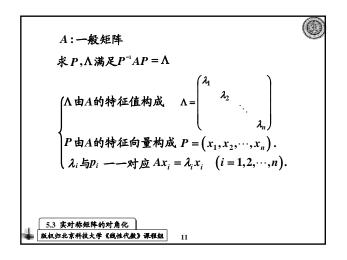
5.3 实对称矩阵的对角化

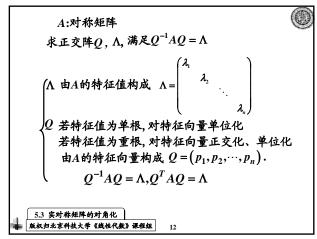












### 二、对称矩阵的对角化

对称矩阵对角化的步骤:

- (1) 求全部特征值;
- (2) 求特征值对应的线性无关的特征向量: 若特征值为单根,对特征向量单位化; 若特征值为重根,对特征向量正交化、单位化;
- (3) 写出正交矩阵Q, 及相似标准形 $Q^{-1}AQ$  $Q = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ 为正交阵,且 $Q^{-1}AQ = \Lambda$

5.3 实对称矩阵的对角化

版权归北京科技大学《线性代数》课程组

例1 
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
 求正交矩阵 $Q$  使得 $Q^{-1}AQ$  为对角阵.

解 第一步 求A的特征值

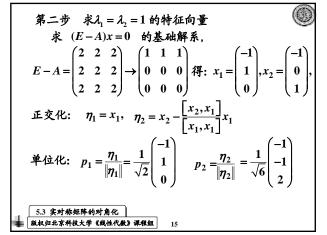
$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 5)$$

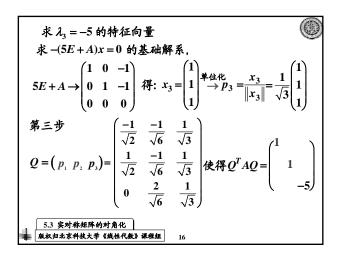
得特征值:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -5$ .



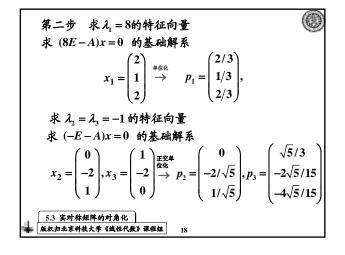
特征值的和 = 主对角线上元素的和

5.3 实对称矩阵的对角化 版权归北京科技大学《线性代数》课程组





例2 
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
 求正交矩阵 $Q$  使得 $Q^{-1}AQ$  解 第一步 求 $A$ 的特征值 
$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 8)(\lambda + 1)^2$$
 得特征值: $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$  注意 特征值的和 = 主对角线上元素的和



$$\lambda_1 = 8, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

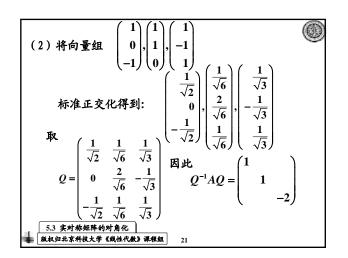
$$p_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/3 \\ -2\sqrt{5}/15 \\ -4\sqrt{5}/15 \end{pmatrix}$$
第三步
$$Q = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4\sqrt{5}/15 \end{pmatrix}$$
使得  $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 
版权p北京科技大事(做性代數)课程组 19

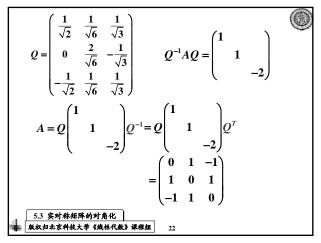
例3 已知三阶实对称矩阵A的特征值为 
$$\lambda_1 = 1(- \pm 1)$$
,  $\lambda_2 = -2$ , 向量 $x_1 = (1,0,-1)^T$ ,  $x_2 = (1,1,0)^T$ 是矩阵A 的对应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量.

(1) 求A的对应于特征值 $\lambda_2 = -2$ 的特征向量;
(2) 求矩阵A.

解 (1) 设对应于 $\lambda_2 = -2$ 的特征向量是 $x = (a_1,a_2,a_3)^T$   $x$   $\pi x_1, x_2$  都正交,即 
$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 得到一个线性无关解: 
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 所以属于 $\lambda_2 = -2$  的特征向量为 
$$\begin{pmatrix} k \\ -k \\ k \end{pmatrix}$$
,  $k \neq 0$ 





### 小结

#### 一、实对称矩阵的性质

- 1. 特征值为实数;
- 2. 属于不同特征值的特征向量正交;
- 3. 特征值的代数重数=几何重数;
- 4. 必存在正交矩阵,将其化为对角矩阵, 且对角矩阵对角元素即为特征值.

5.3 实对称矩阵的对角化 版权归北京科技大学《线性代数》课程组 23

### 二、实对称矩阵的对角化

**小结**⑩

对称矩阵对角化的步骤:

- (1) 求全部特征值;
- (2) 求特征值对应的线性无关的特征向量: 若特征值为单根,对特征向量单位化; 若特征值为重根,对特征向量正交化、单位化;
- (3) 写出正交矩阵Q,及相似标准形 $Q^{-1}AQ$

$$Q = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$
为正交阵,且 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 

5.3 实对称矩阵的对角化 版权归北京科技大学《线性代数》课程组

