北京科技大学 2013-2014 学年第二学期

高等数学 AII 期末（C）试卷

院（系）________ 班级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________

试卷卷面成绩						占课程考核成绩 70%	平时成绩占 30%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	小计			
得分								
评阅								

说明：1、要求正确的写出主要的计算或推倒过程，过程有错或只写答案者不得分；

2、考场、学院、班级、学号、姓名均需全写，不写全的试卷为废卷；

3、涂改学号以及姓名的试卷为废卷；

4、请在试卷上作答，在其它纸上解答一律无效.

得分

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、若 xy^2dx+x^2ydy 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，则一个这样的函数 $u(x,y)=$________.

2、曲线 $x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1+t}{t},z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的法平面方程为________.

3、微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解为________.

4、积分 $\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ 的值等于________.

5、设 $\sum$ 是锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=$________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

6、设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则在 $(0,0)$ 处【　　】

(A) $f(x,y)$ 偏导数不存在.　　(B) $f(x,y)$ 偏导数存在且连续

(C) $f(x,y)$ 可微　　(D) $f(x,y)$ 不可微

7、微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$ 是【　　】

(A)可分离变量方程　　(B)齐次方程

(C)一阶线性方程　　(D)伯努力方程

8、交换积分次序 $\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)dx=$【　　】

(A) $\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$

(C) $\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{3}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$

9、设 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $B(1,1)$ 的一段弧，则 $\int_L\sqrt{y}ds=$【　　】

(A) $\dfrac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$　　(B) $\dfrac{1}{12}(5\sqrt{5}-2)$

(C) $\dfrac{1}{12}(5\sqrt{5}-3)$　　(D) $\dfrac{1}{12}(5\sqrt{5}-4)$

10、设 L 是抛物线 $y^2=x$ 上从点 $A(1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧，则 $\int_L xydx=$【　　】

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{2}{5}$　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $\dfrac{4}{5}$

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

11、设 $z=f\left(x^2+y^2\right)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

12、求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

13、计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(z\cos\gamma+y\cos\beta+x\cos\alpha\right)dS$，其中 $\sum$ 是球面 $2z=x^2+y^2+z^2$，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\sum$ 上点的外法向量的方向余弦.

14、求函数$u=xyz$在附加条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}\left(x>0,y>0,z>0,a>0\right)$下的极值.

15、计算曲线积分$\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^2-y^3\right)dx+\left(6x^2y-3xy^2\right)dy$.

16、设$u=f\left(x,y,xyz\right)$，且函数$z=z\left(x,y\right)$由方程$e^{xyz}=\int_{xy}^{z}g\left(xy+z-t\right)dt$所确定，其中$f$具有一阶连续偏导数，$g$连续，求$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}$.

四、应用证明题（每小题 6 分，共 12 分）

17、求由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的立体的体积.

18、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，利用二重积分证明：

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

一、 填空题

$\frac{1}{2}x^2y^2$

2.� $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{(1+t)^2}$ ，$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{(1+t)^2}$，$\frac{dz}{dt}=2t$

将 $t=1$代入，则的法向量为$\left(\frac{1}{4}，-\frac{1}{4}，2\right)$ ，t=1 对应的点为$\left(\frac{1}{2}，2，1\right)$

则法平面方程为：$\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}(y-2)+2(z-1)=0$ ，化简得：$x-y+8z-\frac{13}{2}=0$

3．求解方程组：$x^2+x-2=0$ ，得$x_1=1,x_2=-2$

则通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C$

4.交换二次积分的次序：原式=$\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int_0^1 dy\left[e^{-\frac{y^2}{2}}(1-y^2)\right]$

=$\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy-\int_0^1 y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy$

将 $\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ 利 用 分 部 积 分 法 展 开 ，$\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy=ye^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1 yde^{-\frac{y^2}{2}}=ye^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1 y(-y)e^{-\frac{y^2}{2}}dy=ye^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^1+\int_0^1 y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ 可见，第二个式子可以抵消。

综上：原式= $ye^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^1=e^{-\frac{1}{2}}$

5. $z^2=3(x^2+y^2)$，*将*$z=3$ ，代入，在 xy 平面上的投影为$x^2+y^2\le 3$，

ds=$\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}$=2dxdy。（其中$z_x=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y=\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$）

则原式：$\iint_{x^2+y^2\le 3}2\,(x^2+y^2)dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2 d\rho=9\pi$

二、 选择题：

6.A 这一题在（0,0）处，偏导都存在，都为 0，但是偏导数不连续，根据定义可知可微。

根据定义：$f_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2 sin\frac{1}{\Delta x^2}}{|\Delta x|}=\pm\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\, sin\frac{1}{\Delta x^2}=0$

同理：$f_y=0$ ；

在非（0,0）处，直接求偏导得：$f_x=2xsin\, sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}cos\frac{1}{x^2+y^2}$ 其在（0,0）处的极限不存在，不为 0，所以可知偏导数不连续。

而根据可微的定义：$\frac{\Delta z-f_x(0，0)\Delta x-f_y(0，0)\Delta y}{\rho}=\sqrt{x^2+y^2}sin\frac{1}{x^2+y^2}=\rho sin\frac{1}{\rho^2}\to 0$（$\rho\to 0$）

在（0,0）处，上式的极限为 0. 所以，可微。

7.A 利用和差化积公式进行化简即可得到。

8.B 先画图，分成两块区域。

9.A　先画图，便于理解。$y=x^2$，$x==\sqrt{y}$　　ds=$\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=\sqrt{1+(2x)^2}dx$

则原式=$\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2)$=$\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1$ =$\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

10.D　先画图，便于理解。$\int_L\ xy\,dx$=$\int_1^0-x\sqrt{x}dx+\int_0^1 x\sqrt{x}dx=2\int_0^1 x\sqrt{x}dx=\frac{4}{5}$

三、

11.$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x^2+y^2)2x\cdot 2x+f'(x^2+y^2)\cdot 2$$

$$=4x^2f''(x^2+y^2)+2f'(x^2+y^2)$$

12. 首先求得$x^2-5x+6=0$ ，得$x_1=2,x_2=3$，因为有一个根是 2（同e^{2x}的 2），
特解形式为：$y^*=\mathrm{x}(\,b_1x+b_2)\,e^{2x}$,然后分别求其导数$y^{*\prime}$。二次导数$y^{*\prime\prime}$

$y^{*\prime}=[2b_1x^2+2(b_1+b_2)x\quad+\qquad b_2\quad]\,e^{2x}$　　　　12-1

$y^{*\prime\prime}=[4b_1x^2+(8b_1+4b_2)x+\quad 2b_1+4b_2]\,e^{2x}$　　　　12-2

代入原式，比较系数，求解线性方程组，得到 b1=$-\frac{1}{2}$ ，b2=-1；

则特解：$y^*=\mathrm{x}(-\frac{1}{2}x-1)\,e^{2x}$

通解：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\mathrm{x}\left(-\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x}+C$

13.可以直接利用高斯公式：

I=$\iiint_\Omega\ (1+1+1)\,dv=3\iiint_\Omega\ dv=3\times\frac{4}{3}\pi 1^3=4\pi$

14.u=xyz，约束条件：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a$ ，

$\ln u=\ln(xyz)=\ln x+\ln y+\ln z$

L=lnu+λ（$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-a$）

$L_x=\frac{1}{x}-\frac{\lambda}{x^2}$=$\frac{x-\lambda}{x^2}$ ，根据对称性：$L_y=\frac{1}{y}-\frac{\lambda}{y^2}$=$\frac{y-\lambda}{y^2}$ L_z=$\frac{z-\lambda}{z^2}$ ，L_λ=$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-a$，

令$L_x=L_y=L_z=0$，$L_\lambda=0$，则 x=y=z=3a ；则 $U_{max}=(3a)^3=27a^3$。注意这是极小值。

极大值不存在。（x→ a，y → ∞，z → ∞，xyz→ ∞）

15. P=$6xy^2-y^3$ ；Q=$6x^2y-3xy^2$ ；　则 $\frac{\partial P}{\partial y}=12xy-2y^2$；$\frac{\partial P}{\partial x}=12xy-2y^2$，二式相等。所以曲线积分与路径无关：则可以通过线段路径，A(1，2)→ C(3，2) → B(3,4)

由 A 到 C 点，y=2，dy=0.

原积分一部分=$\int_1^3(6x\cdot 2^2-2^3)\,dx=80$

由 C 到 B 点：x=3，dx=0.

原积分另一部分 $\int_2^4 (6\cdot 3^2 y - 3\cdot 3y^2)\,dy = 156$

则原式=80+156=236

16.

先计算$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + f'_3 yz + f'_3(xy\frac{\partial z}{\partial x})$ 16-1

$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_2 + f'_3 xz + f'_3(xy\frac{\partial z}{\partial y})$ 16-2

注意：$\int_{xy}^{z} g(xy+z-t)dt = -\int_{xy}^{z} g(xy+z-t)d\,(xy+z-t) = -\int_{z}^{xy} g(p)dp$

对隐函数全微分：$\mathrm{d}e^{xyz} = e^{xyz}yzdx + e^{xyz}\mathrm{xzdy}+e^{xyz}xydz$

$\mathrm{d}(\int_{xy}^{z} g(xy+z-t)dt\,)=\mathrm{d}(-\int_{z}^{xy} g(p)dp)=-[\,g(xy)ydx + g(xy)xdy - g(z)d\,\mathrm{z}]$

整理得：$e^{xyz}yzdx + e^{xyz}\mathrm{xzdy}+e^{xyz}xydz = -[\,g(xy)ydx + g(xy)xdy - g(z)d\,\mathrm{z}]$

$(e^{xyz}xy - g(z))\mathrm{dz}=-(g(xy)y + e^{xyz}yz)\mathrm{dx}-(g(xy)x + e^{xyz}\mathrm{xz})\mathrm{dy}$

则$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(g(xy)y+e^{xyz}yz)}{(e^{xyz}xy-g(z))}$ 16-3

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(g(xy)x+e^{xyz}\mathrm{xz})}{(e^{xyz}xy-g(z))}$ 16-4

则$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x\left[f'_1 + f'_3 yz + f'_3\left(xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] - y\left[f'_2 + f'_3 xz + f'_3\left(xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] = xf'_1 - yf'_2$

17. 投影区域：$x^2+y^2\le 1$

体积=$\iint_{x^2+y^2\le 1}[\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)]dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho-\rho^2)d\rho = \frac{\pi}{6}$

18.充分考察双重积分的定义：

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b f(y)dy = \int\int_{\substack{a\le x\le b\\ a\le y\le b}} f(x)f(y)dxdy \le$$

$\int\int_{\substack{a\le x\le b\\ a\le y\le b}} \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2}dxdy = \frac{1}{2}\iint_{\substack{a\le x\le b\\ a\le y\le b}} f(x)^2\ \mathrm{dxdy}+\ \frac{1}{2}\iint_{\substack{a\le x\le b\\ a\le y\le b}} f(y)^2\ \mathrm{dxdy}=\ \iint_{\substack{a\le x\le b\\ a\le y\le b}} f(x)^2\ \mathrm{dxdy}=$

$\int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b dy = (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx$