北京科技大学 2012--2013 学年第二学期

高 等 数 学 AII 试卷（A 卷）

院（系）_________ 班级_________ 学号___________ 姓名_________ 考试教室_________

试卷卷面成绩												占课程考核成绩70%	平时成绩占30%	课程考核成绩
题号	一	二	三						四		小计			
			11	12	13	14	15	16	17	18				
得分														
评阅														
审核														

说明：1、要求正确地写出主要计算或推导过程，过程有错或只写答案者不得分；

2、考场、学院、班、学号、姓名均需写全，不写全的试卷为废卷；

3、涂改学号及姓名的试卷为废卷；

4、请在试卷上答题，在其它纸张上的解答一律无效.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

得 分

一、填空题（本题共 20 分，每小题 4 分）

1．设 $y=\mathrm{e}^{x}$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的解，则 $p(x)=$__________________.

2．设 D 是由直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 围成的区域，则 $\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$__________.

3. 设曲线 L 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则 $\oint_L (3xy^3+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=$__________.

4．函数 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x}yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定，则 $f'_x(0,1,-1)=$_________.

5. 曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的法平面方程为___________________.

得 分

二、选择题（本题共 20 分，每小题 4 分）

6．设区域 D 是由曲线 $y=x, x+y=2$ 及 $x=2$ 围成的平面区域，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 等于【　　　　】.

(A) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(C) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

7．设 S 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于 $z=0, z=2$ 之间的部分，则 $\iint\limits_S \mathrm{d}S=$【　　】.

(A) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$　　(B) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$

(C) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r\,\mathrm{d}r$　　(D) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r$

8．设曲线 l 是从点 $A(1,0)$ 沿下半圆周 $(x-4)^2+y^2=9\ (y\le 0)$ 到点 $B(7,0)$，则

$\int_l (\mathrm{e}^x \sin y + y + \pi)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - x)\,\mathrm{d}y =$【　　】.

(A) 2π　　(B) 3π　　(C) -2π　　(D) -3π

9．设 $f(x)$ 连续，$f(1)=1$，且 $F(t)=\iiint\limits_\Omega \left[z^2+f(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中

$\Omega: 0\le z\le 1, x^2+y^2\le t^2$，则 $F'(1)=$【　　】.

(A) $\frac{8}{3}\pi$　　(B) $\frac{7}{3}\pi$　　(C) $\frac{6}{3}\pi$　　(D) $\frac{5}{3}\pi$

10．函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数为【　　】.

(A) $\frac{98}{13}$　　(B) $\frac{97}{13}$　　(C) $\frac{96}{13}$　　(D) $\frac{95}{13}$

得 分

三、计算题（本题共48分，每小题8分）

11. 求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 的通解.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

12．计算由曲面$z=6-x^2-y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体的体积.

13．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分的下侧.

14．验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的开区域 G 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数.

15．设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且满足方程

$$y'(x)-2y(x)+\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}\,t=x^2\,,$$

且 $y(0)=1$，求 $y(x)$.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

16、计算 $\iint\limits_D \max\ \ xy,1\ \ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，其中 $D=\ \ (x,y)|0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\ \ $.

得 分

四、综合题（本题共 12 分，每小题 6 分）

17．已知函数 $f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

18．设 L 为光滑弧段，其弧长为 l，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲线 L 上连续，证明：

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\right|\le lM,$$

其中 $M=\max\limits_{(x,y,z)\in L}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$.

北京科技大学

2012～2013学年第二学期高等数学期末考试试题答案

一、1. $p(x)=x(\mathrm{e}^{-x}-1)$； 2. $\dfrac{9}{8}$； 3. $12a$； 4. 1 ； 5. $x+2y+3z=6$；

二、6. C； 7. B； 8. D ； 9. A； 10. A.

三、11. 设 $y'=p$，代入原方程得 $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{2x}{1+x^2}dx$ ------4 分

解之，有 $y=C_1(x+\dfrac{1}{3}x^3)+C_2$. ------8 分

12. 体积 $V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iiint\limits_{\Omega}rdrd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_r^{6-r^2}dz$ ------4 分

$$=2\pi\int_0^2(6r-r^2-r^3)dr=\frac{32}{3}\pi.$$ ------8 分

13．作辅助曲面 $\Sigma':z=2,x^2+y^2\le 4$，并取上侧. 则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}-\iint\limits_{\Sigma'}$$ ------4 分

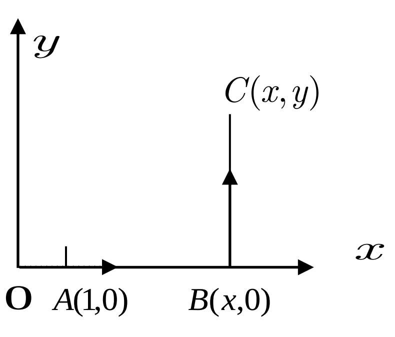
$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1)dxdydz-\iint\limits_{D}2dxdy \quad （D:x^2+y^2\le 4）$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{\frac{1}{2}r^2}^{2}dz-8\pi=8\pi-8\pi=0.$$ ------8 分

14. 因为 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2},Q=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，区域 G 为单连通的，P,Q 在 G 内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以 $\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的开区域 G 内是某个二元函数的全微分，如图选取积分路径，则 ------4 分



$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{AB}+\int_{BC}$$

$$=\int_1^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$ ------8 分

15. 在原方程两边对 x 求导数，有 $y''-2y'+y=2x$（$*$），

由 $r^2-2r+1=0$，得 $r=1$（二重根），所以相应齐次方程的通解为

$$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^x\text{；}\qquad\text{------4 分}$$

令 $y^*=ax+b$,代入（$*$）方程，求得 $y^*=2x+4$, 原方程的通解为

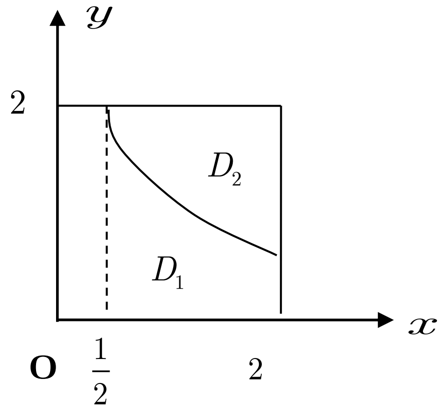
$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+2x+4\text{，}$$

再由 $y(0)=1$，$y'(0)=2$，得 $C_1=-3, C_2=3$，

于是　$y(x)=(-3+3x)e^x+2x+4$.　　　　------8 分

16. 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分为两个区域 D_1, D_2，如图，$\max\{xy,1\}=\begin{cases}xy,(x,y)\in D_1,\\ 1\,,(x,y)\in D_2,\end{cases}$

------4 分



则 $\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}dxdy=\iint\limits_{D_1}xydxdy+\iint\limits_{D_2}dxdy$

$$=\iint\limits_{D_1}xydxdy+\iint\limits_{D}dxdy-\iint\limits_{D_1}dxdy$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}xy\,\mathrm{d}y+4-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{19}{4}+\ln 2.\qquad\text{------8 分}$$

四、综合题

17. 因 $f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，故 $f_1'(1,1)=0, f_2'(1,1)=0,$ 而

$$\frac{\partial z}{\partial x}= f_1'[(x+y), f(x,y)]+ f_2'[(x+y), f(x,y)]\, f_1'(x,y), \qquad \text{------3 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}= f_{11}''[(x+y), f(x,y)]+ f_{12}''[(x+y), f(x,y)] f_2'(x,y)+ f_{12}''(x,y) f_2'[(x+y), f(x,y)]$$

$$+ f_1'(x,y) \quad f_{21}''[(x+y), f(x,y)]+ f_{22}''[(x+y), f(x,y)] f_2'(x,y)$$

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,1)}= f_{11}''(2,2)+ f_{12}''(1,1)\, f_2'(2,2)$ ------6 分

18. $\mathrm{d}\,x=\cos\alpha\,\mathrm{d}\,s,\ \ \mathrm{d}\,y=\cos\beta\,\mathrm{d}\,s,\ \ \mathrm{d}\,z=\cos\gamma\,\mathrm{d}\,s,$ 则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，于是

$$\int_L P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y+P\,\mathrm{d}\,z=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\,s$$

$$=\int_L \quad P,Q,R \quad \cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma \quad \mathrm{d}\,s$$

$$=\int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\,s$$

$$=\int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\,s \qquad \text{------3 分}$$

其中 θ 为矢量 $\{P,Q,R\}$ 与 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 的夹角，故

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y+R\,\mathrm{d}\,z\right|=\left|\int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\,s\right|$$

$$\le\int_L \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,|\cos\theta|\,\mathrm{d}\,s\le M\int_L \mathrm{d}\,s=lM \qquad \text{------6 分}$$