§4 连续型随机变量的概率密度

- 概率密度及其性质
- 指数分布
- 均匀分布
- 正态分布与标准正态分布

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

一．连续型随机变量的概念与性质

定义　如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负实函数 $f(x)$，使得对于任意实数 x，有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$

则称 X 为连续型随机变量，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度．

连续型随机变量 X 由其密度函数唯一确定．

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

说 明

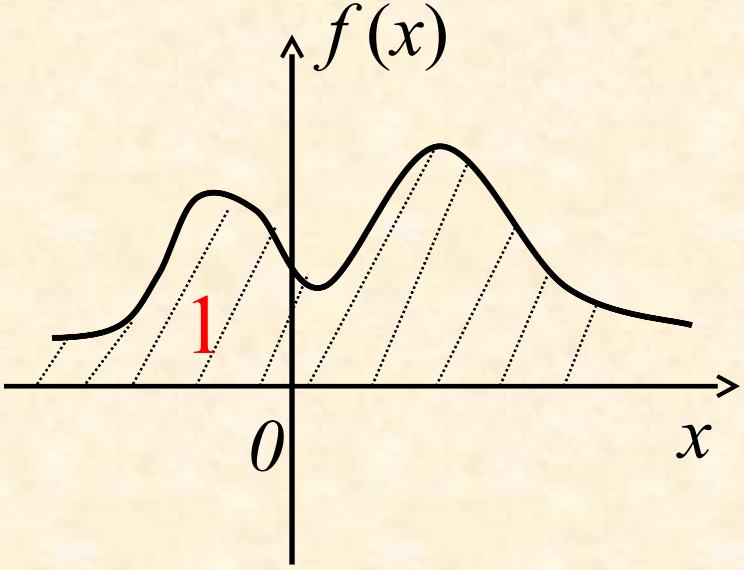
$f(x)$不一定连续，但$F(x)$一定连续。

概率密度 f(x) 具有以下性质：

$1^0 \quad f(x) \quad 0.$

$2^0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

$\because \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) = 1.$

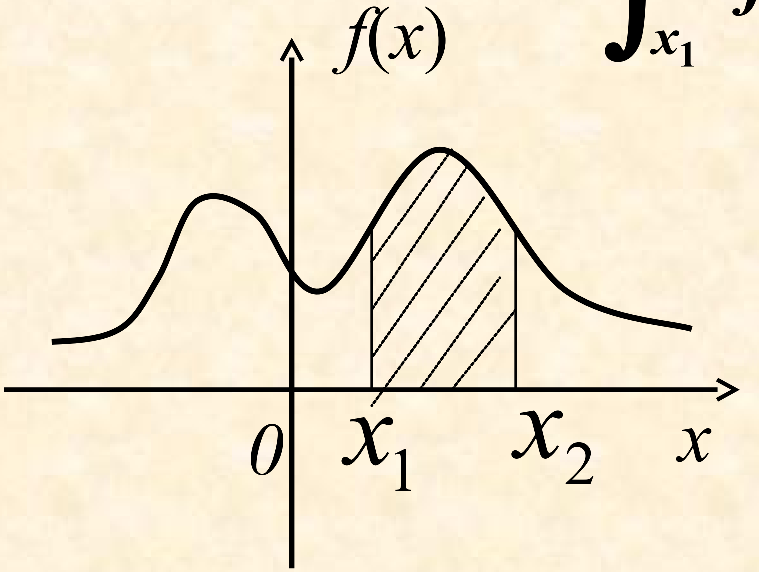


返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

3^0 $P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \ (x_1 \le x_2)$$



4^0 若$f(x)$在点x处连续，则有

$$F'(x) = f(x).$$

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

注意 1　密度函数不是概率！

根据性质 4 以及导数的定义，有

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

于是，当$\Delta x(\Delta x>0)$充分小时

$$P(x<X\le x+\Delta x)\approx f(x)\Delta x$$

由此可见

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

$$P(x < X \le x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$$

注意 2

密度函数的概率涵义：

$f(x)$的大小决定X落人区间$(x, x+\Delta x]$内的概率的大小。它反映了点x附近所分布的概率的"疏密"程度 ——概率密度。

注意 3

连续型随机变量的一个重要特点：

设 X 是连续型随机变量，则对任意的实数a，

有
$$P\{X = a\} = 0$$

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

证明：

$$0 \le P\{X = a\} \le P\left\{a - \frac{1}{n} < X \le a\right\}$$

$$= F(a) - F(a - \frac{1}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n}) = F(a)$$

所以有

$$P\{X = a\} = 0$$

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

说　明

(1) . 由上述性质可知，对于连续型随机变量，我们关心它在某一点取值的问题没有太大的意义；我们所关心的是它在某一区间上取值的问题 .

若已知连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$ ，则 X 在任意区间 G(G可以是开区间,也可以是闭区间，或半开半闭区间；可以是有限区间，也可以是无穷区间) 上取值的概率为，

$$P\{X \in G\} = \int_G f(x)dx$$

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

例 1 设 X 是连续型随机变量，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} c(4x-2x^2) & 0<x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1)．常数c；(2)．$P\{X>1\}$．(3)．X的分布函数．

解：(1)．由密度函数的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

例 1（续）

得 $$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{+\infty}f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{2}c\left(4x-2x^{2}\right)dx=c\left(2x^{2}-\frac{2}{3}x^{3}\right)\bigg|_{0}^{2}=\frac{8}{3}c$$

所以， $$c=\frac{3}{8}$$

(2)．$$P\{X>1\}=\int_{1}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{+\infty}f(x)dx$$

返回主目录

例 1（续）

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}\left(4x-2x^2\right) & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\int_1^2\frac{3}{8}\left(4x-2x^2\right)dx=\frac{3}{8}\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}$$

(3) 当 $x\le 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$

当 $0<x<2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt$

$$=\int_0^x\frac{3}{8}\left(4t-2t^2\right)dt=\frac{1}{4}(3x^2-x^3)$$

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}\left(4x-2x^2\right) & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 1（续）

当$2\le x$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt \quad =\int_{-\infty}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{2}f(t)dt+\int_{2}^{x}f(t)dt$

$$=\int_{0}^{2}\frac{3}{8}\left(4x-2x^2\right)dx=1$$

$$\therefore \quad F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{1}{4}(3x^2-x^3) & 1<x<2\\ 1 & x \quad 2\end{cases}$$

返回主目录

例 2

设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

试求 X 的密度函数 .

解：

设 X 的密度函数为 $f(x)$，则

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

返回主目录

§4　连续型随机变量的概率密度

例 3　**设随机变量X的分布函数为：**

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0<x\le 1\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1 & 1<x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$

试求　X的密度函数$f(x)$.

解：$\because$　$f(x)=F'(x)$

$$\therefore\quad f(x)=\begin{cases}x & 0<x\le 1\\ 2-x & 1<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 4 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\frac{x^2}{2}} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

试求:(1)系数 A,B； (2) X 的密度函数 .

解 :(1) 由分布函数的性质

$$F(+\infty)=1, F(0+0)=F(0)=0$$

有 $\begin{cases} A=1 \\ A+B=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=1 \\ B=-1, \end{cases}$

返回主目录

例 4（续）

$$\therefore \quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(2) 设 X 的密度函数为 $f(x)$，则

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

§4 连续型随机变量的概率密度

例 5 某电子元件的寿命（单位：小时）是以

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 100\\ \dfrac{100}{x^2} & x>100\end{cases}$$

为密度函数的连续型随机变量．求 5 个同类型的元件在使用的前 150 小时内恰有 2 个需要更换的概率

解：设 A={ 某元件在使用的前 150 小时内需要更换 }

则 $P(A)=P\{X\le 150\}=\int_{-\infty}^{150} f(x)dx$

$$=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=\frac{1}{3}$$

返回主目录

例 5（续）

检验 5 个元件的使用寿命可以看作是在做一个 5 重 Bernoulli 试验．

令：Y=“5 个元件中使用寿命不超过 150 小时 的元件数”

则

$$Y \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$$

B={ 5 个元件中恰有 2 个的使用寿命不超过 150 小时

则

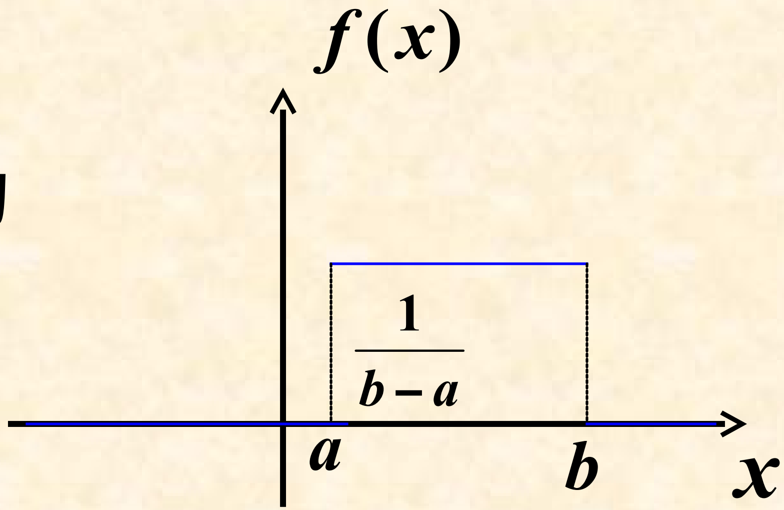
$$P(B) = P\{Y = 2\} = C_5^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

返回主目录

二．一些常用的连续型随机变量

1．均匀分布

若随机变量 X 的密度函数为



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则称随机变量 X 服从区间 $[a，b]$ 上的均匀分布．

记作 X ~ U [a , b]

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

密度函数的验证

设$X \sim$区间$[a\,,\ b]$上的均匀分布，$f(x)$是其密度函数，则有：

(1)．**对任意的** x，**有** $f(x) \quad 0$；

(2)．$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$

$$= \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx = 1 \ .$$

由此可知，$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ **确是密度函数．**

返回主目录

重要的连续分布

（1）．类似地，我们可以定义

区间(a, b)上的均匀分布；

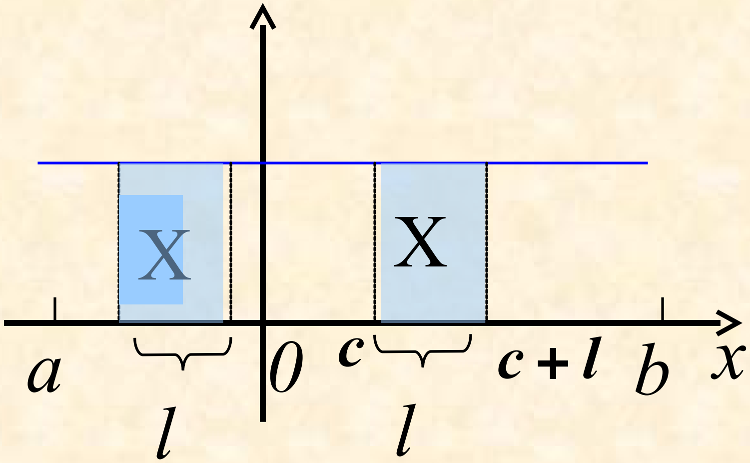
区间$[a, b)$上的均匀分布；

区间$(a, b]$上的均匀分布．

均匀分布的概率背景：

$$P\{c < X \le c+l\} = \int_c^{c+l} f(x)dx$$

$$= \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a}dx = \frac{l}{b-a}.$$



返回主目录

重要的连续分布

均匀分布的概率背景

如果随机变量 X 服从区间 $[a, \ b]$ 上的均匀分布，则随机变量 X 在区间 $[a, \ b]$ 上的任意一个子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比，而与该子区间的位置无关．

这时，可以认为随机变量 X 在区间 $[a, b]$ 上取值是等可能的．

均匀分布的应用：数值计算中的舍入误差，某一时间间隔内汽车站上乘客到站的时间，等均认为服从均匀分布。

返回主目录

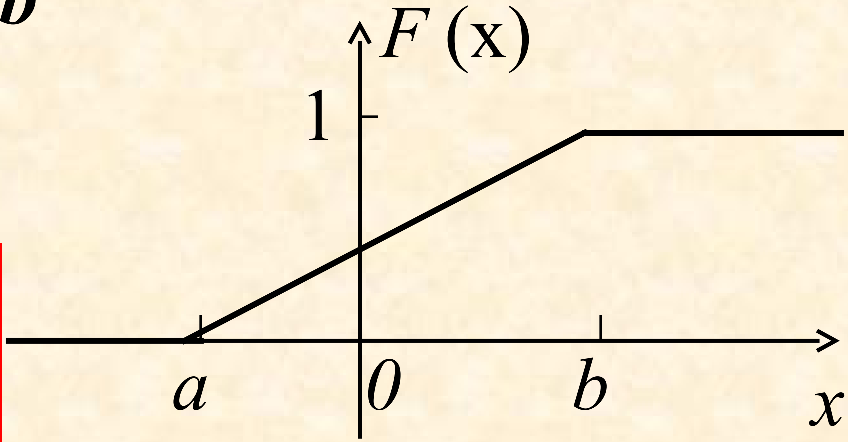
重要的连续分布

均匀分布的分布函数

若随机变量X服从区间$[a, b]$上的均匀分布，则X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b<x\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



返回主目录

例 6

设公共汽车站从上午 7 时起每隔 15 分钟来一班车，如果某乘客到达此站的时间是 7:00 到 7:30 之间的均匀随机变量．试求该乘客候车时间不超过 5 分钟的概率．

解：

设该乘客于 7 时 X 分到达此站．

则X服从区间$[0, 30]$上的均匀分布．

其密度函数为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30} & 0\le x\le 30\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

返回主目录

例 6（续）

令：B={ **候车时间不超过 5 分钟** }

则 $$P(B)=P\{10\le X\le 15\}+P\{25\le X\le 30\}$$

$$=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

返回主目录

例 7

设随机变量ξ服从区间$[-3,\ 6]$上的均匀分布，试求方程

$$4x^2+4\xi x+(\xi+2)=0$$

有实根的概率．

解　随机变量ξ的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & -3\le x\le 6\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

返回主目录

例 7（续）

设：$A=\left\{\text{方程}4x^2+4\xi x+(\xi+2)=0\text{有实根}\right\}$

则 $P(A)=P\left\{(4\xi)^2-4\times4\times(\xi+2)\quad 0\right\}$

$$=P\left\{(\xi+1)(\xi-2)\quad 0\right\}$$

$$=P\left\{\xi\le-1\text{或}\xi\quad 2\right\}$$

$$=\int_{-3}^{-1}\frac{1}{9}dx+\int_{2}^{6}\frac{1}{9}dx$$

$$=\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\quad=\frac{2}{3}$$

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

2 . 指 数分布

如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$为常数，则称随机变量X服从参数为θ的指数分布 .

返回主目录

§4　连续型随机变量的概率密度

密度函数的验证

设$X\sim$参数为θ的指数分布，$f(x)$是其密度函数，则有：

(1)．对任意的 x，有 $f(x)\quad 0$；

(2)．$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$

$$= \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x}dx = -e^{-\frac{1}{\theta}x}\Big|_{0}^{+\infty} = 1 .$$

由此可知，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$ 确是一密度函数．

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

指数分布的分布函数

若随机变量 X 服从参数 θ 指数分布，则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1-e^{-\frac{1}{\theta}x} & x>0 \end{cases}$$

注意： $\forall t>0,\ P\{X>t\}=1-F(t)=e^{-\frac{t}{\theta}}$

指数分布的应用：指数分布常作为各种"寿命"分布的近似分布，如："灯泡的寿命"，"动物的寿命"，"电话问题中的通话时间"，"随机服务系统中的服务时间"都常假定服从指数分布。

返回主目录

指 数分布的重要性质：

设 X 服从指 数分布，则 $\forall s > 0, t > 0,$

$$P\{X > s + t \mid X > s\} = \frac{P\{X > s + t\}}{P\{X > s\}} = e^{-\frac{t}{\theta}}$$

$$= P\{X > t\}$$

若把 X 解释为寿命，则上式表明：如果已知某人活了 s 年，则他至少再活 t 年的概率与年龄 s 无关，所以人们风趣地称指 数分布的这一性质为“永远年轻”，又称“无记忆性” ---- 即把过去的年龄忘记了。

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

例 8 设打一次电话所用的时间 X（单位：分钟）是以 $\theta = 10$ 为参数的指数随机变量．如果某人刚好在你前面走进公用电话间，求你需等待10分钟到20分钟之间的概率．

解：X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

例 8（续）

令：B={ 等待时间为 10~20 分钟 }

则 $P(B) = P\{10 \le X \le 20\}$

$$= \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -e^{-\frac{x}{10}} \Big|_{10}^{20}$$

$$= e^{-1} - e^{-2} = 0.2325$$

返回主目录

重要的连续分布

3．正 态 分 布

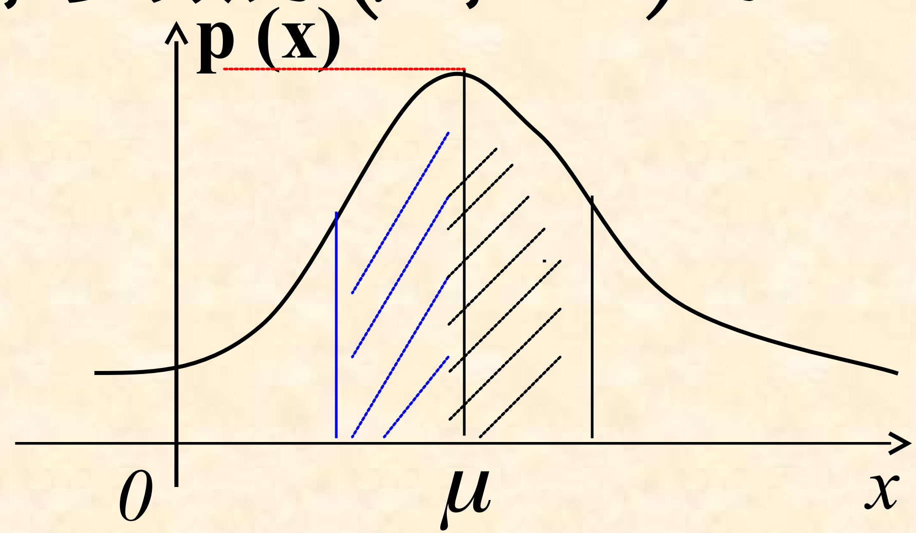
如果连续型随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

(其中$-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$为参数)，

则称随机变量X服从，参数为$(\mu，\sigma^2)$的正态分布．记作

$$X\sim N(\mu，\sigma^2)$$



重要的连续分布

标准正态分布

若 $\mu=0$，$\sigma=1$，我们称 $N(0，1)$为标准正态分布．

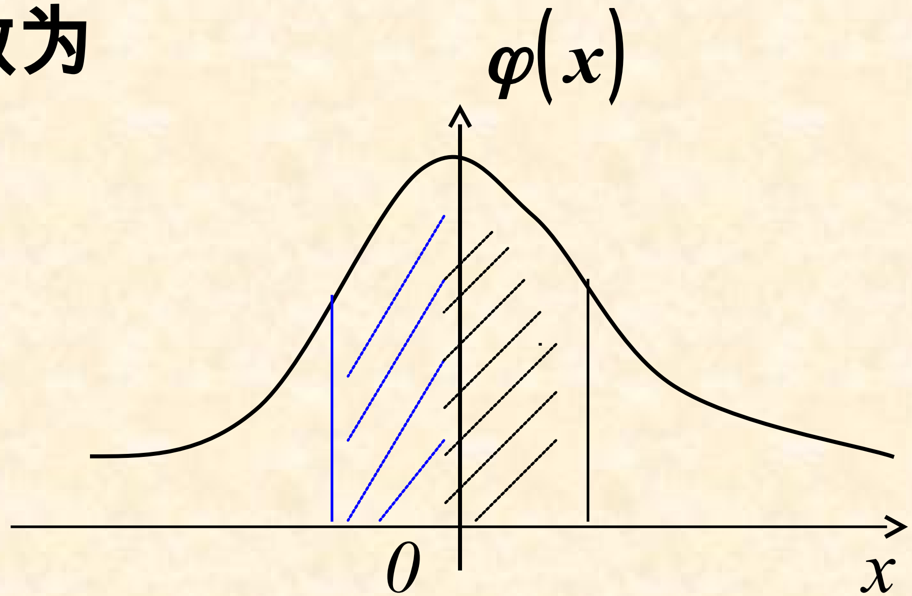
标准正态分布的密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

标准正态分布的分布函数为

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$



重要的连续分布

密度函数的验证

设$X \sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，$f(x)$是其密度函数，则有：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} > 0$$

$$\left(-\infty < x < +\infty\right)$$

下面验证：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

返回主目录

重要的连续分布

密度函数的验证（续）

验证：
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$$

首先验证：
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$$

或验证：
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$$

返回主目录

重要的连续分布

密度函数的验证（续）

为此，我们只需证明：$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = 2\pi$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

返回主目录

密度函数的验证（续）

作极坐标变换：$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，则有

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = 2\pi\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = 2\pi$$

因此

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}}$$

返回主目录

重要的连续分布

密度函数的验证（续）

下面验证：$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{2\pi}\sigma}$$

作变换：$u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ ，则 $du = \dfrac{dx}{\sigma}$

则有 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\dfrac{dx}{\sigma}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 1$$

返回主目录

密度函数的验证（续）

综上所述，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

满足密度函数的两项基本条件，因此 $f(x)$ 确是一个密度函数．

重要的连续分布

正态分布密度函数的图形性质

对于正态分布的密度函数

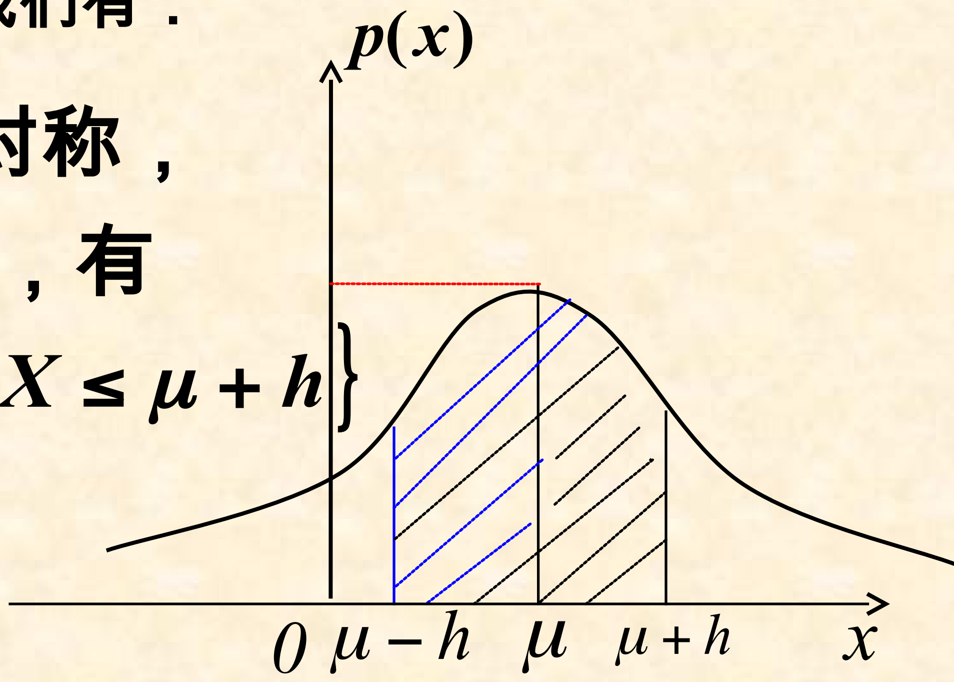
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

由高等数学中的知识，我们有：

(1)．曲线关于直线 $x=\mu$ 对称，

这表明：对于任意的 $h>0$，有

$$P\{\mu-h<X\le\mu\}=P\{\mu<X\le\mu+h\}$$



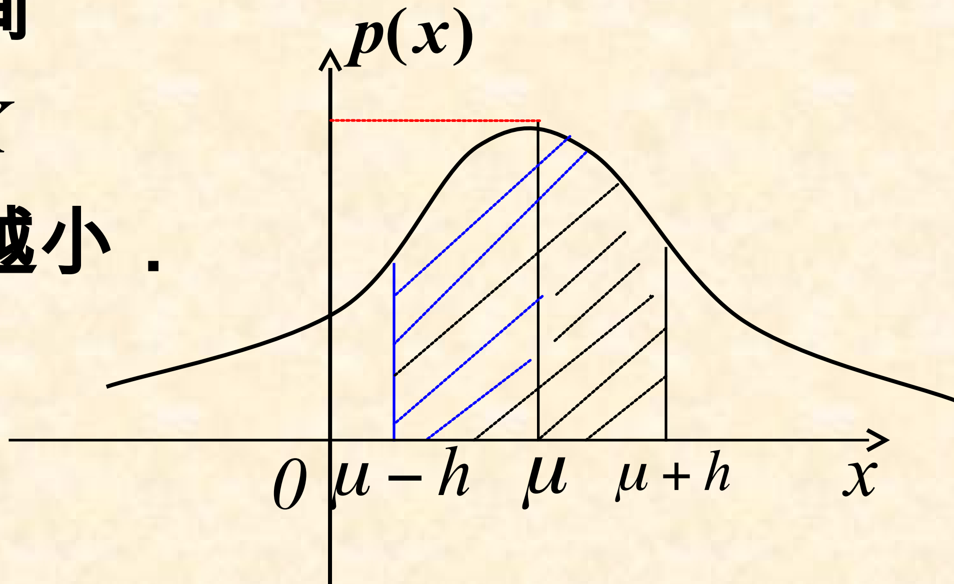
重要的连续分布

正态分布密度函数的图形性质

(2)．当 $x=\mu$ 时，$f(x)$取到最大值

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

x离μ越远，$f(x)$的值就越小．这表明，对于同样长度的区间，当区间离μ越远时，随机变量 X 落在该区间中的概率就越小．

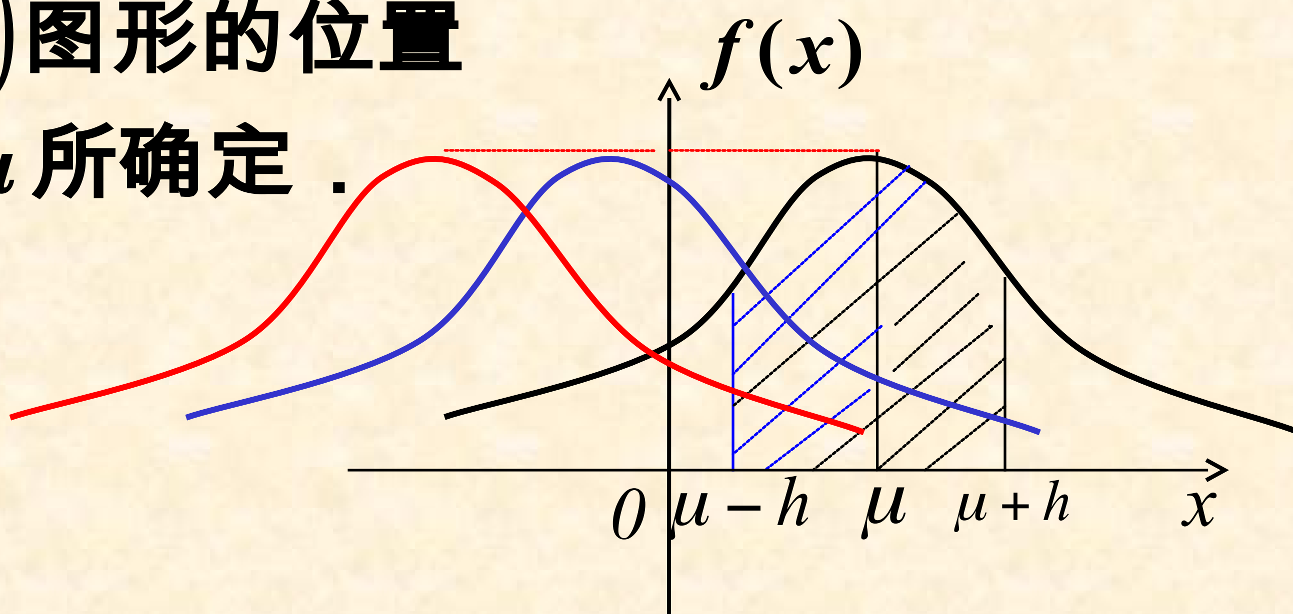


重要的连续分布

正态分布密度函数的图形性质

(3). 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点；曲线 $y=f(x)$ 以 Ox 轴为渐近线.

(4). 若 σ 固定，而改变 μ 的值，则 $f(x)$ 的图形沿 x 轴平行移动，但不改变其形状. 因此 $y=f(x)$ 图形的位置完全由参数 μ 所确定.

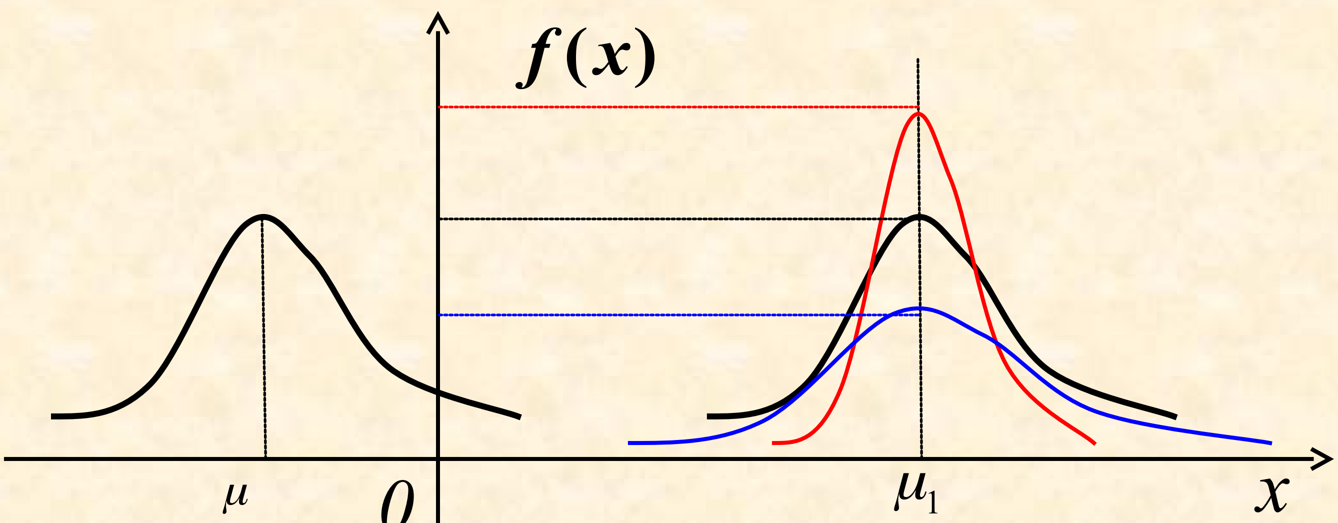


正态分布密度函数的图形性质（续）

(5)．若μ固定，而改变σ的值 ;: $f(x)$的最大值为

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

可知，当σ越小时，$y=f(x)$图形越陡，因而X落在μ附近的概率越大；反之，当σ越大时，$y=f(x)$的图形越平坦，这表明X的取值越分散．



返回主目录

重要的连续分布

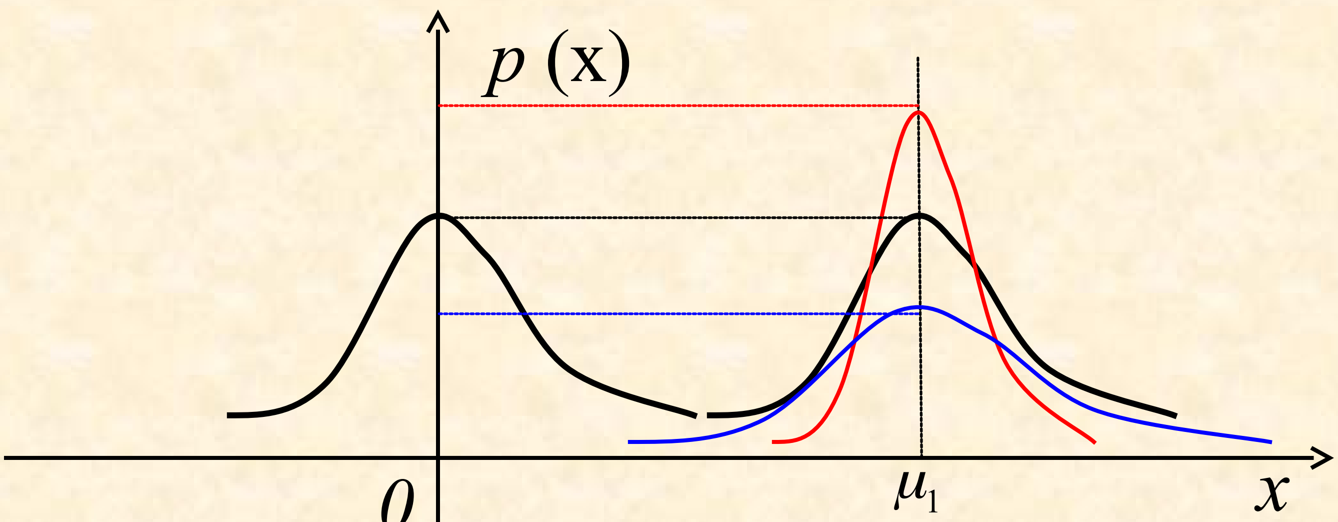
正态分布的重要性质：

设 $X \sim N(0,1)$，则

$$P\{X \le 0\} = P\{X \quad 0\} = \frac{1}{2}$$

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$P\{X \le \mu\} = P\{X \quad \mu\} = \frac{1}{2}$$



返回主目录

重要的连续分布

正态分布的重要性

正态分布是概率论中最重要的分布，这可以由以下情形加以说明：

⑴．正态分布是自然界及工程技术中最常见的分布之一，大量的随机现象都是服从或近似服从正态分布的．可以证明，如果一个随机指标受到诸多因素的影响，但其中任何一个因素都不起决定性作用，则该随机指标一定服从或近似服从正态分布．

⑵．正态分布有许多良好的性质，这些性质是其它许多分布所不具备的．

⑶．正态分布可以作为许多分布的近似分布．

返回主目录

重要的连续分布

标准正态分布的计算

如果随机变量 $X \sim N(0,\ 1)$，则其密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty,\ +\infty)$$

其分布函数为

$$\boxed{\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (-\infty < x < +\infty)}$$

教科书上第382页列出了标准正态分布表，

返回主目录

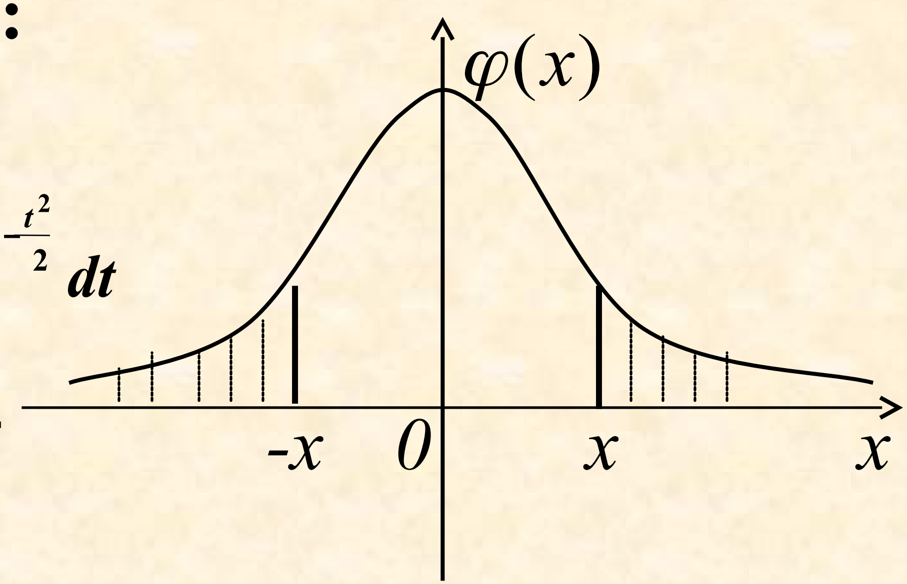
重要的连续分布

标准正态分布的计算（续）

对于x 0我们可直接查表求出 $\Phi(x) = P\{X \le x\}$

如果$x < 0$，我们有公式：

$$\boxed{\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)}$$



$$\because \Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

作变换 $t = -u$，$dt = -du$，得

$$\Phi(-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1 - \Phi(x)$$

重要的连续分布

一般正态分布的计算

引理：设$X \sim N\left(\mu, \quad \sigma^2\right)$，则$Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

证明：$F_Y\left(y\right) = P\left\{Y \le y\right\} = P\{\dfrac{X-\mu}{\sigma} \le y\}$

$$= P\{X \le \mu + \sigma y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu+\sigma y} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

作变换 $u = \dfrac{t-\mu}{\sigma}$，则 $du = \dfrac{dt}{\sigma}$，代入上式，得

$$F_Y\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(y\right)$$

重要的连续分布

一般正态分布的计算（续）

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

其中，$\Phi(y)$是标准正态分布的分布函数.

故对任意的 $a < b$,有

$$P\{a < X < b\} = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}).$$

返回主目录

重要的连续分布

例 9 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$，试求：

(1) . $P\{1 \le X < 2\}$；(2) . $P\{-1 < X < 2\}$.

解：(1) . $P\{1 \le X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(1)$

$$= 0.97725 - 0.84134 = 0.13591$$

(2) . $P\{-1 \le X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(-1)$

$$= \Phi(2) - [1 - \Phi(1)]$$

$$= 0.97725 - 1 + 0.84134 \quad = 0.81859$$

返回主目录

例 10

设随机变量 $X \sim N(2, 9)$，试求：

(1)．$P\{1 \le X < 5\}$；(2)．$P\{|X-2| > 6\}$；(3)．$P\{X > 0\}$．

解：(1)．$P\{1 \le X < 5\} = F(5) - F(1)$

$$= \Phi\left(\frac{5-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 0.84134 + 0.62930 - 1$$

$$= 0.47064$$

例 10（续）

(2) . $P\{|X-2|>6\}=1-P\{|X-2|\le 6\}$

$$=1-P\{-6\le X-2\le 6\}$$

$$=1-P\{-4\le X\le 8\}$$

$$=1-[\Phi(\frac{8-2}{3})-\Phi(\frac{-4-2}{3})]$$

$$=1-[\Phi(2)-\Phi(-2)]$$

$$=2\times[1-\Phi(2)]$$

$$=2\times(1-0.97725)=0.0455$$

返回主目录

例 10(续)

(3) . $P\left\{X > 0\right\} = 1 - P\left\{X \le 0\right\}$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0-2}{3}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0.7486$$

重要的连续分布

例 11 设随机变量 $X \sim N\left(d, \ 0.5^2\right)$,若使 $P\{X \quad 80\} \quad 0.99$,则 d 至少应为多少？

解：$0.99 \le P\{X \quad 80\} = P\left\{\dfrac{X-d}{0.5} \quad \dfrac{80-d}{0.5}\right\}$

$$= 1 - P\left\{\frac{X-d}{0.5} < \frac{80-d}{0.5}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{d-80}{0.5}\right) \qquad \because \ \Phi(2.327) = 0.99$$

$$\therefore \ \frac{d-80}{0.5} \quad 2.327 \qquad d \quad 81.1635 .$$

返回主目录

例 12　设随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$,且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$,则 $P\{X < 0\} = ?$

解：$P\{X < 0\} = \Phi(\frac{0-2}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{2}{\sigma})$

$\because$ $0.3 = P\{2 < X < 4\}$ $= \Phi(\frac{2}{\sigma}) - \Phi(0)$

$= \Phi(\frac{2}{\sigma}) - 0.5$

$\therefore \Phi(\frac{2}{\sigma}) = 0.8$,　$P\{X < 0\} = 1 - 0.8 = 0.2$

例 13

某地区的月降水量服从 $\mu=40$，$\sigma=4$（单位：cm）的正态分布．求从某月起连续10个月的月降水量都不超过50cm的概率．

解：

设：X：该地区的月降水量．则 $X\sim N\left(40,\ 4^2\right)$

再设：$A=\left\{\text{月降水量不超过50}cm\right\}$．

则：$P\left(A\right)=P\left\{X\le 50\right\}=\Phi\left(\dfrac{50-40}{4}\right)$

返回主目录

例 13（续）

$$=\Phi(2.5) = 0.99379$$

所以，$P\{$连续10个月降水量都不超过$50cm\}$

$$=0.99379^{10}$$

$$=0.9396$$

重要的连续分布

设 $X \sim N(0,1)$, 若 z_α 满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

则称点 z_α 为标准正态分布的上 α 分位点。

已知α,求z_α的方法:

$$\because \ \alpha = P\{X > z_\alpha\} = 1 - P\{X \le z_\alpha\} = 1 - \Phi(z_\alpha)$$

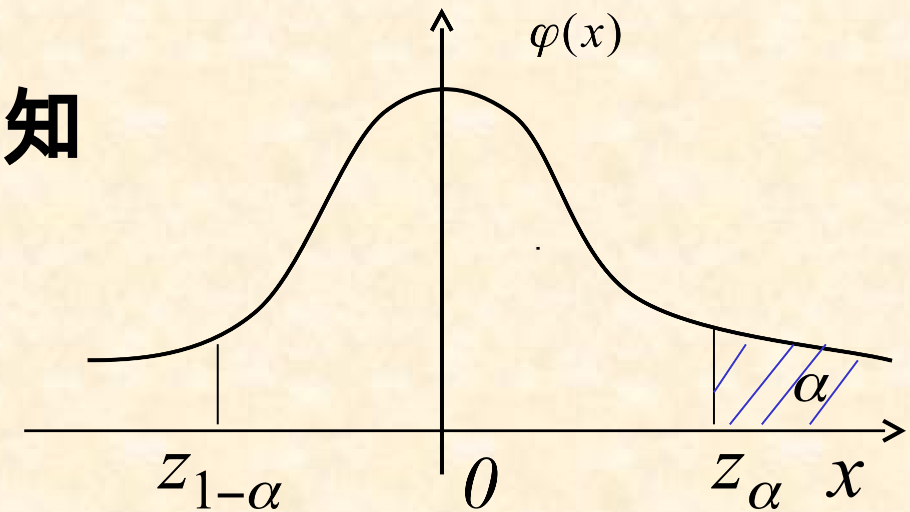
$$\therefore \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$$

当 $0 < \alpha \le 0.5$ ，查表可知

$z_{0.05} = 1.645,$

$(\because \ \Phi(z_{0.05}) = 1 - 0.05 = 0.95)$

$z_{0.005} = 2.57.$



重要的连续分布

设 $X \sim N(0,1)$, 若 z_α 满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

则称点 z_α 为标准正态分布的上 α 分位点。

已知α,求z_α的方法:

$$\because \alpha = P\{X > z_\alpha\} = 1 - P\{X \le z_\alpha\} = 1 - \Phi(z_\alpha)$$

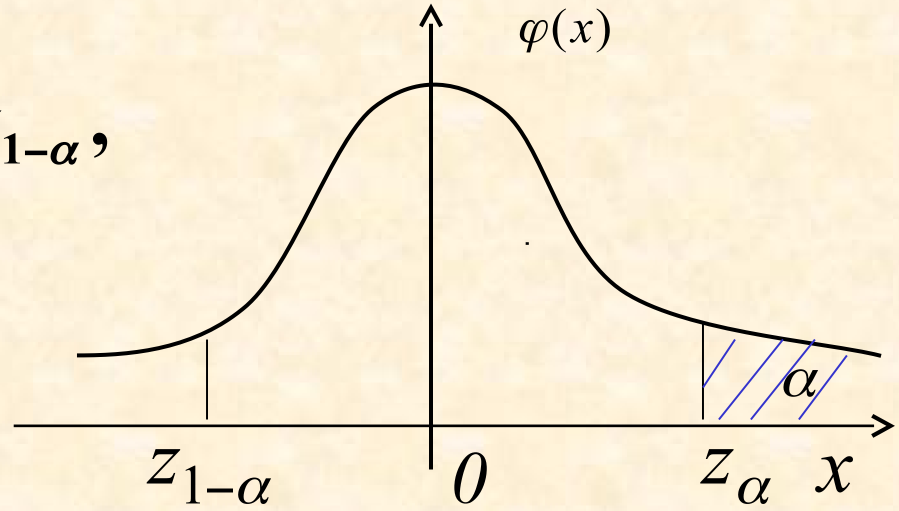
$$\therefore \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$$

当 $0.5 < \alpha < 1$ ，由 $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$,

可知

$$z_{0.95} = -1.645,$$

$$z_{0.995} = -2.57.$$



4. Γ分布 .

如果连续型随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(其中 $r>0$,$\lambda>0$ 为参数)

则称随机变量 X 服从参数为 $(r,\ \lambda)$ 的 $\Gamma-$分布 .

记作： $X\sim\Gamma(r,\ \lambda)$

Γ- 函 数

$\Gamma-$函数的定义：

$$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx$$

$\Gamma-$函数的定义域：$(0,\ +\infty)$.

$\Gamma-$函数的性质： $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$.

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ .$$

如果n为自然数，则$\Gamma(n)=(n-1)!$.

返回主目录

重要的连续分布

说明：

如果 $r=1$，则由$\Gamma(1)=1$，得 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

这正是参数为λ的指数分布．

这说明指数分布是$\Gamma-$分布的一个特例．

如果$r=n$，由$\Gamma(n)=(n-1)!$ 得

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

我们称此分布为$Erlang$分布，

它是排队论中重要的分布之一．

重要的连续分布

说明：

如果$r=\frac{n}{2}$，$\lambda=\frac{1}{2}$，其中n为自然数，则有

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

我们称此分布为自由度为n的χ^2-分布，记作$\chi^2(n)$．

它是数理统计学中重要的分布之一．

作业：　p_{57-58} 20,22, 24 , 26,27,29.

返回主目录