

第四章 线性方程组

线性方程组 第四章

- 4.1 齐次线性方程组
- 4.2 非齐次线性方程组

方程组的矩阵和向量表示

线性方程组 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,$ $\left(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\right).$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

则方程组可写成:

Ax = b.

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

若记:
$$\mathbf{a}_{1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_{2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{a}_{n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\beta} = \begin{pmatrix} b_{1} \\ b_{2} \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$$

则方程组可写成:

$$x_1\mathbf{\alpha}_1 + x_2\mathbf{\alpha}_2 + \cdots + x_n\mathbf{\alpha}_n = \mathbf{\beta}$$

四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

4.1 齐次线性方程组

齐次线性方程组AX=0总有零解 何时有非零解?

定理4.1 设A为 $m \times n$ 矩阵,则齐次方程组 $A_{m \times n} x = 0$ 有非零解的充要条件是系数矩阵A的秩 r(A) < n.

证 方程组AX=0有非零解亦即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 有非零解 ⇐⇒ α₁,α₂,…,απ 线性相关 ⇐⇒ 向量组

 a_1, a_2, \dots, a_n 的秩 r(A) < n

推论: 设A为11 阶方阵,则齐次线性方程组AX=0 有非零解的充要条件是 |A|=0

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



齐次线性方程组解的性质:

定理4.2 设 $x = \xi_1, x = \xi_2$ 均为 Ax = 0 的解, 则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 也是 Ax=0 的解.

证明
$$: A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0$$

$$\therefore A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0$$

故 $x = \xi_1 + \xi_2$ 也是Ax = 0的解.

定理4.3 设 $x = \xi_1$ 为 Ax = 0的解, k为实数, 则 $x = k\xi$, 也是Ax = 0的解. 证明 $A(k\xi_1) = kA(\xi_1) = k0 = 0.$ 证毕.

由以上两个性质可知,方程组的全体解向量 所组成的集合,对于加法和数乘运算是封闭的, 因此构成一个向量空间,称此向量空间为齐次线 性方程组Ax=0的解空间。从而只要求出解空间的 基,就可以求出方程组的全部解.解空间的基通常称 为该方程组的基础解系.

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

基础解系的定义:

 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 称为齐次线性方程组 Ax = 0的基础 解系,如果

- $(1)\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是Ax=0的一组线性无关 的解;
- (2) Ax = 0的任一解都可由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 线性表出.

如果 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 为齐次线性方程组 Ax = 0的一组基础解系,那么,Ax = 0的通解可表示为 $x = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_t \eta_t$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 是任意常数.

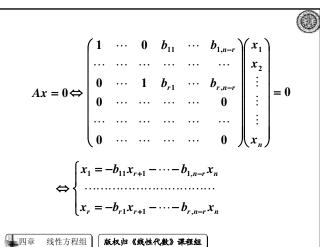
四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

基础解系的求法:

设齐次线性方程组的系数矩阵为A,并不妨 设A 的前r 个列向量线性无关.于是A可化为

$$A \xrightarrow{\mbox{\begin{subarray}{lll} \begin{subarray}{lll} \begin{su$$

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

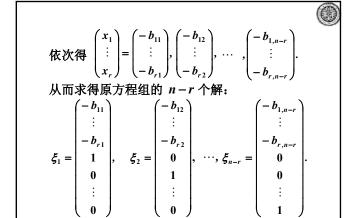


现对 x_{r+1}, \dots, x_n 取下列 n-r 组数:

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

分别代入 $\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \dots - b_{1,n-r}x_n \\ \dots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \dots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



下面证明 51,52,…,5,,, 是齐次线性方程组解空 间的一个基.

(1)证明 ξ_1,ξ_2,\cdots,ξ_n 线性无关.

由于
$$n-r$$
个 $n-r$ 维向量
$$\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\\vdots\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\\vdots\\0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0\\0\\\vdots\\1 \end{pmatrix}$$

线性无关,

所以n-r 个n 维向量 $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-r}$ 亦线性无关.

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

(2)证明解空间的任一解都 可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表示.

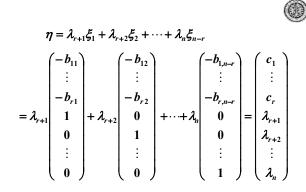
方程组的一个解. 再作 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 的线性组合,

$$\eta = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \dots + \lambda_n\xi_{n-r}$$

由于 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是Ax = 0 的解,故 η 也是Ax = 0的

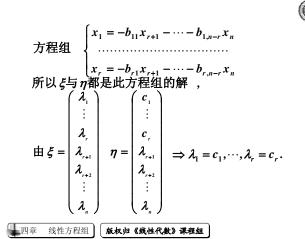
下面来证明 $\xi = \eta$.

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



由于 ξ 与 η 都是方程 Ax = 0的解,而Ax = 0又等价于

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



故 $\xi = \eta$. 即 $\xi = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n\xi_{n-r}$. 所以 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 是齐次线性方程组解空间的一个基. 说明

- 1. 解空间的基不是唯一的.
- 2. 解空间的基又称为方程组的基础解系.
- 3. 若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是Ax = 0 的基础解系,则 其通解为

$$x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}$$
.

其中 k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 是任意常数.

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

定理4.4 设 $A=(a_n)$ 是 $m \times n$ 矩阵.目 r(A)=r. 则齐次线性方程组 Ax=0 的基础解系由n-r个向量组成.

当 r(A)=n 时,方程组只有零解,故没有基础解系 (此时解空间只有一个零向量,为0维向量空间).

当 r(A) = r < n 时, 方程组必含有 n - r 向量的基 础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, 此时方程组的解可表示为

$$x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}$$

其中, k_1, \dots, k_{n-r} 为任意实数,解空间可表示为 $S = \left\{ x = k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} | k_1, \dots, k_{n-r} \in R \right\}$



例1 求齐次线性方程组

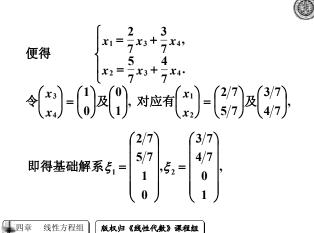
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解 对系数矩阵A作初等行变换,变为行最简矩

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



并由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

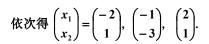
对系数矩阵施
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

r(A) = r = 2, n = 5, n - r = 3, 即方程组有无穷多解,

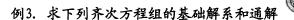
其基础解系中有三个线性无关的解向量.

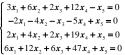
■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



(原力性組的 一) 基価解系列
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1\\-3\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$. 其中k1,k,,k,为任意常数.





解

$$A \xrightarrow{\text{47\% fr.} 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

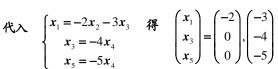
由于系数矩阵的秩 r(A)=3

所以基础解系由2个向量构成

取 x2, x4 为自由未知量

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

$$\stackrel{\mathbf{x}_2}{\underset{\mathbf{x}_4}{}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



所以基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -3\\0\\-4\\1\\-5 \end{pmatrix}$$

通解为:

$$x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$$

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

例4. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0 \end{cases}$$

讨a, b, c满足何种关系时, 方程组仅有零解?方程组有 非零解?

解: 由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

1) 当 a, b, c互不相等时, A ≠ 0 , 方程组仅有零解

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
 即 $x_1 = -x_2 - x_3$ 从而,通解为
$$x_1 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c - a \\ 0 & 0 & c^2 - a^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

得同解方程组 $\int x_1 + x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \end{cases}$$

所以通解为

$$x = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

类似地, 可处理下述两种情况:

$$1)a = c \neq b$$

$$2)b = c \neq a$$

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

例5. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为A,且有3阶非零矩阵B使得AB=0,求a的值. 解 设 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \beta_i$ 为3维列向量,由于AB = 0,则

$$AB = A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (A\beta_1, A\beta_2, A\beta_3) = (0, 0, 0)$$

即矩阵B 的每1列均为方程组的解, 又B为非零矩阵, 故 方程组有非零解, 从而

例6. 设A为n阶矩阵, 且det(A)=0, 若某元素 a_{ij} 的代数余 子式 $A_{ij} \neq 0$ 证明: $x = k(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im})^T$ 是方程组的通解.

证明: $|A| = 0, A_{ii} \neq 0 \implies r(A) = n - 1$

──> 基础解系由1个向量构成

又 $AA^* = |A|E = 0$ \Longrightarrow A^* 的每一列都是方程组 Ax = 0的解

而 $A_{ij} \neq 0$ 于是 A^* 的第 i 列 $(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})^T$ 是方程组的非零解.

从而, 方程组的通解为: $x = k(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im})^T$ (k 为任意常数)

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

例7. 设A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明 $r(A^T A) = r(A)$.

证 若x满足Ax = 0,则有 $A^{T}(Ax) = 0$,即 $(A^T A)x = 0$

若 x 满足 $(A^TA)x=0$ 则 $x^T(A^TA)x=0$,即 $(Ax)^T(Ax) = 0$,从而 Ax = 0.

综上所述,方程 Ax=0 与 $A^TAx=0$ 同解.

因此 $r(A^T A) = r(A)$.

一四章

线性方程组 **版权归《线性代数》课程组**

作业

习题4.1

1(1),(3), 3,

4, 6,

B: 1, 2,

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

4.2 非齐次线性方程组

非齐次线性方程组 Ax=b 可能无解 何时有解?

称矩阵 (A,b)为方程组 Ax=b 的增广矩阵.

定理4.5 非齐次方程组 Ax=b有解的充分必要条 件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩,即

 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

证: AX=B有解, 即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{b}$ 有解.

⇒ b可由向量组a₁,a₂,···,a』线性表示 ⇒

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价

 $\Rightarrow r(\mathbf{A}) = \underline{r}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

与方程组 Ax = b有解等价的命题 线性方程组 Ax = b有解

 \Leftrightarrow

向量b能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示;

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价;

矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 与矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b)$ 的秩相等.

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

非齐次线性方程组解的性质

(1)设 $x = \eta_1$ 及 $x = \eta_2$ 都是Ax = b的解,则 $x = \eta_1 = \eta_2$ η ,为对应的齐次方程 Ax = 0的解.

证明 $:A\eta_1=b, A\eta_2=b$

 $\therefore A(\eta_1 - \eta_2) = b - b = 0.$

即 $x = \eta_1 - \eta_2$ 满足方程Ax = 0.

四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



(2) 设 $x = \eta$ 是方程 Ax = b的解, $x = \xi$ 是方程 Ax = 0的解,则 $x = \xi + \eta$ 仍是方程 Ax = b 的解.

证明
$$A(\xi + \eta) = A\xi + A\eta = 0 + b = b$$
,

所以 $x = \xi + \eta$ 是方程 Ax = b的解.

证毕.

- 四章

线性方程组 版权归《线性代数》课程组



非齐次线性方程组的通解:

非齐次线性方程组Ax=b的通解为

$$x = k_1 \xi_1 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*$$
.

其中 $k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为对应齐次线性方程组的通解, η^* 为非齐次线性方程组的任意一个特

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



非齐次线性方程组的解法:

(1) 应用克莱姆法则

特点: 只适用于系数行列式不等于零的情形, 计算量大,容易出错,但有重要的理论价值,可 用来证明很多命题.

(2) 利用初等变换

特点:适用于方程组有唯一解、无解以及有 无穷多解的各种情形,全部运算在一个矩阵(数 表)中进行,计算简单,易于编程实现,是有效 的计算方法.

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



例1 求解方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$$

对增广矩阵B施行初等行变换:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
派权声《线性术数》课程组

可见 r(A) = r(B) = 2, 故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$,则 $x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$,即得方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\eta}^{\star} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方程组的基础解系

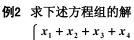
$$\xi_{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$



线性方程组 **版权归《线性代数》课程组**



$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

由r(A)=r(B) 知方程组有解. xr(A)=2, n-r=3, 所以方程组有无穷多解. 且原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 + 7 \\ 2x_2 = -x_3 - 2x_4 - 6x_5 - 23 \end{cases}$$

求特解 令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, 得 $x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = \frac{23}{2}$.

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

求基础解系

代入
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ 2x_2 = -x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$$

依次得
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

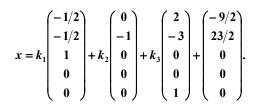
■ 四章 线性方程组 **版权归《线性代数》课程组**

故得基础解系

$$\xi_{1} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的通解为

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

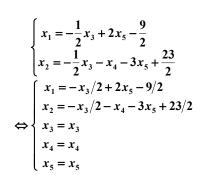
另一种解法
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\
0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 & -9/2 \\
0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

则原方程组等价于方程组

四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



所以方程组的通解为

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



$$x = k_{1} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

例3. 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

解 对增广矩阵进行初等变换

$$(A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

由于 r(A) = 2, $(A, \beta) = 3$ 所以方程组无解.

四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

例4. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1\\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 5\\ 0x_1 - x_2 + bx_3 - 3x_4 = -3\\ x_1 - x_2 + 0x_3 + ax_4 = 8 \end{cases}$$

讨论a, b取何值时, 方程组无解?有唯一解?有无穷多解?

解 对增广矩阵进行初等变换

$$(A, \pmb{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & \pmb{b} & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & a & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \pmb{b} - 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & \pmb{a} + 5 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \pmb{b} - 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \pmb{a} + 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1)当 $a \neq -1$ 且 $b \neq 3$ 时, $r(A) = r(A, \beta) = 4, n = 4$, 方程组有唯一解.

2)当 a = -1, b 任意时, $r(A) = 3, r(A, \beta) = 4$ 方程组无解

■ 四章 线性方程组 **版权归《线性代数》课程组**

3) 当b=3时,有

$$(A,\pmb\beta) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \pmb a+1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\pmb a-2 \end{pmatrix}$$

(1)当 $b = 3, a \neq -0.5$ 时, $r(A) = 3, r(A, \beta) = 4$, 方程组无解.

(2)当 b=3, a=-0.5 时, $r(A)=r(A,\beta)=3<4$, 方程组有无穷多解.

$$(A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$EP \begin{cases} x_1 = 3x_3 + 1 \\ x_2 = 3x_3 - 9 \end{cases} \quad \text{id} \text{id} \text{if } \text{if } \text{if } \text{if } \text{id} \text{if } \text{$$

例5. 已知



 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,4,0,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,7,1,3)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1,a)^T, \boldsymbol{\beta} = (3,10,b,4)^T$

问: a,b取何值时, β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?

 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 并写出表达式.

解 考虑线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 对增广矩阵B进行初等变换.

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & \boldsymbol{b} \\ 2 & 3 & \boldsymbol{a} & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{b} - 2 \end{pmatrix}$$

四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

- 1) 当 $b \neq 2$ 时,由于 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ 方程组 无解, β不能由 $α_1, α_2, α_3$ 线性表示.
- 2) 当 b=2 时,
- (1)若 $a \neq 1, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 3$ 方程组有唯一解, β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示,这是

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是,方程组的解为 $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$,故 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

(2)若 $a=1, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)=2<3$, 方程组有无穷多解 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,但表示法不唯一.

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

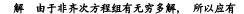
于是,方程组的解为 $x_1 = 3 - 2k, x_2 = k, x_3 = -2 + k$, 故

$$\beta = (3-2k)\alpha_1 + k\alpha_2 + (-2+k)\alpha_3$$

k 为任意常数

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

例6. 已知方程组
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
有无穷多解,求常数a.



$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2 = 0$$
 \longrightarrow
$$\begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

- (1)当 a = -2 时, r(A) = 2, r(A,b) = 2, 方程组有无穷多解.
- (1)当 a=1 时,r(A)=1,r(A,b)=2,方程组无解.

因此 a = -2

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

例7. 已知 $\eta_1 = (-9,1,2,11)^T$, $\eta_2 = (1,-5,13,0)^T$, $\eta_3 = (-7,-9,24,11)^T$ 是方程组的解

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = d_1 \\ 3x_1 + b_2 x_2 + 2x_3 + b_4 x_4 = d_2 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + cx_4 = d_3 \end{cases}$$

求方程组的通解.

解 因为
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$
 \Longrightarrow $r(A) \geq 2$

又因为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2 = (-10, 6, -11, 11)^T, \boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3 = (-2, 10, -22, 0)^T$

是 Ax = 0 的解. 且 ξ_1, ξ_2 线性无关, 故 $n - r(A) = 4 - r(A) \ge 2$

■四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组

小结

- 1. 齐次线性方程组基础解系的求法
- (1) 对系数矩阵 A 进行初等变换,将其化为 最简形

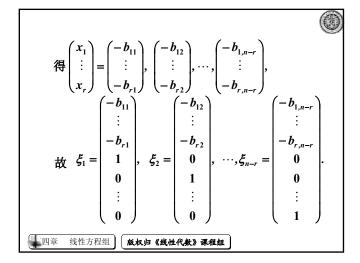
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots &$$

(2) 得出 r(A)=r,同时也可知方程组的一 个基础解系含有n-r个线性无关的解向量.

由于
$$Ax = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \dots - b_{1,n-r}x_n \\ \dots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \dots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

■ 四章 线性方程组 版权归《线性代数》课程组



为齐次线性方程组的一个基础解系.

2.线性方程组解的情况

Ax = 0有非零解 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A}) \leq n$

此时基础解系中含有n-r(A)解向量.

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = n \Leftrightarrow Ax = b$$
有唯一解.

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < n \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
有无穷多解.

$$r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff Ax = b \mathbf{\Xi} \mathbf{M}.$$

■ 四章 线性方程组 **版权归《线性代数》课程组**

作业:

习题4.2

A: 1(1), (3), 2, 4, 6,

B: 1,