§5 多维随机变量函数的分布

一．和的分布

例 1 设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

令：$Z = X + Y$，试求随机变量 Z的分布律．

返回主目录

例 1（续）

解： 由于X与Y的取值都是1，2，3，4，

可知随机变量$Z=X+Y$的取值为2，3，4，5，6，7，8．

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{Z=3\}=P\{X=1,\ Y=2\}+P\{X=2,\ Y=1\}=0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8};$$

$$P\{Z=4\}$$

$$=P\{X=1,\ Y=3\}+P\{X=2,\ Y=2\}+P\{X=3,\ Y=1\}$$

$$=0+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24};$$

返回主目录

例 1（续）

$$P\{Z=5\}=P\{X=1,\ Y=4\}+P\{X=2,\ Y=3\}$$
$$+P\{X=3,\ Y=2\}+P\{X=4,\ Y=1\}$$
$$=0+0+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{7}{48};$$

$$P\{Z=6\}$$
$$=P\{X=2,\ Y=4\}+P\{X=3,\ Y=3\}+P\{X=4,\ Y=2\}$$
$$=0+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{7}{48};$$

$$P\{Z=7\}=P\{X=3,\ Y=4\}+P\{X=4,\ Y=3\}$$
$$=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16};$$

返回主目录

例 1（续）

$$P\{Z=8\}=P\{X=4,\ Y=4\}=\frac{1}{16}.$$

由此得 $Z=X+Y$ 的分布律为

Z	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{6}$

例 2

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的 Poisson 分布，令 $Z=X+Y$，试求随机变量 Z 的分布律．

解 **由随机变量 X 与 Y 的取值都是 $0, 1, 2, \cdots$，**

可知随机变量 $Z=X+Y$ 的取值也是 $0, 1, 2, \cdots$，

而且，

$$P\{Z=n\}=P\{X+Y=n\}=P\left\{\bigcup_{k=0}^{n}(X=k, Y=n-k)\right\}$$

返回主目录

例 2（续）

$$=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k, \ Y=n-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}P\{Y=n-k\} \qquad (\text{随机变量}X\text{与}Y\text{的独立性})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}$$

返回主目录

例 2（续）

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n$$

即，

$$P\{Z=n\} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots)$$

由Poisson分布的定义，知 $Z=X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson分布．

连续型随机变量和的分布

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，其联合密度函数为 $f(x, y)$，

令：$Z = X + Y$，

下面计算随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

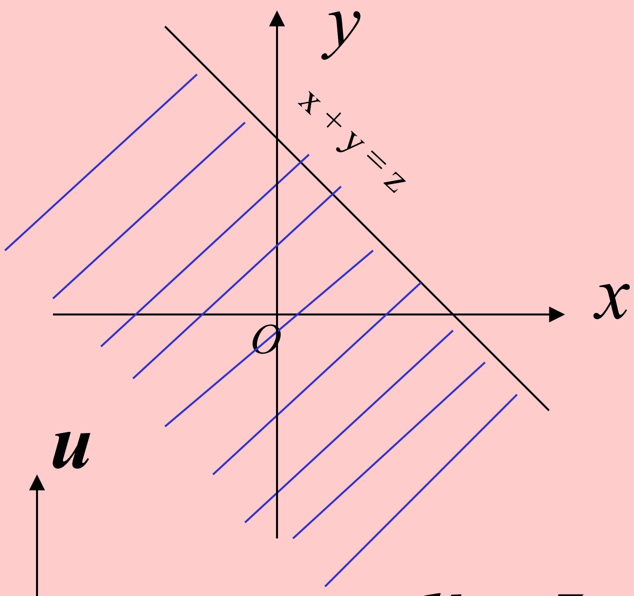
首先计算随机变量 $Z = X + Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x, y)\,dxdy$$

连续型随机变量和的分布

$$F_Z(z) = \iint\limits_{x+y\le z} f(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy$$

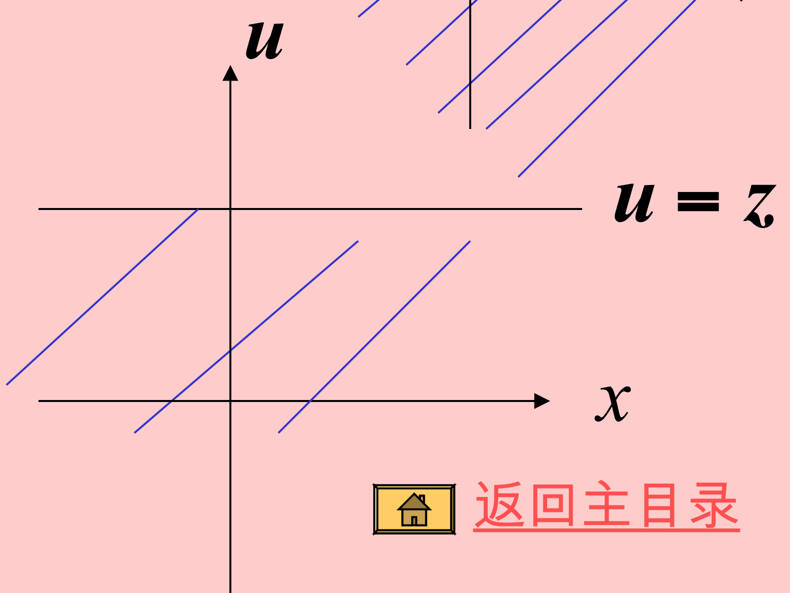


作变换： $y = u - x$

则 $x + y \le z \Rightarrow u \le z$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z} f(x, u-x)du$$

$$= \int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)dx$$



返回主目录

注意里层的积分是u的函数：

$$g(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x\,,\;u-x)dx$$

即有 $$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} g(u)du$$

由分布函数与密度函数之间的关系，上式对z求导，可得$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{z} g(u)du\right)=g(z)$$

连续型随机变量和的分布

即 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)dx$$

注意到在前面的积分中

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,\ y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x} f(x,\ y)dy$$

我们是先对y，后对x积分的，若将其改成先对x，后对y积分，通过类似的计算，有

连续型随机变量和的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, \quad y)dy$$

因此，我们有以下结论：

设二维连续型随机变量$(X, \quad Y)$的联合密度函数为$f(x, \quad y)$，则$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad z-x)dx$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, \quad y)dy$$

返回主目录

连续型随机变量和的分布

特别地，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则有

$$f(x,\ y) = f_X(x) f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

或者

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

我们称上式为函数 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$ 的卷积，记作

$$f_X(x) * f_Y(y)$$

返回主目录

因此，我们有以下结论：

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则它们的和 $Z=X+Y$ 的密度函数等于 X 与 Y 密度函数的卷积：

$$f_Z(z)=f_X(x)*f_Y(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

例3

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，令 $Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的密度函数．

解：

由题意，可知

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty,\ +\infty)$$

设随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx \quad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,dx$$

返回主目录

例 3（续）

在上式中e的指数上对x作配方法，得

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx$$

作积分变换$\frac{u}{\sqrt{2}}=x-\frac{z}{2}$，则有$\frac{du}{\sqrt{2}}=dx$，代入上式，有

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$

这表明，$Z\sim N\left(0,\ 2\right)$.

结　论

一般地，我们有如下结论：

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$X \sim N\left(\mu_1, \ \sigma_1^2\right) \qquad\qquad Y \sim N\left(\mu_2, \ \sigma_2^2\right)$$

$$Z = X + Y,$$

则 $$Z \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$$

结　论

更一般地，我们有如下结论：

如果随机变量 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 相互独立，

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right) \qquad \left(i=1, 2, \cdots, n\right)$$

又 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为 n 个实常数，

令： $Z=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$，

则 $$Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

例 4

设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从区间 $(0，1)$ 上的均匀分布，令 $Z=X+Y$，试求随机变量 Z 的密度函数．

解：方法一　用公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$

由题意，可知

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

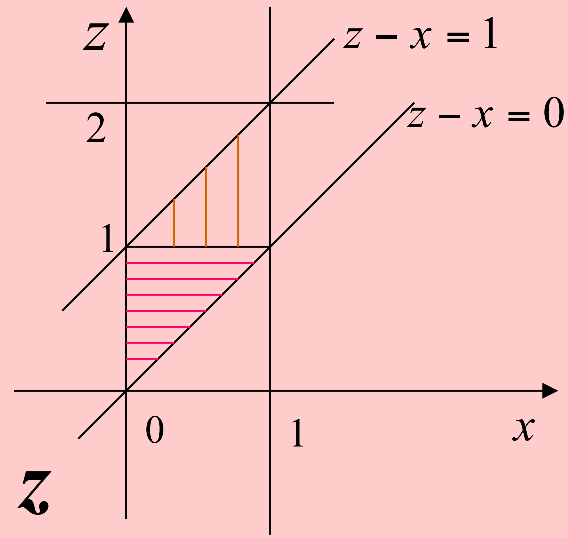
例 4

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(z-x)=\begin{cases}1 & 0<z-x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x) f_Y(z-x)=\begin{cases}1 & 0<x<1,0<z-x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 4（续）



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

$$0<x<1,\ 0<z-x<1$$

(1). 若 $z \le 0$，或 $z \quad 2,\ f_Z(z)=0$

(2). 若 $0<z\le 1$，$f_Z(z)=\int_0^z 1\,dx = z$

(3). 若 $1<z<2$，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1} 1\,dx = 2-z$

综上所述，我们可得

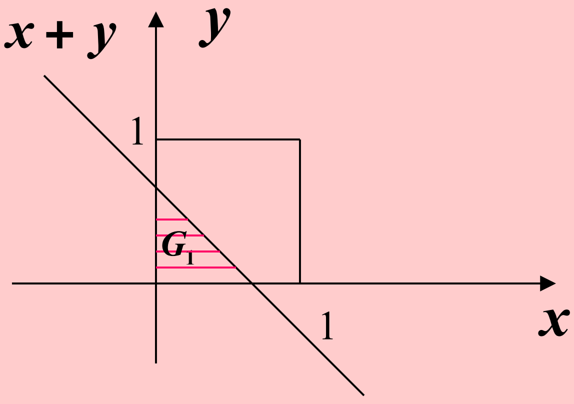
$Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases} z & 0<z\le 1 \\ 2-z & 1<z<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

返回主目录

例 4（续）方法二

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

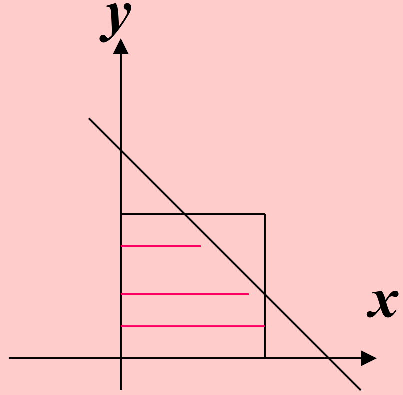


(1)．若 $z\le 0$， 则 $F_Z(z)=0$

(2)．若 $0<z\le 1$，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{G_1} 1\,dxdx=\frac{1}{2}z^2$$

(3)．若 $1<z\le 2$， $F_Z(z)=1-\frac{1}{2}(2-z)^2$



(4)．若 $2<z$， $F_Z(z)=1.$

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从区间 $(0，1)$ 上的均匀分布，Y 服从 $\lambda=1$ 的指数分布，令 $Z=X+Y$，试求随机变量 Z 的密度函数．

解：**由题意，可知**

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

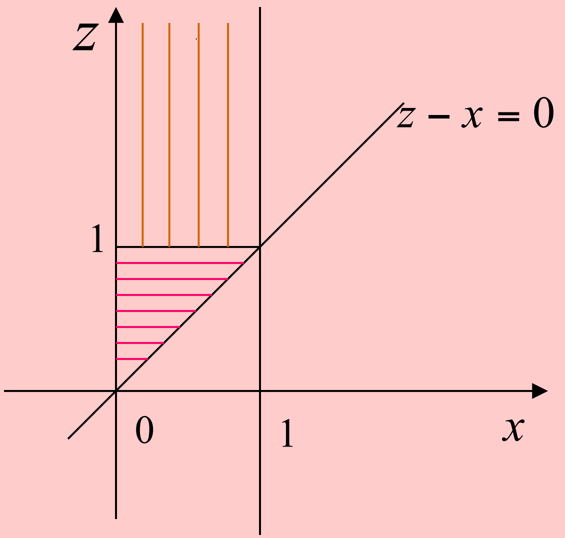
$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}\qquad f_Y(z-x)=\begin{cases}e^{-(z-x)} & z-x>0\\ 0 & z-x\le 0\end{cases}$$

$$f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}e^{-(z-x)} & 0<x<1, z-x>0\\ 0 & z-x\le 0\end{cases}$$

返回主目录

例 5（续）设随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx,\quad 0<x<1,\ z-x>0$$



(1)．若 $z\le 0$，$f_Z(z)=0$

(2)．若 $0<z\le 1$，

$$f_Z(z)=\int_0^z 1*e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\int_0^z e^x dx=1-e^{-z}$$

(3)．若 $z>1$，

$$f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\int_0^1 e^x dx=e^{-z+1}-e^{-z}$$

返回主目录

例 5（续）

综上所述，我们可得 $Z = X + Y$ **的密度函数为**

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 - e^{-z} & 0 < z \le 1 \\ e^{-z+1} - e^{-z} & z > 1 \end{cases}$$

返回主目录

补充结论：

(1) 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，其联合密度函数为 $f(x, y)$，令：$Z = \dfrac{X}{Y}$，

则随机变量 $Z = \dfrac{X}{Y}$ 的密度函数为：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy, y)\, dy$$

返回主目录

连续型随机变量商的分布

特别地，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则有

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) dy$$

补充结论：

（2）设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，其联合密度函数为 $f(x, y)$ 令：$Z = X - Y$，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z + y, y) dy$$

（3）设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，其联合密度函数为 $f(x, y)$，令：$Z = XY$，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{1}{|y|} dy$$

返回主目录

例 7

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的指数分布，令 $Z=\dfrac{X}{Y}$，试求随机变量 Z 的密度函数．

解：　由题意，可知

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

例 7（续）

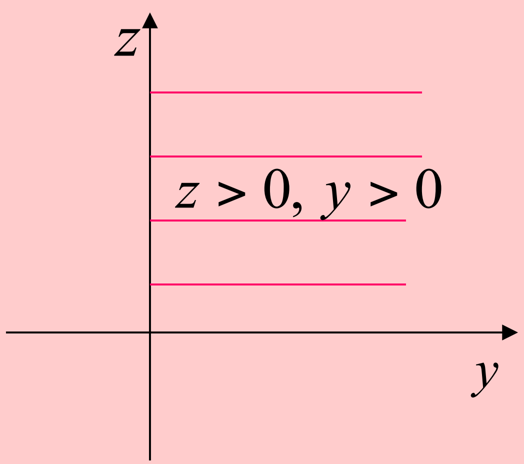
设：$Z=\dfrac{X}{Y}$ 由随机变量 X 与 Y 相互独立性，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy$$

$$yz>0,\ y>0$$

(1)．若 $z\le 0$，$f_Z(z)=0$．

(2)．若 $z>0$，



$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}y\lambda_1e^{-\lambda_1yz}\lambda_2e^{-\lambda_2y}dy$$

例 7（续）

$$=\lambda_1\lambda_2\int_0^{+\infty} y e^{-(\lambda_2+\lambda_1 z)y}\,dy=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1 z)^2}$$

所以，$Z=\dfrac{X}{Y}$的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1 z)^2} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

返回主目录

二．其它的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, y)$，$Z = g(X, Y)$

求随机变量函数$Z = g(X, Y)$的密度函数

$f_Z(z) = F_Z'(z)$，

本节的解题步骤

1. 先求随机变量函数$Z = g(X, Y)$的分布函数$F_Z(z)$，
2. 再求随机变量函数$Z = g(X, Y)$的密度函数$f_Z(z) = F_Z'(z)$，

返回主目录

例 8

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，令 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$，试求随机变量 Z 的密度函数．

解： **由题意，可知**

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty,\ +\infty)$$

由于 X 与 Y 是相互独立的，所以，$(X,\ Y)$ 的联合密度函数为

例 8（续）

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\qquad(-\infty<x,y<+\infty)$$

所以，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}$$

若 $Z\le 0$，则 $F_Z(z)=0$

若 $Z>0$，则 $F_Z(z)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}f(x,\ y)dxdy$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

返回主目录

例 8（续）

作极坐标变换 $x = r\cos\theta$， $y = r\sin\theta$ ，则有

$$F_Z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{z} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr \quad = \int_0^{z} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} \int_0^{z} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

所以，$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z e^{-\frac{z^2}{2}} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

返回主目录

例 9

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim B(1,\ p)$，$Y \sim B(1,\ p)$ $(0 < p < 1)$，令 $\xi = \min(X,\ Y)$，$\eta = \max(X,\ Y)$，试求随机变量 ξ 与 η 的联合分布律及 ξ 与 η 各自的边缘分布律，并判断 ξ 与 η 是否相互独立？

解：

由随机变量 X 与 Y 的取值都为 0 与 1，知

$$\xi = \min(X,\ Y),\ \eta = \max(X,\ Y)$$

的取值也为 0 与 1．

返回主目录

例 9（续）

$$P\{\xi=0,\ \eta=0\}=P\{X=0,\ Y=0\}$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=0\}=(1-p)^2$$

$$P\{\xi=0,\ \eta=1\}=P\{X=0,\ Y=1\}+P\{X=1,\ Y=0\}$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=1\}+P\{X=1\}P\{Y=0\}$$

$$=2p(1-p)$$

$$P\{\xi=1,\ \eta=0\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{\xi=1,\ \eta=1\}=P\{X=1,\ Y=1\}$$

$$=P\{X=1\}P\{Y=1\}=p^2$$

返回主目录

例 9（续）

随机变量ξ与η的联合分布律及ξ与η各自的边缘分布律为，

$\xi \backslash \eta$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	$1-p^2$
1	0	p^2	p^2
$p_{\cdot j}$	$(1-p)^2$	$1-(1-p)^2$	

由于 $0<p<1$， 所以，

$$P\{\xi=1,\ \eta=0\}=0 \neq P\{\xi=1\}P\{\eta=0\}=p^2(1-p)^2$$

这表明，随机变量ξ与η不独立．

例 10

设 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是独立的连续型随机变量，X_i 的分布函数为 $F_i(x)$ $(i=1,2,\cdots n)$.令：

$$X_{(1)}=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$
$$X_{(n)}=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$

试求随机变量 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的分布函数．

解：

设随机变量 $X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{(1)}(x)$，

设随机变量 $X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_{(n)}(x)$，

例 10（续）

则

$$F_{(n)}(x) = P\{X_{(n)} \le x\}$$

$$= P\{\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le x\}$$

$$= P\{X_1 \le x, X_2 \le x, \cdots, X_n \le x\}$$

$$= P\{X_1 \le x\} P\{X_2 \le x\} \cdots P\{X_n \le x\}$$

$$= F_1(x) F_2(x) \cdots F_n(x)$$

例 10（续）

$$F_{(1)}(x)=P\{X_{(1)}\le x\}$$

$$=P\{\min(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)\le x\}$$

$$=1-P\{\min(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)>x\}$$

$$=1-P\{X_1>x,\ X_2>x,\ \cdots,\ X_n>x\}$$

$$=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}$$

$$=1-[1-P\{X_1\le x\}][1-P\{X_2\le x\}]\cdots[1-P\{X_n\le x\}]$$

$$=1-[1-F_1(x)][1-F_2(x)]\cdots[1-F_n(x)]$$

特别，若 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是独立同分布的连续型随机变量，X_1 的分布函数为 $F(x)$ ．令：

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$

则随机变量 $X_{(1)}$ 的分布函数为

$$F_{(1)}(x) = P\{X_{(1)} \le x\} = 1 - [1 - F(x)]^n$$

随机变量 $X_{(n)}$ 的分布函数为

$$F_{(n)}(x) = P\{X_{(n)} \le x\} = [F(x)]^n$$

例 11

设系统 L 是由 n 个相互独立的子系统 L_1，L_2，$\cdots$，L_n 并联而成，并且 L_i 的寿命为 X_i，它们都服从参数为 λ 的指数分布，试求系统 L 的寿命 Z 的密度函数．

解：

由于系统 L 是由 n 个相互独立的子系统 L_1，L_2，$\cdots$，L_n 并联而成，故有

$$Z = \max\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right),$$

又因为子系统 L_i 的寿命 X_i 服从参数为 λ 的指数分布，因此 X_i 的密度函数为

返回主目录

例 11（续）

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

X_i 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

所以，由例9知，

$$Z=\max(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n),$$

的密度函数为

$$f_Z(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}n\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

返回主目录

二．连续型随机变量商的分布

连续型随机变量商的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, y)$，令：$Z=\dfrac{X}{Y}$，

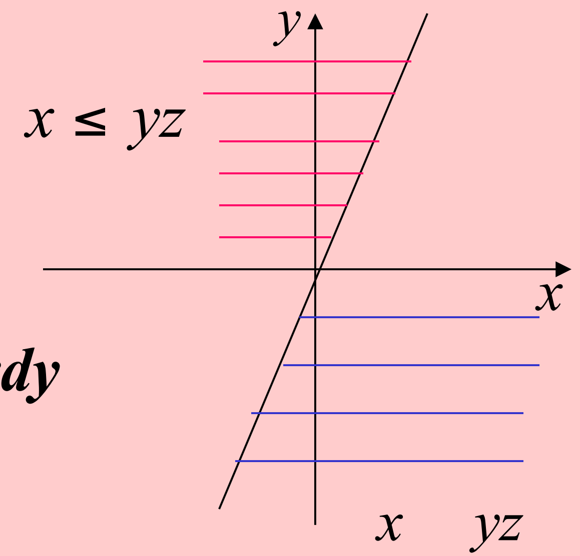
下面计算随机变量$Z=\dfrac{X}{Y}$的密度函数$f_Z(z)$．

首先计算随机变量$Z=\dfrac{X}{Y}$的分布函数$F_Z(z)$．

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\leq z\right\}$$

返回主目录

连续型随机变量商的分布



$$= \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z} f(x, y)\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z,\ y>0} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z,\ y<0} f(x, y)\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{x \le zy,\ y>0} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{x\quad zy,\ y<0} f(x, y)\,dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, y)\,dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

连续型随机变量商的分布

在第一个积分 $\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, y) dx$ 中，作变换 $x = uy$，

则 $dx = ydu$，当 $x = zy$ 时，$u = z$；

当 $x \to -\infty$ 时，注意到 $y > 0$，因而有 $u \to -\infty$；

$$\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z} f(uy, y) y du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_0^{+\infty} y f(uy, y) dy \quad = \int_{-\infty}^{z} du \int_0^{+\infty} |y| f(uy, y) dy$$

返回主目录

同理，在第二个积分 $\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, \ y)dx$ 中，作变换 $x = uy$，

则 $dx = ydu$，当 $x = zy$ 时，$u = z$；

当 $x \to +\infty$ 时，注意到 $y < 0$，因而有 $u \to -\infty$；

$$\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, \ y)dx = \int_{-\infty}^{0} dy \int_{z}^{-\infty} f(uy, \ y)ydu$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} (-y) f(uy, \ y)dy \quad = \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} |y| f(uy, \ y)dy$$

返回主目录

连续型随机变量商的分布

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} |y| f(uy, \ y) dy + \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} |y| f(uy, \ y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(uy, \ y) dy \right) du$$

所以，由密度函数的定 义有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy, \ y) dy$$

第三章 小　结

1 要理解二维随机变量的分布函数的定义及性质
。
2 要理解二维随机变量的边缘分布以及与联合分布的关系，了解条件分布。
3 掌握二维均匀分布和二维正态分布。
4 要理解随机变量的独立性。
5 要会求二维随机变量的和及多维随机变量的最值分布和函数的分布。

p_{87-89}　21 , 24,26,29,31,35,36 .

返回主目录