第二章 解析函数

§2.1 解析函数的概念

- 1. 复变函数的导数定义
- 2. 解析函数的概念

一．复变函数的导数

(1) 导数定义

定义 设函数 $w=f(z)$ $z\in D$，且 z_0、 $z_0+\Delta z\in D$ ，

如果极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，则称函数

$f(z)$ 在点 z_0 处可导。称此极限值为 $f(z)$ 在 z_0 的导数，

记作 $$f'(z_0)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

如果 $w=f(z)$ 在区域 D 内处处可导，则称 $f(z)$ 在区域 D 内可导。

(1) $\Delta z \to 0$ 是在平面区域上以任意方式趋于零。

(2) $z=x+iy, \Delta z=\Delta x+i\Delta y$, $\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$

例 1 证明：$f(z)=\operatorname{Re} z$在平面上的任何点都不可导.

证明：$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Re}(z+\Delta z)-\operatorname{Re}(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}\Delta z\text{取实数趋于}0\text{时}, \Delta f/\Delta z \to 1;\\ \text{当}\Delta z\text{取纯虚数趋于}0\text{时}, \Delta f/\Delta z \to 0;\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}\text{不存在.}$$

(2) 求导公式与法则

----实函数中求导法则的推广

① 常数的导数 $c'=(a+ib)'=0.$

② $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n 是自然数).

证明 对于复平面上任意一点 z_0，有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+z_0^{n-1})}{z-z_0}=nz_0^{n-1}$$

③ 设函数 $f(z), g(z)$ 均可导，则

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)\quad,$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)},(g(z)\neq 0)$$

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在整个复平面上处处可导；

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面上（除分母为0点外）处处可导.

④ 复合函数的导数 $(f[g(z)])' = f'(w)g'(z)$ ，

其中 $w=g(z)$ 。

⑤ 反函数的导数 $f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$ ，其中：$w=f(z)$

与 $z=\varphi(w)$ 互为单值的反函数，且 $\varphi'(w)\neq 0$ 。

思考题

实函数中, $f(x) = |x|^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导;

复函数中, $f(z) = |z|^2$ 的可导性?

例 2 已知 $f(z)=(z^2+5z)^2-\dfrac{1}{z-1}$，求$f'(z)$

解 $$f'(z)=2(z^2+5z)(2z+5)+\frac{1}{(z-1)^2}$$

例 3 问：函数 $f(z)=x+2yi$ 是否可导？

解 $$\because \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{x+\Delta x+2(y+\Delta y)i-(x+2yi)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\begin{cases}1 & \text{当}\Delta y=0,\Delta x\to 0\text{时}\\ 2 & \text{当}\Delta x=0,\Delta y\to 0\text{时}\end{cases}\quad \therefore \text{不存在!}$$

故函数$f(z)=x+2yi$处处不可导.

例 4 证明 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 只在 $z=0$ 处才可导。

证明

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\operatorname{Re}(z+\Delta z)-z\operatorname{Re}z}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\operatorname{Re}(z+\Delta z)+z\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta z\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=0 & z=0\text{时}\\ \lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\operatorname{Re}(z+\Delta z)+z\dfrac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}\right)\text{不存在！} & z\neq 0\text{时}\end{cases}$$

$$\because \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}0 & \text{当}\Delta y=0,\Delta x\to 0\text{时}\\ 1 & \text{当}\Delta x=0,\Delta y\to 0\text{时}\end{cases}\quad \therefore \text{不存在！}$$

(1) 复变函数在一点处可导，要比实函数在一点处可导要求高得多，也复杂得多，这是因为 $\Delta z \to 0$ 是在平面区域上以任意方式趋于零的原故。

(2) 在高等数学中要举出一个处处连续，但处处不可导的例题是很困难的，但在复变函数中，却轻而易举。

(3) 可导与连续

若 $w=f(z)$ 在点 z_0 处可导 $\overset{\Longrightarrow}{\underset{?}{\Longleftarrow}}$ $w=f(z)$ 点 z_0 处连续

证明：若 $f(z)$ 在 z_0 可导，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

使得当 $0 < |\Delta z| < \delta$，时，有 $\left| \dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$

令 $\rho(\Delta z) = \dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0)$，则 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0,$

由此可得 $f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z,$

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0+\Delta z) = f(z_0)$，所以 $f(z)$ 在 z_0 连续

(4) 复变函数的微分

设函数 $w = f(z)$ z_0 处的导数为$f'(z_0)$，称

在$f'(z_0)\Delta z_0$ 为 $f(z)$ 在z_0 微分（ *differential* ），

记作

$$dw\Big|_{z=z_0} = f'(z_0)\Delta z_0$$

当$f(z) = z$ 时 $dz = \Delta z$,

$$dw\Big|_{z=z_0} = f'(z_0)dz$$

导数也可称为（微商）

$$f'(z_0) = \frac{dw}{dz}\Big|_{z=z_0}$$

二．解析函数的概念

定义 如果函数 $w=f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的某个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 **解析** (*analytic function*)；

如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析，则称 $f(z)$ 在 D 内**解析**，或称 $f(z)$ 是 D 内的**解析函数**（**全纯函数**或**正则函数**）。

如果 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，就称 z_0 是 $f(z)$ 的**奇点**。(*singular point*)

(1) $w=f(z)$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ 在 D 内可导。

(2) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导，未必在 z_0 解析。

例如

(1) $w=z^2$ 在整个复平面处处可导，故是整个复平面上的解析函数；

(2) $w=1/z$ ，除去 $z=0$ 点外，是整个复平面上的解析函数；

(3) $w=z\mathrm{Re}z$ 在整个复平面上处处不解析 (见例 4) 。

定理 1 设 $w=f(z)$ 及 $w=g(z)$ 是区域 D 内的解析函数，

则 $f(z)\pm g(z)$ ，$f(z)g(z)$ 及 $f(z)/g(z)$ $(g(z)\neq 0$ 时 $)$

均是 D 内的解析函数。

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 是整个复平面上的解析函数；

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是复平面上(除分母为0点外)的解析函数.

定理 2 设 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析，$h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，$h=g(z)$ 的函数值集合 $\subset G$，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内处处解析。

§2.2 解析函数的充要条件

- 1. 解析函数的充要条件
- 2. 举例

如果复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在定义域 D 内处处可导，则函数 $w=f(z)$ 在 D 内解析。

问题　如何判断函数的解析性呢？

本节从函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 的可导性，探求函数 $w=f(z)$ 的可导性，从而给出判别函数解析的一个充分必要条件，并给出解析函数的求导方法。

一．解析函数的充要条件

设函数$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$在点

$z = x + iy$可导,则

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

若沿平行于实轴的方式$z+\Delta z \to z(\Delta y=0)$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

若沿平行于虚轴的方式$z+\Delta z \to z(\Delta x = 0)$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}$$

$$=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$\because \ f'(z)$存在

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

记忆

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial u}{\partial x} & - & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}$$

定义 方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$$

称为 Cauchy-Riemann 方程 (简称 C-R 方程).

定理 1 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内有定义，

则 $f(z)$ 在点 $z=x+iy\in D$ 处**可导的充要条件**是

$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann 方程

上述条件满足时，有

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y-iu_y=v_y+iv_x$$

证明 "$\Longrightarrow$"

(由 $f(z)$ 的可导 $\Longrightarrow$ C-R 方程满足上面已证！只须证 函数 $w=f(z)$ 点 z 可导 $\Longrightarrow$ 函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 可微)。

$\because$ 函数 $w=f(z)$ 点 z 可导，则

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

设 $\rho(\Delta z)=\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)$

则 $f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$ (1), 且

$$\lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$$

令：$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$ ，$f'(z)=a+ib$ ，

$\rho(\Delta z)=\rho_1+i\rho_2$ 故（ 1 ）式可写为

$$\Delta u+i\Delta v=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+(\rho_1+i\rho_2)(\Delta x+i\Delta y)$$

$$=(a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y)$$

$$+i(b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y)$$

因此 $\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y$,

$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y$$

$$\because \lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0 \quad \therefore \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_1=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_2=0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y|}{|\Delta z|}=0 \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y|}{|\Delta z|}=0$$

所以 $u(x, y)$ ， $v(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微 .

"$\Leftarrow$"(由函数 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微及满足 C-R 方程 $\Rightarrow f(z)$ 在点 $z=x+iy$ 处可导)

$\because u(x，y)$ ，$v(x，y)$ 在 $(x，y)$ 点可微，即：

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_k = 0, (k = 1,2,3,4)$

$$\therefore f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$$

$$=(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta x+(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})\Delta y+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y$$

由$C-R$方程

$$=\quad(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta z+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y$$

$$\frac{f(z-\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial u}{\partial x}+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

$$\because \left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|\leq 1,\quad \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\leq 1\Rightarrow\frac{\Delta x}{\Delta z}(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\to 0$$

$$\therefore f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

定理 2 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内**解析充要**

条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

满足 Cauchy-Riemann 方程

- 由此可以看出可导函数的实部与虚部有密切的联系．当一个函数可导时，仅由其实部或虚部就可以求出导数来．

- 利用该定理可以判断那些函数是不可导的．

★ 使用时 : i) 判别 $u(x,y)$ ，$v(x,y)$ 偏导数的连续性，

ii) 验证 C-R 条件 .

iii) 求导数 :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

 前面我们常把复变函数看成是两个实函数拼成的，但是求复变函数的导数时要注意，并不是两个实函数分别关于 x,y 求导简单拼凑成的 .

二．举例

例 1 判定下列函数在何处可导，在何处解析：

$$(1) w=\bar{z};\quad (2) f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y);(3) w=|z|^{2}$$

解 (1) 设 $z=x+iy$ $w=x-iy$ $u=x,\ v=-y$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

故 $w=\bar{z}$ 在全平面不可导，不解析。

解:

(2) $\because f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 则 $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

故 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$在全平面可导，解析。

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=f(z)$$

解 (3) 设 $z=x+iy$ $w=x^2+y^2$ $u=x^2+y^2$，$v=0$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow$$

仅在点 $z=0$ 处满足 C-R 条件，故

$w=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，但处处不解析。

例 2　求证函数

$$w = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

在$z = x + iy \neq 0$处解析，并求$\dfrac{dw}{dz}$.

证明　由于在 $z\neq 0$ 处，$u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 都是可微函数

，

且满足 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

故函数 $w=f(z)$ 在 $z\neq 0$ 处解析，其导数为

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{z^2}$$

例 3 若$f'(z)\equiv 0\,,z\in D\Rightarrow f(z)=C\,,z\in D$

证明 $\because\ f'(z)=u_x+iv_x=\frac{1}{i}u_y+v_y\equiv 0$

$\therefore u_x=v_x=u_y=v_y=0$

$\Rightarrow u=C_1\quad v=C_2\quad f(z)=C_1+iC_2=C$(复常数)

例 4　如果 $f(z)=u(x, y)+i\,v(x, y)$ 是一解析函数，且 $f'(z)\neq 0$，那么曲线族 $u(x, y)=C_1$，$v(x, y)=C_2$ 必相正交，这里 C_1、C_2 常数.

解 $\because\ f'(z)=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\neq 0\quad \therefore \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 不全为0

那么在曲线的交点处，i) u_y、v_y 均不为零时，

由隐函数求导法则知曲线族 $u(x, y)=C_1$，$v(x, y)=C_2$ 中任一条曲线的斜率分别为

$k_1=-u_x/u_y$，$k_2=-v_x/v_y$

利用 C-R 方程 $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ 有

$k_1k_2=(-u_x/u_y)(-v_x/v_y)=-1$，即：两族曲线互相正交.

ii) u_y ，v_y 中有一为零时，不妨设 $u_y=0$ ，则 $k_1=\infty$ ，

$k_2=0$（由 C-R 方程）

即：两族曲线在交点处的切线一条是水平的，另

一条是铅直的， 它们仍互相正交。

练习：

若 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$

问常数 a,b,c,d 取何值时, $f(z)$在复平面内处处解析？

$a=2$, $b=-1$, $c=-1$, $d=2$

§2.3　初等函数

- 1. 指数函数
- 2. 三角函数和双曲函数
- 3. 对数函数
- 4. 乘幂与幂函数
- 5. 反三角函数与反双曲函数

主 要 内 容

本节将实变函数的一些常用的初等函数推广到复变函数情形，研究这些初等函数的性质，并说明它的解析性。

一．指数函数

定义 对$z=x+iy$定义复变数 z的指数函数 $\exp z$如下：

$$f(z)=\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)\quad (1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|\exp z|=e^x\\ \operatorname{Arg}(\exp z)=y+2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

它与实变指数函数有类似的性质：

(1) $\forall z\quad \exp z\neq 0$ （事实上, $|\exp z|=e^x\neq 0$）

(2) 当z为实数x时, $f(z)=\exp z=e^x\quad (\because\ y=0)$

(3) $f(z)=\exp z$在复平面上处处解析，且$(\exp z)'=\exp z$.

(见§2的例1(2))

(4)加法定理：$\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$

事实上，设$z_j = x_j + iy_j \quad (j = 1,2)$

左边 $= \exp z_1 \cdot \exp z_2$

$$= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2$$

$$+ i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)]$$

$$= \exp(z_1 + z_2)$$

$=$ 右边

为了方便，我们用以后 e^z 代替 $\exp z$.

由加法定理可推得$f(z)=e^z$的周期性：

$$f(z+T)=f(z),\quad T=2k\pi i, k\in Z$$

事实上，$f(z+2k\pi i)=e^{z+2k\pi i}=e^z e^{2k\pi i}$

$$=e^z(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)=e^z=f(z)$$

$\therefore T=2k\pi i\quad k$为任意整数.

这个性质是实变指数函数所没有的。

又$\because\ e^z e^{-z}=e^{x-x}(\cos(y-y)+i\sin(y-y))=e^0\cdot 1=1$

$$\therefore \boxed{e^{-z}=\frac{1}{e^z}}\quad\Rightarrow\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$$

(1)e^z仅仅是个符号,它的定义为

$e^x(\cos y + i\sin y)$,∴没有幂的意义.

(2)特别当z的实部$x=0$时,就得到

Euler公式: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

例1 求$\mathrm{Im}(e^{zi})$ $e^{-y}\sin x$

例2 求$e^{\frac{1}{4}(1+i\pi)}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1+i)$

例3 解方程$e^z = 1$ $z = 2k\pi i$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

二. 三角函数和双曲函数

由指数函数的定义：

当$x=0$时，$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} &= \cos y - i\sin y \end{aligned}$，从而得到：

$$\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \quad \cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \quad \forall y \in R \quad (2)$$

推广到复变数情形

定义 $$\sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} \quad (3)$$

——称为z的正弦与余弦函数

□正弦与余弦函数的性质

1) $\sin z$ 及 $\cos z$ 是 $T=2\pi$ 周期函数

$$\left[\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}e^{2\pi i}+e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2}\right.$$

$$\left.=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z\right]$$

2) 在复平面上处处解析,且

$$(\sin z)'=\cos z \qquad (\cos z)'=-\sin z$$

$$(\sin z)'=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})'=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z$$

3) $\sin z$是奇函数, $\cos z$是偶函数.

$$\sin(-z)=\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}=-\sin z;\text{同理}\cos(-z)=\cos z$$

4) 由(3)式, Euler公式对一切z成立

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$

思考题

$\sin z, \cos z$作为复变函数,是否与实变函数有类似的结果: $|\sin z|\le 1, |\cos z|\le 1.$

5) 由正弦和余弦函数定义及指数函数的加法定理可推知一些三角公式

$$\begin{cases} \boxed{\begin{aligned}&\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2\\ &\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2\end{aligned}} \\ \sin^2 z+\cos^2 z=1 \end{cases}$$

$$\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy$$

$$\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy$$

由正弦和余弦函数的定义得

$$\begin{cases} \cos iy = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} = chy \\ \sin iy = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = ishy \end{cases} \qquad (4)$$

$$\therefore \begin{cases} \cos(x+iy) = \cos x chy - i \sin x shy \\ \sin(x+iy) = \sin x chy + i \cos x shy \end{cases}$$

其它三角函数的定义 (详见

P34)

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

6) $\sin z$的零点,即方程 $\sin z = 0$的根为 $z = k\pi \ (k \in Z)$

$\cos z$的零点为 $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$

7) 由(4)式知

当$y \to \infty$ $\quad |\sin iy| = \left|\dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2i}\right| = shy \to \infty$

$|\cos iy| = chy \to \infty$

$\therefore$ 在复数范围内$|\cos z| \le 1$, $|\sin z| \le 1$不再成立.

定义 $shz=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}\quad chz=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

—称为双曲正弦和双曲余弦函数

$$(thz=\frac{shz}{chz}\quad cthz=\frac{1}{thz})$$

□双曲正弦和双曲余弦函数的性质

1) shz、chz都是以$2\pi i$为周期的函数

2) chz−−偶函数, shz−−奇函数

3) $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$

$\operatorname{sh} z$和$\operatorname{ch} z$在整个复平面内处处解 析

4)由定义 $\operatorname{sh} iy = i\sin y \quad \operatorname{ch} iy = \cos y$

$$\operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$$

三角函数,双曲函数均是由复指数 函数定义的,且是周期函数，故它的 反函数一定是多值函数.

三．对数函数

(1) 对数的定义

定义 指数函数的反函数称为**对数函数**。即，

把满足$e^w = z(z \neq 0)$的函数$w = f(z)$

称为对数函数，记作$w = Lnz$

令$w = u + iv \quad z = re^{i\theta}$ 那么

$$e^{u+iv} = re^{i\theta} \Rightarrow u = \ln r, \ v = \theta + 2k\pi (k \in Z)$$

$$\therefore \boxed{w = Lnz = \ln r + i(\theta + 2\pi k)} \ (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

或 $$Lnz = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

这说明一个复数$z(z\neq 0)$的对数仍为复数,它的实部是z的模的实自然对数；它的虚部是z的幅角的一般值,即虚部无穷多,其任意两个相异值相差2π的一个整数倍.

即, $w = Lnz$是z的无穷多值函数

当$k=0$时, $Lnz = \boxed{\ln|z| + i\arg z \overset{\text{记作}}{=} \ln z}$ (2)

为Lnz的一单值函数,称为Lnz的主值(主值支)

故 $Lnz = \ln z + i2k\pi \quad (k\in Z)$

例如 当$z=a>0$ Lnz的主值$\ln z=\ln a$

$$Lnz=\ln a+2\pi ik \quad k\in Z$$

当$z=-a(a>0)$ Lnz的主值$\ln z=\ln a+\pi i$

$$Lnz=\ln a+(2k+1)\pi i$$

特别 $a=1$ $\ln(-1)=\ln 1+\pi i=\pi i$

$$Ln(-1)=(2k+1)\pi i$$

1) $w=$ Lnz不仅对正数有意义,对一切非零复数都有意义.(负数也有对数)

2) 指数函数的周期性导致了对数函数的多值性,这与实函数不同.

(2) 对数函数的性质

1) $Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$, $Ln\dfrac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2$

2)连续性 : $\ln z$在除去原点与负实轴外处处连续.

主值 : $\ln z = \ln|z| + i\arg z,$

其中 $\ln|z|$除原点外在其它点均连续;

见 §1-6 例 1

而 $\arg z$在原点与负实轴上都不 连续.

$\therefore$除原点及负实轴外, $\ln z$在复平面内处处连续.

3)解析性：$\ln z$在除去原点与负实轴的平面内解析.

$$\because\ z=e^{\omega}\quad (e^{\omega})'=e^{\omega}\neq 0\ \therefore \frac{d\omega}{dz}=(\ln z)'=\frac{1}{\frac{dz}{d\omega}}=\frac{1}{e^{\omega}}=\frac{1}{z}$$

即 $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$

$\therefore \omega=\ln z$除原点及负实轴外是解 析的.

Lnz的每个分支除了原点和负实轴外均是解析的，

且$(Lnz)'=\dfrac{1}{z}$

例 4 设$e^{z}=2i$, 求 z. $z=\ln 2+\dfrac{\pi}{2}i+2k\pi i \qquad k=0,\pm1,\cdots$

四．乘幂 a^b 与幂函数 z^b

❑ 乘幂

a^b

定义 设a,b为复数,且$a\neq 0$, 定义乘幂$a^b=e^{bLna}$.

实变数情形,$a>0,b$为实数.

$\because\ Lna=\ln a+i2k\pi$ — 多值

$\therefore a^b=e^{bLna}=e^{b(\ln a+i2k\pi)}$ — 一般为多值

①当b为整数

$$a^b=e^{bLna}=e^{b(\ln a+i2k\pi)}=e^{b\ln a}e^{bi2k\pi}$$

$$=e^{b\ln a}(\cos 2k\pi b+i\sin 2k\pi b)=e^{b\ln a}$$

$\therefore b$为整数时,它是单值函数.

②当$b=\dfrac{p}{q}$(p,q为互质的整数,且$q>0$)

$$a^b=e^{\frac{p}{q}(\ln|a|+i\arg a+2k\pi i)}=e^{\frac{p}{q}\ln|a|}e^{\frac{p}{q}i(\arg a+2k\pi)}$$

$$=e^{\frac{p}{q}\ln|a|}[\cos\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)]$$

$$(k=0,1,2,3\cdots,q-1)$$ —q支

③一般而论,a^b具有无穷多支.

(1) 当 $b=n$(正整数) 时，乘幂 a^b 与 a 的 n 次幂意义一致。

$$a^n = e^{nLna} = e^{Lna+Lna+\cdots+Lna}$$

$$= e^{Lna}e^{Lna}\cdots e^{Lna} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n个}$$

(2) 当 $b=1/n$(n 正整数) 时，乘幂 a^b 与 a 的 n 次根意义一致。

$$a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}Lna} = e^{\frac{1}{n}(\ln|a|+i\arg a+2k\pi i)}$$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln|a|}e^{i\frac{\arg a+2k\pi}{n}} \qquad (k=0,1,2\cdots n-1)$$

$$= \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\arg a+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$$

例5 求$1^{\sqrt{2}}$、i^i和$i^{\frac{2}{3}}$的值.

解

$$1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln1}=e^{\sqrt{2}(\ln|1|+2k\pi i)}=e^{2k\pi\sqrt{2}i}$$

$$=\cos(2k\pi\sqrt{2}+i\sin(2k\pi\sqrt{2})$$

$$(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

$$i^i=e^{iLni}=e^{i(\ln|i|+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i)}=e^{-(2k\pi+\frac{\pi}{2})}$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$i^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}Lni}=e^{\frac{2}{3}(\ln|i|+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i)}=e^{i\frac{2}{3}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$$

$$=\cos(\frac{\pi+4k\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi+4k\pi}{3})$$

$$(k=0,1,2)$$

❑ 幂函数 z^b

定义 在乘幂a^b中，取z为复变数，得$w=z^b$，称为**幂函数**。

① 当 $b=n$（正整数）

$w=z^n$ 在整个复平面上是单值解析函数

② $b=\dfrac{1}{n}$（n为正整数）

$$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}Lnz}=e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i\arg z+2k\pi i)}=e^{\frac{1}{n}\ln|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$$

$$=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)$$

$$=\sqrt[n]{z}\quad(k=0,1,2\cdots n-1)$$

$\boxed{z=w^n\text{的反函数}}$

由于Lnz的解析性$\therefore$除原点与负实轴外处处解析.

③一般而论, $w = z^b$ 除去 b 为正整数外，多值函数，

当 b 为无理数或复数时，无穷多值。

$w = z^b$ 除原点与负实轴外处处 解析, 且

$$(z^b)' = bz^{b-1} (\forall \text{单值分支})$$

5. 反三角函数与反双曲函数

详见 P35 ，请同学们自学教材有关内容！

重点：指数函数、对数函数、幂函数 .

作 业

习题 2　**4（2、4、6）、5(1、2）**
6、7、10（2）、18、19
15（1, 2）、17（1），22（1, 2）