第一章：习题课

作业： p_{27-28} 26 , 28, 31 , 32 , 33 .

第一章 小　结

1 阐述了随机试验的特征以及随机事件之间的关系及运算。

2 给出了随机事件的频率及概率的含义和基本性质。

3 给出了古典概率的定义及其计算公式。

4 给出了条件概率的定义及乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式。

5 给出了随机事件独立性的概念，会利用事件独立性进行概率计算。

1 阐述了随机试验的特征以及随机事件之间的关系及运算。要求：理解

1^0 包含关系 $A \subset B$ “A 发生必然导致 B 发生”

2^0 和事件 $A \cup B$ “A ，B 中至少有一发生”

3^0 积事件 $A \cap B = AB$ “A 与 B 同时发生”

4^0 差事件 $A - B$ “A 发生但 B 不发生 ”

5^0 互不相容 $A \cap B = \varnothing$ “A 与 B 不能同时发生”

6^0 对立（互逆）事件 $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = S$

记 $A = \overline{B}$ 或 $B = \overline{A}$

返回主目录

随机事件的运算规律

幂等律：$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

交换律：$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

结合律：
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

分配律：
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

De Morgan 定律：$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}$

特别：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

返回主目录

2 给出了随机事件的频率及概率的含义和基本性质。要求熟练掌握概率的基本性质：

（1）　概率的（公理化）定义

1^0　$0 \le P(A)$；　（非负性）

2^0　$P(S) = 1$；（正则性或正规性）

3^0　若$A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots.$$

（可列可加性）

返回主目录

（2）概率的性质与推广

性质 1　$P(\varnothing)=0$；

性质 2　若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两互不相容事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

（有限可加性）

性质 3　$A \subset B \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$（包含可减性）

$P(B) \quad P(A)$（非降性）

性质 4　$P(A) \leq 1$；

性质 5　$P(\overline{A})=1-P(A)$；（逆事件的概率公式）

性质 6　$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

（加法公式）

返回主目录

重 要 推 广

1) $$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$ （加法公式）

2) $$P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

常用公式

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

返回主目录

等可能概型

3．等可能概型（古典概型）

特点是：

♣ 样本空间的元素只有有限个；　　　（有限性）

♣ 每个基本事件发生的可能性相同。（等可能性）

随机事件的概率：

即：$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}}.$$

返回主目录

4 给出了条件概率的定义及乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式。要求掌握：

（1）条件概率的定义、计算公式：

一、公式法 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ $(P(A)>0)$

二、缩小样本空间法 --------- 适用于古典概型

设事件 A 所含**样本点数为** n_A ，事件 AB 所含**样本点数为** n_{AB} ，**则**

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}$$

返回主目录

（2）乘法公式

1^0 $$P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (P(A)>0)$$

2^0 $$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$
$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

（3）全概率公式

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(AB_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)P(A|B_n)$$

（已知原因，求结果）

返回主目录

（4）Bayes（逆概）公式：

$$P(B_n \mid A) = \frac{P(AB_n)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \mid B_n)P(B_n)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A \mid B_j)P(B_j)}, \quad n = 1,2,\cdots,\infty$$

（已知结果，求原因）

5 给出了随机事件独立性的概念，会利用事件独立性进行概率计算。

（ 1 ）两事件独立的定义

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

（ 2 ）两事件独立性的性质：

1^0 事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件为：$P(B|A)=P(B)$ $\qquad (P(A)>0)$，

2^0 若随机事件 A 与 B 相互独立，则

$\boxed{\overline{A}\text{与}B\text{、}A\text{与}\overline{B}\text{、}\overline{A}\text{与}\overline{B}}$ 也相互独立.

返回主目录

3^0 必然事件 S 与任意随机事件 A 相互独立；

不可能事件 Φ 与任意随机事件 A 相互独立.

注意 1 ：两事件相互独立与互不相容的区别：

"A 与 B 互不相容"，指两事件不能同时发生，即 P（AB）=0。

"A 与 B 相互独立"，指 A 是否发生不影响 B 发生的概率，即 P（AB）=P（A）P（B）或

$$P(B|A)=P(B)\quad (P(A)>0)$$

返回主目录

注意 2 ：设事件 A 与 B 满足 $P(A)P(B)\neq 0$

则互不相容与相互独立不能同时成立。

即：若事件 A 与 B 相互独立，则 $AB\neq\Phi$ ；

若 $AB=\Phi$ ，则事件 A 与 B 不相互独立。

（3）三个事件的独立性

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

返回主目录

2、三个事件的独立性

设 A、 B、 C 是三个随机事件，如果

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称 A、 B、 C 是相互独立的随机事件．

返回主目录

注意 3 ：

在三个事件独立性的定义中，四个等式是缺一不可的．即：前三个等式的成立不能推出第四等式的成立；反之，最后一个等式的成立也推不出前三个等式的成立．

注意 54　三个事件相互独立的性质：

若 A ，B ，C 是相互独立的三个事件，则

A与$B\cup C$，A与BC，A与$B-C$，A与$\overline{B\cup C}$，

A与$\overline{BC}$，$A,\overline{B},\overline{C}$，$A,B,\overline{C}$，$\overline{A},\overline{B},\overline{C},\cdots$**相互独立**

返回主目录

（４）n个事件的相互独立性

设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 为n个随机事件，如果下列等式成立：

$$\begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) & (1\le i<j\le n) \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) & (1\le i<j<k\le n) \\ \quad\cdots\cdots \\ P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m}) & (1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n) \\ \quad\cdots\cdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \end{cases}$$

则称 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 这n个随机事件相互独立．

返回主目录

例 1 已知 A、B、C 是三个两两独立的事件，且

$$ABC=\phi,\quad P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16},$$

$$P(A)=P(B)=P(C),\quad \text{则}\quad P(A)=?$$

解

$$\frac{9}{16}=P(A\cup B\cup C)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$

$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=3P(A)-3[P(A)]^2$$

解之得　$P(A)=\frac{3}{4}$ or $P(A)=\frac{1}{4}$，

又　$P(A)<P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，

故　$P(A)=\frac{1}{4}$.

例 2 已知 A、B 是两事件，且 $P(A)=0.4$，

$P(AB)=0.2$，　$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，

则　$P(A\cup B)=?$

解　由　$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$,

知　$P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})$,

从而　$\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$,

$$P(AB)[1-P(B)]=P(B)P(A\overline{B})$$

$$P(AB)=P(B)P(AB)+P(B)P(A\overline{B})$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$ （ A、 B独立）

故
$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.5,$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$$

返回主目录

例 3 $(p_{26}\ \ 24.)$

全概率公式和贝叶斯公式

有两箱同种类的零件。第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。求：

$$P(A_1)=?$$

（1）第一次取到的零件是一等品的概率；

（2）第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率；$P(A_2|A_1)=?$

（3）已知第一次取到的零件是一等品，求它是第一箱的零件的概率：$P(B_1|A_1)=?$

返回主目录

例 3（续）

解：设 A_i 表示“第 i 次取到一等品” (i=1,2)，

B_i (i= 1,2) 表示“取到的是第 i 箱中的产品”，

1）由全概率公式，有

$$P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2),$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{50}+\frac{18}{30}\right)=\frac{2}{5};$$

例 3（续）

2）由全概率公式和条件概率公式，有

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_2|B_1)P(B_1)+P(A_1A_2|B_2)P(B_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{P_{10}^2}{P_{50}^2}+\frac{P_{18}^2}{P_{30}^2}\right)=\frac{1}{10}\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)=0.4856$$

3）由贝叶斯公式，有

$$P(B_1|A_1)=\frac{P(A_1|B_1)P(B_1)}{P(A_1)}=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4}$$

返回主目录

例 4

三门火炮向同一目标射击，设三门火炮击中目标的概率分别为 0.3 ，0.6 ，0.8 ．若有一门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为 0.2 ；若两门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为 0.6 ；若三门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为 0.9 ．试求目标被摧毁的概率．

解：设：B ={ 目标被摧毁 }

$$A_i=\left\{\text{有}i\text{门火炮击中目标}\right\}\qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$C_i=\left\{\text{第}i\text{门火炮击中目标}\right\}\qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

返回主目录

由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

而 $P(A_1)=P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1C_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1\overline{C}_2C_3)$

$$=P(C_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(C_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)$$

$$=0.3\times0.4\times0.2+0.7\times0.6\times0.2+0.7\times0.4\times0.8$$

$$=0.332$$

返回主目录

$$P(A_2) = P(C_1C_2\overline{C}_3) + P(C_1\overline{C}_2C_3) + P(\overline{C}_1C_2C_3)$$

$$= P(C_1)P(C_2)P(\overline{C}_3) + P(C_1)P(\overline{C}_2)P(C_3) + P(\overline{C}_1)P(C_2)P(C_3)$$

$$= 0.3 \times 0.6 \times 0.2 + 0.3 \times 0.4 \times 0.8 + 0.7 \times 0.6 \times 0.8$$

$$= 0.468$$

$$P(A_3) = P(C_1C_2C_3) = P(C_1)P(C_2)P(C_3)$$

$$= 0.3 \times 0.6 \times 0.8 \quad = 0.144$$

所以

$$P(B) = 0.332 \times 0.2 + 0.468 \times 0.6 + 0.144 \times 0.9$$

$$= 0.4768$$

例 5（配对问题）------ 加法公式的应用问题

某人写了 n 封不同的信，欲寄往 n 个不同的地址。现将这 n 封信随机的插入 n 只具有不同通信地址的信封里，求至少有一封信插对信封的概率。

解　设：A_i ="第 i 封信插对信封" $(i=1,2,\cdots,n)$

B="至少有一封信插对信封"

则
$$B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$
$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

返回主目录

例 5（续）

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}\qquad (1\le i<j\le n)$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=\frac{(n-k)!}{n!}\qquad (1\le i_1<\cdots<i_k\le n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)=C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{2!}$$

返回主目录

例 5（续）

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$P(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

返回主目录

例 6（可列可加性的应用问题）

设有甲、乙两名射手轮流独立地向同一目标射击，甲的命中率为 p_1，乙的命中率为 p_2，甲先射，谁先命中谁得胜。试分别求甲获胜的概率和乙获胜的概率。

解：设 B_i =“轮流射击，第 i 次射中，前 $i-1$ 次未中”

则 $B_{2k+1}\ (k=1,2,\cdots)$ 表示“甲在第 $2k+1$ 次才射中”

且 $B_1, B_3, B_5, \cdots$ 两两互不相容。

设 B =“甲获胜”，则 $B = B_1 + B_3 + B_5 + \cdots$

设 A_i =“第 i 次射中”，则 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 相互独立，

且 $B_{2k+1} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{2k}}A_{2k+1}$

返回主目录

例 6（续）

$$P(B_{2k+1}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{2k})P(A_{2k+1})$$

$$= (1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1$$

$$P(B) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B_{2k+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1$$

$$= \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

返回主目录

例7 (P25.9)从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

解：设A=“所取的 4只鞋子中至少有两只配成一双”，

$\overline{A}$=“所取的 4只鞋子中无配对的”

法1：（排列法）

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}$$

法2：（组合法）

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4\cdot2^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\sum_{k=0}^{4}C_5^k\cdot C_{5-k}^{4-k}}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

法 3 ：正面计算

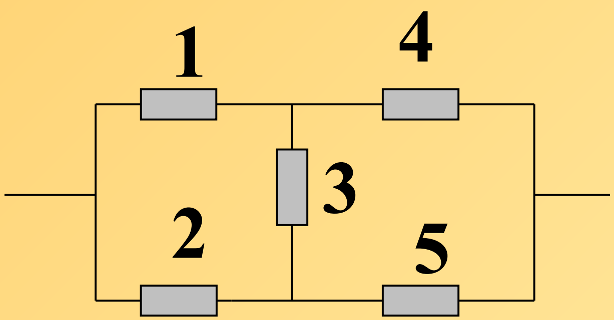
设A_i =“所取的 4只鞋子中恰好有 i双”， $i=1,2$

$$P(A_1)=\frac{C_5^1[C_8^2-C_4^1]}{C_{10}^4}=\frac{C_5^1\cdot C_4^2\cdot 2^2}{C_{10}^4}$$

$$P(A_2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^4}$$

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{13}{21}$$

P28. 34(2) 设有 5 个独立工作的元件 1 ， 2 ， 3 ， 4 ， 5 ，它们的可靠性均为 p ，连接方式为桥式系统，求此系统的可靠性。



解：设 $A_i =$ “第 i 只元件正常工作”

$i = 1,2,\cdots,5.$ $A =$ “系统正常工作” .

由全概率公式可得

$$P(A) = P(A \mid A_3)P(A_3) + P(A \mid \overline{A}_3)P(\overline{A}_3)$$

因为

$$P(A \mid A_3) = [1-(1-p)^2]^2 = (2p-p^2)^2$$

$$P(A \mid \overline{A}_3) = 1-(1-p^2)^2 = 2p^2 - p^4$$

所以

$$P(A) = (2p-p^2)^2 p + (2p^2 - p^4)(1-p)$$

补 2 已知 A、B 是两个事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.4$，求 $P(A|A\cup B)$ $\left(\text{答}:\dfrac{2}{3}\right)$

解 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(B)+P(A-B)=0.4+0.5=0.9$$

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$

返回主目录

补 3 已知A、B 独立, $P(\overline{A}\,\overline{B})=\dfrac{1}{9}$, $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$. 则 $P(A)=?$ (答: $\dfrac{2}{3}$)

解: $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\dfrac{1}{9}$,

$\because P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)\ \therefore P(A)P(\overline{B})=P(\overline{A})P(B)$

$\therefore P(A)-P(A)P(B)=P(B)-P(A)P(B)$.

$\therefore P(A)=P(B)$. $\quad \therefore P(\overline{A})=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{2}{3}$

返回主目录

补 4 已知 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{1}{3}$, A、 B 独立，

求 $P(\overline{A}\cup\overline{B}\mid A\cup B)$　　　　(答 :$\frac{5}{6}$)

解： $$P(\overline{A}\cup\overline{B}\mid A\cup B)=\frac{P((\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup B))}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(\overline{A}B\cup\overline{B}A)}{P(A\cup B)}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{12}$$

返回主目录

补 4

$$P(\overline{A}B\cup\overline{B}A)=P(\overline{A}B)+P(\overline{B}A)$$

$$=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})$$

$$=(1-\frac{1}{4})\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times(1-\frac{1}{3})=\frac{5}{12}$$

$$P(\overline{A}\cup\overline{B}\mid A\cup B)=\frac{P((\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup B))}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(\overline{A}B\cup\overline{B}A)}{P(A\cup B)}=\frac{5}{6}$$

补 5 已知 A、B 是两个事件，且 $P(A|B)=0.3,$

$P(B|A)=0.4, P(\overline{A}|\overline{B})=0.7,$ 求 $P(A\cup B)$

(答 :0.58)

解： $P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=1-0.7=0.3,$

$P(A|\overline{B})=P(A|B)$ 　所以 A、B 独立。

$P(A)=P(A|B)=0.3,$ 　$P(B)=P(B|A)=0.4$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=0.3+0.4-0.3\times0.4=0.58$$

返回主目录

补 6乒乓球盒中有 15 只球，其中 9 只是没有用过的新球。第一次比赛时从中随机的取出 3 只球，用毕放回盒中，第二次比赛时再从中随机的取出 3 只球。

（1）求第二次取出的 3 只球都是新球的概率；

（2）若第二次取出的 3 只球发现都是没有用过的新球，求第一次取出的 3 只球都是新球的概率；

答： $(1)\ \dfrac{528}{5915}$;　$(2)\ \dfrac{1}{11}$.

返回主目录

补 6 解： 设 A 表示“第二次取到的 3 只球全是新球”

B_i (i= 0,1,2,3) 表示“第一次取到 i 只新球”，

1 ）由全概率公式，有

$$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+$$

$$+P(B_2)P(A|B_2)++P(B_3)P(A|B_3)$$

$$P(B_i)=\frac{C_9^iC_6^{3-i}}{C_{15}^3}\quad(i=0,1,2,3)$$

$$P(A|B_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{15}^3}\quad(i=0,1,2,3)$$

返回主目录

补 6 解：

1）由全概率公式，有

$$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+$$
$$+P(B_2)P(A|B_2)++P(B_3)P(A|B_3)$$

$$=\frac{C_9^0C_6^3}{C_{15}^3}\frac{C_9^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3}\frac{C_8^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3}\frac{C_7^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\frac{C_6^3}{C_{15}^3}$$

$$=\frac{528}{5915}\approx 0.089$$

补 6 解：2 ）由贝叶斯公式，

有

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{1}{11}$$

返回主目录

补 7　第一口袋装有 3 个白球、3 个红球。从中取 3 个球，放入原本空的第二个袋子中，再从第二个袋子中取 1 个球，发现是白球，求第一次取出 3 个球全是白球的概率。 (答：$\frac{1}{10}$)

解：A=“从第二个袋子中取 1 个球是白球”

B_i = “第一次取出的 3 个球中有 i 白球”（ i =0,1,2,3)

由全概率公式，有

$$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+$$
$$+P(B_2)P(A|B_2)++P(B_3)P(A|B_3)$$

返回主目录

补7解：

$$P(A)=\frac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}\frac{0}{3}+\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}\frac{1}{3}+\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}\frac{2}{3}+\frac{C_3^3}{C_6^3}\frac{3}{3}=\frac{10}{20}$$

由**贝叶斯公式**，有

$$P(B_3\mid A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=\frac{1}{10}$$

补 8　假设有三张完全相同的卡片，第一张两面全是红色，第二张两面全是黑色，第三张一面是红色一面是黑色。将这三张卡片随机地选一张随机地抛在桌面上，发现这张卡片朝上的一面是红色，求在此条件下它的另一面是黑色的概率。　答：$\frac{1}{3}$.

解： 方法一、贝叶斯公式

设 A 表示"红面朝上"，

$B_i\ (i=0,1,2,3)$ 表示"随机地选一张为第 i 张卡片"

补 8 解：$P(B_i)=\frac{1}{3}\quad(i=1,2,3)$，

$$P(A|B_1)=1,\quad P(A|B_2)=0,\quad P(A|B_3)=\frac{1}{2},$$

$$P(B_3\mid A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}(1+0+\frac{1}{2})}=\frac{1}{3}.$$