2.4 前束范式

前束范式是谓词公式的标准型，存在但不唯一。

2.4.1 前束范式的定义

❖ 定义 2.19 一个公式，如果量词均在全式的开头且它们的辖域都延伸到整个公式的末尾，则该公式称为前束范式。

❖ 前束范式的一般形式为 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nA$ 。其中， A 是一个没有量词的谓词公式， $Q_i(1\le i\le n)$ 或为∀或为∃， x_i 是个体变元。

❖ 没有量词的谓词公式称为平凡的前束范式。

例 2.10 判断以下各式是否前束范式：

1 ）$\forall x\exists yA(x, y)$

2 ）$\forall x\exists y\forall z(A(x)\rightarrow B(y, z))$

3 ） $A(x, y)$

4 ）$\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

解： 1 ），2 ），3 ）都是前束范式；但 4 ）不是前束范式。

2.4.1 前束范式的定义

- **定理 2.7** 对于任一谓词公式，都存在着与它逻辑等价的前束范式。
- 谓词公式转换为与之逻辑等价的前束范式的步骤一般如下：
  - 第一步：消去冗余量词，且通过换名或代入规则使不同的个体变元不同名。
  - 第二步：利用逻辑等价公式

    $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

    将公式中的联结词$\leftrightarrow$去掉。
  - 第三步：利用逻辑等价式

    $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

    $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ ；$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

    $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ ；$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$

    进行否定深入，将$\neg$号深入到命题变元和原子谓词公式的前面。
  - 第四步：利用量词辖域的扩张与收缩逻辑等价式和量词分配逻辑等价式将所有的量词移到公式的最前面。

2.4.1 前束范式的定义

例 2.11 求下面公式的前束范式

1 ）$\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

解： 1 ）解法 1

$\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\forall xP(x)\rightarrow\exists yQ(y)$

$\Leftrightarrow\exists x(P(x)\rightarrow\exists yQ(y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y))$

解法 2

$\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)\vee\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))$

2 ）$\neg\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)$

2 ）$\neg\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xP(x)\wedge\exists yQ(y)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)\wedge\exists yQ(y)$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg P(x)\wedge Q(y))$

2.4.1 前束范式的定义

例 2.12 将公式$\forall x\forall y(\exists z(P(x, z)\wedge P(y, z))\to\exists vQ(x, y, v))$化成前束范式。

解 $\forall x\forall y(\exists z(P(x, z)\wedge P(y, z))\to\exists vQ(x, y, v))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z((P(x, z)\wedge P(y, z))\to\exists vQ(x, y, v))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z\exists v((P(x, z)\wedge P(y, z))\to Q(x, y, v)\quad)$

例 2.13 将公式$\forall x(\forall yP(x)\vee\forall zQ(y, z))\to\neg\forall yR(x, y))$化成前束范式。

解：$\forall x((\forall yP(x)\vee\forall zQ(y, z))\to\neg\forall yR(x, y))$

$\Leftrightarrow\forall x((P(x)\vee\forall zQ(y, z))\to\neg\forall yR(x, y))$

$\Leftrightarrow\forall x((P(x)\vee\forall zQ(y, z))\to\neg\forall vR(x, v))$

$\Leftrightarrow\forall x(\forall z(P(x)\vee Q(y, z))\to\neg\forall vR(x, v))$

$\Leftrightarrow\forall x(\forall z(P(x)\vee Q(y, z))\to\exists v\neg R(x, v))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists z((P(x)\vee Q(y, z))\to\exists v\neg R(x, v))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists z\exists v((P(x)\vee Q(y, z))\to\neg R(x, v))$

2.4.1 前束范式的定义

- 当个体变元较多时，首先辨识清楚哪些是自由变元，哪些是约束变元，同时确认量词的辖域以区分不同的个体变元。
- 一个公式的前束范式的各指导变元应是各不相同的，原公式中自由出现的个体变元在前束范式中还应是自由出现的。
- 若发现前束范式中有相同的指导变元，或原来自由出现的个体变元变成约束出现的了，说明换名规则或代入规则用的有错误或用的次数不够，应仔细进行检查，以便纠正。

2.4.2 前束合取范式和前束析取范式

❖ 定义 2.20 一个前束范式如果具有如下形式： $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n((A_{11}\vee A_{12}\vee\ldots\vee A_{1k_1})\wedge(A_{21}\vee A_{22}\vee\ldots\vee A_{2k_2})\wedge\ldots(A_{m1}\vee A_{m2}\vee\ldots\vee A_{mkm}))$

其中 $Q_i(1\leq i\leq n)$ 或为∀或为∃， x_i 是个体变元， $A_{ij}(1\leq j\leq km)$ 是原子谓词公式或其否定，则该前束范式称为前束合取范式。

❖ 例 2.14 $\forall x\exists z\exists v((\neg P(x)\vee\neg R(x, v))\wedge(\neg Q(y, z)\vee\neg R(x, v)))$ 是一个前束合取范式。

❖ 定理 2.8 每一个谓词公式都有与之逻辑等价的前束合取范式。

2.4.2 前束合取范式和前束析取范式

- **定义 2.21** 一个前束范式如果具有如下形式：$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n((A_{11}\wedge A_{12}\wedge\ldots\wedge A_{1k_1})\vee(A_{21}\wedge A_{22}\wedge\ldots\wedge A_{2k_2})\vee\ldots(A_{m1}\wedge A_{m2}\wedge\ldots\wedge A_{mkm}))$，其中 $Q_i(1\le i\le n)$ 或为∀或为∃，x_i 是个体变元，$A_{ij}(1\le j\le km)$ 是原子谓词公式或其否定，则该前束范式称为**前束析取范式**。
- **例 2.15** $\exists x\exists v\exists z((P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee(P(v)\wedge Q(y,z)))$ 是一个前束析取范式。
- **定理 2.9** 每一个谓词公式都有与之逻辑等价的前束析取范式。

小结

- **每个谓词公式都可存在与之逻辑等价的前束范式、前束合取范式和前束析取范式，但并不是唯一的。**
- **求公式前束范式的思维形式注记图：**

$$\text{公式} \xrightarrow[\text{代入}]{\text{换名}} \text{不同变元不同名} \xrightarrow{\text{等价律}} \text{消}\leftrightarrow \xrightarrow[\text{量词否定逻辑等价式}]{\text{双重否定律 德摩根律}} \text{否定深入} \xrightarrow[\text{量词分配逻辑等价式}]{\text{量词辖域的扩张与收缩}} \text{前束范式}$$

作业

- 2.4 补充习题