第三节 留数在定积分计算上的应用

- 一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分
- 二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分
- 三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\alpha ix}\mathrm{d}x(\alpha>0)$ 的积分
- 四、被积函数在实轴上有孤立奇点的积分

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的实积分

其中 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 是三角有理函数

基本思路：把定积分化归为一个复变函数沿某条封闭路线的复积分．

两个工作：1) 积分区域的转化

2) 被积函数的转化

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$

令 $z = e^{i\theta} \longrightarrow \mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \longrightarrow \mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$,

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z^2+1}{2z},$$

当 θ 历经变化 $[0, 2\pi]$时,

z 沿单位圆周 $|z| = 1$的正方向绕行一周.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} \boxed{f(z)}\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

z 的有理函数，若在单位圆周上分母不为零，则满足留数定理的条件.

包围在单位圆周内的诸孤立奇点.

注：一般地

对形如 $I=\int_0^{\alpha} R(\cos\frac{2\pi\theta}{\alpha},\sin\frac{2\pi\theta}{\alpha})d\theta$ 的积分

令 $\varphi=\frac{2\pi\theta}{\alpha}$ $\quad d\varphi=\frac{2\pi d\theta}{\alpha}$

原积分转化为

$$I=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi$$

例 1　计算实积分$\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\sin^2 x}(a>0)$.

解：$\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{d2x}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$　　令 $2x=t$,

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\frac{1-\cos t}{2}}=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{1-(z^2+1)/2z}{2}}\cdot\frac{dz}{iz}$

$=2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2(2a+1)z+1}$.

极点为 ：$z_1=2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1}$（在单位圆内）

$z_2=2a+1+\sqrt{(2a+1)^2-1}$（在单位圆外）

所以 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}$

$$=2\pi i\cdot 2i\operatorname{Res}[f(z),(2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1})].$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.$$

例 2　计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta\ (0<p<1)$的值.

解　由于 $0<p<1$,

$$1-2p\cos\theta+p^2=(1-p)^2+2p(1-\cos\theta)$$

在 $0\le\theta\le 2\pi$ 内不为零　　故积分有意义.

由于 $\cos 2\theta=\frac{1}{2}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})=\frac{1}{2}(z^2+z^{-2})$,

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z.$$

被积函数的三个极点 $z=0,p,\dfrac{1}{p}$,

$z=0,p,$在圆周$|z|=1$内

且$z=0$为二级极点 ,$z=p$为一级极点

所以在圆周$|z|=1$上被积函数无奇点，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(z-pz^2-p+p^2z)4z^3-(1+z^4)(1-2pz+p^2)}{2i(z-pz^2-p+p^2z)^2}$$

$$=-\frac{1+p^2}{2ip^2},$$

$$\text{Res}[f(z), p] = \lim_{z \to p}\left[(z-p)\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$$

$$= \frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)},$$

因此

$$I = 2\pi i\left[-\frac{1+p^2}{2ip^2} + \frac{1+p^2}{2ip^2(1-p^2)}\right] = \frac{2\pi p^2}{1-p^2}.$$

二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分

若有理函数 $R(x)$ 的分母至少比分子高两次，

并且分母在实轴上无孤立奇点 .

一般设 $R(z)=\dfrac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}, m-n \quad 2$

分析　可先讨论 $\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x,$

最后令 $R\to\infty$ 即可 .

$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

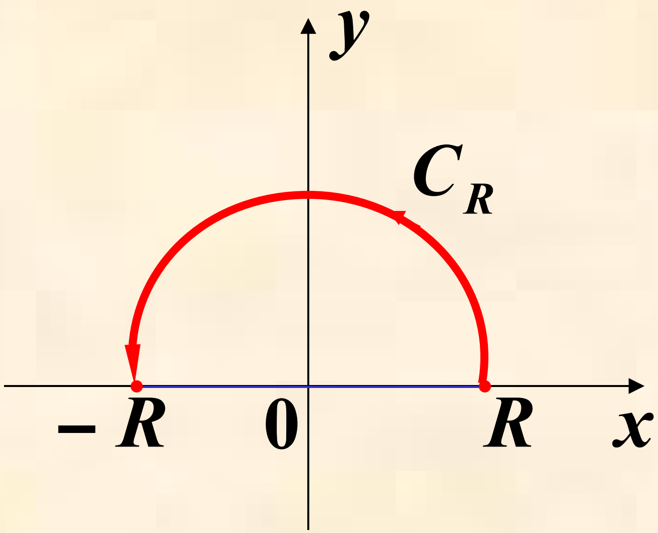
1. 被积函数的转化：可取 $f(z)=R(z)$.

(当 z 在实轴上的区间内变动时，$R(z)=R(x)$)

2. 积分区域的转化：

取一条连接区间两端的按段光滑曲线，使与区间一起构成一条封闭曲线，并使 $R(z)$ 在其内部除有限孤立奇点外处处解析 .(此法称为“围道积分法”)

取 R 适当大，使 $R(z)$ 所有的在上半平面内的极点
z_k 都包在这积分路线内.



这里可补线 C_R

(以原点为中心，R 为半径
的在上半平面的半圆周)

C_R 与 $[-R,R]$ 一起构成封闭曲线 C，$R(z)$ 在 C 及其
内部(除去有限孤立奇点)处处解析.

根据留数定理得 ：

$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k],$$

$$|R(z)| = \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

$$\leq \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

当 $|z|$充分大时，总可使

$$|a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}| < \frac{1}{10}, \quad |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}| < \frac{1}{10},$$

$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k]$$

因为 $m-n \quad 2$

所以 $$|R(z)| \le \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1+|a_1 z^{-1}+\cdots+a_n z^{-n}|}{1-|b_1 z^{-1}+\cdots+b_m z^{-m}|} < \frac{2}{|z|^2}$$

$$\left|\int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_{C_R} |R(z)|\mathrm{d}s \le \frac{2}{R^2}\pi R = \frac{2\pi}{R},$$

$$R \to +\infty : \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z \to 0 ; \int_{-R}^{R} R(z)\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{\infty} R(z)\mathrm{d}z,$$

所以 $$\int_{-\infty}^{\infty} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k]$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[R(z), z_k]}$$

z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内所有的孤立奇点。

$R(x)$ 是偶函数时，有

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = \pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[R(z), z_k]}$$

例 4　计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}\qquad (a>0,b>0,a\neq b)$$

解　$R(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}$

在上半平面有二级极点 $z=ai$，一级极点 $z=bi$.

$$\mathrm{Res}[R(z),ai]$$

$$=\left[\frac{1}{(z+ai)^2(z^2+b^2)}\right]'\Bigg|_{z=ai}=\frac{1}{2bi(a^2-b^2)^2},$$

$$\operatorname{Res}[R(z),bi]=\left.\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z+bi)}\right|_{z=bi}=\frac{b^2-3a^2}{4a^3i(b^2-a^2)^2},$$

所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$

$$=2\pi i\{\operatorname{Res}[R(z),bi]+\operatorname{Res}[R(z),ai]\}$$

$$=2\pi i\left[\frac{b^2-3a^2}{4a^3i(b^2-a^2)^2}+\frac{1}{2bi(b^2-a^2)^2}\right]$$

$$=\frac{(2a+b)\pi}{2a^3b(a+b)^2}.$$

例 5 计算积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

解 $R(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$ 是偶函数，且在上半平面只有一个二级极点 $z=i$, 其留数为

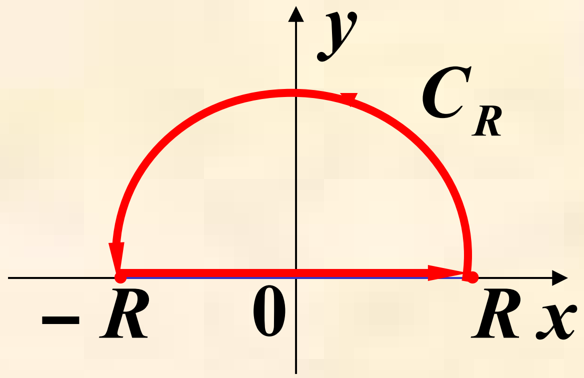
$$\operatorname{Res}[R(z),i]=\lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\frac{1}{(1+z^2)^2}\right]'=-\frac{i}{4}$$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\pi i\cdot\operatorname{Res}[R(z),i]=\pi i\cdot(-\frac{i}{4})=\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\int_0^{\infty}R(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\mathrm{d}x=\boldsymbol{\pi}i\sum_{k=1}^{n}\mathbf{Res}[R(z),z_k]}$$

三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\alpha i x}dx \quad (\alpha > 0)$ 的积分

积分存在要求：$R(x)$ 是 x 的有理函数而分母的次数至少比分子的次数高一次，并且 $R(z)$ 在实轴上无孤立奇点.



同前一型：补 C_R 线 C_R 与 $[-R,R]$ 一起构成封闭曲线 C，使 $R(z)$ 所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这积分路线内 .

对于充分大的 $|z|$，且 $m-n \quad 1$ 时，有 $|R(z)| < \dfrac{2}{|z|}$

$$\left|\int_{C_R} R(z)e^{\alpha i z}dz\right| \le \int_{C_R} |R(z)|\left|e^{\alpha i z}\right| ds < \frac{2}{R}\int_{C_R}\left|e^{\alpha i(x+iy)}\right| ds$$

令 $x = R\cos\theta, y = R\sin\theta$

则 $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$

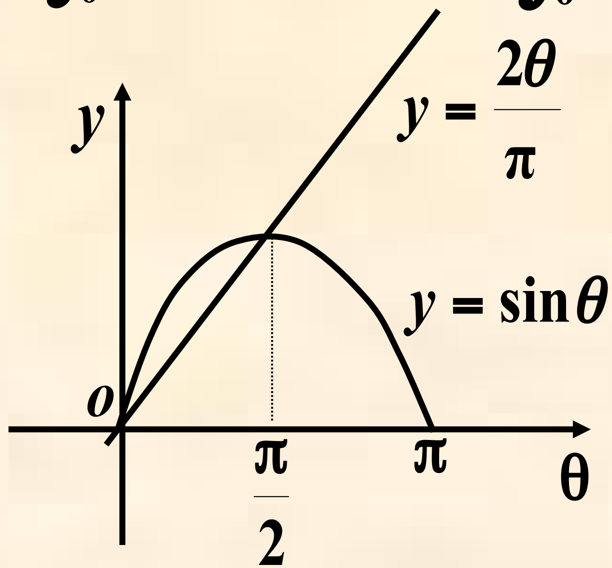
$$0 < \theta < \pi$$

$$ds = |dz| = \left|d(Re^{i\theta})\right|$$

$$= R\,d\theta.$$

$$\frac{2}{R}\int_{C_R}\left|e^{\alpha i(x+iy)}\right| ds = \frac{2}{R}\int_{C_R}\left|e^{\alpha x i}\right|\left|e^{-\alpha y}\right| ds = 2\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \le 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}\,\mathrm{d}\theta,$$



$$= \frac{2\pi}{aR}(1 - e^{-aR}).$$

$R \to +\infty$

$$0$$

从而 $$\left|\int_{C_R} R(z)e^{aiz}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{2\pi}{aR}(1 - e^{-aR}) \to 0.$$

$$\int_{C_R} R(z)e^{aiz}\,\mathrm{d}z \to 0\,.$$

由留数定理：

$$\int_{-R}^{R} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)e^{aiz}\mathrm{d}z = 2\pi\, i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

$R \to +\infty$：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi\, i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

$$e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\, i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k].$$

例 6　计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$，　$(m>0,a>0)$.

解　$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}\mathrm{d}x\right]$$

又　$$f(z)=\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imx},$$

在上半平面只有二级极点 $z=ai$,

$$\operatorname{Res}(f(z),ai)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]_{z=ai}=\frac{m}{4a}e^{-ma},$$

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}\mathrm{d}x=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz},ai\right]$$

所以 $$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[2\pi i\operatorname{Res}(f(z),ai)\right]$$

$$=\frac{m\pi}{4a}e^{-ma}.$$

注意 以上两型积分中被积函数中的 $R(x)$ 在实轴上无孤立奇点.

四、被积函数在实轴上有孤立奇点的积分

例 7　计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$

分析　$\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数，所以

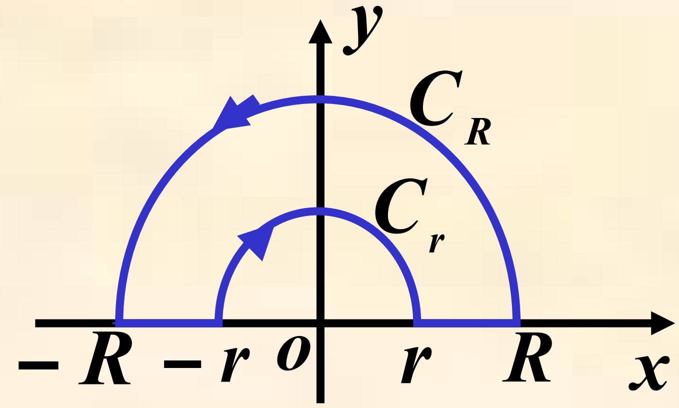
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x . \longrightarrow \frac{\sin z}{z}$$

$[-\infty,+\infty] \rightarrow$ 某封闭曲线

因 $\frac{\sin z}{z}$ 在实轴上有一级极点 $z=0$，应使封闭路线不经过奇点，所以可取图示路线：

解 封闭曲线

$C: C_R + [-R, -r] + C_r + [r, R]$



由柯西-古萨定理得:

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x = 0,$$

令 $x = -t$ $\quad \displaystyle\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x = \int_{R}^{r} \frac{e^{-it}}{t} \mathrm{d}t = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} \mathrm{d}x,$

由 $\displaystyle \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$

$$知\ 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0,$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z\right|\le\int_{C_R}\frac{\left|e^{iz}\right|}{|z|}\mathrm{d}s=\frac{1}{R}\int_{C_R}e^{-y}\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R(2\theta/\pi)}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{R}(1-e^{-R}),$$

于是 $R\to+\infty \Rightarrow \oint_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z\to 0$ 当r充分小时

因为 $\dfrac{e^{iz}}{z}=\dfrac{1}{z}+i-\dfrac{z}{2!}+\cdots+\dfrac{i^n z^{n-1}}{n!}+\cdots \;=\dfrac{1}{z}+g(z),$

$$g(z)=i-\frac{z}{2!}-\frac{iz^2}{3!}+\cdots+\frac{i^n z^{n-1}}{n!}+\cdots$$

当 $|z|$ 充分小时，总有 $|g(z)|\leq 2,$

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z=\int_{C_r}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_r}g(z)\mathrm{d}z,$$

$$\int_{C_r}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_{\pi}^{0}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=-i\pi,$$

因为 $\left|\int_{C_r} g(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_{C_r} |g(z)|\mathrm{d}s \le 2\int_{C_r}\mathrm{d}s = 2\pi r,$

$r \to 0 \Rightarrow \int_{C_r} g(z)\mathrm{d}z \to 0,$ 即 $\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = -\pi i + 0 = -\pi i,$

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0,$$

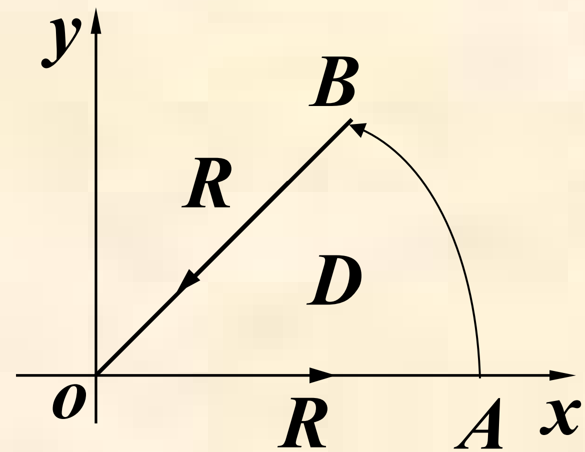
$$\longrightarrow 2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi i,$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$

例 7　证明 $\int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

证　设函数 $e^{iz^2} \xrightarrow{\text{当 } z = x \text{ 时}} e^{iz^2} = \cos x^2 + \sin x^2$

如图路径，$\oint_C e^{ir^2} \mathrm{d}z = 0$,



$$\oint_{OA} e^{ix^2} \mathrm{d}z + \oint_{\overset{\frown}{AB}} e^{iz^2} \mathrm{d}z + \oint_{BO} e^{iz^2} \mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_0^R e^{ix^2} \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{i2\theta}} Rie^{i\theta} \mathrm{d}\theta + \int_R^0 e^{ir^2 e^{\frac{\pi}{2}i}} e^{\frac{\pi}{4}i} \mathrm{d}r = 0,$$

或 $\int_0^R (\cos x^2 + i\sin x^2)\mathrm{d}x$

$$= e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^R e^{-r^2}\mathrm{d}r - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

当 $R \to \infty$ 时

$$e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty e^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\sin 2\theta} R\mathrm{d}\theta$$

$$\le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}). \xrightarrow{R \to \infty} 0$$

$$\int_0^{\infty}(\cos x^2 + i\sin x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

令两端实部与虚部分别相等，得

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

菲涅耳 (fresnel) 积分

四、小结与思考

本课我们应用“围道积分法”计算了三类实积分，熟练掌握应用留数计算定积分是本章的难点．

第七周周一作业

1、书面作业

习题五　9(1, 5, 6)

2、课外作业

（ 1 ）、完成练习册前四章，周三抽查；

（ 2 ）、预习第八章第一节之“傅里叶积分”