3.4 定点乘法运算

常规的乘法运算方法(定点小数):

1) 笔—纸乘法方法;

2) 原码乘法;

3) 带符号位运算的补码乘法;

4) 用组合逻辑线路构成的阵列乘法器。

3.4.1 原码一位乘法

- 用原码实现乘法运算：

  两操作数用原码表示，运算结果是乘积的原码。

  符号位与数值位是分开计算的。

- 原码乘法运算分为二步：

  第 1 步：计算乘积的符号位；

  乘积的符号为相乘二数符号的异或值。

  第 2 步：计算乘积的数值位；

  乘积的数值部分为两数的数值部分（绝对值）之积。

用数学表达式描述原码乘法运算

设被乘数和乘数用**定点小数**表示：

$[X]_{原}=x_0x_1\ldots\ldots x_n$ ，$[Y]_{原}=y_0y_1\ldots\ldots y_n$ ，

其中 x_0 、 y_0 分别为它们的符号位，

若 $[X*Y]_{原}=z_0z_1\ldots\ldots z_{2n}$ ，其中 z_0 为结果的符号位，

则有，

$$z_0 = x_0 \oplus y_0$$

$$0.z_1\ldots\ldots z_{2n} = (0.x_1\ldots\ldots x_n) * (0.y_1\ldots\ldots y_n)$$

笔—纸乘法方法

例 1. X=0.1011,Y=0.1101 ， X*Y 的笔—纸乘法过程：

$$
\begin{array}{rl}
 0.1011 & \text{被乘数 } X=0.x_1x_2x_3x_4=0.1011 \\
\times\ 0.1101 & \text{乘数 } Y=0.y_1y_2y_3y_4=0.1101 \\
\hline
1011 & X*y_4*2^{-4} \\
0000 & X*y_3*2^{-3} \\
1011 & X*y_2*2^{-2} \\
1011 & X*y_1*2^{-1} \\
\hline
0.10001111 &
\end{array}
$$

$$X*Y=X*\sum_{i=1}^{4} y_i*2^{-i}=\sum_{i=1}^{4}(X*y_i*2^{-i})=0.10001111$$

X*Y 的笔—纸乘法过程中，计算两个正数的乘法的特点：

① 用乘数 Y 的每一位 y_i 依次去乘以被乘数 X，得 $X*y_i$，i=4,3,2,1。若 $y_i=0$，$X*y_i=0$。若 $y_i=1$，$X*y_i=X$。

② 把①中求得的各项结果 $X*y_i$ 在空间上向左错位排列，即逐次左移，可以表示为 $X*y_i*2^{-i}$。

③ 对②中求得的结果求和，$\sum_{i=1}^{4}(X*y_i*2^{-i})$，这也就是两个正数的乘积。

适合定点机的形式？

$$
\begin{array}{r l}
 & 0.1\,1\,0\,1 \qquad x \\
\times & 0.1\,0\,1\,1 \qquad y \\
\hline
 & 0.0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1 \\
 & 0.0\,0\,0\,1\,1\,0\,1 \\
 & 0.0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
+ & 0.0\,1\,1\,0\,1 \\
\hline
 & 0.1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1
\end{array}
$$

机器内部：小数点位置固定，小数点对齐。

计算机中实现正数的乘法

- 类似笔—纸乘法方法。
- 但为了适应机器硬件（如加法器、寄存器）和提高效率而有些改进措施。

机器与人们习惯的算法不同之处：

(1) 机器通常只有 n 位长，两个 n 位数相乘， 乘积可能为 2n 位。

(2) 只有两个操作数相加的加法器，难以胜任将 n 位积一次相加起来的运算。

计算机中实现正数的乘法就是笔—纸乘法方法。

为适合两个操作数相加的加法器，而采取的改进措施：

① 没等到全部计算后一次求和：每次求得一个 $X*y_i$, 就将其与前面所得的结果累加，得到 P_i, 称为部分积。
减少了保存每次相乘结果 $X*y_i$ 的开销。

② 每次求得 $X*y_i$ 后，不是将它左移与前次部分积 P_i 相加，而是将部分积 P_i 右移一位与 $X*y_i$ 相加。

加法运算始终对部分积中的高 n 位进行；因此，只需用 n 位的加法器就可实现二个 n 位数的相乘。

③ 对乘数中“1”的位执行加法和右移运算，对“0”的位只执行右移运算，而不执行加法运算。可以节省部分积的生成时间。

部分积迭代法的数学表达式推导

已知两正小数 X 和 Y ， $Y=0.y_1y_2\ldots\ldots y_n$ ，则：$X*Y=X*(0.y_1y_2\ldots\ldots y_n)$

$$=X*y_n*2^{-n}+X*y_{n-1}*2^{-(n-1)}+\ldots\ldots+X*y_2*2^{-2}+X*y_1*2^{-1}$$

$$=2^{-1}(2^{-1}(2^{-1}\ldots\ldots 2^{-1}(2^{-1}(0+X*y_n)+X*y_{n-1})+\ldots\ldots+X*y_2)+X*y_1)$$

上述乘法运算可以归结为循环地计算下列算式：

初始化： $P_0=0$ ，

$P_1 = 2^{-1}(P_0 + X*y_n)$

$P_2 = 2^{-1}(P_1 + X*y_{n-1})$

……

$P_n = 2^{-1}(P_{n-1} + X*y_1)$

$X*Y = P_n$

$P_{i+1} = 2^{-1}(P_i + X*y_{n-i})$,

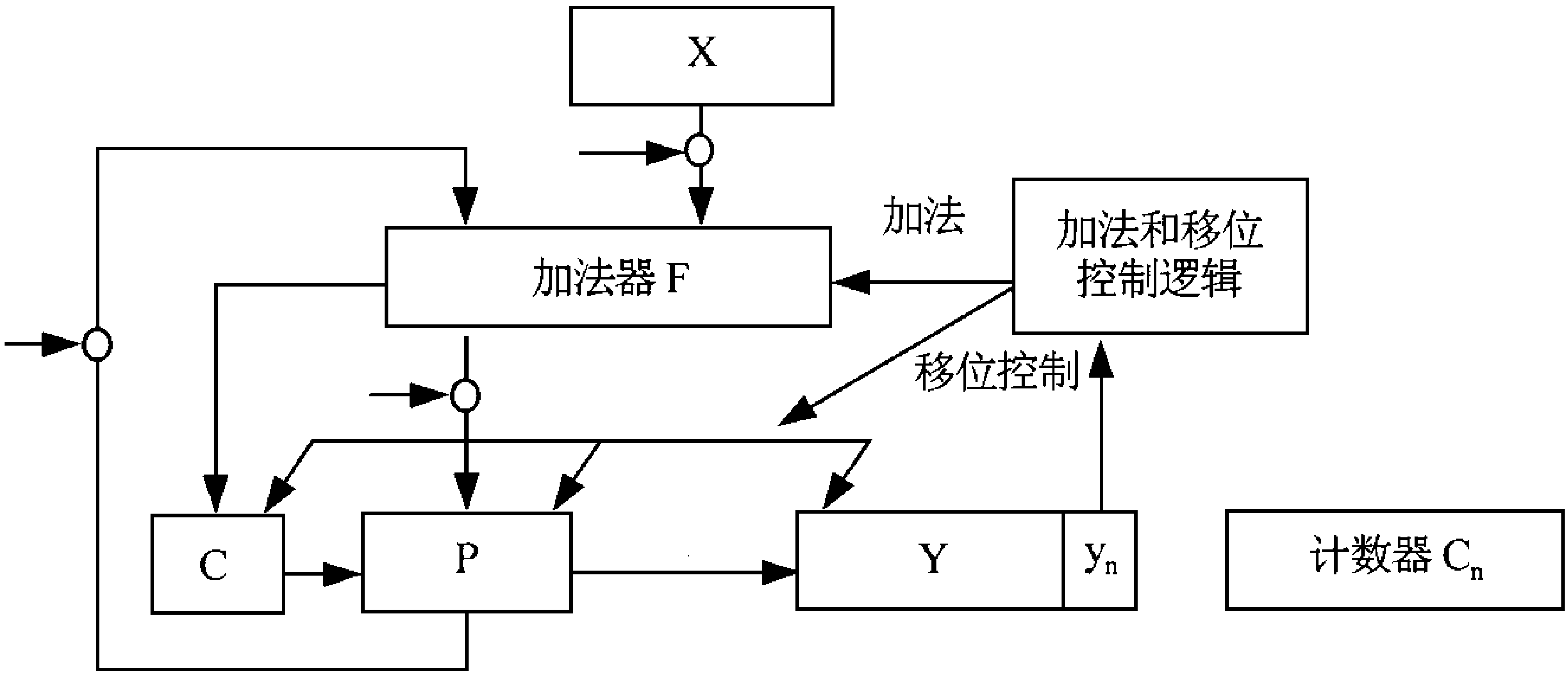
$i=0,1,2, \ldots\ldots, n-1$

迭代过程可以归结为：

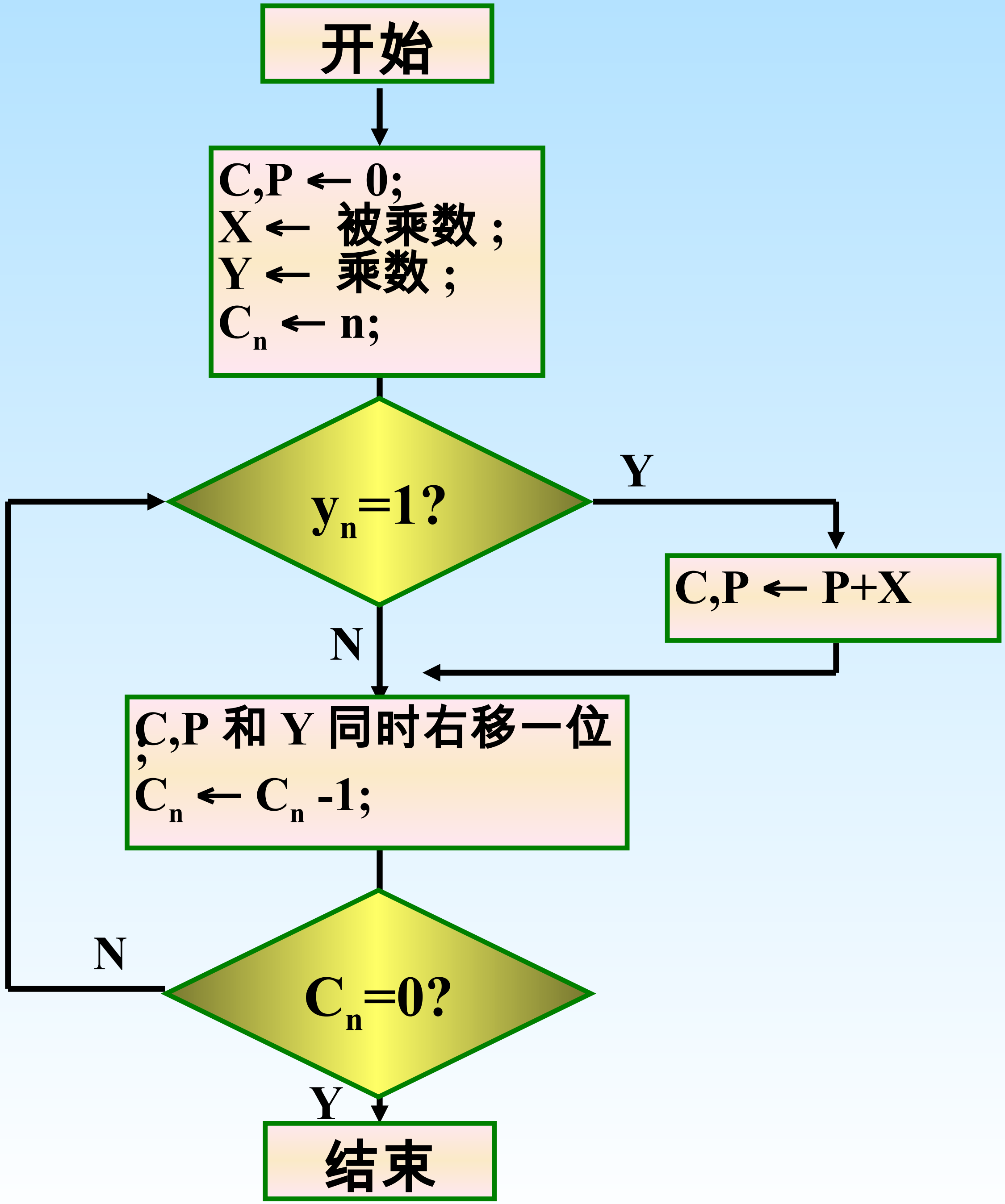
- 若 y_{n-i} 的值为“1”，将上一步迭代的部分积 P_i 与 X 相加，再右移一位，产生本次的迭代部分积 P_{i+1}。
- 若 y_{n-i} 的值为“0”，将上一步迭代的部分积 P_i 直接右移一位，产生本次的迭代部分积 P_{i+1}。
- 整个迭代过程以乘数最低位 y_n 和 $P_0=0$ 开始，经过 n 次“判断——加法——右移”循环直到求出 P_n 为止。
- P_n 就为乘法结果。

实现二个定点小数乘法的逻辑电路框图：

迭代公式： $P_{i+1} = 2^{-1}(P_i + X^*y_{n-i})$



两个定点小数的乘法操作流程



例 1 ．已知 $[X]_{原}=01101$，$[Y]_{原}=01011$，

若 $[X*Y]_{原}=z_0z_1\ldots\ldots z_8$

则 $z_0=0\oplus0=0$

$z_1\ldots\ldots z_8=1101*1011$ ，

计算采用上述乘法流程，实现的具体过程：

C	P	Y	说明
0	0000	1011	开始，设 $P_0=0$
	+1101		$y_4=1$ ， +X
0	1101		C,P 和 Y 同时右移一位
0	0110	1 101	得 P_1

0	0110	1101	得 P_1
	+1101		$y_3=1$ ，+X
1	0011		C,P 和 Y 同时右移一位
0	1001	1110	得 P_2
			$y_2=0$ ，不作加法
			C,P 和 Y 同时右移一位
0	0100	1111	得 P_3
	+1101		$y_1=1$ ，+X
1	0001		C,P 和 Y 同时右移一位
0	1000	1111	得 P_4

$z_1 \ldots\ldots z_8 = 10001111$

$[X*Y]_{原} = z_0 z_1 \ldots\ldots z_8 = 010001111$

3.4.2 原码二位乘法

原码二位乘法的思想：

- 为提高乘法的速度，可以对乘数的每两位取值情况进行判断，一步求出对应于两位的部分积。
- 采用原码二位乘法，只需增加少量的逻辑线路，就可以将乘法的速度提高一倍。

在乘法中，乘数的每两位有 4 种可能的组合，每种组合对应于以下操作：

00 ———— $P_{i+1}=2^{-2}P_i$

01 ———— $P_{i+1}=2^{-2}(P_i+X)$

10 ———— $P_{i+1}=2^{-2}(P_i+2X)$

11 ———— $P_{i+1}=2^{-2}(P_i+3X)$

实现 +3X 有两种方法：

方法 1 分 +X 再 +2X 两次来进行，速度较低。

方法 2 $P_{i+1}=2^{-2}(P_i+3X)=2^{-2}(P_i-X+4X)=2^{-2}(P_i-X)+X$。

以 4X-X 来代替 3X 运算，在本次运算中只执行 -X，而 +X 则归并到下一拍执行。

触发器 T ：记录是否欠下 +X ，若是，则 1→T 。

控制乘法操作：用 y_{i-1} 、 y_i 和 T 三位。

原码两位乘法运算规则

用 y_{i-1} 、 y_i 和 T 三位控制乘法操作：

y_{i-1}	y_i	T	操作		迭代公式
0	0	0		$0 \rightarrow T$	$2^{-2}(P_i)$
0	0	1	+X	$0 \rightarrow T$	$2^{-2}(P_i+X)$
0	1	0	+X	$0 \rightarrow T$	$2^{-2}(P_i+X)$
0	1	1	+2X	$0 \rightarrow T$	$2^{-2}(P_i+2X)$
1	0	0	+2X	$0 \rightarrow T$	$2^{-2}(P_i+2X)$
1	0	1	-X	$1 \rightarrow T$	$2^{-2}(P_i-X)$
1	1	0	-X	$1 \rightarrow T$	$2^{-2}(P_i-X)$
1	1	1		$1 \rightarrow T$	$2^{-2}(P_i)$

原码两位乘法运算过程举例

已知 $[X]_{原}=0111001$, $[Y]_{原}=0100111$,

$[|X|]_{补}=0111001$ ， $[-|X|]_{补}=1000111$ ；

若 $[X*Y]_{原}=z_0z_1\ldots\ldots z_{12}$

则 $z_0=0\oplus0=0$

$z_1\ldots\ldots z_{12}=111001*100111$ 具体过程：

P		Y	T	说明
000	000000	100111	0	开始，$P_0=0$ ，T=0
+111	000111			$y_5y_6T=110$ ，-X ,T=1
111	000111			P 和 Y 同时右移 2 位

111	000111			P 和 Y 同时右移 2 位
111	110001	11 1001	1	得 P_1
+001	110010			$y_3y_4T=011$ ， $+2X$,T=0
001	100011			P 和 Y 同时右移 2 位
000	011000	1111 10	0	得 P_2
+001	110010			$y_1y_2T=100$ ， +2X ,T=0
010	001010			P 和 Y 同时右移 2 位
000	100010	101111	0	得 P_3

$z_1 \ldots\ldots z_{12}=100010101111$

因此 $[X*Y]_{原}=0100010101111$