第二章：习题课

1 引进了随机变量的概念，要求会用随机变量表示随机事件。

2 给出了离散型随机变量及其分布率的定义、性质，要求：

(1) 会求离散型随机变量的分布率；

（2）已知分布率，会求分布函数以及事件的概率；

（3）已知分布函数，会求分布率；

（4）会确定分布率中的常数；

（5）掌握常用的离散型随机变量分布：两点分布、二项分布、泊松分布及其概率背景。

返回主目录

3、 要理解随机变量的分布函数的定义及性质。

（1） 二维随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

（2） 分布函数的基本性质：

$F(x+0) = F(x)$, 即 $F(x)$是右连续的 .

$$F(-\infty) = 0; \qquad F(+\infty) = 1.$$

（3）用分布函数计算某些事件的概率

对于任意的实数 $x_1, x_2\ (x_1 \le x_2)$ ，有：

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\}$$

$$= F(x_2) - F(x_1).$$

返回主目录

4 给出了连续型随机变量及概率密度的定义、性质，要求：

（1）掌握概率密度与分布函数之间的关系及其运算；
（2）已知概率密度，会求事件的概率；
（3）会确定概率密度中的常数；
（4）掌握常用的连续型随机变量分布：均匀分布、指数分布和正态分布。

5 会求随机变量的简单函数的分布。

返回主目录

例 1　求离散型随机变量的分布率：

一台设备由三大部件组成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10 , 0.20 , 0.30 . 假设各部件的状态相互独立，求同时需要调整的部件数 X 的概率分布。

解：X 的可能取值为 0 ，1 ，2 ，3 。

设 A_i 表示“第 i 个部件需要调整” (i=1,2,3

则 A_1, A_2, A_3 相互独立。

$$P\{X=0\}=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

返回主目录

例 1（续）

$$P(\overline{A_1})=0.9,\ P(\overline{A_2})=0.8,\ P(\overline{A_3})=0.7$$

$$P\{X=0\}=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=0.9\times0.8\times0.7=0.504$$

$$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3$$

$$=0.398$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)$$

$$=0.092$$

$$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$$

返回主目录

例 2 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\frac{x^2}{2}} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

试求:(1)系数 A,B；(2) X 的密度函数 .

解 :(1) 由分布函数的性质

$$F(+\infty)=1, F(0+0)=F(0)=0$$

有 $\begin{cases} A=1 \\ A+B=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=1 \\ B=-1, \end{cases}$

返回主目录

例 2（续）

$$\therefore \quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(2) 设 X 的密度函数为 $f(x)$，则

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

返回主目录

例 3　　对同一目标进行射击，设每次射击的命中率均为 0.23，问至少需进行多少次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95？

解：设需进行 n 次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95．

进行 n 次射击，可看成是一 n 重 Bernoulli 试验

令：$A=\{$射击一次命中目标$\}$，则 $P(A)=0.23$

设　X={n 次射击中的命中次数}则　$X \sim b(n, 0.23)$

$B=\{X\quad 1\}=\{$ n 次射击至少命中一次目标 $\}$

返回主目录

例 3（续）

则有 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-P\{X=0\}=1-0.77^{n}$

由题意，得 $P(B)=1-0.77^{n} \quad 0.95$

所以，有

$$0.77^{n}\le 0.05$$

取对数，得 $n\ln 0.77\le \ln 0.05$

所以，有 $n \quad \dfrac{\ln 0.05}{\ln 0.77}=11.46$

即至少需进行 12 次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于 0.95 .

返回主目录

例 4

某病的自然痊愈率为 0.25，某医生为检验某种新药是否有效，他事先制定了一个决策规则：把这药给 10 个病人服用，如果这 10 病人中至少有 4 个人痊愈，则认为新药有效；反之，则认为新药无效．求：

(1) 新药有效，并且把痊愈率提高到 0.35，但通过试验却被否定的概率．

(2) 新药完全无效，但通过试验却被判为有效的概率．

返回主目录

例 4（续）

解：给 10 个病人服药可看作是一 10 重 Bernoulli 验．

令：$A=\{$某病人痊愈$\}$，X="10 个病人中痊愈的人数"

$P(A)=p,$ 则 $X\sim B(10,\ p)$，

(1) 若新药有效，则 $p=0.35,$ $X\sim B(10,\ 0.35)$，

此时若否定新药，只有在试验中不到 4 人痊愈．

因此 $P\{$否定新药$\}=P\{X<4\}$

$$=\sum_{i=0}^{3}C_{10}^{i}\times 0.35^{i}\times 0.65^{10-i}$$

$$=0.5138$$

返回主目录

例 4（续）

(2) 由于新药无效，则 $P(A)=0.25,\ X\sim B(10，0.25)$，

此时若肯定新药，只有在试验中至少有 4 人痊愈．因此

$$P\{\text{肯定新药}\}=P\{X\quad 4\}=\sum_{i=4}^{10}C_{10}^{i}\times 0.25^{i}\times 0.75^{10-i}$$

$$=1-\sum_{i=0}^{3}C_{10}^{i}\times 0.25^{i}\times 0.75^{10-i}$$

$$=0.2241$$

说　明

- 在例 4 的第一问中，该医生把有用的药给否定了，这种错误在统计学中称为第I类错误（弃真错误），犯这类错误的概率称为I类风险；
- 在例 10 的第二问中，该医生把无用的药给肯定了，这种错误在统计学中称为第II类错误（取伪错误），犯这类错误的概率称为II类风险；

返回主目录

例 5

设一个人在一年内的感冒次数服从参数$\lambda=5$的 $Poisson$分布，现有一种预防感冒的药，它对30%的人来讲，可将上述参数λ降为$\lambda=1$(疗效显著)；对另45%的人来讲，可将参数λ降为$\lambda=4$(疗效一般)；而对其余25%的人来讲，则是无效的．现某人服用此药一年，在这一年中，他得了3次感冒，试求此药对他“疗效显著”的概率．

例 5（续）

解：设 A={ 此人在一年中得 3 次感冒 }

$B_1 = \{$该药疗效显著$\}$　　$B_2 = \{$该药疗效一般$\}$

$B_3 = \{$该药无效$\}$　　**则由 Bayes 公式，得**

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$= \frac{0.30 \times \frac{1^3}{3!} e^{-1}}{0.30 \times \frac{1^3}{3!} e^{-1} + 0.45 \times \frac{4^3}{3!} e^{-4} + 0.25 \times \frac{5^3}{3!} e^{-5}}$$

$$= 0.1301$$

返回主目录

例 6

设一昆虫产卵的个数X服从参数λ 的$Poisson$分布，而每个卵能孵化成虫的 概率为p, 且各卵的孵化是相互独立的，试求这昆虫的下一代的个数 Y的概率分布。

解 :Y 的可能取值为 0 ，1 ，2 ，3, ...

$A =$"昆虫的下一代有k只"

$B_i =$"一昆虫产i个卵"　$(i = 0,1,\cdots)$

$$P(B_i) = P\{X = i\} = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

例 6（续）

$$P\left(A\middle|B_i\right)=C_i^k p^k q^{i-k} \quad (i \quad k)$$

由全概率公式，有

$$P\{Y=k\}=P(A)=\sum_{i=k}^{\infty}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}C_i^k p^k q^{i-k}$$

$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k q^{i-k}$$

例 6（续）

$$P\{Y=k\}=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k q^{i-k}$$

$$=\frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^{i-k}}{(i-k)!}q^{i-k} \quad =\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda q)^m}{(m)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda q} \quad =\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$$

$$\therefore \quad Y\sim\pi(\lambda p)$$

例7　设随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$，且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$，则 $P\{X < 0\} = ?$

解：$$P\{X < 0\} = \Phi(\frac{0-2}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{2}{\sigma})$$

$$\because \quad 0.3 = P\{2 < X < 4\} = \Phi(\frac{2}{\sigma}) - \Phi(0)$$

$$= \Phi(\frac{2}{\sigma}) - 0.5$$

$$\therefore \Phi(\frac{2}{\sigma}) = 0.8, \qquad P\{X < 0\} = 1 - 0.8 = 0.2$$

返回主目录

例 8　某企业准备通过招聘考试招收 300 名职工，其中正式工 280 人，临时工 20 人。报考的人数是 1657 人，考试满分是 400 分。考试得知，考试总平均成绩为 166 分，360 分以上的高分考生 31 人，某考生 B 得 256 分，问他能否被录取？能否被聘为正式工？

分析：考试成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 166$, $\sigma = ?$

1^0 由 $P\{X > 360\} = \dfrac{31}{1657}$, 求 σ；

2^0 由 $P\{X > x\} = \dfrac{300}{1657}$, 预测最低分数线 x；

3^0 由 $P\{X > 256\} \times 1657$, 预测 B 的名次。

返回主目录

例 8（续）

$$\mu = 166, \quad \sigma = ?$$

解：1^0 $P\{X > 360\} = 1 - P\{X \le 360\}$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{360-160}{\sigma}\right) = \frac{31}{1657} \approx 0.981$$

$$\therefore \frac{360-160}{\sigma} \approx 2.08, \quad \boxed{\sigma \approx 93}$$

2^0 $P\{X > x\} = 1 - P\{X \le x\}$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{x-160}{\sigma}\right) = \frac{300}{1657}$$

得最低分数线 $x \approx 251$；

B 得 256 分，能被录取。

返回主目录

例 8（续）　$\mu = 166, \quad \sigma \approx 93.$

$3^0 \quad P\{X > 256\} = 1 - \Phi(\frac{256-166}{93})$

$\approx 1 - 0.8315 = 0.1685$

说明有 16.85% 的人在 B 前面。

$1657 \times 16.85\% \approx 280$

故 B 排在第 281 名，能被聘为临时工。

例 9

设随机变量 X 具有概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

试求 Y=sinX 的概率密度.

解：方法一

因为函数 $y=\sin x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上是严格增加的，

它的反函数为 $x=\arcsin y=h_1(y)$.

返回主目录

例 9 函数 $y=\sin x$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上是严格减少的，

它的反函数为 $x=\pi-\arcsin y=h_2(y)$.

且 $x\in(0,\pi)$ 时, $y\in(0,1)$

$$f_Y(y)=f_X(h_1(y))\left|h_1'(y)\right|+f_X(h_2(y))\left|h_2'(y)\right|$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\arcsin y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{2}{\pi^2}(\pi-\arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\quad, y\in(0,1)$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

返回主目录

例 9

Y=sinX 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

返回主目录

例 9（续）

如果 $y \leq 0$，则由于 X 在 $(0,\pi)$ 上取值时，$\sin X > 0$，所以

$$F_Y(y) = P\{\sin X \leq y\} = P(\varnothing) = 0;$$

如果 $0 < y < 1$，则

$$F_Y(y) = P\{\sin X \leq y\}$$

$$= P\{0 \leq X \leq \arcsin y\} + P\{\pi - \arcsin y \leq X \leq \pi\}$$

$$= \int_0^{\arcsin y} \frac{2x}{\pi^2}dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2}dx = \frac{2}{\pi}\arcsin y$$

如果 $y \geq 1$，则由于 X 在 $(0,\pi)$ 上取值时，$\sin X \leq 1$，所以

$$F_Y(y) = P\{\sin X \leq y\} = P(\Omega) = 1;$$

例 9（续）

所以 $Y=\sin X$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin y & 0<y<1\\ 1 & y\quad 1\end{cases};$$

$Y=\sin X$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 10

设 $X \sim \exp(\frac{1}{2})$，试证 $Y = 1 - e^{-2X} \sim U(0,1)$.

证：$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & 0 < x \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

函数 $y = g(x) = 1 - e^{-2x}$ $(x > 0)$ 严格增加且处处可导，它的反函数为 $x = h(y) = -\frac{1}{2}\ln(1 - y)$.

当随机变量 X 在区间 $(0, +\infty)$ 上变化时，$Y = 1 - e^{-2X}$ 在区间 $(0, 1)$ 上变化.

例 10

所以，$\alpha = 0, \beta = 1$

当 $y \in (0,\ 1)$ 时，

$$h(y) = -\frac{1}{2}\ln(1-y).$$

$$f_Y(y) = f_X[h(y)]\,|h'(y)|$$

$$= 2e^{-2[\frac{1}{2}\ln(1-y)]}\left|-\frac{1}{2}\times\frac{-1}{1-y}\right| = 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}$$

$$\therefore \quad Y = 1 - e^{-2X} \sim U(0,1).$$

例 11

设在长度为 t 的时间间隔内某一随机事件 A 发生的次数 X 服从参数为 λt 的 Poisson 分布．试求在相邻两次事件发生之间的等待时间 T 的密度函数

分析：1. $T > 0$;

2、在相邻两次事件发生之间的等待时间 T 内随机事件 A 不发生，即当 t<T 时， X=0 。

设随机变量 T 的分布函数为 $F_T(t)$

则 $F_T(t) = P\{T \le t\}$

例 1
1

设在长度为 t 的时间间隔内某一随机事件 A 发生的次数 x 服从参数为 λt 的 Poisson 分布．试求在相邻两次事件发生之间的等待时间 T 的密度函

解：随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n,\ \cdots)$$

设随机变量 T 的分布函数为 $F_T(t)$ ．

则 当 $t<0$ 时 $F_T(t)=P\{T\le t\}=0$

例 11（续）

当 $t>0$ 时， $F_T(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}$

$=1-P\{$在长度为 t 的时间间隔内随机事件 A 没发生$\}$

$=1-P\{X=0\}=1-e^{-\lambda t}$

即随机变量 T 的分布函数为 $F_T(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 1-e^{-\lambda t} & t>0\end{cases}$

因此 T 的密度函数为 .

$$f_T(t)=F_T'(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ \lambda e^{-\lambda t} & t>0\end{cases}$$

这表明，随机变量 T 服从参数为 $\theta=\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布

.