§2.3 初等函数

- 1. 指数函数
- 2. 三角函数和双曲函数
- 3. 对数函数
- 4. 乘幂与幂函数
- 5. 反三角函数与反双曲函数

主 要 内 容

本节将实变函数的一些常用的初等函数推广到复变函数情形，研究这些初等函数的性质，并说明它的解析性。

一．指数函数

定义 对$z=x+iy$定义复变数 z的指数函数 $\exp z$如下：

$$f(z)=\exp z=e^{x}(\cos y+i\sin y)\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|\exp z|=e^{x}\\ \operatorname{Arg}(\exp z)=y+2k\pi\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

它与实变指数函数有类似的性质：

(1)$\forall z\quad \exp z\neq 0\quad$(事实上,$|\exp z|=e^{x}\neq 0$)

(2)当z为实数x时,$f(z)=\exp z=e^{x}\quad(\because\ y=0)$

(3)$f(z)=\exp z$在复平面上处处解析，且$(\exp z)'=\exp z$.

(见§2的例1(2))

(4)加法定理 : $\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$

事实上,设$z_j = x_j + iy_j \quad (j = 1,2)$

左边 $= \exp z_1 \cdot \exp z_2$

$$= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2$$

$$+ i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)]$$

$$= \exp(z_1 + z_2)$$

$=$ 右边

为了方便，我们用以后 e^z 代替 $\exp z$.

由加法定理可推得$f(z)=e^z$的周期性：

$$f(z+T)=f(z),\quad T=2k\pi i, k\in Z$$

事实上，$f(z+2k\pi i)=e^{z+2k\pi i}=e^z e^{2k\pi i}$

$$=e^z(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)=e^z=f(z)$$

$\therefore T=2k\pi i \quad k$为任意整数.

这个性质是实变指数函数所没有的。

又$\because\ e^z e^{-z}=e^{x-x}(\cos(y-y)+i\sin(y-y))=e^0\cdot 1=1$

$$\therefore \boxed{e^{-z}=\frac{1}{e^z}} \quad \Rightarrow \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$$

(1)e^z仅仅是个符号,它的定义为

$e^x(\cos y + i\sin y)$,∴没有幂的意义.

(2)特别当z的实部$x=0$时,就得到

Euler公式: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

例1 求$\operatorname{Im}(e^{zi})$ $\qquad e^{-y}\sin x$

例2 求$e^{\frac{1}{4}(1+i\pi)}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1+i)$

例3 解方程$e^z=1$ $\qquad z=2k\pi i \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

二. 三角函数和双曲函数

由指数函数的定义：

当$x=0$时，$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} &= \cos y - i\sin y \end{aligned}$，从而得到：

$$\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \quad \cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \quad \forall y \in R \quad (2)$$

推广到复变数情形

定义 $$\sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} \quad (3)$$

——称为z的正弦与余弦函数

❑正弦与余弦函数的性质

1) $\sin z$及$\cos z$是$T=2\pi$ 周期函数

$$[\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}e^{2\pi i}+e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2}$$

$$=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z]$$

2) 在复平面上处处解析,且

$$(\sin z)'=\cos z \qquad (\cos z)'=-\sin z$$

$$(\sin z)'=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})'=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z$$

3) $\sin z$是奇函数, $\cos z$是偶函数.

$\sin(-z)=\dfrac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}=-\sin z$; 同理 $\cos(-z)=\cos z$

4) 由(3)式, Euler公式对一切z成立

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$

思考题

$\sin z, \cos z$作为复变函数,是否与实变函数有类似的结果: $|\sin z|\le 1, |\cos z|\le 1.$

5) 由正弦和余弦函数定义及指数函数的加法定理可推知一些三角公式

$$\begin{cases} \boxed{\begin{aligned} \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \end{aligned}} \\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \end{cases}$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

由正弦和余弦函数的定义得

$$\begin{cases} \cos iy = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} = chy \\ \sin iy = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = ishy \end{cases} \qquad (4)$$

$$\therefore \begin{cases} \cos(x+iy) = \cos x chy - i \sin x shy \\ \sin(x+iy) = \sin x chy + i \cos x shy \end{cases}$$

其它三角函数的定义(详见P34)

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

6) $\sin z$的零点,即方程 $\sin z = 0$的根为 $z = k\pi\ (k \in Z)$

$\cos z$的零点为 $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$

7) 由(4)式知

当 $y \to \infty \quad \left|\sin iy\right| = \left|\dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2i}\right| = shy \to \infty$

$$\left|\cos iy\right| = chy \to \infty$$

$\therefore$ 在复数范围内 $\left|\cos z\right| \le 1,\ \left|\sin z\right| \le 1$ 不再成立.

定义 $$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\qquad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

— 称为双曲正弦和双曲余弦函数

$$\left(\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\qquad \operatorname{cth} z=\frac{1}{\operatorname{th} z}\right)$$

□双曲正弦和双曲余弦函数的性质

1)$\operatorname{sh} z$、$\operatorname{ch} z$都是以$2\pi i$为周期的函数

2)$\operatorname{ch} z$ −−偶函数, $\operatorname{sh} z$ −−奇函数

3) $(chz)' = shz \quad (shz)' = chz$

shz和chz在整个复平面内处处解 析

4)由定义 $shiy = i\sin y \quad chiy = \cos y$

$$ch(x+iy) = chx\cos y + ishx\sin y$$

三角函数,双曲函数均是由复指数 函数定义的,且是周期函数，故它的 反函数一定是多值函数.

三．对数函数

(1) 对数的定义

定义 指数函数的反函数称为**对数函数**。即，

把满足$e^w = z (z \neq 0)$的函数$w = f(z)$

称为对数函数，记作$w = Lnz$

令$w = u + iv \quad z = re^{i\theta}$ 那么

$$e^{u+iv} = re^{i\theta} \Rightarrow u = \ln r,\ v = \theta + 2k\pi (k \in Z)$$

$$\therefore \boxed{w = Lnz = \ln r + i(\theta + 2\pi k)} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

或 $Lnz = \ln|z| + i\text{Arg}z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

这说明一个复数$z(z \neq 0)$的对数仍为复数,它的实部是z的模的实自然对数；它的虚部是z的幅角的一般值,即虚部无穷多,其任意两个相异值相差2π的一个整数倍.

即, $w = Lnz$是z的无穷多值函数

当$k=0$时, $Lnz = \boxed{\ln|z| + i\arg z \overset{\text{记作}}{=} \ln z}$ (2)

为Lnz的一单值函数,称为Lnz的主值(主值支)

故 $Lnz = \ln z + i2k\pi \quad (k \in Z)$

例如 当$z=a>0$　Lnz的主值$\ln z=\ln a$

$$Lnz=\ln a+2\pi ik \quad k\in Z$$

当$z=-a(a>0)$　Lnz的主值$\ln z=\ln a+\pi i$

$$Lnz=\ln a+(2k+1)\pi i$$

特别 $a=1$　$\ln(-1)=\ln 1+\pi i=\pi i$

$$Ln(-1)=(2k+1)\pi i$$

1) $w=\mathrm{Lnz}$不仅对正数有意义,对一切非零复数都有意义.(负数也有对数)

2) 指数函数的周期性导致了对数函数的多值性,这与实函数不同.

(2) 对数函数的性质

1) $Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$, $\quad Ln\dfrac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2$

2)连续性 : $\ln z$在除去原点与负实轴外处处连续.

主值 : $\ln z = \ln|z| + i\arg z,$

其中 $\ln|z|$除原点外在其它点均连续;

见 §1-6 例 1

而 $\arg z$在原点与负实轴上都不 连续.

$\therefore$ 除原点及负实轴外, $\ln z$在复平面内处处连续.

3)解析性：$\ln z$在除去原点与负实轴的平面内解析.

$$\because\ z=e^{\omega}\quad (e^{\omega})'=e^{\omega}\neq 0\ \therefore \frac{d\omega}{dz}=(\ln z)'=\frac{1}{\dfrac{dz}{d\omega}}=\frac{1}{e^{\omega}}=\frac{1}{z}$$

即 $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$

$\therefore \omega=\ln z$除原点及负实轴外是解析的.

Lnz的每个分支除了原点和负实轴外均是解析的，

且$(Lnz)'=\dfrac{1}{z}$

例 4 设$e^{z}=2i$, 求 z. $z=\ln 2+\dfrac{\pi}{2}i+2k\pi i\qquad k=0,\pm1,\cdots$

四．乘幂 a^b 与幂函数 z^b

乘幂

a^b

定义 设a,b为复数,且$a \neq 0$, 定义乘幂$a^b = e^{bLna}$.

实变数情形,$a > 0, b$为实数.

$\because\ Lna = \ln a + i2k\pi$ — 多值

$\therefore\ a^b = e^{bLna} = e^{b(\ln a + i2k\pi)}$ — 一般为多值

①当b为整数

$$a^b = e^{bLna} = e^{b(\ln a + i2k\pi)} = e^{b\ln a} e^{bi2k\pi}$$

$$= e^{b\ln a}(\cos 2k\pi b + i\sin 2k\pi b) = e^{b\ln a}$$

$\therefore b$为整数时,它是单值函数.

②当$b = \dfrac{p}{q}$(p,q为互质的整数,且$q > 0$)

$$a^b = e^{\frac{p}{q}(\ln|a| + i\arg a + 2k\pi i)} = e^{\frac{p}{q}\ln|a|} e^{\frac{p}{q}i(\arg a + 2k\pi)}$$

$$= e^{\frac{p}{q}\ln|a|}[\cos\frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi)]$$

$(k = 0,1,2,3\cdots,q-1)$ —q 支

③一般而论,a^b具有无穷多支.

(1) 当 $b=n$(正整数)时，乘幂 a^b 与 a 的 n 次幂意义一致。

$$a^n = e^{nLna} = e^{Lna+Lna+\cdots+Lna}$$

$$= e^{Lna}e^{Lna}\cdots e^{Lna} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n\text{个}}$$

(2) 当 $b=1/n$(n 正整数)时，乘幂 a^b 与 a 的 n 次根意义一致。

$$a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}Lna} = e^{\frac{1}{n}(\ln|a|+i\arg a+2k\pi i)}$$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln|a|}e^{i\frac{\arg a+2k\pi}{n}} \qquad (k=0,1,2\cdots n-1)$$

$$= \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\arg a+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$$

例5 求$1^{\sqrt{2}}$、i^i和$i^{\frac{2}{3}}$的值.

解

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{\sqrt{2}(\ln|1|+2k\pi i)} = e^{2k\pi\sqrt{2}i}$$

$$= \cos(2k\pi\sqrt{2} + i\sin(2k\pi\sqrt{2})$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

$$i^i = e^{iLni} = e^{i(\ln|i|+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i)} = e^{-(2k\pi+\frac{\pi}{2})}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$i^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}Lni} = e^{\frac{2}{3}(\ln|i|+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i)} = e^{i\frac{2}{3}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$$

$$= \cos(\frac{\pi+4k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi+4k\pi}{3})$$

$$(k = 0, 1, 2)$$

□ 幂函数 z^b

定义 在乘幂a^b中，取z为复变数，得$w=z^b$，称为幂函数。

① 当 $b=n$（正整数）

$w=z^n$ 在整个复平面上是单值解析函数

② $b=\dfrac{1}{n}$（n为正整数）

$$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}Lnz}=e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i\arg z+2k\pi i)}=e^{\frac{1}{n}\ln|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$$

$$=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)$$

$$=\sqrt[n]{z}\quad(k=0,1,2\cdots n-1)$$

$\boxed{z=w^n\text{的反函数}}$

由于Lnz的解析性$\therefore$除原点与负实轴外处处解析.

③一般而论, $w = z^b$ 除去 b 为正整数外，多值函数，

当 b 为无理数或复复数时，无穷多值。

$w = z^b$ 除原点与负实轴外处处解析, 且

$$(z^b)' = bz^{b-1} (\forall \text{单值分支})$$

5. 反三角函数与反双曲函数

详见 P35 ，请同学们自学教材有关内容！

重点：指数函数、对数函数、幂函数 .

作 业

习题 2　**18、19、15（1、2）、17（1）、**

22（1、2）

第三章 复变函数的积分

- §3.1 复变函数积分的概念
- §3.2 柯西 - 古萨基本定理
- §3.3 基本定理的推广
- §3.4 原函数与不定积分
- §3.5 柯西积分公式
- §3.6 解析函数的高阶导数
- §3.7 解析函数与调和函数的关系

§3.1 复变函数积分的概念

- 1. 有向曲线
- 2. 积分的定义
- 3. 积分存在的条件及其计算法
- 4. 积分性质

1. 有向曲线

设 $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

$x'(t)$、$y'(t) \in C[\alpha, \beta]$, 且$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$

$$C: \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \quad (1)$$

$z'(t)$连续且$z'(t) \neq 0$

C -- z平面上的一条光滑曲线.

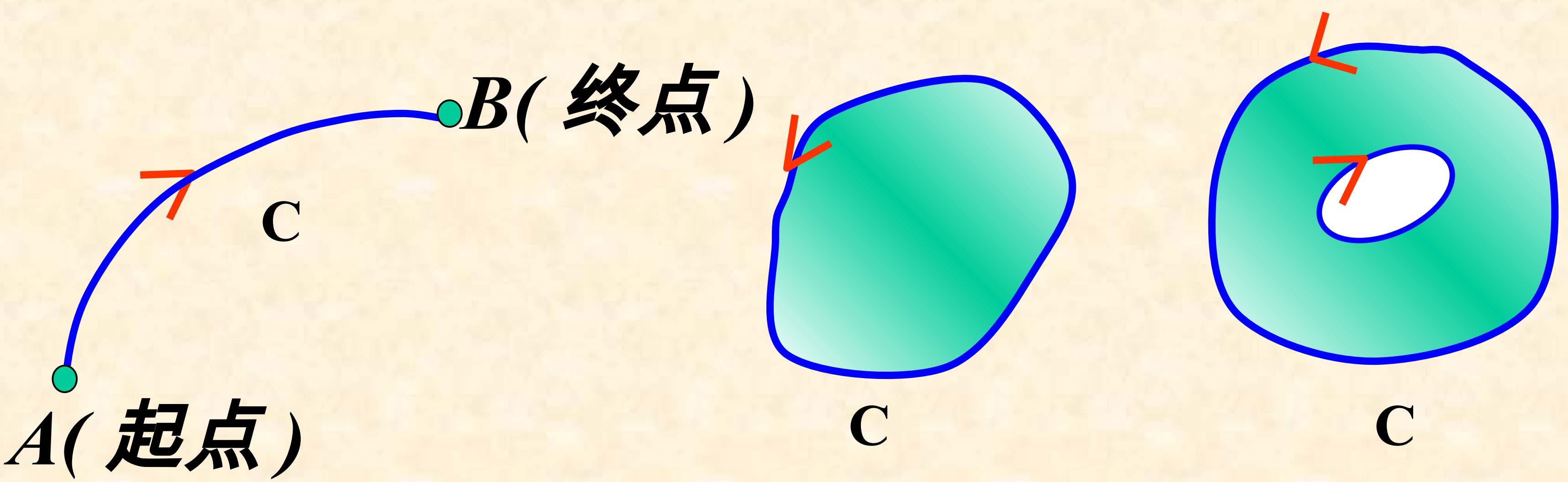
约定: C – 光滑或分段光滑曲线 (因而可求长).

C的方向规定：

开曲线：指定起点a，终点b，若$a \to b$为正，

则$b \to a$为负，记作 C^-；

闭曲线：正方向——观察者顺此方向沿C前进一周，C的内部一直在观察者的左边。

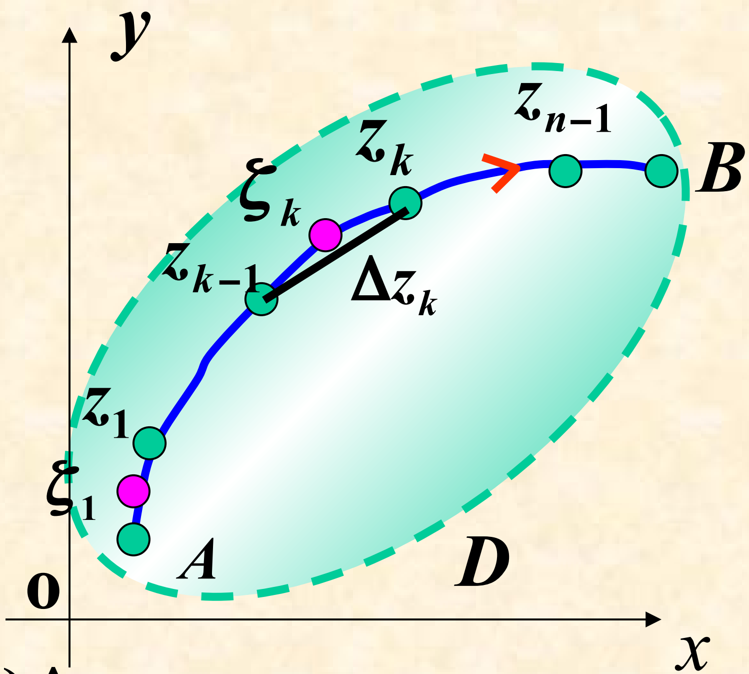


2. 积分的定义

定义 设(1)$w = f(z) \quad z \in D$

(2)C为区域D内点$A \to$点B的一条光滑有向曲线.

(3)将$\overset{\frown}{AB}$任意分划成n个小弧段：$A = z_0, z_1, \cdots, z_n = B$



(4)$\forall \xi_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 作乘积$f(\xi_k)\Delta z_k$

(5)作和式$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，记$\Delta S_k$为$\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度，$\delta = \max_{1 \le k \le n}\{\Delta S_k\}$

若 $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\(n\to\infty)}}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \overset{\exists}{=} I$ (2) 则称I为$f(z)$沿曲线C从$(A\to B)$的积分，记作$\int_C f(z)dz$

$\boxed{\text{无论如何分割}C,\ \zeta_i\text{如何取}}$

$$i.e.,\quad \int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \quad --(3)$$

分割 $\to$ 取乘积 $\to$ 求和 $\to$ 取极限

(1)若闭曲线C 记作$\oint_C f(z)dz$

$$(2)C: t\in[a,b],\ f(z)=u(t),\ \text{则}\int_C f(z)dz=\int_a^b u(t)dt$$

(3)如果$\int_C f(z)dz$存在,一般不能写成$\int_a^b f(z)dz$.

因为$\int_C f(z)dz$不仅与a,b有关,还与曲线C的形状和方向有关。

特例 (1) 若C表示连接点a,b的任一曲线,则

$$\int_C dz = b - a \qquad \int_C z dz = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

(2) 若C表示闭曲线,则 $\int_C dz = 0,\quad \int_C z dz = 0$

3. 积分存在的条件及其计算法

定理 当$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在光滑曲线C上连续时，$f(z)$必沿C可积，即$\int_C f(z)dz$存在.

且 $\boxed{\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy}$ (4)

记忆

$$=\int_C (u+iv)(dx+idy)$$

 这个定理表明 $\int_C f(z)dz$可通过二个二元实变函数的第二型曲线积分来计算.

证明 令 $z_k = x_k + iy_k \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k \quad u(\xi_k, \eta_k) = u_k \quad v(\xi_k, \eta_k) = v_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

当 $\delta \to 0$ 时，均是实函数的曲线积分.

$$+ i[\sum_{k=1}^{n} v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \quad (5)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = (\int_C u(x,y)dx - \int_C v(x,y)dy)$$

$$+ i(\int_C v(x,y)dx + \int_C u(x,y)dy) = \int_C f(z)dz$$

$$=\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i[v(x,y)dy + u(x,y)dy]$$

$\because\ f(z)$在C上连续，$\therefore\ u(x,y), v(x,y)$在$C$上连续，故$\int_C u(x,y)dx$、$\int_C v(x,y)dy$、$\int_C v(x,y)dx$、$\int_C u(x,y)dy$都存在！

推论1：当$f(z)$是连续函数，C是光滑曲线时，$\int_c f(z)dz$一定存在。

推论2：$\int_c f(z)dz$可以通过两个二元实函数的线积分来计算。

设光滑曲线$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad t: \alpha \to \beta$

由曲线积分的计算法得

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha(\text{起})}^{\beta(\text{终})} \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt$$

$$+ i\int_{\alpha(\text{起})}^{\beta(\text{终})} \{v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t)y(t))y'(t)\}dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + i[v[x(t), y(t)]]\}(x'(t) + iy'(t))dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

$$\therefore \int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \quad --(6)$$

4. 积分性质

由积分定义得：

1) $\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$

2) $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$

3) $\int_C [f(z) \pm g(z)]dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$

4) $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$（分段光滑曲线）

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

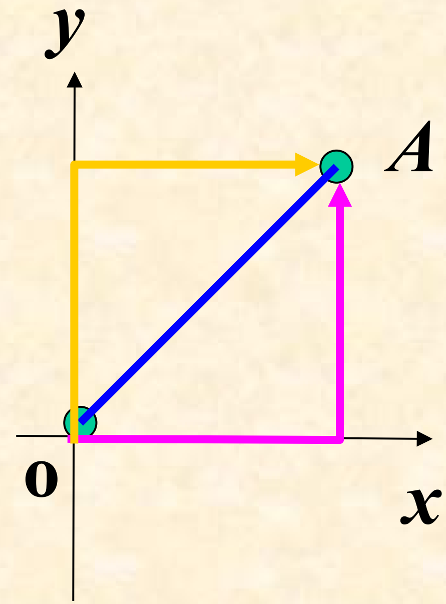
5)设C的长度为L，函数$f(z)$在C上满足$|f(z)| \le M$

$\Rightarrow \left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML$ ——估值定理.

例 1 计算$\int_C z\,dz$ $\quad \overline{OA}:\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases} (0 \le t \le 1)$

解 $\int_C z\,dz = \int_0^1 (3+4i)t \cdot (3+4i)\,dt$

$$= (3+4i)^2 \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}(3+4i)^2$$



又解 $\int_C z\,dz = \int_C (x+iy)(dx+idy)$

$$= \int_C xdx - ydy + i\int_C ydx + xdy$$

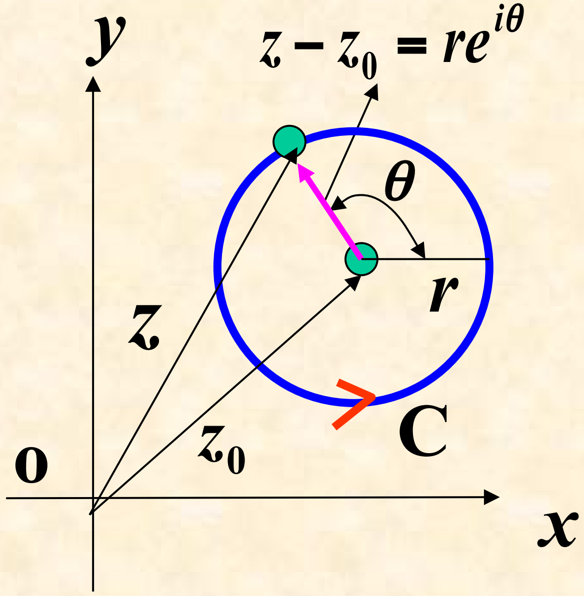
容易验证,右边两个积分都与路径无关,

$\therefore \forall$连接OA的曲线C，其上积分：$\int_C f(z)dz = \frac{1}{2}(3+4i)^2$

例 2☆计算$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$这里$C$表示以$z_0$为中心，

r为半径的正向圆周，n为整数.

解　$C: z = z_0 + re^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$



$$\therefore \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n e^{in\theta}}d\theta = \begin{cases} i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i & n = 0 \\ \dfrac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta = 0 & n \ne 0 \end{cases}$$

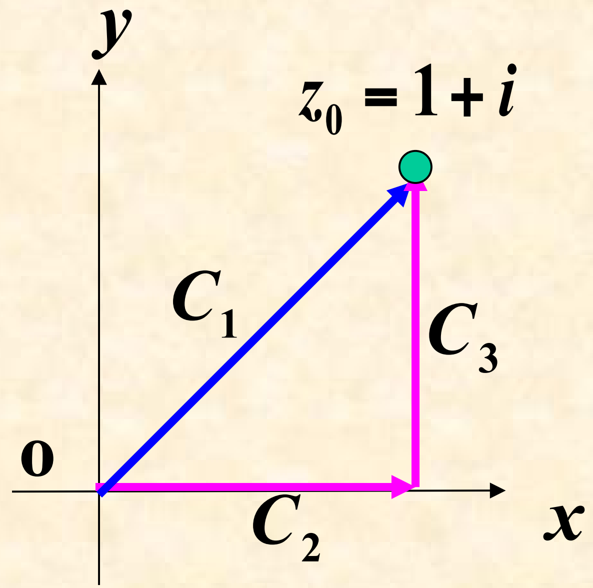
$$\therefore \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

这个结果与半径r及z_0无关,这个结果以后经常用到,应记住.

例3 计算$\int_C \bar{z}dz$的值

$1)C = C_1 = \overline{Oz_0}$

$2)C = C_2 + C_3$(见图)



解 $1)C_1: \quad z = (1+i)t \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it)(1+i)dt = \int_0^1 2tdt = 1$$

$2)C_2: z = t \quad 0 \le t \le 1 \quad C_3: z = 1 + it \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_2} \bar{z}dz + \int_{C_3} \bar{z}dz$$

$$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1 - it)idt = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + i) = 1 + i$$

例 4 计算$\int_{C_1}\bar{z}dz,\int_{C_2}\bar{z}dz$的值，其中

C_1是单位圆$|z|=1$的上半圆周，顺时针方向；

C_2是单位圆$|z|=1$的下半圆周，逆时针方向.

解： 1)C_1： $z=e^{i\theta},0\le\theta\le\pi$.

$$\int_{C_1}\bar{z}dz=\int_{\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{\pi}^{0}dt=-\pi i$$

2)C_2： $z=e^{i\theta},-\pi\le\theta\le 0$.

$$\int_{C_2}\bar{z}dz=\int_{-\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{0}dt=\pi i$$

作业

习题三

2(1,2,3)、3、6（1,2）