第五章 作业

1. 已知函数表

x_i	0.2	0.3	0.4
$f(x_i)$	0.04	0.09	0.16

则一阶差商 $f[0.2,0.4]$ 为多少？

$$f[0.2,0.4]=\frac{0.16-0.04}{0.4-0.2}=0.6$$

2. 设 $f(0)=0$，$f(1)=16$，$f(2)=46$，则差商 $f[0,1]$、$f[0,1,2]$ 为多少？$f(x)$ 的二次牛顿插值多项式怎样表达？

$$f[0,1]=\frac{16-0}{1-0}=16 \qquad f[0,1,2]=\frac{f[0,2]-f[0,1]}{2-1}=\frac{\frac{46-0}{2-0}-\frac{16-0}{1-0}}{2-1}=7$$

或：$$f[0,1,2]=\frac{f[1,2]-f[0,1]}{2-0}=\frac{\frac{46-16}{2-1}-\frac{16-0}{1-0}}{2-0}=7$$

$$N_2(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{2}f[x_0,x_1,\ldots,x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$$

$$=0+f[0,1](x-0)+f[0,1,2](x-0)(x-1)=16x+7x(x-1)$$

$$=7x^2+9x$$

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，试写它在插值节点组{−1,0,1}上的插值多项式用它计算 $x=\pm\dfrac{1}{3}$ 处之值。

x	-1	0	1
y	1/2	1	1/2

$$L_2(x)=\sum_{j=0}^{2} f(x_j)l_j(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x(x-1)}{-1\cdot -2}+1\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{1\cdot -1}+\frac{1}{2}\frac{(x+1)x}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-x-4x^2+4+x^2+x)=1-\frac{1}{2}x^2$$

$$L_2(\pm\frac{1}{3})=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

对比：$f(\pm\frac{1}{3})=\frac{9}{10}$

4. 令 $x_0=0$ ，$x_1=1$ ，写出 $y(x)=e^{-x}$ 的线性插值多项式 $L_1(x)$ ，并估计插误差。

$$L_1(x)=\sum_{j=0}^{1} f(x_j)l_j(x)= f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}+ f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$=1\cdot\frac{x-1}{-1}+\frac{1}{e}\cdot\frac{x-0}{1-0}=1-x+\frac{x}{e}$$

$$E(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}p_{n+1}(x)=\frac{1}{2}e^{-x}(x-0)(x-1)=\frac{1}{2}e^{-x}(x^2-x)$$

$$\left|E(x)\right|\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

8. 如下列表函数：

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	3	6	11	18	27

试计算此列表函数的差分表，并利用牛顿前插插值公式给出它的插值多项式。

f(x)	1	2	3	4
3	3	2	0	0
6	5	2	0	
11	7	2		
18	9			
27				

$$N_4(x+th)=\sum_{k=0}^{4}\frac{\Delta^k f_0}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(t-j)=3+3t+\frac{2}{2!}(t-1)t=t^2+2t+3$$

9. 设有实验数据如下：

x	0	1	2	3	4
f	1.1	1.9	3.1	3.9	4.9

要求按最小二乘法拟合上述数据。经验公式为 $S(x) = a_0 + a_1 x$ 。

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}\omega_i=5 \qquad (\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}\omega_i x_i=10$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}\omega_i x_2^2=30 \qquad (f,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}\omega_i y_i=14.9$$

$$(f,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}\omega_i x_i y_i=1.9+6.2+11.7=19.6=39.4$$

$$\begin{pmatrix}5 & 10\\ 10 & 30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14.9\\ 39.4\end{pmatrix}$$

$$a_0=1.06,\ a_1=0.96$$

$$S(x)=1.06+0.96x$$

x	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750
$f(x)$	0.79618	0.77334	0.74371	0.70413	0.65632	0.60228

14. 用上题数据计算 $f(0.385)$：

(1) 取 $x_0=0.250$，用二次 Newton 前插公式；

(2) 取 $x_0=0.500$，用二次 Newton 后插公式；

二者计算结果是否相同？为什么？

f(x)	1	2
0.77334	-0.02963	-0.00995
0.74371	-0.03958	
0.70413		

h=0.125

$$N_2(x+th) = f_0 + \sum_{k=1}^{2} \frac{\Delta^k f_0}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (t-j) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} t(t-1)$$

$$= 0.77334 - 0.02963\mathrm{t} - 0.00995/2 \cdot \mathrm{t}(\mathrm{t}-1)$$

t=0.135/0.125=1.08

0.77334-0.02963*1.08-0.00995/2*1.08*(1.08-1)= 0.74091

$$N_2(x+th) = f_n + \sum_{k=1}^{2} \frac{\nabla^k f_n}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (t+j) = f_n + \frac{\nabla f_n}{1!} t + \frac{\nabla^2 f_n}{2!} t(t+1)$$

$$= 0.70413 - 0.03958\mathrm{t} - 0.00995/2 \cdot \mathrm{t}(\mathrm{t}+1)$$

t=-0.115/0.125=-0.92

0.70413+0.03958*0.92+0.00995/2*0.92*(-0.92+1) = 0.74091

基本要求

- 拉格朗日插值法计算；
- 一次和二次分段拉格朗日插值法计算；
- 差商的计算，牛顿插值法计算；
- 最小二乘法数据拟合的法方程组方法。