

第三节 留数在定积分计算上的应用

- 一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的积分
- 二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ 的积分
- 三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{\alpha i x} dx (\alpha > 0)$ 的积分
- 四、被积函数在实轴上有孤立奇点的积分

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的实积分

其中 $R(\cos \theta, \sin \theta)$ 是三角有理函数

基本思路：把定积分化归为一个复变函数沿

某条封闭路线的复积分。

两个工作：1) 积分区域的转化

2) 被积函数的转化

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$

$$\text{令 } z = e^{i\theta} \longrightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta \longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz},$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

当 θ 历经变化 $[0, 2\pi]$ 时,

z 沿单位圆周 $|z| = 1$ 的正方向绕行一周.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

$$= \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right] \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k].$$

z 的有理函数，若在单位圆周上分母不为零，则满足留数定理的条件。

包围在单位圆周内的诸孤立奇点。

注：一般地

对形如 $I = \int_0^\alpha R(\cos \frac{2\pi\theta}{\alpha}, \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha}) d\theta$ 的积分

$$\text{令 } \varphi = \frac{2\pi\theta}{\alpha} \quad d\varphi = \frac{2\pi d\theta}{\alpha}$$

原积分转化为

$$I = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$$

例 1 计算实积分 $\int_0^\pi \frac{dx}{a + \sin^2 x} (a > 0)$.

解： $\int_0^\pi \frac{dx}{a + \sin^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{a + \frac{1 - \cos 2x}{2}}$

$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d2x}{a + \frac{1 - \cos 2x}{2}} \quad \text{令 } 2x = t,$

$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \frac{1 - \cos t}{2}} = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{1 - (z^2 + 1)/2z}{2}} \cdot \frac{dz}{iz}$

$= 2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2(2a + 1)z + 1}.$

极点为 : $z_1 = 2a + 1 - \sqrt{(2a + 1)^2 - 1}$ (在单位圆内)

$z_2 = 2a + 1 + \sqrt{(2a + 1)^2 - 1}$ (在单位圆外)

所以 $\int_0^\pi \frac{dx}{a + \sin^2 x}$

$$= 2\pi i \cdot 2i \operatorname{Res}[f(z), (2a + 1 - \sqrt{(2a + 1)^2 - 1})].$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2a + 1)^2 - 1}}.$$

例 2 计算 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} d\theta$ ($0 < p < 1$) 的值.

解 由于 $0 < p < 1$,

$$1 - 2p \cos \theta + p^2 = (1 - p)^2 + 2p(1 - \cos \theta)$$

在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 内不为零, 故积分有意义.

$$\text{由于 } \cos 2\theta = \frac{1}{2}(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2}),$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + z^{-2}}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2p \cdot \frac{z + z^{-1}}{2} + p^2} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + z^{-2}}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2p \cdot \frac{z + z^{-1}}{2} + p^2} \cdot \frac{dz}{iz} \\
 &= \oint_{|z|=1} \frac{1 + z^4}{2iz^2(1 - pz)(z - p)} dz = \oint_{|z|=1} f(z) dz.
 \end{aligned}$$

被积函数的三个极点 $z = 0, p, \frac{1}{p}$,

$z = 0, p$, 在圆周 $|z| = 1$ 内

且 $z = 0$ 为二级极点, $z = p$ 为一级极点 ;

所以在圆周 $|z| = 1$ 上被积函数无奇点，

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), 0] &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \cdot \frac{1 + z^4}{2iz^2(1 - pz)(z - p)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z - pz^2 - p + p^2z)4z^3 - (1 + z^4)(1 - 2pz + p^2)}{2i(z - pz^2 - p + p^2z)^2} \\ &= -\frac{1 + p^2}{2ip^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), p] &= \lim_{z \rightarrow p} \left[(z - p) \cdot \frac{1 + z^4}{2iz^2(1 - pz)(z - p)} \right] \\ &= \frac{1 + p^4}{2ip^2(1 - p^2)},\end{aligned}$$

因此

$$I = 2\pi i \left[-\frac{1 + p^2}{2ip^2} + \frac{1 + p^2}{2ip^2(1 - p^2)} \right] = \frac{2\pi p^2}{1 - p^2}.$$

二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 的积分

若有理函数 $R(x)$ 的分母至少比分子高两次，
并且分母在实轴上无孤立奇点。

$$\text{一般设 } R(z) = \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}, \quad m - n \geq 2$$

分析 可先讨论 $\int_{-R}^R R(x)dx$,

最后令 $R \rightarrow \infty$ 即可。

$$\int_{-R}^R R(x)dx \longrightarrow \oint_C f(z)dz$$

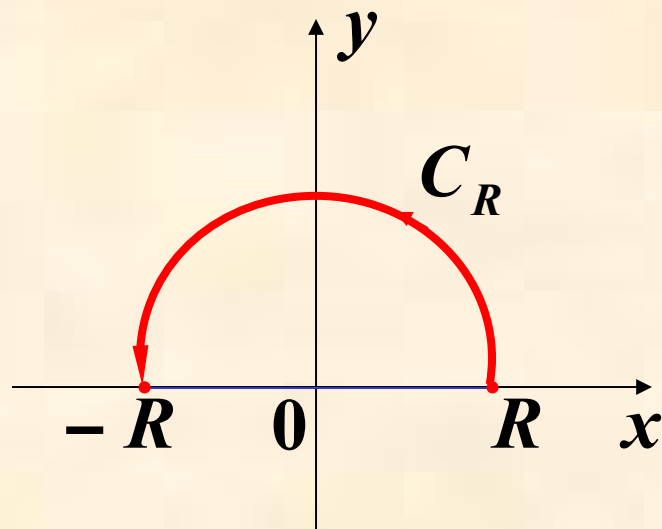
1. 被积函数的转化：可取 $f(z)=R(z)$.

(当 z 在实轴上的区间内变动时 , $R(z)=R(x)$)

2. 积分区域的转化：

取一条连接区间两端的按段光滑曲线，使与区间一起构成一条封闭曲线，并使 $R(z)$ 在其内部除有限孤立奇点外处处解析。(此法称为“围道积分法”)

取 R 适当大，使 $R(z)$ 所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这积分路线内。



这里可补线 C_R
(以原点为中心， R 为半径的在上半平面的半圆周)

C_R 与 $[-R, R]$ 一起构成封闭曲线 C ， $R(z)$ 在 C 及其内部（除去有限孤立奇点）处处解析。

根据留数定理得：

$$\int_{-R}^R R(x)dx + \int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z), z_k],$$

$$\begin{aligned} |R(z)| &= \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|} \\ &\leq \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|} \end{aligned}$$

当 $|z|$ 充分大时，总可使

$$|a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}| < \frac{1}{10}, \quad |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}| < \frac{1}{10},$$

$$\int_{-R}^R R(x)dx + \int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z), z_k]$$

因为 $m - n \geq 2$

$$\text{所以 } |R(z)| \leq \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|} < \frac{2}{|z|^2}$$

$$\left| \int_{C_R} R(z)dz \right| \leq \int_{C_R} |R(z)|ds \leq \frac{2}{R^2} \pi R = \frac{2\pi}{R},$$

$$R \rightarrow +\infty : \int_{C_R} R(z)dz \rightarrow 0; \int_{-R}^R R(z)dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(z)dz,$$

$$\text{所以 } \int_{-\infty}^{\infty} R(z)dz = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z), z_k]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[R(z), z_k]$$

z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内所有的孤立奇点。

$R(x)$ 是偶函数时，有

$$\int_0^{\infty} R(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \mathrm{d}x = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[R(z), z_k]$$

例 4 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

$$\text{解：} R(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2(z^2 + b^2)}$$

在上半平面有二级极点 $z = ai$ ，一级极点 $z = bi$ 。

$$\begin{aligned} & \text{Res}[R(z), ai] \\ &= \left[\frac{1}{(z + ai)^2(z^2 + b^2)} \right]' \bigg|_{z=ai} = \frac{1}{2bi(a^2 - b^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{Res}[R(z), bi] = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2(z + bi)} \Big|_{z=bi} = \frac{b^2 - 3a^2}{4a^3 i (b^2 - a^2)^2},$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)}$

$$= 2\pi i \{ \text{Res}[R(z), bi] + \text{Res}[R(z), ai] \}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{b^2 - 3a^2}{4a^3 i (b^2 - a^2)^2} + \frac{1}{2bi(b^2 - a^2)^2} \right]$$

$$= \frac{(2a + b)\pi}{2a^3 b(a + b)^2}.$$

例 5 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

解 $R(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ 是偶函数，且在上半平面只有一个二级极点 $z = i$ ，其留数为

$$\operatorname{Res}[R(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i)^2 \frac{1}{(1+z^2)^2} \right]' = -\frac{i}{4}$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \pi i \cdot \operatorname{Res}[R(z), i] = \pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

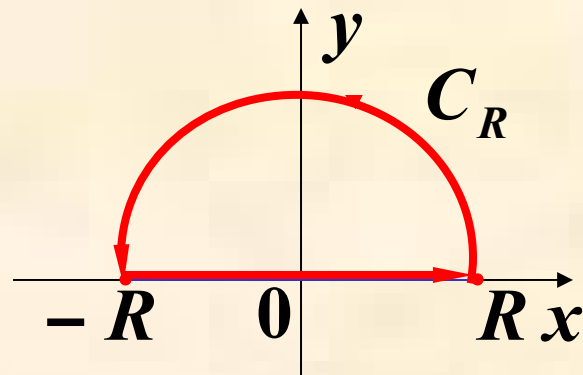
$$\int_0^{\infty} R(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \mathrm{d}x = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[R(z), z_k]$$

三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\alpha i x} dx$ ($\alpha > 0$) 的积分

积分存在要求： $R(x)$ 是 x 的有理函数而分母的
次数至少比分子的次数高一次，并且 $R(z)$ 在实轴上
无孤立奇点。

同前一型：补 C_R

线 C_R 与 $[-R, R]$ 一起构成封闭



曲线 C ，使 $R(z)$ 所有的在上半平面内的极 z_k 都
点包在这积分路线内。

对于充分大的 $|z|$, 且 $m - n = 1$ 时, 有 $|R(z)| < \frac{2}{|z|}$

$$\left| \int_{C_R} R(z) e^{\alpha i z} dz \right| \leq \int_{C_R} |R(z)| |e^{\alpha i z}| ds < \frac{2}{R} \int_{C_R} |e^{\alpha i(x+iy)}| ds$$

令 $x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$

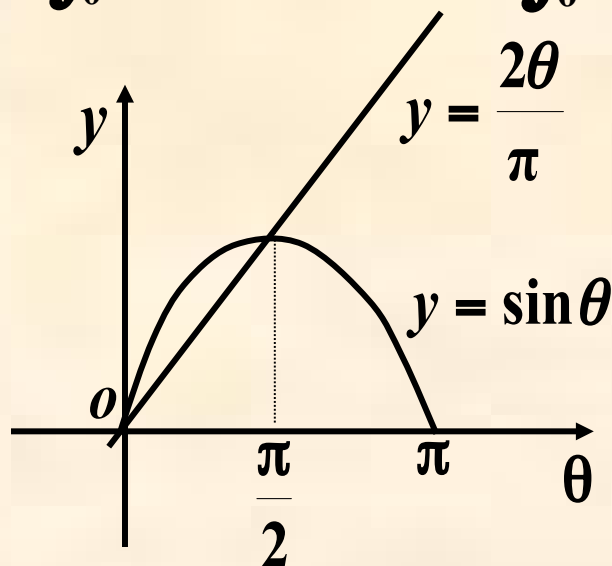
则 $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$0 < \theta < \pi$$

$$ds = |dz| = |d(R e^{i\theta})| = R d\theta.$$

$$\frac{2}{R} \int_{C_R} |e^{\alpha i(x+iy)}| ds = \frac{2}{R} \int_{C_R} |e^{\alpha x i}| |e^{-\alpha y}| ds = 2 \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} d\theta \leq 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR(\frac{2\theta}{\pi})} d\theta,$$



$$= \frac{2\pi}{aR} (1 - e^{-aR}).$$

$$R \rightarrow +\infty \quad \downarrow \quad 0$$

从而 $\left| \int_{C_R} R(z) e^{aiz} dz \right| \leq \frac{2\pi}{aR} (1 - e^{-aR}) \rightarrow 0.$

$$\int_{C_R} R(z) e^{aiz} dz \rightarrow 0.$$

由留数定理：

$$\int_{-R}^R R(x)e^{aix} dx + \int_{C_R} R(z)e^{aiz} dz = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

$R \rightarrow +\infty$ ：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix} dx = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$$



$$e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx \\ &= 2\pi i \sum \text{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]. \end{aligned}$$

例 6 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2 + a^2)^2} dx$, ($m > 0, a > 0$).

解
$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2 + a^2)^2} dx$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} e^{imx} dx \right]$$

又
$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + a^2)^2} e^{imx},$$

在上半平面只有二级极点 $z = ai$,

$$\text{Res}(f(z), ai) = \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z + ai)^2} e^{imz} \right]_{z=ai} = \frac{m}{4a} e^{-ma},$$

$$\text{则 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} e^{imx} dx = 2\pi i \text{Res} \left[\frac{z}{(z^2 + a^2)^2} e^{imz}, ai \right]$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \text{Im} [2\pi i \text{Res}(f(z), ai)] \\ &= \frac{m\pi}{4a} e^{-ma}. \end{aligned}$$

注意 以上两型积分中被积函数中的 $R(x)$ 在实轴上无孤立奇点。

四、被积函数在实轴上有孤立奇点的积分

例 7 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

分析 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{\quad} \frac{\sin z}{z}$$

$[-\infty, +\infty] \rightarrow$ 某封闭曲线

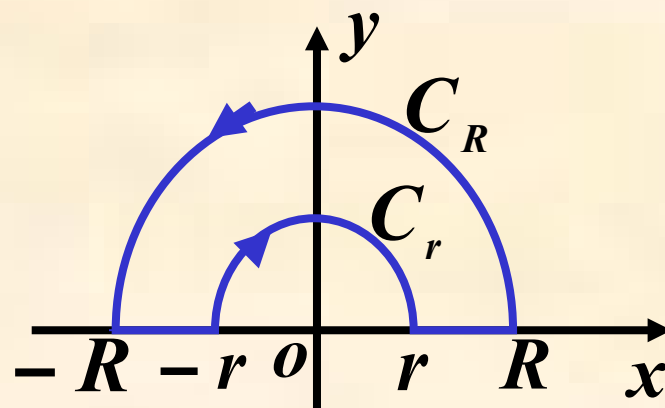
因 $\frac{\sin z}{z}$ 在实轴上有一级极点 $z = 0$, 应使封闭路

线不经过奇点, 所以可取图示路线:

解 封闭曲线

$$C_R + [-R, -r] + C_r + [r, R]$$

由柯西 - 古萨定理得：



$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = 0,$$

$$\text{令 } x = -t \quad \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_R^r \frac{e^{-it}}{t} dt = - \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx,$$

$$\text{由 } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

$$\text{知 } 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|}{|z|} ds = \frac{1}{R} \int_{C_R} e^{-y} ds = \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R(2\theta/\pi)} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}),$$

$$\text{于是 } R \rightarrow +\infty \Rightarrow \oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0 \quad \text{当 } r \text{ 充分小时}$$

$$\text{因为 } \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2!} + \cdots + \frac{i^n z^{n-1}}{n!} + \cdots = \frac{1}{z} + g(z),$$

$$g(z) = i - \frac{z}{2!} - \frac{iz^2}{3!} + \cdots + \frac{i^n z^{n-1}}{n!} + \cdots$$

当 $|z|$ 充分小时, 总有 $|g(z)| \leq 2$,

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_r} \frac{1}{z} dz + \int_{C_r} g(z) dz,$$

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^0 \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = -i\pi,$$

$$\text{因为 } \left| \int_{C_r} g(z) dz \right| \leq \int_{C_r} |g(z)| ds \leq 2 \int_{C_r} ds = 2\pi r,$$

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{C_r} g(z) dz \rightarrow 0, \text{ 即 } \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i + 0 = -\pi i,$$

$$2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

$$\longrightarrow 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i,$$

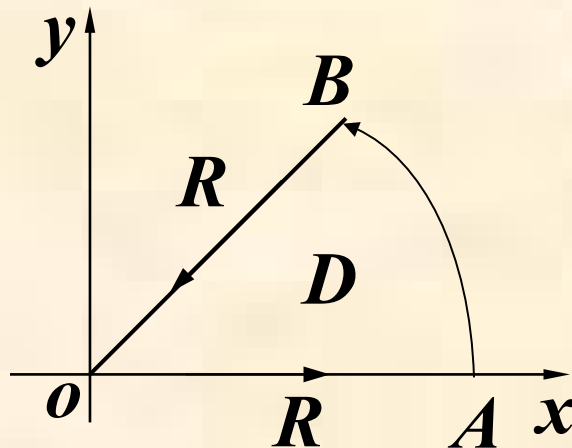
$$\text{所以 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

例 7 证明 $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

证 设函数 e^{iz^2} $\xrightarrow{\text{当 } z=x \text{ 时}}$ $e^{iz^2} = \cos x^2 + i \sin x^2$

如图路径, $\oint_C e^{iz^2} dz = 0,$

$$\oint_{OA} e^{ix^2} dx + \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz = 0,$$



$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{i2\theta}} R i e^{i\theta} d\theta + \int_R^0 e^{ir^2 e^{\frac{\pi}{2}i}} e^{\frac{\pi}{4}i} dr = 0,$$

$$\begin{aligned}
 &\text{或 } \int_0^R (\cos x^2 + i \sin x^2) dx \\
 &= e^{\frac{\pi}{4}i} \int_0^R e^{-r^2} dr - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta} R i e^{i\theta} d\theta.
 \end{aligned}$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时

$$e^{\frac{\pi}{4}i} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta} R i e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R \sin 2\theta} R d\theta$$

$$\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4}{\pi} R^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}). \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_0^{\infty} (\cos x^2 + i \sin x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

令两端实部与虚部分别相等，得

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

菲涅耳 (fresnel) 积分

四、小结与思考

本课我们应用“**围道积分法**”计算了三类实积分，熟练掌握应用留数计算定积分是本章的难点。

第七周周一作业

1、书面作业

习题五 9(1, 5, 6)

2、课外作业

(1)、完成练习册前四章，周三**抽查**；

(2)、**预习**第八章第一节之“**傅里叶积分**”