Chapter 3-3. 周期信号的傅立叶级数表示
——离散时间信号的傅立叶级数表示

- 成谐波关系的离散复指数信号的组合
- 离散周期时间信号的傅立叶级数系数的确定
- 离散时间傅里叶级数的性质

回顾

离散周期复指数信号的特点

若信号满足 $x[n]=x[n+N]$，则称**x[n**为离散周期信号，周期为N。

满足上述条件的最小正整数**N**称为基波周期**N$_0$**

$\omega_0=\dfrac{2\pi}{N_0}$ 称为基波频率。 $e^{j\omega n}=e^{j(\omega+2k\pi)n}$

离散周期谐波族

$$\phi_k[n]=e^{jk\omega_0 n}=e^{jk\left(2\pi/N\right)n},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

被称为一族离散谐波复指数信号，其中 $e^{j\omega_0 kn}$ 是第**K**次谐波。

该谐波族的信号是周期的，且只有N个是不相同。

$$\phi_k[n]=\phi_{k+Nr}[n]$$

即：$\phi_k[n]$ 仅在k取N个连续的整数时是不相同。

离散时间周期信号的傅立叶级数表示

离散时间周期信号的傅立叶级数

一个离散周期信号表示成一组谐波信号的形式，就称为该信号的傅立叶级数的表示形式。

$$x[n]=\underbrace{\sum_{k=<N>}}_{\text{任意连续N个谐波信号}} a_k e^{jk\omega_0 N}=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

傅立叶级数系数的确定

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n} \qquad x[n]\overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

a_k:傅立叶级数或者频谱系数。 $a_0=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]$ ：直流分量/常数分量

傅立叶级数综合与分析公式

综合公式 $x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$

分析公式 $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$

离散时间周期信号的傅立叶级数表示

傅立叶级数系数的周期性

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

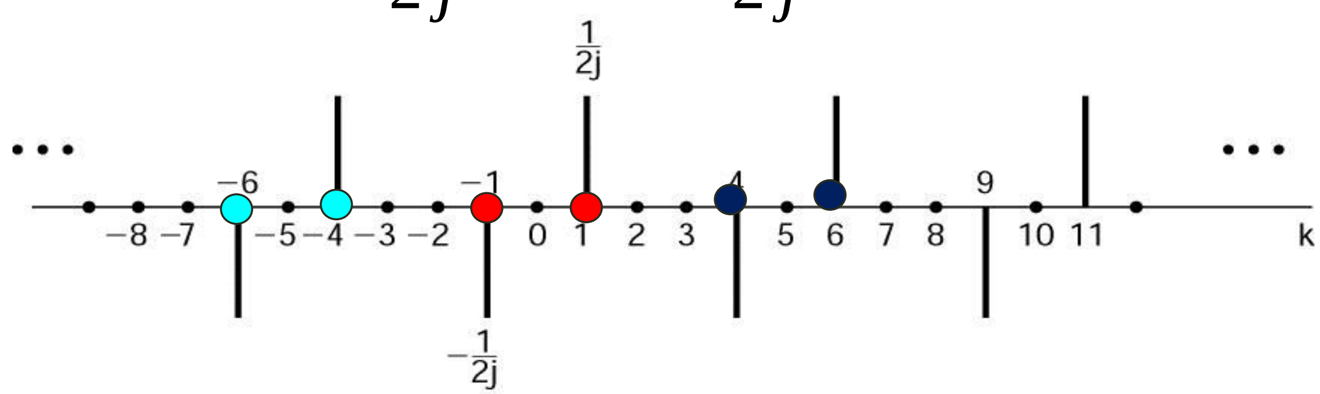
$$e^{jk\omega_0 n} = e^{j(k+Nr)\omega_0 n} \Rightarrow a_{k+Nr} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j(k+Nr)\omega_0 n} = a_k$$

取任意周期进行分析，一般取 **0~N-1**

例3. 10

$$(1)\ x[n] = \sin\omega_0 n \qquad x[n] = \frac{1}{2j}e^{j\left(2\pi/N\right)n} - \frac{1}{2j}e^{-j\left(2\pi/N\right)n} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}, a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

若 **N=5**



$$(2)\ x[n] = \frac{1}{2j}e^{jM\left(2\pi/N\right)n} - \frac{1}{2j}e^{-jM\left(2\pi/N\right)n} \Rightarrow a_M = \frac{1}{2j}, a_{-M} = -\frac{1}{2j}$$

例子 $x(n)=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$ $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$

例3.11 请计算x[n]的傅里叶系数

$$x[n]=1+\sin\frac{2\pi}{N}n+3\cos\frac{2\pi}{N}n+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x[n]=1+\frac{1}{2j}[e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}]+\frac{3}{2}[e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}]+\frac{1}{2}[e^{j\left(\frac{4\pi}{N}+\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-j\left(\frac{4\pi}{N}+\frac{\pi}{2}\right)}]$$

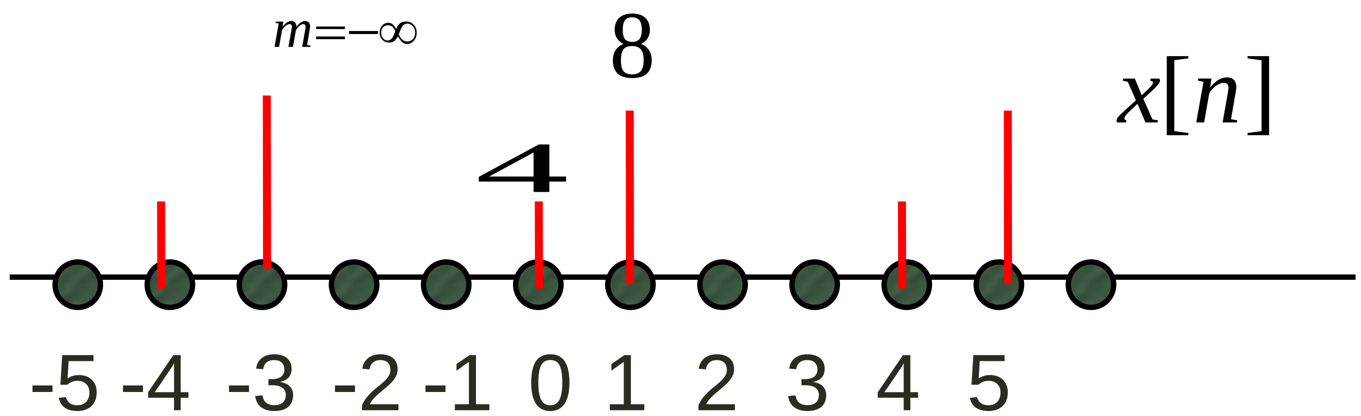
$$x[n]=1+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2j}\right)e^{j(2\pi/N)n}+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2j}\right)e^{-j(2\pi/N)n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j4\pi n/N}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j4\pi n/N}$$

$$a_0=1 \quad a_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j \quad a_{-1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}j \quad a_2=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}j \quad a_{-2}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}j$$

例子 $x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$ $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$

请计算x[n]的傅里叶级数

$$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(4\delta[n-4m]+8\delta[n-1-4m]\right)$$



$N=4,\ \omega_0=\frac{\pi}{2}$

$$a_k=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{2}n}=\frac{1}{4}\left(x[0]e^{-j0\frac{\pi}{2}k}+x[1]e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{4}\left(x[0]+x[1]\right)=3 \qquad a_1=\frac{1}{4}\left(x[0]e^{-j\frac{\pi}{2}}+x[1]e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)=1-2j$$

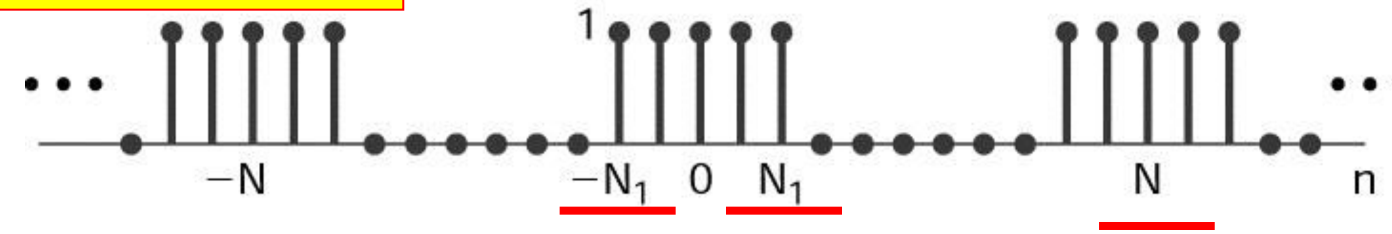
$$a_2=\frac{1}{4}\left(x[0]e^{-j2\frac{\pi}{2}}+x[1]e^{-j2\frac{\pi}{2}}\right)=-1 \qquad a_3=\frac{1}{4}\left(x[0]e^{-j3\frac{\pi}{2}}+x[1]e^{-j3\frac{\pi}{2}}\right)=1+2j$$

例子

$$x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

例3.12 请计算x[n]的傅里叶系数

$$x[n]=1, -N_1\le n\le N_1$$



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N1}^{N1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

变量替换

$$\downarrow\ m=n+N_1$$

$$a_k=\frac{1}{N}e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\frac{1-e^{-jk2\pi\frac{2N_1+1}{N})}}{1-e^{-jk2\pi/N}} \qquad a_k=\frac{1}{N}e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \leftarrow a_k=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)}$$

$$\cos x=\left(e^{jx}+e^{-jx}\right)/2$$

$$\sin x=\left(e^{jx}-e^{-jx}\right)/2$$

$$\longrightarrow$$

参考3.12

$$\boxed{a_k=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\dfrac{2k\pi\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{N}\right]}{N\sin\left(k\pi/N\right)}, & k\ne 0,\pm N,\pm 2N,\ldots\\[2ex] \dfrac{2N_1+1}{N}, & otherwise\end{cases}}$$

例子

例3. 12

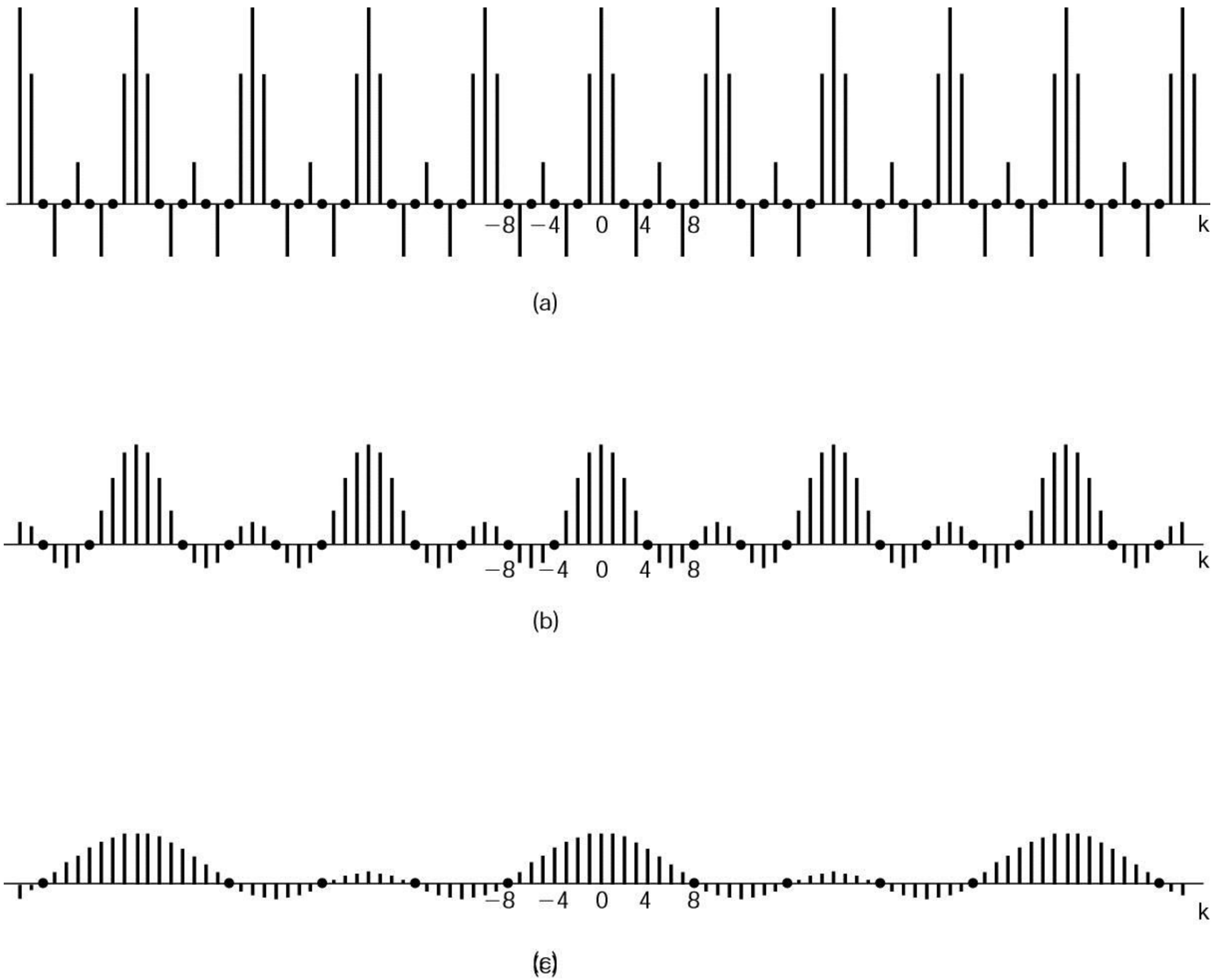
$$a_k=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[2k\pi\left(2N_1+1\right)/2N\right]}{N\sin\left(k\pi/N\right)}, & k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\ldots\\[2ex] \dfrac{2N_1+1}{N}, & otherwise\end{cases}$$

周期性
离散性

N1=2,N=10

N1=2,N=20

N1=2,N=40



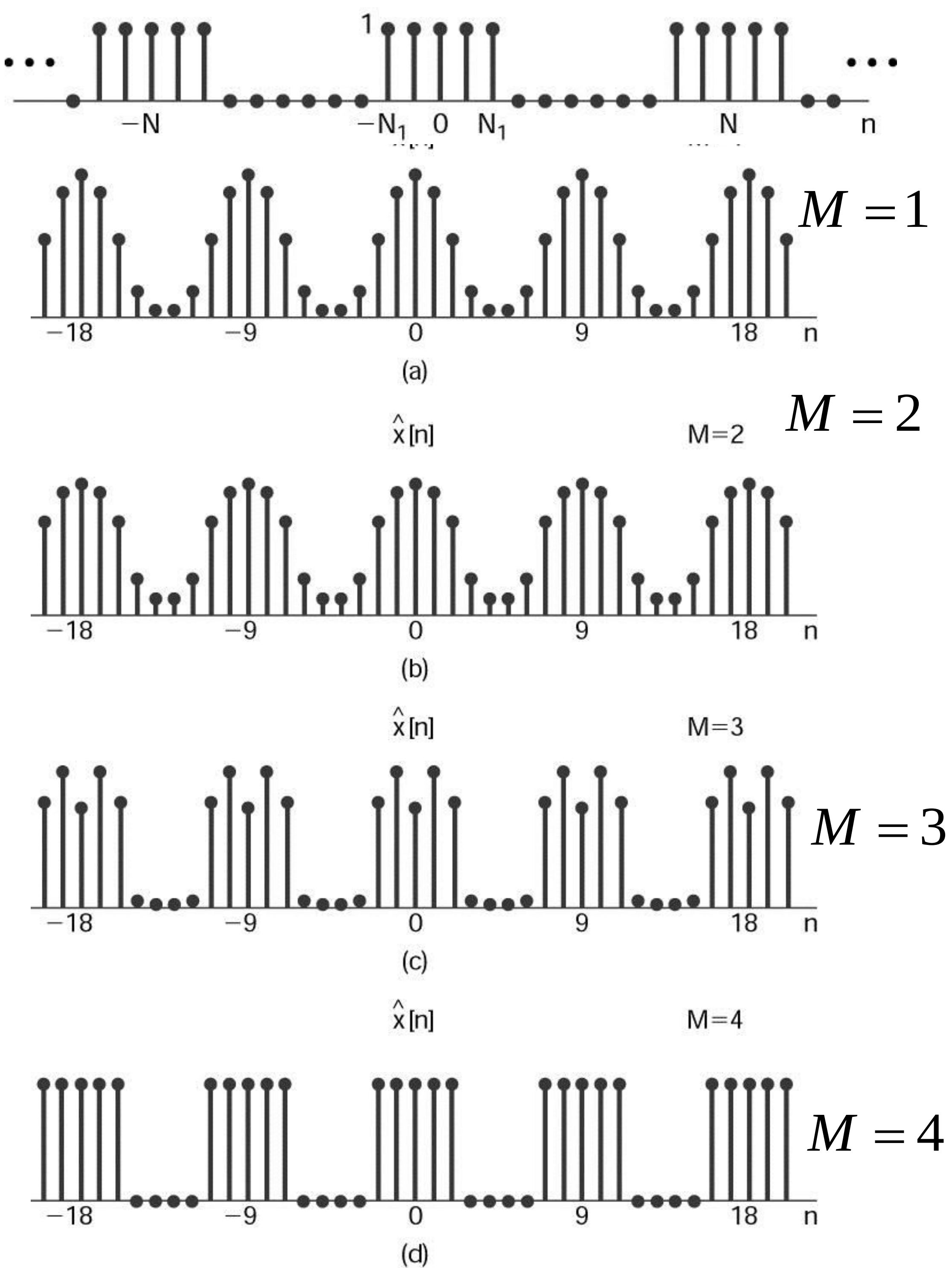
离散时间傅立叶级数的收敛性

与连续时间周期信号不同，无吉伯斯现象，不存在收敛问题。

对周期方波的近似模拟

可以取任意连续的N个谐波进行近似。

假设 $N_1=2, N=9$ $\quad \hat{x}[n]=\sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$



原因分析

因为离散时间周期序列完全由有限N个参数决定,即任意一个周期内的N个序列值。

离散时间傅立叶级数的性质

大部分性质和推导与连续信号非常相似，见表3.2。下面主要给出几个不同。

相乘

$$x[n] \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k \quad y[n] \overset{FS}{\leftrightarrow} b_k$$

$$x[n]y[n] \overset{FS}{\leftrightarrow} d_k = \boxed{\sum_{l=\langle N\rangle}} a_l b_{k-l}$$

周期卷积periodic convolution

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k \quad y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} b_k$$

$$x(t)y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

非周期卷积aperiodic convolution

一次差分

$$x[n] \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$x(t) \overset{FS}{\rightarrow} a_k \qquad \frac{dx(t)}{dt} \overset{FS}{\rightarrow} = jk\omega_0 a_k$$

Parseval定理

一个周期信号的平均功率等于其所有谐波分量的平均功率之和。

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

离散时间傅立叶级数的性质

大部分性质和推导与连续信号非常相似，见表3.2。下面主要给出几个不同。

相乘

周期卷积periodic convolution

$$x[n]\overset{FS}{\longleftrightarrow}a_k \quad y[n]\overset{FS}{\longleftrightarrow}b_k \quad \Rightarrow \quad x[n]y[n]\overset{FS}{\longleftrightarrow}d_k=\boxed{\sum_{l=\langle N\rangle}}a_l b_{k-l}$$

$$x(t)\overset{FS}{\longleftrightarrow}a_k \quad y(t)\overset{FS}{\longleftrightarrow}b_k \quad \Rightarrow \quad x(t)y(t)\overset{FS}{\longleftrightarrow}h_k=\sum_{l=-\infty}^{\infty}a_l b_{k-l}$$

非周期卷积aperiodic convolution

一次差分

$$x[n]\overset{FS}{\longleftrightarrow}a_k \quad \Rightarrow \quad x[n]-x[n-1]\overset{FS}{\longleftrightarrow}\left(1-e^{-jk\omega_0}\right)a_k$$

$$x(t)\overset{FS}{\rightarrow}a_k \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt}\overset{FS}{\rightarrow}=jk\omega_0 a_k$$

Parseval定理

一个周期信号的平均功率等于其所有谐波分量的平均功率之和。

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left|x[n]\right|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}\left|a_k\right|^2$$

$$\frac{1}{T}\int_T\left|x(t)\right|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|a_k\right|^2$$

离散时间傅立叶级数的性质

时域尺度变换

$$x[n] \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k \Rightarrow x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & n\text{是m的倍数} \\ 0 & n\text{不是m的倍数} \end{cases} \longleftrightarrow \frac{1}{m} a_k$$

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k \Rightarrow x(at) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

求和

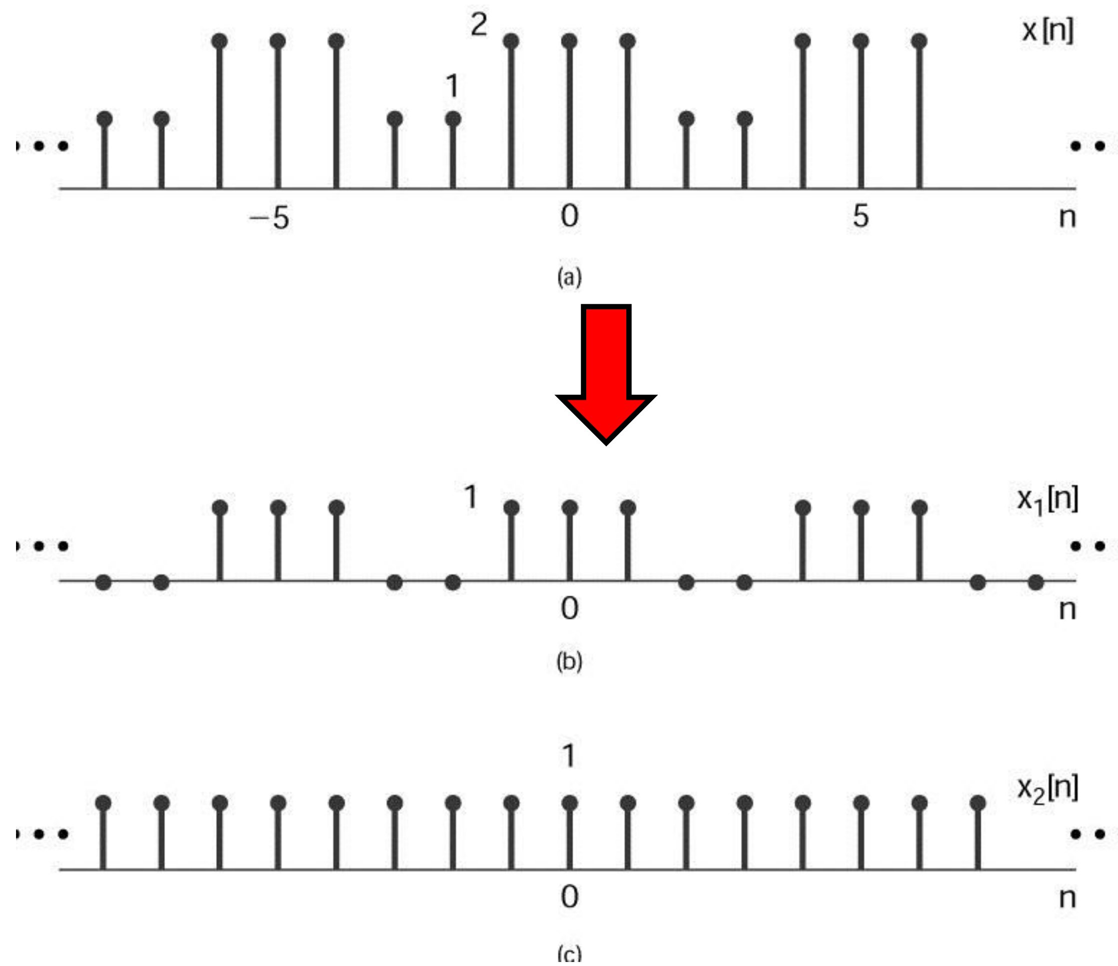
$$x[n] \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{FS}{\leftrightarrow} \left(\frac{1}{1-e^{-jk\omega_0}} \right) a_k$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(t) \overset{FS}{\rightarrow} = \frac{a_k}{jk\omega_0} \quad \left(\text{or } \frac{Ta_k}{2\pi jk} \right)$$

性质的利用

例3.13

求右边信号的傅里叶级数系数



$$x[n]=x_1[n]+x_2[n]$$

$$a_k=b_k+c_k$$

x_1分析 • **$N=5, N_1=1$**

$$b_k=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[2k\pi(2N_1+1)/2N\right]}{N\sin(k\pi/N)}, & k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\ldots\\[2ex] \dfrac{2N_1+1}{N}=\dfrac{3}{5}, & otherwise\end{cases}$$

$$a_k=\begin{cases} b_k=\dfrac{\sin(3\pi k/5)}{5\sin(\pi k/5)} & k\neq 0,\pm 5,\pm 10,\ldots\\[2ex] \dfrac{8}{5} & otherwise\end{cases}$$

x_2分析 仅有直流分量 $c_k=1, k=0,\pm N,\pm 2N,$

性质的利用

基本题3. 10

实奇信号x[n]，N=7， $a_{15}=j, a_{16}=2j, a_{17}=3j$

$$a_k=-a_{-k}$$

$$a_1=a_{15}=j, \quad a_2=a_{16}=2j, \quad a_3=a_{17}=3j$$

实奇： $a_{-1}=-a_1=-j, \quad a_{-2}=-a_2=-2j, \quad a_{-3}=-a_{-3}=-3j$

$$a_{-1}=-a_1=-j, \quad a_{-2}=-a_2=-2j, \quad a_{-3}=-a_{-3}=-3j$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk(2\pi/7)n}$$

性质的利用

例3.14 求满足下列条件的信号x[n] $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x[n]e^{-jkw_0n}$

1. **x[n] 是周期信号，N=6** → $\omega_0=\frac{\pi}{3}$
2. $\sum_{n=0}^{5}x[n]=2$ → $a_0=\frac{2}{T}=\frac{1}{3}$
3. $\sum_{n=2}^{7}(-1)^n x[n]=1$ → $(-1)^n=e^{-j\pi n}=e^{-j\left(2\pi/6\right)3n}$ $\quad \sum_{n=2}^{7}e^{-j\left(2\pi/6\right)3n}x[n]=1$

   $\sum_{n=0}^{5}e^{-j\left(2\pi/6\right)3n}x[n]=1$ → $a_3=\frac{1}{6}$
4. **在满足上述条件的所有信号中，x[n]具有在每个周期内最小的功率。** → $\min P=\min\sum_{k=0}^{5}\left|a_k\right|^2$ → $a_k=0, k=1,2,4,5$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left|x[n]\right|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}\left|a_k\right|^2$$

$$x[n]=a_0+a_3e^{j(3\pi/3)n}.$$

→ $x[n]=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-1)^n$

性质的利用

$$x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$y[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$$

例3.15　求满足下列条件的信号y[n]

$$w[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = Na_kb_k$$

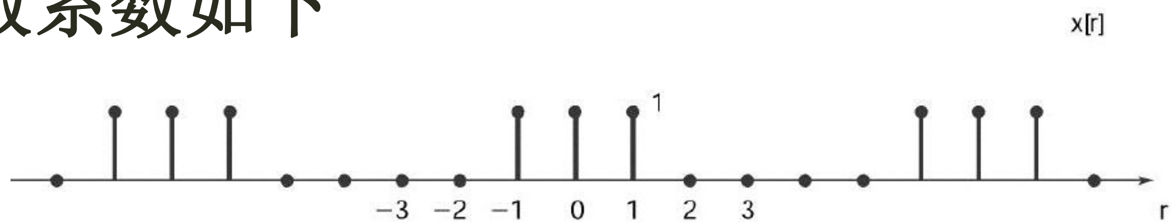
已知频域

$$N=7, c_k = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\left[3k\pi/7\right]}{7\sin^2\left(k\pi/7\right)}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 9/7, & otherwise \end{cases}$$

确定时域x[n]的表达式

在例3.12中，已知周期方波的傅立叶级数系数如下

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{\sin\left[2k\pi(2N_1+1)/2N\right]}{N\sin\left(k\pi/N\right)}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{2N_1+1}{N}, & otherwise \end{cases}$$

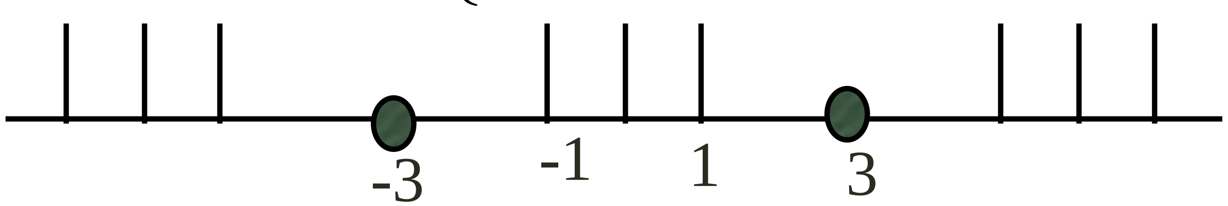


(1) $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$　对比 a_k/c_k 公式

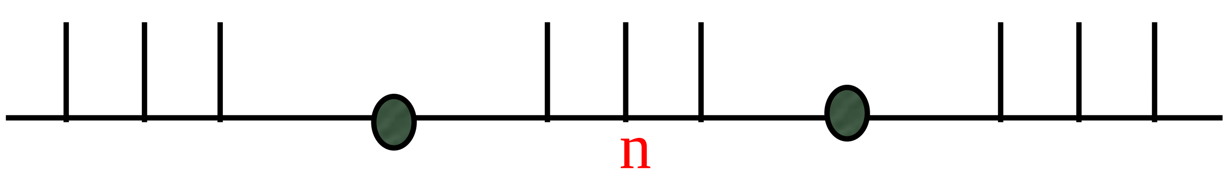
$$\begin{cases} c_k = 7a_k^2 \\ N_1 = 1 \end{cases}$$

$$y[n] = x[n] * x[n] = \sum_{k=-3}^{3} x[k]x[n-k]$$

$$y[n] = \begin{cases} n+3 & -2 \le n \le 0 \\ 3-n & 0 \le n \le 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



(2) $k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$　$Na_0^2 = 9/7$



傅里叶级数与LTI系统

复习

LTI系统对复指数的响应

特征函数

$$x(t)=e^{st}\rightarrow y(t)=H(s)e^{st} \qquad x[n]=z^{n}\rightarrow y[n]=H(z)z^{n}$$

特征函数

系统函数

$$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \qquad H(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{-k}$$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

当 $s=j\omega$ 或 $z=e^{j\omega}$ 则H(s)/H(z)为频率响应。

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]e^{-j\omega k}$$

LTI系统对谐波族的响应 假设频率响应收敛

$$s=jk\omega_0 \qquad z=e^{jk\omega_0}$$

输入

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk\omega_0 n}$$

输出

$$y(t)=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k H(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$$

傅立叶系数

$$\Rightarrow b_k=a_k H(jk\omega_0)$$

$$\Rightarrow b_k=a_k H(e^{jk\omega_0})$$

傅里叶级数与LTI系统

例3.16

$$b_k = a_k H(e^{jk\omega_0}) \qquad H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

求LTI系统输出的傅立叶级数系数。已知系统的单位冲激响应和输入信号分别为：

$$x(t)=\sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

$$h(t)=e^{-t}u(t) \qquad a_0=1, a_1=a_{-1}=1/4, a_2=a_{-2}=1/2, a_3=a_{-3}=1/3$$

$$H(j\omega)=\int_0^{\infty} e^{-\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau = -\frac{1}{1+j\omega}e^{-(1+j\omega)\tau}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega} \qquad H(jk\omega_0)=\frac{1}{1+jk\omega_0}$$

$$b_k = a_k H(jk\omega_0) \Rightarrow b_k = a_k H(jk2\pi) = \frac{1}{1+jk2\pi}a_k$$

$$b_0=\frac{1}{1+j2\pi\bullet 0}a_0=1 \quad b_1=\frac{1}{1+j2\pi\bullet 1}a_1=\frac{1}{4}(\frac{1}{1+j2\pi}) \quad b_{-1}=\frac{1}{1+j2\pi\bullet -1}a_{-1}=\frac{1}{4}(\frac{1}{1-j2\pi})$$

$$b_2=\frac{1}{1+j2\pi\bullet 2}a_2=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+j4\pi}) \quad b_{-2}==\frac{1}{2}(\frac{1}{1-j4\pi}) \quad b_3==\frac{1}{3}(\frac{1}{1+j6\pi}) \quad b_{-3}==\frac{1}{3}(\frac{1}{1-j6\pi})$$

傅里叶级数与LTI系统

例3.17 $b_k = a_k H(e^{jk\omega})$ $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$

求LTI系统输出的傅立叶级数系数。已知系统的单位冲激响应和输入信号分别为：$h[n] = a^n u[n]$ $(-1<\alpha<1)$ $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}}}$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = \frac{1}{2}e^{(j2\pi/N)n} + \frac{1}{2}e^{-(j2\pi/N)n} \qquad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$b_k = a_k H(e^{jk\omega_0}) \Rightarrow$$

$$b_{-1} = a_{-1} H(e^{-j\omega_0}) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-ae^{j\frac{2\pi}{N}}},$$

$$b_1 = a_1 H(e^{j\omega_0}) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}}}$$

$$y[n] = b_{-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}} + b_1 e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

傅里叶级数与LTI系统

例 $$\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=x(t)$$

求LTI系统输出的傅立叶级数系数。已知系统的输入信号为：$x(t)=\cos 2\pi t$

$$x(t)=e^{j\omega t} \qquad y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t} \longrightarrow \frac{dy(t)}{dt}=j\omega H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$j\omega H(j\omega)e^{j\omega t}+4H(j\omega)e^{j\omega t}=e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+4}$$

$$x(t)=e^{jk\omega_0 t} \qquad y(t)=H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow H(jk\omega_0)=\frac{1}{4+jk\omega_0}$$

$$x(t)=\cos 2\pi t \longrightarrow a_1=a_{-1}=\frac{1}{2},\omega_0=2\pi \longrightarrow b_k=a_kH(jk2\pi)$$

$$b_1=\frac{1}{j2\pi+4}a_1=\frac{1}{j4\pi+8} \qquad b_{-1}=\frac{1}{-j2\pi+4}a_{-1}=\frac{1}{-j4\pi+8}$$

傅里叶级数与LTI系统

例 $y[n]+4y[n-1]=x[n]$

求LTI系统输出的傅立叶级数系数。已知系统的输入信号为：$x(t)=\cos\frac{1}{4}\pi n$

$$y[n]=H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \longrightarrow y[n-1]=H(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)}$$

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n}+4H(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)}=e^{j\omega n} \longrightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1}{1+4e^{-j\omega}}$$

$$y[n]=H(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n} \longrightarrow H(e^{jk\omega_0})=\frac{1}{1+4e^{-jk\omega_0}}$$

$$x[n]=\cos\frac{1}{4}\pi n \longrightarrow a_1=a_{-1}=\frac{1}{2} \longrightarrow b_k=a_kH(e^{jk\frac{\pi}{4}})$$

$$b_1=\frac{1}{1+4e^{-j\frac{\pi}{4}}}a_1=\frac{1}{2+j8e^{-j\frac{\pi}{4}}} \qquad b_{-1}=\frac{1}{1+4e^{j\frac{\pi}{4}}}a_{-1}=\frac{1}{2+j8e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

作业

3.10 实奇+周期性

3.11 性质的综合利用

实信号傅立叶变换系数的对偶性以及帕斯瓦尔定理

N=10----→ $a_{11}=a_1=a_{-1}=5$

$$\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\left|x[n]\right|^2=\sum_{k=0}^{9}\left|a_k\right|^2=\sum_{k=-1}^{8}\left|a_k\right|^2=50$$

3.12 相乘性质

3.13 傅立叶级数与LTI系统