北　　科　　数　　学　　协　　会

不定积分（补）

刘文陶

概要：几类难度较高积分的补充：有理函数、无理函数、三角函数、双曲函数及（虽然理论较复杂，但方法用起来没难度，所以可以不看理论直接记住方法，例题上面就是方法）.

前言：前面选取了不定积分里的一些基本问题进行分析，展示了问题的分析的思路过程，提供了一种学习方法，重在强调读者自己的行动.

针对上次资料中的不足之处，没有为大家提供类型题的解题方法，多的像遇到被积函数包含无理式（$\sqrt{x^2+px+q}$，$\sqrt{\dfrac{x+a}{b-x}}$，等）和有理式的情况，此外还有大量的三角函数题（值得一提的是书上经常需要换元为三角函数的几个式子 $x^2\pm a^2, a^2-x^2$ 和“1”的分解 1=1+f(x)-f(x)或$1=\sin^2 x+\cos^2 x$，$1=\sec^2 x-\tan^2 x$ 等）、不同类型初等函数结合的问题（例$\int\dfrac{\ln x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}dx$，$\int\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$）等，这次说明一下上述问题的方法，如果觉得简单可以不看我对问题的“分析”.

一．有理函数:

下面只说明实系数有理分式（相信多项式求积大家都会，所以就不提了）

我们知道一个有理分式$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，如果$\deg(P(x))\ge\deg(Q(x))$(即 P(x)次数大于等于 Q(x))，那么一定可以化为一个多项式（分子分母次数相等时为常数）和一个真分式$\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$（可知$P_1(x)$比$Q(x)$次数低，这样的分式称为有理真分式）的和，所以下面都是对有理真分式展开讨论的.

书上介绍了有理真分式的部分分式分解方法，然后利用待定系数法求解积分，我们来观察多项式 Q(x)可以分解因式为$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots$则对因式$(x-a)^k$，有理分式中它的完全分解为$\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$（有 k 次因式就需要分解为 1 到 k 次的部分分式的和），同理对因式$(x^2+px+q)^m$，完全

分解为$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}$；对其他的也都是一样。

有理分式分解为的 4 种类型的基本分式的和：I. $\frac{A}{x-a}$；II. $\frac{A}{(x-a)^k},k=2,3,...$；III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$；IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},m=2,3,...$，其中 A,M,N,a,p,q 都是实数，并且$x^2+px+q$是无实根的（若有就可以因式分解化为 I，II 两种形式），则$p^2\text{-}4q<0$，也表示$x^2+px+q>0$.

当我们千辛万苦通过分解成基本分式，再通过待定系数法求出系数，得到最终的分解式，I 和 II 的积分大家都很熟悉了，III 和 IV 稍稍复杂些，下面给出这四种类型基本分式的积分

I：$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+c$

II：$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+c$

III: $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

分析：i.分子是一次有理式或常数（M，N 不同时为 0，同时为 0 则不需讨论），若为一次式（M$\neq$0），则可以将其凑成分母的形式，使得分子化为常数，即

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{pM}{2}}{x^2+px+q}dx \quad \text{(分子需要分出 2x+p 凑微分)}$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{1}{x^2+px+q}d(x^2+px+q)+(N-\frac{pM}{2})\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+(N-\frac{pM}{2})\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$$

这样就变成求$\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$了，和这就相当于 M=0 的情况。有一点要注意的是常数的微分为 0，所以有时候别忘了在凑微分时给凑在 d 里面的式子加上常数，使之和积分里某个部分相等（如上）。

对$\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$，只要对分母配方(为了避免配方时出现分数，先分子分母同乘 4) 再做一些变换就行了，最后化为基本积分求得结果 (联想到

$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + c$）。

$$(N-\frac{\mathrm{pM}}{2})\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = (N-\frac{\mathrm{pM}}{2})\int \frac{4}{(2x+p)^2+4q-p^2}dx$$

$$= \frac{N-\frac{\mathrm{pM}}{2}}{4q-p^2}\int \frac{2}{(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1}dx \qquad (\text{变换为}\frac{1}{x^2+1}\text{形式})$$

$$= \frac{2N-\mathrm{pM}}{\sqrt{4q-p^2}}\int \frac{1}{(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1}d\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \qquad \text{（凑微分）}$$

$$= \frac{2N-\mathrm{pM}}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c$$

综上得 $\int \frac{\mathrm{Mx+N}}{x^2+px+q}dx = \frac{\mathrm{M}}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-\mathrm{pM}}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c$

ii．分母为二次函数，故可以直接配方，再将平方项换元，即

$x^2+px+q = (x+\frac{\mathrm{p}}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$，做变换 $x+\frac{\mathrm{p}}{2}=\mathrm{t}$ ，

$q-\frac{p^2}{4}=a^2 \quad \Rightarrow x^2+px+q=\mathrm{t}^2+a^2$,

$\mathrm{Mx+N}=\mathrm{Mt}+(\mathrm{N}-\frac{\mathrm{pM}}{2})$，dx=dt，那么原式就化为(式子比第一种方法更简明)

$$\int \frac{\mathrm{Mx+N}}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\mathrm{Mt}+(\mathrm{N}-\frac{\mathrm{pM}}{2})}{t^2+a^2}dt$$

$$= \mathrm{M}\int \frac{\mathrm{t}}{t^2+a^2}dt + (\mathrm{N}-\frac{\mathrm{pM}}{2})\int \frac{1}{t^2+a^2}dt$$

$$= \frac{\mathrm{M}}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{N-\frac{\mathrm{pM}}{2}}{a}\int \frac{1}{(\frac{t}{a})^2+1}d(\frac{t}{a}) \qquad (\text{同除}\,a^2)$$

$$= \frac{\mathrm{M}}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{N-\frac{\mathrm{pM}}{2}}{a}\arctan\frac{t}{a}+c$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-pM}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c \quad (\text{回代 } x+\frac{p}{2}=t)$$

通过对分子和分母变换的比较，可见先对配方后的平方项进行换元，可以得到简单的式子（t^2+a^2），这就使积分看起来更简单些(心理作用)。因为是对通式求解，所以换元 $x+\frac{p}{2}=t$ 放在任何含有 x^2+px+q 形式的题目里都适用.

IV． $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$

分析：1.同上面的换元法，则积分化为 $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Mt+(N-\frac{pM}{2})}{(t^2+a^2)^m}dt$

除了次数，其余的和 III 化出的形式无异，但因为次数较高，所以需要对将分母降次，按照步骤继续下去(同 III)

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Mt+(N-\frac{pM}{2})}{(t^2+a^2)^m}dt$$

$$=M\int\frac{t}{(t^2+a^2)^m}dt+(N-\frac{pM}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}dt$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}d(t^2+a^2)+(N-\frac{pM}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}dt$$

$$=-\frac{M}{2}\frac{1}{m-1}\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+(N-\frac{pM}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}dt$$

2.这里就是求积分 $\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}dt$ 了（书上有解答，这里再次说明），只要分母次数高（不能直接求出积分）就需要降次（三角函数换元也是需要降次的）,所以就要将 1 分解为 $1=\frac{1}{a^2}(t^2+a^2-t^2)$ 来降次，得到

$$\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}dt=\int\frac{\frac{1}{a^2}(t^2+a^2-t^2)}{(t^2+a^2)^m}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^m}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}dt-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^m}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}dt-\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{t}^2}{(t^2+a^2)^m}dt$$

我们设 $\mathrm{I}_m=\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}dt$，可知我们推出了比 I_m 低一次的式子 I_{m-1}，对积分

$\int\frac{\mathrm{t}^2}{(t^2+a^2)^m}dt$ 来说要降次的话，用上面的方法就又回到了原来的积分。除了分子进行变换，也可以对分母凑微分；因为分母是多项式，凑微分使其次数降低，即 $\frac{t^2}{(t^2+a^2)^m}dt=-\frac{t}{m-1}d\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}$(分子正好是 t^2，拿一个 t 进去，微分外只剩 t 了，别忘了 $-\frac{1}{m-1}$)，显然通过分部积分就变成求解 I_{m-1} 了；分部得到

$$\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^m}dt=-\frac{1}{m-1}\int td\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}$$

$$=-\frac{1}{m-1}\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}}+\frac{1}{m-1}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}dt$$

综合得到

$$\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}dt-\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{t}^2}{(t^2+a^2)^m}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}dt+\frac{1}{a^2}\frac{1}{m-1}\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}}-\frac{1}{a^2}\frac{1}{m-1}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{1}{m-1}\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{m-2}{m-1}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}dt$$

用 $\mathrm{I}_m=\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}dt$ 换元，有 $\mathrm{I}_m=\frac{1}{a^2}\frac{1}{m-1}\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{m-2}{m-1}\mathrm{I}_{m-1}$ (m=2,3,…);

m=1 时，$\mathrm{I}_1=\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+c$;

回代 $x+\frac{\mathrm{p}}{2}=\mathrm{t}$，$q-\frac{p^2}{4}=a^2$，$x^2+px+q=\mathrm{t}^2+a^2$ 有

$$\begin{cases}\mathrm{I}_m=\frac{2}{4q-p^2}\frac{1}{m-1}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\frac{4}{4q-p^2}\frac{m-2}{m-1}\mathrm{I}_{m-1},\mathrm{m}=2,3,\ldots\\ \mathrm{I}_1=\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c\end{cases}$$

最后我们可以得到 IV 的一般解形式了

$$\int\frac{\mathrm{Mx+N}}{(x^2+px+q)^m}dx=-\frac{\mathrm{M}}{2}\frac{1}{m-1}\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+(\mathrm{N}-\frac{\mathrm{pM}}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}dt$$

$$=-\frac{\mathrm{M}}{2}\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}}+(\mathrm{N}-\frac{\mathrm{pM}}{2})\mathrm{I}_m$$

虽然推导过程中并没有用到很难的方法，却是需要耐心和细心的；有些题写起来有很繁杂，考查的就是看能不能坚持做到最后，仔细检查每一步是不是哪里有遗漏。

至此，上面四种类型的基本积分就已经完全推导出来了，罗列如下：

I：$\int\frac{\mathrm{A}}{x-a}dx=\mathrm{A}\ln|\mathrm{x}-\mathrm{a}|+\mathrm{c}$

II：$\int\frac{\mathrm{A}}{(x-a)^k}dx=-\frac{\mathrm{A}}{k-1}\frac{1}{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{k-1}}+\mathrm{c}$，k=2,3,…

III: $\int\frac{\mathrm{Mx+N}}{x^2+px+q}dx=\frac{\mathrm{M}}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-\mathrm{pM}}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c$

IV：$\int\frac{\mathrm{Mx+N}}{(x^2+px+q)^m}dx=-\frac{\mathrm{M}}{2}\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}}+(\mathrm{N}-\frac{\mathrm{pM}}{2})\mathrm{I}_m$，m=2,3,..

其中 I_m 递推公式为

$$\begin{cases}\mathrm{I}_m=\frac{2}{4q-p^2}\frac{1}{m-1}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\frac{4}{4q-p^2}\frac{m-2}{m-1}\mathrm{I}_{m-1},\mathrm{m}=2,3,...\\ \mathrm{I}_1=\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c\end{cases}$$

$$\mathrm{I}_m=\int\frac{1}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+q)^m}dx$$

真分式分解为部分分式的方法书上已经介绍了，在此不再说明(分母没有给出乘积形式的有理式分母需要因式分解，化为乘积形式，再分解为部分分式的和)。一般得出分解式后我们是通过待定系数法，经过把部分分式通过：

1.通分左右两边分子对应项系数相等

2.通分代入特殊值

3.极限法等方法来求解

有理分式积分题有多种方法，待定系数是通用的一种得到和原式相等的部分分式和，再利用上面求基本分式积分的方法得到最终结果。下面通过一个简单的例子来体现求解方法(说明不需要很复杂的问题，只要说清楚就行了，做法都是一样的)：

例 1.1：求$\int\frac{1}{1+x^3}dx$

分析：i. 将分母因式分解，再分解为部分分式，得

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{\mathrm{A}}{1+x}+\frac{\mathrm{B}x+C}{x^2-x+1}$$

这里介绍极限法：我们将两边同乘 1+x，如果直接代入 x=-1 会使分母为 0；所以就要通分使两边分子相等，这时与分母无关可以就带 x=-1 了。还有一种避免使分母为 0 的方法，就是取极限；两边同乘 1+x，令 $x\to -1$，得到 $\mathrm{A}=\lim\limits_{x\to -1}(\frac{1+x}{1+x^3}+\frac{(\mathrm{B}x+C)(\mathrm{x}+1)}{x^2-x+1})=\frac{1}{3}$；取 x=0，得到 $C=\frac{2}{3}$；

取 x=1，B=$-\frac{1}{3}$；原积分可求积如下：

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+x^3}dx&=\int(\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1})dx\\&=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x}dx+\frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx\\&=\frac{1}{3}\ln|1+\mathrm{x}|-\frac{1}{6}\int\frac{2x\text{-}1\text{-}3}{x^2-x+1}dx \qquad (\text{配 } 2\mathrm{x}\text{-}1)\\&=\frac{1}{3}\ln|1+\mathrm{x}|-\frac{1}{6}\int\frac{2x\text{-}1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx\\&=\frac{1}{3}\ln|1+\mathrm{x}|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\\&=\frac{1}{6}\ln(\frac{(1+\mathrm{x})^2}{x^2-x+1})+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+\mathrm{c}\end{aligned}$$

ii.有理分式积分分子分母都是多项式，可以通过对分子进行配凑、分解化为几个积分的和，达到对分母降次和约化的效果，所以就要配出分母的因式或导数形式，我们知道$1+x^3=(1+\mathrm{x})(1-\mathrm{x}+x^2)$，对分子有$1=1-x+x^2\text{-}\mathrm{x}^2+\mathrm{x}$，可将积分化为三部分如下：

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+x^3}dx&=\int\frac{x^2-x+1-x^2+x}{1+x^3}dx\\&=\int\frac{1}{1+x}dx-\int\frac{x^2}{1+x^3}dx+\int\frac{x+1-1}{1+x^3}dx\\&=\ln|1+\mathrm{x}|-\frac{1}{3}\ln|1+\mathrm{x}^3|+\int\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int\frac{1}{1+x^3}dx\\&=\ln|1+\mathrm{x}|-\frac{1}{3}\ln|1+\mathrm{x}^3|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})-\int\frac{1}{1+x^3}dx\end{aligned}$$

求得$\int\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{6}\ln(\frac{(1+\mathrm{x})^2}{x^2-x+1})+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+\mathrm{c}$

这样避免了待定系数法要求系数的麻烦了，和待定系数法是等价的，所以也通用，

但有一定技巧（$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$，$\int \frac{1}{x^6+1}dx$）。

可以跳过下面这段，直接看方法（记住方法就行）。

我们来看 IV：$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = -\frac{M}{2}\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}}+(N-\frac{pM}{2})I_m$，m=2,3,..

其中 $I_m = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}dx$；

$$\begin{cases} I_m = \frac{2}{4q-p^2}\frac{1}{m-1}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \frac{4}{4q-p^2}\frac{m-2}{m-1}I_{m-1}, m=2,3,\ldots \\ I_1 = \frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c \end{cases}$$

我们把 $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$ 往后再推一步，是不是得到如下形式：

$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + a\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}}dx$（为了简化形式所有的常数都用符号代替：M'，N' 和 a），如果 m>2, 由 I_m 的递推公式可以得出：

$$\int \frac{a}{(x^2+px+q)^{m-1}}dx = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + b\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{m-2}}dx$$

继续下去，直到右边的指数变为 1 为止，即

$$\int \frac{u}{(x^2+px+q)^2}dx = \frac{Ix+J}{x^2+px+q} + v\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

我们把所有的想都合起来通分，

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$$

$$= v\int \frac{1}{x^2+px+q}dx + \frac{Ix+J}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}}$$

$$= v\int \frac{1}{x^2+px+q}dx + \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}}$$ （分母最高次为 m-1)

我们把 I，II：$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+c$ 和上式合起来，并且三种类型各两项，通分（这里 m、n、k、j 都是最高次数，p、q、e、f、a、b 都是常数）：

$$\int\frac{\mathrm{Mx+N}}{(x^2+px+q)^m}dx+\int\frac{\mathrm{Ex+F}}{(x^2+ex+f)^n}dx+\int\frac{\mathrm{A}}{x-a}dx+\int\frac{\mathrm{B}}{x-b}dx$$

$$+\int\frac{\mathrm{A}}{(x-a)^k}dx+\int\frac{\mathrm{B}}{(x-b)^j}dx$$

$$=\mathrm{v}\int\frac{1}{x^2+px+q}dx+\frac{R(\mathrm{x})}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\int\frac{\mathrm{A}}{x-a}dx+\int\frac{\mathrm{B}}{x-b}dx$$

$$+\mathrm{w}\int\frac{1}{x^2+ex+f}dx+\frac{S(\mathrm{x})}{(x^2+ex+f)^{n-1}}-\frac{\mathrm{A}}{k-1}\frac{1}{(\mathrm{x-a})^{k-1}}-\frac{\mathrm{B}}{j-1}\frac{1}{(\mathrm{x}-b)^{j-1}}$$

$$=\frac{\mathrm{G(x)}}{(x^2+px+q)^{m-1}(x^2+ex+f)^{n-1}(\mathrm{x-a})^{k-1}(x-b)^{j-1}}$$

$$+\int\frac{\mathrm{H(x)}}{(x^2+px+q)(x^2+ex+f)(\mathrm{x-a})(x-b)}dx$$

虽然形式复杂(项比较多)，但不难理解，通分后得到的积分里面的分母化为所有因子(都是一次)的乘积；另一项有理分式分母是将原分母除以所有因式的一次方得到（通分的结果），即所有的因式次数都是：各因式的最高次-1.

那么对所有的有理分式积分可通过上面的方法，可以化为这种形式：$\int\frac{\mathrm{P(x)}}{Q(\mathrm{x})}dx=\frac{\mathrm{P_1(x)}}{Q_1(\mathrm{x})}+\int\frac{\mathrm{P_2(x)}}{Q_2(\mathrm{x})}dx$，可知 $\frac{\mathrm{P_1(x)}}{Q_1(\mathrm{x})}$、$\frac{\mathrm{P_2(x)}}{Q_2(\mathrm{x})}$ 是真分式（$\deg \mathrm{P}_1<\deg Q_1$、$\deg \mathrm{P}_2<\deg Q_2$，都是由真分式通分得到），其中 $Q(\mathrm{x})=Q_1(\mathrm{x})Q_2(\mathrm{x})$，

$Q_1(\mathrm{x})=(\mathrm{x-a})^{k-1}\cdots(\mathrm{x^2+px+q})^{m-1}\cdots$，$Q_2(\mathrm{x})=(\mathrm{x-a})\cdots(\mathrm{x^2+px+q})\cdots$

(k,m 是因式最高次数)，对上面的式子求导，得到等价形式：

$\frac{\mathrm{P(x)}}{Q(\mathrm{x})}=(\frac{\mathrm{P_1(x)}}{Q_1(\mathrm{x})})'+\frac{\mathrm{P_2(x)}}{Q_2(\mathrm{x})}$，这就得到了另一种有理分式分解方法。

- 综合上面的推导，在部分分式分解法的基础上可以得到有理分式的额另一种分解方法（可以不看前面的，直接记住方法）：

首先有奥斯特洛格拉得斯基公式：$\int\frac{\mathrm{P(x)}}{Q(\mathrm{x})}dx=\frac{\mathrm{P_1(x)}}{Q_1(\mathrm{x})}+\int\frac{\mathrm{P_2(x)}}{Q_2(\mathrm{x})}dx$

其中，$Q(\mathrm{x})=(\mathrm{x-a})^k\cdots(\mathrm{x^2+px+q})^m\cdots$，$Q_1(\mathrm{x})=(\mathrm{x-a})^{k-1}\cdots(\mathrm{x^2+px+q})^{m-1}\cdots$，$Q_2(\mathrm{x})=(\mathrm{x-a})\cdots(\mathrm{x^2+px+q})\cdots$，显然 $Q(\mathrm{x})=Q_1(\mathrm{x})Q_2(\mathrm{x})$；且 $\frac{\mathrm{P_1(x)}}{Q_1(\mathrm{x})}$、$\frac{\mathrm{P_2(x)}}{Q_2(\mathrm{x})}$ 是真分

式.

对公式求导得$\frac{P(x)}{Q(x)}=(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)})'+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$，这就是要说明的分解方法。

我们在求有理分式积分时，$Q(x)$、$Q_1(x)$、$Q_2(x)$都是已知的，又$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$、$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$是都真分式。所以需要通过待定系数来求$P_1(x)$、$P_2(x)$，求解时需要将$P_1(x)$设为比$Q_1(x)$低一次的多项式，$P_2(x)$设为比$Q_2(x)$低一次的多项式，下面通过例题来体现。

例 1.2：求$\int\frac{1}{(1+x^3)^2}dx$

分析：我们运用上面的公式求解，$Q_1(x)=1+x^3$，$Q_2(x)=1+x^3$，所以要设$P_1(x)=Ax^2+Bx+C$，$P_2(x)=A_1x^2+B_1x+C_1$，由公式有下展开式：

$$\frac{1}{(1+x^3)^2}=(\frac{Ax^2+Bx+C}{1+x^3})'+\frac{A_1x^2+B_1x+C_1}{1+x^3}$$

先求出导数(分子分母都是多项式，虽然项多，但求导没有难度,熟悉形式就好)，再通分得：

$$1=(2Ax+B)(1+x^3)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(A_1x^2+B_1x+C_1)(1+x^3)$$

可以比较各项系数或代入特殊值求得待定系数(这里不再代)：

解出　$A=C=A_1=B_1=0, B=\frac{1}{3}, C_1=\frac{2}{3}$

则　$\int\frac{1}{(1+x^3)^2}dx=\frac{1}{3}\frac{x}{1+x^3}+\frac{2}{3}\int\frac{1}{1+x^3}dx$

我们已经在例 1.1 中求得$\int\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{6}\ln(\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1})+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$，代入即得$\int\frac{1}{(1+x^3)^2}dx=\frac{1}{3}\frac{x}{1+x^3}+\frac{1}{9}\ln(\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1})+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+c$

以上就是在有理分式积分中增加的方法.

二、无理函数：

无理函数，带根式的函数。较难的为二次无理根式（$\sqrt{ax^2+bx+c}$）和分式

根式（$\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}}$）的问题，这里对可以直接凑微分和简单的换元的问题就不做太多说明（书上很多习题），下面具体说明这几种类型题的解法.

I.我们先从分式根式开始，遇到形状为$\int R(\mathrm{x},\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}})dx$的积分

R 表示含有两个自变量（x 和$\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}}$）的有理函数，m 为自然数，$\alpha,\beta,\lambda,\delta$常数，含有$\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}}$形式的积分，一般对整体换元，解出的 x 的表达式不带根号，故可以转化为有理函数积分来做，令

$$\mathrm{t}=\omega(\mathrm{x})=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}}\Rightarrow t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}\Rightarrow x=\varphi(\mathrm{t})=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\lambda t^m}$$

则积分$\int R(\mathrm{x},\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}})dx=\int R(\varphi(\mathrm{t}),t)\varphi'(\mathrm{t})dt$，变为有理函数积分了(因为$R$，$\varphi$，$\varphi'$都是有理函数)，再利用有理函数积分法来求，最后将 t=$\omega(\mathrm{x})$代回.

对$\int R(\mathrm{x},(\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta})^s,(\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta})^t,\cdots)dx$，s,t,…都是有理数设 s,t,…公分母为 m 则$(\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta})^s$，$(\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta})^t$，…都是$\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}}$的整数次方，t=$\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}}$换元后，$(\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta})^s$，$(\dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta})^t$都变成了 t 的整数次方，积分化为有理函数积分。

例 2.1：$\int\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)^2}}dx$

分析：分母为三次根式，利用上面的方法，需要分子分母都为一次函数，如果将分子分母同乘 x+1,就可以得到$\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{\mathrm{x}-1}}$了，再令

t=$\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{\mathrm{x}-1}}\Rightarrow x=\dfrac{t^3+1}{t^3-1}\Rightarrow dx=d(\dfrac{t^3+1}{t^3-1})=\dfrac{-6t^2}{(t^3-1)}dt$，代入原积分得到

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)^2}}dx=\int\frac{1}{1+x}\sqrt[3]{\frac{x+1}{\mathrm{x}-1}}dx=-3\int\frac{1}{t^3-1}dt \qquad \text{(代入化简)}$$

$$=\int(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1})dt \qquad \text{(有理分式分解)}$$

$$=\int(-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{2}\frac{3}{t^2+t+1})dt \qquad \text{(凑 2t+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^3-1}{(t-1)^3}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c \qquad \text{（代回 } t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\text{,略）}$$

简单的如 $\sqrt[m]{ax+b}$ 也属于上面的情况.

变式： 形如 $\int R(x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}})dx$ (其中 $a\neq b$)(a-x 或 b-x 也一样)的积分,n,p,q 为整数，只要 p+q=kn，k 为整数时，就可以化为有理函数积分。可知有 $\frac{p}{n}=k-\frac{q}{n}$

对 $(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}$ 变换，有

$$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}=(x-a)^k(\frac{x-b}{x-a})^{\frac{q}{n}},$$

设 x-a>0,只要令 $t=(\frac{x-b}{x-a})^{\frac{1}{n}}$，就可以将被积函数转化为有理函数，像例 3. $\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}dx$，其中 n=-3,m=1,n=2,令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，就化为有理函数积分了.

书上有些形如 $x^m(a+bx^n)^p$ 函数的积分(例 $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$， $\int\frac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt[3]{x})^2}dx$ 等)，称 $x^m(a+bx^n)^p$ 为二项式微分，那么这种题型有没有通用的解决方法呢？答案是肯定的，有如下定理：

切比雪夫定理：二项式微分的不定积分 $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ 为初等函数(可求积分)的充分必要条件是有理数 m,n,p 满足以下三个条件之一：

(1).p 为整数

(2). $\frac{m+1}{n}$ 为整数

(3). $\frac{m+1}{n}$+p 为整数

上面是说的是可积性，在此不做严格证明，使用方法会在推导中体现。

分析：因为 $(a+bx^n)^p$ 里含有 x 的高次幂，所以令 $z=x^n$，将 $a+bx^n$ 转化为 z 的一次函数，解出 $x=z^{\frac{1}{n}}$，将函数变量转化为 z，有

$$x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p dx=\frac{1}{n}(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz$$

令 $\frac{m+1}{n}-1=p$，积分化为 $\int x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p dx=\frac{1}{n}\int(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^q dz$

i. 如果 p 是整数，我们知道有理数可以表示成分数的形式，可设 $m=\frac{m_1}{\mathrm{N}},n=\frac{n_1}{\mathrm{N}}$,其中 m_1,n_1,N 都是整数，N 为 m,n 公分母，且 N>0 ，

令 t= $x^{\frac{1}{N}}$，有 $x=t^N$， $x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p dx=x^{\frac{m_1}{\mathrm{N}}}(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^{\frac{n_1}{\mathrm{N}}})^p dx=Nt^{m_1}(\mathrm{a}+bt^{n_1})^p t^{N-1}dt$, 可以看出积分化成有理函数积分了,积分化为

$$\int x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p dx=\int x^{\frac{m_1}{\mathrm{N}}}(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^{\frac{n_1}{\mathrm{N}}})^p dx=N\int t^{m_1+N-1}(\mathrm{a}+bt^{n_1})^p dt$$

ii. 若 p 不是整数，设 P=$\frac{u}{v}$，则有

$$\int x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p dx=\frac{1}{n}\int(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^q dz=\frac{1}{n}\int(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{\frac{u}{v}} z^q dz\ ,$$

表达式变为 $\int \mathrm{R}(\mathrm{z},\sqrt[v]{\mathrm{a}+\mathrm{bz}})dz$ 了,这种形式的积分在前面已经说明过，做替换

$t=\sqrt[v]{\mathrm{a}+\mathrm{bz}}$ (则 $\mathrm{z}=\frac{t^v-a}{b}$)，积分化为

$$\int x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p dx=\frac{1}{n}\int(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{\frac{u}{v}} z^q dz\ =\frac{v}{nb}\int t^u(\frac{t^v-a}{b})^q t^{v-1}dt$$

要使得积分有理化，有理化的前提是每一个部分都要化为有理函数，要使 z^q 为有理函数，则 q=$\frac{m+1}{n}$ 就要为整数。

iii. 从前面可以看到 $\sqrt[m]{ax+b}$ 为 $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\delta}}$ 特殊形式，正好是 ii 的情况，我们对 $(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^q$ 做一下变换，使得分子分母都含一次函数，那么只有用 z 或 a+bz 做变换，$(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^q=(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{bz}}{z})^p z^{p+q}$,使得

$$(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^q=(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{bz}}{z})^{\frac{u}{v}} z^{p+q}$$

才能满足形式不变,， 令 t=$(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{bz}}{z})^{\frac{1}{v}}$(则 $\mathrm{z}=\frac{a}{t^v-b}$)，积分化为

$$\int x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p\,dx=\int(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{bz}}{z})^{\frac{u}{v}}z^{p+q}dz=-\frac{av}{n}\int t^u(\frac{a}{t^v-b})^{p+q}\frac{t^{v-1}}{(t^v-b)^2}dt$$

所以 p+q =p+$\frac{m+1}{n}$要为整数才能化为有理函数积分。

- 方法：不定积分$\int x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p\,dx$，其中 N(>0)为 m,n 公分母，p=$\frac{u}{v}$

  i. p 为整数，令$t=x^{\frac{1}{N}}$

  ii. $\frac{m+1}{n}$为整数，令$t=\sqrt[v]{\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n}$

  iii. p+$\frac{m+1}{n}$为整数，令$t=\sqrt[v]{\mathrm{ax}^{-n}+\mathrm{b}}$

经过以上替换后，满足条件的积分$\int x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p\,dx$都可以化为有理函数积分了。

注：当然 m，n，p 都为整数时为有理函数积分;虽然可积，但对有理函数上面的方法不太适用。

例 2.2：求$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

分析：先将函数化为$x^m(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)^p$的形式$\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$，即

$m=-\frac{1}{2},n=\frac{1}{4},p=\frac{1}{3},a=1,b=1$,则 v=3，其中$\frac{m+1}{n}$=2，属于第 ii 种类型，令

$t=(1+\mathrm{x}^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$，有$t^3=1+\mathrm{x}^{\frac{1}{4}}$，$x=(\mathrm{t}^3\text{-}1)^4$，$\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{t}{(\mathrm{t}^3\text{-}1)^2}$，$dx=12t^2(\mathrm{t}^3\text{-}1)^3dt$；

于是积分化为

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int 12t^3(\mathrm{t}^3\text{-}1)dt=\frac{3}{7}t^4(4\,\mathrm{t}^3-7)+\mathrm{c}\,,$$

回代$t=(1+\mathrm{x}^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$，有

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\frac{3}{7}(1+\mathrm{x}^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}(4\,\mathrm{x}^{\frac{1}{4}}-3)+\mathrm{c}$$

例 2.3：求$\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$

分析：将函数改为二项式微分的形式：$\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}=x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

则$m=5,n=2,p=-\dfrac{1}{2}$，得到$\dfrac{m+1}{n}=3$, $v=2$为第 ii 种类型，做替换

$t=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1-x^2}$，有$x^2=1-t^2$，$\dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{(1-t^2)^2}{t}x$，$xdx=-tdt$(间接求微分)；积分化为：

$$\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int(1-t^2)^2dt=-\int(1-2t^2+t^4)dt=-\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3-t+c$$

将$t=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1-x^2}$回代，得

$$\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=-\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}(3\mathrm{x}^4+4\mathrm{x}^2+8)+\mathrm{c}$$

对某些特殊形式的二项式微分：$x^k(1-\mathrm{x}^2)^{-\frac{1}{2}}$，$(1+x^k)^{-\frac{1}{k}}$，对任意整数 k，都是可积的（后者$k\neq 0$）；另外前面提到的$(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\frac{p}{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{b})^{\frac{q}{n}}$，只要令$t=x-a$或$t=x-b$，就可以化为二项式微分了。

二项式微分的积分都能表示为积分$\int(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^q dz$的形式，要求积分（高次数的情况，或次数不确定的情况），就要得到它的递推公式.

分析：尽量使得递推式角标里不出现$p-1$和$q-1$；因为两个量都可以变化，所以需要两个递推式

设$J_{p,q}=\int(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^q dz$，那么有$J_{p+1,q}=\int(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}z^q dz$，

拆开$(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}z^q=\mathrm{a}(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^q+\mathrm{b}(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^{q+1}$，推得$J_{p+1,q}=aJ_{p,q}+bJ_{p,q+1}$

再拆就得不到新的表达式了，为此我们来构造一个递推式：
重点转向二项式微分的导数(乘积的导数)，很显然可以得到另一个递推式，取$(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}\mathrm{z}^{q+1}$求导，得

$$((\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}\mathrm{z}^{q+1})'=(\mathrm{p}+1)\mathrm{b}(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p\mathrm{z}^{q+1}+(q+1)(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}\mathrm{z}^q$$

再积分就有$(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}z^{q+1}=(\mathrm{p}+1)\mathrm{b}\int(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^p z^{q+1}dz+(q+1)\int(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}z^q dz$

即 $$(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}z^{q+1}=(\mathrm{p}+1)\mathrm{b}J_{p,q+1}+(q+1)J_{p+1,q}$$

综上我们得到两个式子：$J_{p+1,q}=aJ_{p,q}+bJ_{p,q+1}$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}z^{q+1}=(\mathrm{p}+1)\mathrm{b}J_{p,q+1}+(q+1)J_{p+1,q}$$

由此可解出两个公式：

(i) $J_{p,q}=-\dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}z^{q+1}}{a(\mathrm{p}+1)}+\dfrac{p+q+2}{a(\mathrm{p}+1)}J_{p+1,q},(\mathrm{p}\neq-1)$

(ii) $J_{p,q}=\dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}z^{q+1}}{a(\mathrm{p}+1)}-b\dfrac{p+q+2}{a(\mathrm{p}+1)}J_{p,q+1},(\mathrm{q}\neq-1)$

这样我们可以把 p 或 q 增加 1(p 或 q 不为-1，适用于 p 或 q 为负数的情况)

再将 $J_{p+1,q}$， $J_{p,q+1}$ 解出来，再将 $J_{p+1,q}$ 推为 $J_{p,q}$、 $J_{p,q+1}$ 推为 $J_{p,q+1}$ 得到

(iii) $J_{p,q}=\dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p}z^{q+1}}{p+q+1}+\dfrac{ap}{p+q+1}J_{p-1,q},(\mathrm{p}+q\neq-1)$

(iv) $J_{p,q}=\dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{bz})^{p+1}z^{q}}{b(p+q+1)}-\dfrac{ap}{b(p+q+1)}J_{p,q-1},(\mathrm{p}+q\neq-1)$

这样我们可以把 p 或 q 减少 1，(适用于 p 或 q 为正数的情况，所以递推公式出现 p-1,q-1 了)

例 2.4:求 $\int(1-\mathrm{x})^{p}x^{q}dx$，(p,q 为自然数)

分析:因为 p,q 为自然数，可以使用公式 iii、 iv，这里用 iii

得到 $\int(1-\mathrm{x})^{p}x^{q}dx=\dfrac{(1-x)^{p}x^{q+1}}{p+q+1}+\dfrac{p}{p+q+1}\int(1-\mathrm{x})^{p-1}x^{q}dx$

我们在定积分里要证明两个形式相似的定积分见过

$\int_0^1(1-\mathrm{x})^{p}x^{q}dx=\int_0^1(1-\mathrm{x})^{q}x^{p}dx$，我们看 1-x 和 x,只要令 t=1-x，有 x=1-t 那么两部分换过来了：

$$\int_0^1(1-\mathrm{x})^{p}x^{q}dx=\int_1^0 t^{p}(1-\mathrm{t})^{q}d(1-\mathrm{t})=-\int_1^0 t^{p}(1-\mathrm{t})^{q}dt$$
$$=\int_0^1 t^{p}(1-\mathrm{t})^{q}dt=\int_0^1 x^{p}(1-x)^{q}dx$$

在做变量替换时别忘了改变积分上下限，因为变量不同了；还有积分与积分符号无关(只是一个符号，如上 t 最后变为 x)。这种题型只有在被积函数具有某种对称性时才会出现，像上面的题，还有三角等。

回到正题，对 $\int(1-\mathrm{x})^{p}x^{q}dx$ 取 0 到 1 积分，有

$$\int_0^1 x^{p}(1-x)^{q}dx=\frac{p}{p+q+1}\int_0^1(1-\mathrm{x})^{p-1}x^{q}dx\ ,$$

继续推下去直到 $(1-\mathrm{x})^{p-1}$ 化为 1，我们得到

$$\int_0^1 x^{p}(1-x)^{q}dx=\frac{p(\mathrm{p}-1)\cdots1}{(p+q+1)(\mathrm{p}+\mathrm{q})\cdots(\mathrm{q}+2)}\int_0^1 x^{q}dx$$

最后 $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx=\dfrac{p(\mathrm{p}-1)\cdots 1}{(p+q+1)(\mathrm{p}+\mathrm{q})\cdots(\mathrm{q}+2)(\mathrm{q}+1)}=\dfrac{\mathrm{p}!\mathrm{q}!}{(\mathrm{p}+\mathrm{q}+1)!}$(上下同乘 q!)

II.下面来说明含二次无理式的有理函数积分 $\int R(\mathrm{x},\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

(R(u,v)为 u,v 的二元有理函数)的求解方法，在做无理函数的积分时，会遇到 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分，计算起来比较麻烦。这类积分最简单的情况都已经很熟悉了，即：

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2\pm x^2}}dx,\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx,\int\sqrt{x^2-a^2}dx,\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx$$

上面的积分一般是通过三角换元来求的，$\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx$ 和

$\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 可以通过变量替换(规范化)，化为上面的积分。

对一些基本积分有如下公式(可按平时的方法自行推导)：

1. $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c$,

$$\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln|\alpha x+\sqrt{\alpha(\alpha x^2+\beta)}|+c,(\alpha>0)\\ \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\arcsin(\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}x)+\mathrm{c}',(\alpha<0)\end{cases}$$

2. $\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx$，采用分部积分(或三角换元)，将根式变成分母，化为上面的积分，有

$$\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx=x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int\frac{\alpha x^2}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx$$

$$=x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int\frac{\alpha x^2+\beta-\beta}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx \qquad \text{（分子配凑）}$$

$$=x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx+\beta\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx \qquad \text{(得到了原积分)}$$

由上面得出：$\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{\alpha x^2+\beta}+\frac{\beta}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx$

这样就是第一种情况了.

3.令有$\int\frac{1}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx,\int\frac{1}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx,\int\frac{1}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}dx,$可通过变量带换（或三角换元）令$t=\frac{1}{x}$求解，三个积分分别为：

$$\int\frac{1}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}}dt\quad,$$

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=-\int\frac{t}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}}dt=-\frac{1}{\beta}\sqrt{\alpha+\beta t^2}+\mathrm{c}=-\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{\beta x}+\mathrm{c}\quad,$$

$$\int\frac{1}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}dx=-\int\frac{t}{(\alpha+\beta t^2)^{\frac{3}{2}}}dt=\frac{1}{\beta}\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}}+c=\frac{1}{\beta}\frac{x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}+c$$

4.还有$\int\frac{x^2}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx,\int\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{x}dx,\int\frac{x^2}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}dx,$可通过恒等变换化为前面的积分：

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=\frac{1}{\alpha}\int\frac{\alpha x^2+\beta-\beta}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=\frac{1}{\alpha}\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx-\frac{\beta}{\alpha}\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx,$$

$$\int\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{x}dx=\int\frac{\alpha x^2+\beta}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=\sqrt{\alpha x^2+\beta}+\beta\int\frac{1}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx,$$

$$\int\frac{x^2}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{\alpha}\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx-\frac{\beta}{\alpha}\int\frac{1}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}dx$$

5．对二次三项式ax^2+bx+c，可通过配方换元规范化，即

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}((2\mathrm{ax}+\mathrm{b})^2+4ac-b^2)$$

令$\mathrm{t}=2\mathrm{ax}+\mathrm{b}$，$\Delta=b^2-4ac$，通过换元去掉一次项，将二次函数规范化

则对积分$\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$通过上面的方法，可求积为

$$\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2\mathrm{ax}+\mathrm{b}+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}|+\mathrm{c},(\mathrm{a}>0)\\-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+c,(\mathrm{a}<0)\end{cases}$$

上面没有对推导过程分析，有些没给出过程(可自行推导)，除了式子比较繁杂外，方法是很简单的。

我们将$\int R(\mathrm{x},\sqrt{ax^2+bx+c})dx$一些简单的情形说明之后，下面来看看一般的情况。设 y=$\sqrt{ax^2+bx+c}$，其中设$a\neq 0$，因为 R 为有理函数，我们把 R 的分子、分母只含 x(不包含在 y 里的)的项和在一起，把含 y 的项和并将 y 提出来，则 R(x,y)可化为一般形式

$$\mathrm{R(x,y)}=\frac{P_1(\mathrm{x})+P_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y}}{P_3(\mathrm{x})+P_4(\mathrm{x})\,\mathrm{y}},$$

其中$P_i(\mathrm{x})$为整多项式，分子分母都含无理式，我们将分母有理化上下同乘$P_3(\mathrm{x})-P_4(\mathrm{x})\,\mathrm{y}$(平方差公式)，得到

$$\mathrm{R(x,y)}=\frac{P_1(\mathrm{x})+P_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y}}{P_3(\mathrm{x})+P_4(\mathrm{x})\,\mathrm{y}}=\frac{(P_1(\mathrm{x})+P_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y})(P_3(\mathrm{x})-P_4(\mathrm{x})\,\mathrm{y})}{P_3{}^2(\mathrm{x})-P_4{}^2(\mathrm{x})\,\mathrm{y}^2}$$

$$=\frac{(P_1(\mathrm{x})P_3(\mathrm{x})-P_2(\mathrm{x})P_4(\mathrm{x})\,\mathrm{y}^2)+(P_2(\mathrm{x})P_3(\mathrm{x})-P_1(\mathrm{x})P_4(\mathrm{x}))\,\mathrm{y}}{P_3{}^2(\mathrm{x})-P_4{}^2(\mathrm{x})\,\mathrm{y}^2}$$

设$R_1(\mathrm{x})=P_1(\mathrm{x})P_3(\mathrm{x})-P_2(\mathrm{x})P_4(\mathrm{x})\,\mathrm{y}^2$， $R_2(\mathrm{x})=P_2(\mathrm{x})P_3(\mathrm{x})-P_1(\mathrm{x})P_4(\mathrm{x})$

$Q(\mathrm{x})=P_3{}^2(\mathrm{x})-P_4{}^2(\mathrm{x})\,\mathrm{y}^2$，易知$R_1(\mathrm{x})$， $R_2(\mathrm{x})$， $Q(\mathrm{x})$都是多项式

得 R(x,y)$=\frac{R_1(\mathrm{x})}{Q(\mathrm{x})}+\frac{R_2(\mathrm{x})}{Q(\mathrm{x})}y$；有$\frac{R_1(\mathrm{x})}{Q(\mathrm{x})}$， $\frac{R_2(\mathrm{x})}{Q(\mathrm{x})}$为有理分式

有理分式积分前面已经讲到，所以只要看第二项$\frac{R_2(\mathrm{x})}{Q(\mathrm{x})}y$，

令 A(x)=$\frac{R_2(\mathrm{x})}{Q(\mathrm{x})}y$，则 A(x)=$\frac{R_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y}^2}{Q(\mathrm{x})\,\mathrm{y}}=\frac{R_2(\mathrm{x})(ax^2+bx+c)}{Q(\mathrm{x})\,\mathrm{y}}$，

令$R_3(\mathrm{x})=R_2(\mathrm{x})(ax^2+bx+c)$,得到 A(x)=$\frac{R_3(\mathrm{x})}{Q(\mathrm{x})}\frac{1}{\mathrm{y}}$。因为$\frac{R_3(\mathrm{x})}{Q(\mathrm{x})}$为有理分式可以分整式和真有理分式的部分分子之和，设整式为$P(\mathrm{x})$；部分分式一般形式为

$\frac{1}{(\mathrm{x}-\alpha)^k},k=1,2,\ldots$， $\frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q})^m},m=1,2,\ldots$.

通过推导最后得出结论如下

求$\int R(\mathrm{x},\sqrt{ax^2+bx+c})dx$等价于求下面三种形式的积分:

I. $\int \frac{P(\mathrm{x})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

II. $\int \frac{1}{(\mathrm{x}-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{dx}, k=1,2,\ldots$

III. $\int \frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q})^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{dx}, m=1,2,\ldots$

其中所有系数为实数，$P(\mathrm{x})$ 为整式，$\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q}$ 无实根，下面我们来讨论这三种积分的求法。

I.因为 $P(\mathrm{x})$ 为整式(假设为 n 次多项式)，则 $P(\mathrm{x})$ 可写为

$P(\mathrm{x})=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，积分就为

$$\int \frac{P(\mathrm{x})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\sum_{m=0}^{n}a_m\int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

转化为求积分 $\int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$， $m=0,1,2,\ldots$； m=0 就是 $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$，

下面认为 $\mathrm{m}\geq 1$，$\int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 中含有 x 的高次方，要求积分就要求它的递推公式，再由递推公式求解，设 $I_m=\int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$，利用分部积分把 x^m 降次，通过对分子的配凑得到：

$$\begin{aligned}I_m&=\int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{1}{a}\int \frac{2ax^m+bx^{m-1}-bx^{m-1}}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\\&=\frac{1}{a}\int \frac{(2ax+b)x^{m-1}}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx-\frac{b}{2a}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\\&=\frac{1}{a}\int x^{m-1}d\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2a}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\\&=\frac{1}{a}x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{m-1}{a}\int x^{m-2}\sqrt{ax^2+bx+c}dx-\frac{b}{2a}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\end{aligned}$$

这里可以看到已经出来 I_{m-1} 了，第二项积分中对 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 分子有理化，分子就变为我们需要的三项式，将积分分为三部分，就可以看出 I_m, I_{m-1}, I_{m-2} 的

关系了，上面积分继续推导：

法一：$I_m=\frac{1}{a}x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{m-1}{a}\int x^{m-2}\sqrt{ax^2+bx+c}dx-\frac{b}{2a}\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$=\frac{1}{a}x^{m-1}y-\frac{m-1}{a}\int x^{m-2}\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx-\frac{b}{2a}\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$=\frac{1}{a}x^{m-1}y-\frac{m-1}{a}\int\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx-\frac{b}{2a}\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$=\frac{1}{a}x^{m-1}y-(m-1)\int\frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx-\frac{b(2m-1)}{2a}\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx-\frac{c(m-1)}{a}\int\frac{x^{m-2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$=\frac{1}{a}x^{m-1}y-(m-1)I_m-\frac{b(2m-1)}{2a}I_{m-1}-\frac{c(m-1)}{a}I_{m-2}$$

所以我们得到；$I_m=\frac{1}{a}x^{m-1}y-(m-1)I_m-\frac{b(2m-1)}{2a}I_{m-1}-\frac{c(m-1)}{a}I_{m-2}$，化简

最终求得递推公式为：$maI_m+(\mathrm{m}-\frac{1}{2})\mathrm{b}\,I_{m-1}+(m-1)cI_{m-2}=x^{m-1}y$

法二：我们要确定I_m,I_{m-1}或者I_m,I_{m-1},I_{m-2}的关系，也相当于要确定$\frac{x^m}{y},\frac{x^{m-1}}{y}$或$\frac{x^m}{y},\frac{x^{m-1}}{y},\frac{x^{m-2}}{y}$之间的关系，可以通过求导降低幂次来推，首先求得$y'=\frac{2ax+b}{2y}$，用$\frac{x^{m-1}}{y}$求导就可以把$x^m$，$x^{m-2}$联系起来：

$$(\frac{x^{m-1}}{y})'=\frac{(\mathrm{m}-1)x^{m-2}\,\mathrm{y}-\frac{2ax+b}{2y}x^{m-1}}{y^2}=\frac{(\mathrm{m}-1)x^{m-2}}{y}-\frac{2ax^m+bx^{m-1}}{2y^3}$$

两边积分得

$$\frac{x^{m-1}}{y}=\int(\frac{(\mathrm{m}-1)x^{m-2}}{y}-\frac{2ax^m+bx^{m-1}}{2y^3})dx=(\mathrm{m}-1)I_{m-2}-\int\frac{2ax^m+bx^{m-1}}{2y^3}dx$$

因为第二项含有$\frac{1}{y^3}$，所以很难得到三者之间的关系，此种方法行不通。那么除了除法的导数可以把x^m，x^{m-2}联系起来，乘法也可以(乘式的导数和除式的导数的分子只是中间正负号有区别而已)，我们采用乘式的导数来求：

$$(x^{m-1}y)'=(\mathrm{m}-1)\,\mathrm{x}^{m-2}\,y+\frac{2ax+b}{2y}x^{m-1}$$

$$=(\mathrm{m}-1)\,\mathrm{x}^{m-2}\,\frac{y^2}{y}+\frac{2ax+b}{2y}x^{m-1}$$

$$=(\mathrm{m}-1)\,\mathrm{x}^{m-2}\,\frac{ax^2+bx+c}{y}+\frac{2ax+b}{2y}x^{m-1}$$

$$=(\mathrm{m}-1)\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}}{y}+\frac{ax^{m-1}+\frac{b}{2}x^{m-1}}{y}$$

$$=ma\frac{x^m}{y}+(\mathrm{m}-\frac{1}{2})b\frac{x^{m-1}}{y}+(\mathrm{m}-1)c\frac{x^{m-2}}{y}$$

很显然，得到了我们想要的式子，只需两边积分即可：

$$x^{m-1}y=maI_m+(\mathrm{m}-\frac{1}{2})bI_{m-1}+(\mathrm{m}-1)cI_{m-2}$$

已知 $I_0=\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2\mathrm{ax}+\mathrm{b}+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}|+\mathrm{c},(\mathrm{a}>0)\\ -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+c,(\mathrm{a}<0)\end{cases}$

取 m=1，有 $I_1=\frac{1}{a}y-\frac{b}{2a}I_0$

接着取 m=2，有 $I_2=\frac{1}{4a^2}(2\mathrm{ax}-3\mathrm{b})y+\frac{1}{8a^2}(3b^2-4\mathrm{ac})I_0$

再进行下去，可以发现每一个 I_m 的 y 前面的多项式都是 m-1 次(即 $x^{m-1}y$ 的次数)，第二项为 I_0 的常数倍，则 I_m 可以表示为

$I_m=P_{m-1}(\mathrm{x})\,\mathrm{y}+\lambda_m I_0$，其中 $P_{m-1}(\mathrm{x})$ 为(m-1)次多项式，λ_m 为常数，最后积分都化为 I_0 了。

前面有 $\int\frac{P(\mathrm{x})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$=\sum_{m=0}^{n}a_m\int\frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\sum_{m=0}^{n}a_mI_m\qquad(I_m\text{ 的线性组合})$$

$$=\sum_{m=0}^{n}a_m(P_{m-1}(\mathrm{x})\,\mathrm{y}+\lambda_mI_0)$$

$$=\sum_{m=0}^{n} a_m P_{m-1}(\mathrm{x})\,\mathrm{y}+\sum_{m=0}^{n} a_m \lambda_m I_0$$

$$=Q(\mathrm{x})\,\mathrm{y}+\lambda I_0=Q(\mathrm{x})\,\mathrm{y}+\lambda\int\frac{1}{y}dx$$

其中 $Q(\mathrm{x})$ 为(n-1)次多项式(比 $P(\mathrm{x})$ 低一次，因为 $\sum_{m=0}^{n} a_m P_{m-1}(\mathrm{x})$ 最高次为(n-1))，

$\lambda=\sum_{m=0}^{n} a_m \lambda_m$.

上面的公式可写成：$\int\frac{P(\mathrm{x})}{y}dx=Q(\mathrm{x})\,\mathrm{y}+\lambda\int\frac{1}{y}dx$，其中 $\mathrm{y}=\sqrt{ax^2+bx+c}$，$Q(\mathrm{x})$ 为比 $P(\mathrm{x})$ 低一次的多项式，λ 为常数。

对两边求导乘 y，得到 $P(\mathrm{x})=Q'(\mathrm{x})(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q(\mathrm{x})(2\mathrm{ax}+\mathrm{b})+\lambda$，可以通过待定系数法确定多项式 $Q(\mathrm{x})$，从而求得积分 $\int\frac{P(\mathrm{x})}{y}dx$ 。

例 2.5 求 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

分析：i.我们先用一般方法，对分母规范化(即配方用变量 t 替换平方里的式子)，即令 $t=x-1$，有 $\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=\frac{(\mathrm{t}+1)^3}{\sqrt{2-t^2}}$， $dx=dt$,代入积分得：

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=\int\frac{(\mathrm{t}+1)^3}{\sqrt{2-t^2}}dt=\int\frac{-t(2-t^2)-3(2-t^2)+5\mathrm{t}+7}{\sqrt{2-t^2}}dt \qquad (凑\ 2-t^2)$$

$$=-\int t\sqrt{2-t^2}dt-3\int\sqrt{2-t^2}dt+5\int\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{2-t^2}}dt+7\int\frac{1}{\sqrt{2-t^2}}dt$$

$$=\frac{1}{3}(2-t^2)^{\frac{3}{2}}-3(\frac{1}{2}t\sqrt{2-t^2}+\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}})-5\sqrt{2-t^2}+7\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}+c$$

$$=-\frac{1}{6}(2t^2+9t+26)\sqrt{2-t^2}+4\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}+c$$

$$=-\frac{1}{6}(2x^2+5x+19)\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c \qquad (回代\ t=x-1)$$

ii．使用上面的待定系数法，令$\frac{x^3}{y}=((\mathrm{A}x^2+Bx+C)\,\mathrm{y})'+\frac{\lambda}{y}$

即$x^3=(2\mathrm{A}x+B)(1+2x-x^2)+\frac{1}{2}(\mathrm{A}x^2+Bx+C)(-2x+2)+\lambda$

比较两边系数得到线性方程组：$\begin{cases}-3A=1\\5A-2B=0\\2A+3B-C=0\\B+C+\lambda=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}A=-\frac{1}{3}\\B=-\frac{5}{6}\\C=-\frac{19}{6}\\\lambda=4\end{cases}$

则积分化为$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=-\frac{1}{6}(2x^2+5x+19)\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$$=-\frac{1}{6}(2x^2+5x+19)\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c$$

接下来，我们来看 II

II. $\int\frac{1}{(\mathrm{x}-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{dx},k=1,2,\ldots$像这种形式的不定积分，可以通过倒代换(取倒数)，将分母的有理式换成分子有理式。

令$t=\frac{1}{x-\alpha}$，有$x=\alpha+\frac{1}{t},\frac{1}{(\mathrm{x}-\alpha)^k y}=\frac{t^k}{y},dx=-\frac{1}{t^2}dt$，

$$y=\sqrt{a(\alpha+\frac{1}{t})^2+b(\alpha+\frac{1}{t})+c}=\frac{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)\,\mathrm{t}^2+(2a\alpha+\mathrm{b})\,\mathrm{t}+a}}{t}$$

代入，原积分化为

$$\int\frac{1}{(\mathrm{x}-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{dx}=-\int\frac{t^{k-1}}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)\,\mathrm{t}^2+(2a\alpha+\mathrm{b})\,\mathrm{t}+a}}\mathrm{d}t,$$

如果α为$ax^2+bx+c=0$的根，那分母就是一次根式了，前面已经说过；如果α不为$ax^2+bx+c=0$根，那就化为 I 的情况了。

例：2.6 求$\int\frac{1}{(\mathrm{x}-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}dx$

分析：我们采用到代换令$t=\frac{1}{x-1}$，有$x=1+\frac{1}{t},dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}dx = -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-2t^2}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-2t^2-1}{\sqrt{1-2t^2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{1-2t^2}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-2t^2}}dt$$

$$= \frac{1}{4}t\sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t + c$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^3} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1} + c \qquad （回代 t = \frac{1}{x-1})$$

最后，我们来求最难、最一般的情况:

III. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, m=1,2,\ldots$

分两种情况讨论：

i. $a(x^2+px+q)=ax^2+bx+c$，则积分

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$= a^m\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx = \frac{a^{m-1}}{2}\int \frac{M(2ax+b)-Mb+2aN}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx$$

$$= \frac{Ma^{m-1}}{2}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx + \frac{a^{m-1}}{2}(2aN-Mb)\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx$$

$$= \frac{Ma^{m-1}}{(2m-1)}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m-1}{2}}} + \frac{a^{m-1}}{2}(2aN-Mb)\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx$$

因此，我们只需计算积分 $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx$ (即 $\int \frac{1}{y^{2m+1}}dx$)，就可以得到原积分的最后解了.分母为高次数，考虑将分母降次，则需用分母凑微分，可知凑微分需要 y'(这是除式分母凑微分是必要的)，我们先来探究 y 与 y' 之间的关系：有 $y^2 = ax^2+bx+c$，两边求导得 $2yy' = 2ax+b$，平方得

$4y^2y'^2 = 4a^2x^2+4abx+b^2$ (y^2 就是二次函数，所以考虑平方化简)

$4y^2y'^2 = 4a(ax^2+bx+c)+b^2-4ac = 4ay^2+b^2-4ac$

最后化得$y^2=\frac{1}{4}\frac{4ac-b^2}{a-y'^2}$，倒过来有

$$\frac{1}{y^2}=\frac{4}{4ac-b^2}(a-y'^2)\Rightarrow\frac{1}{y^{2m+1}}=\frac{1}{y}(\frac{4}{4ac-b^2})^m(a-y'^2)^m$$

这样就化出了关于y'的有理式.

在变量代换后需要改变积分变量，上面画出了关于y'的有理式，就把y'作为新变量，所以就要求出dy'，对$2yy'=2ax+b$微分，得

$y'dy+ydy'=adx\Rightarrow y'^2dx+ydy'=a\,\mathrm{dx}\Rightarrow dx=\frac{y}{a-y'^2}dy'$，将上面的

$\frac{1}{y^{2m+1}}=\frac{1}{y}(\frac{4}{4ac-b^2})^m(a-y'^2)^m$和在一起，有$\frac{dx}{y^{2m+1}}=(\frac{4}{4ac-b^2})^m(a-y'^2)^{m-1}dy'$

两边积分最终得：$\int\frac{1}{y^{2m+1}}dx=(\frac{4}{4ac-b^2})^m\int(a-y'^2)^{m-1}dy'$

令$t=y'$，有 $\int\frac{1}{y^{2m+1}}dx=(\frac{4}{4ac-b^2})^m\int(a-t^2)^{m-1}dt$

这样我们通过上面的推导，将原来以x为积分变量的无理函数积分转化为了以y'为积分变量的有理函数积分。

结论：在$a(\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q})=ax^2+bx+c$时，令$t=y'=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$，

积分 $\int\frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q})^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{dx}$

$$=\frac{\mathrm{M}a^{m-1}}{(2m-1)}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m-1}{2}}}+\frac{a^{m-1}}{2}(2\mathrm{aN}-\mathrm{Mb})\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}\mathrm{dx}$$

先分离，再将$\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}\mathrm{dx}$化为有理函数积分，

替换$t=y'=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$，$\frac{dx}{y}=\frac{dt}{a-t^2}$，称为阿贝尔变换。

m=1 时，有 $\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{dx}=\frac{2}{4ac-b^2}\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+C$

ii　$a(\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q})\neq ax^2+bx+c$,即两个多项式无次数大于 1 的公因式，

有时候直接凑很难解出来，所以考虑将两个二次函数规范化(都化成 $\omega t^2+\varphi$ 的形式, $b=ap$ 时直接规范化，下设 $b\neq ap$)，则需要一起消掉一次项(b=ap)，在 II 中，我们使用倒代换($t=\frac{1}{x-\alpha}$， $x=\alpha+\frac{1}{t}$)，求 II 类型积分的，得到结果

$$\int\frac{1}{(\mathrm{x}-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{dx}=-\int\frac{t^{k-1}}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)\,\mathrm{t}^2+(2a\alpha+\mathrm{b})\,\mathrm{t}+a}}\mathrm{d}t$$

如果 $2a\alpha+\mathrm{b}=0$，就把 ax^2+bx+c 一次项消掉了，若要消去 $\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q}$ 的一次项，需引入另一个参数，和上面不同的是我们要对一般的 $\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q}$ 进行变换，首先引入两个参数 u,v，令 $x=\mathrm{u}+\frac{v}{t}$，代入两个二次函数得：

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q}=(\mathrm{u}+\frac{v}{t})^2+\mathrm{p}(\mathrm{u}+\frac{v}{t})+\mathrm{q}=\frac{(u^2+\mathrm{p}u+\mathrm{q})t^2+(2uv+pu)t+v^2+\mathrm{p}v}{t^2}$$

$$\mathrm{ax}^2+b\,\mathrm{x}+c=a(\mathrm{u}+\frac{v}{t})^2+b(\mathrm{u}+\frac{v}{t})+c=\frac{(\mathrm{a}u^2+bu+c)t^2+(2auv+bu)t+av^2+bv}{t^2}$$

要使一次项消掉，则必有

$\begin{cases}2uv+pu=0\\2auv+bu=0\end{cases}$，解出两组解 $\begin{cases}u=0\\v=0\end{cases},\begin{cases}u\neq 0\\b=ap\end{cases}$，可知这两组解都不满足条件

问题出在我们用 $x=\mathrm{u}+\frac{v}{t}$ 替换前二次函数的常数项对替换后的函数无影响(q 和 c 还是 q 和 c 而且替换后 $v^2+\mathrm{p}v$， av^2+bv 缺的也是常数 q 和 c)，说明替换需要改进,要把 q 和 c 引入分子，就要把 t 换做 t+1。做新的替换 $x=\frac{ut+v}{t+1}$ (分式线性替换)，代入二次函数得到：

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q}=(\frac{ut+v}{t+1})^2+\mathrm{p}(\frac{ut+v}{t+1})+\mathrm{q}=\frac{(u^2+\mathrm{p}u+\mathrm{q})t^2+(2uv+p(u+v)+2q)t+(v^2+\mathrm{p}v+q)}{(t+1)^2}$$

$$\mathrm{ax}^2+b\,\mathrm{x}+c=a(\frac{ut+v}{t+1})^2+b(\frac{ut+v}{t+1})+c=\frac{(\mathrm{a}u^2+bu+c)t^2+(2auv+b(u+v)+2\mathrm{c})t+(av^2+bv+c)}{(t+1)^2}$$

要消去一次项，有方程组：

$$\begin{cases}2auv+b(u+v)+2c=0\\2uv+p(u+v)+2q=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2uv+\dfrac{b}{a}(u+v)+2\dfrac{c}{a}=0\\2uv+p(u+v)+2q=0\end{cases}$$，令 $p'=\dfrac{b}{a},q'=\dfrac{c}{a}$

$$\Rightarrow\begin{cases}2uv+p'(u+v)+2q'=0\\2uv+p(u+v)+2q=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}uv=-2\dfrac{q-q'}{p-p'}\\u+v=\dfrac{p'q-q'p}{p-p'}\end{cases}$$

可见，u,v 为二次方程 $(p-p')z^2+2(q-q')z+(p'q-q'p)=0$ 的根，并且为两相异实根(相同则 $x=u$)，其判别式 $\Delta>0$，即 $(q-q')^2-(p-p')(p'q-q'p)>0$，

变形，$(q-q')^2-(p-p')(p'q-q'p)$

$=\dfrac{1}{4}(4(q-q')^2-4pp'(q+q')+4p'^2q+4p^2q')$

$=\dfrac{1}{4}(4(q+q')^2-4pp'(q+q')-16qq'+4p'^2q+4p^2q')$

$=\dfrac{1}{4}(4(q+q')^2-4pp'(q+q')+p^2p'^2-p^2p'^2+4p'^2q+4p^2q'-16qq')$ (配平方)

$=\dfrac{1}{4}((2(q+q')-pp')^2-p^2p'^2+4p'^2q+4p^2q'-16qq')$ (后面 4 项可以因式分解)

$=\dfrac{1}{4}((2(q+q')-pp')^2-(p^2-4q)(p'^2-4q'))$

则 $(q-q')^2-(p-p')(p'q-q'p)>0$，相当于 $(2(q+q')-pp')^2>(p^2-4q)(p'^2-4q')$

我们得到 p^2-4q，p'^2-4q' 恰好为 $x^2+px+q=0$，$x^2+p'x+q'=0$ 的判别式

已知 $4q-p^2>0$，如果 $4q'-p'^2<0$，不等式显然成立；若 $4q'-p'^2>0$，

则 $q'>0$，又 $b\neq ap$ (即 $p\neq p'$)，用基本不等式，

$(2(q+q')-pp')^2>(4\sqrt{qq'}-pp')^2$

$=16qq'+p^2p'^2-4qp'^2-4q'p^2+4qp'^2+4q'p^2-8pp'\sqrt{qq'}$

$=(p^2-4q)(p'^2-4q')+4(p'\sqrt{q}-p\sqrt{q'})^2$ (配 $(p^2-4q)(p'^2-4q')$)

$>(p^2-4q)(p'^2-4q')$

这样就证明了二次方程必有两不等实根，即证明存在实数 u,v，使得二次三项式

x^2+px+q，ax^2+bx+c，经过分式线性替换 $x=\frac{ut+v}{t+1}$ 后，能同时消去一次项，达到规范化。

做替换后，令 $\gamma=u^2+pu+q,\lambda=v^2+pv+q,\alpha=au^2+bu+c,\beta=av^2+bv+c$

$$x^2+px+q=(\frac{ut+v}{t+1})^2+p(\frac{ut+v}{t+1})+q=\frac{\gamma t^2+\lambda}{(t+1)^2},$$

$$ax^2+bx+c=a(\frac{ut+v}{t+1})^2+b(\frac{ut+v}{t+1})+c=\frac{\alpha t^2+\beta}{(t+1)^2},$$

有 $Mx+N=(Mu+N)+\frac{M(v-u)}{t+1}$，$dx=-\frac{v-u}{(t+1)^2}dt$

积分化为

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=-\int\frac{(t+1)^{2m+1}((Mu+N)+\frac{M(v-u)}{t+1})}{(\gamma t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\frac{v-u}{(t+1)^2}dt$$

$$=\int-\frac{(v-u)(Mu+N)(t+1)^{2m-1}(Mu+N)+M(v-u)^2(t+1)^{2m-2}}{(\gamma t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$$

再令 $P(t)=-\frac{1}{\gamma^m}((v-u)(Mu+N)(t+1)^{2m-1}(Mu+N)+M(v-u)^2(t+1)^{2m-2})$

最终化为 $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{P(t)}{(t^2+\eta)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$

可知 $P(t)$ 为 2m-1 次多项式($\eta=\frac{\lambda}{\gamma}$ 且 $\eta>0$)，,则 $\frac{P(t)}{(t^2+\eta)^m}$ (m>1)为真有理分式，将其分解为部分分式，得到形如 $\int\frac{At+B}{(t^2+\eta)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$，$(k=1,2,...,m)$ 的积分的和，在对上式操作有：

$$\int\frac{At+B}{(t^2+\eta)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt=\frac{A}{\alpha}\int\frac{\alpha t}{(t^2+\eta)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt+B\int\frac{1}{(t^2+\eta)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$$

第一个积分先凑微分再用替换 $s=\sqrt{\alpha t^2+\beta}$，就可以化为有理函数积分；第二个作阿贝尔变换 $s=\frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}$,($t^2=\frac{\beta s^2}{\alpha^2-\alpha s^2}$ 为有理分式)，有

$\frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\frac{ds}{\alpha-s^2}$，$t^2+\eta=\frac{(\beta-\alpha\eta)s^2+\eta\alpha^2}{\alpha(\alpha-s^2)}$，代入积分最终得到

$$\int\frac{1}{(t^2+\eta)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt=\alpha^m\int\frac{(\alpha-s^2)^{k-1}}{((\beta-\alpha\eta)s^2+\eta\alpha^2)^k}ds$$

积分化为有理函数积分了。

结论：形如$\int\frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q})^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{dx}$的积分，先作分式线性替换

$x=\frac{ut+v}{t+1}$，导出$\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q}$和$ax^2+bx+c$，通过分子的一次项的系数为 0，解出 u,v 使得$\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q}$和$ax^2+bx+c$规范化，规范化后通过有理真分式部分分式分解，最后对分解后的各部分作变量代换和阿贝尔替换就化为有理函数积分了。

例 2.7 求$\int\frac{x+3}{(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}}dx$

分析：作分式线性替换$x=\frac{ut+v}{t+1}$(设 t+1>0)，代入$\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1$和$\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1$得

$$\mathrm{x}^2\pm\mathrm{x}+1=\frac{(u^2\pm u+1)t^2+(2\mathrm{uv}\pm(\mathrm{u}+\mathrm{v})+2)\mathrm{t}+(v^2\pm v+1)}{(\mathrm{t}+1)^2}$$

要满足

$$2\mathrm{uv}\pm(\mathrm{u}+\mathrm{v})+2=0$$

取一组值$u=1,v=-1$，有

$$x=\frac{t-1}{t+1},x+3=\frac{4t+2}{t+1},\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1=\frac{t^3+3}{(t+1)^2},\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}=\frac{\sqrt{3t^3+1}}{t+1},dx=\frac{2}{(t+1)^2}dt$$

经过代换，$\int\frac{x+3}{(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}}dx=\int\frac{(8\mathrm{t}+4)}{(\mathrm{t}^2+3)\sqrt{3t^2+1}}dt$

$$=4\int\frac{1}{(\mathrm{t}^2+3)\sqrt{3t^2+1}}dt^2+4\int\frac{1}{(\mathrm{t}^2+3)\sqrt{3t^2+1}}dt$$

对第一个积分：

令$p=\sqrt{3t^2+1}$，有$t^2=\frac{p^2-1}{3},\frac{1}{(\mathrm{t}^2+3)\sqrt{3t^2+1}}=\frac{3}{(p^2+8)p},dt^2=\frac{2}{3}pdp$

得到：

$$4\int\frac{1}{(\mathrm{t}^2+3)\sqrt{3t^2+1}}dt^2=8\int\frac{1}{p^2+8}dp$$

$$=2\sqrt{2}\arctan\frac{p}{2\sqrt{2}}+c_1=2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{3t^2+1}{8}}+c_1$$

对第二个积分：

应用阿贝尔替换,令 $q=\frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}$，有

$$\frac{dt}{\sqrt{3t^2+1}}=\frac{dq}{3-q^2},\mathrm{t}^2+3=\frac{27-8q^2}{9-3q^2},\frac{dt}{(\mathrm{t}^2+3)\sqrt{3t^2+1}}=\frac{3dq}{27-8q^2}$$

得到：
$$4\int\frac{1}{(\mathrm{t}^2+3)\sqrt{3t^2+1}}dt=12\int\frac{1}{27-8q^2}dq$$

$$=\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}q}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}q}\right|+c_2=\ln\left|\frac{\sqrt{9t^2+3}+2\sqrt{2}t}{\sqrt{9t^2+3}-2\sqrt{2}t}\right|+c_2$$

于是
$$\int\frac{x+3}{(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}}dx=2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{3t^2+1}{8}}+\ln\left|\frac{\sqrt{9t^2+3}+2\sqrt{2}t}{\sqrt{9t^2+3}-2\sqrt{2}t}\right|+c$$

最后将 $t=\frac{x+1}{x-1}$ 回代，求得最终形式：

$$\int\frac{x+3}{(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}}dx=2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{2(\mathrm{x}-1)}\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}\right)$$

$$+\ln\left|17-\frac{16(\mathrm{x}-1)^2}{x^2(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)}+\frac{2\sqrt{6}(\mathrm{x}+1)\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}}{x(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)}\right|+c$$

对于形如 $R(\mathrm{x},\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})$ 的积分 $(a\neq 0,c\neq 0,ad\neq bc)$，我们只要令其中的一个作变量代换，取 $x=\sqrt{ax+b}$，

$$则有\ x=\frac{t^2-b}{a},cx+d=\frac{ct^2+(\mathrm{ad}-\mathrm{bc})}{a}$$

可见，积分化为 $\int R(\mathrm{x},\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分形式了。

上面说明了有理函数除以(乘能化为除)二次无理式 y=$\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分问题，对于更一般问题，是否有更好的方法解决呢？观察 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，如果 ax^2+bx+c 不是完全平方式，则对整体作变换不能化为有理函数，最主要的原因

是 x^2 项无法消去；ax^2+bx+c 有二次项，替换式平方也必须有二次项，所以针对 ax^2+bx+c 不同的情况，分以下三种替换来消去二次项。

以下三种方法叫欧拉替(代)换法：

I. a>0 时，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$；可见平方后化简 ax^2 就没有了，这就得到关于 x 的一次方程，解出 x 为 t 的有理函数：

令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=-\sqrt{a}x+t$，平方 $ax^2+bx+c=ax^2-2\sqrt{a}tx+t^2$，有

$$x=\frac{t^2-c}{\mathrm{b}+2\sqrt{a}t},\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},dx=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt,$$

别忘了最后回代时 $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$.

同理令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$ 也一样.

II. c>0 时，我们可以通过消去常数项，约去一个 x 达到降次为一次函数的目的，所以可作替换 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$，同样取一个讨论：

令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$，平方 $ax^2+bx+c=x^2t^2+2\sqrt{c}xt+c$，有

$$ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t,x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2},\mathrm{dx}=\frac{2(\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a)}{(a-t^2)^2}dt$$

回代时 $t=\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$，最后化为 t 的有理函数了

对于上面两种情况，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(\frac{1}{z})^2+b\frac{1}{z}+c}=\dfrac{\sqrt{a+bz+cz^2}}{|z|}$，

可知 I，II 可以互相转化。

III. 二次三项式 ax^2+bx+c 有两相异实根 x_1,x_2 ($x_1<x_2$)，则 ax^2+bx+c 可分解为

$ax^2+bx+c=a(\mathrm{x}-x_1)(\mathrm{x}-x_2)$，那么我们可以通过约去一个因式来降次，可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(\mathrm{x}-x_1)$,(选 $\mathrm{x}-x_1$ 还是 $\mathrm{x}-x_2$ 都一样)，两边平方后可以约去($\mathrm{x}-x_1$)从而降次：$ax^2+bx+c=a(\mathrm{x}-\mathrm{x}_1)(\mathrm{x}-\mathrm{x}_2)=t^2(\mathrm{x}-x_1)^2$

有 $a(\mathrm{x}-\mathrm{x}_2)=t^2(\mathrm{x}-x_1)$，从而

$$x=\frac{-a\,\mathrm{x}_2+x_1t^2}{t^2-a},\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-\mathrm{x}_2)t}{t^2-a},\quad dx=\frac{2a(x_2-\mathrm{x}_1)t}{(t^2-a)^2}dt$$

最后回代 $t^2=a\dfrac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}-x_1}$， $t=\pm\sqrt{a\dfrac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}-x_1}}$

对 $\sqrt{a(\mathrm{x}-x_1)(\mathrm{x}-x_2)}$ 做点小小的改动： $\sqrt{a(\mathrm{x}-x_1)(\mathrm{x}-x_2)}=(\mathrm{x}-x_1)\sqrt{a\dfrac{\mathrm{x}-x_2}{\mathrm{x}-x_1}}$

即 $\sqrt{ax^2+bx+c}==(\mathrm{x}-x_1)\sqrt{a\dfrac{\mathrm{x}-x_2}{\mathrm{x}-x_1}}$，因而

$$R(\mathrm{x},\sqrt{ax^2+bx+c})=\mathrm{R}_1(\mathrm{x},\sqrt{a\frac{\mathrm{x}-x_2}{\mathrm{x}-x_1}})$$

R_1 为有理函数，在前面已经处理过形如 $\mathrm{R}_1(\mathrm{x},\sqrt{a\dfrac{\mathrm{x}-x_2}{\mathrm{x}-x_1}})$ 的积分了。

如果 ax^2+bx+c 无实根，a<0 是不可能的(开口必须向上保证 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 有意义)，所以 a>0，c>0 采用 I 和 II 替换法。

下面通过一个例题来展示这三种替换法

例：2.8 求 $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}dx$

分析：可知根式 $\sqrt{x^2+3x+2}$ 满足欧拉替换三种方法的条件。

i. 用第一种欧拉代换 $\sqrt{x^2+3x+2}=t-x$ (即 $t=x+\sqrt{x^2+3x+2}$)，

平方得 $\quad x=\dfrac{t^2-2}{2t+3},dx=\dfrac{2(t^2+3t+2)}{(2t+3)^2}dt$

积分化为 $\quad\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}dx$

$$=-2\int\frac{(3\mathrm{t}+4)(t^2+3t+2)}{\mathrm{t}(2t+3)^3}dx$$

$$=\int(-\frac{16}{27}\mathrm{t}-\frac{17}{54}\frac{1}{2t+3}-\frac{4}{9(2t+3)^2}+\frac{1}{6(2t+3)^3})dt$$

$$=-\frac{8}{27}t^2-\frac{17}{108}\ln|2t+3|+\frac{2}{9(2t+3)}-\frac{1}{12(2t+3)^2}+c \quad \text{(回代略)}$$

ii．用第二种欧拉代换 $\sqrt{x^2+3x+2}=xt+\sqrt{2}$ (即 $t=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{2}}{x}$)

平方得 $x=\dfrac{3-2\sqrt{2}t}{t^2-1},dx=\dfrac{2\sqrt{2}t^2-6t+2\sqrt{2}}{(t^2-1)^2}dt$

积分化为 $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}dx$

$$=\int\frac{(3-\sqrt{2}-(3+2\sqrt{2})t-\sqrt{2}t^2)(2\sqrt{2}t^2-6t+2\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2}+(3-2\sqrt{2})t-\sqrt{2}t^2)(t^2-1)^2}dx$$

计算量太大，不作要求。

iii．用第三种欧拉代换，因为 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，作

$\sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1)$ (即 $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$)，平方得到 $x=\dfrac{2-t^2}{t^2-1},dx=-\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}dt$，

积分化为

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}dx=-2\int\frac{t(t+2)}{(t-1)(t-2)(t+1)^3}dt$$

$$=\int(-\frac{17}{108(t+1)}+\frac{5}{18(t+1)^2}+\frac{1}{5(t+1)^3}+\frac{3}{4(t-1)}-\frac{16}{27(t-2)})dt$$

$$=\frac{1}{108}\ln\left|\frac{(t-1)^{81}}{(t+1)^{17}(t-2)^{64}}\right|-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{1}{6(t+1)^2}+C$$

$$=\frac{1}{108}\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+3x+2}-x-1)^{81}}{(\sqrt{x^2+3x+2}+x+1)^{17}(\sqrt{x^2+3x+2}-2x-2)^{64}}\right|$$

$$-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{9}x+(\frac{1}{3}x+\frac{1}{18})\sqrt{x^2+3x+2}+C$$

Iv. 将分母有理化展开：

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}dx=-\int\frac{(x-\sqrt{x^2+3x+2})}{3x+2}dx$$

$$=-\int\frac{2x^2+3x+2}{3x+2}dx+\int\frac{2x\sqrt{x^2+3x+2}}{3x+2}dx$$

$$=-\int\frac{2x^2+3x+2}{3x+2}dx+\frac{2}{3}\int\sqrt{x^2+3x+2}dx-\frac{4}{3}\int\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{3x+2}dx$$

对第一个积分得

$$-\int\frac{2x^2+3x+2}{3x+2}dx=-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{9}x-\frac{8}{27}\ln|2x+3|+C$$

对第二个积分得

$$\frac{2}{3}\int\sqrt{x^2+3x+2}dx=\frac{1}{6}(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}-\frac{1}{12}\ln|2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2}|+C$$

对于第三个积分需要通过分子有理化变为前面讲的类型，先令$t=x+\frac{2}{3}$，则积分化为

$$-\frac{4}{3}\int\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{3x+2}dx=-\frac{4}{9}\int\frac{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}{t}dt=-\frac{4}{9}\int\frac{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}{t\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}dt$$

$$=-\frac{4}{9}\int\frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}dt-\frac{20}{27}\int\frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}dt-\frac{16}{81}\int\frac{1}{t\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}dt\quad\text{(分子分为3部分)}$$

$$=-\frac{2}{9}\int\frac{2t+\frac{5}{3}}{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}dt-\frac{10}{27}\int\frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}dt+\frac{16}{81}\int\frac{1}{t\sqrt{1+\frac{5}{3t}+\frac{4}{9t^2}}}d(\frac{1}{t})$$

$$=-\frac{4}{9}\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}-\frac{10}{27}\ln|t+\frac{5}{6}+\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}|-\frac{8}{27}\ln|t|+\frac{8}{27}\ln|t+\frac{8}{15}+\frac{4}{5}\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}|+C$$

$$=-\frac{4}{9}\sqrt{x^2+3x+2}-\frac{10}{27}\ln|2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2}|+\frac{8}{27}\ln|\frac{5x+6+4\sqrt{x^2+3x+2}}{3x+2}|+C$$

合并三积分结果得

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}dx=-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{9}x+\frac{1}{18}(6x+1)\sqrt{x^2+3x+2}$$

$$+\frac{1}{108}\ln|\frac{(5x+6+4\sqrt{x^2+3x+2})^{32}}{(3x+2)^{64}(2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2})^{49}}|+C$$

到这里，简单的有理函数和无理函数不定积分的基本理论已经说完了，最后都归结为有理函数积分来求解，方法也在理论和例题中展示给了大家，遇到较难的有理无理函数的不定积分题，除了积不出来的，其余情况都可以用我上面提到的方法将函数化为有理函数来求.

三．三角函数

前面未涉及三角函数，一是三角换元，二是含纯三角函数的有理式，学完不定积分同学们对能够进行三角换元的几种形式应该都熟稔了，一在大多数情况下可以化为二的情况，这两种情况都是比较简单的，当然要懂得运用我用文字叙述的内容的常用方法：

一、六个三角函数之间的基本关系：三角函数相互转化的桥梁；

二、和差角公式：分解（$2a=(x+a)-(x-a)$，$2x=(x+a)+(x-a)$）或分离（就是基本的）三角函数里的常数；

三、二倍角公式:常用来降次，升次，注意几种常用变式；

四、半角公式：出现$\sqrt{1\pm\cos\alpha}$可使用；

五、和差化积公式:（注意是同三角函数间的）把和式化为积式，可将积式的一部分化为常数来简化积分（如$A\sin t$或$A\mathrm{cost}$）；

六、积化和差公式:（和差角公式）将乘式分开更好求积，遇到几个不同变量的三角函数相乘，利用积化和差一步步化为单个的三角函数；

七、万能公式:三角函数化为有理函数的万能带换，任何时刻都可使用，但要看函数是否变容易了；

八、引入φ角:（不同三角函数之间），遇到$A\sin\alpha+B\cos\beta$的式子可考虑引入φ角，化为一个三角函数

九、1 和$\frac{\alpha}{2}$：无中生有，将 1 分解为三角函数来化简函数，联想到与 1 相关的三角函数公式；有时候需要将α变为$\frac{\alpha}{2}$，需要用到二倍角公式

以上是基本公式的常用方法，一般的三角函数积分用以上公式都是可以解出来的，读者可自己去体会，下面具体来说一些三角函数积分的积分方法.

我们先来看看万能公式的使用，称为万能公式是因为可以把任意只含三角函数的积分都化为代数函数积分，再通过代数积分求解，但往往会使计算量变大，一般在某些情况下使用，正弦，余弦函数都可以化为以半角的正切函数为变量的有理式，即：

$\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$，令$t=\tan\frac{x}{2}$的话，这些式子就化为$\mathrm{sinx}=\frac{2t}{1+t^2},\mathrm{cosx}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\mathrm{tanx}=\frac{2t}{1-t^2}$，并且有$dx=\frac{2}{1+t^2}$，所以被积函数就变成以 t 为自变量的函数了，即有$\int R(\mathrm{sinx},\mathrm{cosx})\,\mathrm{dx}=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$，其中$R(u,v)$为$u,v$的有理函数 ，则经过万能公式代换后，$\int R(\mathrm{sinx},\mathrm{cosx})\,\mathrm{dx}$完全

化为有理函数积分了，即$\int R(\mathrm{sinx},\mathrm{cosx})\,\mathrm{dx}$总能求得原函数.

例:求 $\int \frac{1}{1-\varepsilon\cos x}dx,(\varepsilon<1)$

分析：分母中含cosx，不好直接使用一般的公式，考虑利用万能公式，将函数化为有理函数，令$t=\tan\frac{x}{2}$，则有$\frac{1}{1-\varepsilon\cos x}dx=2\int\frac{1}{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)t^2}dt$，积分化为

$$\int\frac{1}{1-\varepsilon\cos x}dx=2\int\frac{1}{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)t^2}dt$$

$$=2\sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon^2}}\int\frac{1}{1+(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}t)^2}d\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}t \qquad \text{(配凑)}$$

$$=2\arctan(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}t)+c$$

$$=2\arctan(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{x}{2})+c \qquad \text{（回代）}$$

另有积分：$\int\frac{1}{A\cos^2x+2B\sin x\cos x+C\sin^2t}dx$

万能公式是二倍角公式推导出来的，所以使用万能公式和二倍角公式是等价的，只是使用二倍角公式中间多了几个步骤，上式也可以按如下方法做：

$$\int\frac{1}{1-\varepsilon\cos x}dx=\int\frac{1}{1-\varepsilon(2\cos^2\frac{x}{2}-1)}dx$$

$$=\int\frac{1}{1-\varepsilon(2\cos^2\frac{x}{2}-1)}dx=\int\frac{1}{(1+\varepsilon)-2\varepsilon\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1+\varepsilon}{\cos^2\frac{x}{2}}-2\varepsilon}dx=2\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{(1+\varepsilon)\sec^2\frac{x}{2}-2\varepsilon}d\frac{x}{2}$$

$$=2\int\frac{1}{(1+\varepsilon)\tan^2\frac{x}{2}-2\varepsilon}d\tan\frac{x}{2}=2\int\frac{1}{(1+\varepsilon)\tan^2\frac{x}{2}+1-\varepsilon}d\tan\frac{x}{2}$$

$$=2\sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon^2}}\int\frac{1}{(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{x}{2})^2+1}d\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}$$

$$=2\arctan(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{x}{2})+\mathrm{c}$$

万能公式有时会使计算量变大(很明显)，所以会让它的使用受限制；遇到形如 $\int R(\mathrm{sinx},\mathrm{cosx})\,\mathrm{dx}$ 的积分时，时常要将某三角函数凑成微分，如果在入手这种积分前分析就知道了要凑微分的三角函数，心里就有个底了，那么怎么才能快速的知道要凑微分的是那个三角函数呢？首先我们来看被积函数的性质 $R(\mathrm{u},\mathrm{v})$，u,v 可以为变量，也可以为函数，R 为有理函数(记住此时的 R 就是 u,v 组合成的多项式或多项式分式)，我们来看 u,v 符号变化时函数 R 的性质：

1. 若 $R(-\mathrm{u},\mathrm{v})=R(\mathrm{u},\mathrm{v})$，则 R 中包含 u 的偶次幂，可化为 $R(-\mathrm{u},\mathrm{v})=R_1(\mathrm{u}^2,\mathrm{v})$
2. 若 $R(-\mathrm{u},\mathrm{v})=-R(\mathrm{u},\mathrm{v})$，则 R 中包含 u 的奇次幂，可化为 $R(-\mathrm{u},\mathrm{v})=R_2(\mathrm{u}^2,\mathrm{v})\mathrm{u}$
3. 当 $R(-\mathrm{u},-\mathrm{v})=R(\mathrm{u},\mathrm{v})$ 时，将函数变形为

$$R(\mathrm{u},\mathrm{v})=R(-\mathrm{u},-\mathrm{v})=R(-\frac{\mathrm{u}}{v}\mathrm{v},-\mathrm{v})=R^*(\frac{\mathrm{u}}{v},\mathrm{v})$$

改变 u,v 的符号，则有 $R^*(\frac{\mathrm{u}}{v},\mathrm{v})=R^*(\frac{\mathrm{u}}{v},-v)$，由 1 得 $R^*(\frac{\mathrm{u}}{v},\mathrm{v})=R_1^*(\frac{\mathrm{u}}{v},\mathrm{v}^2)$.

令 $u=\sin x, v=\cos x$，这样对三种情况中 u,v 变号的情况

情形 1. u 变号 $R(\mathrm{u},\mathrm{v})$ 也变号，此时

$$R(\sin x,\cos x)dx=R_0(\sin^2 x,\cos x)\sin xdx=-R_0(1-\cos^2 x,\cos x)d\cos x$$

函数转化成 $\cos x$ 的有理函数(作替换 $t=\cos x$).

同理，v 变号 $R(\mathrm{u},\mathrm{v})$ 也变号，此时

$$R(\sin x,\cos x)dx=R_0^*(\sin x,\cos^2 x)\cos xdx=R_0^*(\sin x,1-\sin^2 x)d\sin x$$

函数转化成 $\sin x$ 的有理函数(作替换 $t=\sin x$).

情形 2. u,v 同时改变符号时 $R(\mathrm{u},\mathrm{v})$ 的值不改变，由 3 推得

$$R(\sin x,\cos x)dx=R^*(\tan x,\cos x)dx$$

$$=R_1^*(\tan x,\cos^2 x)dx=R_1^*(\tan x,\frac{1}{1+\tan^2 x})dx=\tilde{R}(\tan x)dx$$

则作替换 $t=\tan x,(-\frac{\pi}{2}<\mathrm{x}<\frac{\pi}{2})$，求得 $R(\sin x,\cos x)dx=\frac{\tilde{R}(t)}{1+t^2}dt$，同样有理化了.

对任意有理表达式 $R(\mathrm{u},\mathrm{v})$，都可以表示成上面的三种特殊类型表达式之和

$$R(\mathrm{u},\mathrm{v})=\frac{R(\mathrm{u},\mathrm{v})-R(\mathrm{u},-\mathrm{v})}{2}+\frac{R(-\mathrm{u},\mathrm{v})-R(-\mathrm{u},-\mathrm{v})}{2}+\frac{R(-\mathrm{u},-\mathrm{v})-R(\mathrm{u},\mathrm{v})}{2}$$

其中，第一个式子在 u 变号时变号，第二个式子在 v 变号时也变号，而第三个式子在 u,v 同时变号时值不变，对 $R(\mathrm{u},\mathrm{v})$ 求积时先将函数分为上面三项，再进行各自对应的替换求积，就得到原式的积分了.

对 $R(\sin^2\mathrm{x},\mathrm{sinxcosx},\cos^2\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$，只要令 $t=\tan\mathrm{x}$ (万能公式，对应的是 2x)，有

$$\cos^2\mathrm{x}=\frac{1}{1+t^2},\mathrm{cosxsinx}=\frac{t}{1+t^2},\sin^2\mathrm{x}=\frac{t^2}{1+t^2},dx=\frac{1}{1+t^2}dt$$

就实现有理化了.

三角函数积分中会碰到三角函数线性分式型的积分，

即 $R(\sin x,\mathrm{cosx})=\dfrac{a\sin x+b\cos x}{\alpha\sin x+\beta\cos x}$ 的积分，我们可以将它分离常数，使得分子仅含 $\sin x$ 或 $\cos x$，化为

$R_1(\sin x,\cos x)=\dfrac{\sin x}{\alpha\sin x+\beta\cos x}$ 或 $R_2(\sin x,\cos x)=\dfrac{\cos x}{\alpha\sin x+\beta\cos x}$ 的形式

因为 $\alpha\sin x+\beta\cos x,\alpha\cos x-\beta\sin x,\sin x,\cos x$ 可以任取其中两个表示另两个，又 $(\alpha\sin x+\beta\cos x)'=\alpha\cos x-\beta\sin x$，则我们可以对分子采用待定系数法分解为 $\alpha\sin x+\beta\cos x$ 及 $(\alpha\sin x+\beta\cos x)'=\alpha\cos x-\beta\sin x$ 的线性和，根据对应函数相等解出待定的系数，积分就很容易了.对 R_1 有

$$\int R_1(\sin x,\cos x)\,\mathrm{dx}=\int\frac{\sin x}{\alpha\sin x+\beta\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\int\frac{(\alpha\sin x+\beta\cos x)+(\alpha\sin x-\beta\cos x)}{\alpha\sin x+\beta\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\int\frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{\alpha\sin x+\beta\cos x}dx+\frac{1}{2\alpha}\int\frac{\alpha\sin x-\beta\cos x}{\alpha\sin x+\beta\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2\alpha}x+\ln|\alpha\sin x+\beta\cos x|+\mathrm{c}$$

下面 5 个积分可用待定系数法求解为如下形式：

$$\int \frac{a\sin x+b\cos x}{\alpha\sin x+\beta\cos x}dx = Ax + B\ln|\alpha\sin x+\beta\cos x| + \mathrm{c}$$

$$\int \frac{a\sin x+b\cos x+r}{\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma}dx = Ax + B\ln|\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma| + C\int\frac{1}{\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma}dx$$

$$\int \frac{a\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x}{\alpha\sin x+\beta\cos x}dx = A\sin x + B\cos x + C\int\frac{1}{\alpha\sin x+\beta\cos x}dx$$

$$\int \frac{1}{(\alpha\sin x+\beta\cos x)^n}dx = \frac{A\sin x+B\cos x}{(\alpha\sin x+\beta\cos x)^{n-1}} + C\int\frac{1}{(\alpha\sin x+\beta\cos x)^{n-2}}dx$$

$$\int \frac{1}{(\alpha+\beta\cos x)^n}dx = \frac{A\sin x}{(\alpha+\beta\cos x)^{n-1}} + B\int\frac{1}{(\alpha+\beta\cos x)^{n-1}}dx + C\int\frac{1}{(\alpha+\beta\cos x)^{n-2}}dx, |\alpha|\neq|\beta|, \mathrm{n}=1$$

至于 $\int\frac{1}{\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma}dx$ 使用万能公式代换就行了，恕不赘述，请自行推导.

其他：

在做题时会遇到多项式与指数函数或三角函数乘积的积分，我们知道多项式求导是有限的，这样就可以使用分部积分的方法将多项式降次直到次数为 0，设 $p(\mathrm{x})$ 为 n 次多项式，则 $\int P(\mathrm{x})\mathrm{e}^{ax}dx, \int P(\mathrm{x})\cos ax dx, \int P(\mathrm{x})\sin ax dx$ 使用分部积分后化为：

$$\int P(\mathrm{x})\mathrm{e}^{ax}dx = \mathrm{e}^{ax}\left(\frac{P(\mathrm{x})}{a} - \frac{P'(\mathrm{x})}{a^2} + \cdots + (-1)^n\frac{P^{(\mathrm{n})}(\mathrm{x})}{a^{n+1}}\right) + \mathrm{c}$$

$$\int P(\mathrm{x})\cos ax dx = \frac{\sin ax}{a}\left(P(\mathrm{x}) - \frac{P''(\mathrm{x})}{a^2} + \frac{P^{(4)}(\mathrm{x})}{a^4} + \cdots\right) + \frac{\cos ax}{a^2}\left(P'(\mathrm{x}) - \frac{P^{(3)}(\mathrm{x})}{a^3} + \frac{P^{(5)}(\mathrm{x})}{a^5} + \cdots\right) + \mathrm{c}$$

$$\int P(\mathrm{x})\sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a}\left(P(\mathrm{x}) - \frac{P''(\mathrm{x})}{a^2} + \frac{P^{(4)}(\mathrm{x})}{a^4} + \cdots\right) + \frac{\sin ax}{a^2}\left(P'(\mathrm{x}) - \frac{P^{(3)}(\mathrm{x})}{a^3} + \frac{P^{(5)}(\mathrm{x})}{a^5} + \cdots\right) + \mathrm{c}$$

简单的指数函数和三角函数乘积的积分如下（分部易推）：

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + c$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2} + c$$

那么对多项式、指数函数和三角函数乘积的积分就有（使用分部积分）：

$$\int x^n e^{ax}\sin bx dx = x^n\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx dx + \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx dx$$

$$\int x^n e^{ax}\cos x dx = x^n\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2} - \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx dx - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx dx$$

有递推公式最后能将 n 化为 0，就得到我们需要的结果了.

对含高次三角函数的积分$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int \sin^{v}x\cos^{u}xdx$，其中 u,v 是有理数，

$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，有$d\sin^{2}x=2\sin x\cos xdx$令$t=\sin^{2}x$（$\cos x$一样），积分化为

$$\int \sin^{v}x\cos^{u}xdx=\frac{1}{2}\int \sin^{v-1}x(1-\sin^{2}x)^{\frac{u-1}{2}}2\sin x\cos xdx=\frac{1}{2}\int(1-t)^{\frac{u-1}{2}}t^{\frac{v-1}{2}}dt$$

这样问题就变成之前讲过的二项式微分的积分了：即

$$\int \sin^{v}x\cos^{u}xdx=\frac{1}{2}\int(1-t)^{\frac{u-1}{2}}t^{\frac{v-1}{2}}dt=\frac{1}{2}J_{\frac{u-1}{2},\frac{v-1}{2}}$$

在上面我已经给出了$J_{p,q}=\int(a+bz)^{p}z^{q}dz$的递推式，这里就直接给出结果：

$$\int \sin^{v}x\cos^{u}xdx=-\frac{\sin^{v+1}x\cos^{u}x}{u+1}+\frac{u+v+2}{u+1}\int \sin^{v}x\cos^{u+2}xdx,(u\neq -1)$$

$$\int \sin^{v}x\cos^{u}xdx=\frac{\sin^{v+1}x\cos^{u+1}x}{v+1}+\frac{u+v+2}{v+1}\int \sin^{v+2}x\cos^{u}xdx,(v\neq -1)$$

$$\int \sin^{v}x\cos^{u}xdx=\frac{\sin^{v+1}x\cos^{u-1}x}{u+v}+\frac{u-1}{u+v}\int \sin^{v}x\cos^{u-2}xdx,(u+v\neq -1)$$

$$\int \sin^{v}x\cos^{u}xdx=-\frac{\sin^{v-1}x\cos^{u+1}x}{u+v}+\frac{v-1}{u+v}\int \sin^{v-2}x\cos^{u}xdx,(u+v\neq -1)$$

这些公式可以把 u 或 v 加 2 或减 2，若u,v都是整数，则继续使用递推公式，最后将问题化为初等积分. $u=0$或$v=0$是只含正弦或余弦函数的高次积分的情况.

四．双曲函数：

双曲函数不怎么常见，在这里做一个简要说明，因为双曲函数之间的基本关系和三角函数之间的基本关系极其相似，所以双曲函数符号和名字是按三角函数来定义的，对比三角函数理解、记忆起来还是比较容易的（虽然如此类似，但却是相互独立的），下面给出这 6 个双曲函数定义：

双曲正弦：$\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$　　双曲余弦：$\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

双曲正切：$\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$　　双曲余切：$\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

双曲正割：$\mathrm{sech}\, x=\dfrac{1}{\cosh x}$　　双曲余割：$\mathrm{csch}\, x=\dfrac{1}{\sinh x}$

前 4 个双曲函数也可以用sh,ch,th,cth来表示.

可见双曲函数是由e^x和e^{-x}之间的关系来定义的，发现其关系和三角函数的基本关系极其类似，所以定义的函数就有了类似三角函数的名称和符号。正因为如此很多能用三角函数解决的题，也可以用双曲函数解决，比如在积分中能用三角换元的问题都可以用双曲换元来求，并且双曲函数的有理性比三角函数更直观，三角函数需要通过二倍角公式（万能公式）来体现有理性。各函数的基本性质都可以推导无需说明。

既然说到双曲函数和三角函数极其类似，下面给出双曲函数间的基本公式，请与三角函数对比

1．基本公式：

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \cosh(-x) = \cosh x, \tanh(-x) = -\tanh x$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1, \coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$$

2. 和差角公式：

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$\tanh(\mathrm{x} \pm \mathrm{y}) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

3. 倍角公式：

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\sinh^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1$$
$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x} = \frac{2\coth x}{1 + \coth^2 x}$$
$$\coth(2x) = \frac{1 + \tanh^2 x}{2\tanh x} = \frac{1 + \coth^2 x}{2\coth x}$$
$$\sinh(3x) = 4\sinh^3 x + 3\sinh x \quad , \quad \cosh(3x) = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$$

4. 半角公式：

$$\sinh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \begin{cases} x > 0, \text{取正号} \\ x < 0, \text{取负号} \end{cases}$$
$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$$
$$\tanh\frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x - 1}$$
$$\coth\frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} = \frac{\cosh x + 1}{\sinh x}$$

5．和差化积公式：

$$\sinh x \pm \mathrm{sinhy} = 2\sinh\frac{x \pm y}{2}\cosh\frac{x \mp y}{2}$$

$$\cosh x + \mathrm{coshy} = 2\cosh\frac{x + y}{2}\cosh\frac{x - y}{2}$$

$$\cosh x - \mathrm{coshy} = 2\sinh\frac{x + y}{2}\sinh\frac{x - y}{2}$$

$$\tanh x \pm \mathrm{tanhy} = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y}$$

$$\coth x \pm \cosh x = \pm\frac{\sinh(x \pm y)}{\sinh x \sinh y}$$

6. 积化和差公式：

$$\sinh ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sinh(a+b)x + \sinh(a-b)x)$$

$$\cosh ax \cosh bx = \frac{1}{2}(\cosh(a+b)x + \cosh(a-b)x)$$

$$\sinh ax \sinh bx = \frac{1}{2}(\cosh(a+b)x - \cosh(a-b)x)$$

7. 棣莫弗公式：

$$\because \cosh x \pm \sinh x = e^{\pm x}$$

$$\therefore (\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$$

8. 反双曲函数公式：

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(\mathrm{x} + \sqrt{x^2+1}), \mathrm{x} \in \mathrm{R}$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln(\mathrm{x} \pm \sqrt{x^2-1}), \mathrm{x} \in [1, +\infty)$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}), x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1}), x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\operatorname{arcsech} x = \ln(\frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}) \pm \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})$$

$$\operatorname{arccsch} x = \begin{cases} \ln\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}, x < 0 \\ \ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}, x > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{arcsinh} x \pm \operatorname{arcsinhy} = \operatorname{arcsinh}(\mathrm{x}\sqrt{1+y^2} \pm \mathrm{y}\sqrt{1+x^2})$$

$$\operatorname{arccosh} x \pm \operatorname{arccoshy} = \operatorname{arccosh}(\mathrm{x}\, y \pm \sqrt{(x^2-1)(\mathrm{y}^2-1)})$$

$$\operatorname{arctanh} x \pm \operatorname{arctanh} x = \operatorname{arctanh}(\frac{x \pm y}{1 \pm xy})$$

9. 双曲函数导数和积分公式

$$(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x = 1 - \coth^2 x$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \tanh x dx = \ln|\cosh x| + c$$

$$\int \coth x dx = \ln|\sinh x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$$

双曲函数公式大部分已罗列出来,与三角函数相比较，除了有符号不同外，公式的形式都是完全一样的，所以有时候需要用到三角函数的地方，也可以用双曲函数.积分中的三角换元都可以用双曲换元法，特别注意的是，要时刻牢记双曲函数的定义，使得双曲函数与e^x, e^{-x}密切联系，e^x, e^{-x}用起来也是很方便的.下面举个简单的例子使用三角换元和双曲换元法，我们来看看两者的相似和区别之处，并以此作为以上所有知识点的结束.

例. 求$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$

分析：一看到这个问题——三角换元（令$x = a\tan t$），几乎所有读者第一想法就会在这个点,这里我们先使用三角换元法，再用双曲换元法。

三角换元法：令$x = a\tan t$，有$\sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \sec^3 t dt$，$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$，则积分

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \int \sec^3 t dt = a^2 \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = a^2 \int \frac{\cos t}{\cos^4 t} dt$$

$$= a^2 \int \frac{1}{(1 - \sin^2 t)^2} d\sin t = \frac{a^2}{4} \int \left(\frac{1}{1 - \sin t} + \frac{1}{1 + \sin t}\right)^2 d\sin t$$

$$= \frac{a^2}{4} \int \left(\frac{1}{1 - \sin t}\right)^2 d\sin t + \frac{a^2}{4} \int \left(\frac{1}{1 - \sin t} + \frac{1}{1 + \sin t}\right) d\sin t + \frac{a^2}{4} \int \left(\frac{1}{1 + \sin t}\right)^2 d\sin t$$

$$=\frac{a^2}{2}\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{a^2}{4}\ln(\frac{1+\sin t}{1-\sin t})+\mathrm{c}=\frac{a^2}{2}\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{a^2}{2}\ln(\sec t+\tan t)+\mathrm{c}$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(\mathrm{x}+\sqrt{x^2+a^2})+\mathrm{c}$$

双曲换元法：因为有 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$，我们令 $x=a\sinh t$，有

$\sqrt{x^2+a^2}dx=a^2\cosh^2 tdt$，由双曲二倍角公式有 $a^2\cosh^2 tdt=\frac{a^2}{2}(\cosh 2t+1)$，

积分化为 $$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{a^2}{2}\int(\cosh 2t+1)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sinh 2t+c$$ （再有 $\operatorname{arcsinh}x=\ln(\mathrm{x}+\sqrt{x^2+1})$）

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(\mathrm{x}+\sqrt{x^2+a^2})+\mathrm{c}$$

到这里，虽然上面说了很多，但可以拿来直接用的主要体现在例题中，那些比较简单的问题都可以在教材习题上得到固定思路的解法；不定积分题往往有多种解法，这些解法就在于平时遇到的各种类型问题的积累，虽然最后考察的不是你有多少条思路，多少种解法，考察的就是平时有没有去弄懂，有没有做练习、有没有正确利用解答，但

厚积薄发，心里有底

注：以上是以《微积分学教程》作为参考，是对《微积分学教程》的部分解读，

2014/12/27