

$$X_1(\omega)=0, \quad |\omega|>\omega_1$$

$$X_2(\omega)=0, \quad |\omega|>\omega_2$$

试确定最大抽样间隔 T ，使得利用理想低通滤波器，可以由 $w_p(t)$ 恢复 $w(t)$ 。

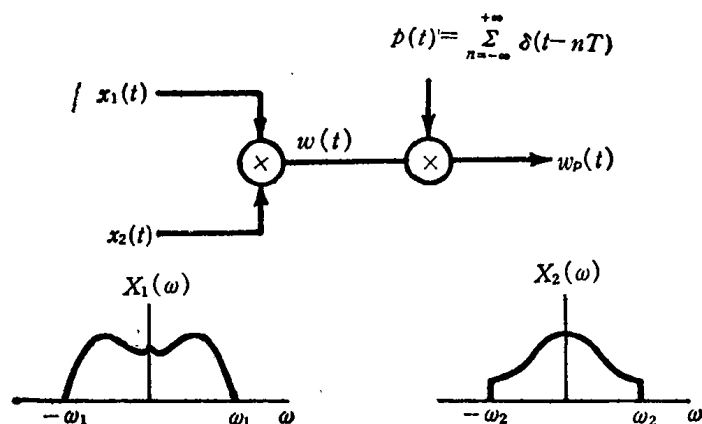


图 P 8.1

8.2. 图 P 8.2 所示是一个系统，其抽样信号是一个正负交替的冲激串。输入信号的傅里叶变换如图 P 8.2 所示。

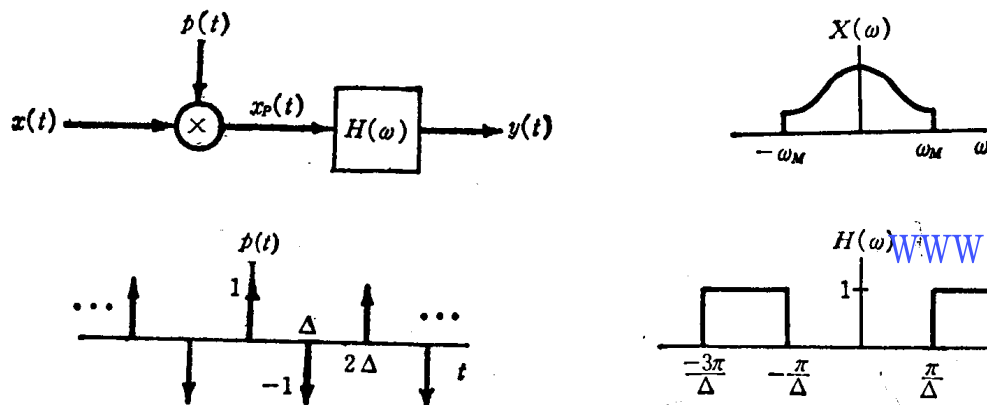


图 P 8.2

- 当 $\Delta < \pi/2\omega_M$ 时，试画出 $x_p(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶变换的示意图；
- 当 $\Delta < \pi/2\omega_M$ 时，试决定一个能从 $x_p(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统；
- 当 $\Delta < \pi/2\omega_M$ 时，试决定一个能从 $y(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统；
- 当 $x(t)$ 既可以从 $x_p(t)$ 亦可以从 $y(t)$ 中恢复时，与 ω_M 有关的 Δ 最大值是什么？

8.3. 在图 P 8.3 所示系统中，其输入信号与周期方波相乘。 $s(t)$ 的周期为 T 。输入信号是带限的，在 $|\omega| \geq \omega_M$ 时， $|X(\omega)|=0$ 。

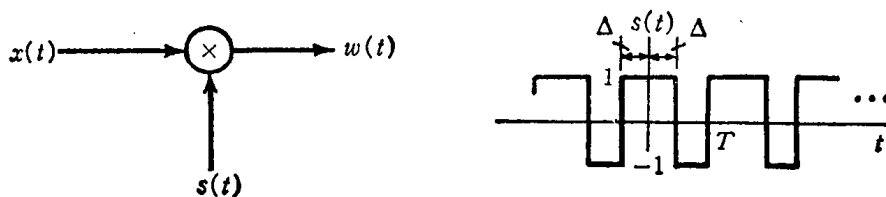


图 P 8.3

- (a) 当 $\Delta = T/3$ 时, 试求出用 ω_M 表示的 T 的最大值, 在这一 T 值时, $x(t)$ 可从 $w(t)$ 中恢复。
在这个最大值的情况下, 试确定一个从 $w(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统。
- (b) 当 $\Delta = T/4$ 时, 试求出用 ω_M 表示的 T 的最大值, 在这一最大值时, $x(t)$ 可从 $w(t)$ 中恢复。
在这个最大值的情况下, 试确定一个从 $w(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统。

8.4. 在图8.5中, 并画于图P 8.4中的抽样器, 后面接着一个从其样值 $x_p(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的理想低通滤波器。由抽样定理可知, 若 $\omega_s = 2\pi/T$ 大于 $x(t)$ 中的最高频率的两倍, 且 $\omega_c = \omega_s/2$, 则重建的信号 $x_r(t)$ 将精确地等于 $x(t)$ 。若关于 $x(t)$ 带宽的条件不满足, 则 $x_r(t)$ 就不等于 $x(t)$ 。然而, 正如我们在本题中要证明的, 若 $\omega_c = \omega_s/2$, 则对任何选定的 T , 在抽样时刻, $x_r(t)$ 和 $x(t)$ 总是相等的。即

$$x_r(kT) = x(kT), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

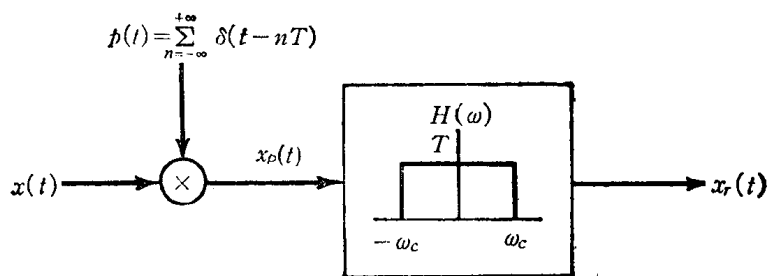


图 P 8.4

为求得此结果, 考虑式 (8.10), 此式用 $x(t)$ 的样值表示 $x_r(t)$, 具体说

[式(8.10)]
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) T \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \left[\frac{\omega_c(t-nT)}{\pi} \right]$$

在 $\omega_c = \omega_s/2$ 时, 上式为

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \operatorname{sinc} \left[\frac{(t-nT)}{T} \right]$$

www.blogoil.com
(P 8.4)

利用 sinc 函数的性质[尤其是, $\operatorname{sinc}(\alpha) = 0$ 时的 α 值] 试根据式(P 8.4)证明: 对 $x(t)$ 不存在任何限制, 在任何整数 k 时, 有 $x_r(kT) = x(kT)$ 。

8.5. 一个频带受限为 $|\omega| < W$ 的信号, 可由其非均匀间隔的样值恢复, 只要其平均样值密度为每秒 $2W$ 个样值。本题说明了一个非均匀抽样的特殊例子。假设在图 P 8.5—1 中,

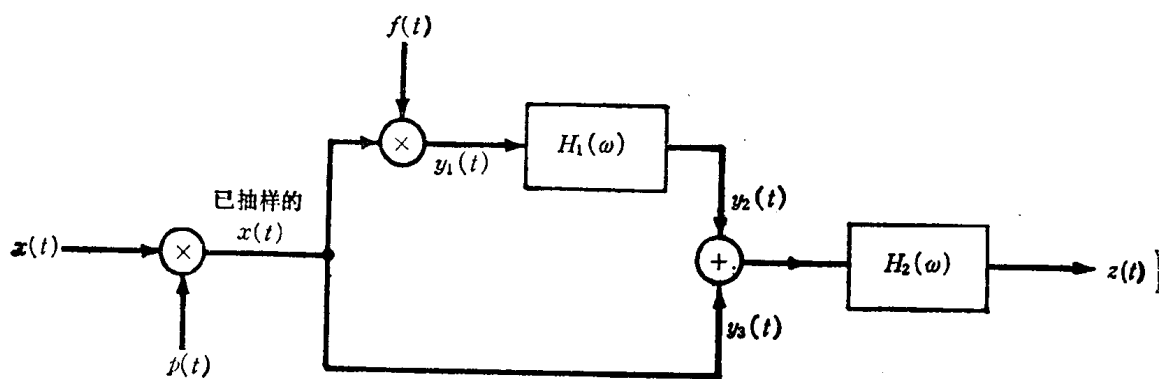


图 P 8.5—1

- (1) $x(t)$ 是带限信号: $X(\omega) = 0, |\omega| > W$;
- (2) $p(t)$ 是一非均匀间隔周期冲激串, 如图 P 8.5—2 所示;
- (3) $f(t)$ 是一周期性波形, 其周期为 $T = 2\pi/\omega$ 。由于 $f(t)$ 乘上一个冲激串, 故仅有 $t=0$ 和 $t=\Delta$ 处的值 $f(0)=a$ 和 $f(\Delta)=b$ 有意义;

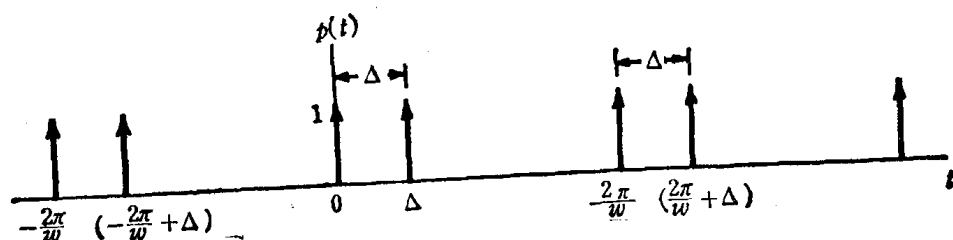


图 P 8.5—2

(4) $H_1(\omega)$ 是一个 90° 相移器, 即:

$$H_1(\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0, \\ -j, & \omega < 0, \end{cases}$$

(5) $H_2(\omega)$ 为一理想低通滤波器;

$$H_2(\omega) = \begin{cases} K, & 0 < \omega < W, \\ K^*, & -W < \omega < 0, \\ 0, & |\omega| > W, \end{cases}$$

其中 K 是一个常数 (可能是复数)。

试求出下列各题 (并在适当处画出示意图):

- $p(t)$ 的傅里叶变换 $P(\omega)$;
- 乘积 $p(t) \cdot f(t)$ 的傅里叶变换, 用至今尚未规定的参数 a 和 b 表示;
- 在区间 $0 < \omega < W$ 中适用的 $y_1(t)$ 的傅里叶变换 $Y_1(\omega)$ 的表达式;
- 在区间 $0 < \omega < W$ 中适用的 $y_2(t)$ 的傅里叶变换 $Y_2(\omega)$ 的表达式;
- 在区间 $0 < \omega < W$ 中适用的 $y_3(t)$ 的傅里叶变换 $Y_3(\omega)$ 的表达式;
- 实参数 a 、 b 的值和复增益 K 与 Δ 的函数关系, 使对任何带限信号 $x(t)$ 和 Δ , $0 < \Delta < \pi/W$ 时, 有 $z(t) = x(t)$ 。

8.6. 如同我们已推导过的, 抽样定理指出, 一个信号 $x(t)$ 必须以大于其带宽的抽样率抽样 (或等效地, 以大于其最高频率两倍的抽样率抽样)。这意味着若 $x(t)$ 具有如图 P 8.6—1 所示的频谱时, 则 $x(t)$ 必须以大于 $2\omega_2$ 的抽样率抽样。由于信号有大部分能量集中在一个窄的频带内, 指望可采用低于两倍最高频率的抽样频率看来是合理的。能量集中于一个频带内的信号常常称做带通信号。带通信号的抽样有多种方法, 这些方法一般称作带通抽样。

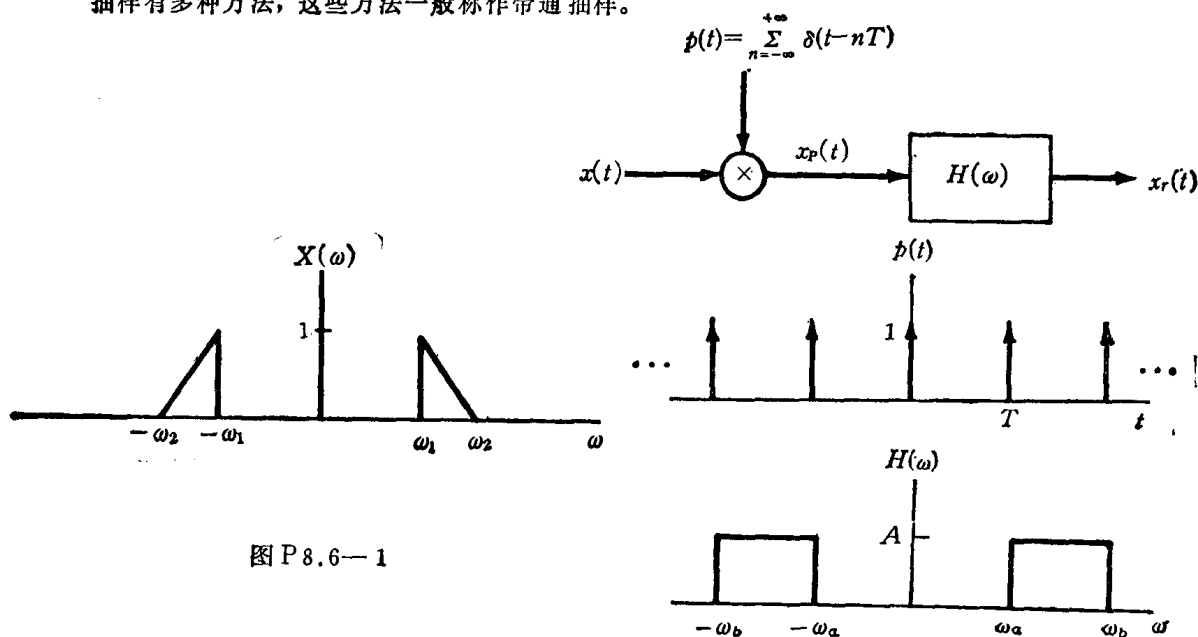


图 P 8.6—1

图 P 8.6—2

为考察以低于总带宽的抽样频率对带通信号抽样的可能性,考虑示于图 P 8.6—2 的系统。假定 $\omega_1 > (\omega_2 - \omega_1)$, 试求 T 的最大值和常数 A 、 ω_c 和 ω_b 的值, 以使 $x_r(t) = x(t)$ 。

- 8.7. 在习题 8.6 中, 研究了一种带通抽样和恢复的方法。当 $x(t)$ 是实信号时, 另一种方法是利用复调制以后再进行抽样组成。抽样系统如图 P 8.7—1 所示。在 $x(t)$ 为实信号且 $X(\omega)$ 仅在 $\omega_1 < |\omega| <$

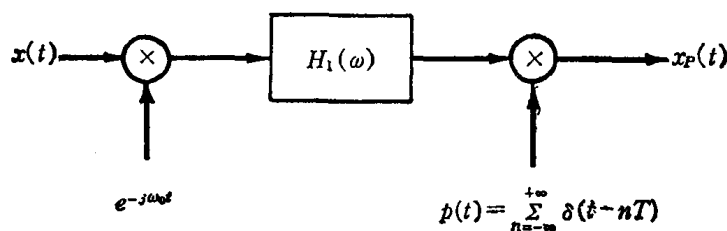


图 P 8.7—1

ω_2 处非零时, 调制频率 ω_0 选为 $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, 而低通滤波器 $H_1(\omega)$ 的截止频率选为 $\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ 。

- (a) 当 $X(\omega)$ 如图 P 8.7—2 所示时, 试画出 $X_p(\omega)$ 的示意图;
(b) 试确定最大抽样周期 T , 以使从 $x_p(t)$ 中可以恢复 $x(t)$;

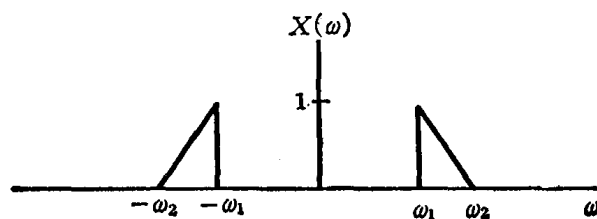


图 P 8.7—2

- (c) 试确定一个从 $x_p(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统。

- 8.8. 设一个圆盘上画有正弦曲线的四个周期。圆盘以近似 15 转/秒的速度旋转, 以致从一狭缝观看时正弦曲线具有 60 Hz 的频率。

装置如图 P 8.8 所示。令 $v(t)$ 表示从狭缝见到的线的位置, 则 $v(t)$ 的表示式为

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = 120\pi$$

线的位置以 60 周/秒的正弦变化

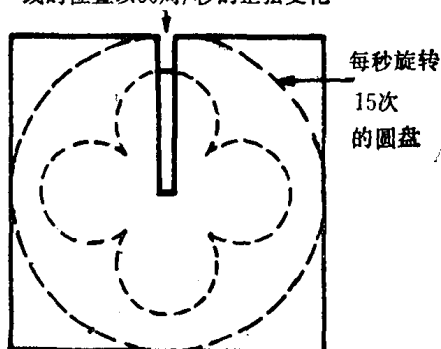


图 P 8.8

为了表示方便起见, 可使 $v(t)$ 归一化, 因此设 $A=1$ 。在 60 Hz 时, 眼睛是跟不上 $v(t)$ 变化的, 我们假设这一效果可用将眼睛模拟成理想低通滤波器来解释, 这滤波器的截止频率取为 20 Hz。

正弦波的抽样可用闪光灯照亮圆盘来实现。于是, 照明信号 $i(t)$ 可用一个冲激串表示:

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

式中 $1/T$ 是以赫为单位的闪光频率。所得到的已抽样信号是 $r(t) = v(t) \cdot i(t)$ 的乘积。设 $R(\omega)$, $V(\omega)$ 和 $I(\omega)$ 分别表示 $r(t)$ 、 $v(t)$ 和 $i(t)$ 的傅里叶变换。

(a) 试画出 $V(\omega)$ 的示意图, 希明确指出参数 ϕ 和 ω_0 的影响。

(b) 试画出 $I(\omega)$ 的示意图, 指出 T 的影响。

(c) 根据抽样定理, 存在一个以 ω_0 表示的 T 的最大值, 使得可利用低通滤波器从 $r(t)$ 中恢复 $v(t)$ 。试求出这一 T 值和低通滤波器的截止频率。当 T 略小于该值时, 试画出 $R(\omega)$ 的示意图。

若抽样周期 T 取得大于 (c) 中求得的值, 就发生谱的混迭。由于这一混迭的结果, 我们会看到一条低频的正弦曲线。

(d) 假设 $2\pi/T = \omega_0 + 20\pi$, 画出 $|\omega| < 40\pi$ 时的 $R(\omega)$ 的示意图, 用 $v_a(t)$ 表示我们看到的曲线的视在位置。假定眼睛的特性如同一个具有 20 Hz 截止频率和单位增益的低通滤波器, 把 $v_a(t)$ 表示为

$$v_a(t) = A_a \cos(\omega_a t + \phi_a)$$

式中 A_a 是视在幅度, ω_a 是视在频率, 而 ϕ_a 是 $v_a(t)$ 的视在相位。

(e) 当 $2\pi/T = \omega_0 - 20\pi$ 时, 重做 (d)。

8.9. 经常需要在示波器荧光屏上显示具有极短时间结构例如为千分之几毫微秒量级的各种波形。由于最快的示波器的上升时间比这个时间为大, 故不能直接显示这种波形。然而, 若波形是周期性的, 就可以用一种称为取样示波器的仪器显示这种波形。

如图 P 8.9—1 所示, 其概念是对快速波形每周抽样一次, 但依次在各周期中相继较后的点处抽样。增量 Δ 应是和 $x(t)$ 的带宽有关的适当选定的抽样间隔。然后, 若产生的冲激串通过一个适当的低通内插滤波器, 其输出 $y(t)$ 将与被放慢了的或时间上被拉长了的原来的快波形成正比 (即 $y(t)$ 正比于 $x(at)$, 其中 $a < 1$)。

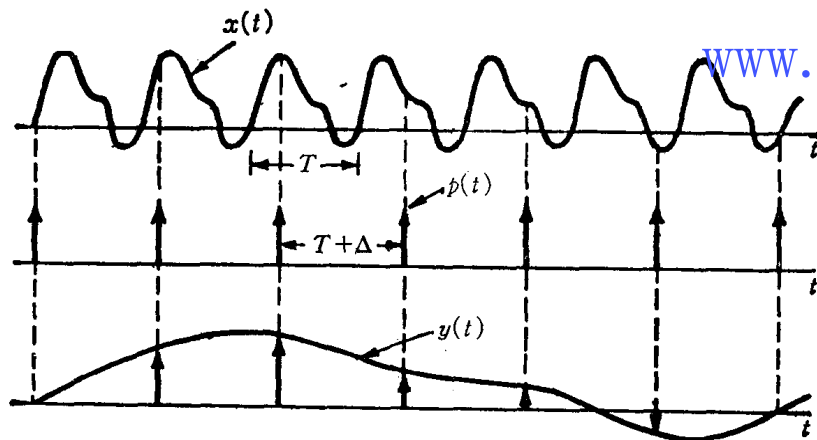


图 P 8.9—1

当 $x(t) = A + B \cos[(2\pi/T)t + \theta]$ 时, 试求 Δ 值的范围, 以使在图 P 8.9—2 中的 $y(t)$ 正比于 $x(at)$, $a < 1$ 。并求用 T 和 Δ 表示的 a 的值。

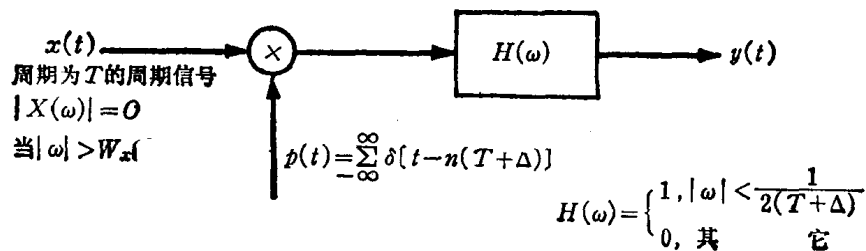


图 P 8.9—2

- 8.10. 图 P 8.10—1 所示为利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的总系统。若 $X_c(\omega)$ 和 $H(\Omega)$ 如图 P 8.10—2 所示, 并有 $1/T=20\text{Hz}$, 试画出 $X_p(\omega)$ 、 $X(\Omega)$ 、 $Y(\Omega)$ 、 $Y_p(\omega)$ 和 $Y_c(\omega)$ 的示意图。

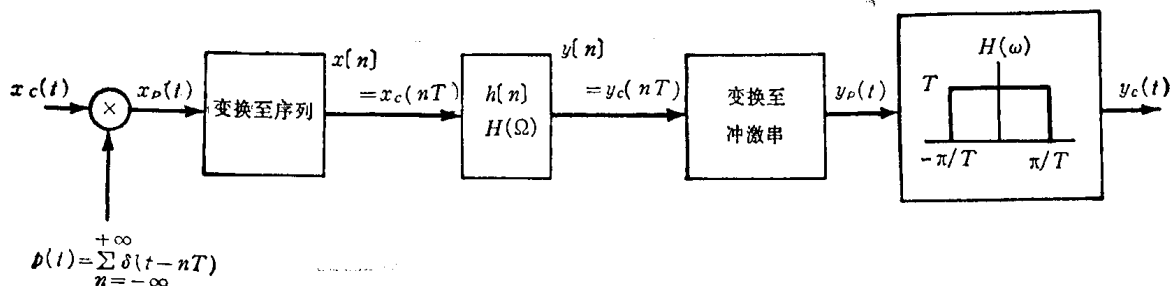


图 P 8.10—1

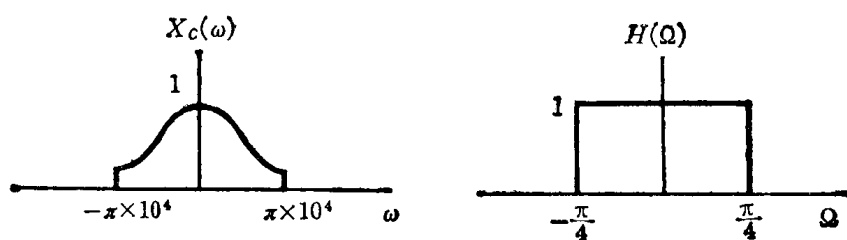


图 P 8.10—2

- 8.11. 图 P 8.11—1 所示为一个把连续时间信号变换至离散时间信号的系统。输入 $x(t)$ 是周期为 0.1 秒的周期信号。 $x(t)$ 的傅里叶级数的系数为

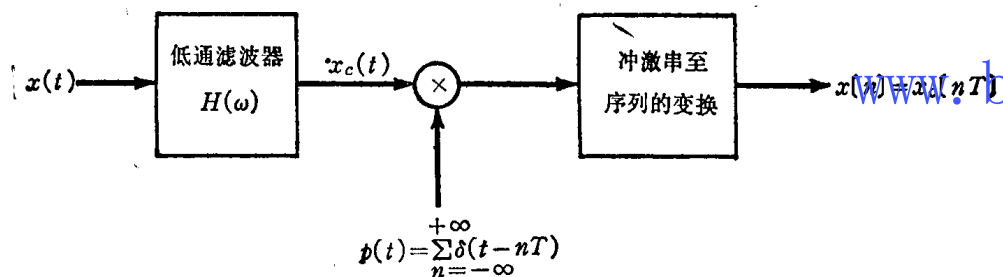


图 P 8.11—1

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, \quad -\infty < k < +\infty$$

低通滤波器 $H(\omega)$ 有如图 P 8.11—2 所示的频率响应, 抽样周期 $T=5 \times 10^{-3}$ 秒。

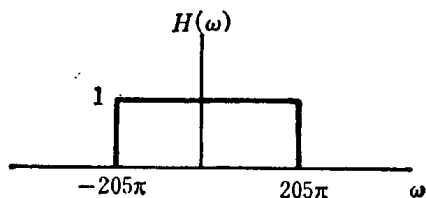


图 P 8.11—2

- (a) 证明 $x[n]$ 是一个周期序列, 并求出其周期。
 (b) 求出 $x[n]$ 的傅里叶级数的系数。
- 8.12. 考虑带限信号 $x_c(t)$, 它被以大于奈奎斯特率的速度抽样。然后各分隔为 T 秒的样值被变换为序列 $x[n]$, 如图 P 8.12 所示

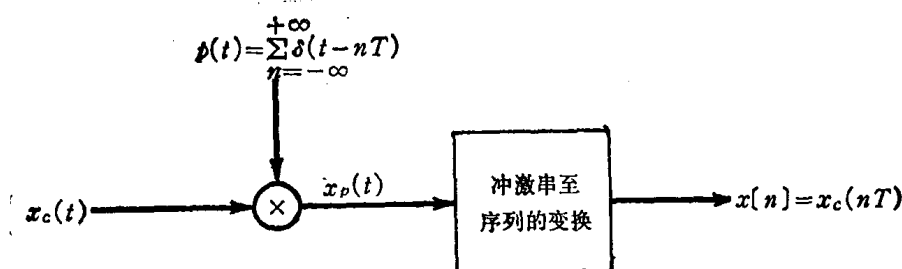


图 P 8.12

试确定序列的能量 E_d , 原信号的能量 E_c 与抽样间隔 T 间的关系。序列 $x[n]$ 的能量定义为

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

而连续时间函数 $x_c(t)$ 的能量定义为

$$E_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_c(t)|^2 dt$$

8.13. 设计一个连续时间正弦信号发生器, 它能产生满足以下条件的任何频率的正弦信号,

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$$

其中 ω_1 和 ω_2 为给定的正数。

可采用如下设计方式。先存储好一个周期为 N 的离散时间余弦波, 亦即我们已存储了 $x[0]$, \dots , $x[N-1]$, 其中

$$x[k] = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

每隔 T 秒我们输出一个 $x[k]$ 值加权的冲激, 其中我们以循环的方式连续不断地经过 $k=0, 1, \dots, N-1$ 的值。亦即,

$$y(kT) = x(k \text{ 模 } N)$$

或等效地

$$y(kT) = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

和

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \delta(t-kT)$$

(a) 试证明, 由调节 T , 我们可以调节抽样余弦信号的频率。具体说, 希证明

$$y_p(t) = \cos \omega_0 t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/NT$ 。试决定 T 值的范围, 以使 $y_p(t)$ ^① 可以代表频率在整个

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$$

范围内可变的余弦信号的抽样。

(b) 试画出 $Y_p(\omega)$ 的示意图。

产生连续时间正弦波的总系统如图 P 8.13—1 所示。 $H(\omega)$ 是通带内增益为 1 的理想低通滤波器

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \text{其余。} \end{cases}$$

试确定参数 ω_c , 以使 $y(t)$ 在所希望的频带内是连续时间余弦信号。

(c) 假定有 (a) 中所确定范围内的任何 T 值, 试求最小的 N 值和某个 ω_c 值, 以使 $y(t)$ 是在 $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ 范围内的余弦信号。

①原文为 $y(t)$ 。——译者注

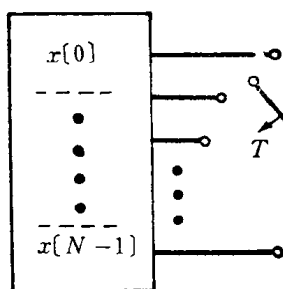


图 P 8.13—1

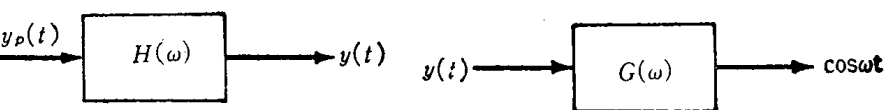


图 P 8.13—2

(d) $y(t)$ 的幅度将随在 ω_1 和 ω_2 之间所选定的 ω 值而变。因此，我们必须设计一个使信号规格化的系统 $G(\omega)$ ，如图 P 8.13—2 所示，试求此 $G(\omega)$ 。

8.14. 图 P 8.14 所示为一系统，它是由一个连续时间线性时不变系统，后接的抽样器，冲激串至序列的变换和一个线性时不变离散时间系统组成的。连续时间 LTI 系统是因果的且满足 LCCDE

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + y_c(t) = x_c(t)$$

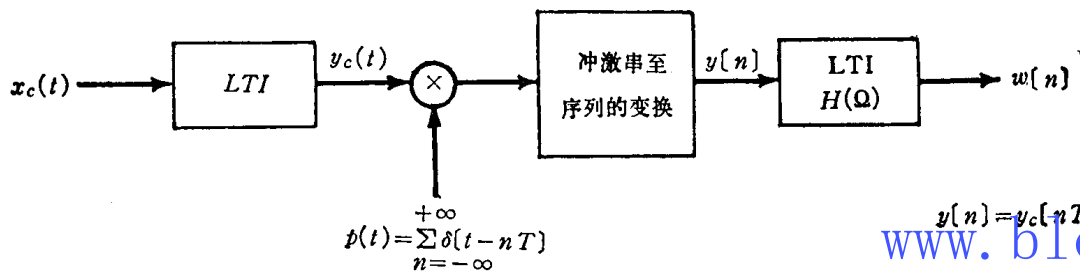


图 P 8.14

输入 $x_c(t)$ 是单位冲激 $\delta(t)$ 。

(a) 试求出 $y_c(t)$ 。

(b) 试确定频率响应 $H(\Omega)$ 和冲激响应 $h[n]$ ，以使 $w[n] = \delta[n]$ 。

8.15. 图 P 8.15 所示为一个利用数字滤波器处理连续时间信号的系统。数字滤波器 $h[n]$ 是具有如下差分方程的线性因果系统

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

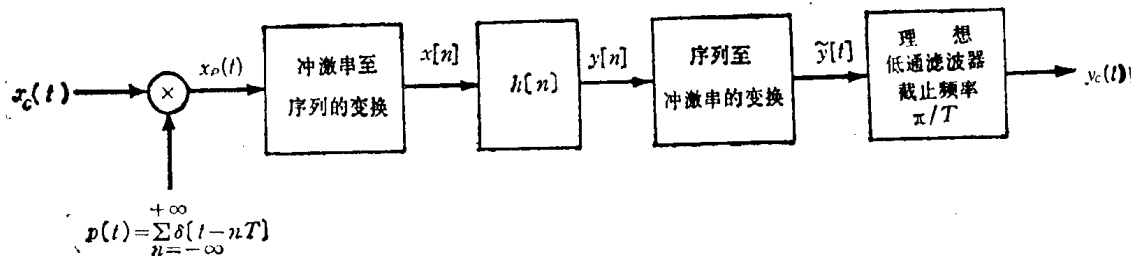


图 P 8.15

对于频带受限输入信号， $|\omega| > \pi/T$ 时 $X_o(\omega) = 0$ ，则图 P 8.15 的系统等效于一连续时间 LTI 系统。

试确定具有输入 $x_o(t)$ 和输出 $y_c(t)$ 的等效总系统的频率响应 $H_o(\omega)$ 。

8.16. 图 P 8.16—1 中画出了一个其输入和输出为离散时间信号的系统。离散时间输入 $x[n]$ 变换为连续

时间冲激串 $x_p(t)$ 。然后, 连续时间信号 $x_p(t)$ 通过一个 LTI 系统 过滤产生输出 $y_o(t)$ 。 $y_o(t)$ 则变换为离散时间信号 $y[n]$ 。具有输入 $x_o(t)$ 和输出 $y_o(t)$ 的 LTI 系统是因果系统, 且由下列线性常系数微分方程表征,

$$\frac{d^2 y_o(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_o(t)}{dt} + 3 y_o(t) = x_o(t)$$

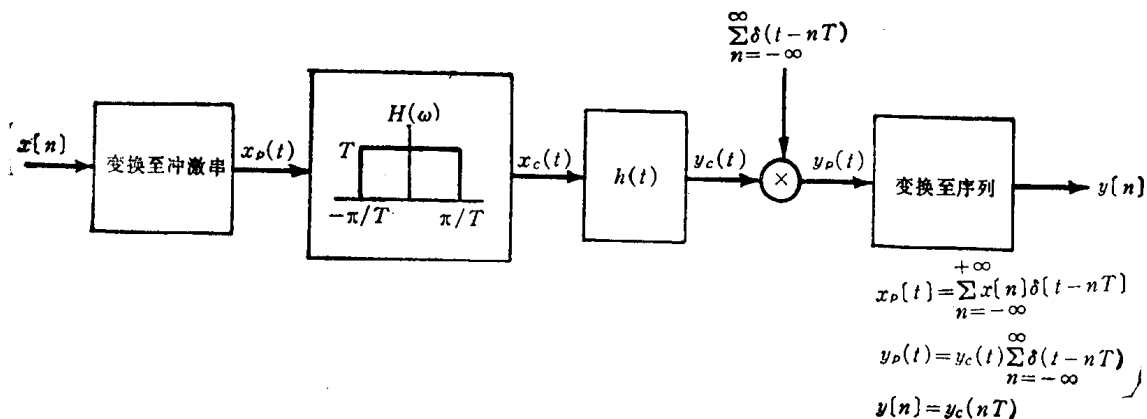


图 P 8.16—1

总系统等效于因果离散时间 LTI 系统如图 P 8.16—2 所示。

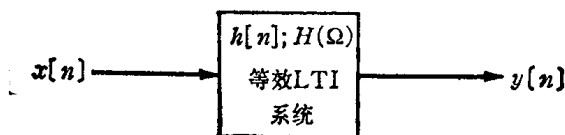


图 P 8.16—2

试求出等效 LTI 系统的频率响应 $H(\Omega)$ 和单位样值响应 $h[n]$ 。

- 8.17. 在图 P 8.17 所示系统中, 输入 $x_o(t)$ 是带限信号, 当 $|\omega| > 2\pi \times 10^4$ 时, $X_o(\omega) = 0$ 。数字滤波器 $h[n]$ 由输入—输出关系表示如下

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

(P 8.17-1)

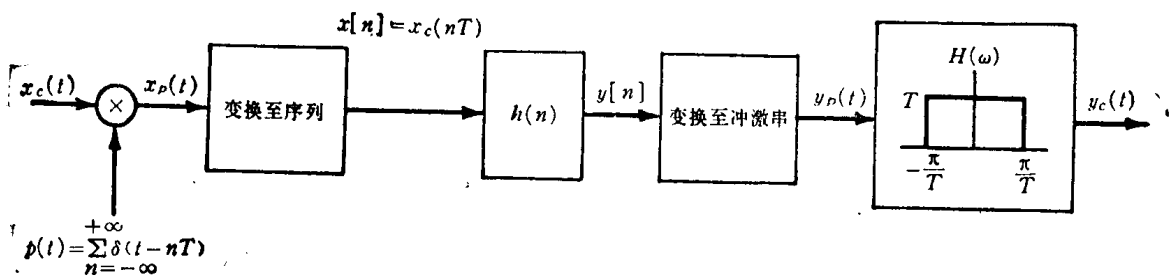


图 P 8.17

- (a) 若要避免混迭, 从 $x_o(t)$ 变换至 $x_p(t)$ 时, 所容许的最大 T 值是什么?
 (b) 当离散时间 LTI 系统 $h[n]$ 由方程 (P 8.17-1) 规定时, 试确定其冲激响应 $h[n]$ 。
 (c) 试确定是否有 T 值能满足下式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t x_o(t) dt \quad (\text{P 8.17-2})$$

若有, 试求出 T 的最大值。若没有, 试说明并确定应当如何选择 T , 以使式 (P 8.17-2) 的等式

能最好地近似(对这一小题希仔细思考,因容易做出错误结论)。

8.18. 考虑一连续时间信号

$$x_c(t) = s_c(t) + \alpha s_c(t - T_D)$$

假设 $x_c(t)$ 的傅里叶变换是带限的, 当 $|\omega| > \pi/T$ 时, $x_c(\omega) = 0$, 而且 $x_c(t)$ 用抽样周期 T 抽样而得到序列

$$x[n] = x_c(nT)$$

我们想要求出离散时间系统的单位样值响应 $h[n]$, 以使

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]h[n-k]$$

式中 $s[n] = s_c(nT)$ 。

(a) 当 $T_D = T$ 时, 试求 $h[n]$ 。

(b) 当 $T_D = T/2$ 时, 试求 $h[n]$ 。

- 8.19. 在许多实际场合, 记录到的信号有反射波存在, 我们想用适当的处理以除去反射波。例如, 在图 P 8.19-1 所示的系统中, 接收机同时接收信号 $x(t)$ 和一个反射波, 反射波用经过衰减和延迟的 $x(t)$ 的复制品表示。因此, 接收机输出是 $S(t) = x(t) + \alpha x(t - T_0)$, 式中 $|\alpha| < 1$ 。如图 P 8.19-2 所示, 通过先把接收机输出变换为序列, 然后用一适当的数字滤波器 $h(n)$ 处理以恢复 $x(t)$ 。

假设 $x(t)$ 是带限信号 [即 $|\omega| > \omega_M$ 时, $X(\omega) = 0$], 且 $|\alpha| < 1$ 。

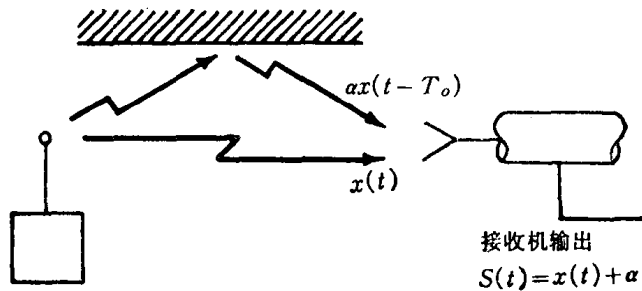


图 P 8.19-1

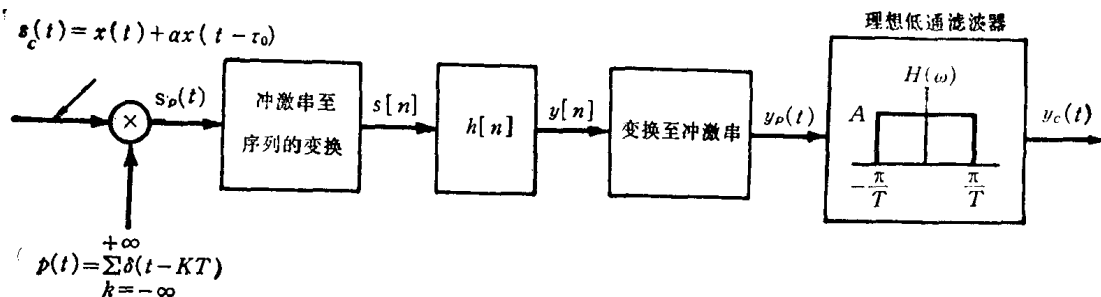


图 P 8.19-2

- (a) 若 $T_0 < \pi/\omega_M$, 且所用抽样周期等于 T_0 (即 $T = T_0$), 为使 $y_c(t)$ 正比于 $x(t)$, 试求数字滤波器 $h[n]$ 的差分方程。
- (b) 在 (a) 的假设情况下, 试确定为使 $y_c(t) = x(t)$ 时理想低通滤波器的增益 A 。
- (c) 现在又设 $\pi/\omega_M < T_0 < 2\pi/\omega_M$, 为使 $y_c(t)$ 正比于 $x(t)$, 试确定抽样周期 T 、低通滤波器增益 A 和数字滤波器 $h[n]$ 的频率响应。

- 8.20. 在 8.5 节中讨论频域抽样时, 我们假定 $x(t)$ 为非零的区间是以 $t=0$ 为中心的。因此, 当 $|t| > T_m$ 时有 $x(t) = 0$, 我们证明过, 若抽样间隔 ω_0 满足式 (8.35) 的不等式, 具体来说满足

$$[\text{式 (8.35)}] \quad \frac{2\pi}{\omega_0} > 2T_m$$

则 $x(t)$ 可由 $X(\omega)$ 的等间隔样值来恢复。

在本题中,我们推广上述结论,以适用于在任何指定长度 $2T_m$ 区间以外为零的时间受限信号。
类似于8.5节的讨论,考虑图P8.20所示的 $x(t)$,并令 $X(\omega)$ 表示它的傅里叶变换。当把图8.30
的系统应用于 $X(\omega)$ 时,则在频域有 $\tilde{X}(\omega) = X(\omega)P(\omega)$,其中 $P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$ 。

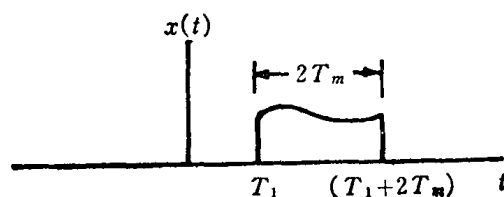


图 P 8.20

(a) 当 $2\pi/\omega_0 > 2T_m$ 时,试画出 $\tilde{X}(\omega)$ 的傅里叶逆变换 $\tilde{x}(t)$ 的示意图。

(b) 如已在8.5节证明的,当 $2\pi/\omega_0 > 2T_m$ 时, $x(t)$ 可以从 $\tilde{x}(t)$ 乘以窗函数而恢复,即

$$x(t) = \tilde{x}(t)w(t)$$

对于在本题中所考虑的更一般情况,希确定 $w(t)$ 并画出其示意图。

- 8.21. 有一个连续时间信号 $x_o(t)$, 其傅里叶变换为 $X_o(\omega)$ 。设希望计算 $X_o(\omega)$ 的抽样值, 先将 $x_o(t)$ 抽样以得到离散时间序列 $x[n]$, 此处

$$x[n] = x_o(nT)$$

然后, 可以算出离散时间傅里叶变换 $X(\Omega)$ 的抽样值。假如 $X(\Omega)$ 的样值在 $\Delta\Omega$ 的频率抽样间隔情况下算出, 这相当于在一定的频率抽样间隔情况下计算 $X_o(\omega)$ 的样值, 设用 $\Delta\omega$ 表示此间隔。

假定 $x_o(t)$ 带限为 10 kHz, 抽样周期 $T = 50 \mu\text{sec}$ 和 $\Delta\Omega = \pi \times 10^{-3}$, 试求 $\Delta\omega$ 。

- 8.22. 在8.12节和8.2节已讨论过连续时间的零阶保持 (ZOH) 和一阶保持 (FOH), 本题中, 我们研究对应的离散时间的 ZOH 和 FOH。

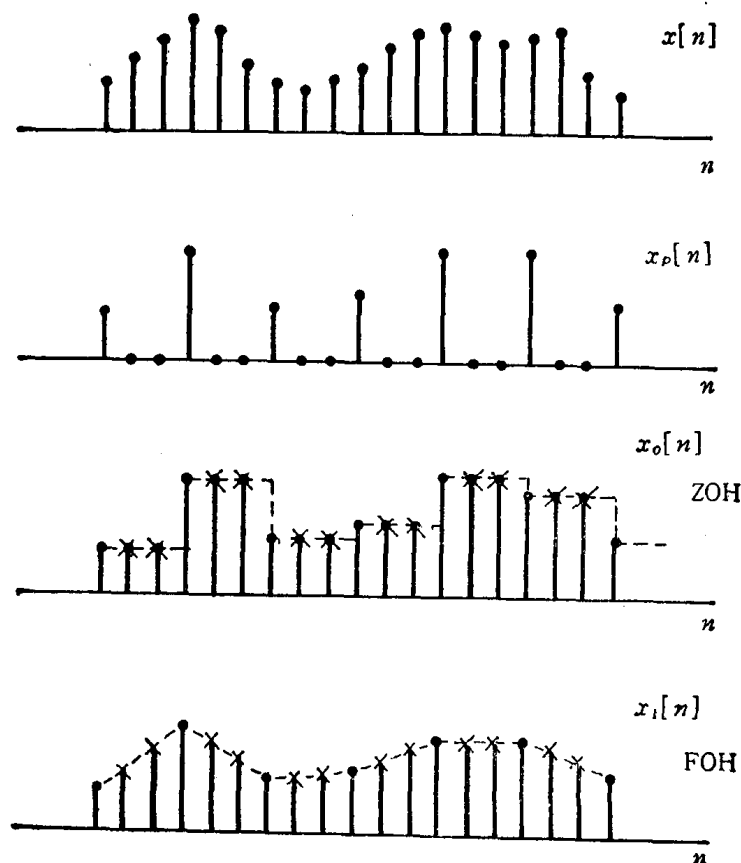


图 P 8.22—1

设考虑一个序列 $x[n]$, 对此序列已进行了如图8.32所示的离散时间抽样。假定离散时间抽样定理的条件是满足的, 即 $\Omega_s > 2\Omega_M$, 这里 Ω_s 是抽样频率, 并且在 $\Omega_M < |\Omega| \leq \pi$ 时, $x(\Omega) = 0$ 。于是, 原序列 $x[n]$ 是可以从 $x_p[n]$ 经理想低通滤波而得到精确恢复, 如同在8.6节讨论过的, 这相当于带限内插。

ZOH 表示每个样值重复(或保持) $N-1$ 个相继时间的近似内插, 对 $N=3$ 的情况, 如图 P 8.22—1 所示。FOH 表示在样值间的线性内插, 如图 P 8.22—1 所示。

(a) ZOH 可以表示为形如式(8.51)和图 P 8.22—2 系统的内插。对抽样周期为 N 的一般情况, 希确定 $h_0[n]$ 并画出其简图。

(b) 如图 P 8.22—3 所示, 利用一个适当的 LTI 滤波器 $H(\Omega)$, 可从 ZOH 序列 $x_0[n]$ 精确地恢复 $x[n]$, 试确定并画出 $H(\Omega)$ 。

(c) FOH(线性内插, 可表示为形如式(8.51)的内插, 并可等效地表示为图 P 8.22—4 的系统。对抽样周期为 N 的一般情况, 试确定 $h_1[n]$ 并画出其简图。

(d) 利用一具有频率响应 $H(\Omega)$ 的适当 LTI 滤波器, 可从 FOH 序列 $x_1[n]$ 精确地恢复 $x[n]$, 试确定并画出 $H(\Omega)$ 。

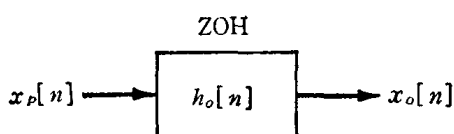


图 P 8.22—2

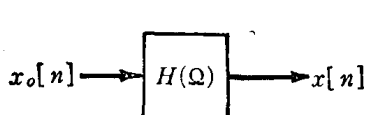


图 P 8.22—3

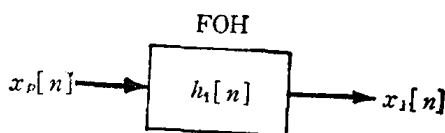


图 P 8.22—4

8.23. 如图 P 8.23 所示, 对信号 $x[n]$ 离散时间抽样, $h_r[n]$ 是一理想低通滤波器, 其频率响应为

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{2\pi}{N}, \\ 0, & \frac{2\pi}{N} < |\Omega| < \pi, \end{cases}$$

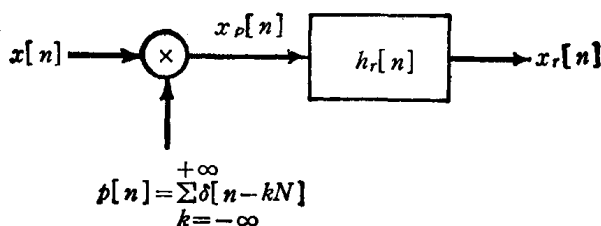


图 P 8.23

由式(8.50)和(8.51), 滤波器输出可表示为

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] h_r[n - kN] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \frac{N\Omega_c}{2\pi} \text{sinc} \left[\frac{\Omega_c}{\pi} (n - kN) \right]$$

式中 $\Omega_c = 2\pi/N$ 。试证明, 与序列 $x[n]$ 是以高于还是低于奈奎斯特抽样率抽样无关, 总有 $x_r[mN] = x[mN]$, 此处 m 是任何正或负的整数。

8.24. 设有一离散时间序列 $x[n]$, 由它可形成两个新序列 $x_p[n]$ 和 $x_a[n]$, 此处 $x_p[n]$ 相当于以抽样周期 2 对 $x[n]$ 的抽样, 而 $x_a[n]$ 相当于以因数 2 对 $x[n]$ 的抽选, 因此

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n] & n=0, \pm 2, \pm 4, \dots, \\ 0 & n=\pm 1, \pm 3, \dots \end{cases}$$

而

$$x_d[n] = x[2n]$$

(a) 若 $x[n]$ 为如图 P 8.24—1 所示, 试画出序列 $x_p[n]$ 和 $x_d[n]$ 的简图。

(b) 若 $X(\Omega)$ 为如图 P 8.24—2 所示, 试画出 $X_p(\Omega)$ 和 $X_d(\Omega)$ 的简图。



图 P 8.24—1

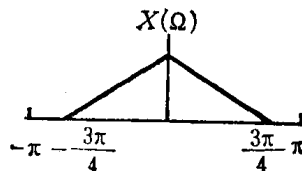


图 P 8.24—2

8.25. 如在 8.7 节所讨论并在图 8.40 和 P 8.25—1 中所说明的, 以整数因子 N 插入或升抽样的过程, 可以看作两种操作的级联。第一个系统 A 相当于在 $x[n]$ 的每个序列值间插入 $(N-1)$ 个零序列值, 因此

$$x_p[n] = \begin{cases} x_d\left[\frac{n}{N}\right], & n=0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

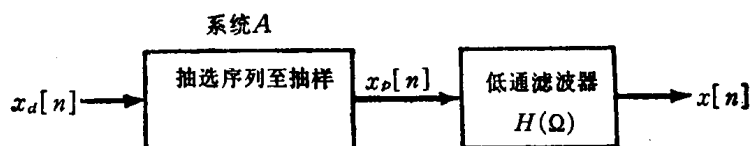


图 P 8.25—1

对于精确带限内插, $H(\Omega)$ 是理想低通滤波器。

(a) 试确定系统 A 是否为线性系统。

(b) 试确定系统 A 是否为时不变系统。

(c) 对如图 P 8.25—2 所示的 $X_d(\Omega)$, 且 $N=3$ 时, 试画出 $X_p(\Omega)$ 。

(d) 当 $N=3$, $X_d(\Omega)$ 如图 P 8.25—2 所示, 且为精确带限内插而适当选取了 $H(\Omega)$, 试画出 $X(\Omega)$ 的简图。

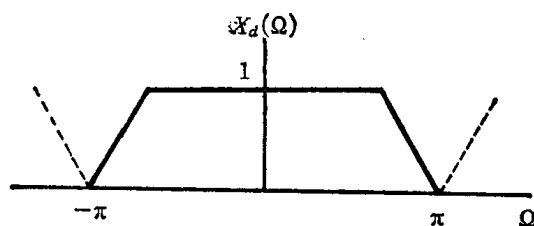


图 P 8.25—2

8.26. 如已在 8.7 节中讨论过并如图 8.40 所示, 以整数因子 N 插入或升抽样的过程, 可以看作两种操作的级联。对精确带限内插来说, 图 8.40 的滤波器 $H(\Omega)$ 是理想低通滤波器。在任何具体应用中, 实现一个近似的低通滤波器是必要的。在本题中, 我们来研究通常在这些近似低通滤波器设计时需要加入的某些有用的约束条件。

(a) 我们首先考虑用零相位 FIR 滤波器来近似的 $H(\Omega)$ 。滤波器要在原序列 $x_d[n]$ 能够精确恢复的约束条件下来设计, 即

$$x[n] = x_d\left[\frac{n}{L}\right], \quad n=0, \pm L, \pm 2L, \dots, \quad (\text{P 8.26-1})$$

即使原序列值间的插值可能不精确,这一滤波器保证原序列值由于内插而精确地恢复。试确定对于低通滤波器冲激响应 $h[n]$ 的约束条件,以保证对于任意序列 $x_a[n]$,式(P 8.26-1)的条件将严格成立。

b) 现设内插要用长度为 N 的线性相位因果对称FIR滤波器来实现,亦即

$$h[n]=0, \quad n < 0, \quad n > N-1 \quad (\text{P 8.26-2})$$

$$H(\Omega) = H_R(\Omega)e^{-j\alpha\Omega} \quad (\text{P 8.26-3})$$

式中 $H_R(\Omega)$ 是实函数,滤波器的设计要在原序列值 $x_a[n]$ 得以精确恢复但具有整数时延 α 的约束条件下进行,这里 α 是 $H(\Omega)$ 相位特性斜率的负值,亦即

$$x[n] = x_a\left[\frac{n-\alpha}{L}\right], \quad n-\alpha=0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (\text{P 8.26-4})$$

试确定是否由这一条件对滤波器长度 N 是奇数或偶数施加某种限制。

(c) 又设内插要用线性相位因果对称FIR滤波器来实现,故 $H(\Omega)$ 具如下形式,

$$H(\Omega) = H_R(\Omega)e^{-j\beta\Omega}$$

式中 $H_R(\Omega)$ 是实函数,滤波器的设计要在原序列值 $x_a[n]$ 能够精确恢复但其时延 M 不必等于相位特性斜率负值的约束条件下进行,亦即

$$x[n] = x_a\left[\frac{n-M}{L}\right], \quad n-M=0, \pm L, \pm 2L, \dots,$$

试确定是否由这一条件对于滤波器长度 N 是奇数或偶数施加某种限制。

www.blogoil.com

第九章 拉普拉斯变换

9.0 引言

在前几章中, 我们已经看到, 傅里叶分析方法在研究信号和 LTI 系统的许多问题中是极其有用的。这主要是鉴于这样的事实, 即很大一类信号可用复指数的线性组合来表示, 复指数是线性时不变系统的特征函数。以形式为 e^{st} ($s=j\omega$) 的复指数线性组合表达的连续时间信号, 形成了信号傅里叶级数和傅里叶变换表达式的基础, 这与特征函数的性质相结合, 就引出了频率响应、滤波等概念。当 s 不限于纯虚数时, 特征函数的性质及其许多结果仍然适用; 在更为通用的复指数范围内, 重复第 4 章和第 5 章研究过的某些概念, 在许多情况下将带来很大的便利。本章利用更广泛的一类复指数信号来研究这种傅里叶变换的推广, 所得的变换被称为拉普拉斯变换。第 10 章中, 对离散时间信号进行相应的推广分析。

9.1 拉普拉斯变换

关于具有冲激响应 $h(t)$ 的线性时不变系统, 我们已在第 4 章中看到, 它对形式为 e^{st} 的复指数输入的响应 $y(t)$ 由下式给出

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

www.blogoil.com

这里

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (9.1b)$$

对于虚数 s (即 $s=j\omega$), 式 (9.1b) 中的积分对应于 $h(t)$ 的傅里叶变换。对于复变量 s 的一般值, 式 (9.1b) 中的积分称为冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。与傅里叶变换一样, 拉普拉斯变换不仅在表达 LTI 系统的系统冲激响应中, 而且在表达这些系统的输入和输出信号中都起着重要的作用。一般信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换定义^①为

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (9.2)$$

我们特别注意到, $X(s)$ 是独立变量 s 的函数, s 是对应于 e^{-st} 指数中的复变量。复变量 s 的一般形式为 $s=\sigma+j\omega$, σ 和 ω 分别为实部和虚部。为了方便起见, 我们有时用 $L\{x(t)\}$ 的运算形式表示拉普拉斯变换, 用

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \quad (9.3)$$

表示 $x(t)$ 和 $X(s)$ 之间的变换关系。当 $s=j\omega$ 时, 式 (9.2) 变成

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (9.4)$$

^①由式 (9.2) 定义的变换常称为双边拉普拉斯变换, 这是为了把它和单边拉普拉斯变换 (这在 9.8 节中讨论) 相区别。因为我们主要关心的是双边拉普拉斯变换, 所以除了在必须避免混淆的地方外, 我们将省略“双边”这个词。

此式对应于 $x(t)$ 的傅里叶变换, 即

$$X(s)|_{s=j\omega} = F\{x(t)\} \quad (9.5)$$

当复变量 s 不是纯虚数时, 拉普拉斯变换和傅里叶变换也有直接的关系。为了明确这种关系, 考虑 $X(s)$ 如式 (9.2) 所规定, $s = \sigma + j\omega$, 这样

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \quad (9.6)$$

或

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \quad (9.7)$$

我们看到式 (9.7) 的右边为 $x(t) e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换, 即 $x(t)$ 的拉普拉斯变换可看作被实数信号相乘之后 $x(t)$ 的傅里叶变换。实指数 $e^{-\sigma t}$ 可以随时间衰减或增长, 这取决于 σ 是正还是负。

为了描述拉普拉斯变换以及它与傅里叶变换的关系, 我们考虑下面的例子。

例9.1 考虑信号 $x(t) = e^{-at}u(t)$ 。由例4.7可知, 对 $a > 0$, 傅里叶变换 $X(j\omega)$ 收敛并由下式给出^①。

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega + a}, \quad a > 0 \quad (9.8)$$

由式 (9.2), 拉普拉斯变换是

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{-at} u(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt \end{aligned}$$

或利用 $s = \sigma + j\omega$,

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt \quad (9.9)$$

与式 (9.8) 相比, 我们称式 (9.9) 是 $e^{-(\sigma+a)t}u(t)$ 的傅里叶变换, 因此

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega}, \quad (\sigma + a) > 0$$

或等价地,

$$X(s) = \frac{1}{s + a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a \quad (9.10)$$

例如, 对 $a = 0$, $x(t)$ 是具有拉普拉斯变换 $X(s) = 1/s$, $\operatorname{Re}\{s\} > 0$ 的单位阶跃。

我们特别注意到, 正如傅里叶变换不是对所有的信号收敛一样, 拉普拉斯变换也可能对 $\operatorname{Re}\{s\}$ 的某些值收敛, 而对另一些值不收敛。在例9.1中, 拉普拉斯变换只对 $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ 收敛。如果 a 是正的, 那么在 $\sigma = 0$ 时, $X(s)$ 可计算, 得

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (9.11)$$

如式 (9.5) 表明的, 对于 $\sigma = 0$, 拉普拉斯变换与傅里叶变换相等, 比较 (9.8) 和 (9.11) 两式, 这一点是很明显的。如果 a 是负数或零, 拉普拉斯变换仍然存在, 但傅里叶变换不存在。

^①在第4章中谈到傅里叶变换时, 对于此处的 $X(j\omega)$ 我们是用符号 $X(\omega)$ 表示的。因事实上对 $s = j\omega$, 傅里叶变换等于拉普拉斯变换, 因此对拉普拉斯变换 $X(s)$ 来说, 傅里叶变换就是 $X(j\omega)$, 这里更为方便的是把与傅里叶变换有关的自变量表示成 $j\omega$, 好像是一种明显的提示, 即对 s 的一组特定值来说, 傅里叶变换都等于拉普拉斯变换。因此, 在本书的其他部分, 我们对符号进行了这种简单的改变。

例9.2 为与例9.1比较, 我们把第二个例子的信号表示为

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

于是

$$\begin{aligned} X(s) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{-at} u(-t) dt \\ &= -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt \end{aligned}$$

或

$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$

然而, 对于此例, 为了收敛, 我们要求

$$\operatorname{Re}\{s+a\} < 0 \text{ 或 } \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

即

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} < -a \quad (9.12)$$

在例9.1和9.2中, 拉普拉斯变换的代数表达式是相同的。然而, 两例中使表达式成立的一组 s 值有很大区别。这足以说明, 在确定信号的拉普拉斯变换中, 需要给出代数表达式和使表达式成立的 s 值范围。一般称式 (9.2) 中积分收敛的 s 值范围为拉普拉斯变换的收敛域 (缩写为 ROC)。就是说, ROC 是由 $s = \sigma + j\omega$ 的那些值组成, 对那些值来说, $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换是收敛的。随着对拉普拉斯变换某些特性的深入研究, 关于 ROC 我们将作更多的说明。

表示 ROC 的一种方便方法如图9.1所示。变量 s 是复数, 在图9.1中, 我们表示了与这

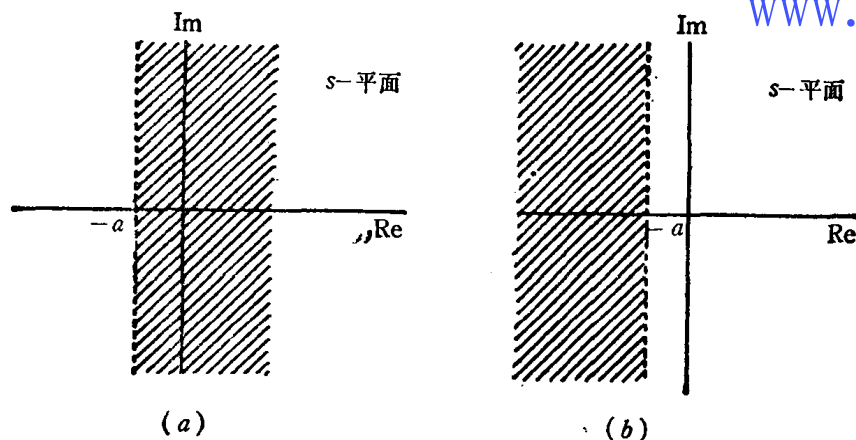


图9.1 (a) 例9.1的 ROC, (b) 例9.2的 ROC

个复变量有关的复平面 (一般称 s 平面)。直角坐标系的水平轴表示 $\operatorname{Re}\{s\}$, 垂直轴表示 $\operatorname{Im}\{s\}$ 。水平轴和垂直轴有时分别称为 σ 轴和 $j\omega$ 轴。图9.1(a)中的阴影区, 表示例9.1对应的收敛域在 s 平面上的一组点。图9.1(b)中的阴影区, 表示例9.2的收敛域。

例9.3 在这个例子中, 我们考虑作为两个实指数之和的信号, 具体说,

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (9.13)$$

则拉普拉斯变换的代数表达式为

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)]e^{-st}dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}e^{-su}u(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}e^{-su}u(t)dt
 \end{aligned}$$

或

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad (9.14)$$

为了确定 ROC, 我们注意到, 因 $x(t)$ 是两个实指数的和, 拉普拉斯变换的运算是线性的, 所以, 正如式 (9.14) 所明确表示的, $X(s)$ 就是各单独项拉普拉斯变换之和。第一项是 $e^{-t}u(t)$ 的拉普拉斯变换, 第二项是 $e^{-2t}u(t)$ 的拉普拉斯变换。从例 9.1 中可知,

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1}, \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+2}, \operatorname{Re}\{s\} > -2$$

因此, 使两项拉普拉斯变换都收敛的 $\operatorname{Re}\{s\}$ 的一组值是 $\operatorname{Re}\{s\} > -1$, 于是,

$$e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}, \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

或等价地, 表示成右边两项的组合

$$e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2s+3}{s^2+3s+2}, \operatorname{Re}\{s\} > -1 \quad (9.15)$$

在以上三例的每一个中, 拉普拉斯变换都是复变量 s 的多项式之比, 即为

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

www.blogoil.com

的形式。这里 $N(s)$ 和 $D(s)$ 分别表示分子多项式和分母多项式。当 $X(s)$ 具有这种形式时, 就称为有理函数。如例 9.3 提示的, 每当 $x(t)$ 是实指数或复指数的线性组合时, $X(s)$ 将是有理函数。在 9.7.1 节中将会看到, 当考虑由线性常系数微分方程确定的 LTI 系统时, 也会出现有理变换。除了比例系数之外, 在有理拉普拉斯变换中, 分子、分母的多项式可以由它们的根来确定。于是, 在 s 平面上标出 $N(s)$ 和 $D(s)$ 根的位置, 就提供了描绘拉普拉斯变换的一种方便的图示法。例如, 在图 9.2 中显示了例 9.3 拉普拉斯变换的 s 平面表示。用符号 “ \times ” 表示式 (9.15) 分母多项式的每一个根的位置, 用 “ \circ ” 表示分子多项式的每一个根的位置。此例中的收敛域也是用阴影区表示。对于有理拉普拉斯变换, 分子多项式的根通常称为 $X(s)$ 的零点, 因为对 s 的那些值, $X(s)=0$ 。分母多项式的根称为 $X(s)$ 的极点, 因为对 s 的那些值, $X(s)$ 成为无界的了。如果分母多项式的阶数高于分子多项式的阶数, 当 s 趋向无穷大时, $X(s)$ 将变为零。相反, 如果分子多项式的阶数比分母多项式的阶数高, 当 s 趋向无穷大时, $X(s)$ 成为无界。这个性质可以解释为在无穷大处的零点或极点。这解释在第 11 章中将很有用。

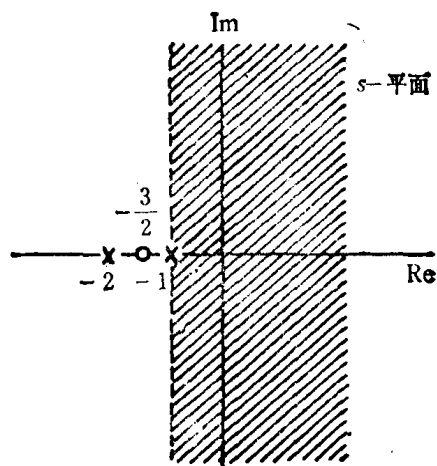


图 9.2 例 9.3 的拉普拉斯变换 s 平面表示。×和○分别标志分母和分子根的位置。阴影区代表 ROC

然而, 应当承认, 在有限 s 平面内, $X(s)$ 的零点和极点足以完全表示代数表达式 $X(s)$ 在比例系数范围之内的特性, 因为这些零点和极点代表式(9.16)中多项式 $N(s)$ 和 $D(s)$ 所有的根, 但从它们本身不能确定拉普拉斯变换的 ROC。 $X(s)$ 通过它在 s 平面上的零点和极点来表示的方法, 称为极点—零点图。在比例系数范围之内, 极点—零点图与 ROC 一起, 提供了拉普拉斯变换的全面说明。

例9.4 设

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

于是,

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2}, \quad \text{Re}\{s\} > 2 \quad (9.17a)$$

或

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \text{Re}\{s\} > 2 \quad (9.17b)$$

本例的极点—零点图及 ROC 一起由图9.3所示。

回顾式(9.5), 在 $s = j\omega$ 时, 拉普拉斯变换相当于傅里叶变换。然而, 如果拉普拉斯变换的 ROC 不包括 $j\omega$ 轴(即 $\text{Re}\{s\} = 0$), 那么傅里叶变换不收敛。从图9.3看到, 这实际上是例9.4的情况。对这个例子, 我们也观察到, 两个零点出现在同一 s 值处。一般地, 我们称极点或零点的阶数为其在给定位置重复的次数。因此, 在例9.4中, $s=1$ 处有一个二阶零点, 在 $s=-1$ 和 $s=2$ 处有两个一阶极点。在这个例子中, ROC 位于最右边极点之右。一般地, 对于有理拉普拉斯变换, 极点的位置和能与给定极点—零点图相联系的可能 ROC 之间有着密切的关系。这种特有的约束与 $x(t)$ 的时域特性是紧密相连的。在下一节中, 我们将对这些约束和关系中的几种情况进行探讨。

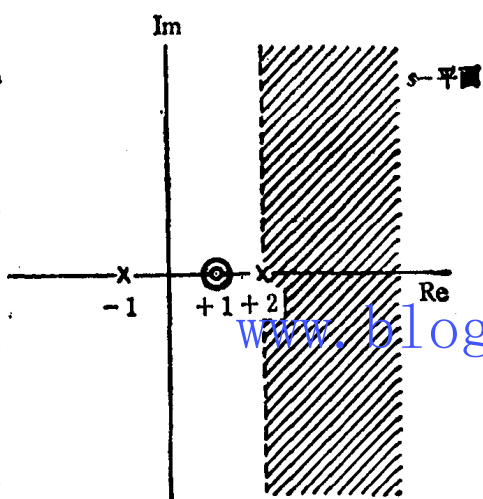


图9.3 例9.4的极点—零点图和 ROC

9.2 拉普拉斯变换的收敛域

在以上讨论中, 我们已经看到, 全面地说明拉普拉斯变换不仅需要 $X(s)$ 的代数表达式, 而且需要有关的收敛域。正如例9.1、9.2所显示的, 两个区别很大的信号能够有相同的 $X(s)$ 的代数表达式, 它们的拉普拉斯变换只有通过收敛域才能区别。在这一节中, 我们来探讨对各类信号 ROC 的某些特定约束。我们将看到, 理解这些约束, 常常使我们只从 $X(s)$ 的代数表达式和时域中 $x(t)$ 的某些一般性质, 就能毫无疑问地确定或重新构成 ROC。在研究这些性质时, 我们直观地而不是严密地加以陈述。

性质1: $X(s)$ 的 ROC 是由 s 平面中平行于 $j\omega$ 轴的带状区构成。

这个性质的正确性来自这样的事实: $X(s)$ 的 ROC 是由 $s = \sigma + j\omega$ 的那些值组成, 对这些值来说, $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换收敛。因此, ROC 只取决于 s 的实部。

性质 2: 对有理拉普拉斯变换来说, ROC 不含任何极点。

这个性质从至今研究过的所有例子中很容易观察到。因为 $X(s)$ 在极点上是无穷大, 所以很清楚, 式 (9.2) 中的积分在极点上不收敛, 因此, ROC 不可能含 s 的那些值。

性质 3: 如果 $x(t)$ 具有有限时宽, 又如果至少有一个使拉普拉斯变换收敛的 s 值, 则 ROC 是整个 s 平面。

性质 3 证明如下。有限时宽信号有这样的性质: 在有限时宽间隔之外它为零, 如图 9.4 所示。现假设 $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ 对于某个 σ_0 值, 例如 σ_0 , 为绝对可积, 以致

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (9.18)$$

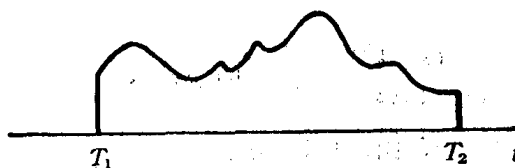


图 9.4 有限时宽信号

在这种情况下, 直线 $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ 在 ROC 中。为了使 $\text{Re}\{s\} = \sigma_1$ 也在 ROC 中, 我们要求

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt < \infty$$

设 $\sigma_1 > \sigma_0$, 则 $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}$ 是一个衰减指数。因此在 $x(t)$ 不为零的整个间隔上, 这个指数的最大值是 $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1}$, 这样我们就能写出

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \quad (9.19)$$

因为式 (9.19) 的右端是有界的, 故其左端也有界, 因此 $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ 的 s 平面必定也在 ROC 中。用类似的论证, 如果 $\sigma_1 < \sigma_0$, 则

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \quad (9.20)$$

$x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 又是绝对可积的。因此, ROC 包括整个 s 平面。图 9.5 直观说明了这个结果。

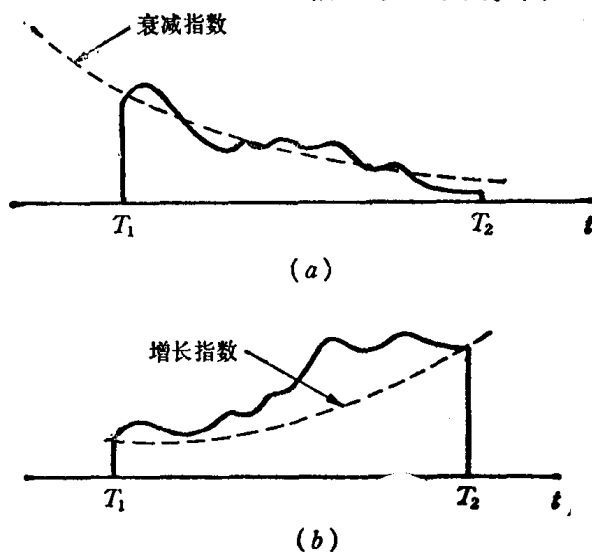


图 9.5 (a) 图 9.4 的有限时宽信号用衰减指数相乘; (b) 图 9.4 的有限时宽信号用增长指数相乘

在图9.5(a)中, 我们显示了图9.4的 $x(t)$ 用一个衰减指数相乘; 而在图9.5(b)中, 同一信号用一个增长指数相乘。既然间隔是有限的, 指数加权就决不是无界的, 因此, $x(t)$ 的可积性不会被这个指数加权破坏这是合乎情理的了。

要保证在 $x(t)$ 不等于零的间隔上指数加权有界, 认识到这一点很重要, 以上讨论极大地依赖于 $x(t)$ 有有限长度这一事实。在下面两个性质中, 我们考虑当 $x(t)$ 只在正或负的时间方向具有有限的范围时, 其结果的变形。

性质 4: 如果 $x(t)$ 是处于右边的, 又如果直线 $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ 在 ROC 中, 则使 $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ 的所有 s 值也将在 ROC 中。

右边信号如图9.6所示, 是在某个限定的时间下之前, $x(t) = 0$ 的信号。对于这样的信号, 可能没有使拉普拉斯变换收敛的 s 值。信号 $x(t)e^{t^2}u(t)$ 就是这样的例子。然而, 假设拉普拉斯变换对于某个 σ 值如 σ_0 收敛, 则

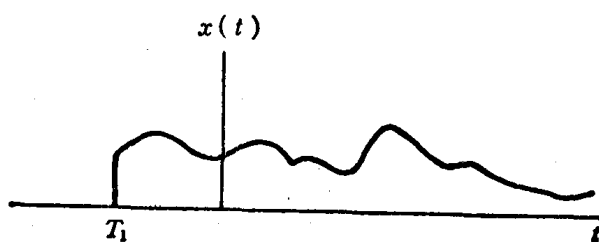


图9.6 右边信号

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

或等价地, 因为 $x(t)$ 是处于右边的, 所以

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (9.21)$$

因此, 如果 $\sigma_1 > \sigma_0$, $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 绝对可积也一定是正确的, 因为正如图9.7所示, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $e^{-\sigma_1 t}$ 比 $e^{-\sigma_0 t}$ 衰减得快, 因而可以说, 对于 $\sigma_1 > \sigma_0$,

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt &= \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \end{aligned} \quad (9.22)$$

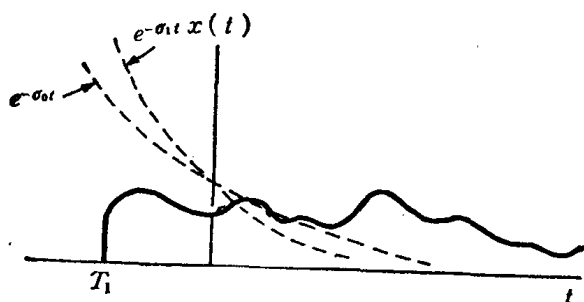


图9.7 如果 $x(t)$ 是处于右边的, 并且 $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ 绝对可积, 则对于 $\sigma_1 > \sigma_0$, $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 也将绝对可积

因为 T_1 是有限的, 于是由式(9.21)可知, 式(9.22)不等式的右边也是有限的, 因此 $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 是绝对可积的。注意, 在以上的论证中, 显然依赖于 $x(t)$ 是处于右边的这个事实。因此, 虽

然对于 $\sigma_1 > \sigma_0$, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时 $e^{-\sigma_1 t}$ 比 $e^{-\sigma_0 t}$ 发散得快, 但 $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 在负的时间方向上不能无限制地增长, 因为对 $t < T_1$, $x(t) = 0$ 。

性质 5: 如果 $x(t)$ 是处于左边的, 又如果直线 $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ 在 ROC 中, 则对于 $\text{Re}\{s\} < \sigma_0$ 的所有 s 值, 也将 ROC 中。

左边信号如图9.8所示, 是在某个限定的时间 T_2 之后, $x(t) = 0$ 的信号。关于这个性质的论证和直觉知识, 与性质 4 的极其相似。

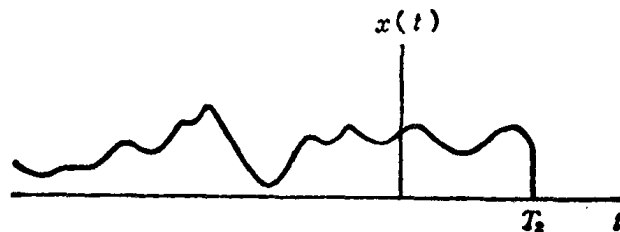


图9.8 左边信号

性质 6: 如果 $x(t)$ 是双边的, 又如果直线 $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ 在 ROC 中, 则 ROC 将由 s 平面中包括直线 $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ 的带状区构成。

双边信号如图9.9(a)所示, 是对于 $t > 0$ 和 $t < 0$ 都无限延展的信号。对于这样的信号, ROC 的确定可以通过选择任意时间 T_0 , 并把 $x(t)$ 分成处于右边的 $x_R(t)$ 和处于左边的 $x_L(t)$, 像图9.9(b)和9.9(c)所表示的。 $x(t)$ 的拉普拉斯变换对于使 $x_R(t)$ 和 $x_L(t)$ 两个

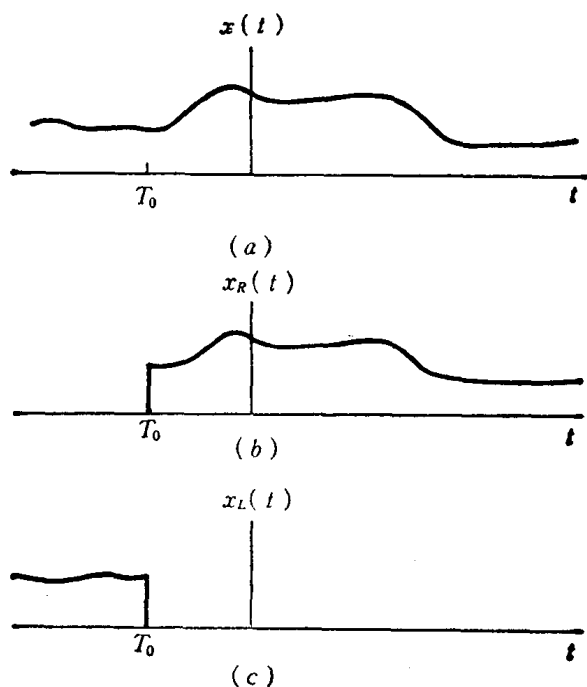


图9.9 被分成处于右边和处于左边信号之和的双边信号

变换都收敛的 s 值收敛。由性质 4, $L\{x_R(t)\}$ 的 ROC 由对于某个值 σ_R , $\text{Re}\{s\} > \sigma_R$ 的半平面组成; 由性质 5, $L\{x_L(t)\}$ 的 ROC 由对于某个值 σ_L , $\text{Re}\{s\} < \sigma_L$ 的半平面组成。因此, $L\{x(t)\}$ 的 ROC 是这两个半平面的重迭部分, 如图9.10所示。当然, 这是假设 $\sigma_R < \sigma_L$,

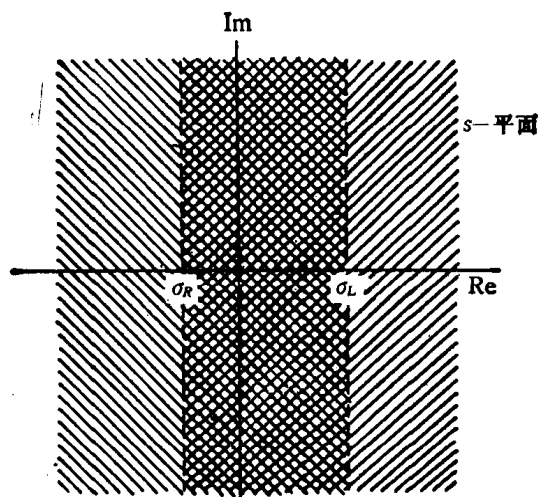


图9.10 假定 $x_R(t)$ 和 $x_L(t)$ 重叠的 ROC, 两个 ROC 的重叠部分就是 $x(t)=x_R(t)+x_L(t)$ 的 ROC

因此会存在一些重叠。如果情况不是这样, 那么即使 $x_R(t)$ 和 $x_L(t)$ 的拉普拉斯变换分别存在, $x(t)$ 的拉普拉斯变换也不存在。

例9.5 设

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 < t < T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}] \quad (9.23)$$

因为在此例中, $x(t)$ 是有限长度, 所以由性质 3, ROC 是整个 s 平面。在式(9.23)中, $X(s)$ 好像在 $s = -a$ 有一个极点。这根据性质 2, 将与一个 ROC 是由整个 s 平面所组成的这一点不一致。事实上, 式(9.23)的代数表达式中, 在 $s = -a$ 处, 分子分母都为 零。因此, 为了确定 $s = -a$ 处的 $X(s)$, 可利用罗比塔法则, 得

$$\lim_{s \rightarrow -a} X(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \left[\frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-(s+a)T})}{\frac{d}{ds}(s+a)} \right] = \lim_{s \rightarrow -a} T e^{-aT} e^{-sT}$$

因此,

$$X(-a) = T \quad (9.24)$$

于是, 式(9.23)中的 $X(s)$ 实际上没有极点。对应由下式确定的 s 值, 分子有无限个零点

$$1 - e^{-(s+a)T} = 0 \quad (9.25)$$

或等价地

$$e^{-(s+a)T} = 1 = e^{-j2\pi k}, \quad k \text{ 为任意整数} \quad (9.26)$$

因此, 每当

$$(s+a)T = j2\pi k$$

或

$$s = -a + j \frac{2\pi k}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (9.27)$$

时式(9.25)可满足。 $X(s)$ 产生的极点—零点图如图9.11所示。注意, 虽然式(9.25)和(9.27)表示在 $s = -a$ 处有零点, 实际上, 这个零点被式(9.23)中分母项代表的极点相消。

正如图9.11所示, 这样, 在 $s = -a$ 处既没有极点也没有零点。当然, 这与式(9.24)中我们的结论是一致的。

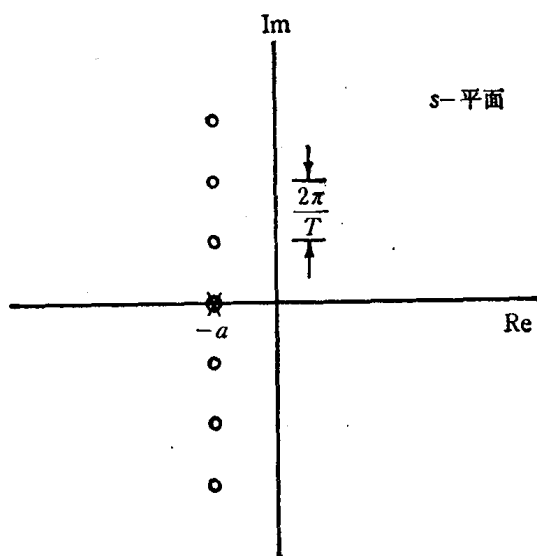


图9.11 例9.5的极点—零点图。如图所示, 式(9.23)中分母项表示的极点被分子的零点相消。因此, 拉普拉斯变换只包含零点, ROC 是整个 s 平面

例9.6 设

$$x(t) = e^{-b|t|} \quad (9.28)$$

图9.12表示了 $b > 0$ 和 $b < 0$ 两种情况。因为这是个双边信号, 所以我们把它分成处于右边和处于左边的信号之和, 即

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{+bt}u(-t) \quad (9.29)$$

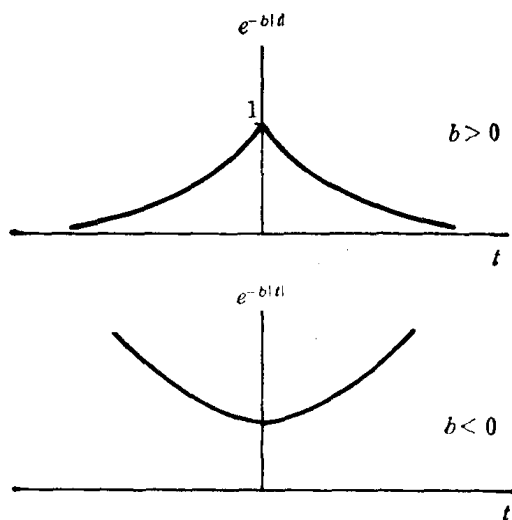


图9.12 信号 $x(t) = e^{-b|t|}$ $b > 0$ 和 $b < 0$ 两种情况

由例9.1

$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b}, \text{Re}\{s\} > -b \quad (9.30)$$

由例9.2

$$e^{+bt}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{-1}{s-b}, \text{Re}\{s\} < +b \quad (9.31)$$

虽然，式(9.29)中各式的拉普拉斯变换有收敛域，但是，如果 $b < 0$ ，就没有共同的收敛域。因此，对于 b 的那些值， $x(t)$ 没有拉普拉斯变换。如果 $b > 0$ ， $x(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$e^{-b|t|} \xrightarrow{L} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{2b}{s^2 - b^2}, \quad -b < \text{Re}\{s\} < +b \quad (9.32)$$

对应的极点—零点图如图9.13所示，阴影代表 ROC。

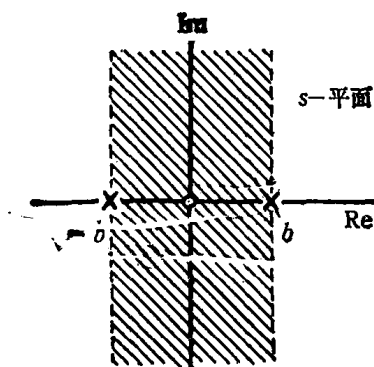


图9.13 例9.6的极点—零点图和 ROC

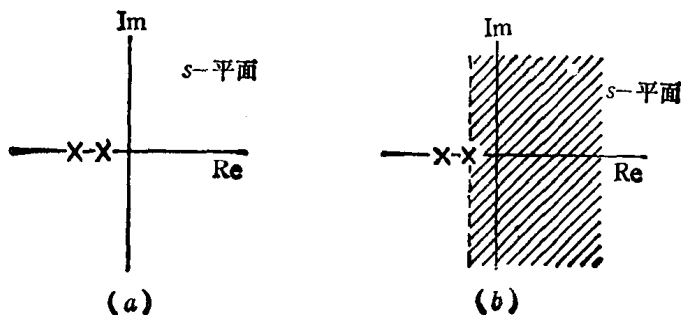
注意，任何信号，或是没有拉普拉斯变换，或为性质3至性质6所涉及的四种类型之一。因此，对具有拉普拉斯变换的任何信号，ROC 必须或者是整个 s 平面(对有限长度信号)，或者是左半平面(对左边信号)，或者是右半平面(对右边信号)，或者是带状(对双边信号)。在我们考虑过的所有例子中，ROC 都具有附加的性质，该性质为在每个方向(即 $\text{Re}\{s\}$ 增加和 $\text{Re}\{s\}$ 减少) ROC 或者被极点限制，或者扩展到无穷大。事实上，这对于有理拉普拉斯变换总是正确的。一个正规的论证是较为冗长的，但是它的正确性基本上是这样的事实的结果，即有理拉普拉斯变换的信号是指数的线性组合。由例9.1和9.2可见，在这个线性组合中，各个项变换的 ROC 必定有这个性质。作为这个的结果，并考虑性质1和性质4，右边信号的 ROC 是在最右边极点之右的 s 平面域中，左边信号的 ROC 是在最左边极点之左的 s 平面域中。

为了说明不同的 ROC 如何能与同一个极点—零点图联系，让我们考虑下面的例子。

例9.7 考虑与图9.14(a)联系的代数表达式

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (9.33)$$

如图9.14(b)~(d)所示，能与此代数表达式联系的有三种可能的 ROC，它们对应于三个不同的信号。与图9.14(b)中极点—零点图联系的是处于右边的。因为 ROC 包括



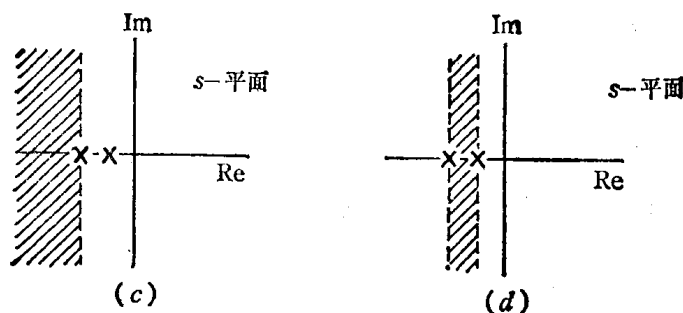


图9.14 (a)例9.7的极点—零点图; (b)对应右边信号的 ROC;
(c)对应左边信号的 ROC; (d)对应双边信号的 ROC

$j\omega$ 轴, 此信号的傅里叶变换收敛。图9.14 (c)对应左边信号, 图9.14 (d)对应于双边信号。这两个信号都没有傅里叶变换, 因为 ROC 不包括 $j\omega$ 轴。

9.3 拉普拉斯逆变换

在9.1节中, 我们讨论了时间函数的拉普拉斯变换, 把它作为被指数加权后函数的傅里叶变换; 即把 s 表达为 $s = \sigma + j\omega$, 那里 $\text{Re}\{s\} = a$ 是 ROC 中的一条直线, 信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(\sigma + j\omega)$ 由下式给出

$$X(\sigma + j\omega) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \quad (9.34)$$

特别是, 我们能够利用式(4.62)给出的傅里叶逆变换求此式的反关系

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (9.35)$$

或者两边乘 $e^{\sigma t}$, 得到

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega \quad (9.36)$$

最后, 如果把积分变量由 ω 改为 s , 利用 σ 是常数的事实, 则 $ds = jd\omega$, 就得到基本的拉普拉斯逆变换方程

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - \infty}^{\sigma + \infty} X(s)e^{st}ds \quad (9.37)$$

此式表明 $x(t)$ 能够表达成复指数的加权积分。积分围线是复平面上的一条直线, 与 $j\omega$ 轴平行, 由 σ 值确定, 以便 $X(\sigma + j\omega)$ 收敛。对于一般的 $X(s)$, 这个积分的正规求值需要在复平面内使用围线积分。这个课题不准备在这里考虑。然而, 对于有理变换一类来说, 拉普拉斯逆变换可以不必直接由式(9.37)计算来确定, 即可以用类似于第4章中确定傅里叶逆变换时使用的部分分式展开的方法。这个步骤基本上就是把有理代数表达式展成较低阶项的线性组合。例如, 设 $X(s)$ 没有多阶极点, 且分母多项式的阶数比分子多项式的阶数高, 则可展开为以下形式

$$X(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + a_i} \quad (9.38)$$

由 $X(s)$ 的 ROC, 各项的 ROC 都能推出。因为从例9.1和9.2我们知道式(9.38)中各一阶项的拉普拉斯逆变换, 所以就可得到表示 $X(s)$ 逆变换的合成时间函数 $x(t)$ 。详细的步骤

最好通过下面一些例子来说明。

例9.8 设

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (9.39)$$

为了得到拉普拉斯逆变换，第一步是进行部分分式展开，得到

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad (9.40)$$

正如在附录中讨论的，通过对式(9.40)的两边乘以 $(s+1)(s+2)$ ，然后使两边 s 同次幂的系数相等，我们就能够计算系数 A 和 B 。用另一种方法，可以看到

$$A = [(s+1)X(s)]|_{s=-1} = 1 \quad (9.41)$$

$$B = [(s+2)X(s)]|_{s=-2} = -1 \quad (9.42)$$

于是， $X(s)$ 的部分分式展开为

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (9.43)$$

第二步，需确定式(9.43)中与各个一阶项有关的 ROC，要做到这一点，可参考9.2节研究过的 ROC。因为 $X(s)$ 的 ROC 是 $\text{Re}\{s\} > -1$ ，所以式(9.43)部分分式展开中各项的 ROC 都包括 $\text{Re}\{s\} > -1$ 。因此，对于每一项，ROC 都能向左边或/和右边扩展到极点或无穷大。这正如图9.15所描述。图9.15(a)显示式(9.39)规定的 $X(s)$ 的极点—零点图和 ROC，图9.15(b)和(c)表示式(9.39)中部分分式展开的各项。和的 ROC 用斜线阴影表示。对于图9.15(c)代表的项，公共的 ROC 能够如图示的一样，被扩展到左边。

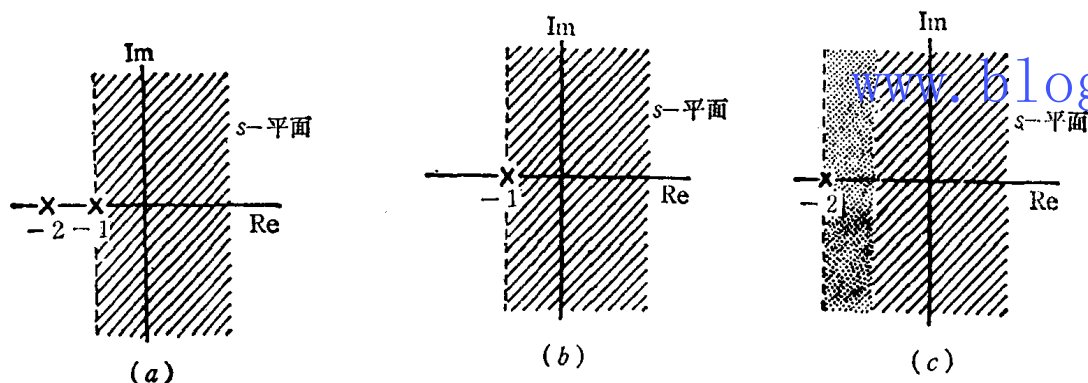


图9.15 部分分式展开式中各项 ROC 的结构：(a) $X(s)$ 的极点—零点图和 ROC，(b) $s = -1$ 的极点及其 ROC，(c) $s = -2$ 的极点及其 ROC

因为式(9.39)中的两个极点都在 ROC 的左边，所以式(9.43)中的两项都对应右边信号。式(9.43)中各项的逆变换可参考例9.1获得，具体说，

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (9.44a)$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2 \quad (9.44b)$$

所以

$$(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (9.44c)$$

继续研究这个例子。现在设 $X(s)$ 的代数表达式又是式(9.39)的表达式, 而且 ROC 是 $\text{Re}\{s\} < -2$ 。 $X(s)$ 的部分分式展开式只与代数表达式有关, 特别是对式(9.43)仍然适用。然而, 对于这个新的 ROC, 两个极点都在它的右边, 这样, 式(9.43)中的两项都对应左边信号。由例9.2就有

$$x(t) = (-e^{-t} + e^{-2t})u(-t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} < -2 \quad (9.45)$$

最后, 假设 $X(s)$ 的 ROC 是 $-2 < \text{Re}\{s\} < -1$ 。在这种情况下, $s = -1$ 上的极点仍在 ROC 的右边(对应左边信号)。而 $s = -2$ 上的极点在 ROC 的左边(对应右边信号)。利用例9.1 和 9.2, 得到

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad -2 < \text{Re}\{s\} < -1 \quad (9.46)$$

在例 9.8 中, 我们利用部分分式展开的技术, 把拉普拉斯变换表达为各项之和, 然后, “通过观察”, 我们就能识别各项的逆变换。正如在附录中讨论的, 当 $X(s)$ 有高阶极点和/或分母的次数不高于分子的次数时, 它的部分分式展开除了以上考虑的一阶项以外, 还包括其它的项。在9.6节中讨论了拉普拉斯变换的性质之后, 我们研究一些其他的拉普拉斯变换对, 这些拉普拉斯变换对连同以上性质, 对推广例9.8中概述的逆变换方法是有用的。

9.4 根据极点—零点图进行傅里叶变换的几何求值

在9.1节中我们看到, 信号的傅里叶变换是在 $j\omega$ 轴上计算的拉普拉斯变换。根据拉普拉斯变换的极点—零点图上任何一组值, 本节讨论用几何方法计算傅里叶变换的步骤, 以及更一般地, 用几何方法计算拉普拉斯变换的步骤。为了研究这个步骤, 首先考虑具有单个零点的拉普拉斯变换[即 $X(s) = (s-a)$], 我们在一个特定的 s 值, 比如说 $s = s_1$ 上计算这个零点。代数表达式 $s_1 - a$ 是 s_1 和 $-a$ 两个复数之和, 它们每一个都可代表复平面中的一个矢量, 如图9.16所示。复数 $s_1 - a$ 的矢量, 是图9.16中所示的矢量和, 它是从 $s = a$ 这个零点到点 s_1 的一个矢量。于是, $X(s_1)$ 的值就具有幅度(即此矢量的长度)和角度(即此矢量与实轴的交角)。如果 $X(s)$ 换成在 $s = a$ 处的一个单极点[即 $X(s) = 1/(s-a)$], 则分母将用上述同一矢量表示。 $X(s_1)$ 的值也有幅度和角度, 其幅度为矢量从极点到 $s = s_1$ 的长度的倒数, 其角度为矢量与实轴交角的负角度。更一般的, 有理拉普拉斯变换是由上面讨论的极点项和零点项乘积形式组成, 即它可以被因式分解成下面的形式

$$X(s) = M \frac{\prod_{i=1}^R (s - \beta_i)}{\prod_{j=1}^P (s - \alpha_j)} \quad (9.47)$$

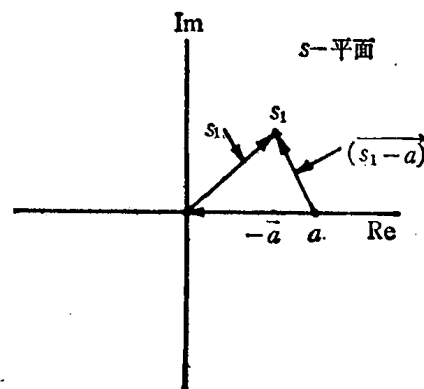


图9.16 分别代表复数 s_1 、 a 和 $(s_1 - a)$ 的矢量 s_1 、 a 和 $(s_1 - a)$ 的复平面表示

为了计算 $s = s_1$ 处的 $X(s)$, 乘积中的每一项用零点或极点到点 s_1 的矢量表示。因此 $X(s_1)$ 的幅度就是比例系数 M 的大小乘上各零点矢量(即从零点到 s_1 的矢量)长度的积, 再除以各极点矢量(即从极点到 s_1 的矢量)长度的积。复数 $X(s_1)$ 的角度是零点矢量角度之和减去极点矢量角度之和。如果式(9.47)中的比例系数 M 是负的, 则要包括一个附加的角度 π 。

显然, 如果 $X(s)$ 有高阶极点以及或者多阶零点, 对应有一些 α_i 相等和/或有一些 β_i 相等, 则从这些极点或零点出发的矢量长度和角度, 必须包括一个等于极点或零点阶数的倍数。

例9.9 设想 $X(s)$ 由下式给出

$$X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -\frac{1}{2} \quad (9.48)$$

傅里叶变换是 $X(s)|_{s=j\omega}$ 。于是, 此例的傅里叶变换由下式给出

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{2}} \quad (9.49)$$

$X(s)$ 的极点—零点图如图 9.17 所示。为了用图解确定傅里叶变换, 我们作出所示的极点矢量。在 $\omega = \omega_1$ 处傅里叶变换的幅度是矢量从极点到 $j\omega$ 轴上 $j\omega_1$ 点长度的倒数。傅里叶变换的相位是矢量角度的负数。由图 9.17, 用几何计算能够写出

$$|X(j\omega_1)|^2 = \frac{1}{\omega_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad (9.50a)$$

$$\angle X(j\omega_1) = -\operatorname{tg}^{-1} 2\omega_1 \quad (9.50b)$$

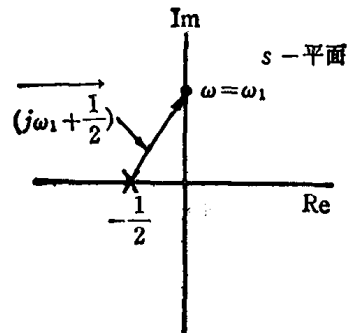


图9.17 例9.9的极点—零点图。 $|X(j\omega_1)|$ 是所示矢量长度的倒数, $\angle X(j\omega_1)$ 是矢量角度的负角度

通常, 几何计算确定傅里叶变换, 部分价值在于其实用性, 在于这种方法能获得对整个特性的大致了解。例如在图 9.17 中, 显然极点矢量的长度随着 ω_1 的增加而单调增加, 因此, 傅里叶变换的幅度将随 ω_1 的增加而单调地减少。由极点—零点图能得出有关傅里叶变换性质 (特别是其幅度) 的一般结论, 这还要通过一般的一阶系统和二阶系统的研究来作进一步说明。

9.4.1 一阶系统

作为例 9.9 的推广, 让我们来考虑已在 4.12 节中详细地讨论过的一阶系统。这类系统的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \quad (9.51)$$

它的拉普拉斯变换是

$$H(s) = \frac{1}{s\tau + 1}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -\frac{1}{\tau} \quad (9.52)$$

极点—零点图如图 9.18 所示, 频率响应的波特图如图 9.19 所示。当 ω_1 变化时, 由极点矢量的性质可以很清楚地知道, 频率响应的幅度随 ω_1 的增加而单调减少。当然, 这与图 9.19 的性质是一致的。我们也注意到, 当极点进一步移进左半平面时, 系统的有效截止频率增加。从式 (9.51) 和图 4.36 可看到, 就是这种极点左移的运动对应于冲激响应较快的衰减, 并且相应地在阶跃响应中有一个较

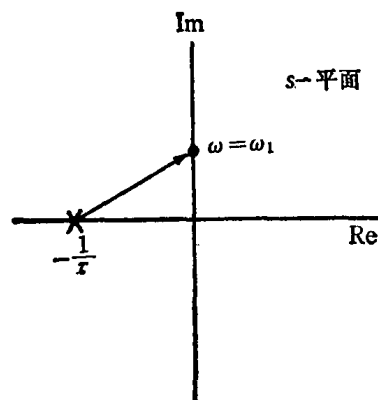


图9.18 式(9.51)一阶系统极点—零点图

快的上升时间。极点实部的位置和系统响应速度间的这种关系比较普遍适用，即离 $j\omega$ 轴较远的极点与冲激响应中较快的响应项有关。

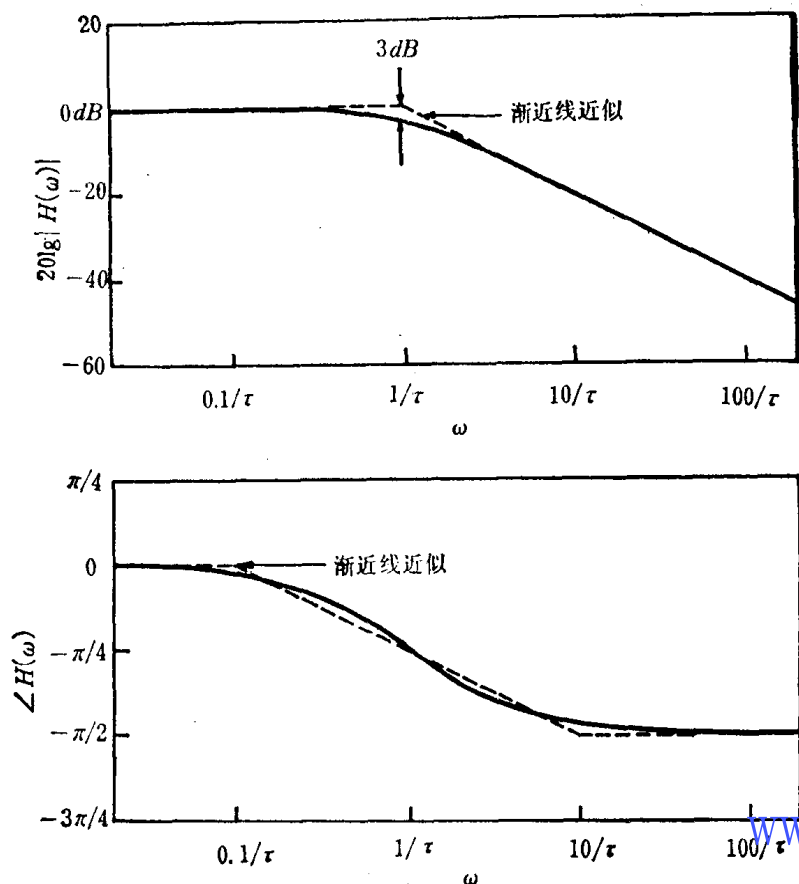


图9.19 一阶系统的频率响应

9.4.2 二阶系统

我们接下去考虑二阶系统，这也在4.12节详细地讨论过。系统的冲激响应 $h[t]$ 和频率响应 $H(j\omega)$ 分别由式(4.175)和(4.171)给出，为方便起见，我们重写如下：

[式(4.175)]
$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t)$$

这里

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

[式(4.171)]
$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

冲激响应的拉普拉斯变换是

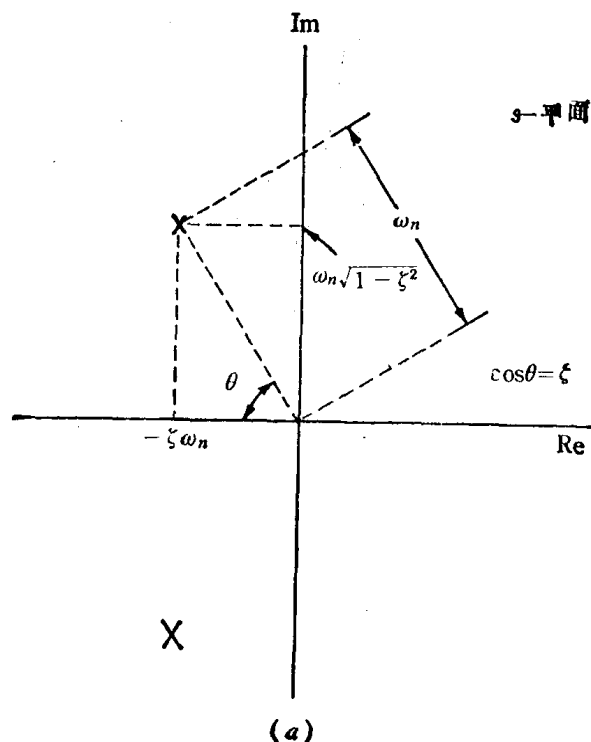
$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s - c_1)(s - c_2)} \end{aligned} \quad (9.53)$$

对于 $0 < \zeta < 1$ 来说, c_1 和 c_2 是复数, 因此极点—零点图如图 9.20(a) 所示。相应地, 冲激响应和阶跃响应有振荡部分。应注意到两个极点出现在复共轭的位置上。事实上, 如习题 9.12 所考虑的, 对于一个实值信号, 复极点 (和零点) 总是以复共轭对的形式出现。对于 $\zeta > 1$ 来说, 两个极点位于实轴上, 如图 9.20(b) 所示。对这种情况, 根据前面的讨论, 我们注意到, 随着 ζ 增加, 一个极点移近 $j\omega$ 轴, 表明这一项在时域中具有慢的响应速度; 另一极点移远进入左半平面, 表明这一项在时域中具有快的响应速度。因此, 对于大的 ζ 值来说, 正是靠近 $j\omega$ 轴的极点长时间支配着时间响应。同样地, 考虑 $\zeta \gg 1$ 的极点矢量情况, 如图 9.20(c) 所示。对低频来说, 靠近 $j\omega$ 轴极点的极点矢量的长度和角度随着 ω 的变化, 要比远离 $j\omega$ 轴极点的极点矢量灵敏得多。因此, 我们看到, 对于低频来说, 频率响应特性主要受靠近 $j\omega$ 轴的极点影响。

下一步, 让我们注意图 9.20(a) 中对应于 $0 < \zeta < 1$ 的极点—零点图。由这张图, 特别是当 ζ 小得使极点靠近 $j\omega$ 轴时, 当 ω 接近于 $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 时, 频响特性受第二象限中极点矢量的支配。尤其是, 该极点矢量的长度在 $\omega = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 处有一个极小值。这样, 我们可以期望频率响应的幅度 (定性地) 在该频率附近出现一个峰值。图 9.21 所示的是一幅频响幅度的详细示意图。在图里, 极点附近如所预期的特性是很明显的。当然, 这与图 4.43 的波特图是一致的。

由图 9.20, 我们也能容易地确定, 当改变 ζ 而保持 ω_n 不变时, 极点是怎样变化的。特别是, 因为 $\cos \theta = \zeta$, 所以极点是沿着以 ω_n 为半径的半圆移动。对 $\zeta = 0$, 两个极点在虚轴上。相应地, 在时域中冲激响应为无阻尼的正弦曲线。当 ζ 从 0 增加到 1 时, 两个极点保持为复数, 移入左半平面, 从原点到极点的矢量在整个幅度 ω_n 上保持不变。当极点的实部变得更负时, 有关的时间响应随着 t 趋向无穷大将较快地衰减。

www.blogoil.com



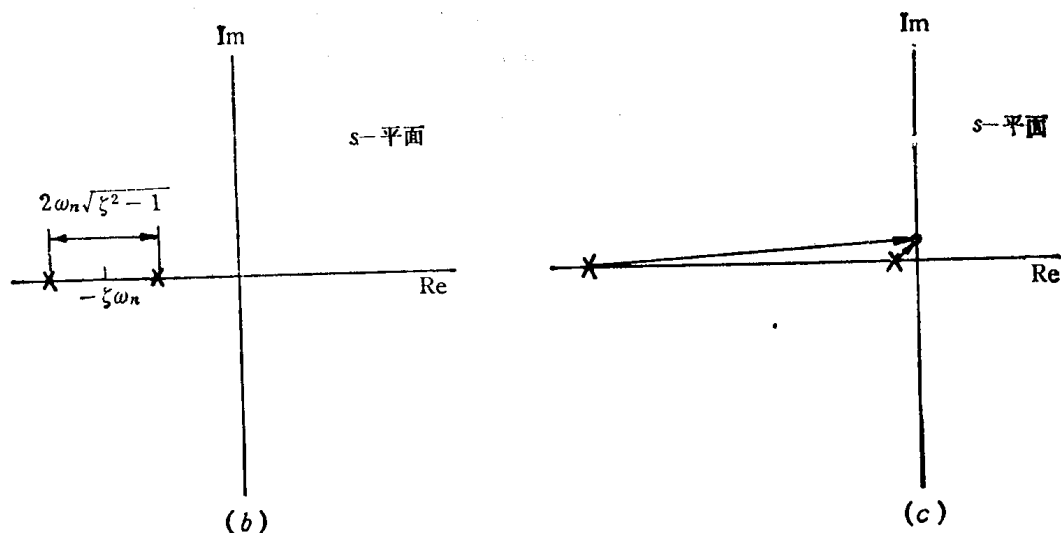


图9.20 (a) $0 < \zeta < 1$ 二阶系统的极点—零点图; (b) $\zeta > 1$ 二阶系统的极点—零点图;
(c) $\zeta \gg 1$ 极点矢量

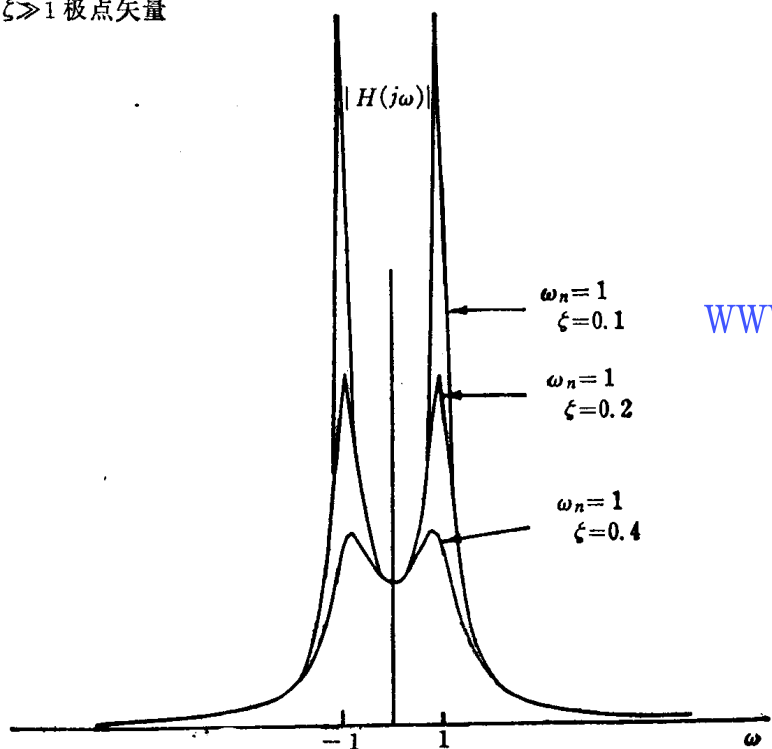


图9.21 $0 < \zeta < 1$ 二阶系统频率响应的幅度

9.4.3 全通系统

作为对频率响应几何计算的最后说明, 我们考虑一个系统, 对这个系统, 冲激响应的拉普拉斯变换具有图9.22(a)所示的极点—零点图。从这个图很明显地看出, 沿着 $j\omega$ 轴的任何值, 极点矢量和零点矢量有相同的长度, 因此频响的幅度是恒定的, 与频率无关。这样的系统通常称为全通系统, 因为它让所有的频率以相同的增益(或衰减)通过。频率响应的相位是 $\theta_1 - \theta_2$, 或者, 因为 $\theta_1 = \pi - \theta_2$, 所以

$$\angle H(j\omega) = \pi - 2\theta_2(\omega) \quad (9.54)$$

从图 9.22(a), $\theta_2 = \text{tg}^{-1}(\omega/a)$, 于是,

$$\angle H(j\omega) = \pi - 2 \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (9.55)$$

$H(j\omega)$ 的幅度和相位如图 9.22(b) 所描绘。

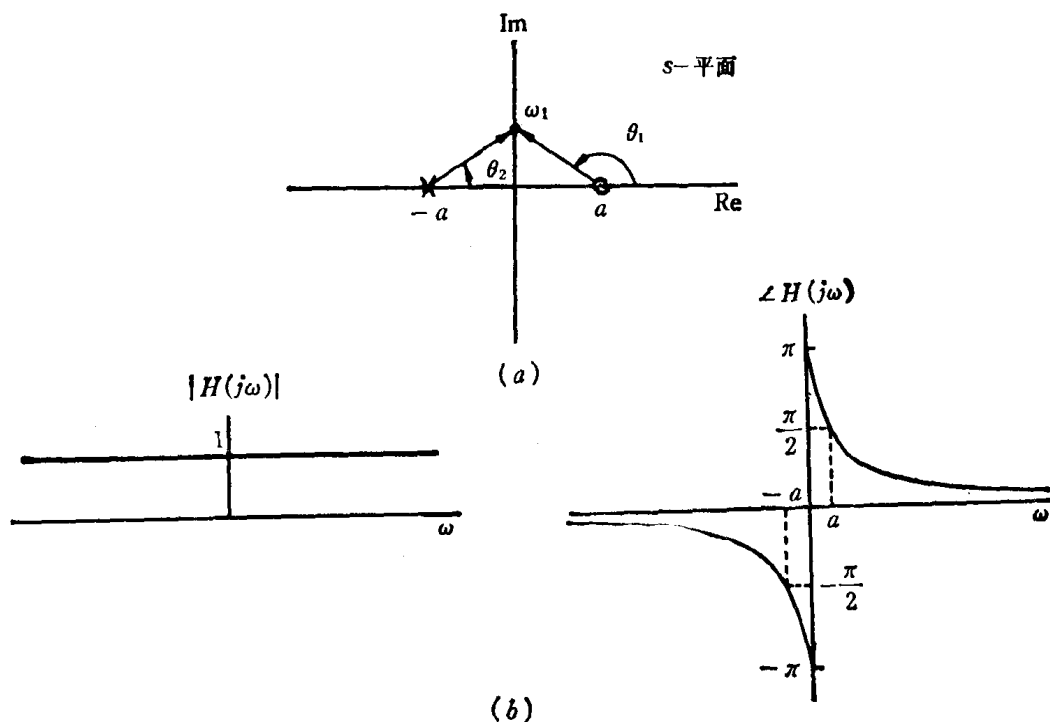


图 9.22 (a) 全通系统的极点—零点图; (b) 全通频率响应的幅度与相位

www.blogoil.com

9.5 拉普拉斯变换的性质

使用傅里叶变换时, 我们在很大程度上依赖于 4.6 至 4.8 节研究过的一系列性质。在这一节中, 我们来研究拉普拉斯变换中相对应的一系列性质。对这些性质的推导, 有许多类似于相应的傅里叶变换性质的推导, 因此将不再详细地给出。其中有一些留作本章末尾的练习 (见习题 9.9 至 9.11)。

9.5.1 拉普拉斯变换的线性

如果

$$x_1(t) \xrightarrow{\text{L}} X(s), \text{收敛域以 } R_1 \text{ 表示}$$

$$x_2(t) \xrightarrow{\text{L}} X_2(s), \text{收敛域以 } R_2 \text{ 表示}$$

则

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{\text{L}} aX_1(s) + bX_2(s) \text{ 具有包含 } R_1 \cap R_2 \text{ 的 ROC} \quad (9.56)$$

如式所示, $X(s)$ 的收敛域至少是 R_1 和 R_2 的交集。该交集可以是空的, 在这种情况下, $X(s)$ 没有收敛域, 即 $x(t)$ 没有拉普拉斯变换。例如, 对式 9.29 中的 $x(t)$ (例 9.6), 当 $b > 0$ 时, $X(s)$ 的 ROC 是和中两项 ROC 的交集。如果 $b < 0$, R_1 和 R_2 没有公共点, 即交集

是空的, 这样, $x(t)$ 没有拉普拉斯变换。ROC 也可能比交集大。作为一个简单的例子, 在式(9.56)中, 当 $x_1(t)=x_2(t)$ 且 $a=-b$, 则 $x(t)$ 和 $X(s)$ 都为零。因此, $X(s)$ 的 ROC 是整个 s 平面。

利用9.2节中研究过的 ROC 的性质, 总能构成各项线性组合有关的 ROC。特别是, 从各项 ROC 的交集 (假设它不是空的), 我们可找到存在于线性组合的 ROC 中的一条直线或带状区。然后, 把它扩展成到右边 ($\text{Re}\{s\}$ 增加) 与左边 ($\text{Re}\{s\}$ 减少) 最近的极点处 (也许在无穷远处)。

例9.10

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (9.57a)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (9.57b)$$

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (9.57c)$$

包括 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 的 ROC 的极点—零点图, 如图 9.23 (a) 和 (b) 所示。由式 (9.57c)

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad (9.58)$$

因此, 在 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性组合中, $s=-1$ 的极点被 $s=-1$ 的零点相消。 $X(s)$ 的极点—零点图如图 9.23 (c) 所示。 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 的 ROC 的交集是 $\text{Re}\{s\} > -1$ 。然而, 因 ROC 总是受到极点或无穷远的限制, 对此例来说, 由于在 $s=-1$ 处极点和零点相消, 所以 ROC 能够向左扩展到 $s=-2$ 的极点。

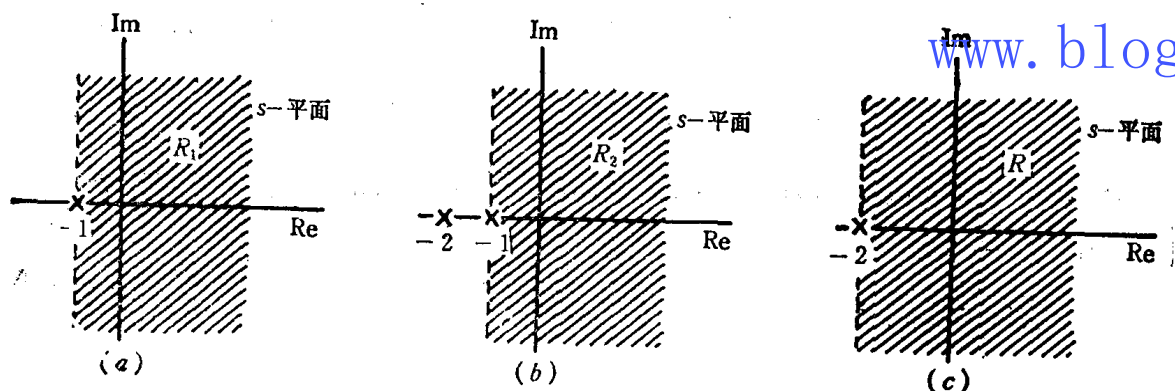


图 9.23 例 9.10 的极点—零点图和 ROC: (a) $X_1(s)$; (b) $X_2(s)$; (c) $X_1(s) - X_2(s)$ 。
 $X_1(s) - X_2(s)$ 的 ROC 包括 R_1 和 R_2 的交集, 该交集可以扩展到 $s=-2$ 的极点

9.5.2 时间移位

如果

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad \text{ROC} = R$$

则

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s), \quad \text{ROC} = R \quad (9.59)$$

9.5.3 s 域移位

如果

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad \text{ROC} = R$$

则

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0), \quad \text{ROC } R_1 = R + \text{Re}\{s_0\} \quad (9.60)$$

即，与 $X(s - s_0)$ 有关的 ROC 就是 $X(s)$ 的 ROC 被移位了 $\text{Re}\{s_0\}$ 。因此，对于 R 中的任何 s 值，值 $R + \text{Re}\{s_0\}$ 将在 R_1 中，这在图 9.24 中图示。

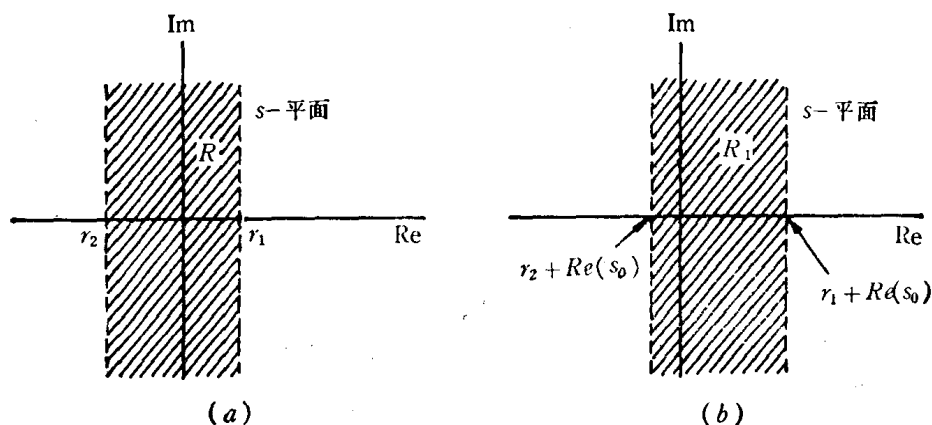


图 9.24 s 域中移位 ROC 的影响：(a) $X(s)$ 的 ROC，(b) $X(s - s_0)$ 的 ROC

www.blogoil.com

9.5.4 时间比例尺改变

如果

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

则

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{ROC } R_1 = \frac{a}{R} \quad (9.61)$$

即对于 R 中的任何 s 值，值 s/a 将在 R_1 中，如图 9.25 所示。

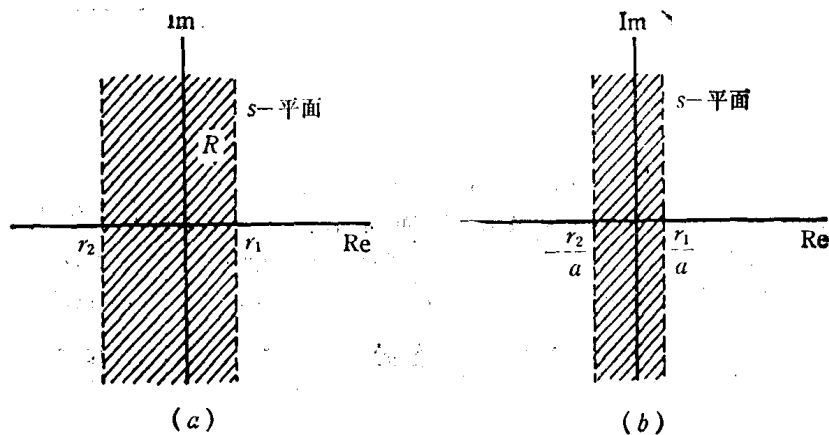


图 9.25 时间比例尺改变 ROC 的影响：(a) $X(s)$ 的 ROC，(b) a 为正 $(1/|a|)X(s/a)$ 的 ROC

9.5.5 卷积性质

如果

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), \quad \text{ROC} = R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s), \quad \text{ROC} = R_2$$

则

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)X_2(s), \text{具有包含 } R_1 \cap R_2 \text{ 的 ROC} \quad (9.62)$$

因此, $X_1(s)$ 乘 $X_2(s)$ 的 ROC, 其方式类似于 9.5.1 节的线性性质, 它包括了 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 的 ROC 的交集。如果在乘积中发生极点—零点相消, 则积的 ROC 也许更大。例如, 如果

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

则 $X_1(s)X_2(s) = 1$, 且其 ROC 为整个 s 平面。

正如我们在第 4 章中所看到的, 在傅里叶变换的范围内, 卷积的性质在线性时不变系统的分析中起着重要的作用。在 9.7 节中, 我们将相当详细地利用拉普拉斯变换的卷积性质, 它一般是用于 LTI 系统的分析, 更准确地说, 是用于由线性常系数微分方程所表达的这类系统的分析中。

www.blogoil.com

9.5.6 时域中的微分

如果

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

则

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s), \text{具有包含 } R \text{ 的 ROC} \quad (9.63)$$

这个性质可由式 (9.37) 拉普拉斯逆变换表达式的两边微分得到。明确说是对

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

两边微分, 于是

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st} ds \quad (9.64)$$

因此, $dx(t)/dt$ 是 $sX(s)$ 的拉普拉斯逆变换。 $sX(s)$ 的 ROC 包括 $X(s)$ 的 ROC, 如果 $X(s)$ 在 $s=0$ 处有一阶极点并通过乘 s 而被消去, 则 $sX(s)$ 的 ROC 也许更大。例如, 如果 $x(t) = u(t)$, 则 $X(s) = 1/s$, 并具有 $\text{Re}\{s\} > 0$ 的 ROC。 $x(t)$ 的导数是一个单位冲激, 与它有关的拉普拉斯变换是 1, 而其 ROC 是整个 s 平面。

9.5.7 S 域中的微分

对式 (9.2) 拉普拉斯变换的两边进行微分, 我们就有

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)x(t)e^{-st} dt$$

因此,

$$\boxed{-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}, \text{ROC} = R} \quad (9.65)$$

让我们考虑利用这个性质的一个例子。

例9.11 考虑求出下式的拉普拉斯变换,

$$x(t) = te^{-at}u(t) \quad (9.66)$$

因为

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

所以由式 (9.65) 可得

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \text{Re}\{s\} > -a \quad (9.67)$$

事实上, 通过重复利用式 (9.65) 可得

$$\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^3}, \quad \text{Re}\{s\} > -a \quad (9.68)$$

更一般地,

$$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \text{Re}\{s\} > -a \quad (9.69)$$

这个特定的拉普拉斯变换对, 在利用部分分式展开确定具有高阶极点的有理函数的拉普拉斯逆变换中特别有用。

9.5.8 时域中的积分

如果

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \text{ROC} = R$$

则

$$\boxed{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s), \text{ROC 包含 } R \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\}} \quad (9.70)$$

这个性质可由对拉普拉斯逆变换表达式两边积分得到, 是 9.5.6 节微分性质的相反性质。它也能通过 9.5.5 节的性质来说明。明确地,

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = u(t) * x(t) \quad (9.71)$$

由例 9.1, 当 $a=0$,

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0 \quad (9.72)$$

因此, 由 9.5.5 节的性质,

$$u(t) * x(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s) \quad (9.73)$$

它具有这样一个 ROC, 它包含 $X(s)$ 的与 $u(t)$ 拉普拉斯变换的 ROC 的交集, 对应于和 9.5.8 节性质有关的 ROC。

9.5.9 初值定理和终值定理

在 $t < 0$ 时, $x(t) = 0$ 并且在原点不包含冲激或较高阶奇点的特定约束条件下, 由拉普拉斯变换能直接计算初值 $x(0^+)$ 和终值, 即分别为 t 从正值趋于零时的 $x(t)$ 和 $t \rightarrow \infty$ 时的 $x(t)$ 值。具体说, 初值定理是

$$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (9.74)$$

而终值定理是

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (9.75)$$

这些结果的推导在习题 9.11 中考虑。

9.5.10 性质表

表 9.1 概括了本节研究过的性质。在 9.7 节中, 在应用拉普拉斯变换分析和描述线性时不变系统时, 将用到其中的许多性质。

表 9.1 拉普拉斯变换的性质

www.blogoil.com

性 质	信 号	变 换	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
9.5.1	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	至少是 $R_1 \cap R_2$
9.5.2	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s - s_0)$	R 的移位形式 [即如果 $(s - s_0)$ 在 R 中, 则 s 在 ROC 中]
9.5.4	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{s}{a}\right)$	“比例尺改变了的” ROC [即如果 (s/a) 在 $X(s)$ 的 ROC 中, 则 s 在 ROC 中]
9.5.5	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	至少是 $R_1 \cap R_2$
9.5.6	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	至少是 R
9.5.7	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.8	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	至少是 $R \cap \{R_0\{s\} > 0\}$

9.6 一些拉普拉斯变换对

正如我们在9.3节中所指出的,通过把 $X(s)$ 分解成更简单项的线性组合,且每一项的逆变换都能辨认,常常可以很容易地计算出拉普拉斯逆变换。表9.2列出一些有用的拉普拉斯变换对。变换对1很容易由式(9.2)得出。变换对2和6可由例9.1分别取 α 为0和 α 直接得到。变换对4在例9.11中利用微分性质来推导。变换对8利用9.5.3节从4得出。变换对3、5、7、9分别以2、4、6、8为基础,并加上9.5.4节性质得出。类似地,变换对10到14全部能够利用表9.1适合的性质及由此表中前面的变换对来求得(见习题9.13)。

表9.2 基本函数的拉普拉斯变换

变换对	信号	变换	ROC
1	$\delta(t)$	1	全部 s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
6	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\text{Re}\{s\} > -\alpha$
7	$-e^{-\alpha t} u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\text{Re}\{s\} < -\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\text{Re}\{s\} < -\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\text{Re}\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	全部 s
11	$[\cos\omega_0 t] u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
12	$[\sin\omega_0 t] u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
13	$[e^{-\alpha t} \cos\omega_0 t] u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha t} \sin\omega_0 t] u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -\alpha$

9.7 利用拉普拉斯变换进行LTI系统的分析和表征

在前面几节中,我们研究了拉普拉斯变换,讨论了它的一些特点和性质。拉普拉斯变换重要的应用之一,是用来分析和表征线性时不变系统。它对这类系统的作用,来自9.5.5节的卷积性质。由此可得,LTI系统的输入和输出的拉普拉斯变换,是通过乘该系统冲激响应的拉普拉斯变换相互联系的。于是

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (9.76)$$

这里, $X(s)$ 、 $Y(s)$ 和 $H(s)$ 分别是系统输入、输出和冲激响应的拉普拉斯变换。式 (9.76) 是傅里叶变换式 (4.117) 在拉普拉斯变换范围内的对应公式。事实上, 对 $s=j\omega$ 来说, 式 (9.76) 中的每一个拉普拉斯变换分别成为傅里叶变换, 式 (9.76) 完全对应于式 (4.117)。

对 $s=j\omega$ 来说, $H(s)$ 是 LTI 系统的频率响应。在拉普拉斯变换这个更广的范围内, $H(s)$ 通常称为系统函数或传递函数。LTI 系统的许多性质与 s 平面上系统函数的性质, 特别是与极点的位置和收敛域紧密相关。例如, 对于一个因果 LTI 系统, 当 $t < 0$ 时, 冲激响应为零, 这样, 实际上它是处于右边的。因此, 由 9.2 节的讨论可知, 对于具有有理系统函数的因果系统, 与系统函数有关的 ROC 将是在最右边极点 (即最正实部的极点) 再向右的 s 平面上的整个区域。同样, 如果系统是非因果的 [即 $t > 0$, $h(t) = 0$], 则 $H(s)$ 的 ROC 将是在最左边极点 (即最负实部的极点) 再向左的 s 平面上的整个区域。然而, 应当强调, 反之未必正确。在最右边极点再向右的 ROC 不保证系统是因果的, 只是冲激响应是处于右边的。同样, 在最左边极点以左的 ROC 只保证冲激响应处于左边, 不保证系统是非因果的。

$H(s)$ 的 ROC 也与系统的稳定性有关。正如我们在第 4 章所讨论的, 对于一个稳定的 LTI 系统, 冲激响应的傅里叶变换存在 (收敛)。因此, 对于稳定系统, $H(s)$ 的 ROC 必须包括 $j\omega$ 轴 [即 $\text{Re}\{s\} = 0$]。

ROC 与因果性和稳定性的关系也导致了这样的结论: 对于一个具有有理系统函数的既因果又稳定的 LTI 系统, 所有的极点必须位于 s 平面的左半部 (即它们必须都有负的实部)。这是由观察得到的明确结论, 是由于因果性使 ROC 在最右边极点之右, 以及由于稳定性使 ROC 必须包括 $j\omega$ 轴的缘故。ROC 与稳定性和因果性的关系, 在下面的一些例子中予以描述。

例 9.12 考虑一个具有下列冲激响应的系统

$$h(t) = e^{-t}u(t) \quad (9.77)$$

系统函数是 $h(t)$ 的拉普拉斯变换, 由例 9.1, 它是

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (9.78)$$

式 (9.78) 中的 ROC 是在最右边极点之右, 包括 $j\omega$ 轴。因此, 从以上讨论得出, 系统是既稳定又因果的。从式 (9.77) 给出的冲激响应看, 系统的稳定性和因果性也是显而易见的。

例 9.13 考虑下列系统函数

$$H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (9.79)$$

对于此例, ROC 也在最右边极点的右边。因此, 冲激响应一定是处于右边的。为了确定冲激响应, 首先利用例 9.1 的结果,

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (9.80)$$

接着, 由时间移位性质 9.5.2 中的式 (9.59) 可看到, 式 (9.79) 中的因子 e^s 可通过式 (9.80) 中时间函数的时间移位来说明。特别是

$$e^{-(t+1)}u(t+1) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{e^s}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (9.81)$$

因此, 与系统有关的冲激响应是

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1) \quad (9.82)$$

对于 $t < -1$, $h(t)$ 为零, $t < 0$ 时则不是, 因此系统不是因果的。此例给我们一个提示。在以前的讨论中, 我们注意到因果性意味 ROC 在最右边极点之右, 而反过来的叙述一般不能成立。

例9.14 让我们考虑在4.12节和9.4.2节中讨论过的二阶系统。冲激响应和系统函数分别是

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \quad (9.83)$$

和

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - c_1)(s - c_2)} \quad (9.84)$$

这里,

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (9.85a)$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (9.85b)$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (9.85c)$$

在图9.20中, 描绘了 $\zeta > 0$ 时极点的位置。在图9.26中, 描绘了 $\zeta < 0$ 时极点的位置。由图

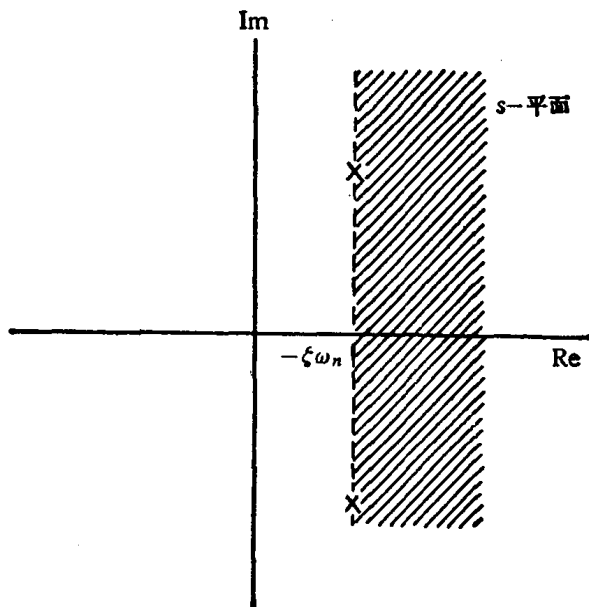


图9.26 $\zeta < 0$ 因果二阶系统的极点位置和 ROC

9.26和式(9.85), 显然, 对于 $\zeta < 0$, 两个极点都有正的实部。因为在式(9.83)中, 我们已经规定了一个因果的冲激响应, 所以 ROC 一定位于图9.26最右边极点之右, 特别是不能包括 $j\omega$ 轴。因此, 对于 $\zeta < 0$, 因果二阶系统是不稳定的。这在式(9.83)中也是明显的, 因为对 $\text{Re}\{c_1\} > 0$ 和 $\text{Re}\{c_2\} > 0$, 每一项都随着 t 的增加按指数增长。这样, $h(t)$ 不会是绝对可积的。

例9.15 考虑一个具有以下系统函数的 LTI 系统

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} \quad (9.86)$$

因为 ROC 没有规定, 所以, 由9.2节的讨论, 可有几种不同的 ROC, 因而与式(9.86)代数表达式 $H(s)$ 相关能有几种不同的冲激响应。然而, 若已知关于因果性或稳定性的情况,

则可以确定相应的 ROC。例如，已知系统是因果的，则 ROC 将如图 9.27 (a) 所示，如果已知系统是稳定的，则 ROC 将如图 9.27 (b) 所示；而图 9.27 (c) 所示的 ROC，系统既不是因果的也不是稳定的。

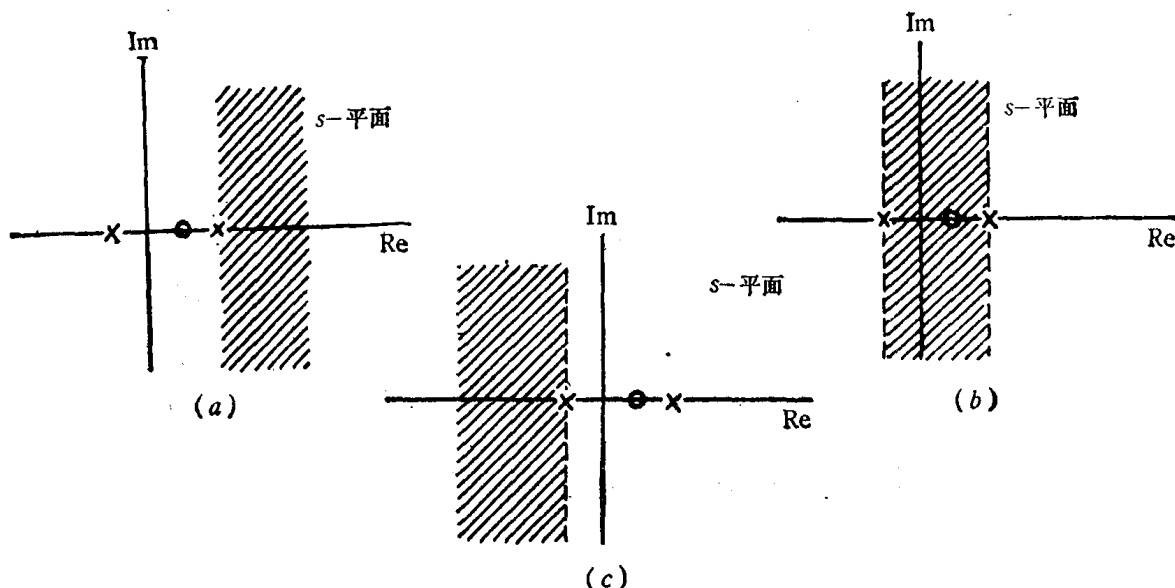


图 9.27 例 9.15 系统函数可能的 ROC: (a) 因果而不稳定的系统; (b) 非因果而稳定的系统; (c) 非因果又不稳定的系统

9.7.1 用线性常系数微分方程表征的系统

在 4.11 节中，我们看到了怎样利用傅里叶变换，来获得由线性常系数微分方程表征的系统的频率响应，而不必首先求解冲激响应或时域。以完全类似的方式，可以利用拉普拉斯变换的性质直接获得由线性常系数微分方程表征的系统函数。首先，为了说明这个步骤，考虑一个 LTI 系统，其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 满足下列线性常系数微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t) \quad (9.87)$$

对式 (9.87) 两边都进行拉普拉斯变换，并利用微商和线性性质 9.5.6 和 9.5.1 (式 (9.63) 和 (9.56))，得到代数方程

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \quad (9.88)$$

因为由式 (9.62)，系统函数 $H(s)$ 是

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

由此例得到

$$H(s) = \frac{1}{s+3} \quad (9.89)$$

于是，这就提供了系统函数的代数表达式，但没有提供收敛域。事实上，微分方程本身不是 LTI 系统的完整说明，一般，符合这个微分方程的可有不同的冲激响应，而是取决于要方程按时间正向（因果地）还是按时间反向（非因果地）求解。如果除了微分方程之外，知道系统是因果的，则能推断 ROC 在最右极点的右边，对此例来说对应于 $\text{Re}\{s\} > -3$ 。如果已知系统是非因果的，则与 $H(s)$ 有关的 ROC 是 $\text{Re}\{s\} < -3$ 。在因果的情况中，相应的

冲激响应是

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \quad (9.90)$$

而在非因果的情况中,它是

$$h(t) = -e^{-3t}u(-t) \quad (9.91)$$

通过代入式(9.87)容易证明,两个解都符合微分方程。

此例中,从微分方程来获得 $H(s)$ 的同一步骤,能更普遍地被应用。特别是,研究一般的线性常系数微分方程,其形式为

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (9.92)$$

对方程两边进行拉普拉斯变换,并反复应用微商性质9.5.6〔式(9.63)〕和线性性质9.5.1〔式(9.56)〕,得到

$$\left\{ \sum_{k=0}^N a_k s^k \right\} Y(s) = \left\{ \sum_{k=0}^M b_k s^k \right\} X(s) \quad (9.93)$$

或

$$H(s) = \frac{\left\{ \sum_{k=0}^M b_k s^k \right\}}{\left\{ \sum_{k=0}^N a_k s^k \right\}} \quad (9.94)$$

这样,一个由微分方程确定的系统的系统函数总是有理函数,并且在

$$\sum_{k=0}^M b_k s^k = 0 \quad (9.95)$$

的解为零点,而在

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k = 0 \quad (9.96)$$

的解为极点。与我们前面讨论的一致,式(9.94)不包括对 $H(s)$ 收敛域的规定。因为线性常系数微分方程本身不约束收敛域。然而,利用像系统的稳定性或因果性的附加知识,可以推断出收敛域。

9.7.2 LTI 系统互连时的系统函数

正如我们已经看到的,利用拉普拉斯变换,就能用代数运算来代替如微分、积分、时移等时域运算。进一步表明其效用的例子,可在串联、并联和反馈互连组合系统的分析和描述中看到。例如,对图9.28(a)所示的两个系统的并联组合,系统的冲激响应是

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (9.97)$$

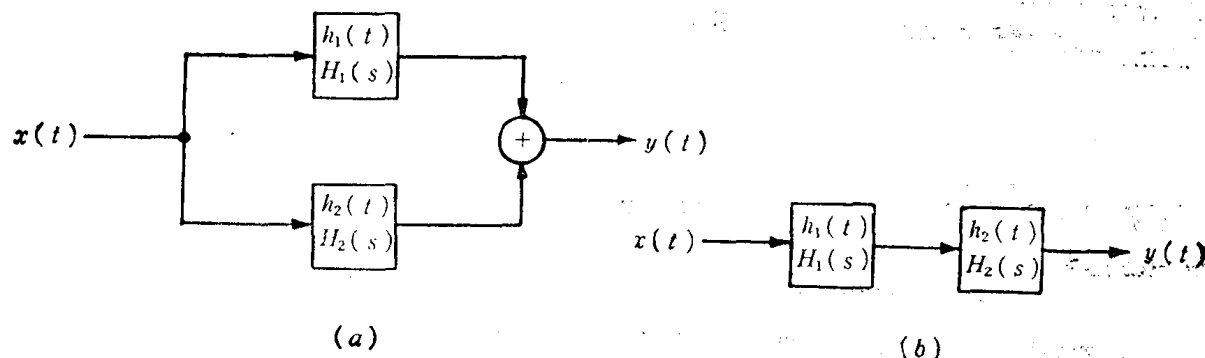


图9.28 (a) 两个 LTI 系统的并联连接; (b) 两个 LTI 系统的串联组合

由拉普拉斯变换的线性性质,

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (9.98)$$

同样, 图9.28(b)中系统的冲激响应是

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (9.99)$$

有关的系统函数是

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad (9.100)$$

为了描述通过代数运算表示线性系统的组合时拉普拉斯变换的应用, 考虑图9.29所示的两个系统的反馈互连。这种互连的设计、应用和分析, 在第11章中有相当详细地论述。这里, 我们主要来确定由输入 $x(t)$ 到输出 $y(t)$ 的总的系统函数。在时域中, 系统的分析不特别明确。因此, 让我们考虑在拉普拉斯变换域中的分析。从图9.29有

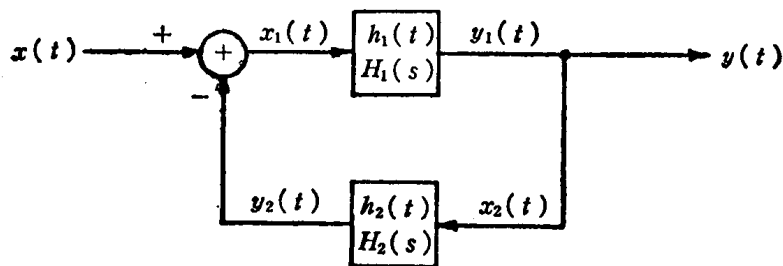


图9.29 两个 LTI 系统的反馈互连

$$Y_2(s) = H_2(s)Y(s) \quad (9.101)$$

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - Y_2(s)] \quad (9.102)$$

由这两式

$$Y(s) = H_1(s)X(s) - H_1(s)H_2(s)Y(s) \quad (9.103)$$

或

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \quad (9.104)$$

可见, 通过拉普拉斯变换的应用, 使获得总的系统函数的系统分析简化成一组简捷的代数运算。

9.7.3 巴特沃兹滤波器

作为拉普拉斯变换在表征 LTI 系统中其效用的进一步说明, 我们回过头来讨论巴特沃兹滤波器, 这在6.5节中已作过介绍。由式(6.23), N 阶低通巴特沃兹滤波器频响的幅度平方是

$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}} \quad (9.105)$$

这里 N 是滤波器的阶数。在重写式(6.23)中, 我们稍微作了些修改, 即用 j 乘 ω 和 ω_c 。由式(9.105)我们要确定导致 $|B(j\omega)|^2$ 的系统函数 $B(s)$ 。根据定义, 首先注意到

$$|B(j\omega)|^2 = B(j\omega)B^*(j\omega) \quad (9.106)$$

及由表4.1, 如果把巴特沃兹滤波器的冲激响应限制为实数, 则

$$B^*(j\omega) = B(-j\omega) \quad (9.107)$$

因此

$$B(j\omega)B(-j\omega) = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}} \quad (9.108)$$

其次, 注意到 $B(s)|_{s=j\omega}=B(j\omega)$, 因此由式(9.108)

$$B(s)B(-s)=\frac{1}{1+(s/j\omega_c)^{2N}} \quad (9.109)$$

分母多项式的根对应于 $B(s)B(-s)$ 的组合极点, 是在

$$s=(-1)^{1/2N}(j\omega_c) \quad (9.110)$$

对于下列任何 $s=s_P$ 的值, 式(9.110)都满足,

$$|s_P|=\omega_c \quad (9.111)$$

$$\angle s_P=\frac{\pi(2k+1)}{2N}+\frac{\pi}{2}, \quad k \text{ 为整数} \quad (9.112)$$

即

$$S_P=\omega_c \exp \left\{ j \left[\frac{\pi(2k+1)}{2N} + \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (9.113)$$

图9.30描绘了对于 $N=1, 2, 3$ 和 6 时 $B(s)B(-s)$ 的极点位置。一般, 关于 $B(s)B(-s)$ 的极点可以观察到以下几点:

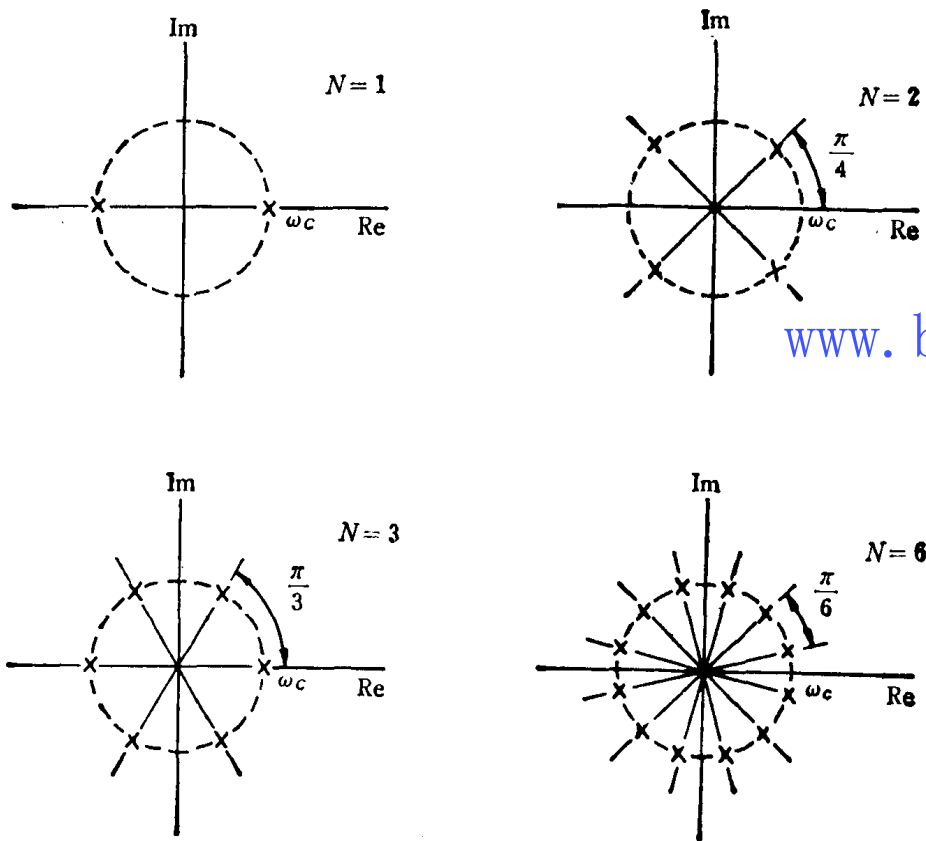


图9.30 $N=1, 2, 3$ 和 6 时 $B(s)B(-s)$ 极点的位置

1. 在 s 平面上, 有 $2N$ 个极点等角度地分布在以 ω_c 为半径的圆周上。
2. 极点决不会位于虚轴上, 当 N 为奇数时, 有极点出现在 σ 轴上; 当 N 为偶数时, 极点不在 σ 轴上。
3. $B(s)B(-s)$ 的相邻极点间的角度间隔是 π/N 弧度。

为了确定由 $B(s)B(-s)$ 极点给出的 $B(s)$ 极点, 我们观察到 $B(s)B(-s)$ 的极点成对出现。因此, 如果在 $s=s_P$ 有一个极点, 则在 $s=-s_P$ 也有一个极点。于是, 为了作出

$B(s)$, 我们从每一对中选一个极点。如果把系统限制为稳定和因果的, 则与 $B(s)$ 有关的极点是在左半平面沿圆周上的极点。极点的位置规定了 $B(s)$ 只在比例系数范围内。仍然由式(9.109)可看到或等效地由(9.105)式看到, 比例系数被选得使频响幅度平方在 $\omega = 0$ 处具有单位增益, 即 $B^2(s)|_{s=0} = 1$ 。

为了说明 $B(s)$ 的确定, 让我们考虑 $N=1, 2$ 和 3 的情况。图9.30中已显示了 $B(s)$ $B(-s)$ 的极点, 如同由式(9.113)得来的一样。图 9.31 中分别显示了这三种情况下与 $B(s)$ 有关的极点, 对应的传递函数是

$$N=1 \quad B(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (9.114)$$

$$\begin{aligned} N=2 \quad B(s) &= \frac{\omega_c^2}{(s + \omega_c e^{j(\pi/4)})(s + \omega_c e^{-j(\pi/4)})} \\ &= \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2} \end{aligned} \quad (9.115)$$

$$\begin{aligned} N=3 \quad B(s) &= \frac{\omega_c^3}{(s + \omega_c)(s + \omega_c e^{j(\pi/3)})(s + \omega_c e^{-j(\pi/3)})} \\ &= \frac{\omega_c^3}{(s + \omega_c)(s^2 + \omega_c s + \omega_c^2)} \\ &= \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3} \end{aligned} \quad (9.116)$$

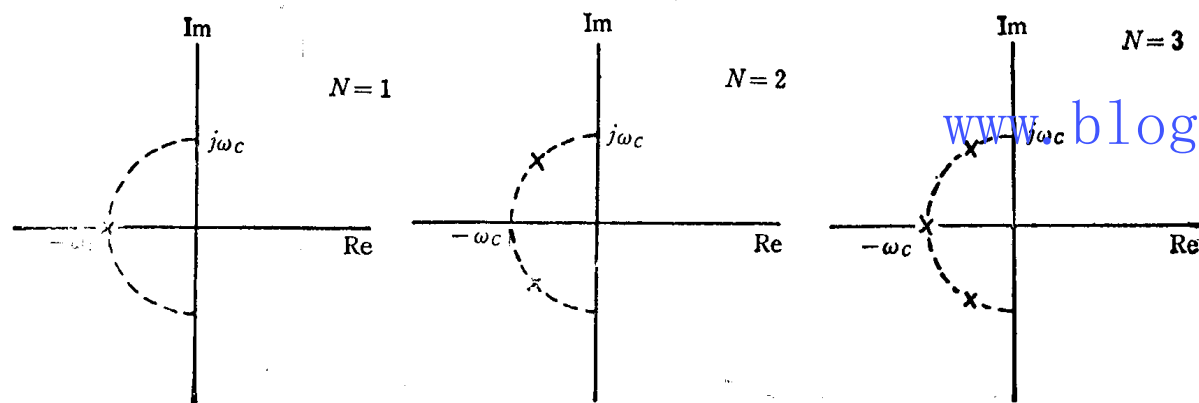


图9.31 对 $N=1, 2, 3$ $B(s)$ 极点的位置

以9.7.1节的讨论为基础, 从 $B(s)$ 可以确定有关的线性常系数微分方程。特别是对于以上考虑的三种情况, 对应的微分方程是

$$N=1: \quad \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c y(t) = \omega_c x(t) \quad (9.117)$$

$$N=2: \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\omega_c \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c^2 y(t) = \omega_c^2 x(t) \quad (9.118)$$

$$N=3: \quad \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2\omega_c \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\omega_c^2 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c^3 y(t) = \omega_c^3 x(t) \quad (9.119)$$

9.8 单边拉普拉斯变换

本章的前几节中, 我们已经研究了一种称为双边拉普拉斯变换的变换形式。另一种稍有