# §1-6 独 立 性



目录索引

- 独 立 性

## 例 1

袋中有 a 只黑球，b 只白球．每次从中取出一球，取后放回．令：

A={ 第一次取出白球 }，

B={ 第二次取出白球 }，

求 $P(A)$ ， $P(B)$ ， $P(B|A)$ ．

$$P(A) = \frac{b}{a+b}$$

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$$

**例 1（续）**

$$P(AB)=\frac{b^2}{(a+b)^2} \qquad P(\overline{A}B)=\frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$P(B)=\frac{b^2}{(a+b)^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}=\frac{b}{a+b}$$

而，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{b^2}{(a+b)^2}}{\dfrac{b}{a+b}}=\dfrac{b}{a+b}$

## 说 明

由例 1 ，可知 $P(B)=P(B|A)$

这表明，事件 A 是否发生对事件 B 是否发生在概率上是没有影响的，即事件 A 与 B 呈现出某种独立性．事实上，由于是有放回摸球，因此在第二次取球时，袋中球的总数未变，并且袋中的黑球与白球的比例也未变，这样，在第二次摸出白球的概率自然也未改变．

由此，我们引出事件独立性的概念

## 1. 两事件独立的定义

设 A、 B 是两个随机事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A 与 B 是相互独立的随机事件.

**两事件独立性的性质：**

1 ）如果 $P(A)>0,$ 则事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件为： $P(B|A)=P(B)$

$$\because \quad P(AB)=P(B|A)P(A)$$

返回主目录

证明：（必要性）由于事件 A 与 B 相互独立

故 $$P(AB)=P(A)P(B)$$

因此，$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

2 ）必然事件 S 与任意随机事件 A 相互独立；
不可能事件 Φ 与任意随机事件 A 相互独立 .

证明：由 $$P(SA)=P(A)=1\cdot P(A)=P(S)P(A)$$

可知必然事件 S 与任意事件 A 相互独立；

由 $$P(\Phi A)=P(\Phi)=0\cdot P(A)=P(\Phi)P(A)$$

可知不可能事件 Φ 与任意随机事件 A 相互独立

3) 若随机事件 A 与 B 相互独立，则

$$\boxed{\overline{A}\text{与}B\text{、}A\text{与}\overline{B}\text{、}\overline{A}\text{与}\overline{B}}$$

也相互独立.

解：为方便起见，只证 $\overline{A}$ 与 $B$ 相互独立. .

由于 $P\left(\overline{A}B\right)=P\left(B-AB\right)$

注意到 $AB\subset B$，由概率的可减性，得

$$P\left(\overline{A}B\right)=P\left(B\right)-P\left(AB\right)$$

$$=P\left(B\right)-P\left(A\right)P\left(B\right)\quad\left(\text{事件 }A\text{与}B\text{的独立性}\right)$$

$$=\left[1-P\left(A\right)\right]P\left(B\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(B\right)$$

所以，事件 $\overline{A}$ 与 $B$ 相互独立.

返回主目录

**注意 1 ：两事件相互独立与互不相容的区别：**

**“A 与 B 互不相容”，指两事件不能同时发生，即 P（ AB ）=0 。**

**“A 与 B 相互独立”，指 A 是否发生不影响 B 发生的概率，即 P（ AB ）=P（ A ）P（ B ）或**

$$P(B|A) = P(B) \quad (P(A) > 0)$$

**注意 2 :**设事件 A 与 B 满足 $P(A)P(B)\neq 0$

**则互不相容与相互独立不能同时成立。**

即：若事件 A 与 B 相互独立，则 AB≠Φ；

若 AB =Φ，则事件 A 与 B 不相互独立。

证明：由于事件 $A$ 与 $B$ 相互独立，故

$$P(AB)=P(A)P(B)\neq 0$$

所以 $AB\neq\Phi$

由于 AB =Φ，所以 $P(AB)=P(\Phi)=0$

但是，由题设 $P(A)P(B)\neq 0$

返回主目录

所以，$P(AB) \neq P(A)P(B)$

这表明，事件 A 与 B 不相互独立．

**因此，互不相容与相互独立不能同时成立。**

**注意 3**：在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来判断，而是根据实际意义来加以判断的。具体的说，题目一般把独立性作为条件告诉我们，要求直接应用定义中的公式进行计算。

## 例 1`（不独立事件的例子）

袋中有 a 只黑球，b 只白球．每次从中取出一球，取后不放回．令：

A={ 第一次取出白球 }，

B={ 第二次取出白球 }，

则 $$P(A)=\frac{b}{a+b}$$

$$P(AB)=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} \qquad P(\overline{A}B)=\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$$

所以，

得：$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$$

返回主目录

$$P(B)=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$$

$$=\frac{b}{a+b}$$

而，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}}{\dfrac{b}{a+b}}$

$$=\frac{b-1}{a+b-1}$$

因此

$$P(B|A) \neq P(B)$$

这表明，事件 A 与事件 B 不相互独立．事实上，由于是不放回摸球，因此在第二次取球时，袋中球的总数变化了，并且袋中的黑球与白球的比例也发生变化了，这样，在第二次摸出白球的概率自然也应发生变化．或者说，第一次的摸球结果对第二次摸球肯定是有影响的．

## 2 、三个事件的独立性

**设 A 、 B 、 C 是三个随机事件，如果**

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

**则称 A 、 B 、 C 是相互独立的随机事件 .**

**注意 4 ：**

在三个事件独立性的定义中，四个等式是缺一不可的．即：前三个等式的成立不能推出第四等式的成立；反之，最后一个等式的成立也推不出前三个等式的成立．

**注意 5 三个事件相互独立的性质：**

若 A ，B ，C 是相互独立的三个事件，则

$A$与$B\cup C$, $A$与$BC$, $A$与$B-C$, $A$与$\overline{B\cup C}$,

$A$与$\overline{BC}$, $A,\overline{B},\overline{C}$, $A,B,\overline{C}$, $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$, $\cdots$相互独立

# 例 2

袋中装有 4 个外形相同的球，其中三个球分别涂有红、白、黑色，另一个球涂有红、白、黑三种颜色．现从袋中任意取出一球，令：

A={ 取出的球涂有红色 }

B={ 取出的球涂有白色 }

C={ 取出的球涂有黑色 }

则：

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$$

返回主目录

$$P(ABC)=\frac{1}{4}$$

由此可见

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$

但是

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$$

这表明，A、B、C 这三个事件是两两独立的，但不是相互独立的．

例 2`

现掷一枚均匀的骰子，观察出现的点数。

记 A={1，2，3，4}，B={4，5，6}，C={3，4，5}

则：$P(A)=\dfrac{2}{3}$，$P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$，

$$P(ABC)=\frac{1}{6}=P(A)P(B)P(C)$$

但 $P(AB)=\dfrac{1}{6}\neq P(A)P(B)=\dfrac{1}{3}$

## 3 、 n 个事件的相互独立性

设 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$ 为$n$个随机事件，如果下列等式成立：

$$\begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) & (1\le i<j\le n) \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) & (1\le i<j<k\le n) \\ \quad\cdots\cdots \\ P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m})(1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n) \\ \quad\cdots\cdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \end{cases}$$

则称 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$ 这$n$个随机事件相互独立．

返回主目录

说 明 在上面的公式中，

第一行有 $C_n^2$ 个等式，第二行有 $C_n^3$ 个等式；$\cdots\cdots$，最后一行共有 $C_n^n$ 个等式，因此共有

$$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - 1 - n$$

个等式．

**注意 6 独立随机事件的性质**

：如果 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$ 这 $n$ 个随机事件相互独立．

则 (1) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 $n$ 个随机事件中任意 $k$ 个也相互独立．

**注意 6 独立随机事件的性质：**



如果 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$ 这$n$个随机事件相互独立．

则 (2) $A'_{i_1}$，$\cdots$，$A'_{i_m}$，$A'_{i_{m+1}}$，$\cdots$，$A'_{i_n}$ 这$n$个随机事件

也相互独立．其中 $A'_{i_k} = A_{i_k}$ 或$\overline{A}_{i_k}$，

$i_1$，$i_2$，$\cdots$，$i_n$ 是1，2，$\cdots$，$n$的一个排列．

(3) 将 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$ 这$n$个随机事件

分成$k$组（不重不漏）. 设$B_1$，$B_2$，$\cdots B_K$分别由

第$1,2,\cdots,k$组内的$A_i$经过和，积，差，求余运算

所得，则$B_1$，$B_2$，$\cdots B_k$相互独立。

返回主目录

## 注意 7 相互独立事件至少发生其一的概率的计算

若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是相互独立的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n})$$

特别地，如果

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = p$$

则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (1-p)^n$

返回主目录

当 $n \to \infty$ 时, $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1-(1-p)^n \to 1$$

假设独立重复地做$n$次某一试验$E$, $A$是某一随机事件, $A_i$表示第$i$次试验中$A$出现,则前$n$次试验中$A$至少出现一次的概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1-(1-p)^n \to 1$$

此结论说明:小概率事件迟早要发生.

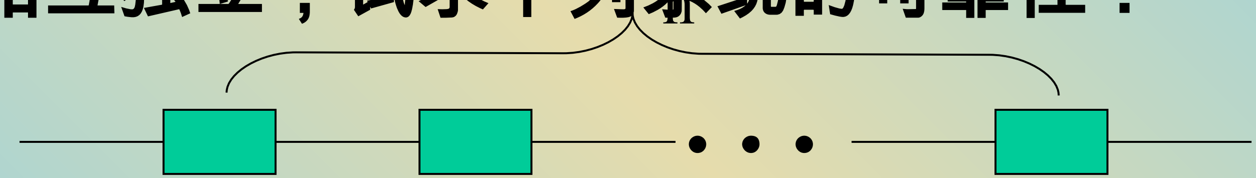
返回主目录

**例 3**  **独立性在系统可靠性中的应用：**

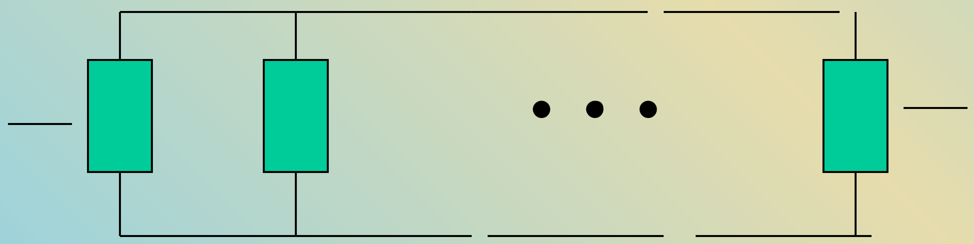
**系统的可靠性 ----- 系统能正常工作的概率。**

**如果系统由 n 个元件组成，且各元件能否正常工作相互独立，试求下列系统的可靠性：**

1)




2)



返回主目录

设 $A_i$ ＝｛第 i 个元件可靠｝

$$P(A_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则由已知得，事件 $A_1$, $A_2$,------, $A_n$ 相互独立，

故 1 ）串联系统的可靠性为：

$$P = P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$= p_1 p_2 \cdots p_n .$$

结论：串联系统的可靠性＝各元件可靠性的乘积

返回主目录

2）并联系统的可靠性为：

$$P = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

$$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\cdots(1 - p_n).$$

结论：并联系统的可靠性 =1-- 各元件不可靠的乘积

返回主目录

若 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$，则

1) 串联系统的可靠性为：$P_1 = p^n$；

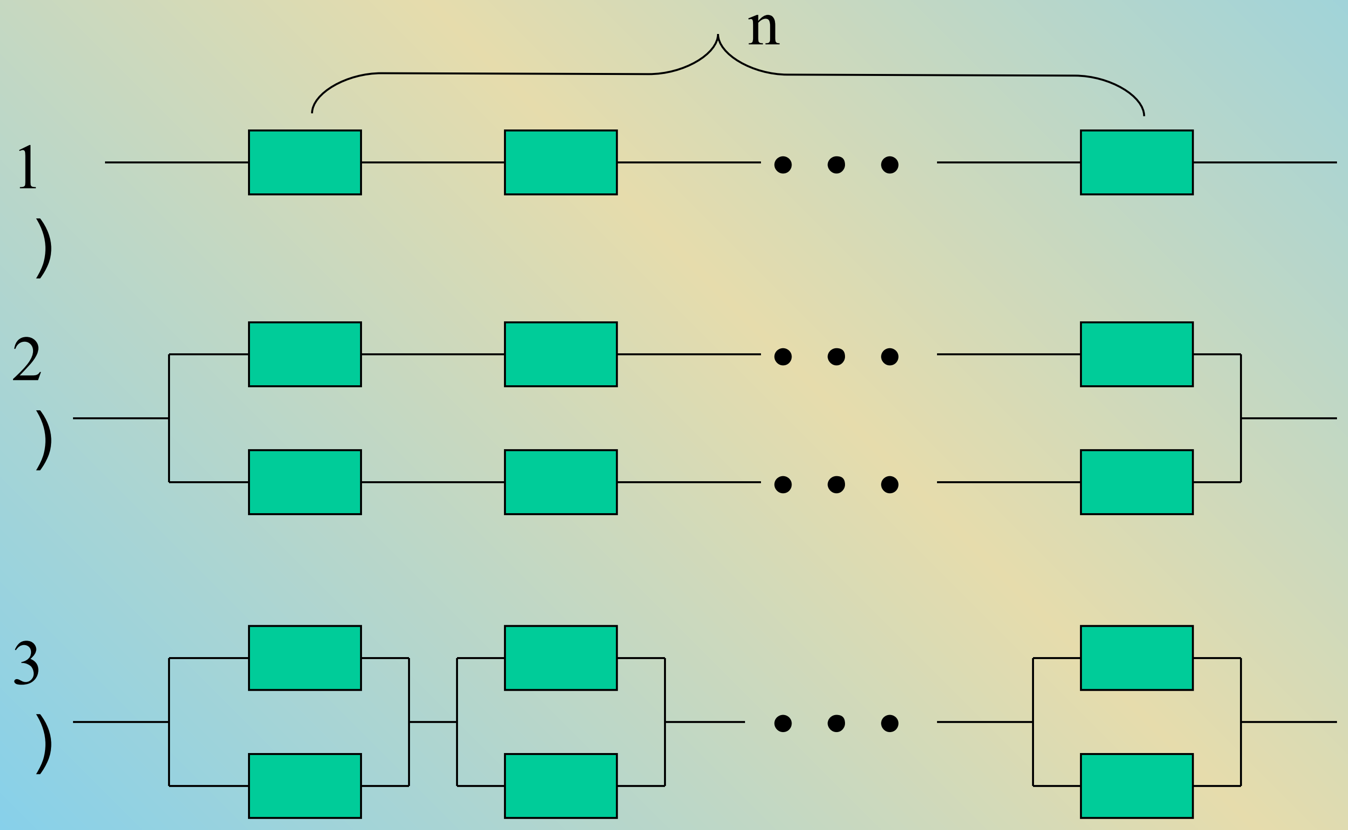
2 ) 并联系统的可靠性为：

$$P_2 = 1 - (1 - p)^n .$$

结论：并联系统的可靠性 > 串联系统的可靠性

返回主目录

**例 3 如果构成系统的每个元件的可靠性均为 r，$0<r<1$. 且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下列系统的可靠性：**




返回主目录

**解：1）每条通路要能正常工作，当且仅当该通路上的各元件都正常工作，故可靠性为** $R_c = r^n$

**2）通路发生故障的概率为** $1-r^n$ **，两条通路同时发生故障的概率为** $(1-r^n)^2$. **故系统的可靠性为**

$$R_s = 1-(1-r^n)^2 = r^n(2-r^n) = R_c(2-R_c)$$

$$\because R_c < 1, \therefore R_s > R_c.$$

**即附加通路可使系统可靠性增加。**

**3）每对并联元件的可靠性为** $R' = 1-(1-r)^2 = r(2-r)$

**系统由每对并联的元件串联组成，故可靠性为**

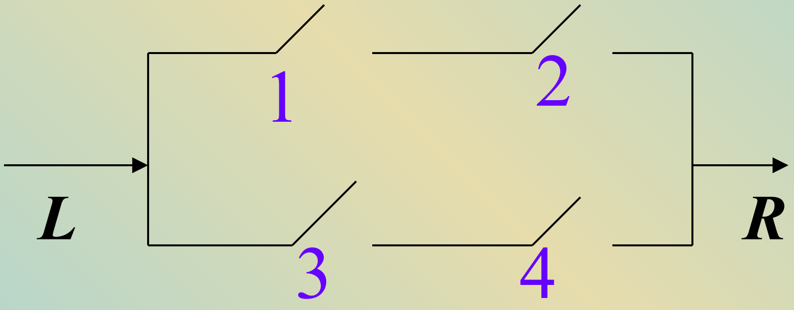
$$R_s' = (R')^n = r^n(2-r)^n = R_c(2-r)^n.$$ **显然** $R_s' > R_c$

**由数学归纳法可证明当** $n \geq 2$时，$(2-r)^n > 2-r^n$，即 $R_s' > R_s$.

**例 4 设有电路如图，其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点。设各继电器接点闭合与否相互独立，且每一个继电器接点闭合的概率均为 p 。求 L 至 R 为通路的概率。**

**解 ： 设事件 $A_i$( i=1,2,3,4 ) 为“第 i 个继电器接点闭合”，L 至 R 为通路这一事件可表示为：**

$$A = A_1 A_2 \cup A_3 A_4 .$$

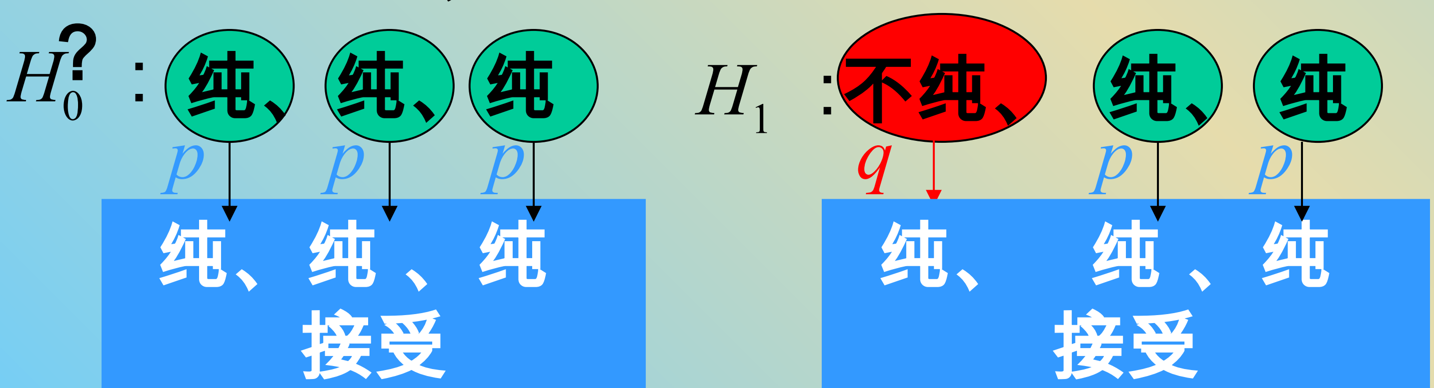


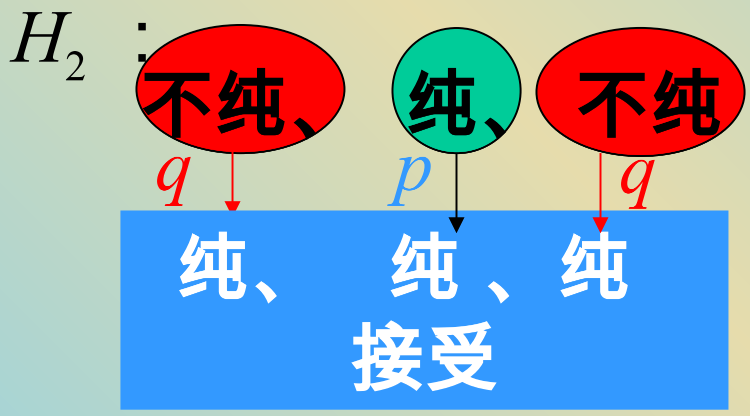
由和事件的概率公式及 $A_1, A_2, A_3, A_4$ 的相互独立性，得到

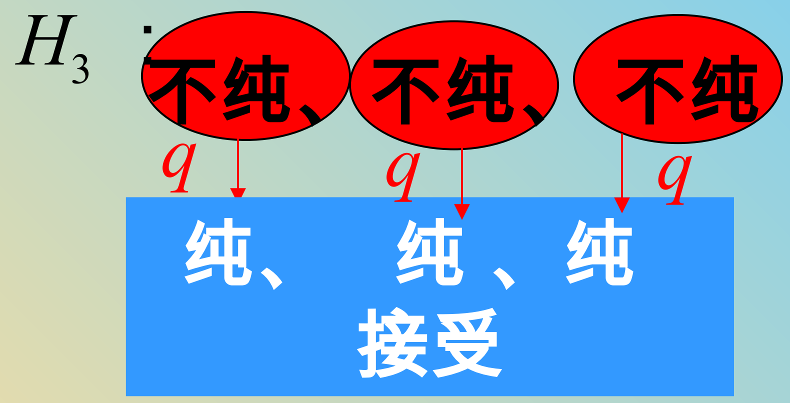
$$P(A) = P(A_1A_2 \cup A_3A_4)$$
$$= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$$
$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4)$$
$$- P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$
$$= p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4.$$

返回主目录

例 5 要验收一批（100 件）乐器。验收方案如下：自该批乐器中随机地抽取 3 件测试（设 3 件乐器的测试是相互独立的），如果至少有一件被测试为音色不纯，则拒绝接受这批乐器。设一件音色不纯的乐器被测试出来的概率为 0.95，而一件音色纯的乐器被误测为不纯的概率为 0.01。如果这件乐器中恰有 4 件是音色不纯的，问这批乐器被接受的概率是多少?






**p =1-0.01=0.99, q =1-0.95=0.05**

**解：以 $H_i$ ( i=0,1,2,3 ) 表示事件“随机取出的 3 件乐器中恰有 i 件音色不纯”，以 A 表示事件“这批乐器被接受”，即 3 件都被测试为音色纯的乐器。由全概率公式得 ：**

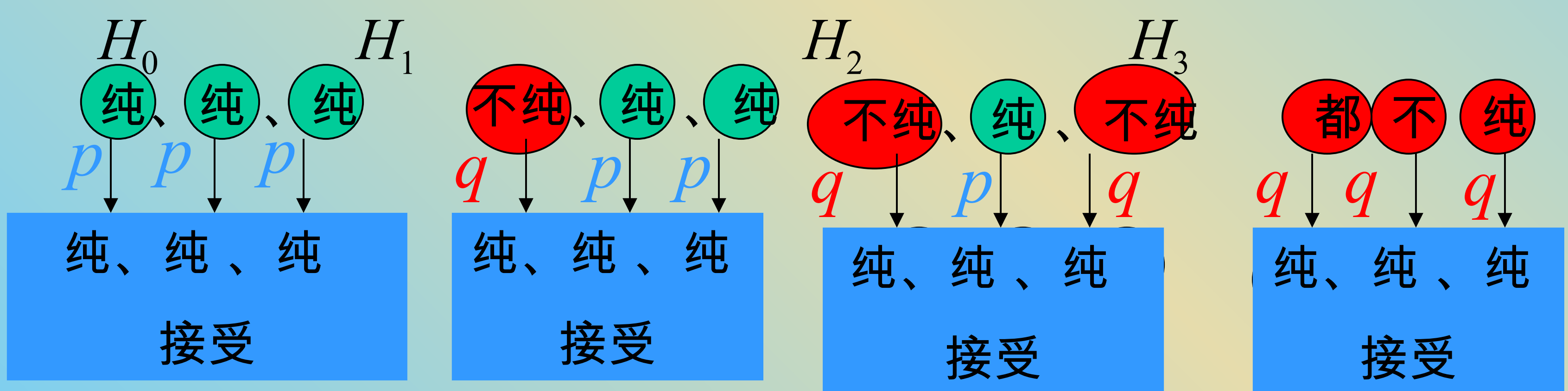
$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A\mid H_i)P(H_i)$$

p=1-0.01=0.99, q=1-0.95=0.05

**由测试的相互独立性得：**

$$P(A\mid H_0)=(0.99)^3,\qquad P(A\mid H_1)=(0.99)^2\times 0.05,$$

$$P(A\mid H_2)=0.99\times(0.05)^2,\quad P(A\mid H_3)=(0.05)^3.$$



另外，按照超几何分布的概率计算公式得：

$$\boxed{N = 100, D = 4, n = 3}$$

$$P(H_0) = C_{96}^3 / C_{100}^3,$$

$$P(H_1) = C_4^1 C_{96}^2 / C_{100}^3,$$

$$P(H_2) = C_4^2 C_{96}^1 / C_{100}^3,$$

$$P(H_3) = C_4^3 / C_{100}^3.$$

故$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(A \mid H_i) P(H_i) = 0.8629.$

返回主目录

# 例 6

三门火炮向同一目标射击，设三门火炮击中目标的概率分别为 0.3 ，0.6 ，0.8 . 若有一门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为 0.2 ；若两门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为 0.6 ；若三门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为 0.9 . 试求目标被摧毁的概率 .

解：设：B ={ 目标被摧毁 }

$$A_i = \{\text{有}\, i\, \text{门火炮击中目标}\} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$C_i = \{\text{第}\, i\, \text{门火炮击中目标}\} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

返回主目录

由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

而 $P(A_1)=P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1C_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1\overline{C}_2C_3)$

$$=P(C_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(C_2)P(\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)$$

$$=0.3\times0.4\times0.2+0.7\times0.6\times0.2+0.7\times0.4\times0.8$$

$$=0.332$$

$$P(A_2) = P(C_1C_2\overline{C}_3) + P(C_1\overline{C}_2C_3) + P(\overline{C}_1C_2C_3)$$
$$= P(C_1)P(C_2)P(\overline{C}_3) + P(C_1)P(\overline{C}_2)P(C_3) + P(\overline{C}_1)P(C_2)P(C_3)$$
$$= 0.3\times0.6\times0.2 + 0.3\times0.4\times0.8 + 0.7\times0.6\times0.8$$
$$= 0.468$$

$$P(A_3) = P(C_1C_2C_3) = P(C_1)P(C_2)P(C_3)$$
$$= 0.3\times0.6\times0.8 \quad = 0.144$$

所以

$$P(B) = 0.332\times0.2 + 0.468\times0.6 + 0.144\times0.9$$
$$= 0.4768$$

$p_{27-28}$ 26 , 28, 31 , 32 , 33 .

返回主目录