自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

北京科技大学 2016--2017 学年 第 二 学期

高等数学 AII 期末试卷（模拟）

院(系)_________ 班级___________ 学号___________ 姓名__________

试卷卷面成绩												占课程考核成绩 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	小计			
得分														

得 分

一、填空题（每题 4 分，共 36 分）

1、设 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______，$\vec{a}\times\vec{b}=$_________。

2、计算积分 $\int_1^5 dy\int_y^5 \frac{dx}{y\ln x}=$__________________。

3、设 f 具有二阶连续偏导数，$u=f(x+y+z,xyz)$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$_________________。

4、已知三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，其中 $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{6}$，且 $|\vec{a}|=6,|\vec{b}|=|\vec{c}|=3$，则 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ =_______________。

5、通过 $\begin{cases}x+y+z=0\\2x-y+3z=0\end{cases}$ 且平行于直线 $x=2y=3z$ 的平面方程为____________________。

6、Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的形体，求三次积分 $\iiint_\Omega zdxdydz=$ _____________。

7、计算 $I=\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy=$ ____________________，其中 I 为由点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的曲线 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$。

8、函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y$ 在点 $(1,1,2)$ 处的梯度为___________________。

9、微分方程 $(x^2-y^2-2y)dx+(x^2+2x-y^2)dy=0$ 的通解为__________________________。

得 分

二、选择题（每题 3 分，共 21 分）

10、如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，则下列命题正确的是（ ）

（A）若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

11、设 $f(u)$ 是关于 u 的奇函数，D 是由 $x=1$，$y=-x^3$，$y=1$ 所围成的平面区域。则 $\iint_D\left[x^3+f(x,y)\right]dxdy=$（ ）

（A）0 （B）$\frac{1}{4}$ （C）$\frac{2}{7}$ （D）$\iint_D f(x,y)dxdy$

12、已知直线 L_1 过点 $M_1(0,0,-1)$，且平行于 x 轴，L_2 过点 $M_2(0,0,1)$ 且垂直于 xoz 平面，则到两直线的距离点的轨迹方程为（ ）

（A）$x^2+y^2=4$ （B）$zx^2-y^2=2z$

（C）x^2-$y^2=z$ （D）$x^2-y^2=4z$

13、设曲面 Σ 是上半球面：$x^2+y^2+z^2=R^2(z\ge 0)$，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限的部分，下列结论正确的是（ ）

（A）$\iint_\Sigma xdS=4\iint_{\Sigma_1}xdS$ （B）$\iint_\Sigma ydS=4\iint_{\Sigma_1}ydS$

（C）$\iint_\Sigma zdS=4\iint_{\Sigma_1}zdS$ （D）$\iint_\Sigma xyzdS=4\iint_{\Sigma_1}xyzdS$

14、微分方程 $y''-2y'^2\tan y=0$，满足条件 $y|_{x=0}=0$， $y'|_{x=0}=1$ 的解是（ ）

（A） $x=\frac{y}{2}+\frac{1}{4}\sin 2y$ （B） $x=y-\frac{1}{4}\sin 2y$

（C） $x=\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\sin 2y$ （D） $x=y+\frac{1}{4}\sin 2y$

15、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-az,y-bz)=0$ 确定，其中 $F(x,y)$ 可微，（a,b 为常数），则（ ）

（A） $a\frac{\partial z}{\partial x}-b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ （B） $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$

（C） $a\frac{\partial z}{\partial x}-b\frac{\partial z}{\partial y}=0$ （D） $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=0$

16、设区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$， $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数， A,B 为常数，则

$$\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=（\quad）$$

（A） $ab\pi$ （B） $\frac{ab\pi}{2}$ （C） $(a+b)\pi$ （D） $\frac{(a+b)\pi}{2}$

得 分

三、计算题（共 25 分）

17、设 $\begin{cases} u=f(ux,v+y) \\ v=g(u-x,v^2y) \end{cases}$，其中 f,g 具有一阶连续偏导，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$。（6 分）

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊 装订线内不得答题

18、求直线 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求直线 L_0 绕 y 轴旋转一周形成的曲面方程。（6 分）

19、计算二重积分 $\iint\limits_D \left|y-x^2\right|\max\left\{x,y\right\}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$。（6 分）

20、计算 $I=\iint\limits_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$， Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的上侧。（7 分）

得 分

四、证明题（共 18 分）

21、设 $f(t)$ 为连续函数，证明：$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-a}^{a}f(t)\left(a-|t|\right)dt$，其中 D 为矩形区域 $|x|\le\frac{a}{2},|y|\le\frac{a}{2}$，$a>0$。（8 分）

22、试证明：$\lim\limits_{R\to\infty}\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$。（10 分）

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

北京科技大学 2016--2017 学年 第 二 学期

高等数学 AII 期末试卷（模拟）

院(系)__________ 班级____________ 学号____________ 姓名___________

<table>
<tr><td colspan="12">试卷卷面成绩</td><td rowspan="2">占课程考核成绩 %</td><td rowspan="2">平时成绩占 %</td><td rowspan="2">课程考核成绩</td></tr>
<tr><td>题号</td><td>一</td><td>二</td><td>三</td><td>四</td><td>五</td><td>六</td><td>七</td><td>八</td><td>九</td><td>十</td><td>小计</td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

得 分

一、填空题（每题 4 分，共 36 分）

1、设 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________，$\vec{a}\times\vec{b}=$__________。

2、计算积分 $\int_1^5 dy\int_y^5 \frac{dx}{y\ln x}=$____________________。

3、设 f 具有二阶连续偏导数，$u=f(x+y+z,xyz)$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$___________________。

4、已知三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，其中 $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{6}$，且 $|\vec{a}|=6,|\vec{b}|=|\vec{c}|=3$，则 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ =________________。

5、通过 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ 且平行于直线 $x=2y=3z$ 的平面方程为______________________。

6、Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的形体，求三次积分 $\iiint_\Omega zdxdydz=$ ______________。

7、计算 $I=\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy=$ ______________________，其中 I 为由点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的曲线 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$。

8、函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y$ 在点 $(1,1,2)$ 处的梯度为_____________________。

9、微分方程 $(x^2-y^2-2y)dx+(x^2+2x-y^2)dy=0$ 的通解为____________________________。

得 分

二、选择题（每题 3 分，共 21 分）

10、如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，则下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

11、设 $f(u)$ 是关于 u 的奇函数，D 是由 $x=1$，$y=-x^3$，$y=1$ 所围成的平面区域。则 $\iint\limits_D\left[x^3+f(x,y)\right]dxdy=$（　　）

（A）0　　（B）$\dfrac{1}{4}$　　（C）$\dfrac{2}{7}$　　（D）$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

12、已知直线 L_1 过点 $M_1(0,0,-1)$，且平行于 x 轴，L_2 过点 $M_2(0,0,1)$ 且垂直于 xoz 平面，则到两直线的距离点的轨迹方程为（　　）

（A）$x^2+y^2=4$　　（B）$zx^2-y^2=2z$

（C）$x^2-y^2=z$　　（D）$x^2-y^2=4z$

13、设曲面 Σ 是上半球面：$x^2+y^2+z^2=R^2(z\ge 0)$，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限的部分，下列结论正确的是（　　）

（A）$\iint\limits_{\Sigma} xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$　　（B）$\iint\limits_{\Sigma} ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1} ydS$

（C）$\iint\limits_{\Sigma} zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} zdS$　　（D）$\iint\limits_{\Sigma} xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$

14、微分方程 $y''-2y'^2\tan y=0$，满足条件 $y|_{x=0}=0$， $y'|_{x=0}=1$ 的解是（　　）

（A） $x=\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2y$　　　　（B） $x=y-\dfrac{1}{4}\sin 2y$

（C） $x=\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2y$　　　　（D） $x=y+\dfrac{1}{4}\sin 2y$

15、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-az,y-bz)=0$ 确定，其中 $F(x,y)$ 可微，（a,b 为常数），则（　　）

（A） $a\dfrac{\partial z}{\partial x}-b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$　　　　（B） $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

（C） $a\dfrac{\partial z}{\partial x}-b\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$　　　　（D） $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

16、设区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$， $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数， A,B 为常数，则

$\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$（　　）

（A） $ab\pi$　　（B） $\dfrac{ab\pi}{2}$　　（C） $(a+b)\pi$　　（D） $\dfrac{(a+b)\pi}{2}$

得 分

三、计算题（共 25 分）

17、设 $\begin{cases} u=f(ux,v+y) \\ v=g(u-x,v^2y) \end{cases}$，其中 f,g 具有一阶连续偏导，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$。（6 分）

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

18、求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求直线 L_0 绕 y 轴旋转一周形成的曲面方程。（6 分）

19、计算二重积分 $\iint\limits_D \left|y-x^2\right| \max\left\{x,y\right\} dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$。（6 分）

20、计算 $I=\iint\limits_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，$\Sigma$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的上侧。（7 分）

得 分

四、证明题（共 18 分）

21、设 $f(t)$ 为连续函数，证明：$\iint\limits_{D} f(x-y)dxdy=\int_{-a}^{a} f(t)\left(a-|t|\right)dt$，其中 D 为矩形区域 $|x|\le\frac{a}{2},|y|\le\frac{a}{2}$，$a>0$。（8 分）

22、试证明：$\lim\limits_{R\to\infty}\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$。（10 分）

北京科技大学 2016-2017 学年第二学期

高等数学 AII 模拟试卷参考答案

一．填空题（每题 4 分，共 36 分）

1. 3，$5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$　2. 4　3. $zf_2'+f_{11}''+(x+y)zf_{12}''+xyz^2f_{22}''$　4. ±27

5. $7x-26y+18z=0$　6. $\frac{13}{4}\lambda$　7. $\frac{23}{15}$　8. $5\vec{i}+2\vec{j}+12\vec{k}$　9. $\frac{x+y}{x-y}e^{x+y}=C$

二．选择题（每题 3 分，共 21 分）

10.B　11.C　12.D　13.C　14.A　15.B　16.D

三．计算题

17.（6 分）解：将方程两边对 x 求偏导，有 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'(u+x\frac{\partial u}{\partial x})+f_2'\frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\partial v}{\partial x}=g_1'(\frac{\partial v}{\partial x}-1)+g_2'\frac{\partial v}{\partial x}2yv$

整理得：$(1-xf_1')\frac{\partial u}{\partial x}-f_2'\frac{\partial v}{\partial x}=uf_1'$

$g_1'\frac{\partial u}{\partial x}-(1-2yvg_2')\frac{\partial v}{\partial x}=g_1'$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u(1-2yvg_2')f_1'-f_2'g_1'}{(1-xf_1')(1-2yvg_2')-f_2'g_1'}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(xf_1'+uf_1'-1)g_1'}{(1-xf_1')(1-2yvg_2')-f_2'g_1'}$

18.（6 分）解：过直线 L 做一垂直于平面 π 的平面 π_1，π_1 法向量即垂直于 L 的方向向量 $\vec{S}=(1,1,-1)$ 又垂直于 π 的法向量 $\vec{n}=(1,-1,2)$，其向量积为

$$\vec{n_1}=\vec{S}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=(1,-3,-2)$$

又∵点（1,0,1）在直线 L 上，该点也在平面 π_1 上，由点法式可得平面 π_1 方程为

$(x-1)-3y-2(z-1)=0$，即 $x-3y-2z+1=0$

∴直线 L_0 方程为 $\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$，视 y 为参数，将直线 L_0 写成 y 的参数方程 $\begin{cases}x=2y\\z=-\frac{1}{2}(y-1)\end{cases}$。故 L_0 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2$ 即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$

19.（6 分）：解：原式

$$=\iint_{D1}\left|y-x^2\right|\max\{x,y\}dxdy+\iint_{D2}\left|y-x^2\right|\max\{x,y\}dxdy+\iint_{D3}\left|y-x^2\right|\max\{x,y\}dxdy$$

$$=\iint_{D1}(y-x^2)ydxdy+\iint_{D2}(y-x^2)xdxdy+\iint_{D3}(x^2-y)xdxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_1^x (y-x^2)ydy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^x (y-x^2)xdy+\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)xdy$$

$$=\frac{11}{40}$$

20：（7 分）解：添加$\Sigma^*=\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$取下侧，使$\Sigma+\Sigma^*$封闭

P,Q,R在他们所围空间有一阶连续偏导数，可用高斯公式

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma^*}-\iint_{\Sigma^*}=\iiint_{\Omega}(16x^2+6y^2+6z)dV-\iint_{\Sigma^*}$$

$$\iiint_{\Omega}(16x^2+6y^2+6z)dV=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)rdz$$

$$=12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)\right]dr=2\pi$$

利用投影法可得，

$$\iint_{\Sigma^*}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$=-\iint_{x^2+y^2\le 1}-3dxdy=3\pi$$

故$I=2\pi-3\pi=-\pi$

四．证明题

21.（8 分）证明：$\iint_D f(x-y)dxdy=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dxf(x-y)dy$

令$x-y=t,dy=-dt$,既得$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}}f(t)dt$

$$=\int_{-a}^{0}f(t)dt\int_{-\frac{a}{2}}^{t+\frac{a}{2}}dx+\int_0^a f(t)dt\int_{t-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx$$

$$=\int_{-a}^{0}f(t)(t+a)dt+\int_0^a f(t)(-t+a)dt$$

$$=\int_{-a}^{0}f(t)(-|t|+a)dt+\int_0^a f(t)(-|t|+a)dt$$

$$=\int_{-a}^{a}f(t)(a-|t|)dt$$

得证

22.（10 分）证明：圆 $x^2+y^2=R^2$参数方程为$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases},0\le t\le 2\pi$

$$\therefore I(R)=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{R\sin t(-R\sin t)-R\cos tR\cos t}{R^4(\cos^2 t+\cos t\sin t+\sin^2 t)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\frac{1}{2}\sin 2t)^2}$$

令 $\varphi(t)=(1+\frac{1}{2}\sin 2t)^2$,求出$\varphi(t)$在$0\le t\le 2\pi$上的最值

$$\varphi'(t)=2(1+\frac{1}{2}\sin 2t)*\frac{1}{2}2\cos 2t=2(1+\frac{1}{2}\sin 2t)\cos 2t$$

令 $\varphi'(t)=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4},t=\frac{3}{4}\pi$

$$\varphi(0)=1,\varphi(2\pi)=1,\varphi(\frac{\pi}{4})=\frac{9}{4},\varphi(\frac{3}{4}\pi)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4}\le\varphi(t)\le\frac{9}{4}$$

$$\therefore \frac{4}{9}\le\frac{1}{(1+\frac{1}{2}\sin 2t)^2}\le 4$$

$$\therefore \frac{8\pi}{9R^2}=\frac{4}{9R^2}\cdot 2\pi\le I(R)\le\frac{4}{R^2}\cdot 2\pi=\frac{8\pi}{R^2}$$

$\therefore R\to\infty,\frac{8\pi}{9R^2}\to 0,\frac{8\pi}{R^2}\to 0,$故$\lim\limits_{R\to\infty}I(R)=0$