

第二章 解析函数



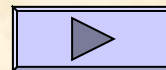
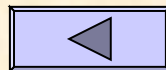
第一节 解析函数的概念



第二节 函数解析的充要条件



第三节 初等函数



§2.1 解析函数的概念

 1. 复变函数的导数定义

 2. 解析函数的概念

一. 复变函数的导数

(1) 导数定义

定义 设函数 $w=f(z)$ $z \in D$, 且 z_0 、 $z_0 + \Delta z \in D$,

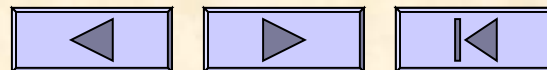
如果极限 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在, 则称函数

$f(z)$ 在点 z_0 处可导。称此极限值为 $f(z)$ 在 z_0 的导数,

记作
$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

如果 $w=f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 则称

$f(z)$ 在区域 D 内可导。



□ (1) $\Delta z \rightarrow 0$ 是在平面区域上以任意方式趋于零。

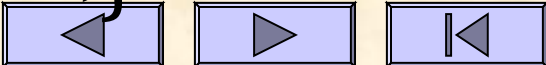
□ (2) $z=x+iy, \Delta z=\Delta x+i\Delta y, \Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$

例 1 证明: $f(z) = \operatorname{Re} z$ 在平面上的任何点都不可导.

$$\begin{aligned}\text{证明: } \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\operatorname{Re}(z + \Delta z) - \operatorname{Re}(z)}{\Delta z} \\ &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}\end{aligned}$$

当 Δz 取实数趋于 0 时, $\Delta f / \Delta z \rightarrow 1$;
当 Δz 取纯虚数趋于 0 时, $\Delta f / \Delta z \rightarrow 0$;

$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \Delta z \text{ 取实数趋于 0 时, } \Delta f / \Delta z \rightarrow 1; \\ \text{当 } \Delta z \text{ 取纯虚数趋于 0 时, } \Delta f / \Delta z \rightarrow 0; \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \text{ 不存在.}$



(2) 求导公式与法则

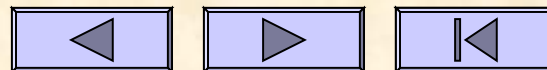
---- 实函数中求导法则的推广

① 常数的导数 $c'=(a+ib)'=0$.

② $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n 是自然数).

证明 对于复平面上任意一点 z_0 , 有

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1})}{z - z_0} = nz_0^{n-1}\end{aligned}$$



③ 设函数 $f(z), g(z)$ 均可导, 则

$$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

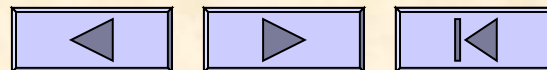
$$\left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, (g(z) \neq 0)$$

由以上讨论 \Rightarrow

$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ 在整个复平面上处处可导;

$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 在复平面上 (除分母为0点外) 处

处可导.



④ 复合函数的导数 $(f[g(z)])' = f'(w)g'(z)$,

其中 $w=g(z)$ 。

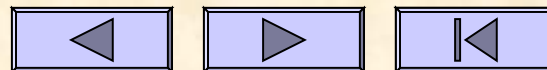
⑤ 反函数的导数 $f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}$, 其中 : $w=f(z)$

与 $z=\varphi(w)$ 互为单值的反函数 , 且 $\varphi'(w) \neq 0$ 。

 **思考题**

实函数中, $f(x) = |x|^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导;

复函数中, $f(z) = |z|^2$ 的可导性?



例 2 已知 $f(z) = (z^2 + 5z)^2 - \frac{1}{z-1}$, 求 $f'(z)$

解
$$f'(z) = 2(z^2 + 5z)(2z + 5) + \frac{1}{(z-1)^2}$$

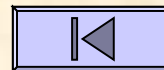
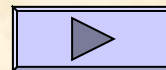
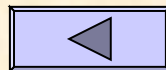
例 3 问：函数 $f(z)=x+2yi$ 是否可导？

解
$$\therefore \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \begin{cases} 1 & \text{当 } \Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时} \\ 2 & \text{当 } \Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ 时} \end{cases} \therefore \text{不存在!}$$

故函数 $f(z) = x + 2yi$ 处处不可导.



例 4 证明 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 只在 $z=0$ 处才可导。

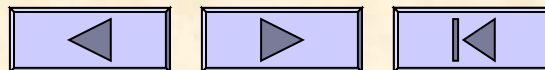
证明

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z) \operatorname{Re}(z + \Delta z) - z \operatorname{Re} z}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \operatorname{Re}(z + \Delta z) + z \operatorname{Re} \Delta z}{\Delta z}$$

$$= \begin{cases} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \operatorname{Re} \Delta z}{\Delta z} = 0 & z = 0 \text{ 时} \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\operatorname{Re}(z + \Delta z) + z \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}) \text{ 不存在!} & z \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} 0 & \text{当 } \Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } \Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ 时} \end{cases} \therefore \text{不存在!}$$



□ (1) 复变函数在一点处可导，要比实函数在一点处可导要求高得多，也复杂得多，这是因为 $\Delta z \rightarrow 0$ 是在平面区域上以任意方式趋于零的原故。

(2) 在高等数学中要举出一个处处连续，但处处不可导的例题是很困难的，但在复变函数中，却轻而易举。

(3) 可导与连续

若 $w=f(z)$ 在点 z_0 处可导 $\Rightarrow w=f(z)$ 在点 z_0 处连续

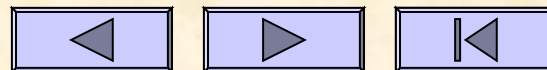
证明：若 $f(z)$ 在 z_0 可导，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,

使得当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 时，有 $\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$,

令 $\rho(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0)$ ，则 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0$,

由此可得 $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$,

$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$ ，所以 $f(z)$ 在 z_0 连续



(4) 复变函数的微分

设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 处的导数为 $f'(z_0)$, 称 $f'(z_0)\Delta z_0$ 为 $f(z)$ 在 z_0 微分 (*differential*),

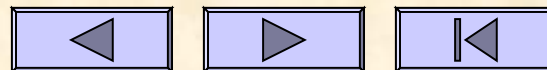
$$dw \Big|_{z=z_0} \stackrel{\text{记作}}{=} f'(z_0)\Delta z_0$$

当 $f(z) = z$ 时 $dz = \Delta z$,

$$dw \Big|_{z=z_0} = f'(z_0)dz$$

导数也可称为 (微商)

$$f'(z_0) = \frac{dw}{dz} \Big|_{z=z_0}$$



二. 解析函数的概念

定义 如果函数 $w=f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的某个邻域内处处

可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 **解析** (*analytic function*) ；

~~如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析，则称~~

~~$f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的解析函数~~
如果 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，就称 z_0 是 $f(z)$ 的 **奇点**。
(*singular point*)

□ (**全纯函数或正则函数**)
(1) $w=f(z)$ 在 D 内解析 \Leftrightarrow 在 D 内可导。

(2) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导，未必在 z_0 解析



例如

- (1) $w=z^2$ 在整个复平面处处可导，故是整个复平面上的解析函数；
- (2) $w=1/z$ ，除去 $z=0$ 点外，是整个复平面上的解析函数；
- (3) $w=z\operatorname{Re}z$ 在整个复平面上处处不解析（见例 4）。

定理 1 设 $w=f(z)$ 及 $w=g(z)$ 是区域 D 内的解析函数，

则 $f(z)\pm g(z)$ ， $f(z)g(z)$ 及 $f(z)/g(z)$ ($g(z)\neq 0$ 时)



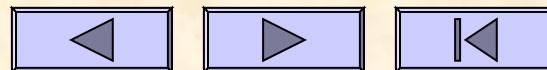
均是 D 内的解析函数。

由以上讨论 \Rightarrow

$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ 是整个复平面上的解析函数；


$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 是复平面上(除分母为0点外)的解析函数.

定理 2 设 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析，
 $h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析， $h=g(z)$ 的函数值集合 $\subset G$ ，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内处处解析。



§2.2 解析函数的充要条件

 1. 解析函数的充要条件

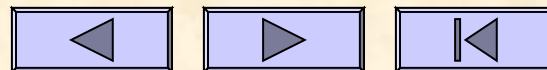
 2. 举例

如果复变函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在定义域 D 内处处可导，则函数 $w = f(z)$ 在 D 内解析。

问题

如何判断函数的解析性呢？

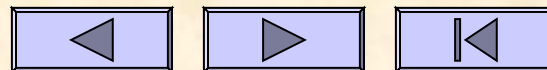
本节从函数 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 的可导性，探求函数 $w = f(z)$ 的可导性，从而给出判别函数解析的一个充分必要条件，并给出解析函数的求导方法。



一. 解析函数的充要条件

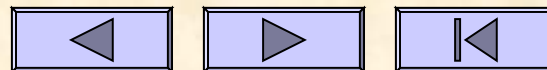
设函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z = x + iy$ 可导, 则

$$\begin{aligned} & \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \\ &= \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$



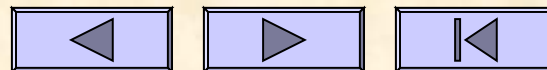
若沿平行于实轴的方式 $z + \Delta z \rightarrow z (\Delta y = 0)$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$



若沿平行于虚轴的方式 $z + \Delta z \rightarrow z (\Delta x = 0)$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$



$\therefore f'(z)$ 存在

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

定义 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

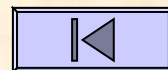
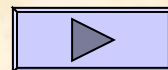
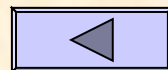
称为 Cauchy-Riemann 方程 (简称 C-R 方程).



记忆

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & - \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array}$$

The above equation is crossed out with a large red 'X'.



定理 1 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 D 内有定义

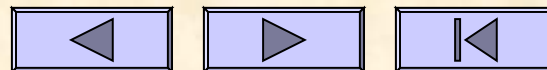
,

则 $f(z)$ 在点 $z=x+iy \in D$ 处可导的充要条件是

$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 且满足
Cauchy-Riemann 方程

上述条件满足时, 有

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y - iu_y = v_y + iv_x$$



证明 " \Rightarrow "

(由 $f(z)$ 的可导 \Rightarrow C-R 方程满足上面已证 ! 只须证 \Rightarrow

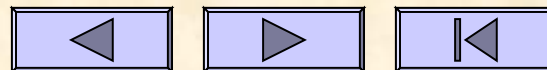
\therefore 函数的可导 \Rightarrow 点函数可导, 即、 $v(x, y)$ 可微) 。

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$\text{设 } \rho(\Delta z) = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f'(z)$$

则 $f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$ (1), 且

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0$$



令： $f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$ ， $f'(z) = a + ib$ ，

$\rho(\Delta z) = \rho_1 + i\rho_2$ 故 (1) 式可写为

$$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\rho_1 + i\rho_2)(\Delta x + i\Delta y)$$

$$= (a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y)$$

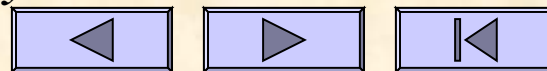
$$+ i(b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y)$$

因此 $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y$ ，

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y$$

$$\therefore \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0 \quad \therefore \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \rho_1 = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \rho_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{|\rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y|}{|\Delta z|} = 0 \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{|\rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y|}{|\Delta z|} = 0$$



所以 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微 .

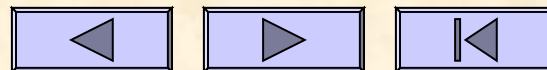
" \Leftarrow " (由函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微及满足
C-R 方程 $\Rightarrow f(z)$ 在点 $z=x+iy$ 处可导)

$\because u(x, y), v(x, y)$ 在 (x, y) 点可微 , 即 :

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

其中 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_k = 0, (k = 1, 2, 3, 4)$



$$\therefore f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y$$

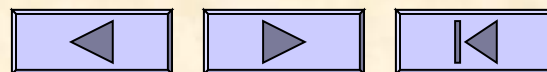
由C-R方程

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y$$

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z} + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

$$\because \left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta z}(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) \rightarrow 0$$

$$\therefore f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$



定理 2 函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在 D 内解析充要

条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内可微 ,

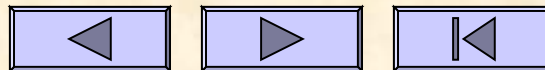
且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

满足 Cauchy-Riemann 方程

□ 由此可以看出可导函数的实部与虚部有密切的联系 . 当一个函数可导时 , 仅由其实部或虚部就可以求出导数来 .

□ 利用该定理可以判断那些函数是不可导的 .



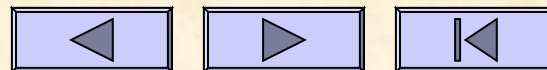
★ 使用时：i) 判别 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 偏导数的连续性

,

ii) 验证 C-R 条件 .
iii) 求导数 :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

□ 前面我们常把复变函数看成是两个实函数拼成的，但是求复变函数的导数时要注意，并不是两个实函数分别关于 x, y 求导简单拼凑成的。



二. 举例

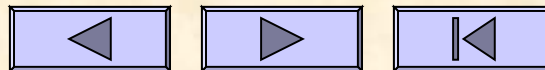
例 1 判定下列函数在何处可导，在何处解析：

$$(1) w = \bar{z}; \quad (2) f(z) = e^x (\cos y + i \sin y); \quad (3) w = |z|^2$$

解 (1) 设 $z=x+iy$ $w=x-iy$ $u=x$, $v=-y$ 则

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 & \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{array} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

故 $w = \bar{z}$ 在全平面不可导，不解析。



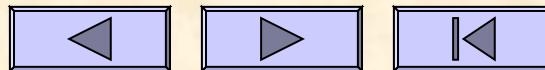
解

(2) $\because f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 则 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y & \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y & \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y & \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array}$$

故 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在全平面可导，解析。

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z)$$

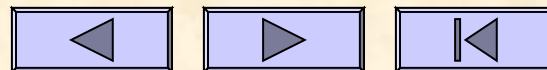


解 (3) 设 $z=x+iy$ $w=x^2+y^2$ $u=x^2+y^2$, $v=0$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

仅在点 $z=0$ 处满足 C-R 条件，故

$w = |z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，但处处不解析。



例 2 求证函数

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

在 $z = x + iy \neq 0$ 处解析，并求 $\frac{dw}{dz}$ 。

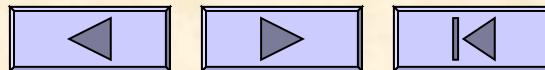
证明 由于在 $z \neq 0$ 处， $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 都是可微函数

，

且满足 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

故函数 $w=f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处解析，其导数为



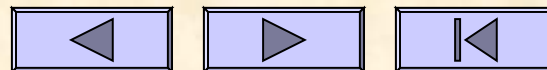
$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{z^2}\end{aligned}$$

例 3 若 $f'(z) \equiv 0, z \in D \Rightarrow f(z) = C, z \in D$

证明 $\because f'(z) = u_x + i v_x = \frac{1}{i} u_y + v_y \equiv 0$

$$\therefore u_x = v_x = u_y = v_y = 0$$

$$\Rightarrow u = C_1 \quad v = C_2 \quad f(z) = C_1 + iC_2 = C(\text{复常数})$$



例 4 如果 $f(z)=u(x, y)+i v(x, y)$ 是一解析函数，
且 $f'(z) \neq 0$ ，那么曲线族 $u(x, y)=C_1$ ，
 $v(x, y)=C_2$ 必相正交，这里 C_1 、 C_2 常数。

解 $\because f'(z) = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \therefore \frac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 不全为 0

那么在曲线的交点处， u_y 、 v_y 均不为零时

,

由隐函数求导法则知曲线族 $u(x, y)=C_1$ ，

$v(x, y)=C_2$ 中任一条曲线的斜率分别为

利用 C-R 方程 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ 有

$k_1 k_2 = (-u_x/u_y)(-v_x/v_y) = -1$ ，即：两族曲线互相正交。



ii) u_y , v_y 中有一为零时 , 不妨设 $u_y=0$, 则 $k_1=\infty$,
 $k_2=0$ (由 C-R 方程)

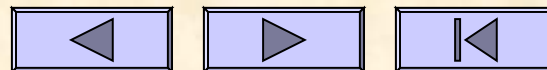
即 : 两族曲线在交点处的切线一条是水平的 , 另一条是铅直的 , 它们仍互相正交。

练习 :






若 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$

问常数 a, b, c, d 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处解析 ?

$$a=2, b=-1, c=-1, d=2$$

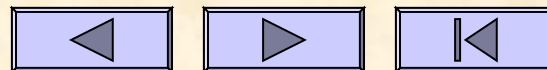


§2.3 初等函数

-  1. 指数函数
-  2. 三角函数和双曲函数
-  3. 对数函数
-  4. 乘幂与幂函数
-  5. 反三角函数与反双曲函数

主要内容

本节将实变函数的一些常用的初等函数推广到复变函数情形，研究这些初等函数的性质，并说明它的解析性。



一. 指数函数

定义 对 $z = x + iy$ 定义复变数 z 的指数函数 $\exp z$ 如下：

$$f(z) = \exp z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\exp z| = e^x \\ \operatorname{Arg}(\exp z) = y + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

它与实变指数函数有类似的性质：

- (1) $\forall z \quad \exp z \neq 0$ (事实上, $|\exp z| = e^x \neq 0$)
- (2) 当 z 为实数 x 时, $f(z) = \exp z = e^x$ ($\because y = 0$)
- (3) $f(z) = \exp z$ 在复平面上处处解析, 且 $(\exp z)' = \exp z$.

(见 §2 的例 1(2))

(4) 加法定理 : $\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$

事实上, 设 $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 1, 2$)

左边 = $\exp z_1 \cdot \exp z_2$

$$= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)$$

$$= e^{x_1 + x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2$$

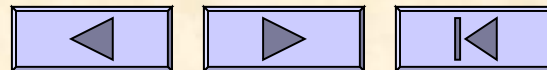
$$+ i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)]$$

$$= e^{x_1 + x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)]$$

$$= \exp(z_1 + z_2)$$

= 右边

为了方便, 我们用以后 e^z 代替 $\exp z$.



由加法定理可推得 $f(z) = e^z$ 的周期性：

$$f(z + T) = f(z), \quad T = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

事实上, $f(z + 2k\pi i) = e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i}$

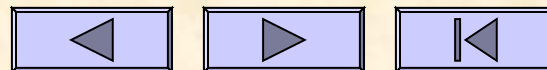
$$= e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z = f(z)$$

$\therefore T = 2k\pi i$ k 为任意整数.

□ 这个性质是实变指数函数所没有的。

$$\text{又} \because e^z e^{-z} = e^{x-x} (\cos(y-y) + i \sin(y-y)) = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\therefore \boxed{e^{-z} = \frac{1}{e^z}} \Rightarrow \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$$



□ (1) e^z 仅仅是个符号, 它的定义为
 $e^x (\cos y + i \sin y)$, \therefore 没有幂的意义.

(2) 特别当 z 的实部 $x = 0$ 时, 就得到
Euler 公式: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

例 求 $\text{Im}(e^{zi})$

$$e^{-y} \sin x$$

1

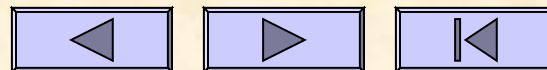
例 求 $e^{\frac{1}{4}(1+i\pi)}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{4}} (1+i)$$

2

例 解方程 $e^z = 1$ $z = 2k\pi i$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3



二. 三角函数和双曲函数

由指数函数的定义：

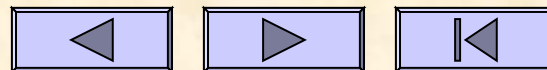
当 $x = 0$ 时, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, 从而得到:
 $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

推广到复变数情形

定义 $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \quad (3)$

--称为 z 的正弦与余弦函数



□ 正弦与余弦函数的性质

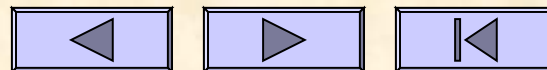
1) $\sin z$ 及 $\cos z$ 是 $T = 2\pi$ 周期函数

$$\begin{aligned} [\cos(z + 2\pi)] &= \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} e^{2\pi i} + e^{-iz} e^{-2\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z] \end{aligned}$$

2) 在复平面上处处解析, 且

$$(\sin z)' = \cos z \quad (\cos z)' = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})' = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$



3) $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数.

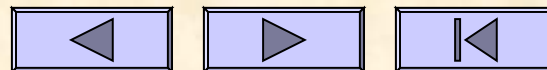
$$\sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\sin z; \text{同理 } \cos(-z) = \cos z$$

4) 由(3)式, Euler公式对一切 z 成立

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

思考题

$\sin z, \cos z$ 作为复变函数, 是否与实变函数有类似的结果: $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$.

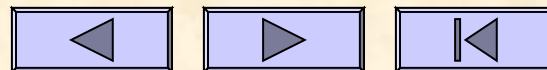


5) 由正弦和余弦函数定义 及指数函数
的加法定理可推知一些 三角公式

$$\begin{cases} \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \end{cases}$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$



由正弦和余弦函数的定义得

$$\begin{cases} \cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = chy \\ \sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = ishy \end{cases} \quad (4)$$

$$\therefore \begin{cases} \cos(x + iy) = \cos xchy - i \sin xshy \\ \sin(x + iy) = \sin xchy + i \cos xshy \end{cases}$$

其它三角函数的定义 (详见

P34)

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$



6) $\sin z$ 的零点, 即方程 $\sin z = 0$ 的根为 $z = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

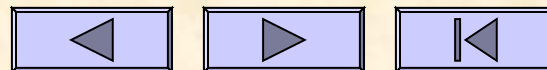
$\cos z$ 的零点为 $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

7) 由(4)式知

$$\text{当 } y \rightarrow \infty \quad |\sin iy| = \left| \frac{e^{-y} + e^y}{2i} \right| = \text{sh } y \rightarrow \infty$$

$$|\cos iy| = \text{ch } y \rightarrow \infty$$

\therefore 在复数范围内 $|\cos z| \leq 1, |\sin z| \leq 1$ 不再成立.



定义 $shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ $chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

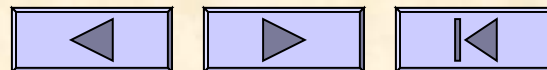
— 称为 双曲正弦和双曲余弦函数

$$(thz = \frac{shz}{chz} \quad cthz = \frac{1}{thz})$$

□ 双曲正弦和双曲余弦函数的性质

1) shz 、 chz 都是以 $2\pi i$ 为周期的函数

2) chz —— 偶函数, shz —— 奇函数



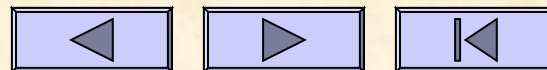
$$3) (chz)' = shz \quad (shz)' = chz$$

shz 和 chz 在整个复平面内处处解析

$$4) \text{由定义 } shiy = i \sin y \quad chiy = \cos y$$

$$ch(x + iy) = chx \cos y + ish x \sin y$$

三角函数,双曲函数均是由复指数函数定义的,且是周期函数,故它的反函数一定是多值函数.



三. 对数函数

(1) 对数的定义

定义 指数函数的反函数称为**对数函数**。即，

把满足 $e^w = z (z \neq 0)$ 的函数 $w = f(z)$

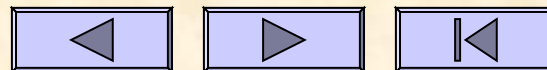
称为**对数函数**，记作 $w = \operatorname{Ln} z$

令 $w = u + iv$ $z = re^{i\theta}$ 那么

$$e^{u+iv} = re^{i\theta} \Rightarrow u = \ln r, \quad v = \theta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore \boxed{w = \operatorname{Ln} z = \ln r + i(\theta + 2\pi k)} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

或 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$
($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)



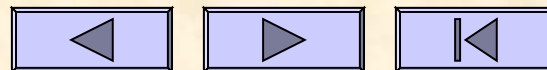
这说明一个复数 $z(z \neq 0)$ 的对数仍为复数,它的实部是 z 的模的实自然对数;它的虚部是 z 的幅角的一般值,即虚部无穷多,其任意两个相异值相差 2π 的一个整数倍.

即, $w = Lnz$ 是 z 的无穷多值函数

当 $k = 0$ 时, $Lnz = \ln|z| + i \arg z$ ^{记作} $= \ln z$ (2)

为 Lnz 的一单值函数,称为 Lnz 的主值(主值支)

故 $Lnz = \ln z + i2k\pi \quad (k \in Z)$



例如 当 $z = a > 0$ $\text{Ln} z$ 的主值 $\ln z = \ln a$

$$\text{Ln} z = \ln a + 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$$

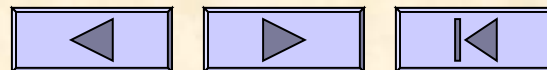
当 $z = -a (a > 0)$ $\text{Ln} z$ 的主值 $\ln z = \ln a + \pi i$

$$\text{Ln} z = \ln a + (2k + 1)\pi i$$

特别 $a = 1$ $\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i$

$$\text{Ln}(-1) = (2k + 1)\pi i$$

□ 1) $w = \text{Ln} z$ 不仅对正数有意义, 对一切非零复数都有意义. (负数也有对数)



2) 指数函数的周期性导致了对数函数的多值性,这与实函数不同.

(2) 对数函数的性质

$$1) \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

2) 连续性: $\ln z$ 在除去原点与负实轴外处处连续.

$$\text{主值: } \ln z = \ln|z| + i \arg z,$$

其中 $\ln|z|$ 除原点外在其它点均连续; 见 §1-6 例 1

而 $\arg z$ 在原点与负实轴上都不连续.

∴ 除原点及负实轴外, $\ln z$ 在复平面内处处连续.



3)解析性： $\ln z$ 在除去原点与负实轴的平面内解析.

$$\because z = e^{\omega} \quad (e^{\omega})' = e^{\omega} \neq 0 \quad \therefore \frac{d\omega}{dz} = (\ln z)' = \frac{1}{\frac{dz}{d\omega}} = \frac{1}{e^{\omega}} = \frac{1}{z}$$

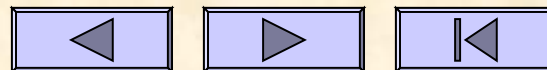
$$\text{即 } (\ln z)' = \frac{1}{z}$$

$\therefore \omega = \ln z$ 除原点及负实轴外是解析的.

$\operatorname{Ln} z$ 的每个分支除了原点和负实轴外均是解析的，

$$\text{且 } (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$$

例 4 设 $e^z = 2i$, 求 z . $z = \ln 2 + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i \quad k = 0, \pm 1, \dots$



四. 乘幂 a^b 与幂函数 z^b

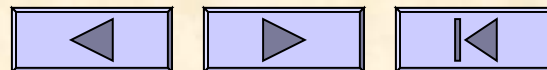
□ 乘幂

定义 设 a, b 为复数, 且 $a \neq 0$, 定义 乘幂 $a^b = e^{bLna}$.

□ 实变数情形, $a > 0, b$ 为实数.

$\therefore Lna = \ln a + i2k\pi$ — 多值

$\therefore a^b = e^{bLna} = e^{b(\ln a + i2k\pi)}$ — 一般为多值



①当 **b** 为整数

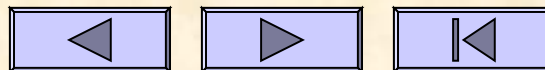
$$\begin{aligned} a^b &= e^{b \operatorname{Ln} a} = e^{b(\ln a + i 2k\pi)} = e^{b \ln a} e^{bi 2k\pi} \\ &= e^{b \ln a} (\cos 2k\pi b + i \sin 2k\pi b) = e^{b \ln a} \end{aligned}$$

$\therefore b$ 为整数时,它是单值函数.

②当 **$b = \frac{p}{q}$** (p, q 为互质的整数,且 **$q > 0$**)

$$\begin{aligned} a^b &= e^{\frac{p}{q}(\ln|a| + i \arg a + 2k\pi i)} = e^{\frac{p}{q} \ln|a|} e^{\frac{p}{q} i(\arg a + 2k\pi)} \\ &= e^{\frac{p}{q} \ln|a|} \left[\cos \frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi) + i \sin \frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi) \right] \\ &\quad (k = 0, 1, 2, 3 \cdots, q-1) \quad \text{—} q \text{ 支} \end{aligned}$$

③一般而论, **a^b** 具有无穷多支.



□ (1) 当 $b=n$ (正整数) 时, 乘幂 a^b 与 a 的 n 次幂

$$a^n \overset{\text{意义一致。}}{=} e^{n \operatorname{Lna}} = e^{\operatorname{Lna} + \operatorname{Lna} + \cdots + \operatorname{Lna}}$$

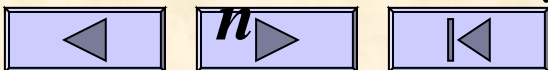
$$= e^{\operatorname{Lna}} e^{\operatorname{Lna}} \cdots e^{\operatorname{Lna}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \uparrow}$$

(2) 当 $b=1/n$ (n 正整数) 时, 乘幂 a^b 与 a 的

$$a^{\frac{1}{n}} \overset{n \text{ 次根意义一致。}}{=} e^{\frac{1}{n} \operatorname{Lna}} = e^{\frac{1}{n} (\ln |a| + i \arg a + 2k\pi i)}$$

$$= e^{\frac{1}{n} \ln |a|} e^{i \frac{\arg a + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$= \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\arg a + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg a + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{a}$$



例

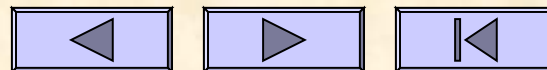
求 $1^{\sqrt{2}}$ 、 i^i 和 $i^{\frac{2}{3}}$ 的值.

解

$$\begin{aligned}1^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{\sqrt{2}(\ln|1|+2k\pi i)} = e^{2k\pi\sqrt{2}i} \\&= \cos(2k\pi\sqrt{2}) + i\sin(2k\pi\sqrt{2}) \\&\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i^i &= e^{iLni} = e^{i(\ln|i|+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i)} = e^{-(2k\pi+\frac{\pi}{2})} \\&\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i^{\frac{2}{3}} &= e^{\frac{2}{3}Lni} = e^{\frac{2}{3}(\ln|i|+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i)} = e^{i\frac{2}{3}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \\&= \cos(\frac{\pi+4k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi+4k\pi}{3}) \\&\quad (k = 0, 1, 2)\end{aligned}$$



□ 幂函数 z^b

定义 在乘幂 a^b 中，取 z 为复变数，得 $w = z^b$ ，
称为幂函数。

① 当 $b = n$ (正整数)

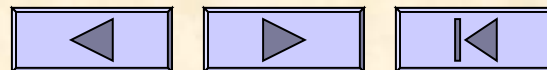
$w = z^n$ 在整个复平面上是单值解析函数

② $b = \frac{1}{n}$ (n 为正整数)

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{n} (\ln |z| + i \arg z + 2k\pi i)} = e^{\frac{1}{n} \ln |z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \\ &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{z} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

◀ $z = w^n$ 的反函数

由于 $\operatorname{Ln} z$ 的解析性 \therefore 除原点与负实轴外处处解析。



③一般而论, $w = z^b$ 除去 b 为正整数外, 多值函数,

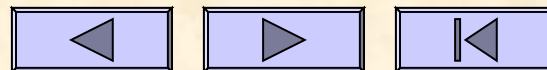
当 b 为无理数或复数时, 无穷多值。
 $w = z^b$ 除原点与负实轴外处处解析, 且

$$(z^b)' = bz^{b-1} (\forall \text{单值分支})$$

5. 反三角函数与反双曲函数

详见 P35 , 请同学们自学教材有关内容 !

□ **重点 :** 指数函数、对数函数、幂函数 .



作业

习题 2 4 (2、4、6)、5(1、2)
6、7、10 (2)、18、19
15 (1, 2)、17 (1) , 22 (1, 2)

