8.2 子群与陪集

子群与群的关系：拉格朗日定理。

8.2 子群与陪集

Lagrange定理及推论

陪集的性质

陪集

典型子群

子群判定定理

子群
非空子集、群

H是G的非空子集
(1)$a,b\in H$有$ab\in H$
(2) $a\in H$有$a^{-1}\in H$.

H是G的非空子集
$a, b\in H$, 有$ab^{-1}\in H$

H是G的非空有穷子集
$a, b\in H$有$ab\in H$

8.2 子群与陪集

子群定义

定义 8.5 设 G 是群，H 是 G 的非空子集，

(1) 如果 H 关于 G 中的运算构成群，则称 H 是 G 的**子群**，记作 $H \le G$.

(2) 若 H 是 G 的子群，且 $H \subset G$ ，则称 H 是 G 的**真子群**，记作 $H < G$.

例如 nZ (n 是自然数) 是整数加群 <Z,+> 的子群. 当 $n \ne 1$ 时 ,nZ 是 Z 的真子群.

任何群 G 都存在子群. G 和 $\{e\}$ 都是 G 的子群，称为 G 的**平凡子群**.

8.2 子群与陪集

定理 8.5（子群判定定理 1 ）

设 G 为群，H 是 G 的非空子集，则 H 是 G 的子群当且仅当

(1) $\forall a,b\in H$ 有 $ab\in H$

(2) $\forall a\in H$ 有 $a^{-1}\in H$.

证 必要性是显然的 .

为证明充分性，只需证明 $e\in H$.

因为 H 非空，存在 $a\in H$. 由条件 (2) 知 $a^{-1}\in H$ ，根据条件 (1)

$aa^{-1}\in H$ ，即 $e\in H$.

8.2 子群与陪集

定理 8.6 （子群判定定理 2 ）

设 G 为群，H 是 G 的非空子集 . H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a,b \in H$, 有 $ab^{-1} \in H$.

证 必要性显然 .

只证充分性 . 因为 H 非空，必存在 $a \in H$.

根据给定条件得 $aa^{-1} \in H$ ，即 $e \in H$.

任取 $a \in H$, 由 $e,a \in H$ 得 $ea^{-1} \in H$ ，即 $a^{-1} \in H$.

任取 $a,b \in H$ ，知 $b^{-1} \in H$. 再利用给定条件得 $a(b^{-1})^{-1} \in H$ ，即 $ab \in H$.

综合上述，可知 H 是 G 的子群 .

8.2 子群与陪集

定理 8.7 （子群判定定理 3 ）

设 G 为群，H 是 G 的**非空有穷子集**，则 H 是 G 的子群当且仅当$\forall a,b \in H$ 有 $ab \in H$.

证 必要性显然.

为证充分性，只需证明 $a \in H$ 有 $a^{-1} \in H$.

任取 $a \in H$, 若 $a = e$, 则 $a^{-1} = e \in H$.

若 $a \neq e$ ，令 $S=\{a,a^2,\ldots\}$ ，则 $S \subseteq H$.

由于 H 是有穷集，必有 $a^i = a^j$（ $i<j$ ）.

根据 G 中的消去律得 $a^{j-i} = e$ ，由 $a \neq e$ 可知 $j-i>1$ ，由此得

$$a^{j-i-1}a = e \quad 和 \quad a\,a^{j-i-1} = e$$

从而证明了 $a^{-1} = a^{j-i-1} \in H$.

8.2 子群与陪集

典型子群的实例：生成子群

定义 8.6 设 G 为群，$a \in G$，令 $H=\{a^k \mid k \in Z\}$，

则 H 是 G 的子群，称为由 a **生成的子群**，记作 $<a>$.

证　首先由 $a \in <a>$ 知道 $<a> \neq \varnothing$. 任取 $a^m, a^l \in <a>$，则

$$a^m(a^l)^{-1} = a^m a^{-l} = a^{m-l} \in <a>$$

根据判定定理二可知 $<a> \leq G$.

实例：

例如整数加群，由 2 生成的子群是 $<2>=\{2k \mid k \in Z\}=2Z$

$<Z_6, \oplus>$ 中，由 2 生成的子群 $<2>=\{0,2,4\}$

Klein 四元群 $G = \{e,a,b,c\}$ 的所有生成子群是：

$$<e>=\{e\},\ <a>=\{e,a\},\ <b>=\{e,b\},\ <c>=\{e,c\}.$$

8.2 子群与陪集

典型子群的实例：中心 C

定义 8.7 设 G 为群，令

$$C=\{a \mid a\in G \wedge \forall x\in G(ax=xa)\}\ ,$$

则 C 是 G 的子群，称为 G 的**中心**.

证 $e\in C$. C 是 G 的非空子集. 任取 $a,b\in C$，只需证明 ab^{-1} 与 G 中所有的元素都可交换. $\forall x\in G$，有

$$(ab^{-1})x = ab^{-1}x = ab^{-1}(x^{-1})^{-1}$$

$$= a(x^{-1}b)^{-1} = a(bx^{-1})^{-1} = a(xb^{-1})$$

$$= (ax)b^{-1} = (xa)b^{-1} = x(ab^{-1})$$

由判定定理二可知 $C\le G$.

对于阿贝尔群 G，因为 G 中所有的元素互相都可交换，G 的中心就等于 G. 但是对某些非交换群 G，它的中心是 $\{e\}$.

8.2 子群与陪集

典型子群的实例：子群的交

例 6 设 G 是群，H,K 是 G 的子群．证明

(1) $H\cap K$ 也是 G 的子群

(2) $H\cup K$ 是 G 的子群当且仅当 $H\subseteq K$ 或 $K\subseteq H$

证 (1) 由 $e\in H\cap K$ 知 $H\cap K$ 非空．

任取 $a, b\in H\cap K$，则 $a\in H, a\in K, b\in H, b\in K$.

必有 $ab^{-1}\in H$ 和 $ab^{-1}\in K$，从而 $ab^{-1}\in H\cap K$. 因此 $H\cap K \le G$.

(2) 充分性显然，只证必要性． 用反证法．

假设 $H\not\subseteq K$ 且 $K\not\subseteq H$，那么存在 h 和 k 使得

$$h\in H\wedge h\notin K,\quad k\in K\wedge k\notin H$$

推出 $hk\notin H$. 否则由 $h^{-1}\in H$ 得 $k=h^{-1}(hk)\in H$，与假设矛盾．

同理可证 $hk\notin K$. 从而得到 $hk\notin H\cup K$. 与 $H\cup K$ 是子群矛盾．

8.2 子群与陪集

❖ 典型子群的实例：正规子群

正规子群：$H \le G$，且 $\forall a \in G$，$aH=Ha$. 记为 $H \trianglelefteq G$.

判定定理： $N \le G$, 则下述条件等价

（1） N 是 G 的正规子群

（2） $\forall g \in G,\ gNg^{-1} = N$

（3） $\forall g \in G,\ \forall n \in N,\ gng^{-1} \in N$

证：(1) $\Rightarrow$(2): $gN = Ng \Rightarrow gNg^{-1} = N$

(2) $\Rightarrow$(3): $gng^{-1} \in gNg^{-1} = N$

(3)$\Rightarrow$(1): $ng \in Ng \Rightarrow n \in N, g^{-1} \in G \Rightarrow g^{-1}ng \in N \Rightarrow ng \in gN$

$gn \in gN \Rightarrow n \in N, g \in G \Rightarrow gng^{-1} \in N \Rightarrow gn \in Ng$

8.2 子群与陪集

子群格

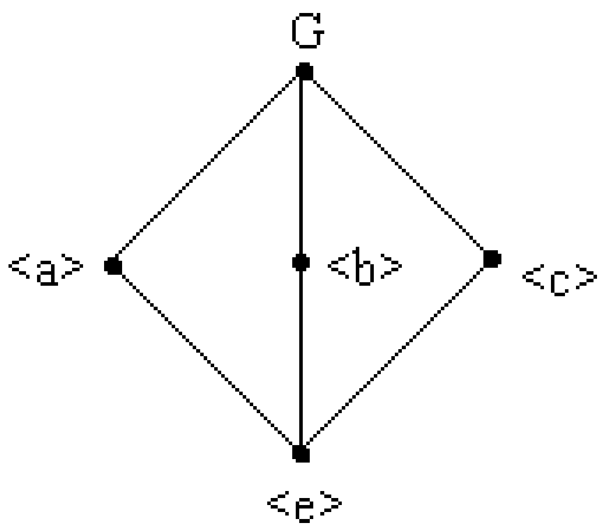
定义 8.8 设 G 为群，令

$$L(G) = \{H \mid H \text{ 是 } G \text{ 的子群}\}$$

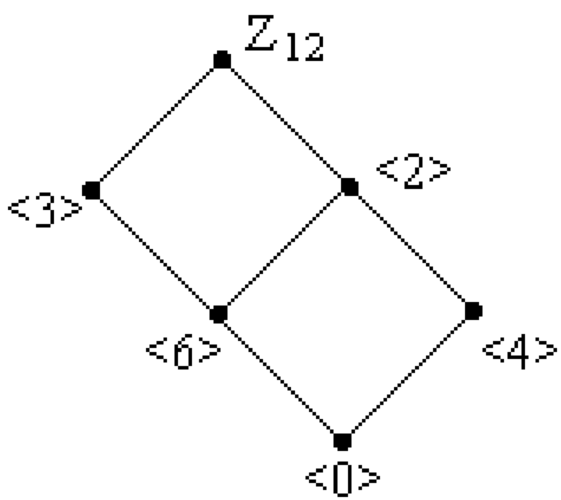
则偏序集 $<L(G), \subseteq>$ 称为 G 的**子群格**

实例：

Klein 四元群的子群格



模 12 加群 Z_{12}



8.2 子群与陪集

陪集定义与实例

定义 8.9 设 H 是 G 的子群，$a \in G$. 令

$$Ha=\{ha \mid h \in H\}$$

称 Ha 是子群 H 在 G 中的**右陪集**. 称 a 为 Ha 的**代表元素**.

例 7 (1) 设 $G=\{e,a,b,c\}$ 是 Klein 四元群，$H=\langle a\rangle$ 是 G 的子群.

H 所有的右陪集是：

$$He=\{e,a\}=H,\ Ha=\{a,e\}=H,\ Hb=\{b,c\},\ Hc=\{c,b\}$$

不同的右陪集只有两个，即 H 和 $\{b,c\}$.

8.2 子群与陪集

例 7(续)

(2) 设 $A=\{1,2,3\}$，$f_1, f_2, \ldots, f_6$ 是 A 上的双射函数．其中

$$f_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}，\quad f_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$f_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}，\quad f_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

$$f_5=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}，\quad f_6=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

令 $G=\{f_1, f_2, \ldots, f_6\}$，则 G 关于函数的复合运算构成群． 考虑 G 的子群 $H=\{f_1, f_2\}$. 做出 H 的全体右陪集如下：

$$Hf_1=\{f_1\circ f_1, f_2\circ f_1\}=H，\quad Hf_2=\{f_1\circ f_2, f_2\circ f_2\}=H$$

$$Hf_3=\{f_1\circ f_3, f_2\circ f_3\}=\{f_3, f_5\},\quad Hf_5=\{f_1\circ f_5, f_2\circ f_5\}=\{f_5, f_3\}$$

$$Hf_4=\{f_1\circ f_4, f_2\circ f_4\}=\{f_4, f_6\},\quad Hf_6=\{f_1\circ f_6, f_2\circ f_6\}=\{f_6, f_4\}$$

结论： $Hf_1=Hf_2$，$Hf_3=Hf_5$，$Hf_4=Hf_6$.

8.2 子群与陪集

陪集的基本性质

定理 8.8 设 H 是群 G 的子群，则

(1) $He = H$

(2) $\forall a \in G$ 有 $a \in Ha$

证 (1) $He = \{ he \mid h \in H \} = \{ h \mid h \in H \} = H$

(2) 任取 $a \in G$，由 $a = ea$ 和 $ea \in Ha$ 得 $a \in Ha$

8.2 子群与陪集

定理 8.9 设 H 是群 G 的子群，则 $\forall a,b\in G$ 有

$$a\in Hb \Leftrightarrow ab^{-1}\in H \Leftrightarrow Ha=Hb$$

证 先证 $a\in Hb \Leftrightarrow ab^{-1}\in H$

$$a\in Hb \Leftrightarrow \exists h(h\in H\wedge a=hb)$$

$$\Leftrightarrow \exists h(h\in H\wedge ab^{-1}=h) \Leftrightarrow ab^{-1}\in H$$

再证 $a\in Hb \Leftrightarrow Ha=Hb$.

充分性．若 $Ha=Hb$，由 $a\in Ha$ 可知必有 $a\in Hb$.

必要性．由 $a\in Hb$ 可知存在 $h\in H$ 使得 $a=hb$，即 $b=h^{-1}a$

任取 $h_1a\in Ha$，则有

$$h_1a = h_1(hb) = (h_1h)b\in Hb$$

从而得到 $Ha\subseteq Hb$. 反之，任取 $h_1b\in Hb$，则有

$$h_1b = h_1(h^{-1}a) = (h_1h^{-1})a\in Ha$$

从而得到 $Hb\subseteq Ha$. 综合上述，$Ha=Hb$ 得证．

8.2 子群与陪集

定理 8.10 设 H 是群 G 的子群，在 G 上定义二元关系 R ：

$$\forall a,b\in G,\ \langle a,b\rangle\in R \Leftrightarrow ab^{-1}\in H$$

则 R 是 G 上的等价关系，且 $[a]_R = Ha$.

证　先证明 R 为 G 上的等价关系.

自反性．任取 $a\in G$ ，$aa^{-1} = e\in H \Leftrightarrow \langle a,a\rangle\in R$

对称性．任取 $a,b\in G$ ，则

$$\langle a,b\rangle\in R\Rightarrow ab^{-1}\in H\Rightarrow (ab^{-1})^{-1}\in H\Rightarrow ba^{-1}\in H\Rightarrow \langle b,a\rangle\in R$$

传递性．任取 $a,b,c\in G$ ，则

$$\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R \Rightarrow ab^{-1}\in H\wedge bc^{-1}\in H$$

$$\Rightarrow ac^{-1}\in H \Rightarrow \langle a,c\rangle\in R$$

下面证明：$\forall\, a\in G$ ，$[a]_R = Ha$. 任取 $b\in G$ ，

$$b\in[a]_R \Leftrightarrow \langle a,b\rangle\in R \Leftrightarrow ab^{-1}\in H \Leftrightarrow Ha=Hb \Leftrightarrow b\in Ha$$

8.2 子群与陪集

推论 设 H 是群 G 的子群，则

(1) $\forall a,b\in G$ ， $Ha = Hb$ 或 $Ha\cap Hb = \varnothing$

(2) $\cup\{Ha \mid a\in G\} = G$

证明：由等价类性质可得.

由以上定理和推论可知，H 的所有右陪集的集合恰好构成 G 的一个划分。

定理 8.11 设 H 是群 G 的子群，则

$\forall a\in G$ ， $H \approx Ha$ （两集合等势，存在从 H 到 Ha 的双射函数 ）

证明 略

8.2 子群与陪集

左陪集的定义与性质

设 G 是群，H 是 G 的子群，H 的左陪集，即

$$aH = \{ah \mid h\in H\}\ ,\ a\in G$$

关于左陪集有下述性质：

(1) $eH = H$

(2) $\forall a\in G$ ，$a\in aH$

(3) $\forall a,b\in G$ ，$a\in bH \Leftrightarrow b^{-1}a\in H \Leftrightarrow aH=bH$

(4) 若在 G 上定义二元关系 R ，

$$\forall\, a,b\in G\ ,\ \langle a,b\rangle\in R \Leftrightarrow b^{-1}a\in H$$

则 R 是 G 上的等价关系，且 $[a]_R = aH$.

(5) $\forall a\in G$ ，$H \approx aH$

8.2 子群与陪集

Lagrange 定理

定理 8.12 （ Lagrange ）设 G 是有限群，H 是 G 的子群，则

$$|G| = |H|\cdot[G:H]$$

其中 $[G:H]$ 是 H 在 G 中的不同右陪集(或左陪集)数，称为 H 在 G 中的**指数**.

证 设 $[G:H] = r$ ，$a_1,a_2,\ldots,a_r$ 分别是 H 的 r 个右陪集的代表元素，由定理 8.10 推论，可知

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \ldots \cup Ha_r$$

$$|G| = |Ha_1| + |Ha_2| + \ldots + |Ha_r|$$

由 $|Ha_i| = |H|$ ，$i = 1,2,\ldots,r$, 得

$$|G| = |H|\cdot r = |H|\cdot[G:H]$$

8.2 子群与陪集

Lagrange 定理推论

推论 1 设 G 是 n 阶群，则$\forall a\in G$，$|a|$ 是 n 的因子，且有 $a^n = e$.

证 任取 $a\in G$，$<a>$ 是 G 的子群，由 Lagrange 定理知，$<a>$ 的阶是 n 的因子.

$<a>$ 是由 a 生成的子群，若 $|a| = r$，则

$$<a> = \{a^0=e,a^1,a^2,\ldots,a^{r-1}\}$$

即 $<a>$ 的阶与 $|a|$ 相等，所以 $|a|$ 是 n 的因子． 从而 $a^n = e$.

推论 2 对阶为素数的群 G，必存在 $a\in G$ 使得 $G = <a>$.

证 设 $|G| = p$，p 是素数．由 $p\geq 2$ 知 G 中必存在非单位元．

任取 $a\in G$，$a\neq e$，则 $<a>$ 是 G 的子群． 根据拉格朗日定理，

$<a>$ 的阶是 p 的因子，即 $<a>$ 的阶是 p 或 1. 显然 $<a>$ 的阶不是 1，

这就推出 $G = <a>$.

8.2 子群与陪集

Lagrange 定理的应用

命题：如果群 G 只含 1 阶和 2 阶元，则 G 是 Abel 群.

证 设 a 为 G 中任意元素，有 $a^{-1} = a$. 任取 $x, y \in G$，则

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx \quad ,$$

因此 G 是 Abel 群.

例 8 证明 6 阶群中必含有 3 阶元.

证 设 G 是 6 阶群，则 G 中元素只能是 1 阶、 2 阶、 3 阶或 6 阶.

若 G 中含有 6 阶元，设为 a，则 a^2 是 3 阶元.

若 G 中不含 6 阶元，下面证明 G 中必含有 3 阶元.

如若不然，G 中只含 1 阶和 2 阶元，即 $\forall a \in G$，有 $a^2=e$，由命题知 G 是 Abel 群.

取 G 中 2 阶元 a 和 b，$a \neq b$，令 $H = \{e, a, b, ab\}$，则 H 是 G 的子群，但 $|H| = 4$，$|G| = 6$，与拉格朗日定理矛盾.

8.2 子群与陪集

例 9 证明阶小于 6 的群都是 Abel 群 .

证 1 阶群是平凡的，显然是阿贝尔群 .

2, 3 和 5 都是素数，由推论 2 它们都是单元素生成的群，都是 Abel 群 .

设 G 是 4 阶群 . 若 G 中含有 4 阶元，比如说 a ，则

$G=\langle a\rangle$

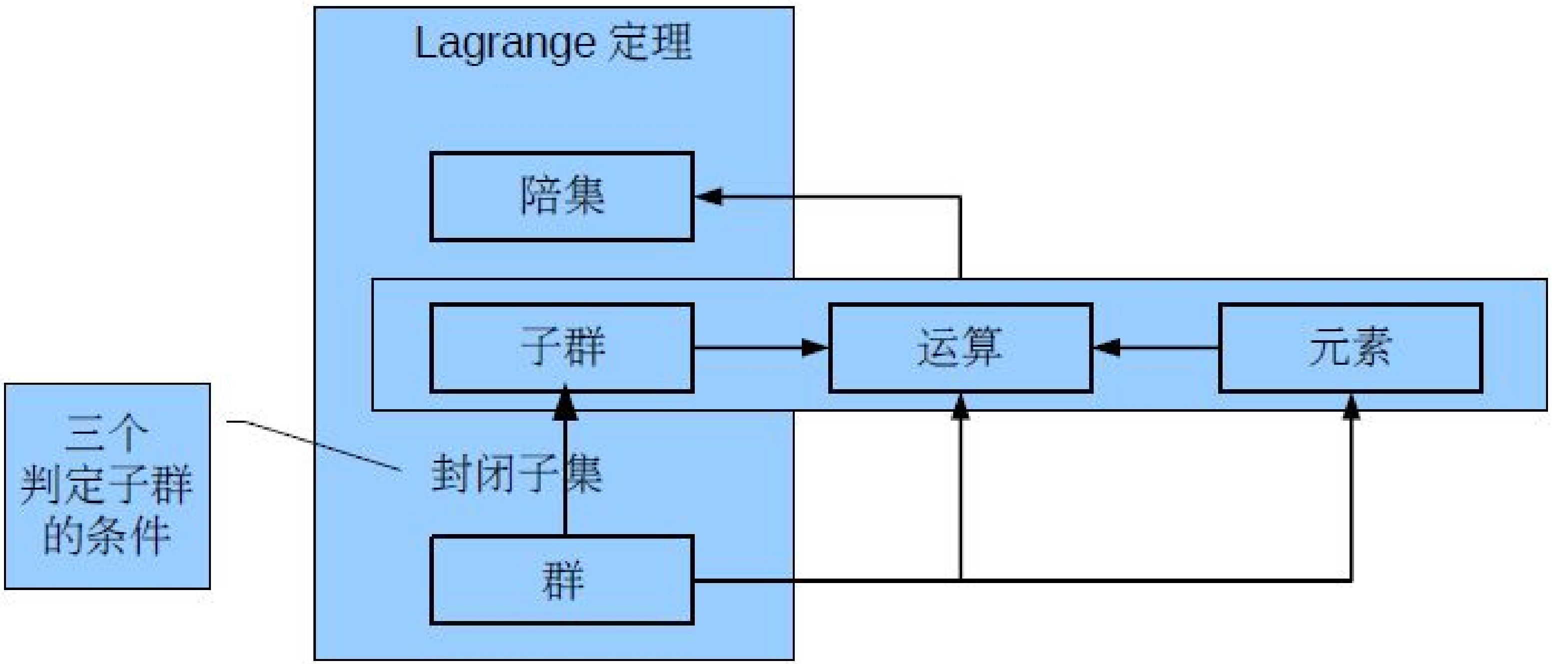
由上述分析可知 G 是 Abel 群 .

若 G 中不含 4 阶元， G 中只含 1 阶和 2 阶元，由命题可知 G 也是 Abel 群 .

小结

- 群的一个子集和该群上的运算如果能够构成一个群，则称这个群为该群的子群。
- 判定一个群是否是另一个群的子群有三种方法，其中有一种仅适用于有限群。
- 一个群的子群和这个群当中的元素进行运算后得到该子群的陪集。
- Lagrange 定理揭示了群、子群、陪集之间的关系。

小结



作业

- **补充习题 8.2**

1．设 G 是群，a 是 G 中给定的元素，a 的正规化子 N(a)表示 G 中与 a 可交换的元素构成的集合，即 $N(a)=\{x \mid x\in G \wedge xa=ax\}$，求证 N(a) 是 G 的子群。