§5 随机变量的函数的分布

- 离散型
- 连续型
- 定理及其应用

返回主目录

随机变量的函数

设 X 是一随机变量，Y 是 X 的函数，$Y=g(X)$,则 Y 也是一个随机变量.

当 X 取值 x 时，Y 取值 $y=g(x)$.

本节的任务就是：

已知随机变量 X 的分布，并且已知 $Y=g(X)$，要求随机变量 Y 的分布.

一、离散型随机变量的函数

设X是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_n\}=p_n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

或

X	x_1	x_2	$\cdots,$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots,$	p_n	$\cdots$

Y是X的函数：$Y=g(X)$, 则Y也是离散型随机变量，它的取值为

$$y_1\ ,\ y_2\ ,\ \cdots\ ,\ y_n\ ,\ \cdots$$

其中 $y_n=g(x_n)$ 　　 $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

返回主目录

第 一 种 情 形

如果 $y_1\ ,\ y_2\ ,\ \cdots\ ,\ y_n\ ,\ \cdots$

两两不相同，则由

$$P\{Y=y_n\}=P\{X=x_n\}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

可知随机变量Y的分布律为

$$P\{Y=y_n\}=p_n\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

或

Y	y_1	y_2	$\cdots,$	y_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots,$	p_n	$\cdots$

返回主目录

第 二 种 情 形

如果 y_1 ， y_2 ， $\cdots$ ， y_n ， $\cdots$ 有相同的项，则把这些相同的项合并（看作是一项），并把相应的概率相加，即可得随机变量 $Y=g(X)$ 的分布律.

如：$y_1=y_2=y_3=y_0$,则

$$P\{y=y_0\}=P\{x=x_1\}+P\{x=x_2\}+P\{x=x_3\}$$

返回主目录

例 1

设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-3	-1	0	2	6	9
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{25}$

随机变量 $Y=2X-3$，试求 Y 的分布律．

解：随机变量 $Y=2X-3$ 的取值为

$$-9，-5，-3，1，9，15，$$

例 1（续）

这些取值两两互不相同．由此得随机变量

$$Y = 2X - 3$$

的分布律为

Y	-9	-5	-3	1	9	[illegible]
P	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

例 2

设随机变量 X 具有以下的分布律，试求

$$Y = (X-1)^2$$

的分布律.

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

解： Y 有可能取的值为 0 ，1 ，4.

且 Y=0 对应于 $(X-1)^2=0$ ，解得 X=1 ，

所以， $P\{Y=0\}=P\{X=1\}=0.1$,

返回主目录

例 2（续）

$Y=(X-1)^2$

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

同理，

$P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.3+0.4=0.7$,

$P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=0.2$,

所以，$Y=(X-1)^2$ 的分布律为：

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

返回主目录

例 3

设离散型随机变量 X 的分布律为

X	1	2	…	n	…
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	…	$\frac{1}{2^n}$	…

$$Y=g(X)=\begin{cases}-1 & \text{若}X\text{为奇数}\\ 1 & \text{若}X\text{为偶数}\end{cases}$$

试求随机变量 Y 的分布律 .

解 :

例 3（续）

$$P\{Y=-1\}=\sum_{n\text{为奇数}}P\{X=n\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=2k+1\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{2}{3}$$

$$P\{Y=1\}=\sum_{n\text{为偶数}}P\{X=n\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=2k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}$$

所以，随机变量 Y 的分布律为

Y	-1	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

二．连续型随机变量函数的分布

设 X 是一连续型随机变量，其密度函数为 $f_X\left(x\right)$，再设 $Y=g\left(X\right)$ 是 X 的函数，我们假定 Y 也是连续型随机变量．

我们要求的是 $Y=g\left(X\right)$ 的密度函数 $f_Y\left(y\right)$．

解 题 思 路

(1)．先求 $Y=g\left(X\right)$ 的分布函数

$$F_Y\left(y\right)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{g\left(X\right)\le y\right\}=\int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

(2)．利用 $Y=g\left(X\right)$ 的分布函数与密度函数之间的关系求 $Y=g\left(X\right)$ 的密度函数 $f_Y\left(y\right)=F_Y'\left(y\right)$

例 4

设随机变量 X 具有概率密度：

$$f_X(X)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求 Y=2X+8 的概率密度.

解：(1) 先求 Y =2X+8 的分布函数 $F_Y(y)$ ：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

$$=P\{2X+8\le y\}=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}$$

返回主目录

例 4（续）

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)dx.$$

$$f_X(X)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2)　利用 $F_Y'(y)=f_Y(y)$ 可以求得：

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\times\left(\frac{y-8}{2}\right)'$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}, & 0<\dfrac{y-8}{2}<4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

返回主目录

例 4（续） 整理得 Y=2X+8 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}, & 0<\dfrac{y-8}{2}<4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & 8<y<16,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

本例用到变限的定积分的求导公式

如果 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt,$

则 $F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x).$

例 5

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x),\ -\infty < x < \infty$,

度

求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解：(1) 先求 $Y = X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$ ：

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$$

1^0 由于 $Y = X^2 \quad 0$, 故当 $y \le 0$ 时 $F_Y(y) = 0$.

2^0 当 $y > 0$ 时,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$$

$$= P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx.$$

返回主目录

例 5（续）

$$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx.$$

(2)利用 $F_Y'(y)=f_Y(y)$及变限定积分求导公式得：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y}), & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

例如，设 X~N(0,1), 其概率密度为：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

则 $Y=X^2$ 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$\boxed{r=\frac{1}{2}=\lambda}$$

此时称 Y 服从自由度为 1 的 χ^2分布。

返回主目录

例 6

设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$ ，$Y=|X|$，试求随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

解：

设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(y)$，随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$$

(1)．若 $y<0$，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=P(\Phi)=0$$

返回主目录

例 6（续）

(2)．若 $y \quad 0$，则

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\}$$

$$= P\{-y \le X \le y\} = F_X(y) - F_X(-y)$$

综上所述，得随机变量 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y) & y \quad 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

对上式求导，可得 $Y = |X|$ 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & y \quad 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

返回主目录

§5　随机变量的函数的分布

定理

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, $-\infty < x < \infty$,
又设函数 $g(x)$ 处处可导，且有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$).

则 Y =g(X) 是一个连续型随机变量 Y ，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 h(y) 是 g(x) 的反函数， $\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$,

即 $x = g^{-1}(y) = h(y)$ 　　$\beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$.

定理（续）

若 $f(x)$在有限区间$[a,b]$以外等于零，则只须假设在$[a,b]$上恒有$g'(x)>0$(或恒有$g'(x)<0$),此时仍有：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

这里$\alpha=\min\{g(a),g(b)\}$, $\beta=\max\{g(a),g(b)\}$.

证明：

设随机变量 $Y=g(X)$ 的分布函数为 $F_Y(y)$

则有　　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$

由题设，当随机变量 X 在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上变化时，

随机变量 Y 在区间 $(\alpha,\ \beta)$ 上变化．其中，

$$\alpha=\min\{g(-\infty),\quad g(+\infty)\},\quad \beta=\max\{g(-\infty),\quad g(+\infty)\}$$

$\therefore$　当 $y\le\alpha$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\phi\}=0$；

当 $y\quad\beta$ 时，　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\Omega\}=1$；

定理的证明

因此，当$y \in (\alpha, \beta)$时，

由题设，不妨假设$g'(x) > 0$，则$g(x)$是严格增加的函数.

$$F_Y(y) = P\{X \le g^{-1}(y)\} = P\{X \le h(y)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx$$

所以，$f(y) = F_Y'(y) = \dfrac{d}{dy}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx\right)$

返回主目录

定 理 的 证 明

$$= f_X\left(h(y)\right)\cdot h'(y) = f_X\left(h(y)\right)\cdot\left|h'(y)\right|$$

若 $g'(x)<0$，则 $g(x)$ 是严格减少的函数．

因此，当 $y\in(\alpha, \beta)$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$$

$$=P\{X \quad g^{-1}(y)\}=P\{X \quad h(y)\} = \int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx$$

所以，$f(y)=F_Y'(y)=\dfrac{d}{dy}\left(\displaystyle\int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx\right)$

返回主目录

定理的证明

$$= -f_X(h(y))\cdot h'(y) \quad = f_X(h(y))\cdot|h'(y)|$$

综上所述，得$Y=g(X)$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

返回主目录

§5 随机变量的函数的分布

补充定理：

若 g(x) 在不相叠的区间 $I_1, I_2, \cdots$ 上逐段严格单调，其反函数分别为 $h_1(y), h_2(y), \cdots$ 均为连续函数，那么 Y=g(x) 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = f_X(h_1(y))\left|h_1'(y)\right| + f_X(h_2(y))\left|h_2'(y)\right| + \cdots$$

$$y \in (\alpha, \beta)$$

返回主目录

例 7

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$Y = e^X$，试求随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

解：

由题设，知 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

因为函数 $y = e^x$ 是严格增加的，它的反函数为 $x = \ln y$.

例 7（续）

并且当随机变量 X 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上变化时，$Y = e^X$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上变化．所以，$\alpha = 0, \beta = +\infty.$

当 $y \in (0, +\infty)$ 时，

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \left| (\ln y)' \right| \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot \frac{1}{y}$$

由此得随机变量 $Y = e^X$ 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} y\sigma} \exp\left\{ -\dfrac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

返回主目录

例 8

设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,试证明X的线性函数$Y = aX + b$ $(a \neq 0)$也服从正态分布.

证 X的概率密度为：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$y = g(x) = ax + b, g'(x) = a$,满足定理的条件，

$y = g(x)$的反函数为：$x = h(y) = \dfrac{y-b}{a}$,且$h'(y) = \dfrac{1}{a}$.

例 8(续)

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

由定理的结论得：　$x=h(y)=\dfrac{y-b}{a}$，且$h'(y)=\dfrac{1}{a}$.

$$f_Y(y)=f_X[h(y)]|h'(y)|=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}.$$

即有$Y=aX+b\sim N\left(a\mu+b,(a\sigma)^2\right)$.

返回主目录

例 9

设随机变量 X 具有概率密度：

$$f_X(X)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求 Y=sinX 的概率密度.

解：因为函数 $y=\sin x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上是严格增加的，

它的反函数为 $x=\arcsin y=h_1(y)$.

例 9 函数 $y=\sin x$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上是严格减少的，

它的反函数为 $x=\pi-\arcsin y=h_2(y)$.

且 $x\in(0,\pi)$ 时, $y\in(0,1)$

$$f_Y(y)=f_X(h_1(y))\left|h_1'(y)\right|+f_X(h_2(y))\left|h_2'(y)\right|$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\arcsin y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{2}{\pi^2}(\pi-\arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\quad, y\in(0,1)$$

$$f_X(X)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

返回主目录

例 9

Y=sinX 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$$

$$f_X(X)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

作业：

p_{59} 33,35 , 36, 39.

返回主目录