Chapter 4-2. 连续时间傅立叶变换的性质

常用性质

- **约定** $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=F^{-1}\{X(j\omega)\}$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=F\{x(t)\}\quad x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)$$

- **奇偶性** 偶信号的频谱为偶信号，奇信号的频谱为奇信号。

偶函数 $x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(j\omega),x(-t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(-j\omega)$

奇函数 $x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(j\omega),x(-t)\overset{FT}{\leftrightarrow}-X(-j\omega)$

- **线性** $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)\ y(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}Y(j\omega)\Rightarrow ax(t)+by(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}aX(j\omega)+bY(j\omega)$

- **时移性质** $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)\Rightarrow x(t-t_0)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$

- **帕斯瓦尔定理** $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$

$|X(j\omega)|^2$ 能谱密度/频谱密度

常用性质

基本题4.6(1)

➡ **例题** 计算**x(t)**的傅里叶变换

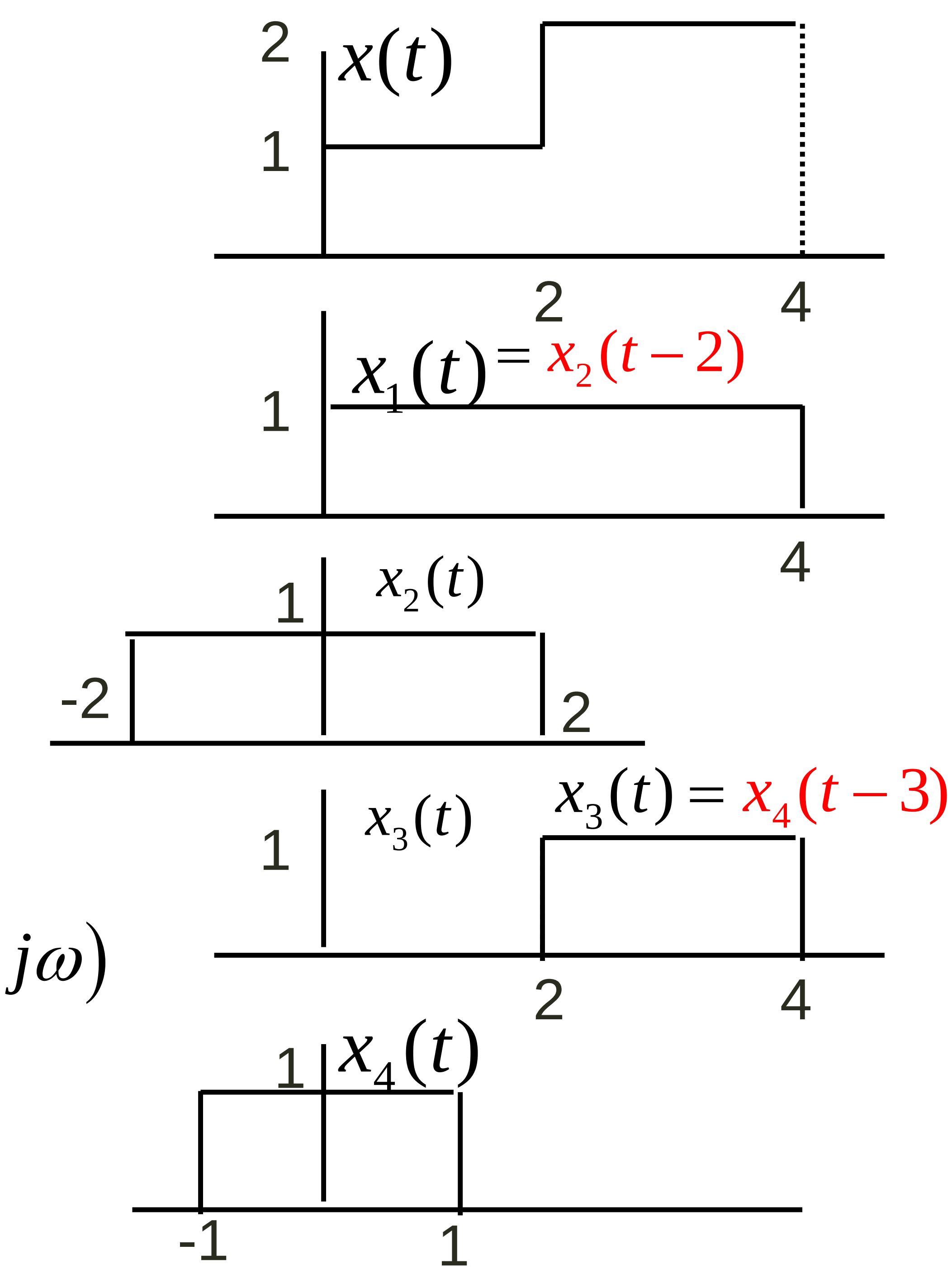
方波 $x(t)=\begin{cases}1, |t|<T_1\\ 0, otherwise\end{cases}$ $\quad X(j\omega)=\dfrac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$

$x_2(t)$: $\quad T_2=2 \quad X_2(j\omega)=\dfrac{2\sin(2\omega)}{\omega}$

$x_1(t)$: $\quad X_1(j\omega)=e^{-j2\omega}X_2(j\omega)=2e^{-j2\omega}\dfrac{\sin(2\omega)}{\omega}$

$x_4(t)$: $\quad T_4=1 \quad X_2(j\omega)=\dfrac{2\sin(\omega)}{\omega}$

$x_3(t)$: $\quad X_3(j\omega)=e^{-j3\omega}X_4(j\omega)=2e^{-j3\omega}\dfrac{\sin(\omega)}{\omega}$



$$x(t)=x_1(t)+x_3(t)\xrightarrow{\text{线性}}X(j\omega)=X_1(j\omega)+X_3(j\omega)$$

$$=\frac{2e^{-j2\omega}}{\omega}(\sin 2\omega+e^{-j\omega}\sin\omega)$$

常用性质

微分 $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega) \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega)$

积分 $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$

例4. 11 已知 $g(t)=\delta(t)$ $G(j\omega)=1$ 求**x(t)=u(t)**的傅里叶变换

$$x(t)=u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \xrightarrow{G(j\omega)=1} X(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{j\omega}+\pi G(0)\delta(\omega)$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

已知**x(t)=u(t)**的傅里叶变换为 $X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ 计算$g(t)=\delta(t)$的傅里叶变换

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \Rightarrow G(j\omega)=j\omega X(j\omega) \Rightarrow G(j\omega)=1+j\omega\pi\delta(\omega)$$

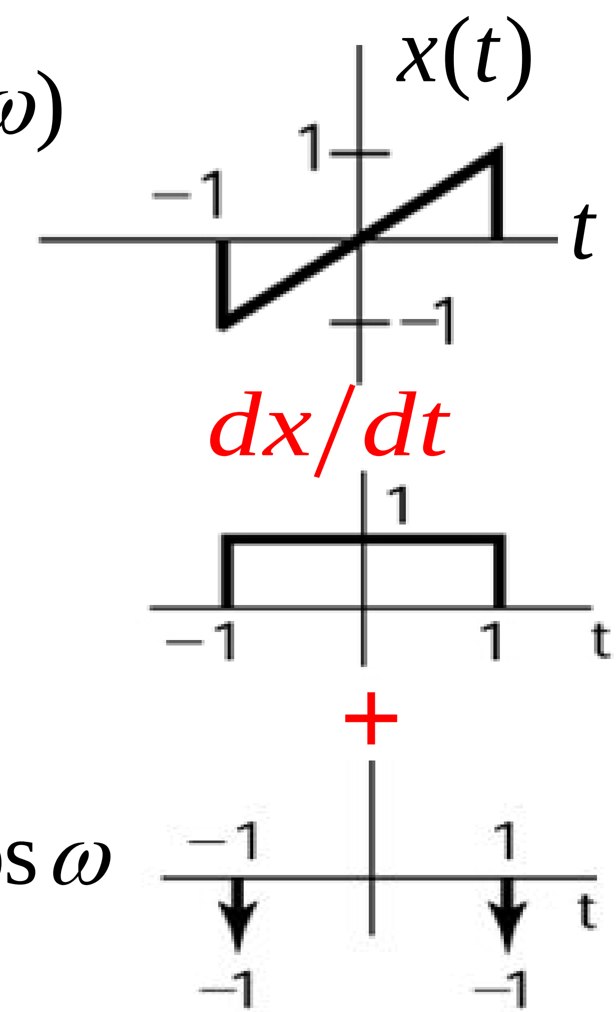
$$G(j\omega)=1+0\bullet 1=1$$

常用性质

➡ **微分** $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega) \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt}\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}j\omega X(j\omega)$

➡ **积分** $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$

自学 ➡ **例4. 12** 用积分性质求**x(t)**的傅里叶变换 $X(j\omega)$



$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\begin{cases}1 & -1<t<1\\ \delta(t+1) & t=-1\\ \delta(t-1) & t=1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}g(t)dt$$

$$G(j\omega)=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}=\frac{2\sin\omega}{\omega}-e^{j\omega}-e^{-j\omega}=\frac{2\sin\omega}{\omega}-2\cos\omega$$

$$X(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{j\omega}+\pi G(0)\delta(\omega)\xrightarrow{G(0)=0}X(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{2\cos\omega}{j\omega}$$

常用性质

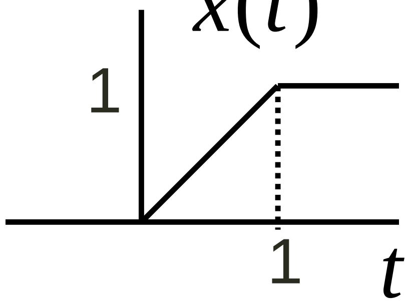
方波：$\dfrac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$

➡ **微分** $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega) \Rightarrow \dfrac{dx(t)}{dt}\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}j\omega X(j\omega)$

➡ **积分** $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\dfrac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$

➡ **例** 用积分性质求x(t)的傅里叶变换

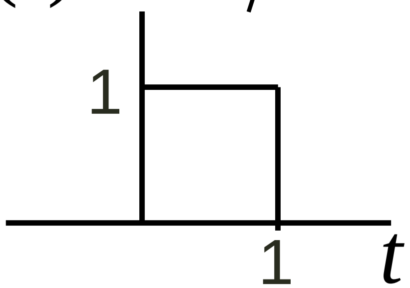
$x(t)$



$$x_1(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$x_1(t)=x_2(t-0.5)$$

$x_1(t)=dx/dt$



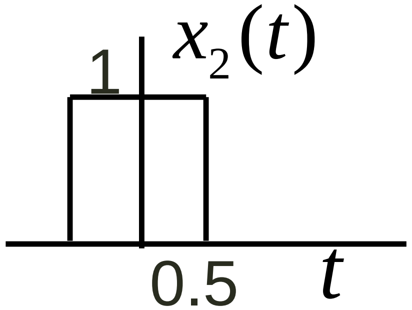
$$X_2(j\omega)=\frac{2\sin 0.5\omega}{\omega}$$

$x(t-t_0)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$

$$X_1(j\omega)=e^{-j\omega t_0}X_2(j\omega)=2e^{-j0.5\omega}\frac{\sin 0.5\omega}{\omega}$$

$x(t)=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)d\tau$ 积分性质

$x_2(t)$



$$X(j\omega)=\frac{e^{-j0.5\omega}\sin 0.5\omega}{j\omega^2}+\pi\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}e^{-j0.5\omega}Sa(0.5\omega)+\pi\delta(\omega)$$

$X_1(0)=1$

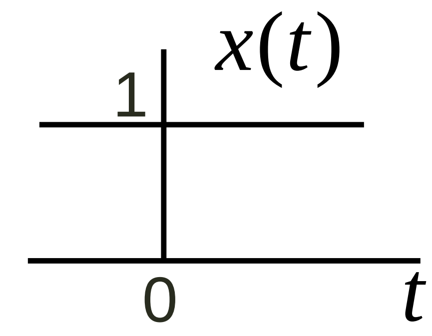
$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}X_1(j\omega)+\pi X_1(0)\delta(\omega)$$

时间与频率的尺度变换

表达式 $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(jw) \Rightarrow x(at) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right)$ **a是实常数**

当a=-1时 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ **时域扩展对应频域压缩，反之亦然**

例 求x(t)的傅里叶变换 $x(t)=1$



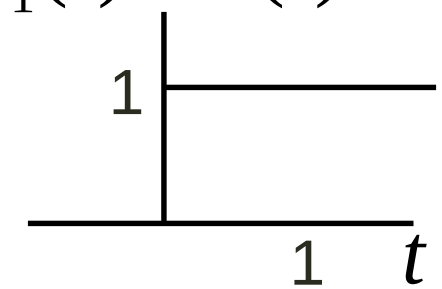
$$x_1(t)=u(t) \Rightarrow X_1(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$x_2(t)=u(-t) \Rightarrow X_2(j\omega)=X_1(-j\omega)=-\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

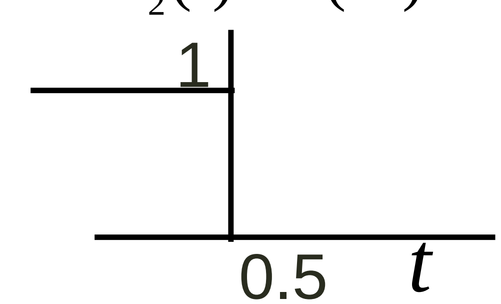
$$x(t)=1=x_1(t)+x_2(t) \Rightarrow X(j\omega)=X_2(j\omega)+X_1(j\omega)$$

$$=2\pi\delta(\omega)$$

$x_1(t)=u(t)$



$x_2(t)=u(-t)$



$x(t)=a$ a为非0实数 $\Rightarrow$ $=2\pi a\delta(\omega)$

时间反转与频域微分

时间反转 $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(jw) \Rightarrow x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$

x(t)为偶函数 $x(t)=x(-t) \rightarrow X(j\omega) = X(-j\omega)$

x(t)为奇函数 $x(t)=-x(-t) \rightarrow X(j\omega) = -X(-j\omega)$

频域微分 $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(jw) \Rightarrow tx(t) \leftrightarrow j\dfrac{dX(j\omega)}{d\omega}$

$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

基本题4-6(ac) 4.15

时间反转与频域微分

时间反转 $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega) \Rightarrow x(-t)\leftrightarrow X(-j\omega)$

频域微分 $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(jw) \Rightarrow tx(t)\leftrightarrow j\dfrac{dX(j\omega)}{d\omega}\quad -jtx(t)\leftrightarrow \dfrac{dX(j\omega)}{d\omega}$

微分 $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega) \Rightarrow \dfrac{dx(t)}{dt}\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}j\omega X(j\omega)$

$$x_1(t)=x(1-t)+x(-1-t)$$

$$x(t+1)\leftrightarrow e^{j\omega}X(j\omega)$$

$$x(-t+1)\leftrightarrow e^{-j\omega}X(-j\omega)$$

$$x(t-1)\leftrightarrow e^{-j\omega}X(j\omega)$$

$$x(-t-1)\leftrightarrow e^{j\omega}X(-j\omega)$$

$$x_2(t)=\frac{d^2x(t-1)}{dt}$$

$$x(t-1)\leftrightarrow e^{-j\omega}X(j\omega)$$

$$\frac{dx(t-1)}{dt}\leftrightarrow j\omega e^{-j\omega}X(j\omega)$$

$$\frac{d^2x(t-1)}{dt}\leftrightarrow (j\omega)^2 e^{-j\omega}X(j\omega)$$

共轭及共轭对称性

- **共轭性** $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega) \Rightarrow x^*(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X^*(-j\omega)$

- **共轭对称性** 若**x(t)**为实数，则 $X(-j\omega)=X^*(j\omega)$ *or* $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$

- **实信号的共轭性**

$\mathrm{Re}\big(X(j\omega)\big)=\mathrm{Re}\big(X(-j\omega)\big) \longrightarrow$ 偶函数

$\mathrm{Im}\big(X(j\omega)\big)=-\mathrm{Im}\big(X(-j\omega)\big) \longrightarrow$ 奇函数

$|X(j\omega)|$是ω的偶函数，$\measuredangle X(j\omega)$是$\omega$的奇函数

若**x(t)**为实、偶函数，**X(jω)**也为实偶函数

若**x(t)**为实、奇函数，**X(jω)**也为纯虚奇函数

说明：计算实信号的傅里叶变换时，可以仅计算正频率，因为负频率可以利用正频率导出。

- **实信号奇/偶部的共轭性**

$$\begin{cases} x(t)=x_e(t)+x_o(t) \\ x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_e(t)\leftrightarrow \mathrm{Re}(X(j\omega)) \\ x_o(t)\leftrightarrow j\,\mathrm{Im}(X(j\omega)) \end{cases}$$

共轭及共轭对称性

共轭性 $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega) \Rightarrow x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X^*(-j\omega)$

实信号共轭性 若x(t)为实数，则 $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ or $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

虚信号的共轭性 若x(t)为纯虚函数，则 $X(-j\omega) = -X^*(j\omega)$

$X(j\omega) = -X^*(-j\omega)$

$\mathcal{Re}(X(j\omega)) = -\mathcal{Re}(X(-j\omega)) \longrightarrow$ 奇函数

$\mathcal{Im}(X(j\omega)) = = \mathcal{Im}(X(-j\omega)) \longrightarrow$ 偶函数

$|X(j\omega)|$是ω的偶函数，$\measuredangle X(j\omega)$ 是ω的奇函数

若x(t)为虚、偶函数，X(jω)也为虚偶函数

若x(t)为虚、奇函数，X(jω)也为实奇函数

虚信号奇/偶部的共轭性

$$\begin{cases} x(t) = x_e(t) + x_o(t) \\ x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(jw) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_e(t) \leftrightarrow j\,\mathcal{Im}(X(j\omega)) \\ x_o(t) \leftrightarrow \mathcal{Re}(X(j\omega)) \end{cases}$$

共轭及共轭对称性

共轭性 $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(jw) \Rightarrow x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X^*(-jw)$

若x(t)为纯虚函数，则 $X(-j\omega) = -X^*(j\omega) \quad X(j\omega) = -X^*(-j\omega)$

若x(t)为实数，则 $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ or $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

$$X(j\omega) = \left(\frac{\sin 2\omega}{\omega}\right)e^{j(2\omega+\frac{\pi}{2})}$$ 判断实虚性与奇偶性

$$= \frac{\sin(2\omega)}{\omega}e^{j2\omega}e^{j\frac{\pi}{2}} = j\frac{\sin(2\omega)}{\omega}e^{j2\omega} = -\frac{\sin 2\omega \sin 2\omega}{\omega} + j\frac{\sin 2\omega \cos 2\omega}{\omega}$$

$$X(-j\omega) = \left(\frac{\sin(-2\omega)}{-\omega}\right)e^{j(-2\omega+\frac{\pi}{2})} = j\frac{\sin(2\omega)}{\omega}e^{-j2\omega} = \frac{\sin(2\omega)\sin(2\omega)}{\omega} + j\frac{\sin(2\omega)\cos(2\omega)}{\omega}$$

$X(j\omega) \neq -X(-j\omega) \quad X(j\omega) \neq X(-j\omega)$ 非奇非偶

$$X^*(-j\omega) = \frac{\sin(2\omega)\sin(2\omega)}{\omega} - j\frac{\sin(2\omega)\cos(2\omega)}{\omega}$$

$X(j\omega) = -X^*(-j\omega)$ 虚信号

卷积定理

表达式 两个信号的卷积等于其傅里叶变换的乘积，即时域的卷积等于频域的乘积。

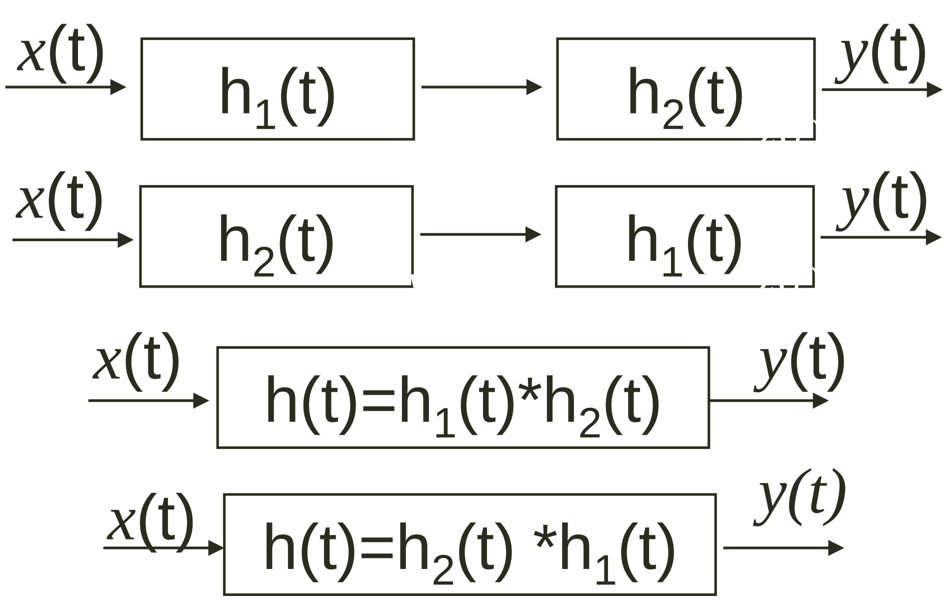
$$\begin{cases} x(t) \to X(j\omega) \\ h(t) \to H(j\omega) \end{cases} \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) \to Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

注意：只有稳定的**LTI**系统才有频率响应**H(jω)**。

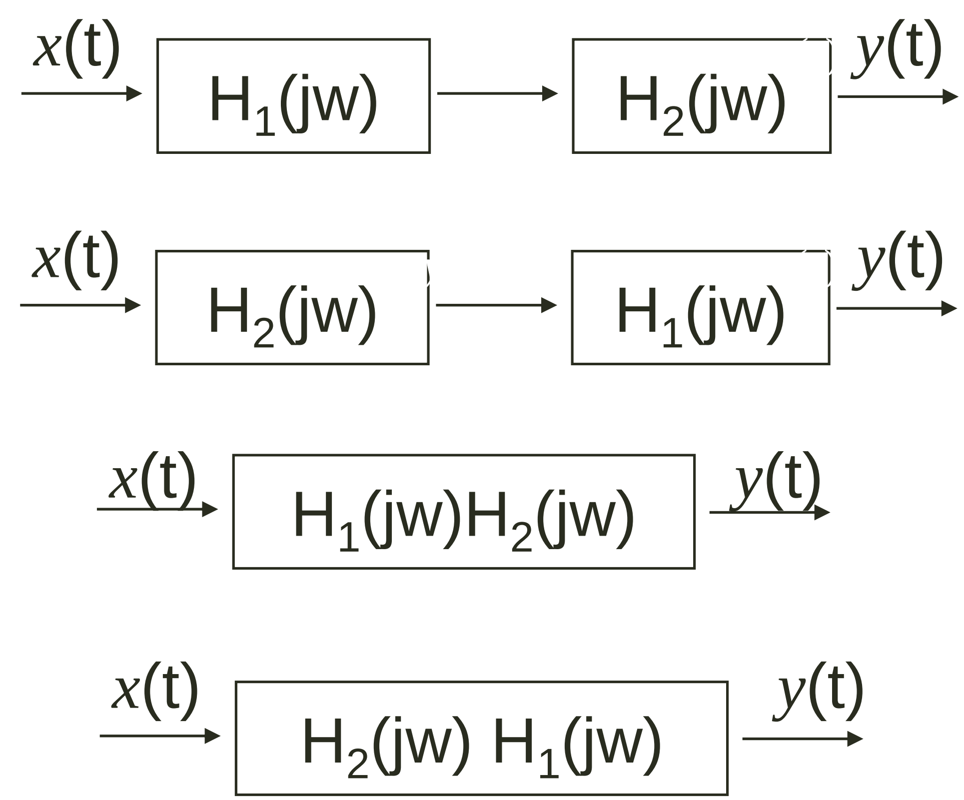
系统框图

LTI系统时域框图

$$(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$



LTI系统频域框图



卷积定理

表达式 $y(t)=h(t)*x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$

例4.15 单位冲激信号

已知 $h(t)=\delta(t-t_0)$ $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)$ 求 $Y(j\omega)=?$

$\downarrow$ 分析公式

$$H(j\omega)=e^{-j\omega t_0}\xrightarrow{\text{卷积公式}}Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

例4.16 **differentiator微分器**

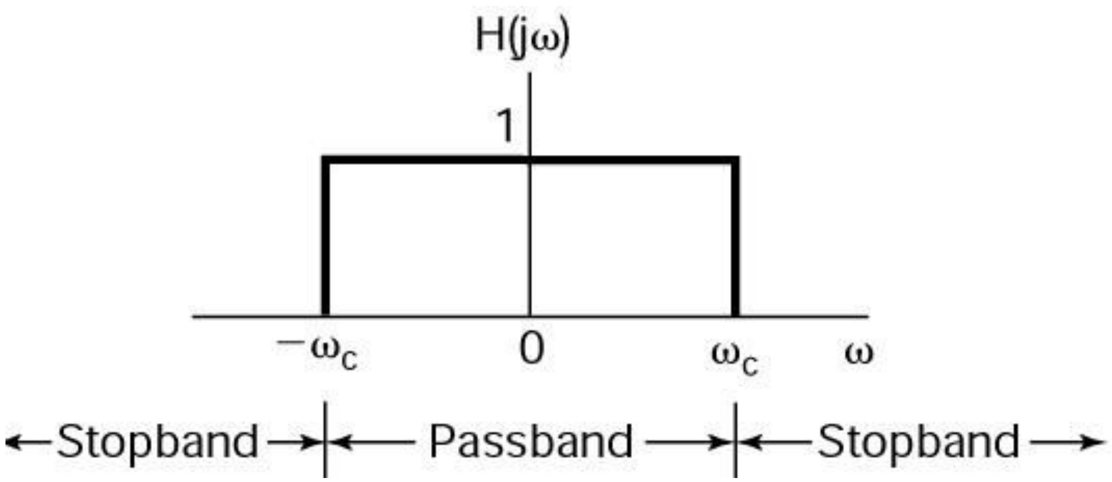
已知 $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ 求 $H(j\omega)=?$

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}\xrightarrow{\text{微分性质}}Y(j\omega)=j\omega X(j\omega)\xrightarrow{\text{卷积定理}}H(j\omega)=j\omega$$

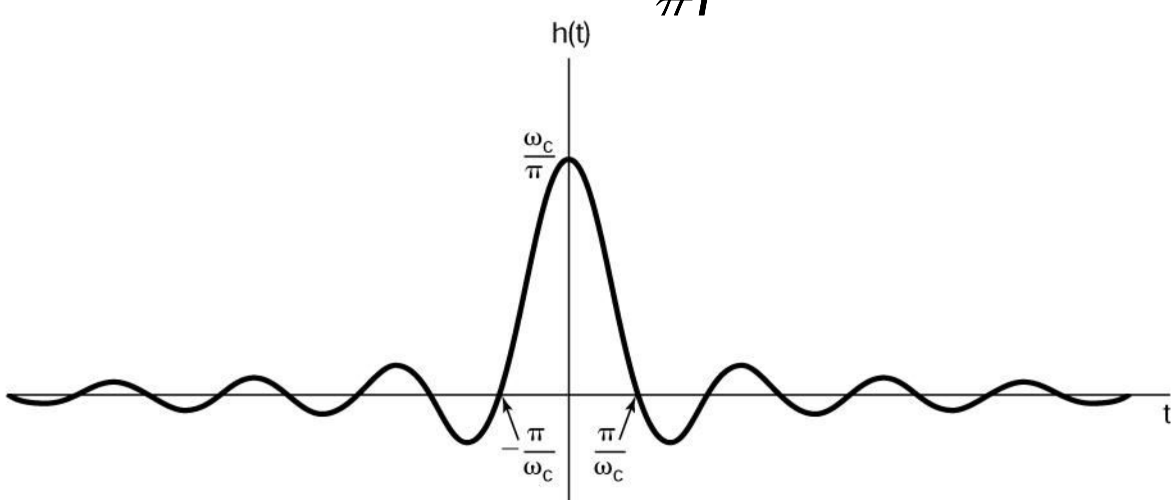
卷积定理

例4. 18 理想低通滤波器

$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$



$$h(t)=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$



优点：完美的频率选择性；

缺点：

(1)h(t<0)非0，是非因果的。

(2)在时域中存在着振荡；

(3)难以实现。

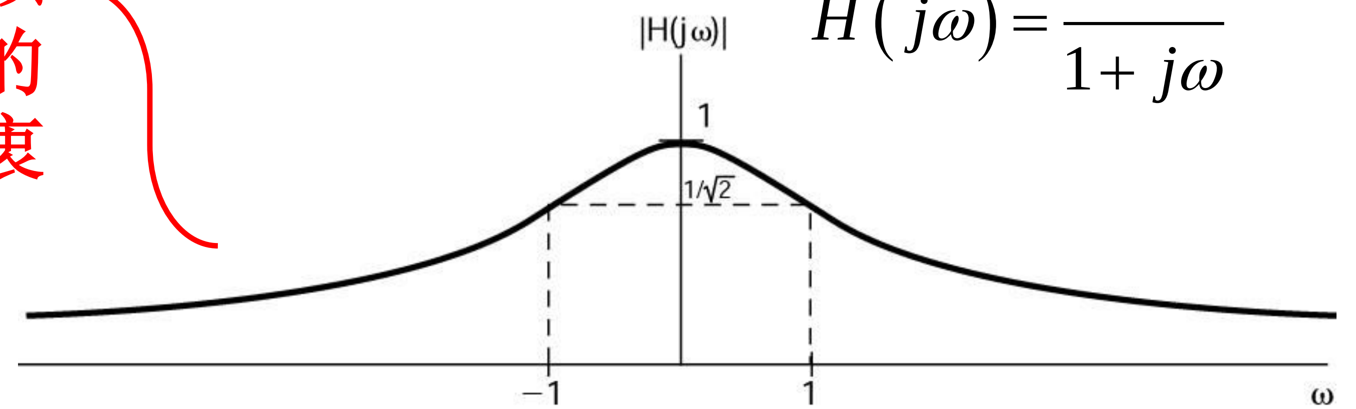
简单RC电路实现的实用低通滤波器

$$h(t)=e^{-t}u(t)$$

(a)

时域与频域的折衷

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$



(b)

卷积定理

例4.20

求理想低通滤波器对sinc函数的响应。

$$x(t)=\frac{\sin\omega_i t}{\pi t}$$

$$h(t)=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$

$$y(t)=h(t)*x(t)=?$$

两个sinc函数的卷积仍然是sinc函数

$$x(t)=\frac{\sin\omega_i t}{\pi t}\longrightarrow X(j\omega)=\begin{cases}1,|\omega|\le\omega_i\\0,|\omega|>\omega_i\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{\sin w_c t}{\pi t}\longrightarrow H(j\omega)=\begin{cases}1,|\omega|\le\omega_c\\0,|\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$Y(j\omega)=\begin{cases}1,|\omega|\le\omega_0\\0,|\omega|>\omega_0\end{cases},\omega_0=\min(\omega_i,\omega_c)$$

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin\omega_c t}{\pi t},\omega_c\le\omega_i\\[2ex]\dfrac{\sin\omega_i t}{\pi t},\omega_c\ge\omega_i\end{cases}$$

基本题4-13

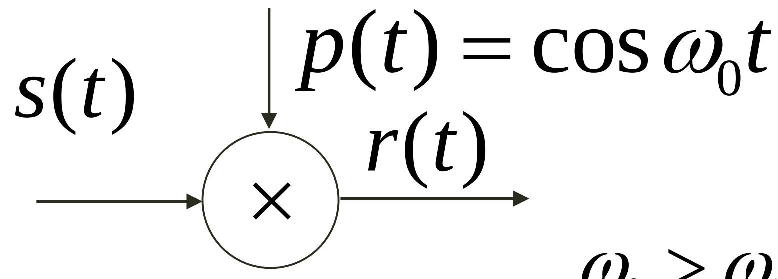
相乘性质/调制性质

表达式 $r(t)=s(t)p(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(j\theta)P(j(\omega-\theta))d\theta$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[S(j\omega)*P(j\omega)\right]$$

时域内的相乘对应于频域内的卷积。
两个信号相乘也称为幅度调制。

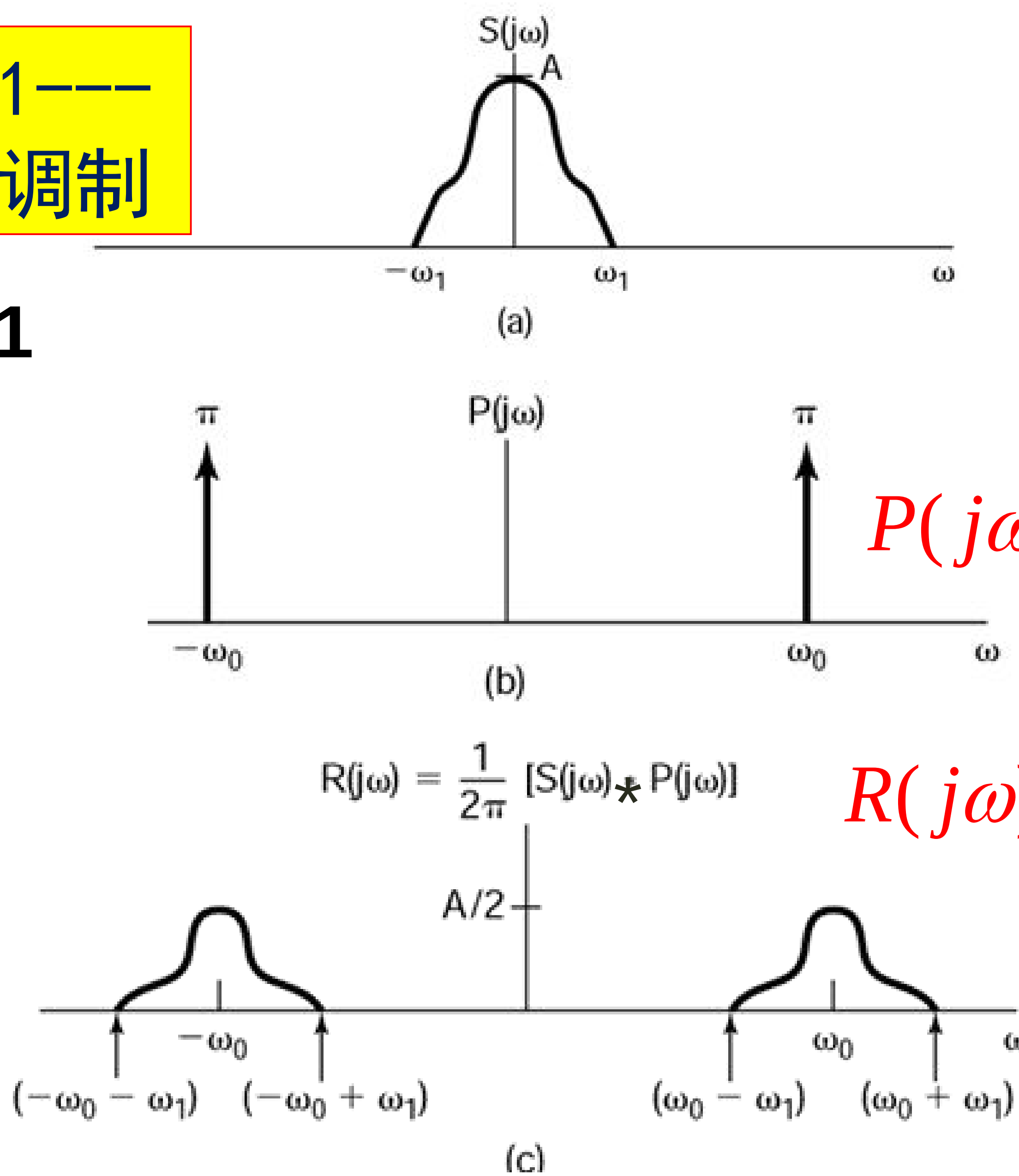
重要应用1---正弦幅度调制



$p(t)=\cos\omega_0 t$

- **Example 4.21**

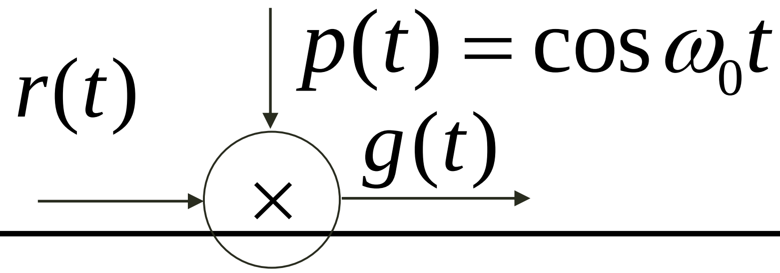
信号s(t)被一正弦信号相乘后，尽管信号被搬移到较高频率，但是信号所包含的信息却完整的保留了了下来。



$$P(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$R(j\omega)=\frac{1}{2}S(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}S(\omega+\omega_0)$$

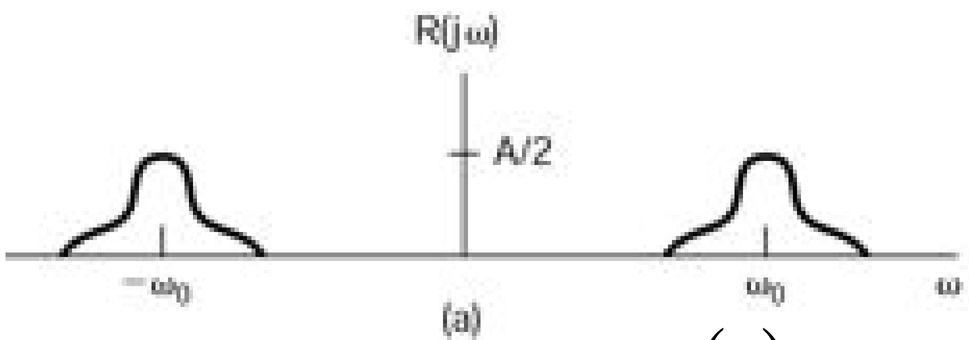
相乘性质/调制性质



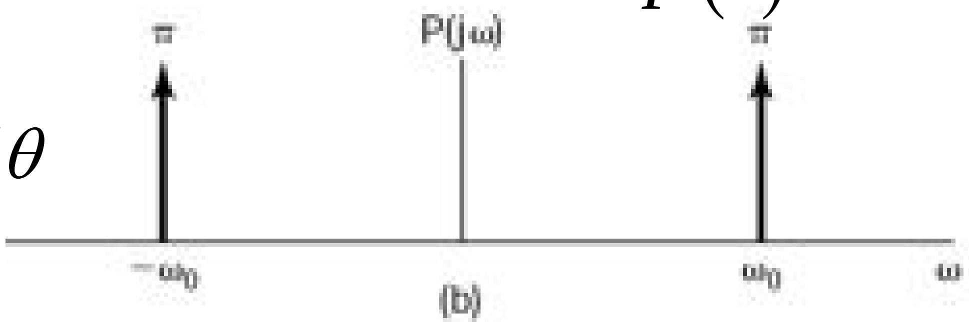
例4.22 重要应用2:正弦幅度解调基本思想

$$g(t)=r(t)p(t)\leftrightarrow G(j\omega)=\frac{1}{2\pi}[R(j\omega)\times P(j\omega)]$$

已知**r(t)**的频谱如右图所示，计算**G(jw)**。



$$p(t)=\cos\omega_o t$$



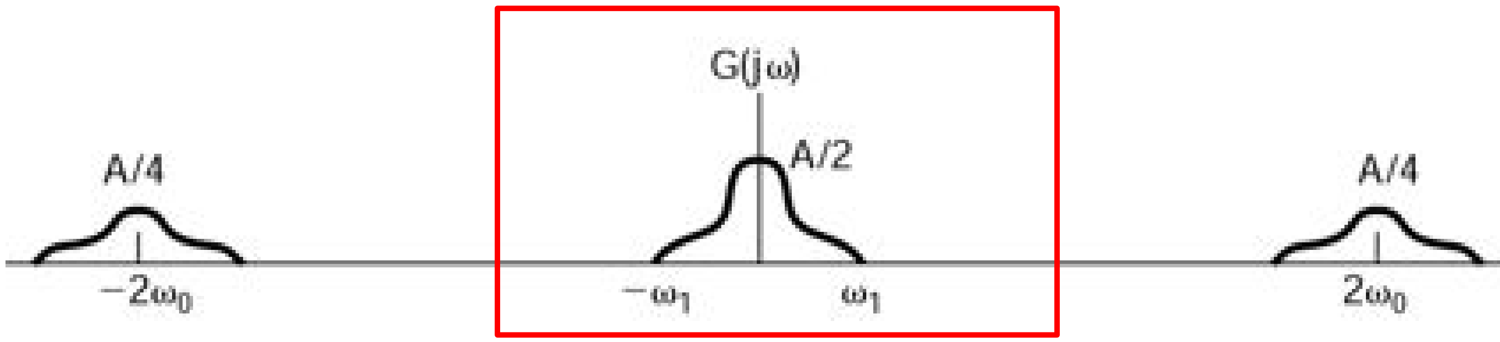
$$G(j\omega)=\frac{1}{2\pi}[R(j\omega)\times P(j\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi\delta(\theta-\omega_0)R(\omega-\theta)+\pi\delta(\theta+\omega_0)R(\omega-\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Big(R(\omega-\omega_0)+R(\omega+\omega_0)\Big)$$

$$P(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

若对**G(jw)**进行低通滤波，再进行幅度加权，则可以获取**g(t)**的频谱信息，进而可以获取**g(t)的信息**。



相乘性质/调制性质

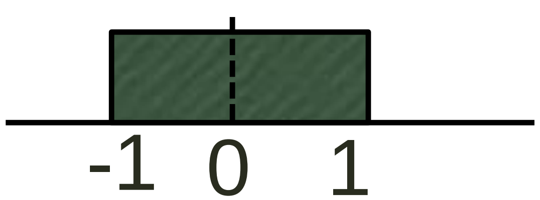
例4.23　应用3

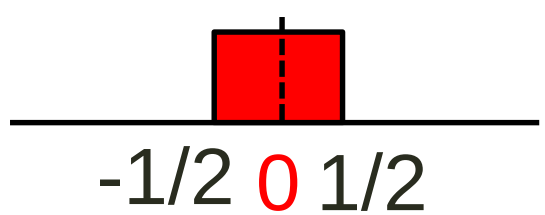
$$g(t)=r(t)p(t)\leftrightarrow G(j\omega)=\frac{1}{2\pi}[R(j\omega)\times P(j\omega)]$$

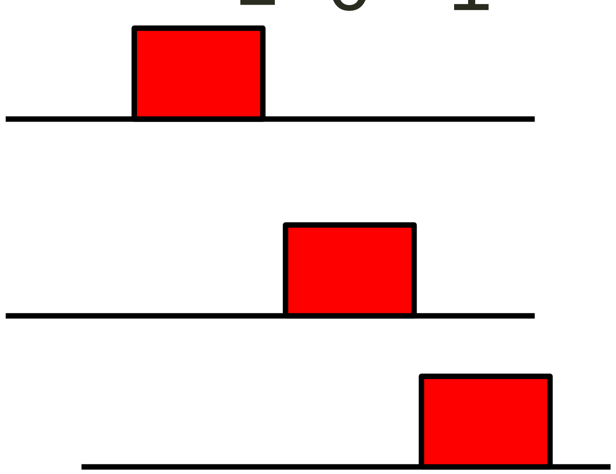
计算x(t)的傅里叶变换。

$$x(t)=\frac{sint \bullet sin\frac{t}{2}}{\pi t^2}$$

傅立叶变换:时域复杂信号的乘法转变成频域的卷积







$$x(t)=\pi\left(\frac{sint}{\pi t}\right)\left(\frac{sin\left(t/2\right)}{\pi t}\right)$$

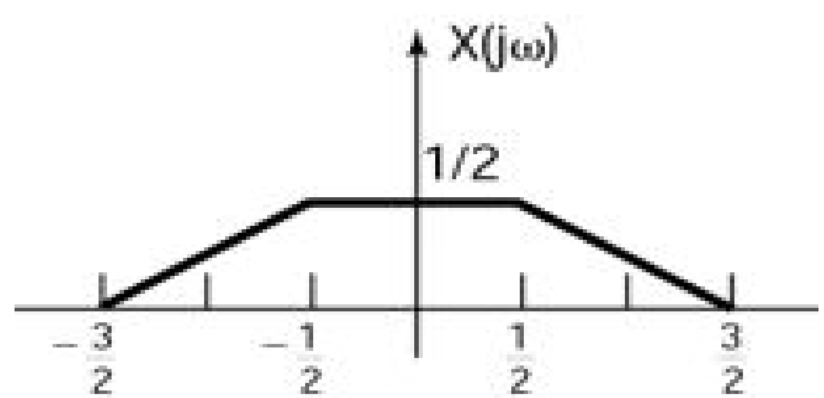
$$X(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\pi\,\mathscr{F}\left(\frac{sint}{\pi t}\right)*\mathscr{F}\left(\frac{sin\left(t/2\right)}{\pi t}\right)$$

因为 $F(\frac{\sin(t)}{\pi t})=\begin{cases}1,|\omega|<W=1\\0,|\omega|>W=1\end{cases}$

$$F(\frac{\sin(t/2)}{\pi t})=\begin{cases}1,|\omega|<W=\frac{1}{2}\\0,|\omega|>W=\frac{1}{2}\end{cases}$$

↓

$$G(j\omega)=\begin{cases}t/2+3/4 & -3/2\le t\le -1/2\\1/2 & -1/2\le t\le 1/2\\-t/2+3/4 & 1/2\le t\le 3/2\end{cases}$$



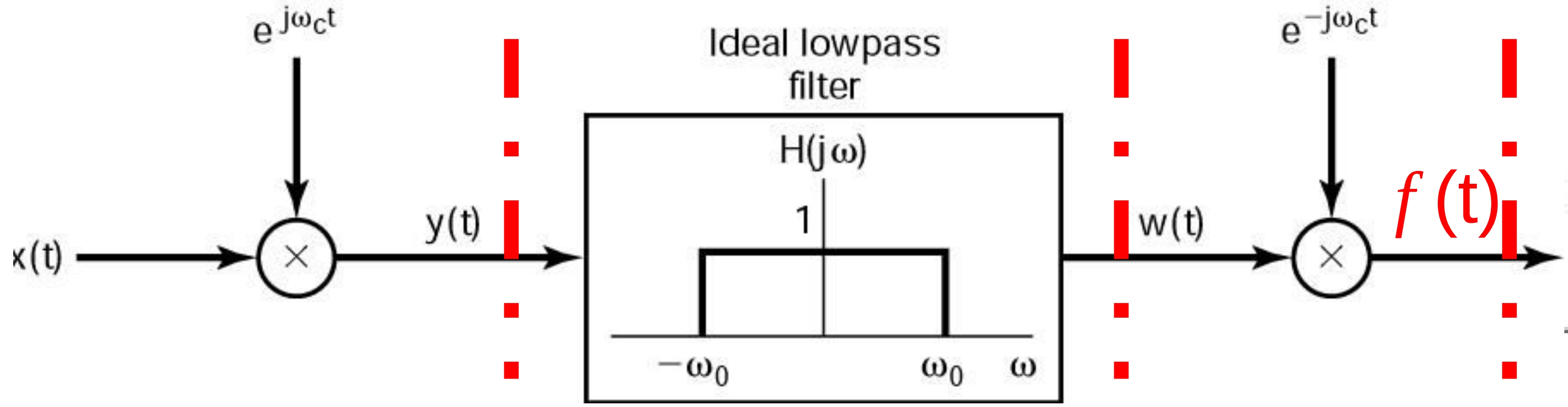
基本题4-10(a)

相乘性质/调制性质

具有可变中心频率的频率选择性滤波

应用4

调制信号为复指数信号

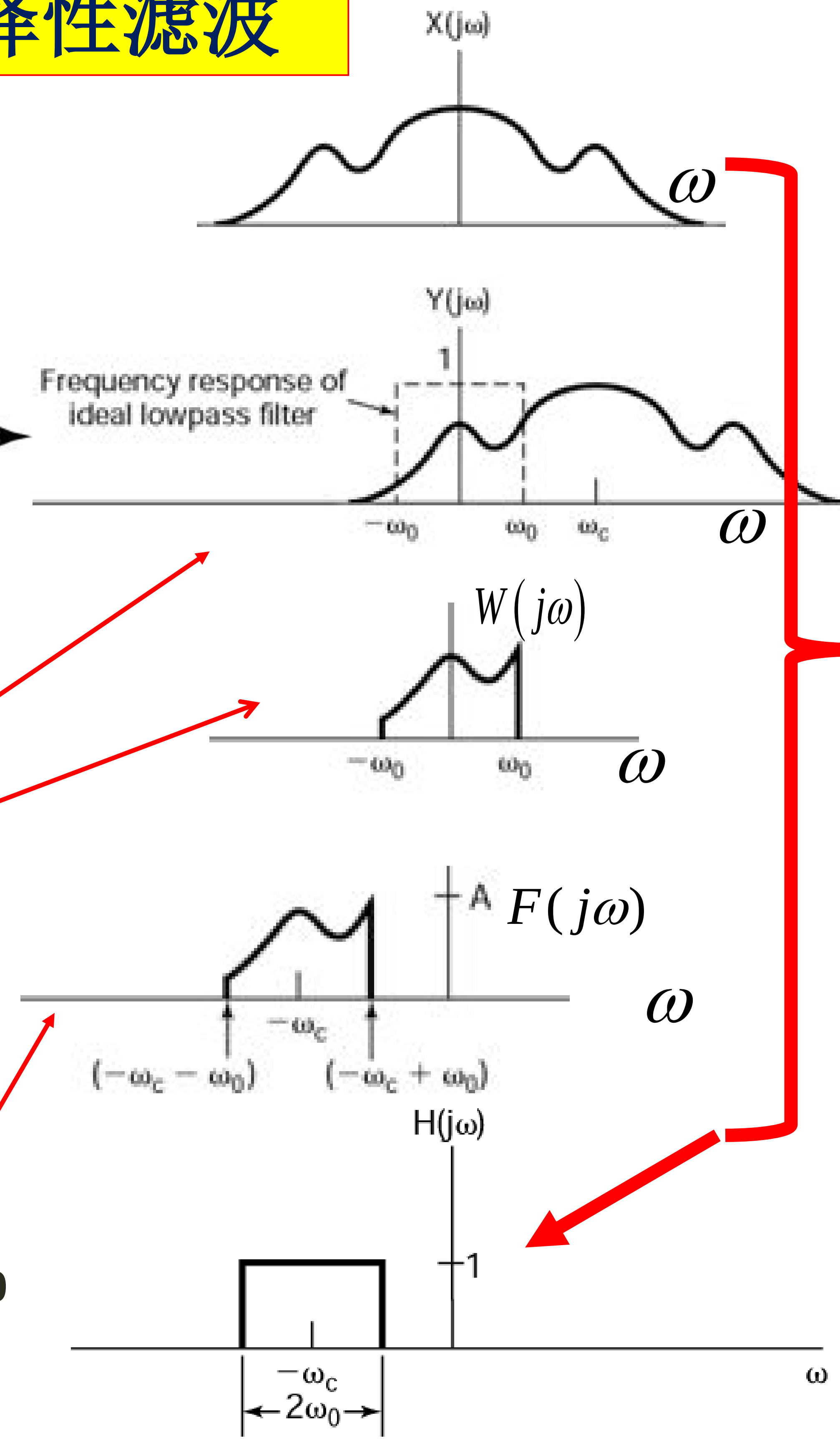


$$y(t)=e^{j\omega_c t}x(t)\xrightarrow{\text{频移性}}Y(j\omega)=X(j(\omega-\omega_c))$$

$$w(t)=h(t)*y(t)\longrightarrow W(j\omega)=H(j\omega)Y(j\omega)$$

$$f(t)=e^{-j\omega_c t}w(t)\longrightarrow F(j\omega)=W(j(\omega+\omega_c))$$

整个系统等效于一个中心频率为-ω_c，带宽为$2\omega_0$的理想带通滤波器。



由线性系数微分方程表征的系统

N阶线性常微分方程

Linear Constant-Coefficient Differential Equation

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

系统响应求解方法

第3章的复指数函数分析方法 $\begin{cases} x(t) = e^{j\omega t} \\ y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} \end{cases}$

傅里叶变换的微分性质

傅里叶微分性质求解法

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \longrightarrow h(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \xrightarrow{\text{两端各傅里叶变换}} \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$Y(j\omega)\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = X(j\omega)\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k \longleftarrow \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$\downarrow$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} \longrightarrow H(j\omega) \to h(t)$$

由线性系数微分方程表征的系统

例子

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

已知：一稳定**LTI**系统有下列方程表征

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad a > 0$$

求其单位冲击响应。

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \rightarrow h(t) = e^{-at}u(t)$$

由线性系数微分方程表征的系统

例子

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

已知：一稳定LTI系统有下列方程表征

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

(1)求其单位冲击响应。 (2)若输入为$e^{-t}u(t)$，求其输出表达式

(1) $$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{1/2}{j\omega + 1} + \frac{1/2}{j\omega + 3} \rightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

(2) $$x(t) = e^{-t}u(t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$= \left[\frac{1/2}{j\omega + 1} + \frac{1/2}{j\omega + 3}\right]\frac{1}{j\omega + 1}$$

$$= \frac{1/2}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{11}}{j\omega + 1} + \frac{A_{21}}{j\omega + 3}$$

$$A_{11} = -A_{21} = \frac{1}{4}$$

$$Y(j\omega) = \frac{1/2}{(j\omega + 1)^2} + \frac{1/4}{j\omega + 1} + \frac{-1/4}{j\omega + 3}$$

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)$$

由线性系数微分方程表征的系统

例子

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

考虑一个LTI系统，当输入 $x(t)=(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$ 响应为 $y(t)=(2e^{-t}-2e^{-4t})u(t)$

计算该系统的微分方程。

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}+\frac{1}{j\omega+3}=\frac{2j\omega+4}{(j\omega+1)(j\omega+3)}=\frac{2(j\omega+2)}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

$$Y(j\omega)=\frac{2}{j\omega+1}-\frac{2}{j\omega+4}=\frac{6}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{3(j\omega+3)}{(j\omega+2)(j\omega+4)} \longrightarrow h(t)=\frac{3}{2}\left(e^{-2t}+e^{-4t}\right)u(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{3(j\omega+3)}{j\omega^2+6j\omega+8}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

作业

4.6(b)

4.7(a)

4.9 (a)

4.19