第二讲　复变函数与解析函数

§5 复变函数

- 1. 复变函数的定义
- 2. 映射的概念
- 3. 反函数或逆映射

1. 复变函数的定义—与实变函数定义相类似

定义 设G是一个复数$z = x + iy$的非空集合,存在法则f,使得$\forall z \in G$,就有一个或几个$w = u + iv$与之对应,则称复变数w是复变数z的函数(简称复变函数)记作 $w = f(z)$.

若$z \to$一个w值,称$f(z)$是单值函数;

$z \to$多个w值,称$f(z)$是多值函数.

今后无特别声明,所讨 论的函数均为单值函数。

G — $f(z)$的定义集合，常常是平面区域（定义域）

$G^* = \{w \mid w = f(z), z \in G\}$ — 函数值集合

$\because \ z = x + iy \leftrightarrow (x, y);\ w = u + iv \leftrightarrow (u, v)$

$\therefore w = f(z) = f(x + iy)$

$= u(x, y) + iv(x, y)$

故 $u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$

$$\boxed{w = f(z) = u + iv \leftrightarrow u = u(x, y) \quad v = v(x, y)}$$

例 1 $w=z^2$ 令$z=x+iy$ $w=u+iv$

则 $w=(u+iv)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

$\therefore w=z^2 \leftrightarrow u=x^2-y^2 \quad v=2xy$

例 2若已知 $f(z)=x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)+iy\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

将 $f(z)$表示成 z 的函数.

设$z=x+iy$,则$x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

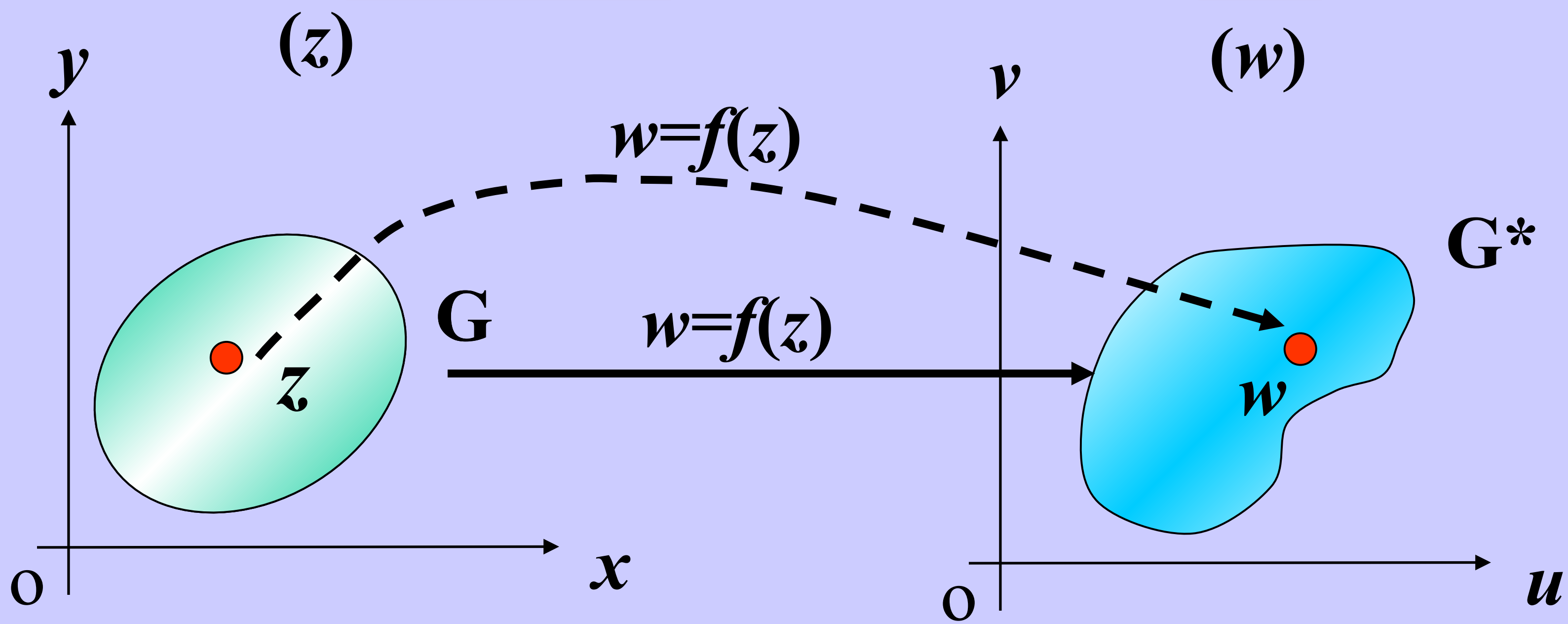
2. 映射的概念——复变函数的几何意义

在几何上， $w=f(z)$ 可以看作：

$z\in G$ (z平面) $\xrightarrow{w=f(z)}$ $w\in G^*$ (w平面) 的映射(变换).

定义域　　　　　　　　　　函数值集合

称w为z的象点(映象)，而z称为w的原象。



• 复变函数的几何意义是一个映射（变换）

- 在复变函数中用两个复平面上点集之间的对应关系来表达两对变量 u，v 与 x，y 之间的对应关系，以便在研究和理解复变函数问题时，可借助于几何直观．

- 以下不再区分函数与映射（变换）。

例 3 研究 $w=\bar{z}$ 所构成的映射.

解 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$

$\therefore \bar{z}=re^{-i\theta}$ —— 关于实轴对称的一个映射

见图 1-1~1-2

例 4 研究 $w=e^{i\alpha}z$（α 实常数）所构成的映射.

解 设 $z=re^{i\theta}$ $\quad\therefore w=e^{i\alpha}z=e^{i\alpha}re^{i\theta}=re^{i(\alpha+\theta)}$

$$w=u+iv=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x+iy)$$

$$=(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+i(x\sin\alpha+y\sin\alpha)$$ 即，

$$\begin{cases} u=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ v=x\sin\alpha+y\sin\alpha \end{cases}$$ —— 旋转变换（映射）见图 2

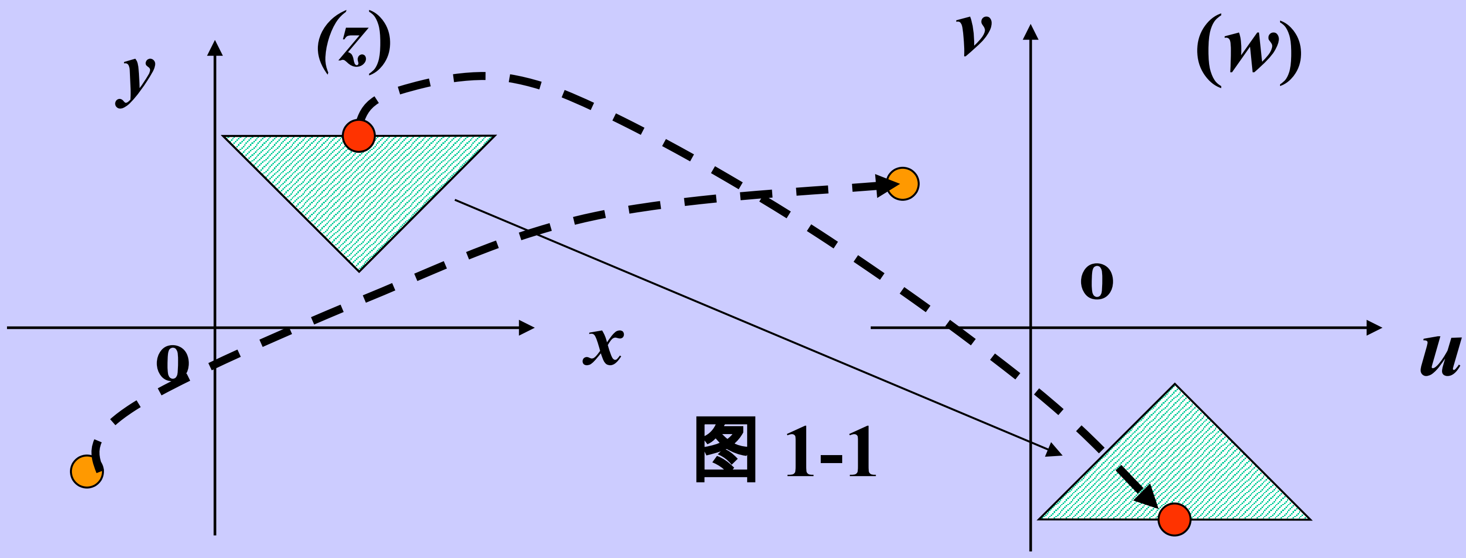


图 1-1

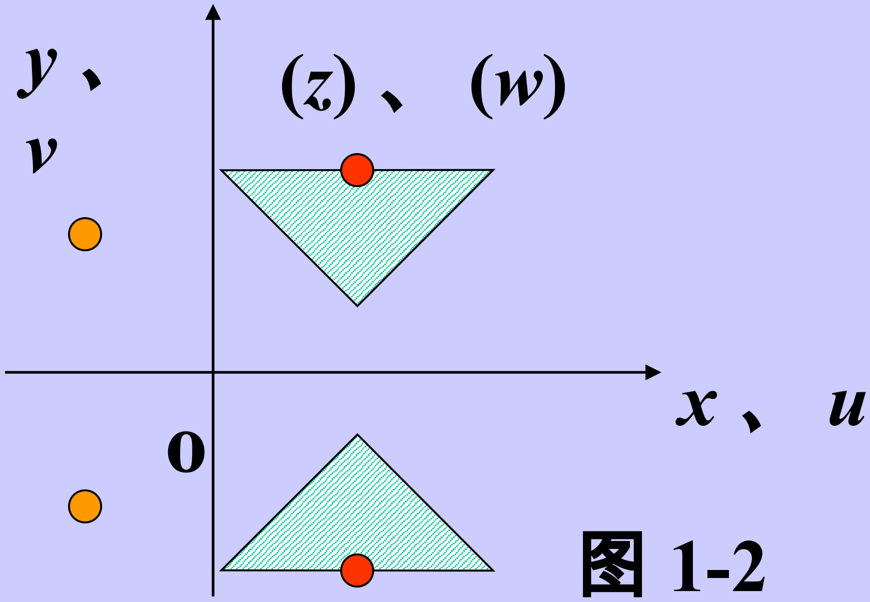


图 1-2

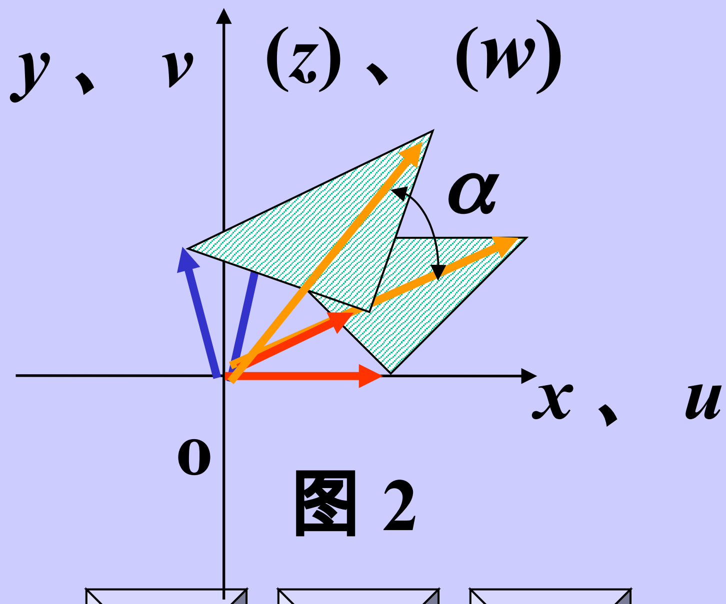
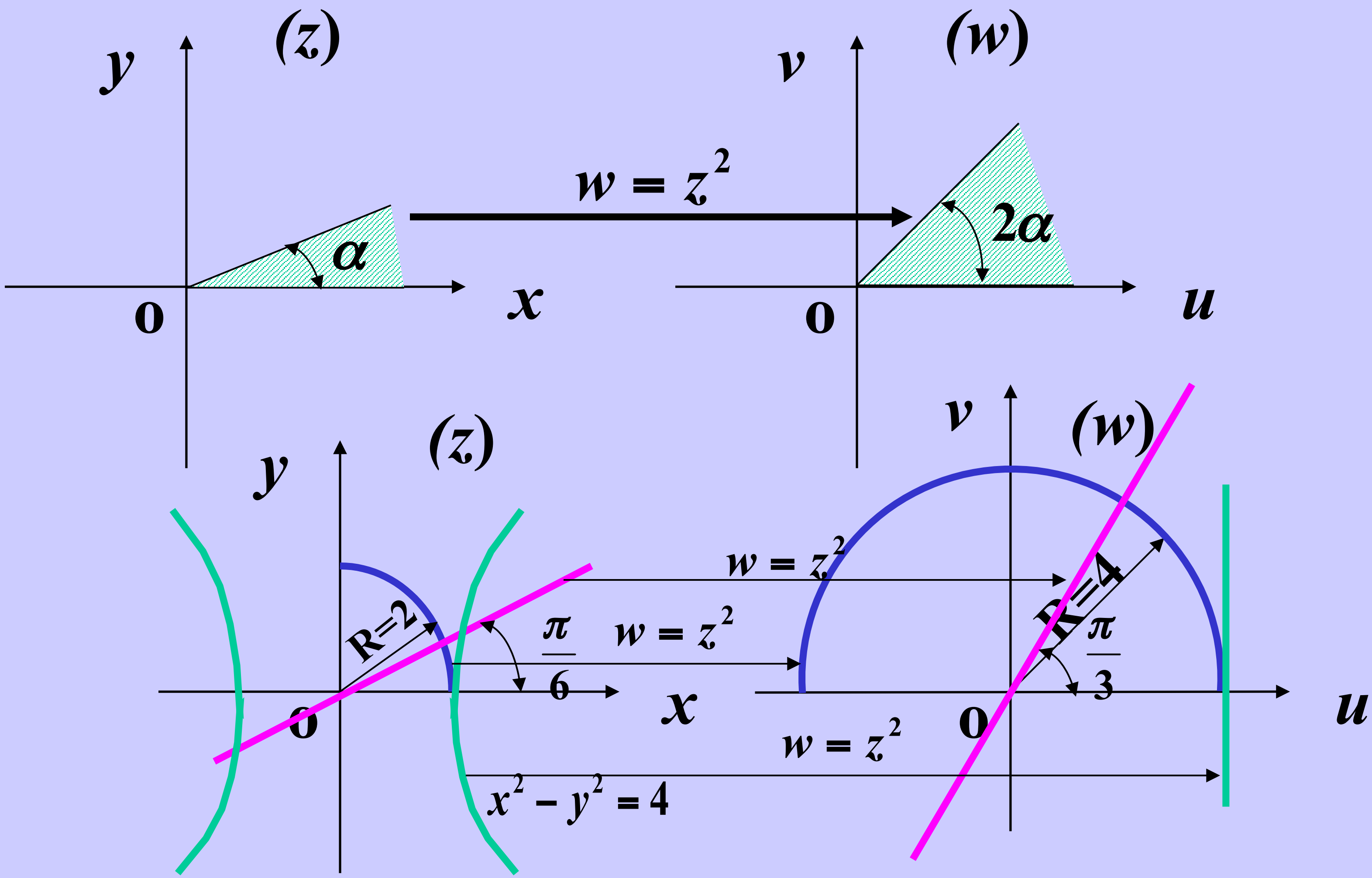


图 2

例 5 研究 $w=z^2$ 所构成的映射 .



3. 反函数或逆映射

例　设 $z=w^2$ 则称 $w=\sqrt{z}$ 为 $z=w^2$ 的反函数或逆映射

$$\because w=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{\frac{\theta+2k\pi}{2}}\ (k=0,1)\ \therefore \text{为多值函数},2\text{ 支}.$$

定义　设 $w=f(z)$ 的定义集合为 G, 函数值集合为 G^*

$$z\in G \xrightarrow{w=f(z)} w\in G^*$$

$$\text{一个(或几个)}z\in G \xleftarrow[z=\varphi(w)]{} w\in G^*$$

则称 $z=\varphi(w)$ 为 $w=f(z)$ 的反函数（逆映射）.

显然有　$w=f[\varphi(w)]\quad \forall w\in G^*$

当反函数单值时 $z=\varphi[f(z)]\quad \forall z\in G\quad (\text{一般} z\neq\varphi[f(z)])$

当函数(映射)$w=f(z)$和其反函数(逆映射) $z=\varphi(w)$都是单值的，则称函数(映射)$w=f(z)$是一一的。也称集合G与集合G^*是一一对应的。

例 已知映射 $w=z^3$，求区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 在平面 w 上的象。

例 已知映射 $w=\dfrac{1}{z}$,判断：z平面上的曲线 $x^2+y^2=1$被映射成 w平面上怎样的曲线？

§6 复变函数的极限与连续性

- 1. 函数的极限
- 2. 运算性质
- 3. 函数的连续性

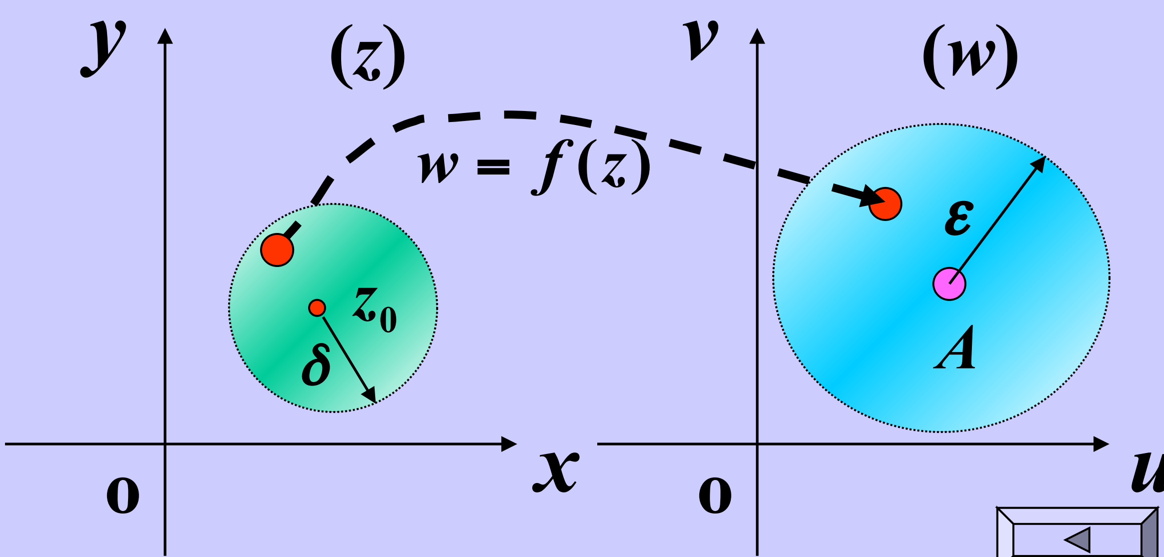
1. 函数的极限

定义 设 $w = f(z)$, $z \in U^{\circ}(z_0, \rho)$, 若存在数 A，$\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta(\varepsilon)$ $(0<\delta\leq\rho)$, 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$,

则称A为 $f(z)$当$z \to z_0$时的极限，记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$

或当$z \to z_0$时，$f(z) \to A$



几何意义：

当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小去心邻域时，它的象点 $f(z)$ 就落入 A 的一个预先给定的 ε 邻域中

(1) 意义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的．

与一元实变函数相比较要求更高．

(2) A 是复数．

(3) 若 f(z) 在 z_0 处有极限，其极限是唯一的．

2. 运算性质

复变函数极限与其实部和虚部极限的关系：

定理 1

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $z=x+iy$ $z_0=x_0+iy_0$

则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A=u_0+iv_0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0 \end{array}$$

定理 2

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$,则

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=\lim_{z\to z_0} f(z)\pm\lim_{z\to z_0} g(z)=A\pm B$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)\lim_{z\to z_0} g(z)=AB$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}\left(\lim_{z\to z_0} g(z)\neq 0\right)=\frac{A}{B}$$

以上定理用极限定义证！

例 1 证明$w = x^2 + y + i(x + y^2)$在平面上处处有极限.

$\because\ x^2 + y, x + y^2$在平面上处处有极限

例 2 求$f(z) = \bar{z}/z + z/\bar{z}$在$z \to 0$时的极限.

$$\because\ f(z) = \frac{2(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$在(0,0)处极限不存在.

例 3 证明 $f(z) = \operatorname{Re} z / |z|$在$z \to 0$时的极限不存在.

3. 函数的连续性

定义 若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称$f(z)$在$z_0$处连续；

若在区域D内处处连续，则称$f(z)$在D内连续；

若z、$z_0 \in C$，且 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称$f(z)$在曲线$C$上点$z_0$处连续.

定理 3 设$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$处连续

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0) \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0) \end{array}.$$

例 4　证明 $f(z)=\arg z$ 在原点及负实轴上不连续

证明：

(1) $\because\ f(z)=\arg z$ 在原点没有定义，

故不连续。

(2)在负实轴上

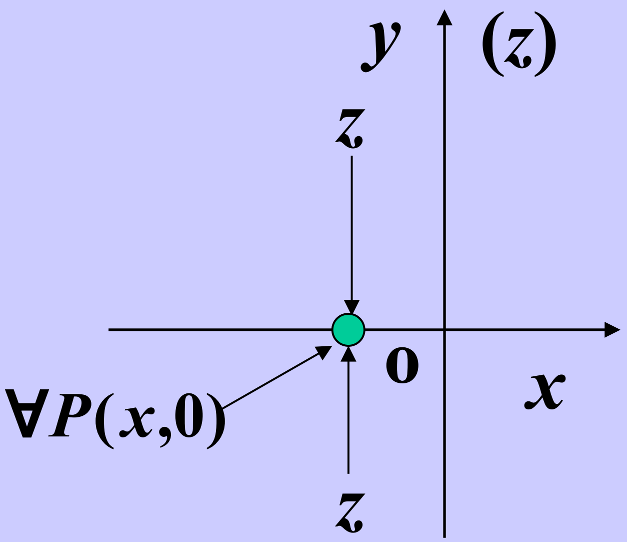
$\forall P(x,0)(x<0)$

$$\because \lim_{y\to 0^+}\arg z=\pi$$

$$\lim_{y\to 0^-}\arg z=-\pi$$

$\therefore \arg z$ 在负实轴

上不连续。



定理 4 连续函数的和、差、积、商（分母不为 0）仍为连续函数；

连续函数的复合函数仍为连续函数。

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 在整个复平面内是连续的；

$R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在复平面内除分母为0点外处处连续.

有界性：

设曲线C为闭曲线或端点包括在内的曲线段

若$f(z)$在C上连续 $\Rightarrow \exists M > 0$，在曲线上恒有$|f(z)| \le M$

第二章 解析函数

- 第一节 解析函数的概念
- 第二节 函数解析的充要条件
- 第三节 初等函数

§2.1 解析函数的概念

- 1. 复变函数的导数定义
- 2. 解析函数的概念

一．复变函数的导数

(1) 导数定义

定义 设函数 $w=f(z)$ $z\in D$，且 z_0、 $z_0+\Delta z\in D$ ，

如果极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，则称函数

$f(z)$ 在点 z_0 处可导。称此极限值为 $f(z)$ 在 z_0 的导数，

记作 $$f'(z_0)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

如果 $w=f(z)$ 在区域 D 内处处可导，则称 $f(z)$ 在区域 D 内可导。

- (1) $\Delta z\to 0$ 是在平面区域上以任意方式趋于零。
    - (2) $z=x+iy, \Delta z=\Delta x+i\Delta y$, $\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$

例 1 证明: $f(z)=\operatorname{Re} z$在平面上的任何点都不可导.

$$\text{证明}: \frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Re}(z+\Delta z)-\operatorname{Re}(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}\Delta z\text{取实数趋于}0\text{时}, \Delta f/\Delta z\to 1;\\ \text{当}\Delta z\text{取纯虚数趋于}0\text{时}, \Delta f/\Delta z\to 0;\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}\text{不存在}.$$

(2) 求导公式与法则

---- 实函数中求导法则的推广

① 常数的导数 $c'=(a+ib)'=0$.

② $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n 是自然数).

证明 对于复平面上任意一点 z_0 ，有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+z_0^{n-1})}{z-z_0}=nz_0^{n-1}$$

③ 设函数 $f(z), g(z)$ 均可导，则

$$[f(z)\pm g(z)]' = f'(z)\pm g'(z),$$

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, (g(z) \neq 0)$$

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 在整个复平面上处处可导；

$R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在复平面上（除分母为0点外）处处可导.

④ 复合函数的导数 $(f[g(z)])'=f'(w)g'(z)$ ，

其中 $w=g(z)$ 。

⑤ 反函数的导数 $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$ ，其中：$w=f(z)$

与 $z=\varphi(w)$ 互为单值的反函数，且 $\varphi'(w)\neq 0$ 。

思考题

实函数中, $f(x)=|x|^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导;

复函数中, $f(z)=|z|^2$ 的可导性？

例 2 已知 $f(z)=(z^2+5z)^2-\dfrac{1}{z-1}$，求$f'(z)$

解 $f'(z)=2(z^2+5z)(2z+5)+\dfrac{1}{(z-1)^2}$

例 3 问：函数$f(z)=x+2yi$ 是否可导？

解 $\because \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{x+\Delta x+2(y+\Delta y)i-(x+2yi)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\begin{cases}1 & \text{当}\Delta y=0,\Delta x\to 0\text{时}\\ 2 & \text{当}\Delta x=0,\Delta y\to 0\text{时}\end{cases}\therefore \text{不存在!}$$

故函数$f(z)=x+2yi$处处不可导.

例 4 证明 $f(z)=z\mathrm{Re}z$ 只在 $z=0$ 处才可导。

证明

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\mathrm{Re}\,z}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\,\mathrm{Re}(z+\Delta z)+z\,\mathrm{Re}\,\Delta z}{\Delta z}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta z\,\mathrm{Re}\,\Delta z}{\Delta z}=0 & z=0\text{时}\\ \lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\mathrm{Re}(z+\Delta z)+z\dfrac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}\right)\text{不存在！} & z\neq 0\text{时}\end{cases}$$

$$\because \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}0 & \text{当}\Delta y=0,\Delta x\to 0\text{时}\\ 1 & \text{当}\Delta x=0,\Delta y\to 0\text{时}\end{cases}\quad \therefore \text{不存在！}$$

(1) 复变函数在一点处可导，要比实函数在一点处可导要求高得多，也复杂得多，这是因为 $\Delta z \to 0$ 是在平面区域上以任意方式趋于零的原故。

(2) 在高等数学中要举出一个处处连续，

但处处不可导的例题是很困难的，

但在复变函数中，却轻而易举。

(3) 可导与连续

若 $w=f(z)$ 在点 z_0 处可导 $\underset{\overset{?}{\Longleftarrow}}{\Longrightarrow}$ $w=f(z)$ 点 z_0 处连续

证明：若$f(z)$在z_0可导，则$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,

使得当$0<|\Delta z|<\delta$，时，有$\left|\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon$,

令$\rho(\Delta z)=\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)$，则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$,

由此可得$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$,

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}f(z_0+\Delta z)=f(z_0)$，所以$f(z)$在$z_0$连续

二．解析函数的概念

定义 如果函数 $w=f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的某个邻域内处处

可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析；

如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析，则称

$f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的解析函数（全纯函数或正则函数）。

如果 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，就称 z_0 是 $f(z)$ 的奇点。

(1) $w=f(z)$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ 在 D 内可导。

(2) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导，未必在 z_0 解析。

例如

(1) $w=z^2$ 在整个复平面处处可导，故是整个复平面上的解析函数；

(2) $w=1/z$ ，除去 $z=0$ 点外，是整个复平面上的解析函数；

(3) $w=z\mathrm{Re}z$ 在整个复平面上处处不解析 (见例 4) 。

定理 1 设 $w=f(z)$ 及 $w=g(z)$ 是区域 D 内的解析函数

，

则 $f(z)\pm g(z)$ ，$f(z)g(z)$ 及 $f(z)/g(z)$ $(g(z)\neq 0$ 时)

均是 D 内的解析函数。

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$是整个复平面上的解析函数；

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$是复平面上(除分母为0点外)的解析函数.

定理 2 设 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析，$h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，$h=g(z)$ 的函数值集合 $\subset G$，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内处处解析。

作 业

P34　26,

　　　27

P66　3(2)(4)