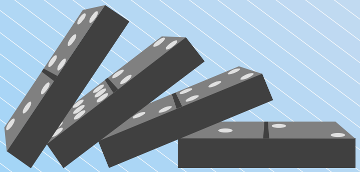
第一章　概率论的基本概念



返回主目录

§1 随机试验（ *E*xperiment ）

这里试验的含义十分广泛，它包括各种各样的科学试验，也包括对事物的某一特征的观察。其典型的例子有：

E_1 ：抛一枚硬币，观察正面 H（ Heads ）、反面 T（ Tails ）出现的情况。

E_2 ：将一枚硬币抛掷三次，观察正面、反面出现的情况。

E_3 ：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数.

E_4 ：抛一颗骰子，观察出现的点数。

返回主目录

E_5：记录寻呼台一昼夜接到的呼唤次数。

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

这些试验具有以下特点：

•可以在相同的条件下重复进行；

•每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

•进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

我们把满足以上三个特点的试验称为**随机试验**。

返回主目录

§2 样本空间、随机事件

目录索引

返回主目录

1 样本空间 (*S*pace)

定义 将**随机试验** E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S 。**样本空间的元素**，即 E 的每个结果，称为**样本点**。

S_1: { H, T }

S_2: { HHH, HHT, HTH, THH,
HTT, THT, TTH, TTT }

S_3: { 0, 1, 2, 3 }

S_4: { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

返回主目录

E_5 ：记录寻呼台一昼夜接到的呼唤次数。

E_6 ：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

E_7 ：记录某地一昼夜的最低温度和最高温度。

$S_5:\{0,1,2,3\ldots\ldots\}$

$S_6:\{\, t \mid t \quad 0 \,\}$

$S_7:\{\,(x, y) \mid T_0 \le x \le y \le T_1\}$

返回主目录

2、 随机事件

定义：

•随机事件：称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件；（可能发生，也可能不发生）

•基本事件：有一个样本点组成的单点集；

•必然事件：样本空间 S 本身；（必然发生）

•不可能事件：空集∅。（必然不发生）

我们称一个“随机事件发生”当且仅当它所包含的一个样本点在试验中出现．

返回主目录

例如：

S_2 中事件 $A=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$

表示“第一次出现的是正面”

$B=\{THH,THT,TTH,TTT\}$

表示“第一次出现的是反面”

S_6 中事件 $B_1=\{t|t<1000\}$

表示“灯泡是次品”

事件 $B_2=\{t|t\ \ 1000\}$

表示“灯泡是合格品”

事件 $B_3=\{t|t1500\}$

表示“灯泡是一级品”

返回主目录

3 、 事件间的关系与运算

1^0 包含关系 $A \subset B$ “A 发生必然导致 B 发生”

2^0 和事件 $A \cup B$ “A ，B 中至少有一发生”

3^0 积事件 $A \cap B = AB$ “A 与 B 同时发生”

4^0 差事件 $A - B$ “A 发生但 B 不发生 ”

5^0 互不相容 $A \cap B = \varnothing$ “A 与 B 不能同时发生”

6^0 对立（互逆）事件 $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = S$

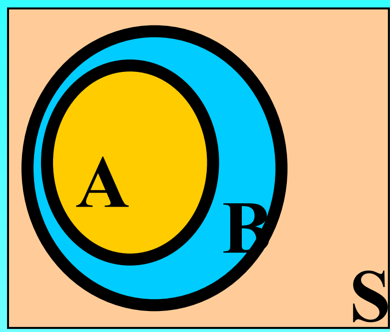
记 $A = \overline{B}$ 或 $B = \overline{A}$

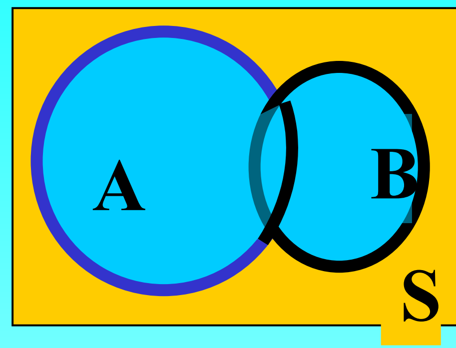
返回主目录

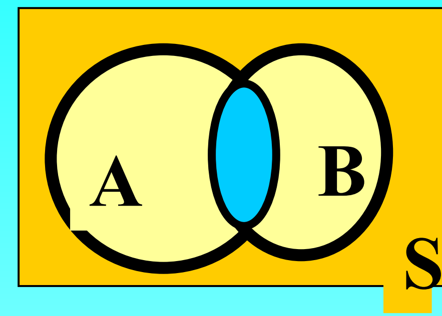
第一章 概率论的基本概念

1^0 包含关系 $A \subset B$

2^0 和事件 $A \cup B$







3^0 积事件 $A \cap B$

S_2 中事件

A={HHH,HHT,HTH,HTT},B={HHH,TTT}

$$A \cup B = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\}$$

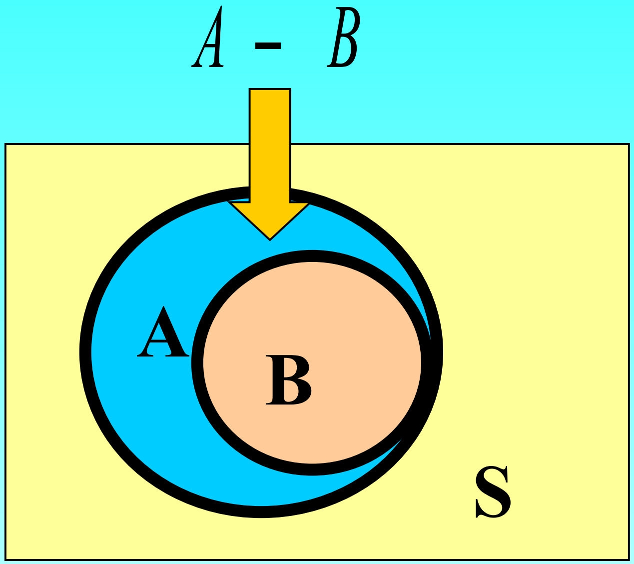
$$A \cap B = \{HHH\},$$

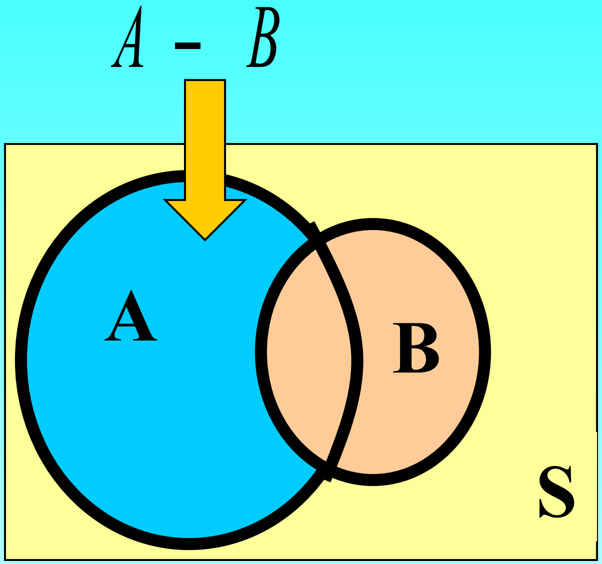
$$A - B = \{HHT, HTH, HTT\}$$

$$\overline{A} = \{THH, THT, TTH, TTT\}$$

返回主目录

4^0 差事件 $A-B$

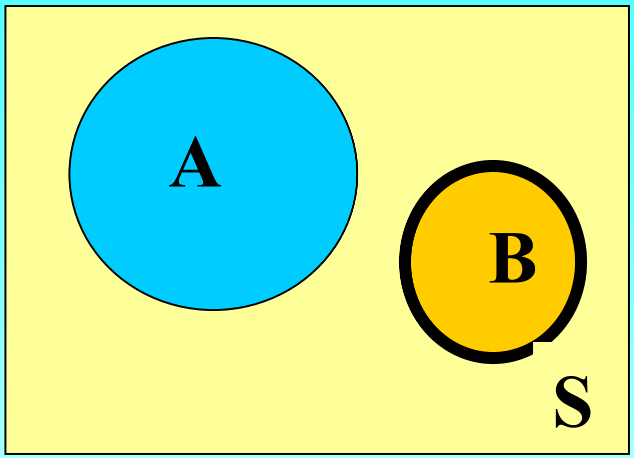




返回主目录

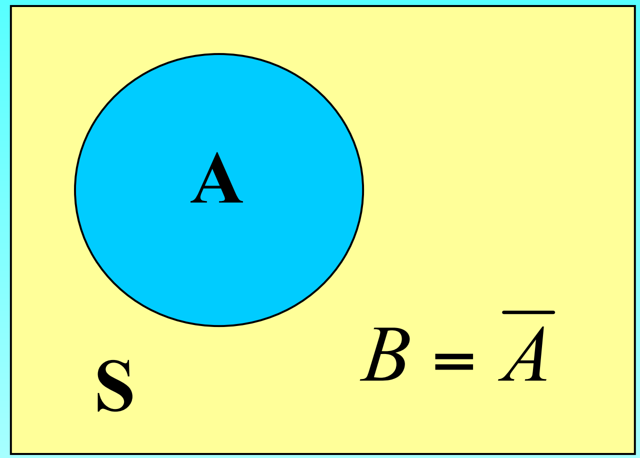
5^0 互不相容

$$A \cap B = \varnothing$$



6^0 对立事件 $A \cap B = \varnothing$

$$A \cup B = S$$



随机事件的运算规律

幂等律： $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

交换律： $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

结合律：
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

分配律：
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

De Morgan 定律： $\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}$

特别： $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

返回主目录

注意：1、对立事件必为互不相容事件，反之不一定。

2、一个试验的基本事件是两两互不相容的事件，它们的和事件是必然事件。

3. $A-B=A\overline{B}=A-AB,$

4. 若A与B互不相容，则$A\cup B$记为$A+B.$

5. $A\cup\overline{A}=S,\ A\cap\overline{A}=\Phi.$

返回主目录

事件间的关系与运算举例；

例 1

“A ，B ，C 中至少有一发生”：$A\cup B\cup C$

“A ，B ，C 中至少有两发生”：$AB\cup BC\cup AC$

“A ，B ，C 中最多有一发生”：

$$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\overline{AB\cup BC\cup AC}$$

例 2

若A表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件$\overline{A}$为

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”；

(B)“甲、乙两种产品均畅销”；

(C)“甲种产品滞销”；

(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”．

答：应选（ D ）

§3 频率与概率

目录索引

返回主目录

P&S

一、频 率

1） 频率的定义和性质

定义 在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数。比值 n_A / n 称为事件 A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$ 。

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

返回主目录

它具有下述性质：

1° $0 \le f_n(A) \le 1$ ；

2° $f_n(S) = 1$;

3° 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$是两两互不相容事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

返回主目录

2 ）频率的稳定性

$n=500$ 时

n_A	251	249	256	253	251	246	244
$f_n(A)$	0.502	0.498	0.512	0.506	0.502	0.492	0.488
	0.002	-0.002	0.012	0.006	0.002	-0.008	-0.012

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德•摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5096
K • 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K • 皮尔逊	24000	12012	0.5005

返回主目录

事件发生
的频繁程度

事件发生
的可能性的大小

频 率 → 稳 定 值 → 概率

频率的性质 → 概率的公理化定义

返回主目录

二、 概率的（公理化）定义

1、定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为$P(A)$，称为事件 A 的概率，要求集合函数$P(\cdot)$ 满足下列条件：

1^0 $0 \le P(A)$；（非负性）

2^0 $P(S)=1$；（正则性或正规性）

3^0 若$A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots.$$

（可列可加性）

返回主目录

P&S

2、概率的性质与推广

性质 1 $P(\varnothing)=0$;

证：令 $A_n=\Phi$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\Phi, A_iA_j=\Phi,$

$$P(\Phi)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$
$$=P(\Phi)+P(\Phi)+\cdots+P(\Phi)+\cdots$$
$$=0$$

性质 2 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n) \qquad （有限可加性）$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

返回主目录

性质 3 $A \subset B \Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$ （包含可减性）

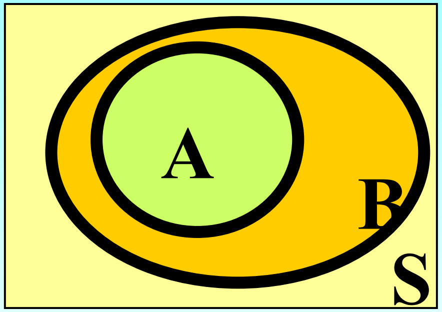
$P(B) \quad P(A)$ （非降性）

证： $P(B) = P[(B-A)+A] = P(B-A)+P(A)$

$\therefore \quad P(B-A) = P(B) - P(A)$

$\because \quad P(B-A) = P(B) - P(A) \quad 0$

$\therefore \quad P(B) \quad P(A)$



返回主目录

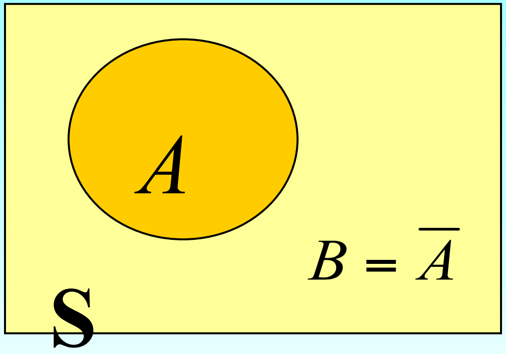
性质 4 $P(A) \le 1$; $(\because \quad P(A) \le P(S) = 1)$

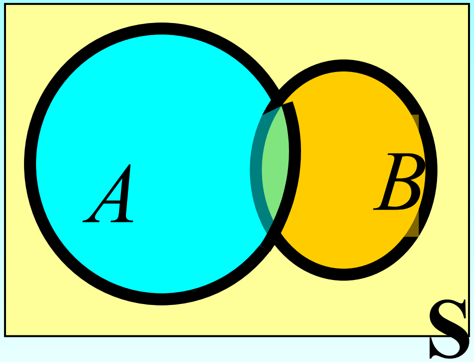
性质 5 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; （逆事件的概率公式）

$(\because \quad P(A) + P(\overline{A}) = P(S) = 1)$

性质 6 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。

（加法公式） $(\because \ A \cup B = A + (B - AB))$





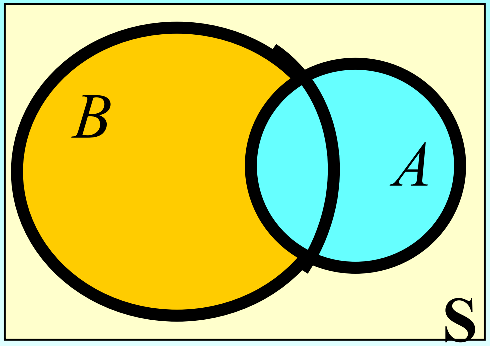
返回主目录

重 要 推 广

1) $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

（加法公式）

2) $$P(B\overline{A}) = P(B - A) = P(B) - P(AB)$$



$$\because \quad B = BA + B\overline{A},$$

$$\therefore \quad P(B) = P(BA) + P(B\overline{A})$$

返回主目录

加法公式的推广

对任意 n 个事件 $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$- \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i A_j A_k)$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

返回主目录

例 1 已知 A、B、C 是三个事件，且 $P(AB)=0$,

$$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}, P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},$$

求 A、B、C 全不发生的概率。

解 $$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)$$
$$+P(ABC)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{8}+0=\frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

返回主目录

例 2 已知 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$， $P(A)=p$,

则 $P(B)=?$

解

$$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

$$P(B)=1-P(A)=1-p\,.$$

例 3 已知 $P(A)=a, P(B)=b, P(A\cup B)=c$,

则 $P(A\overline{B})=?$

答： $P(A\overline{B})=c-b$

例 3 已知 $P(A)=a, P(B)=b, P(A\cup B)=c,$
则 $P(A\overline{B})=?$

解

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=a+b-c.$$

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$$

$$=a-a-b+c=c-b.$$

返回主目录

例 4 已知 A 、 B 是两个事件，且

$P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3,$ 则 $P(\overline{AB})=?$

解 $P(\overline{AB})=1-P(AB)$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

$$P(\overline{AB})=1-P(A)+P(A-B)$$

$$=1-0.7+0.3=0.6$$

例 5 已知 A 、 B 是两个事件，且

$P(A)+P(B)=0.9\,,\,P(AB)=0,2.$ 则

$P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=?$

解 $P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})$

$=P(B)-P(AB)+P(A)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-2P(AB)$

$=0.9-2\times 0.2=0.5$

p_{24} 1 (2)(4) , 2, 4.