北京科技大学
University of Science and Technology Beijing

离散数学

Discrete Mathematics

主讲教师

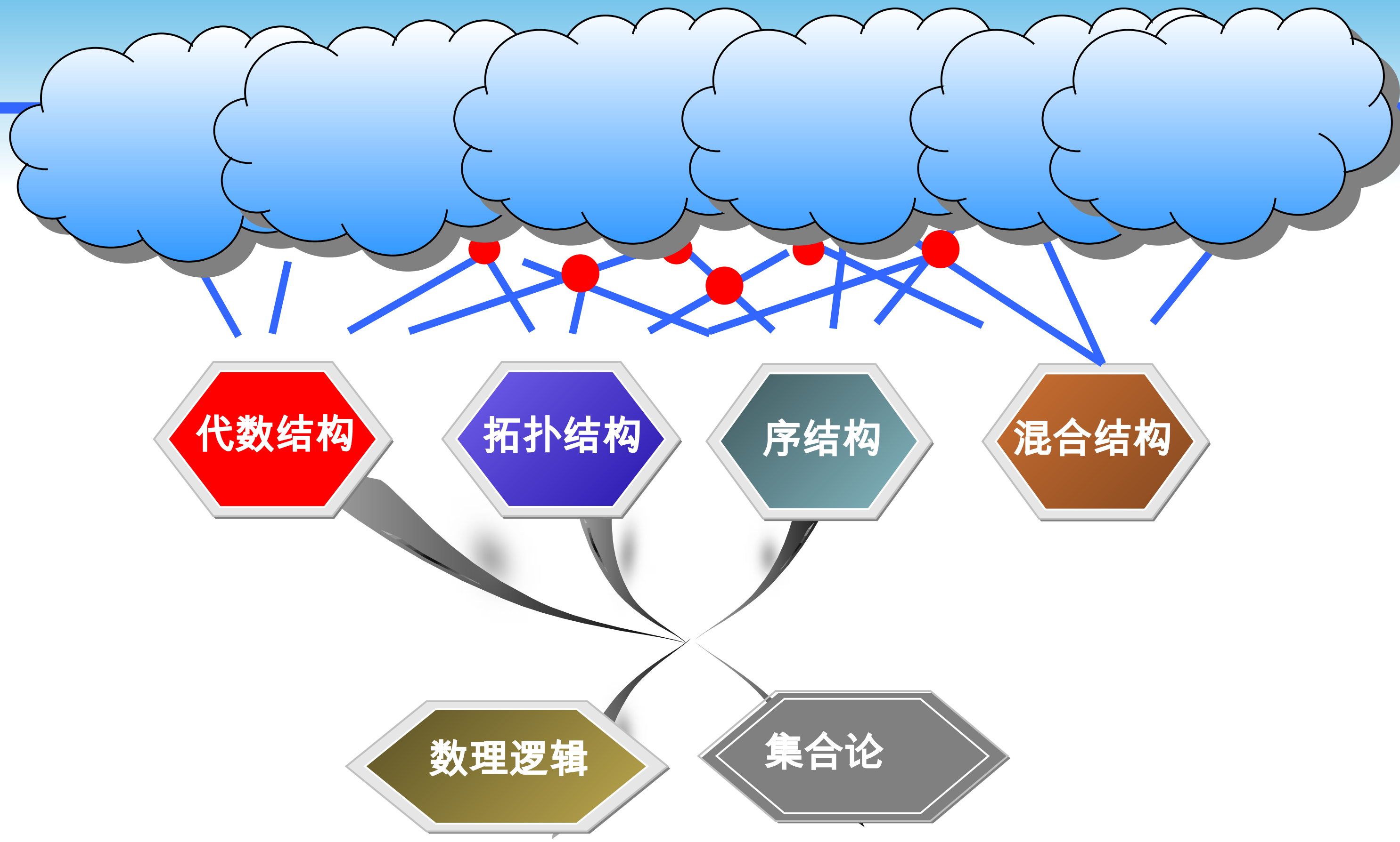
- 罗熊
  - 电话： 62332931
  - 邮箱： robertxiongluo@gmail.com
  - 办公地点：信息机电楼 728 室

课程简介

- 现代数学重要分支
- 以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标。
- 信息类学科基础理论的核心课程。
- 是数据结构、操作系统、编译技术、人工智能、数据库、算法设计与分析等课程必不可少的先行课程。
- 培养缜密思维，提高综合素质。

主要内容

- 数理逻辑
  - 命题逻辑、一阶谓词逻辑
- 集合论
  - 集合及其运算、二元关系与函数
- 代数结构
  - 代数系统的基本概念、群、环、域、格与布尔代数
- 图论
  - 图的基本概念、欧拉图与哈密顿图、树、平面图



- 数理逻辑和集合论作为两块基石奠定了离散数学乃至整个数学理论的基础，在上面生长着代数结构、序结构、拓扑结构和混合结构，这四大结构涵盖与生长出许多数学分支，同时各分支间交叉融合，又形成了许多新的数学分支，形成了庞大的数学体系。

教材介绍

- 教材名称：离散数学
- 编著者：杨炳儒，谢永红，刘宏岚，洪源，罗熊．
- 高等教育出版社
- 教材特色：
  - 本教材以认知结构教学论（亦称 KM 教学论）基本内涵为贯穿，即“双图融合”的教学机制；“教学回路”的教学模式；“立体结构”的教学内容；“三段论式”的教学方法。
  - 具有全新的模式与体例，其演绎铺展的路径如下：
    - 全书概述 --- 篇引论（树形类化图） ----- 章粗概图 ----- 章应用概图 ----- 按节展开（核心知识点；嵌入思维形式注记图；每节小结） ----- 章习题类化（常见题典型解析） ----- 章知识逻辑结构图 ----- 扩展阅读 ------ 习题 ------ 篇知识逻辑结构图。

参考资源

- 屈婉玲，耿素云．离散数学．高等教育出版社
- 左孝陵，刘永才．离散数学．上海科学技术文献出版社
- 中国高校计算机课程网离散数学课程讨论 http://computer.cncourse.com/computer/html/lssx/ds_index.html

成绩评定

- 平时成绩（ 30% ）+ 考试成绩（ 70% ）
- 平时成绩组成：
  - 上课出勤
  - 作业

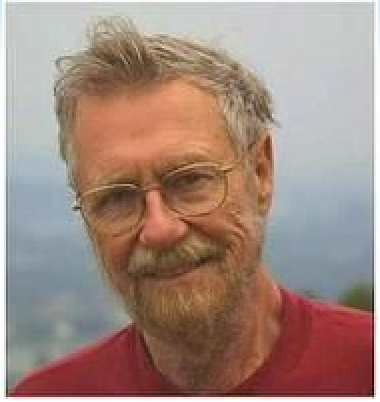
第一篇 数理逻辑

Mathematical Logic

什么是数理逻辑

- 数理逻辑是用数学方法来研究推理规律的数学学科。
  - 主要研究内容：推理
    - 着重于推理过程是否正确
    - 着重于语句之间的关系
  - 主要研究方法：数学的方法
    - 引进一套符号体系的方法。
  - 所以数理逻辑又称符号逻辑。
- 与计算机科学的联系
  - 计算机及计算机科学与数理逻辑有着十分密切的关系。人们说数字电子计算机是数理逻辑与电子学结合的产物。

Dijkstra 算法及其它



- Dijkstra(迪杰斯特拉)算法（最短路径算法）

  有向图中任意两个顶点之间的最短路径问题。

  1972 图灵奖（ http://baike.baidu.com/view/358075.htm ）

- Dijkstra 的话

  “我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了，我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多错误，不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道。要是我能年轻 20 岁的话我要回去学逻辑。”

  程序＝算法＋数据； 算法＝逻辑＋控制

数理逻辑的知识体系

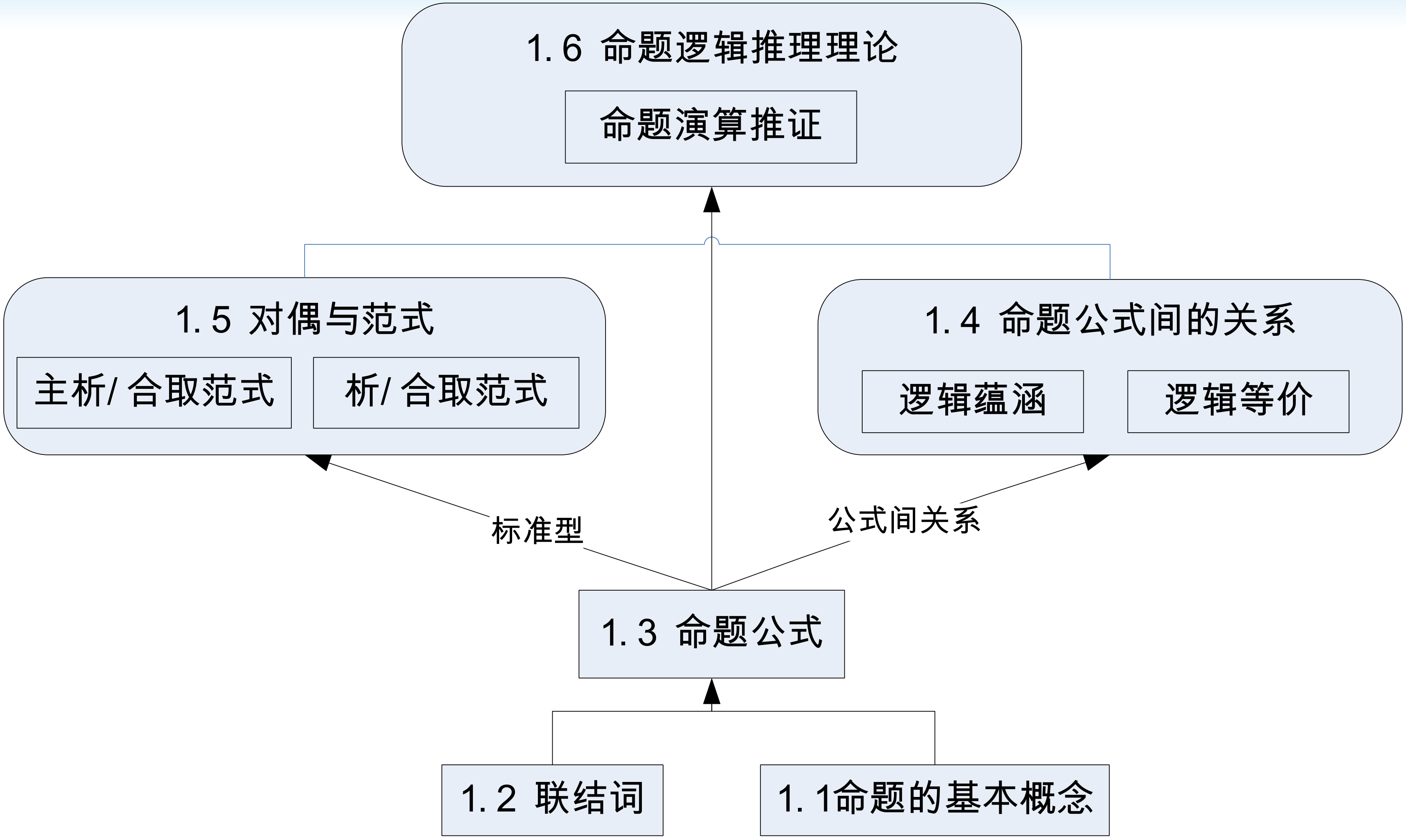
- 数理逻辑
  - 第1章 命题逻辑
    - 命题逻辑基本概念
    - 命题公式
    - 命题公式标准型（范式）
    - 命题公式间的关系
      - 基本逻辑等价式
      - 基本逻辑蕴含式
    - 命题推理理论
  - 第2章 谓词逻辑
    - 谓词逻辑基本概念
    - 谓词公式
    - 谓词公式标准型（前束范式）
    - 谓词公式间的关系
      - 基本逻辑等价式
      - 基本逻辑蕴含式
    - 谓词推理理论

第一章命题逻辑

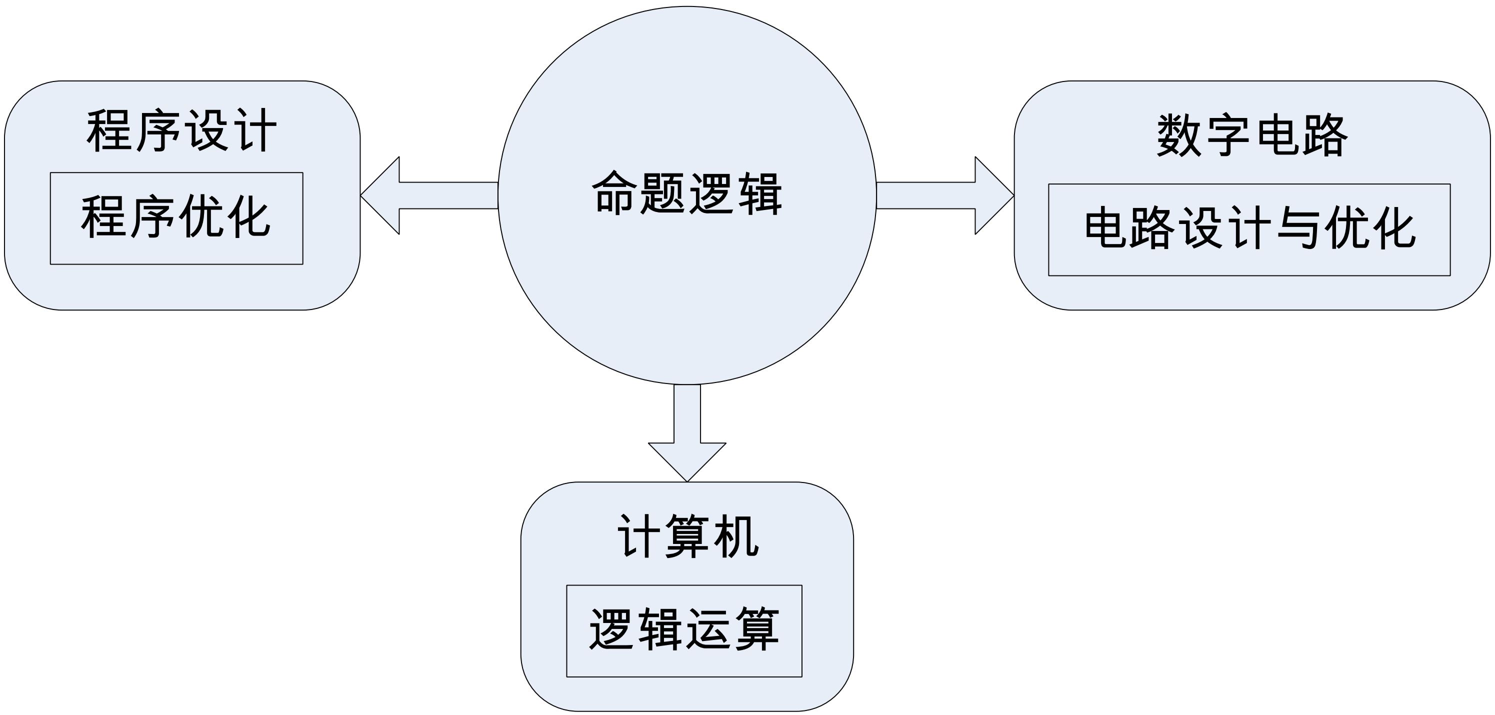
引言

- 逻辑主要研究推理过程，而推理过程必须依靠命题来表述。
- 在命题逻辑中，“命题”被看作最小单位。
- 命题逻辑是数理逻辑中最基本、最简单的部分。

命题逻辑部分知识逻辑概图



命题逻辑在计算机科学技术相关领域的应用概图



1.1. 命题的基本概念

命题：具有真假意义的陈述句。

1.1.1 命题

- 什么是命题
  - 推理是数理逻辑研究的中心问题，推理的前提和结论都是表达判断的陈述句，因而表达判断的陈述句构成了推理的基本单位，称具有真假意义的陈述句为命题。
- 真值
  - 命题总是具有一个确定真或假的“值”，称为真值。
  - 真值只有“真”和“假”两种，分别记为 True（真）和 False（假），用 1 和 0 表示。
  - 真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。
- 判断给定的句子是否为命题的基本步骤
  - 首先应是陈述句；
  - 其次要有唯一的真值。

1.1.1 命题

- 1）该吃早饭了！

  祈使句，不是命题。

- 2）多漂亮的花呀！

  感叹句，不是命题。

- 3）明天你有什么安排吗？

  疑问句，不是命题。

- 4）我正在说谎。

  不是命题。因为无法判定其真假值，若假设它为假即我正在说谎，则意味着它的反为真，即我正在说实话，二者相矛盾；若假定它为真即我正在说实话，则意味着它的反为假，我正在说谎，二者也相矛盾。这其实是一个语义上的悖论。悖论不是命题。

1.1.1 命题

- 5）x-y ＞ 2。

  不是命题。因为 x, y 的值不确定，某些 x, y 使 x−y ＞ 2 为真，某些 x, y 使 x−y ＞ 2 为假，即 x−y ＞ 2 的真假随 x, y 的值的变化而变化。因此 x−y ＞ 2 的真假无法确定，所以 x−y ＞ 2 不是命题。

- 6）不在同一直线上的三点确定一个平面。

  是命题。

- 7）郑州是河南省的省会。

  是命题。

- 8）下一个星期天会下雪。

  是命题。因为它的真值虽然目前无法确定，但它是有唯一真值的。

1.1.1 命题

- 9 ）这碗汤味太淡了。

  是命题。它的真假似乎不能唯一的判定，因为它因人而异，但这个语句的真假取决于说话人的主观判断（即可以认为此语句是“我认为这碗汤味太淡了”的缩写）。

- 10 ） 1011+1000=10011 。

  是命题，虽然当它表示的数是十进制数或其他非二进制数时此语句是假的，当它表示的数为二进制数时，此命题是真的。但是，这个语句毕竟是处于一系列语句中的一个特定位置上，由前后文关系，立即可以确定它所表示的数是二进制数还是非二进制数，并且一个数不可能既是二进制数，又是其他非二进制数。故此语句是能分辨真假的。

1.1.2 命题的分类

- 命题可以分为两种类型：
  - 一种命题是不能再分解为更简单命题的，称作原子命题，又可称为简单命题；
  - 另一种命题是通过联结词、标点符号将原子命题联结而成，称作复合命题。例如：
    - 1）玫瑰是红的并且紫罗兰是蓝的。
    - 2）如果明天是个好天气，我们就去野炊。
- 复合命题的基本性质是：其真值可以由其原子命题的真值以及它们复合成该复合命题的联结方式确定。

1.1.3 命题标识符

❖ 命题标识符

- 为了能用数学的方法来研究命题之间的逻辑关系和推理，需要将命题符号化。
- 通常使用大写字母 P, Q, … 或用带下标的大写字母或用数字，如 A_i ，[12] 等表示命题。
  - 例如：　　P ：今天下雨
  - 意味着 P 表示“今天下雨”这个命题的名。
  - 也可用数字表示此命题
  - 例如：　　[12] ：今天下雨
- 表示命题的符号称为命题标识符，P 和 [12] 就是命题标识符。

1.1.3 命题标识符

- 命题常元
  - 一个命题标识符如果表示确定的简单命题，就称为命题常元。
- 命题变元
  - 如果一个命题标识符只表示任意简单命题的位置标志，就称它为命题变元。
  - 因为命题变元可以表示任意简单命题，所以它不能确定真值，故命题变元不是命题。
- 指派
  - 当命题变元 P 用一个特定的简单命题取代时， P 才能确定真值，这时也称对 P 进行指派。

小结

- 只有陈述句才有可能是命题，但并不是所有的陈述句都能成为命题。
- 本小节的思维形式注记图：

命题
- 特征
  - 陈述句
  - 真(1)或假(0)
- 分类
  - 原子命题
  - 复合命题(联结词，标点，简单命题)
- 命题标识符：大写字母，大写字母加下标，数字

1.2 联 结 词

联结词：确定复合命题的逻辑形式。

- 原子命题和联结词可以组合成复合命题。
- 联结词确定复合命题的逻辑形式，它来源于自然语言中的联结词，但与自然语言中的联结词有一定的差别；
- 从本质上讲，这里讨论的联结词只注重“真值”，而不顾及具体内容，故亦称“真值联结词”。

1.2.1 否定联结词

- 定义 1.1　设 P 为任一命题，复合命题“非 P”（或“ P 的否定”）称为 P 的否定式，记作¬ P ，读作“非 P”。¬称为否定联结词。
- ¬ P 的逻辑关系为 P 不成立，¬ P 为真当且仅当 P 为假。
- 命题 P 的真值与其否定¬ P 的真值之间的关系

P	¬ P
0	1
1	0

1.2.1 否定联结词

例 1.2 设 P ：这是一个三角形

$\neg P$ ：这不是一个三角形

例 1.3 设 P ：雪是白色的

$\neg P$ ：雪不是白色的

在此例中，不能将$\neg P$ 认为是命题“雪是黑色的”。因为雪不是白色的情况中有蓝色、红色等许多种可能。

- 在日常语言中，还可以用“非”、“不”、“没有”、“无”、“并不”等多种方式表示否定。

1.2.2 合取联结词

- 定义 1.2　设 P,Q 为任意二命题，复合命题“P 并且 Q”（或“P 与 Q”）称为 P 和 Q 的合取式，记作 $P \wedge Q$ ，读作“P 与 Q”，∧称为合取联结词。
- $P \wedge Q$ 的逻辑关系为 P 与 Q 同时成立。 $P \wedge Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真。
- 命题 $P \wedge Q$ 的真值与命题 P 和命题 Q 的真值之间的关系如表所示。

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.2.2 合取联结词

- 在自然语言中，还可用“并且”、“同时”、“以及”、“既……又……”、“不但……而且……”、“虽然……但是……”等多种方式表达合取。

例 1.4 设 P ：今天打雷

Q ：今天下雨

则 $P \wedge Q$ ：今天打雷且下雨

例 1.5 设 P ：小李在看书

Q ：小李在听音乐

则 $P \wedge Q$ ：小李一边在看书，一边在听音乐

1.2.3 析取联结词

- 定义 1.3　设 P,Q 为任意二命题，复合命题“P 或 Q”称为 P 和 Q 的析取式。记作 P∨Q ，读作“P 或 Q”，∨称为析取联结词。
- P∨Q 的逻辑关系为 P 与 Q 中至少一个成立。P∨Q 为真当且仅当 P 与 Q 中至少一个为真。
- 命题 P∨Q 的真值与命题 P 和命题 Q 的真值之间的关系如表所示。

P	Q	P ∨ Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1.2.3 析取联结词

- 联结词∨是可兼或，因为当命题 P 和 Q 的真值都为真时，其值也为真。但自然语言中的“或”既可以是“排斥或”也可以是“可兼或”。

例 1.6 晚上我们去教室学习或去电影院看电影。（排斥或）

例 1.7 他可能数学考了 100 分或英语考了 100 分。（可兼或）

例 1.8 刘静今天跑了 200 米或 300 米远。（既不表示“可兼或”也不表示“排斥或”，它只是表示刘静所跑的大概路程，因此它不是命题联结词，故例 1.8 是原子命题。）

1.2.3 析取联结词

- 由以上例子可以看出联结词“∨”和自然语言中的“或”的意义不完全相同。
- 与“∧”联结词相似，在自然语言中，通常是具有某种关系的两条语句之间使用析取“或”，但在数理逻辑中，任何两个命题都可以通过用析取“∨”联结起来得到一个新命题。

例 1.9 设 P ：今天打雷

Q ：今天打闪

则 $P \vee Q$ ：今天打雷或今天打闪

例 1.10 设 P ：今天是星期一

Q ：今天天气很好

则 $P \vee Q$ ：今天是星期一或天气很好

1.2.4 蕴涵联结词

- 定义 1.4　设 P,Q 为任意二命题，复合命题"如果 P ，则 Q" 称为 P 和 Q 的蕴涵式，记为 $P \rightarrow Q$ ，读作"如果 P 则 Q"。 →称为蕴涵联结词。称 P 为前件， Q 为后件。
- $P \rightarrow Q$ 的逻辑关系为 Q 是 P 的必要条件。 $P \rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 为真 Q 为假。
- 命题 $P\rightarrow Q$ 的真值与命题 P 和命题 Q 的真值之间的关系如表所示。

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1.2.4 蕴涵联结词

- 说明：
  - 1）蕴涵联结词也称为条件联结词。“如果 P，则 Q” 也称为 P 与 Q 的条件式。
  - 2）蕴涵式的真值关系不太符合自然语言中的习惯，这一点请读者务必注意。
  - 3）给定命题公式 $P\rightarrow Q$，命题公式 $Q\rightarrow P$ 称为 $P\rightarrow Q$ 的逆换式；$\neg P\rightarrow\neg Q$ 称为 $P\rightarrow Q$ 的反换式；$\neg Q\rightarrow\neg P$ 称为它的逆反式。逆换式类似于中学数学里所学的命题的逆命题；反换式类似于否命题；逆反式类似于逆否命题。

1.2.4 蕴涵联结词

例 1.11　甲对乙说："如果今晚我们班上不开会，则我就和你一起去玩。"请问：在什么情形下，乙认为甲的这句话是假？

解：如果班上没有开会，甲与乙一起去玩，则自然认为甲说的话为真；

如果班上开会了，甲没有与乙一起去玩，则没有理由认为甲的话为假；

如果班上没开会，甲没有与乙一起去玩，则显然认为甲的话为假；

如果班上开会了，但甲未参加而与乙一起去玩了，则也不能认为甲的话为假。

- 在自然语言中，对于"如果……则……"这样的语句，当前提为假时，结论不管真假，这个语句的意义是无法判断的。因此在条件命题中，当前提为假时无论结论真值如何，其取值都为真的情况称为"善意的推定"。

1.2.4 蕴涵联结词

例 1.12 设 P：明天天气晴朗

Q：我们就去郊游

则 $P \to Q$：如果明天天气晴朗，我们就去郊游。

例 1.13 设 P：$x > 4$

Q：$x^2 > 16$

则 $P \to Q$：如果 $x > 4$，则 $x^2 > 16$。

- 对于"如果 P 则 Q"在日常语言中有多种表达方式，诸如"只要 P 就 Q"、"当 P 则 Q"、"因为 P 所以 Q"、" P 仅当 Q"、"只有 Q 才 P"、"除非 Q 才 P"、"除非 Q，否则非 P"等。尽管叙述的方式表面看起来不同，但只要表示 Q 是 P 的必要条件，都可以符号化为 $P \to Q$。

1.2.5 等价联结词

- **定义 1.5** 设 P,Q 为任意二命题，复合命题“P 当且仅当 Q”称为命题 P 和 Q 的等价式。记为 $P \leftrightarrow Q$ ，读作“P 当且仅当 Q”， $\leftrightarrow$称作等价联结词。
- $P \leftrightarrow Q$ 的逻辑关系为 P 与 Q 互为充分必要条件。 $P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真或同时为假。
- 命题 $P \leftrightarrow Q$ 的真值与命题 P 和命题 Q 的真值之间的关系如表所示。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.2.5 等价联结词

- 说明：
  - 1 ）等价联结词也称为双条件联结词。“ P 当且仅当 Q” 也称为 P 与 Q 的双条件式。
  - 2 ）“ P 当且仅当 Q” 的含义与“若 P 则 Q ，并且若 Q 则 P” 的含义相同，即 $P \leftrightarrow Q$ 与 $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$ 逻辑关系完全一样。

1.2.5 等价联结词

例 1.14 设 P ：四边形 ABCD 是平行四边形

Q ： ABCD 的对边平行

则 $P \leftrightarrow Q$ ：四边形 ABCD 是平行四边形，当且仅当它的对边平行。

例 1.15 设 P ： 5 > 3

Q ： 5−3 > 0

则 $P \leftrightarrow Q$ ： 5 > 3 当且仅当 5−3 > 0

- 与联结词“∧”、“∨”、“→”一样，等价式“ $P \leftrightarrow Q$” 的构成也不要求命题 P 和命题 Q 之间存在任何联系，它的真值仅仅与 P 和 Q 的真值有关。

1.2.5 复合命题的真值

- 使用多个联结词可以组成更复杂的复合命题，并可使用圆括号（、），（、）必须成对出现。
- 联结词的运算优先顺序为：（），¬，∧，∨，→，↔；同一优先级的运算从左至右顺序进行。

例 1.16 设 P：5 > 3

Q：2+2=4

R：乌鸦是白色的

求下列复合命题的真值：

1）$((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \wedge R$

2）$(Q \vee R) \rightarrow (P \rightarrow \neg R)$

解：P，Q，R 的真值分别为 1，1，0，根据运算规则算出 1），2）的真值分别是 0，1。

小结

- 在命题逻辑中，否定联结词、合取联结词和析取联结词这三个联结词就足够了，但为了方便，还定义了其他的联结词。
- 析取联结词是可兼的也可称为是相容的。
- 象初等代数的运算一样，析取联结词和合取联结词也都满足交换律和结合律。

小结

❖ **本小节的思维形式注记图：**

联结词

¬假为真，真为假，对应（非、不、没有、无、并不 ）

∧ 一个为假就为假，对应（并且、同时、以及、既…又…、
不但…而且…、虽然…但是… ）

∨ 一个为真就为真，对应（或）

→前真后假才为假，对应（当…则…、因为…所以… 、仅当、只有…才… 、
除非…才…、除非… ，否则非…）

↔同真同假才为真，对应（当且仅当、充分必要）

作业

- 扩展阅读： 1.A,1.B
- 掌握联结词的定义
- 习题： 1 ：第一问

1.3 命题公式

命题公式：由命题变元、联结词和括号按照一定的规则组成的字符串。

1.3.1 命题公式的定义

- **定义 1.6** 命题演算的合式公式，又称**命题公式（简称公式）**，是如下递归定义的：
  - 1）单个命题变元是合式公式，并简称为原子命题公式；
  - 2）如果 A 是合式公式，那么 $(\neg A)$ 也是合式公式；
  - 3）如果 A, B 都是合式公式，那么 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 都是合式公式；
  - 4）当且仅当有限次地应用 1), 2), 3) 所得到的包含命题变元、联结词和括号的字符串是合式公式。
- 根据定义 1.6 可知， P, $(\neg P)$, $(P \rightarrow (P \vee Q))$, $((\neg P \wedge Q) \wedge P)$, $((P \leftrightarrow Q) \rightarrow R)$ 都是命题公式。而 $(\vee P)$, $(P \leftrightarrow Q$, $(P \vee Q) \rightarrow R)$ 都不是命题公式。

1.3.1　命题公式的定义

- 注意：
- 这个合式公式的定义，是以递归形式给出的，其中 1 ）称为基础， 2 ） 3 ）称为归纳， 4 ）称为界限。
- 命题公式本身不是命题，只有对公式中的每一个命题变元指派真值后它才是一个命题。
- 由命题变元、联结词和圆括号组成的字符串可构成命题公式，但并不是由这三类字符组成的每一个字符串都可以成为命题公式。

1.3.1　命题公式的定义

- **定义 1.7**　如果一个命题公式中总共包含有 n 个不同的命题变元，则称其为 **n 元命题公式**。

例 1.17　$((P\wedge Q)\rightarrow(\neg(Q\wedge R)))$ 是三元命题公式

$(\neg P)$ 是一元命题公式。

- 按照如下原则，可以减少公式中括号的数量：
  - 1 ）省去最外层括号，如 $(\neg P)$, $(P\rightarrow Q)$ 可以分别写为 $\neg P$ 和 $P\rightarrow Q$ ；
  - 2 ）规定 5 个联结词运算的优先级顺序为：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ；
  - 3 ）同级的联结词，按其出现的先后次序（从左到右）。

例 1.18　$((P1\rightarrow((Q\wedge(\neg R))\vee S))\leftrightarrow P2)$　可简化为　$P1\rightarrow Q\wedge\neg R\vee S\leftrightarrow P2$

$(((P1\rightarrow Q)\wedge(\neg R)\vee S)\leftrightarrow P2)$　可简化为　$(P1\rightarrow Q)\wedge\neg R\vee S\leftrightarrow P2$

1.3.2 命题公式的层次

❖ 定义 1.8 1）若公式 A 是单个的命题变元，则称 A 为 0 层公式。

2）称 A 是 n+1（$n \geq 0$）层公式是指下面情况之一：

- （1）$A = \neg B$, B 是 n 层公式；
- （2）$A = B \wedge C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n = \max(i,j)$;
- （3）$A = B \vee C$, 其中 B, C 的层次同（2）；
- （4）$A = B \rightarrow C$, 其中 B, C 的层次同（2）；
- （5）$A = B \leftrightarrow C$, 其中 B, C 的层次同（2）；

3）若公式 A 的层次为 k, 则称 A 是 k 层公式。

例 1.19 $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$ 为 3 层公式。

$(\neg(P \rightarrow \neg Q)) \wedge ((R \vee S) \leftrightarrow \neg P)$ 为 4 层公式。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

❖ 定义 1.9 设 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 是出现在公式 A 中的所有命题变元，给 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 各指派一个真值，称为对 A 的一个赋值或解释。若指派的一组值使 A 的值为 1，则称这组值为 A 的成真赋值。若使 A 的值为 0，则称这组值为 A 的成假赋值。

例 1.20 给出公式：$(P \vee Q) \to R$ 的两种赋值，使公式的值分别为真和假。

解：1）将 P 解释为：2 是偶数，Q 为 3 是偶数，R 解释为：2+3 是偶数。显然 P,Q,R 的真值分别是 1，0，0，故 $(P \vee Q) \to R$ 的真值为 0。

2）将 P 解释为：2 是偶数，Q 解释为 3 是偶数，R 解释为 2*3 是偶数。显然 P,Q,R 的真值分别是 1，0，1，故 $(P \vee Q) \to R$ 的真值为 1。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

- 本书中，含 n 个命题变元的命题公式的赋值形式作如下规定：
  - 1 ）设 A 中含的命题变元为 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ，赋值 $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$($\alpha_i$ 为 0 或 1) 是指 $P_1=\alpha_1, P_2=\alpha_2\ldots P_n=\alpha_n$ 。
  - 2 ）设 A 中含的命题变元为 P, Q, R … ，赋值 $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$($\alpha_i$ 为 0 或 1) 是指 $P=\alpha_1, Q=\alpha_2, \ldots$ ，即按字典顺序赋值。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

- **定义 1.10** 设 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 是出现在公式 A 中的所有命题变元，将公式 A 在所有 2^n 个赋值下的取值情况列成表，称为 A 的**真值表**。
- **构造真值表的具体步骤：**
  - 1 ）找出公式中所含的全体命题变元 $P_1, P_2, \ldots, P_n$(若无下标就按字典顺序排列）, 列出所有可能 2^n 个赋值；
    - 建议：赋值从 00…0 开始，然后按二进制加法依次写出各赋值，直到 11…1 为止。
  - 2 ）按从低到高的顺序写出公式的各个层次；
  - 3 ）对应各个赋值，计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

例 1.21 试构造 $(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg R$ 的真值表。

解：第一步：列出全体命题变元 P, Q, R 及其所有的可能赋值；

P Q R				
0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1				

例 1.21 试构造 $(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg R$ 的真值表。

第二步：从低到高的顺序写出公式的各个层次；

P Q R	$\neg P$	$\neg R$	$\neg P \wedge Q$	$(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg R$
0 0 0				
0 0 1				
0 1 0				
0 1 1				
1 0 0				
1 0 1				
1 1 0				
1 1 1				

例 1.21 试构造 $(\neg P \wedge Q) \to \neg R$ 的真值表。

第三步：对应各个赋值计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值。

P Q R	$\neg P$	$\neg R$	$\neg P \wedge Q$	$(\neg P \wedge Q) \to \neg R$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	0	1	0
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	0	0	1
1 1 0	0	1	0	1
1 1 1	0	0	0	1

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

例 1.22　试构造 $(P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg Q)$ 的真值表。

解：

P　Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\vee\neg P$	$Q\vee\neg Q$	$(P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg Q)$
0　0	1	1	1	1	1
0　1	1	0	1	1	1
1　0	0	1	1	1	1
1　1	0	0	1	1	1

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

例 1.23　试构造¬ (P→Q)∧Q∧R 的真值表。

解：

P Q R	P→Q	¬ (P→Q)	¬ (P→Q)∧Q	¬ (P→Q)∧Q∧R
0 0 0	1	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	0	0
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	0	0	0

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

- 定义 1.11　设 A 为任一命题公式，
  - 1 ）若 A 在它的所有赋值下取值均为真，则称 A 是重言式或永真式；
  - 2 ）若 A 在它的所有赋值下取值均为假，则称 A 是矛盾式或永假式；
  - 3 ）若 A 不是矛盾式，则称 A 是可满足式。
- 从定义 1.11 不难看出以下几点：
  - 1 ） A 是可满足式的逻辑等价定义是： A 至少存在一个成真赋值。
  - 2 ）重言式一定是可满足式，但反之未必。因而，若公式 A 是可满足式，且它至少存在一个成假赋值，则称 A 为非重言式的可满足式。
  - 3 ）重言式的否定是矛盾式，矛盾式的否定是重言式。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

- 真值表可用来判断公式的类型：
  - 1）若真值表最后一列（即命题公式对应的真值）全为 1，则公式为重言式；
  - 2）若真值表最后一列全为 0，则公式为矛盾式；
  - 3）若真值表最后一列中至少有一个 1，则公式为可满足式。
- 但当公式中命题变元较多时，真值表的方法计算量大，后面我们会介绍其他的方法。

1.3.4 命题的符号化

- 将一个用文字叙述的命题写成由命题标识符、联结词和括号表示的命题公式的过程，称为命题的符号化，或称为命题的翻译。
- 在数理逻辑中，进行推理的第一步就是将命题符号化。其大概步骤如下：
  - 1）找出命题中所包含的原子命题并用命题符号表示；
  - 2）确定命题中的连词对应的联结词；
  - 3）用正确的语法将原命题表示成由命题符号、联结词和括号组成的命题公式。

1.3.4 命题的符号化

例 1.24 虽然这一次你取得了第一名，但这并不代表你永远是第一名。

解：设 P ：这一次你取得了第一名

Q ：这代表你永远是第一名

原命题可表示为 $P \wedge \neg Q$ 。

例 1.25 她不但外表美而且心灵美。

解：本例中的“不但……而且……”的意义是合取的意思。

设 P ：她的外表美

Q ：她的心灵美

原命题可表示为 $P \wedge Q$ 。

1.3.4 命题的符号化

例 1.26 除非你努力，否则你将失败。

解：本命题的意义可理解为：如果你不努力，那么你将失败。

设 P ：你努力

Q ：你将失败

原命题可表示为 $\neg Q \rightarrow P$ 。

例 1.27 张三或李四都可以做这件事。

解：本命题的意义是：张三可以做这件事，并且李四也可以做这件事。

设 P ：张三可以做这件事

Q ：李四可以做这件事

原命题可表示为 $P \wedge Q$ 。

1.3.4 命题的符号化

例 1.28 伦敦到巴黎的第 K123 次列车是上午 9 点或 10 点开。

解 本命题中由两个原子命题，分别用命题符号 P 、 Q 表示为

P ：伦敦到巴黎的第 K123 次列车是上午 9 点开

Q ：伦敦到巴黎的第 K123 次列车是上午 10 点开

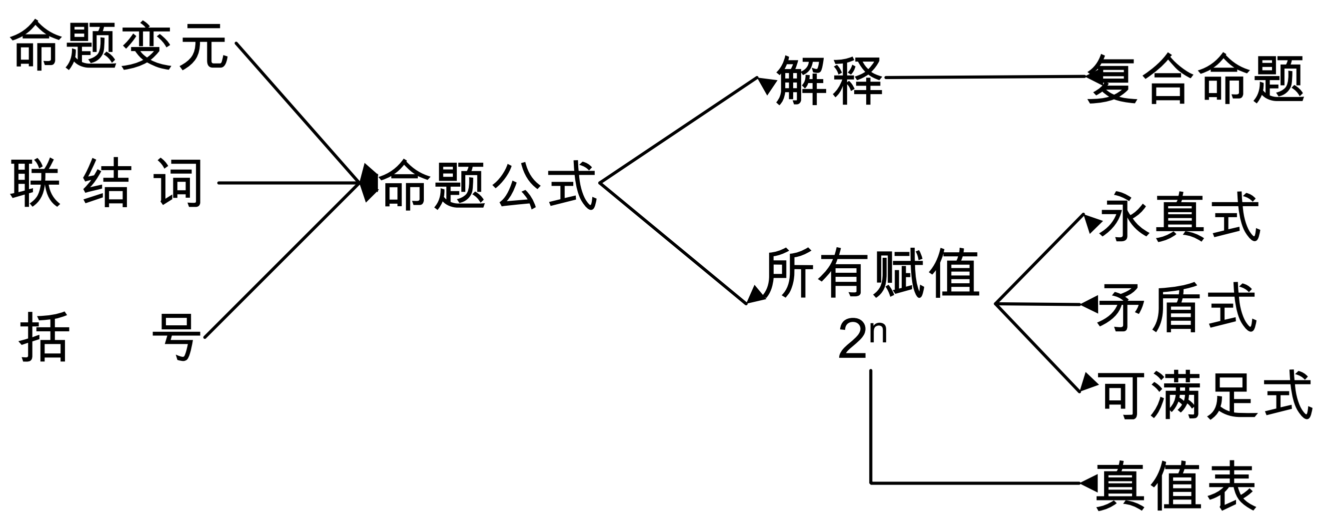
根据实际情况，可分析本例中的“或”是不可兼或，但联结词∨是“可兼或”。因此原命题不能表示为 $P \vee Q$ 。

P Q	原命题	原命题的否定
0 0	0	1
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1

从上表可看出仅用联结词中的任何一个都不能描述原命题中的不可兼或。但若将表中原命题的真值分别取反，则原命题的否定可表示为 $P \leftrightarrow Q$ 。因此原命题可表示为 $\neg(P \leftrightarrow Q)$ 。

小结

- 命题公式赋值后成为复合命题。
- 命题公式分为：重言式、矛盾式和非重言式的可满足式。
- 真值表可以判断命题公式的类型。
- 本小节的思维形式注记图：



练习

例．下面命题符号化，并指出真值

(1) 只要 8 能被 4 整除，就 8 能被 2 整除.

(2) 因为 8 能被 4 整除，所以 8 能被 2 整除.

(3) 8 能被 4 整除仅当 8 能被 2 整除.

(4) 8 能被 4 整除当 8 能被 2 整除.

(5) 只有 8 能被 4 整除才有 8 能被 2 整除.

(6) 除非 8 能被 4 整除才 8 能被 2 整除.

(7) 除非 8 能被 4 整除，否则非 8 能被 2 整除.

作业

- 习题：2
- 补充习题：求下列公式的成真赋值：

1）$\neg P \to Q$

2）$P \vee \neg Q$

3）$(P \wedge Q) \to \neg P$

4）$\neg (P \vee Q) \to Q$