

图 P 7.14-2

(b) 利用你认为需要的放大器, 乘法器, 加法器, 振荡器和任何理想滤波器, 画出这种理想 保密器的方框图。

(c) 再次利用放大器, 乘法器, 加法器, 振荡器和理想滤波器, 画出相应的 解密器的方框图。

7.15. 实际上, 通常很难构成一个很低频率的放大器。因此, 低频放大器通常是利用幅度调制原理搬移信号到较高的频带。这种放大器称为斩波放大器, 并表示在图 P 7.15 的方框图中。

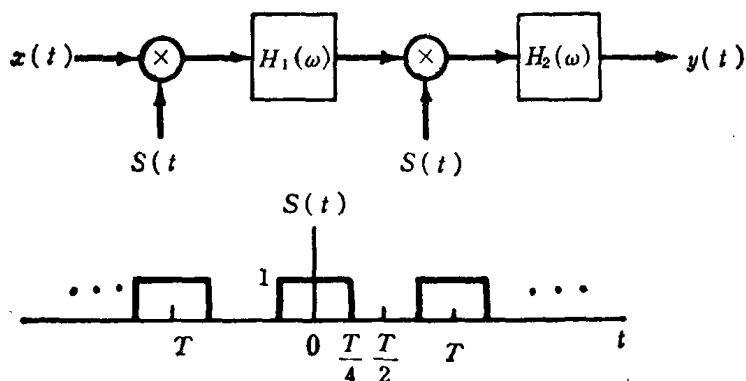


图 P 7.15

(a) 若 $y(t)$ 与 $x(t)$ 成比例 (即, 若总系统等效于一个放大器), 根据 T 来确定 $x(t)$ 中的最高容许频率。

(b) 如(a)中所述, $x(t)$ 为有限带宽时, 根据 A 和 T 来确定图 P 7.15 中整个系统的增益。

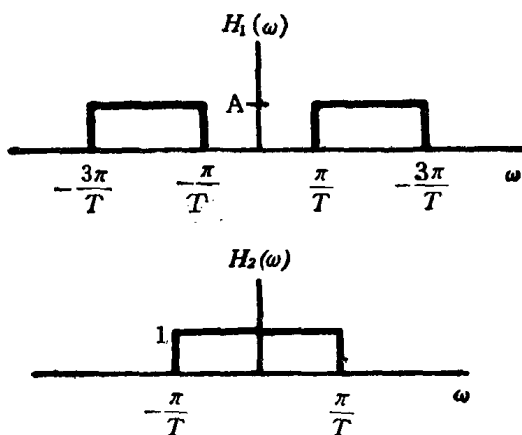


图 P 7.15 (继续)

7.16. 我们希望传送两个可能的消息中的一个, 消息 m_0 或消息 m_1 。为此, 我们将在宽度 T 的时间区间中, 发射两个频率中的一个频率的短脉冲。注意, T 与被传送的消息无关。对消息 m_0 , 将发射 $\cos \omega_0 t$, 而对于消息 m_1 , 将发射 $\cos \omega_1 t$ 。因此, 短脉冲 $b(t)$ 看起来将如图 P 7.16-1 所示。这种通信系统称为移频键控 (FSK)。当收到了频率 $b(t)$ 的短脉冲时, 我们要确定, 它表示的是消息 m_0 还是消息 m_1 。为了达到这个目的, 我们将如图 P 7.16-2 所示那样进行。

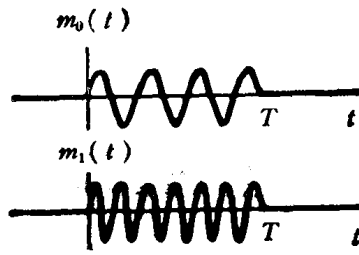


图 P 7.16—1

(a) 试证明：当 $\cos \omega_0 t$ 和 $\cos \omega_1 t$ 有下列关系时，图 P 7.16—2 中两条线路绝对值间的最大差别，

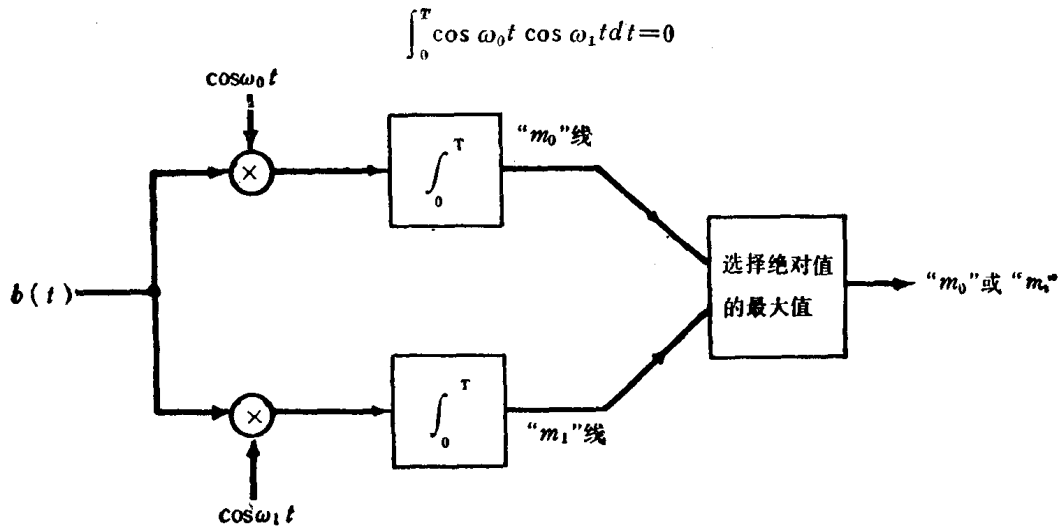


图 P 7.16—2

(b) 是否可能选取 ω_0 和 ω_1 ，使得不存在宽度 T 的时间区间，能满足，

$$\int_0^T \cos \omega_0 t \cos \omega_1 t dt = 0?$$

7.17. 正如在课文中所叙述的，要组成一个频率选择性好，并且在它的工作范围内可以调谐的滤波器是十分困难的。因为无线电和电视信号的准确分离和解调需要这类可调滤波器。已设计的称为外差式接收机的系统等效于这种可调滤波器。基本的系统如图 P 7.17—1 所示。

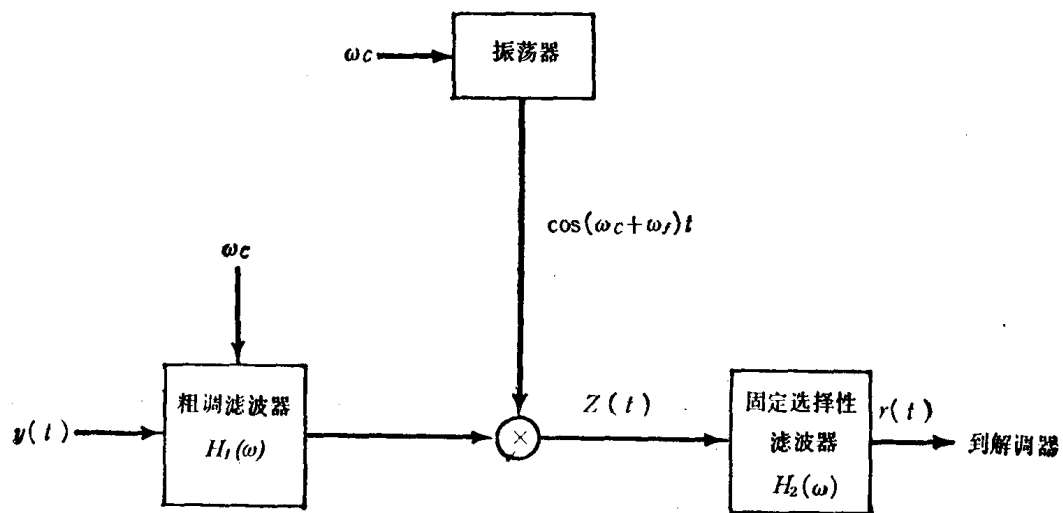
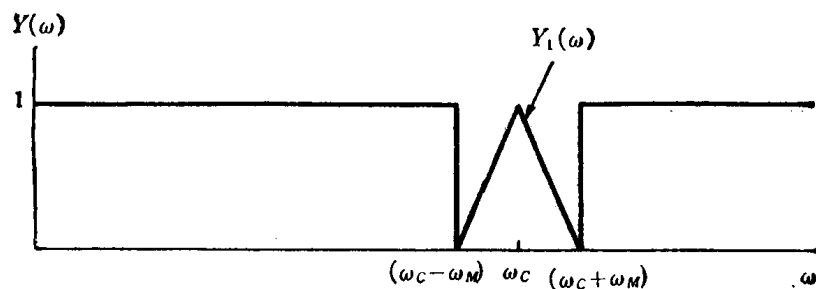
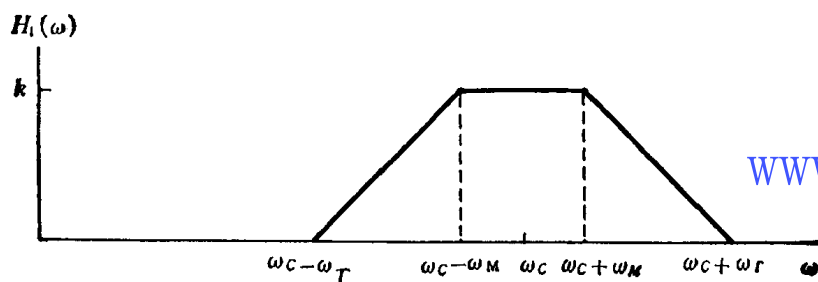


图 P 7.17—1

- (a) 输入信号 $y(t)$ 由许多调幅信号迭加而成, 是利用频分复用完成复合的。因此, 它们各占用了不同的频率信道。我们来考虑这样一个信道, 它包含了具有如图 P 7.17—2 所示的频谱 $Y_1(\omega)$ 的调幅信号 $y_1(t) = x_1(t) \cos \omega_c t$ 。我们需要利用图 P 7.17—1 的系统来分离和解调, 以恢复调制信号 $x_1(t)$ 。粗调滤波器有如图 P 7.17—2 (b) 所示的频谱 $H_1(\omega)$ 。试确定加到固定选择性滤波器 $H_2(\omega)$ 的输入信号的频谱 $Z(\omega)$, 画出并标明 $\omega > 0$ 时的频谱 $Z(\omega)$ 。
- (b) 固定频率选择性滤波器, 是以固定频率 ω_f 为中心的带通型的滤波器, 如图 P 7.17—3 所示。我们希望滤波器 $H_2(\omega)$ 的输出为 $r(t) = x_1(t) \cos \omega_f t$ 。用 ω_c 和 ω_M 来表示, 为保证 $x_1(t)$ 的无失真频谱能以 $\omega = \omega_f$ 为中心, ω_f 必须满足什么约束条件?
- (c) 为使 $r(t) = x_1(t) \cos \omega_f t$, 图 P 7.17—3 中的 G , α 和 β 应等于多少?



(a) 输入信号



(b) 粗调滤波器

图 P 7.17—2

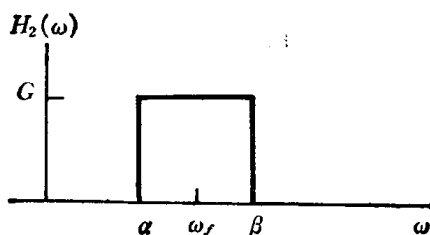


图 P 7.17—3

- 7.18. 在 7.2.2 节中, 我们讨论了利用正弦幅度调制实现频分复用, 用它将若干信号搬移到不同的频带内, 然后合在一起同时传送。本题中, 研究另一种称为正交多路复用的多路复用原理。在这种多路复用过程中, 若两个载波信号有 90° 的相位差 就可以在同一频带中同时传送。这个复用系统如图 P 7.18(a) 所示, 而分离系统如图 P 7.18 (b) 所示。 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 假设是两个最高频率为 ω_M 的有限带宽信号, 因此当 $|\omega| > \omega_M$ 时, $X_1(\omega) = X_2(\omega) = 0$ 。假设载波频率 ω_c 大于 ω_M 。试证明: $y_1(t) = x_1(t)$, $y_2(t) = x_2(t)$ 。
- 7.19. 在图 7.27 中, 表示实现单边带调制的系统, 该系统只保留下边带, 并在图 7.28 中表示相对应的频谱, 假设 $X(\omega)$ 是实数并且是对称的。当 $X(\omega)$ 如图 P 7.19 所示时, 画出 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 和 $y(t)$ 的

频谱，试证明：对于 $X(\omega)$ 为虚数和反对称时，系统也只保留下边带。

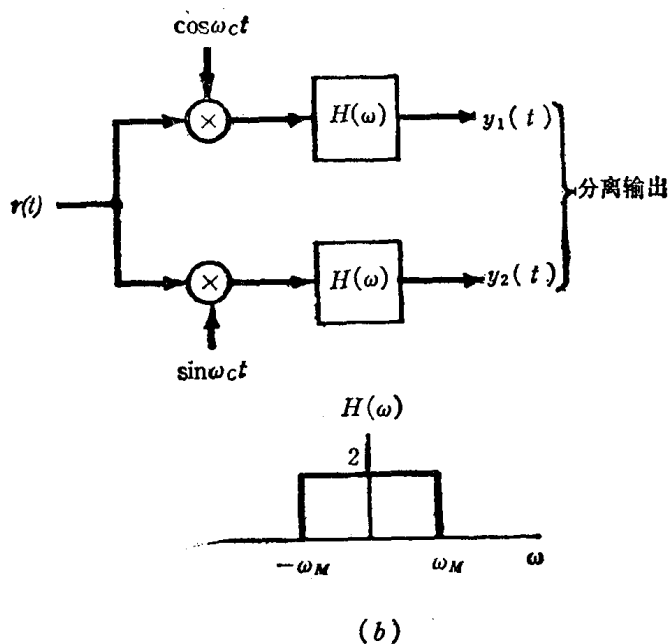
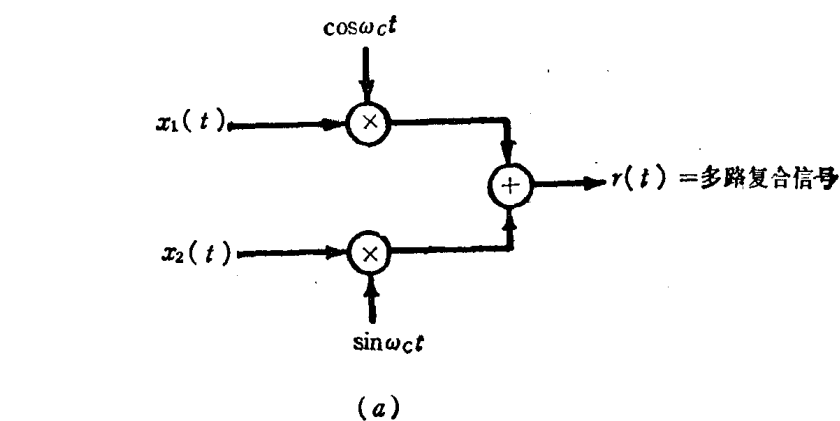


图 P 7.18

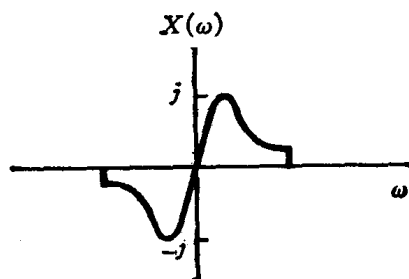


图 P 7.19

7.20. 在 7.3 节中，讨论了利用 90° 相移网络的单边带调制，并在图 7.27 和图 7.28 中，具体地表示了只保留下边带的系统和有关频谱。

在图 P 7.20—1 中，表示保留上边带的相应系统。

(a) 用图 7.28 所示的相同的 $X(\omega)$ ，画出对于图 P 7.20—1 系统的 $Y_1(\omega)$ ， $Y_2(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ ，并具体证明只保留上边带。

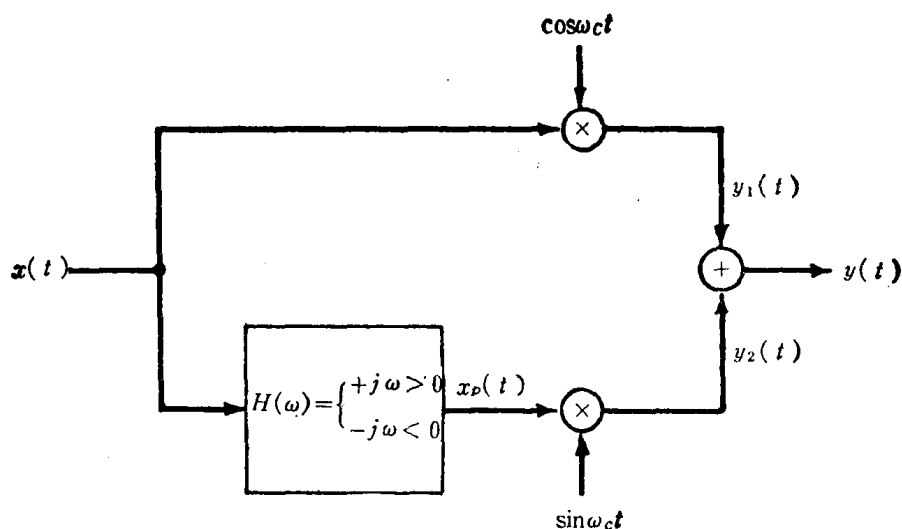


图 P7.20—1

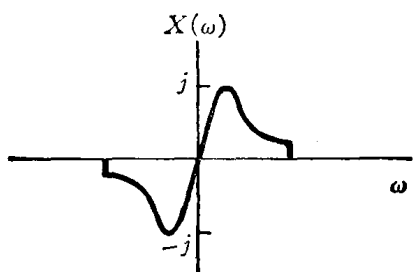


图 P7.20—2

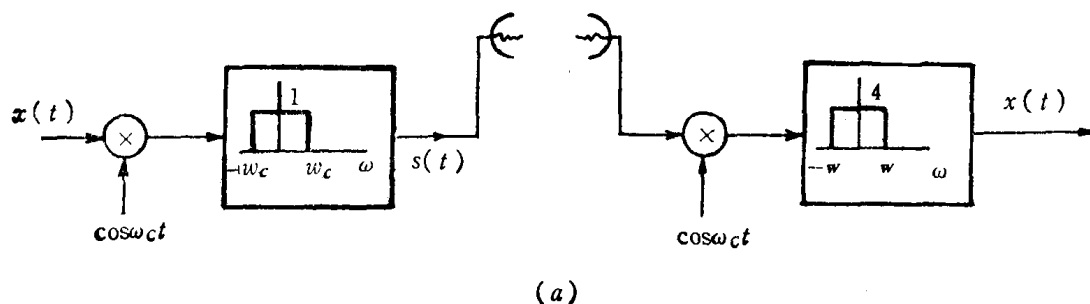
www.blogoil.com

(b) 当 $X(\omega)$ 为虚数, 如图 P7.20—2 所示, 画出对于图 P7.20—1 系统的 $Y_1(\omega)$, $Y_2(\omega)$ 和 $Y(\omega)$, 并证明这种情况也只保留了上边带。

7.21. 在 7.3 节中所讨论的单边带调制, 通常利用在点到点的语音通信中。它有许多优点, 包括有效地利用可用的功率, 带宽的节省, 和对信道中某种形式不规则衰减不敏感。在双边带抑制载波系统中 (DSB/SC), 调制信号的频谱全部出现在被传送频谱的两个区域。单边带调制去除了多余部分, 因此节省了带宽, 并提高了在被传送的存留的那部分频谱内的信噪比。

在图 P7.21—1 中表示了产生调幅单边带信号的两种方法。图 P7.21—1(a) 中的系统可用来产生一个保留下边带的单边带信号, 而图 P7.21—1(b) 中的系统可用来产生一个保留上边带的单边带信号。

(a) 对于如图 P7.21—2 所示的 $X(\omega)$, 设 $\omega_c > \omega_3$, 试确定并画出下边带已调信号的傅里叶变换 $s(\omega)$ 和上边带已调信号的傅里叶变换 $R(\omega)$ 。



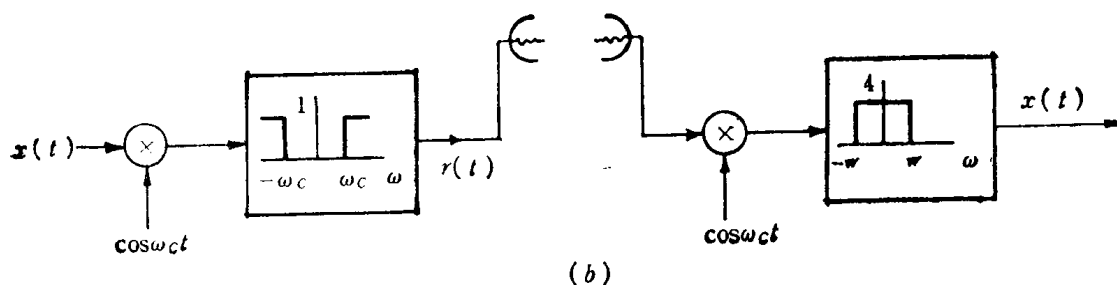


图 P 7.21—1

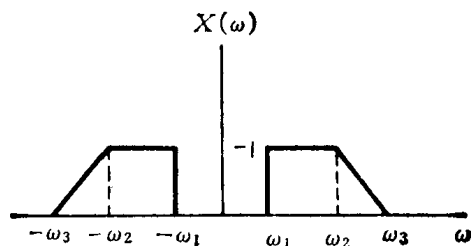


图 P 7.21—2

上边带调制系统，对语音通信特别有用，因为任何实际滤波器，对截止频率存在有限过渡区域（即，接近 ω_c 区）。这个区域可调节，使得具有很小的失真，因为语音信号在 $\omega=0$ 的附近（即， $|\omega| < \omega_1 = 2\pi \cdot 40\text{Hz}$ ）没有任何有效的能量。

(b) 产生单边带信号的另一种方法（第三种）称为相移法，如图 P 7.21—3 所示。试证明：所产生的单边带信号，与图 P 7.21—1(a) 的下边带调制系统所产生的信号成比例（即 $p(t)$ 与 $s(t)$ 成比例）。

(c) 所有的三种 AM-SSB 信号，可利用图 P 7.21—1 右边所示的系统解调。试证明：被接收的信号不管是 $s(t)$ ， $r(t)$ 还是 $p(t)$ ，只要接收机中的振荡器在相位上和发射机中的振荡器同相，并且 $\omega = \omega_c$ ，解调器的输出是 $x(t)$ 。

当振荡器和发射机的振荡器在相位上不同时所产生的失真，称为正交失真，在数字通信中会特别麻烦。

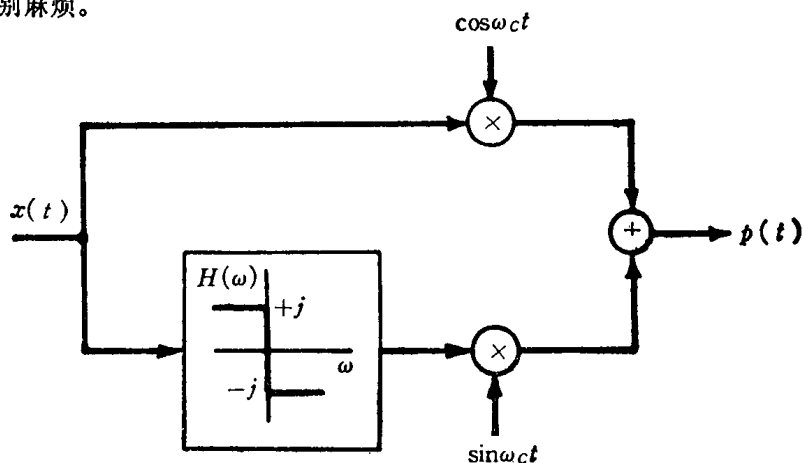


图 P 7.21—3

7.22. 脉冲幅度调制 (PAM) 通信系统，可如图 P 7.22—1 所示。系统的输出是 PAM 信号 $q(t)$ 。

(a) 设 $x(t)$ 为有限带宽信号 [即 $|\omega| \geq \pi/T$ 时， $X(\omega) = 0$]，如图 P 7.22—2 所示，试确定并画出 $R(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 。

(b) 采用一个合适的滤波器 $M(\omega)$ ，试求使 $\omega(t) = x(t)$ 的 Δ 最大值。

(c) 为使 $w(t)=x(t)$, 确定并画出补偿滤波器 $M(\omega)$ 。

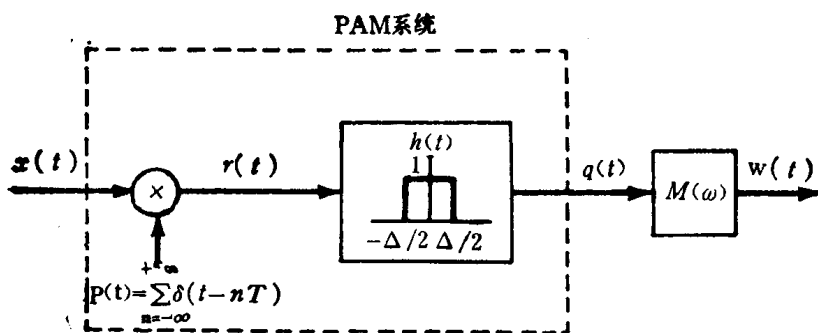


图 P 7.22—1

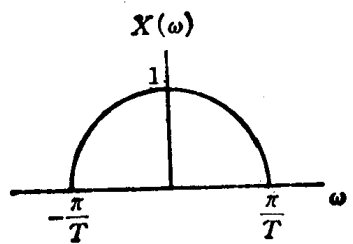


图 P 7.22—2

7.23. 假设离散时间信号 $x[n]$, 其傅里叶变换如图 P 7.23—1 所示, 信号被正弦序列调幅, 如图 P 7.23—2 所示。

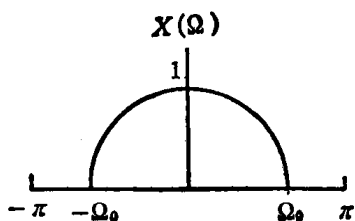


图 P 7.23—1

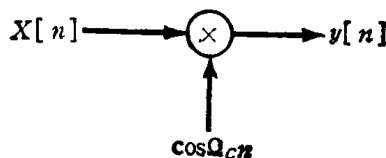


图 P 7.23—2

(a) 试确定并画出 $y[n]$ 的傅里叶变换 $Y(\Omega)$ 。

(b) 所用的解调系统如图 P 7.23—3 所示。当 θ_c , Ω_{LP} 和 G 为什么值时 $\hat{x}[n]=x[n]$ 。为保证 $x[n]$ 能从 $y[n]$ 中恢复, 对 Ω_c 和 Ω_{LP} 的任何约束是必须的吗?

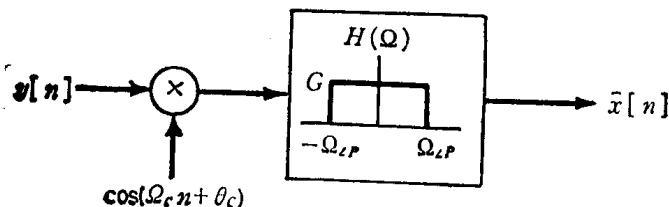


图 P 7.23—3

7.24. 在 7.5 节中, 讨论了用正弦载波的同步离散时间调制和解调。本题中我们要讨论, 在同步中相位和 (或) 频率失步的影响。调制和解调系统如图 P 7.24—1 所示, 图中表示了调制器和解调器载波之间相位和频率的区别, 设频率差 $\Omega_d - \Omega_c$ 用 $\Delta\Omega$ 表示, 而相位差 $\theta_d - \theta_c$ 用 $\Delta\theta$ 表示。

(a) 若 $x[n]$ 的频谱如图 P 7.24—2 所示, 设 $\Delta\Omega=0$, 试画出 $w[n]$ 的频谱。

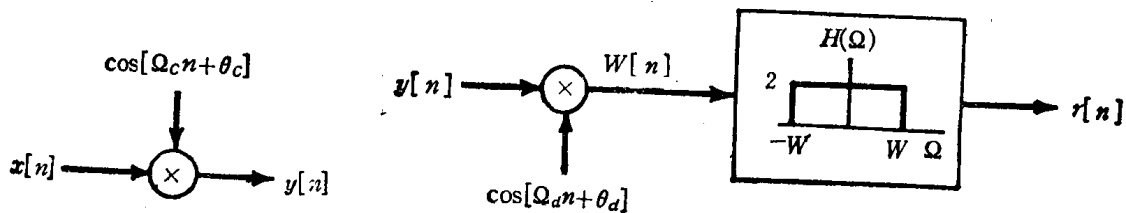


图 P 7.24—1

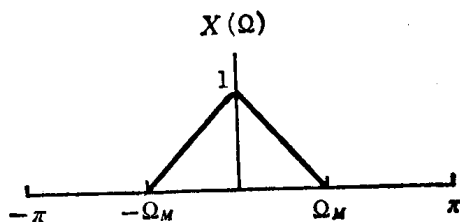


图 P 7.24-2

- (b) 若 $\Delta\Omega=0$, 试证明: 可选择 W , 使输出 $r[n]=x[n]\cos\Delta\theta$ 。特别是, 若 $\Delta\theta=\pi/2$, $r[n]$ 是什么?
- (c) 若 $\Delta\theta=0$, 并且 $W=\Omega_M+\Delta\Omega$, 试证明: 输出 $r[n]=x[n]=x[n]\cos\Delta\Omega_n$ (假设 $\Delta\Omega$ 是小的)。

7.25. 设 $x[n]$ 是频谱为 $X(\Omega)$ 的离散时间信号, 并设 $p(t)$ 是频谱为 $P(\omega)$ 的连续时间脉冲函数, 组成脉冲调幅信号 $y(t)$ 如下所示:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]p(t-n)$$

- (a) 用 $X(\Omega)$ 和 $P(\omega)$ 确定频谱 $Y(\omega)$ 。
- (b) 若

$$p(t) = \begin{cases} \cos 8\pi t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

试确定 $P(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 。

- 7.26. 在设计具有高通和带通特性的滤波器时, 通常是首先设计一个具有所需的通带和阻带特性的低通滤波器, 然后将这个原型滤波器变换成所要求的高通或带通滤波器, 这种变换称为低通到高通或低通到带通的变换。用这种方法设计滤波器很方便的, 因为它只要求我们列出关于低通特性这类滤波器的设计算法。作为这种方法的一个例子, 考虑一个具有冲激响应 $h_{lp}[n]$ 和如图 P 7.26 所示的频率响应 $H_{lp}(\Omega)$ 的离散时间低通滤波器, 冲激响应被序列 $(-1)^n$ 调制, 得到 $h_{hp}[n]=(-1)^n h_{lp}[n]$ 。

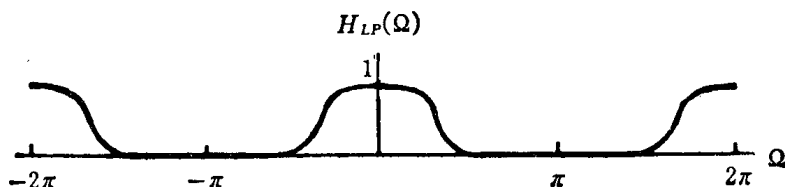


图 P 7.26

- (a) 用 $H_{lp}(\Omega)$ 确定并画出 $H_{hp}(\Omega)$ 。试证明: 对于如图 P 7.26 所示的 $H_{lp}(\Omega)$, $H_{hp}(\Omega)$ 相当于高通滤波器。
- (b) 试证明: 离散时间高通滤波器冲激响应用 $(-1)^n$ 调制, 将使它变换成低通滤波器。
- 7.27. 在题 7.26 中证明了低通滤波器的冲激响应用 $(-1)^n$ 调制, 将使它变换成高通滤波器, 反过来也一样。本题中将考虑如何通过适当地修改描述滤波器的差分方程中的系数来完成这种调制。

假设一个低通滤波器的冲激响应为 $h_{lp}[n]$, 频率响应为 $H_{lp}(\Omega)$, 表示这种滤波器输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 间关系的差分方程是

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (\text{P 7.27-1})$$

- (a) 用差分方程的系数表示频率响应 $H_{lp}(\Omega)$ 。
- (b) 通过用 $(-1)^n$ 调制, 低通滤波器 $h_{lp}[n]$ 被变换成高通滤波器 $h_{hp}[n]$, 即

$$h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$$

试用 $H_{lp}(\Omega)$ 表示频率响应 $H_{hp}(\Omega)$ 。

(c) 综合 (a) 和 (b) 的结果, 试证明: 若差分方程 (P7.27-1) 体现 $H_{lp}(\Omega)$, 则差分方程

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k x[n-k] \quad (\text{P7.27-2})$$

实现了 $H_{hp}(\Omega)$ 。

7.28. 在题7.13中, 研究了利用调制器和 90° 移相器, 实现低通滤波器的连续时间系统。图 P7.28-1 和 P7.28-2 表示了对应于图 P7.13-1 和 P7.13-3 的离散时间系统。

(a) 试证明图 P7.28-1 和 P7.28-2 的系统是等效的。

(b) 试确定上述系统是否等效于一个理想低通滤波器。如果是等效的, 确定作为 Ω_c 函数的滤波器的截止频率。

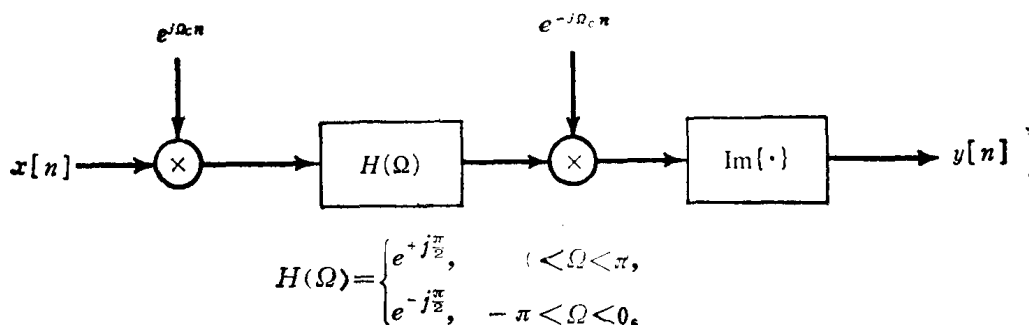


图 P7.28-1

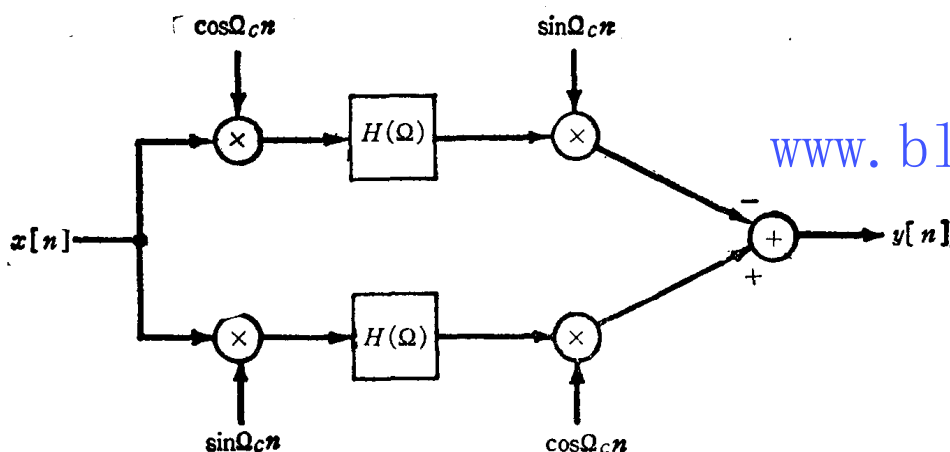


图 P7.28-2

7.29. 研究如图 P7.29-1 所示的离散时间系统。输入序列 $x[n]$ 乘以 $\phi_1[n]$, 并取乘积作为 LTI 系统的输入。于是得到最后的输出 $y[n]$ 是 LTI 系统的输出与 $\phi_2[n]$ 的乘积。

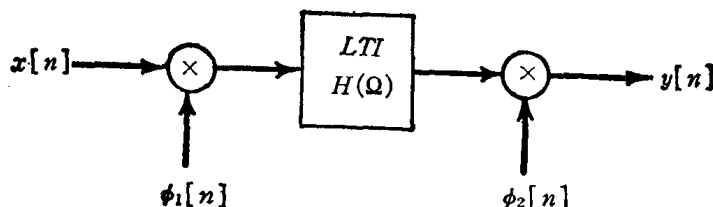


图 P7.29-1

(a) 通常, 整个系统是线性的吗? 它是时不变系统吗?

(b) 若 $\phi_1[n] = z^{-n}$ 和 $\phi_2[n] = z^n$, 式中 z 是任意复数, 试证明: 整个系统是 LTI 系统。

(c) 若 $\phi_1[n] = (j)^{-n}$, $\phi_2[n] = j^n$, $H(\Omega)$ 如图 P 7.29—2 所示, 画出整个系统的频率响应 (大小和相位), 即, 画出作为 Ω 函数的 $Y(\Omega)/X(\Omega)$ 。

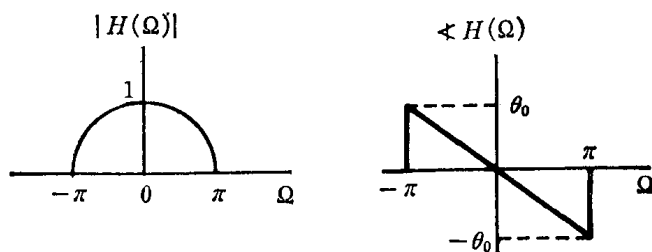


图 P 7.29—2

7.30. 一个离散时间滤波器组是利用基本的低通滤波器和适当的复指数振幅调制实现的, 如图 P 7.30—1 所示。

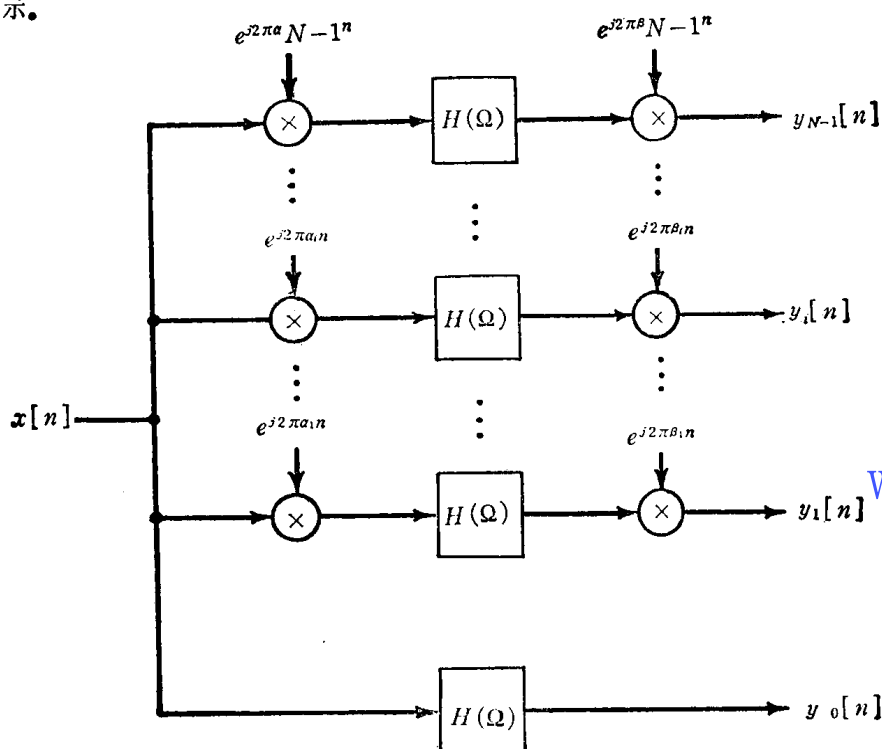


图 P 7.30—1

- (a) $H(\Omega)$ 是理想的低通滤波器, 如图 P 7.30—2(a) 所示。滤波器组的第 i 个信道等效于具有如图 P 7.30—2(b) 所示频率响应的带通滤波器, 试确定为达到这个目的的 α_i 和 β_i 的值。
- (b) 再次用图 P 7.30—2 所示的 $H(\Omega)$, 并当 $\Omega_i = 2\pi i/N$, 用 N 确定 Ω_0 的值, 以使滤波器组覆盖整个频带而没有任何重叠。

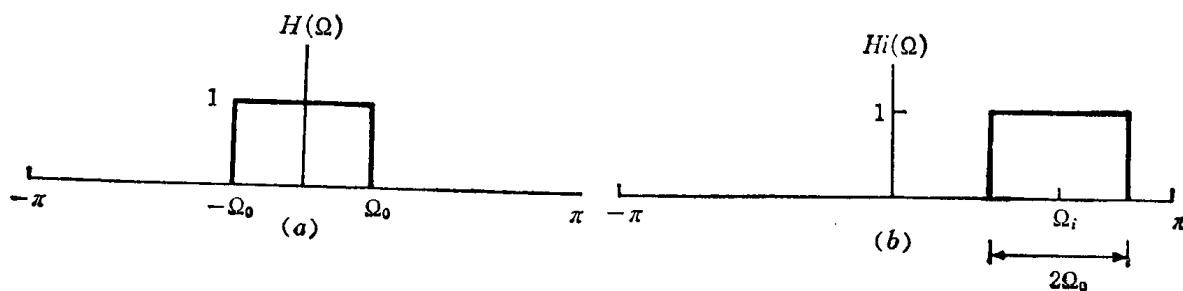


图 P 7.30—2

7.31. 图 P 7.31—1 所示的连续时间系统和图 P 7.31—2 所示的离散时间系统，利用相同的电路结构，使低通滤波器在整个系统中的响应显得像一个带通滤波器，在这个意义上两者是相同的。

(a) 试证明：在两种情况中，无论什么输入加到低通滤波器时，输出 $y(t)$ 或 $y[n]$ 将是带通信号。

(b) 试确定并画出图 P 7.31—1 和 P 7.31—2 整个系统的频率响应。

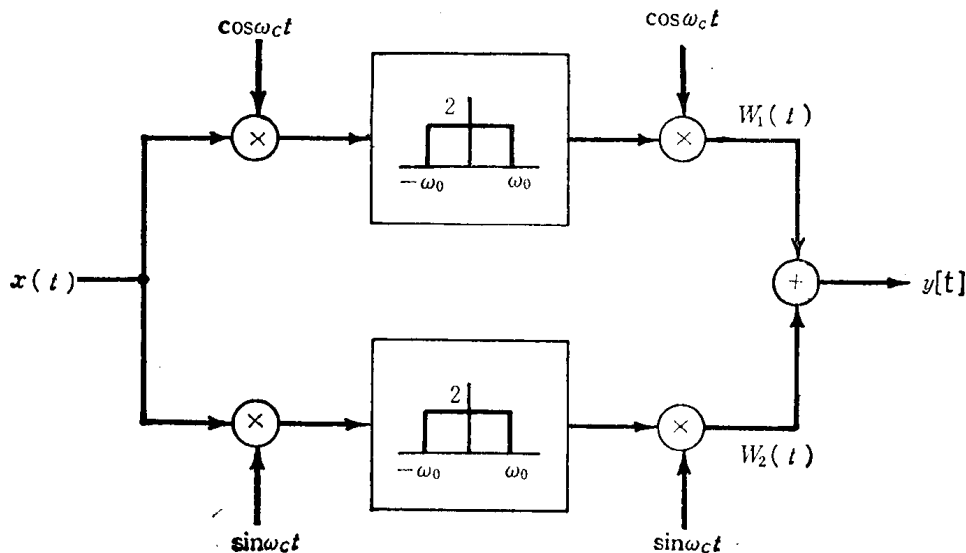


图 P 7.31—1

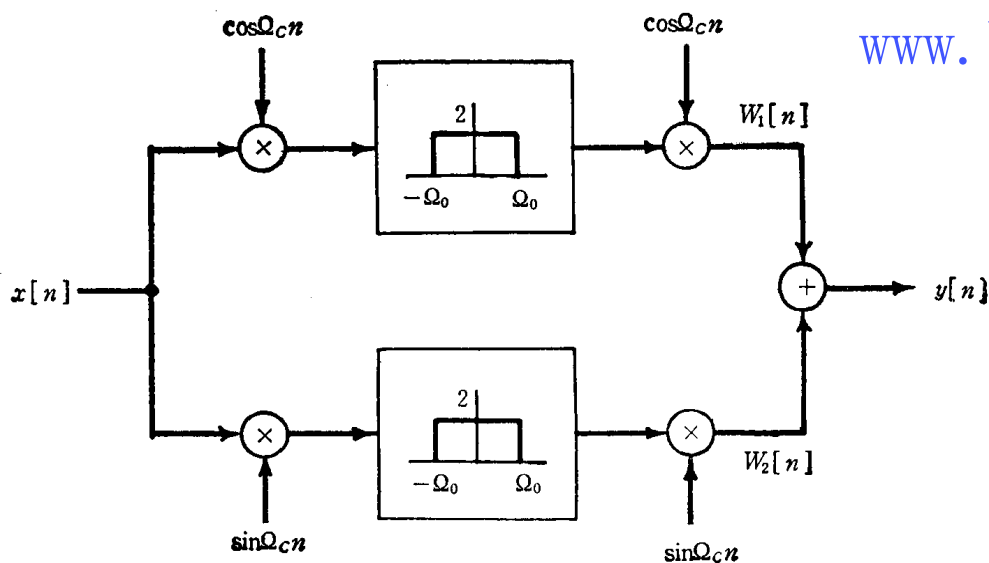


图 P 7.31—2

7.32. 在题 7.18 中，我们介绍了正交多路复用的原理，凭此两个信号在用具有相同频率但有 90° 相位差的载波信号，各自调制之后再相加。相应的离散时间多路复用和多路信号分离，如图 P 7.32 所示。信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是两个设有最高频率为 Ω_M 的带限信号，因此，

$$X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = 0, \text{ 当 } \Omega_M < \Omega < (2\pi - \Omega_M)$$

(a) 试确定为使 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 能从 $r[n]$ 恢复， Ω_O 取值范围。

(b) 当 Ω_O 满足 (a) 的条件时，为使 $y_1[n] = x_1[n]$ 和 $y_2[n] = x_2[n]$ ，试确定 $H(\Omega)$ 。

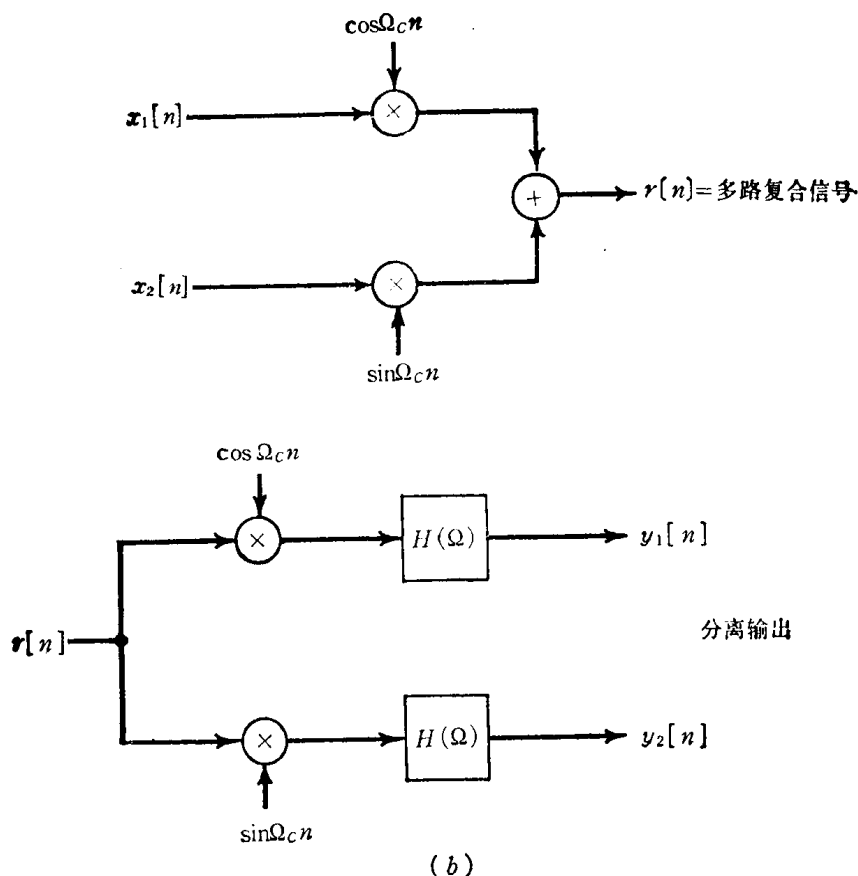


图 P 7.32

www.blogoil.com

7.33. 在7.5节中我们介绍了离散时间脉冲幅度调制(PAM)的概念,并指出其分析和7.4节中所讨论的连续时间脉冲幅度调制的分析十分接近。本题中我们讨论离散时间PAM的分析,所讨论的系统如图7.38所示。

- (a) 试确定并画出图7.38中周期性方波信号 $p[n]$ 的离散时间傅里叶变换。
- (b) 假设 $x[n]$ 有如图 P 7.33 所示的频谱。在图7.38中当 $\Omega_M = \pi/2N$ 及 $M=1$ 时,试画出 $y[n]$ 的傅里叶变换 $Y(\Omega)$ 。

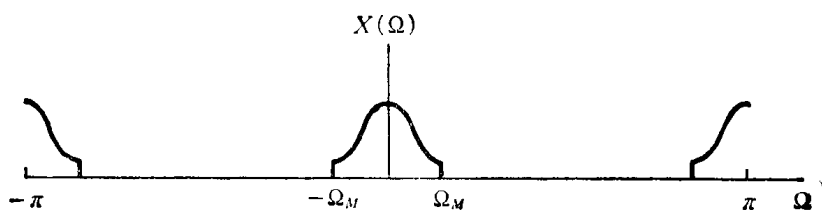


图 P 7.33

- (c) 假设已知 $X(\Omega)$ 是带限信号,当 $\Omega_M < \Omega < (2\pi - \Omega_M)$ 时, $X(\Omega) = 0$,但其余的未加限定。对于图7.38的系统,试确定能让 $x[n]$ 从 $y[n]$ 中恢复出来的作为 N 函数的 Ω_M 最大容许值,指出你所得的结果是否取决于 M 。
- (d) 当 Ω_M 和 N 满足(c)所确定的条件时,试说明或用方框图的形式表示如何从 $y[n]$ 恢复 $x[n]$ 。
- 7.34. 利用窄带FM技术传送带限信号 $x(t)$ 。窄带的意思是,如同7.6节所定义的,其调制指数 m 远小于 $\pi/2$ 。在 $x(t)$ 被传送到调制器之前,它被处理使 $X(\omega)|_{\omega=0} = 0$ 和 $|x(t)| < 1$ 。现在利用这个标准化的信号 $x(t)$ 来角调制一个载波,形成了FM信号:

$$y(t) = \cos\left(\omega_0 t + m \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right)$$

(a) 试确定瞬时频率 ω_i 。

(b) 利用式 (7.46) 的窄带假设 ($m \ll \pi/2$), 并引用上述标准化的条件, 试证明:

$$y(t) \approx \cos \omega_0 t - \left(m \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right) \sin \omega_0 t$$

(c) $y(t)$ 的带宽、 $x(t)$ 的带宽和载波频率 ω_0 之间的关系是什么?

7.35. 假设复指数时间函数为

$$s(t) = e^{j\theta(t)}, \quad (\text{P 7.35})$$

式中 $\theta(t) = \omega_0 t^2/2$ 。

因为瞬时频率 $\omega_i = d\theta/dt$ 是时间函数, 这个信号可看作一个 FM 信号。特别是因为信号随着时间线性地扫过频谱, 它通常被称作“线性调频信号”或“啁啾声信号”。

(a) 确定瞬时频率。

(b) 确定并画出线性调频脉冲信号的傅里叶变换的幅度和相位。为了计算傅里叶变换积分, 你可以发现对被积函数指数“完成平方”是有帮助的, 并利用关系式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+j)$$

(c) 考虑图 P 7.35 中的系统, 图中 $s(t)$ 是式 (P 7.35) 中的线性调频脉冲信号。试证明: $y(t) = X(\omega_0 t)$, 式中 $X(\omega)$ 是 $x(t)$ 的傅里叶变换。

注意: 图 P 7.35 中的系统称为线性调频变换算法, 并且常在实际中应用以获得信号的傅里叶变换。

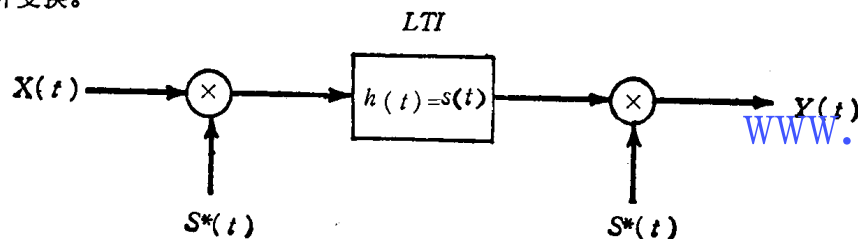


图 P 7.35

第八章 抽 样

8.0 引 言

在一定条件下,连续时间信号可以用它的等时间间隔的瞬时值或抽样值所完全代表,而且可根据这些抽样值恢复连续时间信号。这个有点令人惊奇的性质,可以由称做抽样定理的基本结果得出。这一定理非常重要而有用。例如,抽样定理可用于活动电影,影片由许多单帧照片的时间序列所组成,每一帧照片代表连续变化情景的瞬时图像(即某一时刻的抽样)。当以足够快的速度按时间顺序观察这些抽样时,我们就感觉到原来的连续活动情景正确地再现。另一个例子,印刷的照片一般是由非常精细的点格组成的,每一点相当于所代表的空间连续图片的抽样,若各抽样点间彼此足够靠近,则图片看起来在空间还是连续的,虽然在放大镜下,图片由抽样点组成是很明显的。

抽样定理最重要之处,是它在连续时间信号和离散时间信号间的桥梁作用。正如我们要比较详细阐述的那样,在一定条件下,瞬时抽样值序列可完全表示一个连续时间信号的能力,提供了一种用离散时间信号代表连续时间信号的方法。在许多情况下,离散时间信号的处理更为灵活,而且常常比连续时间信号的处理更优越,其部分原因是由于价格低、重量轻、可编程,且容易成批生产的数字和离散时间系统制造工艺的进展。这种方法也为利用抽样概念把连续时间信号变换为离散时间信号提供了可能性。在用离散时间系统处理离散时间信号之后,需要时,可再把离散时间信号变回到连续时间信号。

在以下的讨论中,首先介绍并导出抽样的概念和从抽样值恢复连续时间信号的过程,然后,详细地研究已通过抽样而变换为离散时间信号的连续时间信号的处理。其次,再考察与时域抽样对偶的概念,即频域抽样。最后,研究适用于离散时间信号的抽样概念及它的某些应用。

8.1 用信号的抽样值表示连续时间信号: 抽样定理

一般,我们不能指望在没有任何附加条件或信息的情况下,一个信号就能用一个等间隔抽样序列唯一地表示。如在图8.1中,我们用图形说明三个不同的连续时间信号,所有这些信

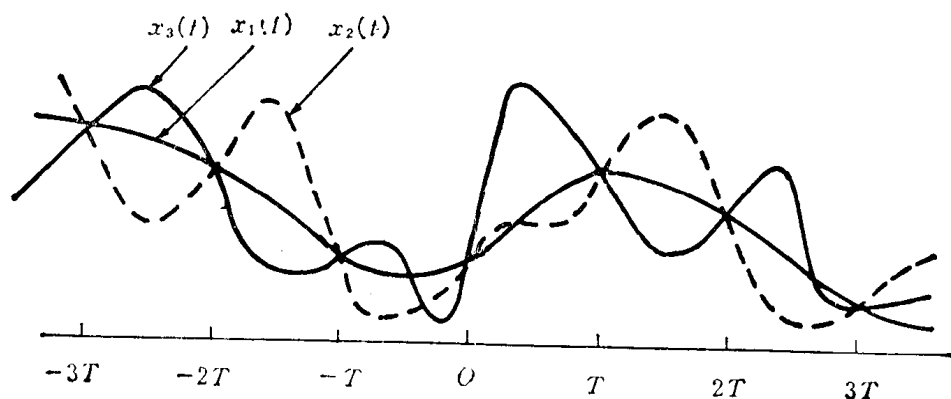


图8.1 在 T 的整数倍处,数值相等的三个连续时间信号

号，在 T 的整数倍处具有相等的值，即，

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$

一般说，存在有无限多个信号，它们都能产生一个给定的抽样值集合。然而，我们将会看到，若一信号是带限的，且相对于信号中存在的最高频率来说，各抽样值取得足够地相互靠近，则抽样值就唯一地确定信号，并且可以完美地恢复原信号。这个基本结果，在7.4节中已从脉冲幅度调制的角度提出过。具体说，若一带限信号 $x(t)$ 对周期脉冲串调幅，这相当于抽取了一系列等间隔的时间小段，若调制脉冲串的基频大于 $x(t)$ 中存在的最高频率的两倍，则 $x(t)$ 可用低通滤波精确地恢复。而且，恢复 $x(t)$ 的能力与各个脉冲的持续时间无关。于是，正如图8.2和图8.3所提示的，当这一持续时间任意小时，脉冲幅度调制实际上就是用等

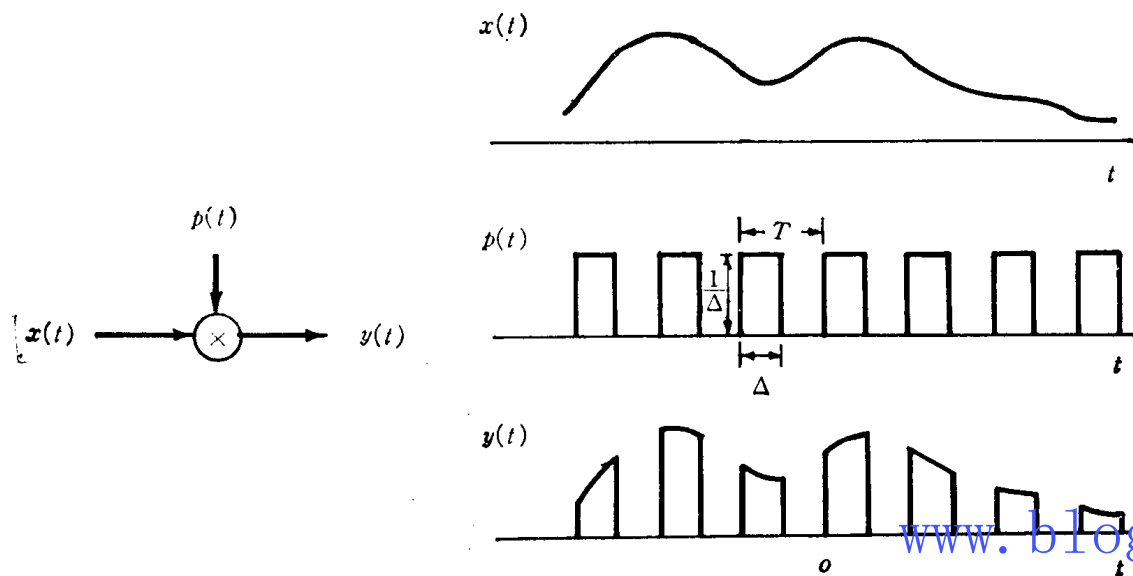


图8.2 脉冲幅度调制，若 $\Delta \rightarrow 0$ ， $p(t)$ 趋于一个冲激串

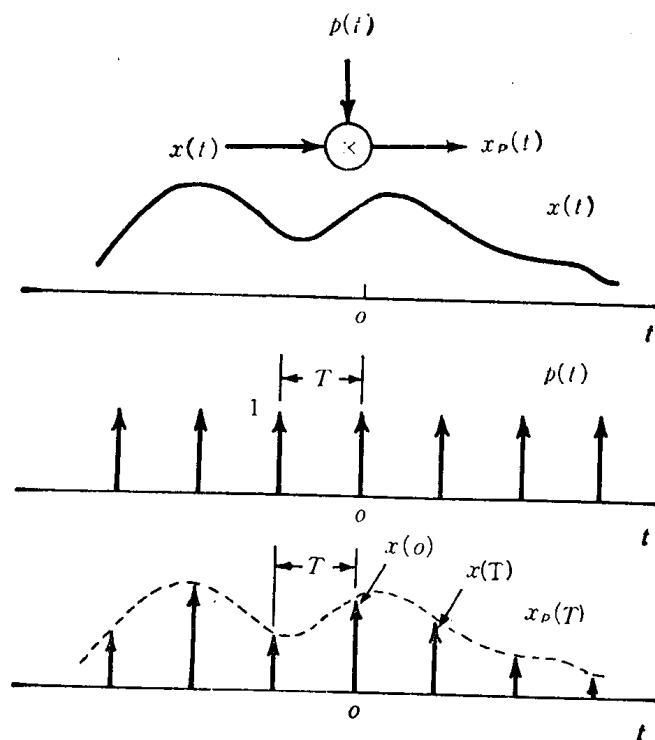


图8.3 用冲激串进行脉冲幅度调制

时间间隔的瞬时抽样值表示 $x(t)$ 。在图8.2的脉冲幅度调制系统中, 已把脉冲串幅度标成与脉冲宽度 Δ 成反比, 因为在任何实际的脉冲幅度调制系统中, 当 Δ 变小时, 为要保持已调信号的时间平均功率恒定, 这一点是特别重要的。如图8.3所示, 当 Δ 趋向于零时, 则已调信号成为一冲激串, 其各冲激的值相当于在相距 T 秒间隔处 $x(t)$ 的瞬时抽样值。

8.1.1 冲激串抽样

按照分析一般的脉冲调幅时所采用的同一种方式, 我们来考虑图8.3所示冲激串抽样的特殊情况。冲激串 $p(t)$ 称为抽样函数, 其周期 T 称为抽样周期, 而 $p(t)$ 的基频 $\omega_s = 2\pi/T$ 称为抽样频率。在时域有

$$x_p(t) = x(t)p(t) \quad (8.1a)$$

式中

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \quad (8.1b)$$

$x_p(t)$ 是一冲激串, 其各冲激的大小等于 $x(t)$ 在间隔为 T 处的抽样值, 亦即,

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \quad (8.2)$$

由调制性质 (见4.8节)

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * P(\omega)] \quad (8.3)$$

并由例4.15

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (8.4)$$

因此,

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \quad (8.5)$$

这就是说, $X_p(\omega)$ 是频率的周期函数, 它由许多与 $1/T$ 成比例的 $X(\omega)$ 的复制品经移位相加所组成, 如图8.4所示。在图8.4(c)中, 因 $\omega_M < \omega_s - \omega_M$, 或等价地 $\omega_s > 2\omega_M$, 因而在 $X(\omega)$ 的各移位复制品之间没有交迭。而在图8.4(d)中, 因 $\omega_s < 2\omega_M$, 故有交迭。对于图8.4(c)所示的情况, $X(\omega)$ 在抽样频率整数倍处精确地重复出现。因此, 若 $\omega_s > 2\omega_M$, 则如图8.5所示, 可用一个增益为 T 、截止频率大于 ω_M 而小于 $\omega_s - \omega_M$ 的低通滤波器从 $x_p(t)$ 中精确地恢复 $x(t)$ 。这个基本结果称为抽样定理, 可叙述如下^①:

①这一重要而雅致的定理, 在数学文献中以各种形式得到已有许多年了。例如, 见 J.M. Whittaker, "Interpolatory Function Theory," Cambridge tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 33 (Cambridge, 1935), Chap. 4. 直到1949年 C. Shannon 的经典论文: "Communication in the Presence of Noise" (Proceedings of IRE, January, 1949, pp. 10-21) 出版之前, 这一定理并未在通信理论的文献中明显的出现。然而, H. Nyquist 在 1928 年和 D. Gabor 在 1946 年, 根据傅里叶级数的应用已经指出, $2TW$ 个数已足以代表一个时间间隔为 T 、最高频率为 W 的函数。[H. Nyquist, Certain Topics in Telegraph Transmission Theory, AIEE Transactions, 1946, P617; D. Gabor, Theory of Communication, Journal of IEE 93 No. 26 (1946): 429.]

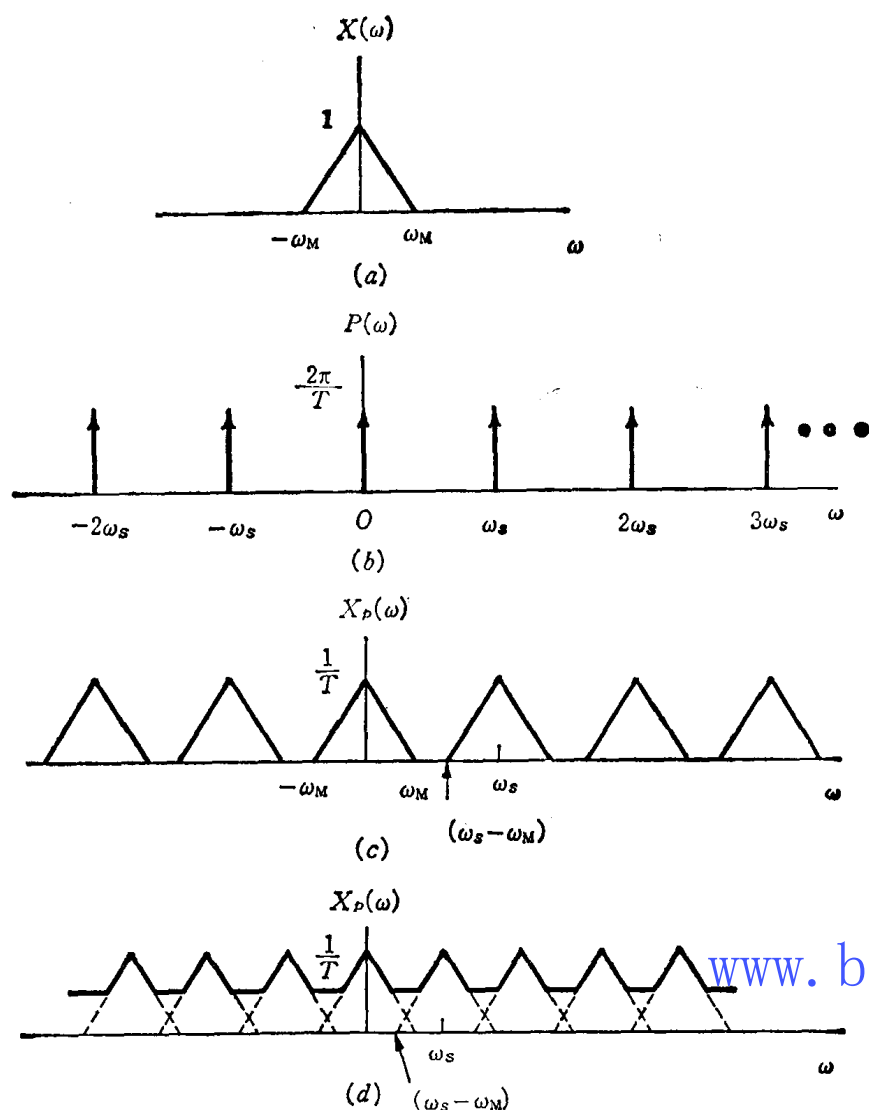


图8.4 时域抽样在频域中的影响：(a)原信号的频谱；(b)抽样函数的频谱；
(c) $\omega_s > 2\omega_M$ 时，抽样信号的频谱；(d) $\omega_s < 2\omega_M$ 时，抽样信号的频谱

抽样定理：

设 $x(t)$ 为一带限信号，在 $|\omega| > \omega_M$ 时 $X(\omega) = 0$ 。若

$$\omega_s > 2\omega_M$$

式中

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

则 $x(t)$ 由它的抽样值 $x(nT)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，唯一地确定。

已知这些抽样值时，可通过生成一个周期冲激串，其相继冲激的大小等于相继的抽样值，然后，这一冲激串通过一个增益为 T ，截止频率大于 ω_M 而小于 $\omega_s - \omega_M$ 的低通滤波器处理，得到的输出信号将精确地等于 $x(t)$ 。

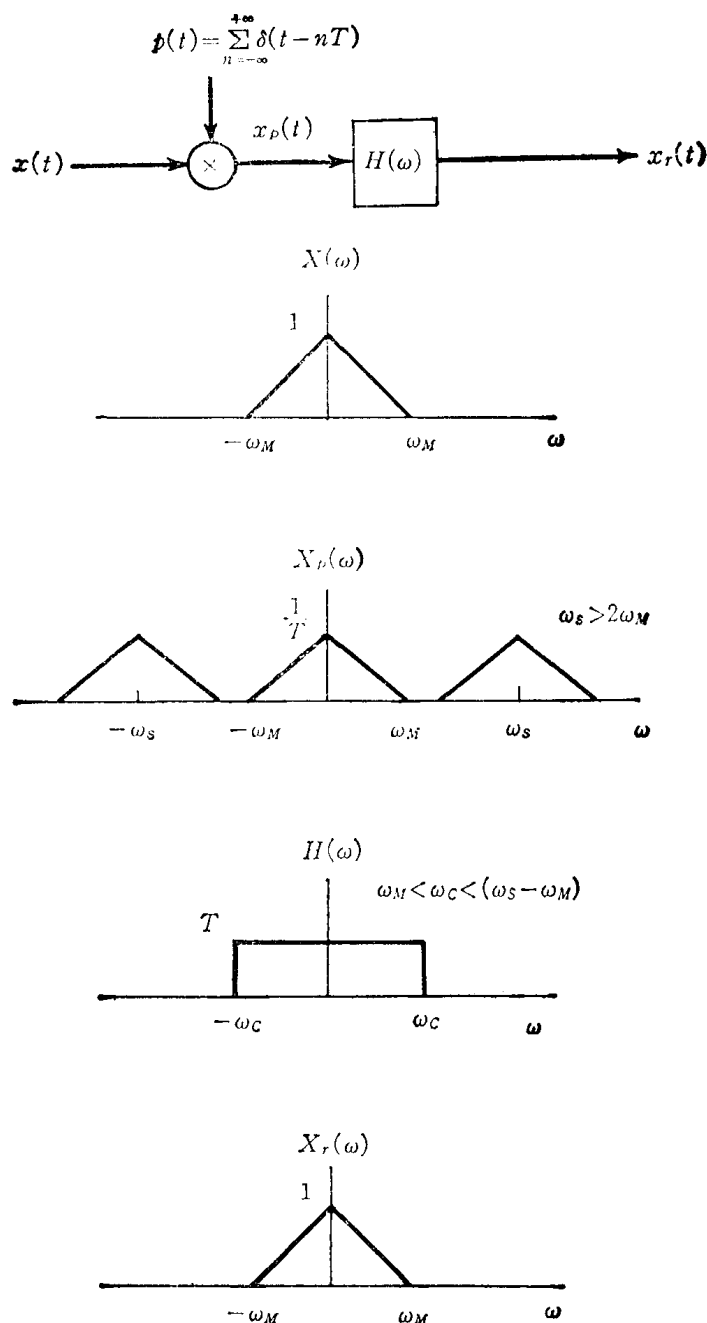


图8.5 用理想低通滤波器从信号的抽样值精确地恢复连续时间信号

抽样频率 ω_s 亦称做奈奎斯特频率。频率 $2\omega_M$ 通常称为奈奎斯特率，而按照抽样定理，抽样频率必须大于奈奎斯特率。

8.1.2 零阶保持抽样

抽样定理确立了带限信号可由其抽样值唯一地表示的事实，这一定理是根据冲激串抽样引伸出来的。在实践上，近似于冲激的大幅度窄脉冲，是比较难以产生和传输的。而产生所谓零阶保持形式的抽样信号，通常是比较方便的，这种系统在一给定抽样瞬间对 $x(t)$ 抽样，并保持该值直到下一个抽样时刻，如图8.6所示。从零阶保持的输出恢复 $x(t)$ ，仍然可用低通滤波器来实现。然而，在此情况下，所需的滤波器在通带内不再具有恒等增益。为导出所需

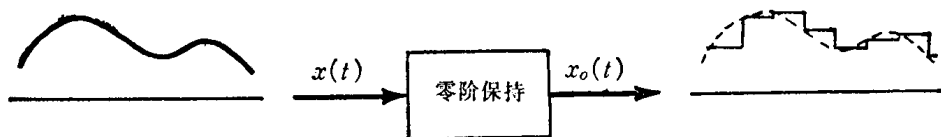


图8.6 应用零价保持的抽样

滤波器的特性。我们首先指出，如图8.7所示，零阶保持的输出 $x_o(t)$ ，在原理上可以由冲激串抽样后接一个具有矩形冲激响应的 LTI 系统而生成。为从 $x_o(t)$ 恢复 $x(t)$ ，设考虑用一个具有冲激响应 $h_r(t)$ 及频率响应 $H_r(\omega)$ 的 LTI 系统来处理 $x_o(t)$ ，这一系统与图8.7的系统级联如图8.8所示，我们希望确定图中的 $H_r(\omega)$ ，以使 $r(t) = x(t)$ 。比较图8.8与图8.5中的系统可以看出，若 $h_o(t)$ 和 $h_r(t)$ 的串联组合是图8.5中所用的理想低通滤波器 $H(\omega)$ ，则 $r(t) = x(t)$ 。因为，由例4.10及时移性质4.6.3，

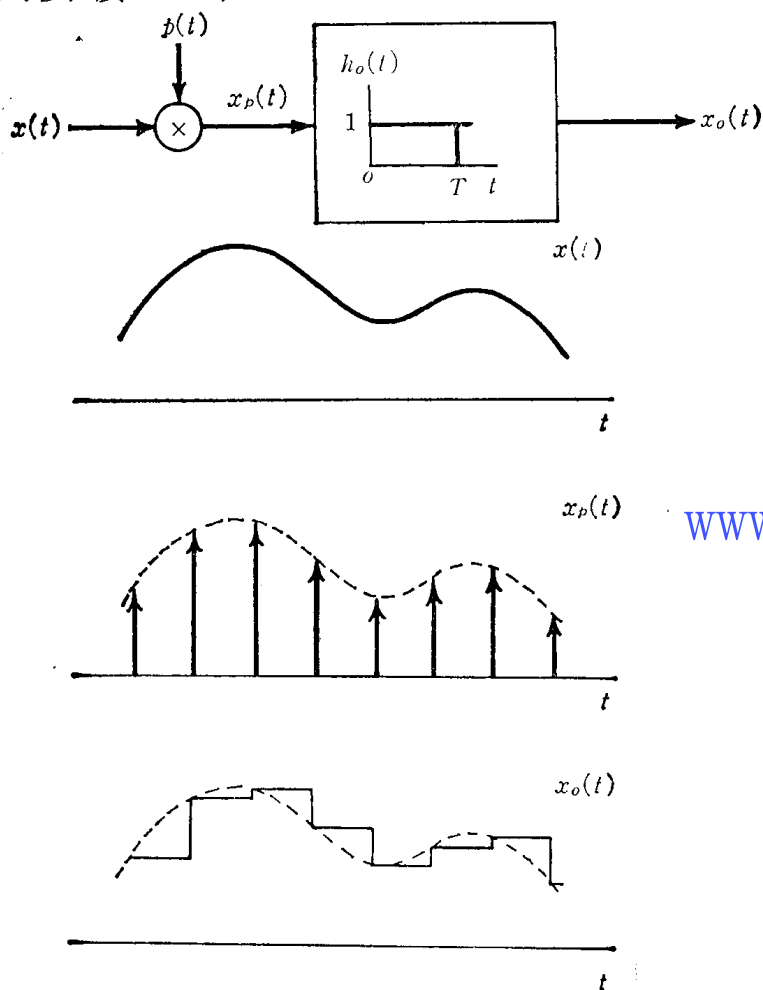


图8.7 零阶保持看作冲激串抽样后再与矩形脉冲卷积

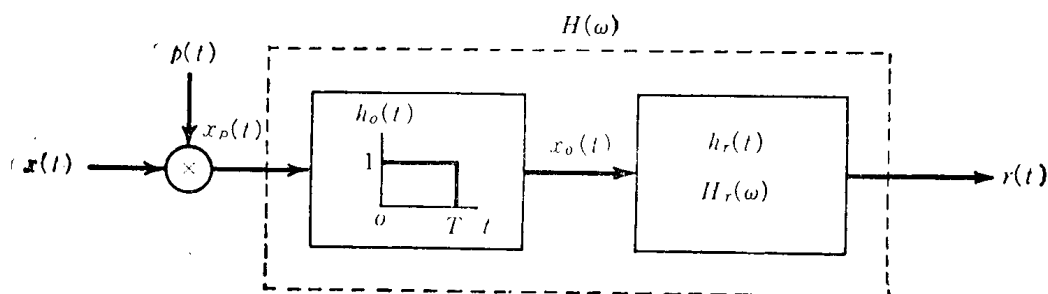


图8.8 零阶保持（图8.7）与恢复滤波器的级联表示

$$H_0(\omega) = e^{-j\omega T/2} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right) \quad (8.6)$$

这就要求

$$H_r(\omega) = \frac{e^{j\omega T/2} H(\omega)}{\left[\frac{2 \sin (\omega T/2)}{\omega} \right]} \quad (8.7)$$

例如, 在 $H(\omega)$ 的截止频率为 $\omega_s/2$ 时, 接在零阶保持系统后面的恢复滤波器的理想幅度和理想相位特性, 如图8.9所示

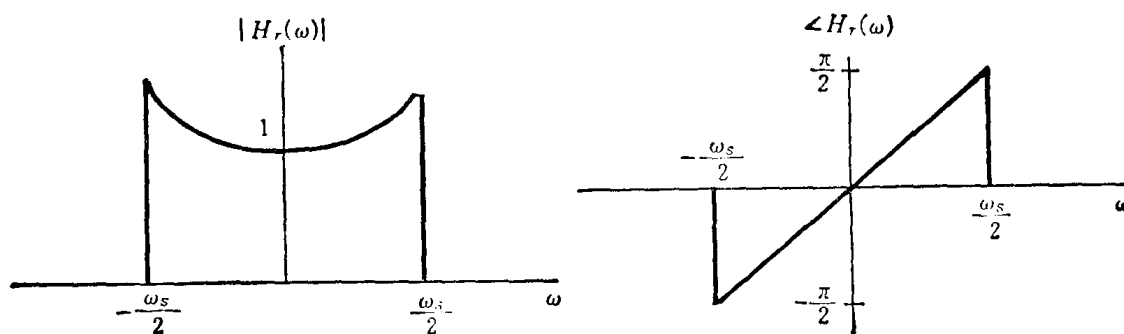


图8.9 零阶保持恢复滤波器的幅度和相位特性

在许多场合, 零阶保持可看做原信号的一种适当的近似, 它不需要附加低通滤波, 而且在本质上, 它表示一种可能的抽样值间的内插, 虽则这种内插非常粗糙。在下一节, 要更加详细地研究把信号由其抽样值重建看做内插过程的一般概念。

8.2 用内插法由抽样值恢复信号

www.blogoil.com

无论是近似还是精确地从抽样值来重建一个函数, 内插是一种经常采用的方法。一种简单的内插法, 就是在8.1节讨论过的零阶保持。另一种简单而有用的内插形式是线性内插, 相邻的抽样点间用直线连结, 如图8.10所示。在更复杂的内插公式中, 抽样点间可能由高阶多



图8.10 抽样点间的线性内插。虚线代表原始信号, 实线代表线性内插

项式或其他函数曲线相连结。

如已在8.1节所看到的, 对于带限信号, 若抽样时刻足够地靠近, 则信号可被精确地恢复, 亦即, 通过采用低通滤波器, 抽样点间的精确内插就可以实现。当我们研究图8.5中的低通滤波器在时域中的效果时, 把 $x(t)$ 的重建看作一个内插过程, 就变得明显了。具体说, 输出 $x_r(t)$ 为:

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

或者当 $x_p(t)$ 由式(8.2)给出时,

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t-nT) \quad (8.8)$$

因为式(8.8)描述了如何在抽样点间去拟合一条连续曲线,故它表示了一个内插公式。对于图8.5中的理想低通滤波器 $H(\omega)$ 来说, $h(t)$ 由下式给出:

$$h(t) = T \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_c t}{\pi} \right) \quad (8.9)$$

因此,

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) T \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \left[\frac{\omega_c (t-nT)}{\pi} \right] \quad (8.10)$$

根据式(8.10),在 $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ 时,信号的重建过程如图8.11所示。

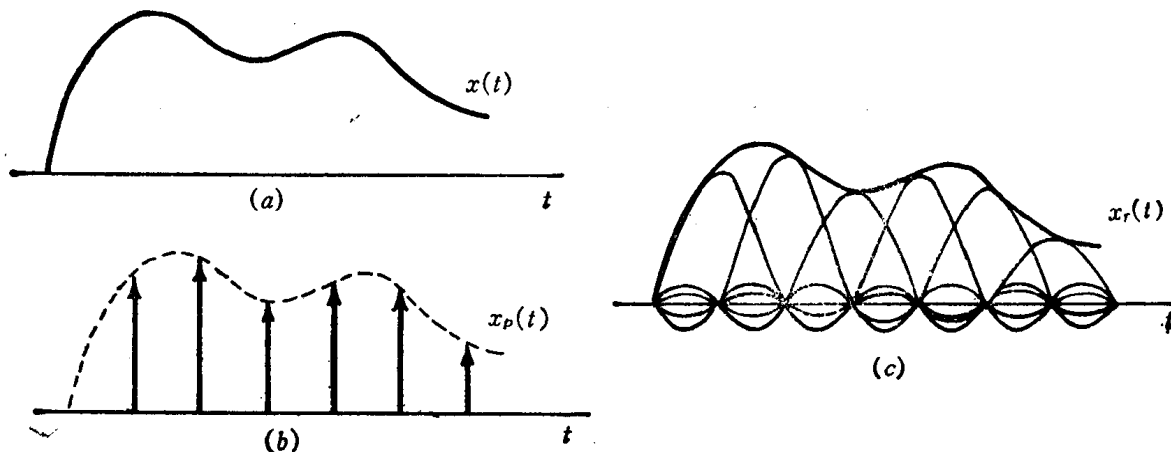


图8.11 采用 sinc 函数的理想带限内插

像式(8.10)那样采用 sinc 函数的内插,通常称做带限内插,因为若 $x(t)$ 是带限的,且抽样频率满足抽样定理的条件,这一内插可实现原信号的精确重建。由于要对一个理想低通滤波器非常好的逼近是较难实现的,在许多情况下,利用精度较低但比较简单的滤波器(或相当于内插函数) $h(t)$,例如像以前已指出的,零阶保持可看作是一种抽样值间的内插形式,其内插函数 $h(t)$ 就是图8.7中所画的冲激响应 $h_0(t)$ 。在那种意义下,当图8.7中的 $x_0(t)$ 相当于 $x(t)$ 的近似时,系统 $h_0(t)$ 就代表精确内插所要求的理想低通滤波器的一种近似。图8.12表示零阶保持内插滤波器传递函数的幅度,而在它上面迭加了精确内插滤波器所要求的传递函数。由图8.12和图8.7都可看到,零阶保持是一种非常粗糙的近似,虽然在某些情况

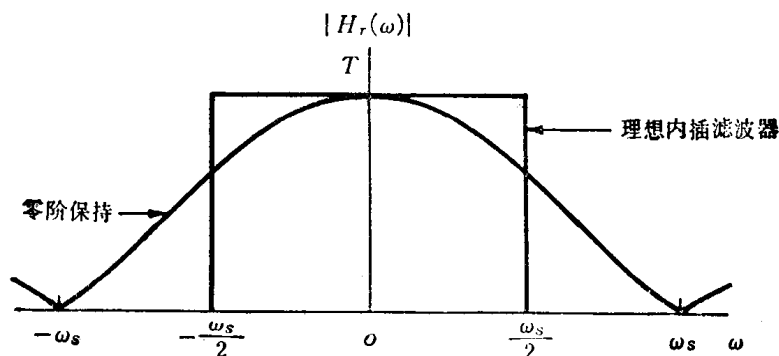
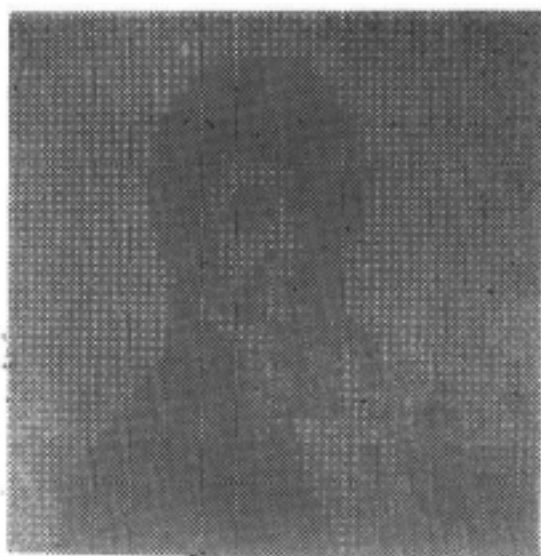
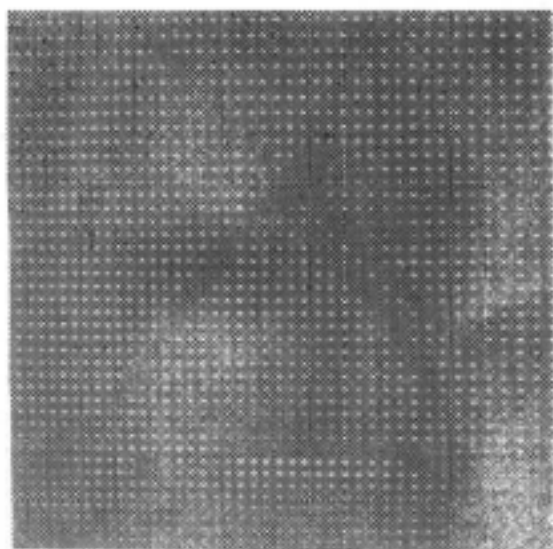
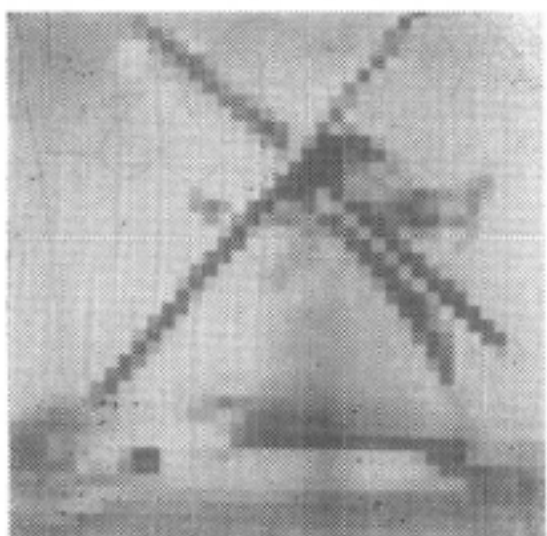


图8.12 零阶保持和理想内插滤波器的转移函数

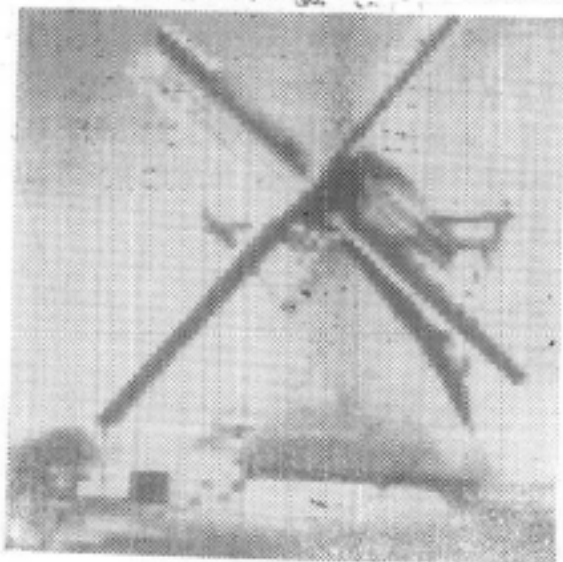
下,它是能满足要求的,例如,若在一定的应用中,本来就存在外加的低通滤波,则这将会改善整个内插。这一点用照片的例子在图8.13中说明,图8.13(a)所示为一幅用“冲激”抽



(a)



(b)



(c)

图8.13 (a)图2.2和图4.2的原图用冲激抽样; (b)对(a)中的照片作零阶保持。视觉系统固有地引入低通滤波, 其截止频率随距离增加而增加。于是, 在远处看来, 图8.13(b)中镶嵌的不连续性不能分辨; (c)水平和垂直的抽样间隔是(a)和(b)中的一半时, 冲激抽样后再加零阶保持的结果

样的照片（即用空间窄脉冲抽样）。图8.13(b)是对图8.13(a)运用二维零阶保持的结果，在近距离看时，图8.13(b)具有由零阶保持所产生的镶嵌效应。然而，人类视觉系统固有地产生低通滤波的效应，因此在远处看时，图案的不连续性是不能分辨的。在图8.13(c)中，仍然应用零阶保持，但这里每个方向的抽样间隔是图8.13(a)中的一半，虽然已固有地施加了显著的低通滤波，但在正常观察时，特别在用放大镜观察时，镶嵌效应仍然是有些明显的。

另一种常常采用的内插近似形式是线性内插。对线性内插来说，重建的信号是连续的，不过其导数不连续。线性内插有时称为一阶保持，这在图8.10中已经表明，它也可以看成图8.5和式(8.8)形式的内插，但具有三角形 $h(t)$ ，如图8.14所示，有关的传递函数 $H(\omega)$ ，也在图8.14中画出， $H(\omega)$ 由下式表示：

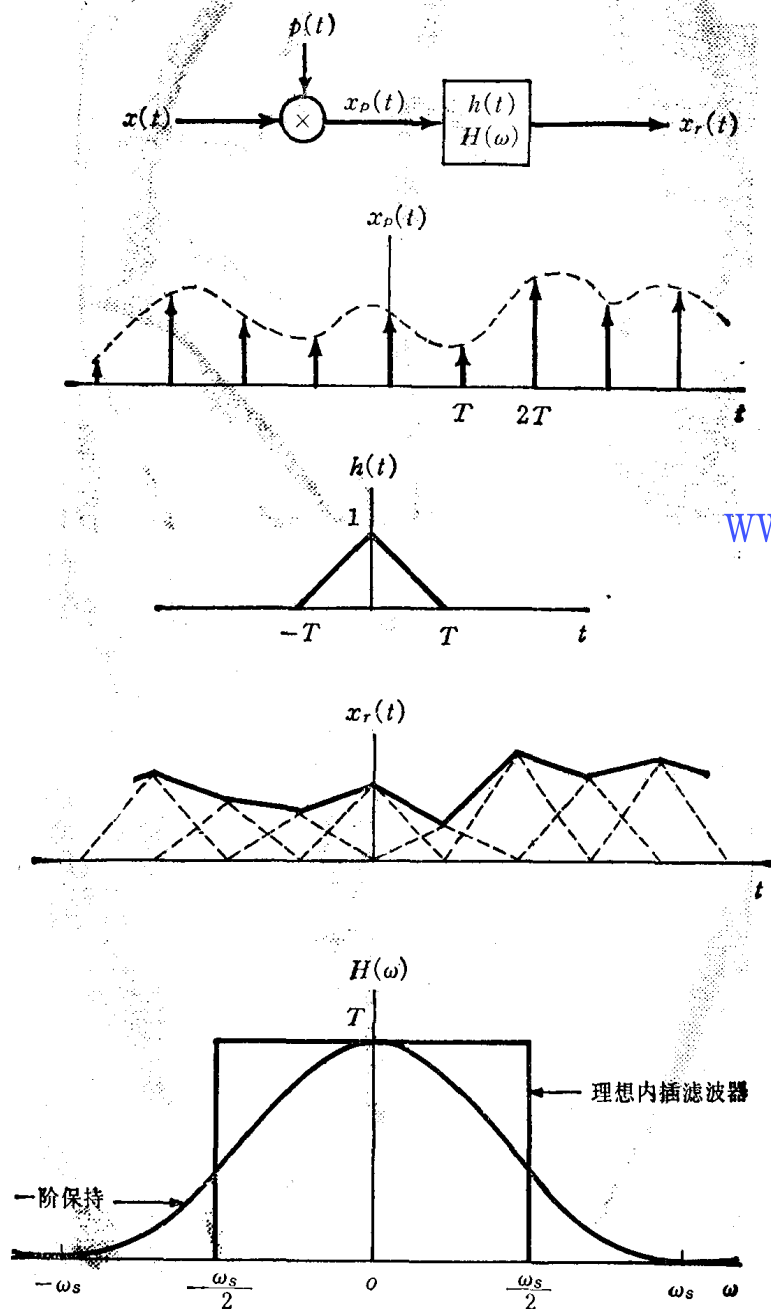


图8.14 线性内插（一阶保持）看作冲激串抽样再加上与三角形冲激响应相卷积

$$H(\omega) = \frac{1}{T} \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2 \quad (8.11)$$

图8.14表示重迭在理想内插滤波器传递函数上的一阶保持传递函数。图8.15是对应于图8.13的同样一些照片，但对已抽样照片应用了一阶保持。

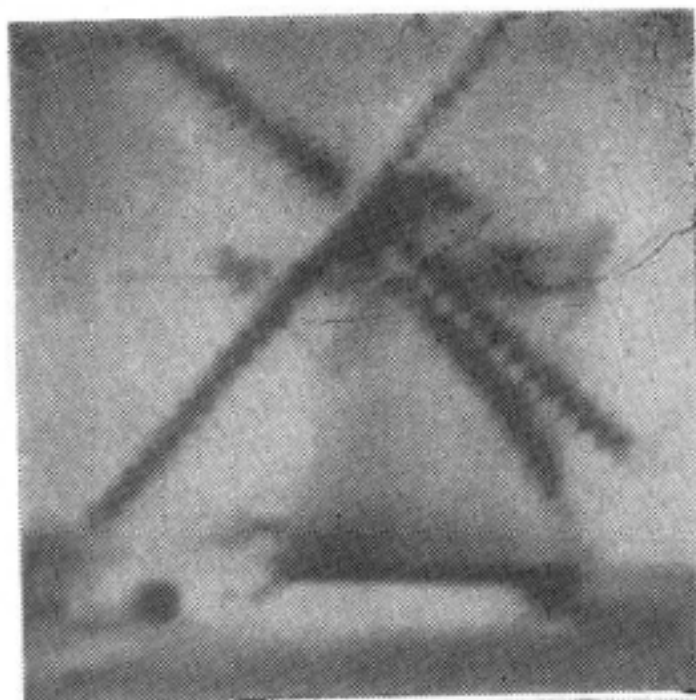


图8.15 在图8.13的已抽样照片上应用了一阶保持

8.3 欠抽样效应：混迭

在上一节讨论中，假定了抽样频率足够地高，因此抽样频率的条件已经满足。如图8.14中所说明的，在 $\omega_s > 2\omega_M$ 的情况下，已抽样信号的频谱是由 $x(t)$ 频谱的许多精确复制品所组成，这一点是构成抽样定理的基础。当 $\omega_s < 2\omega_M$ 时， $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 不再在 $X_p(\omega)$ 中重现，因而不能再由低通滤波来恢复。这种在式(8.5)中的各项互相交迭的效应称为混迭。在这一节中，要研究混迭的影响和后果。

很清楚，若图8.5的系统加上具有 $\omega_s < 2\omega_M$ 的信号时，则重建的信号 $x_r(t)$ 不再等于 $x(t)$ 。然而，正如在习题8.4中所研究的，原始信号和用带限内插所重建的信号 $x_r(t)$ 在抽样时刻总是相等的，亦即，对任何选定的 ω_s ，总是有

$$x_r(nT) = x(nT), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.12)$$

由详细研究比较简单的正弦信号抽样的情况，可得到在 $\omega_s < 2\omega_M$ 时关于 $x(t)$ 和 $x_r(t)$ 间关系的更深刻的理解。于是，设 $x(t)$ 给定为

$$x(t) = \cos \omega_0 t \quad (8.13)$$

其傅里叶变换 $X(\omega)$ 如图8.16(a)所示。在此图中，为了讨论方便，图形上已对 ω_0 处和 $-\omega_0$ 处的冲激加以区别。我们来考察抽样信号的频谱 $X_p(\omega)$ ，并特别注意在抽样频率 ω_s 固定时频率 ω_0 改变的影响。在图8.16(b)~(e)中，用图形说明了几个 ω_0 值时的 $X_p(\omega)$ ，还用虚线指出了图8.5中具有 $\omega_c = \omega_s/2$ 的低通滤波器的通带。注意，在(b)或(c)中，因为 $\omega_0 < \omega_s/2$ ，故没有混迭发生。另一方面，在(d)和(e)中，混迭是存在的。在这四种情况下的每一种时，其低通滤波器输出 $x_r(t)$ 如下：

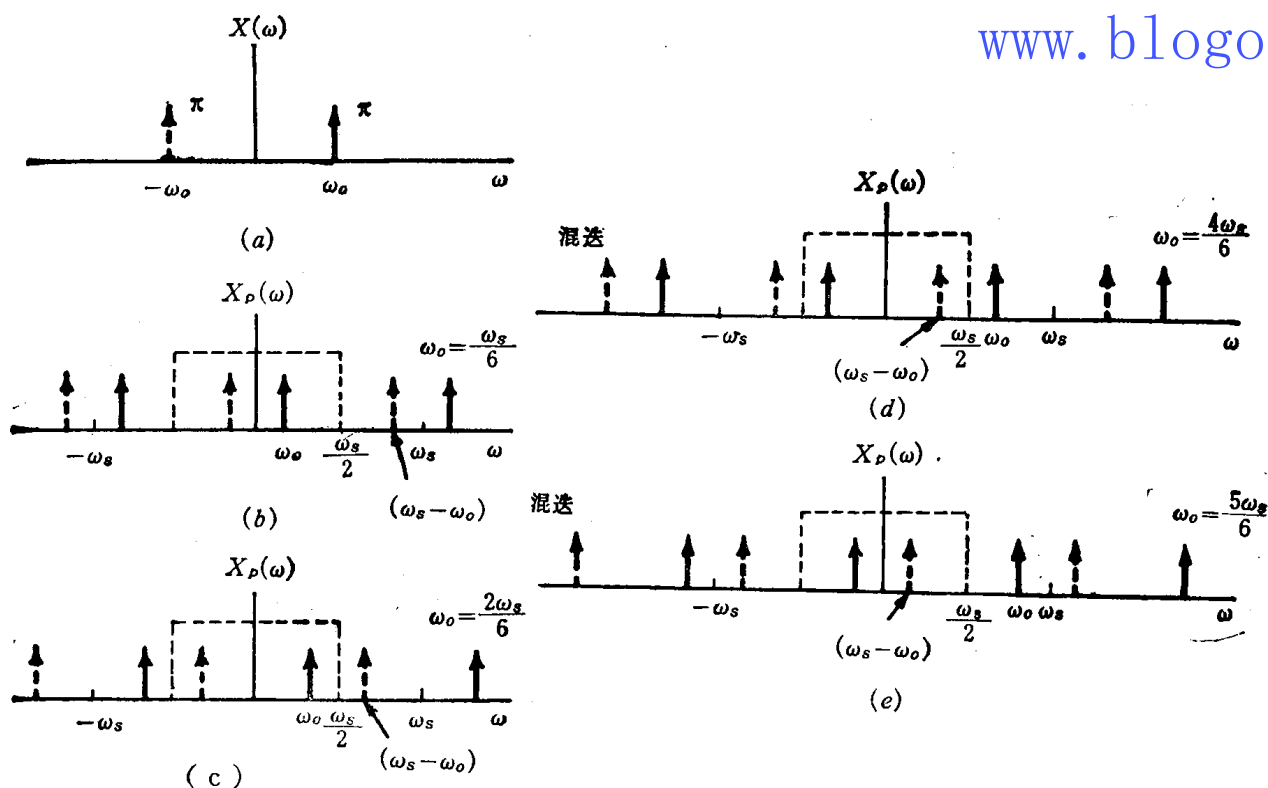


图8.16 过抽样和欠抽样在频域的影响：(a)原始正弦信号的频谱；(b)、(c) $\omega_s > 2\omega_0$ 时抽样信号的频谱；(d)、(e)在 $\omega_s < 2\omega_0$ 时抽样信号的频谱

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \omega_0 &= \frac{\omega_s}{6}, & x_r(t) &= \cos \omega_0 t = x(t); \\
 (b) \quad \omega_0 &= \frac{2\omega_s}{6}, & x_r(t) &= \cos \omega_0 t = x(t); \\
 (c) \quad \omega_0 &= \frac{4\omega_s}{6}, & x_r(t) &= \cos(\omega_s - \omega_0) \neq x(t); \\
 (d) \quad \omega_0 &= \frac{5\omega_s}{6}, & x_r(t) &= \cos(\omega_s - \omega_0) \neq x(t).
 \end{aligned}$$

当混迭发生时, 原来的频率 ω_0 呈现出完全相同或较低频率 $\omega_s - \omega_0$ 的“混迭”频率。当 $\omega_s/2 < \omega_0 < \omega_s$ 时, 如 ω_0 相对于 ω_s 而增加, 则输出频率 $\omega_s - \omega_0$ 下降。例如, 当 $\omega_s = \omega_0$ 时, 则重建的信号是一直流(常数), 这与以下事实相一致, 即当每周期抽样一次时, 所有抽样值就完全相等, 并与直流信号 ($\omega_0 = 0$) 抽样所得到的样值相同。

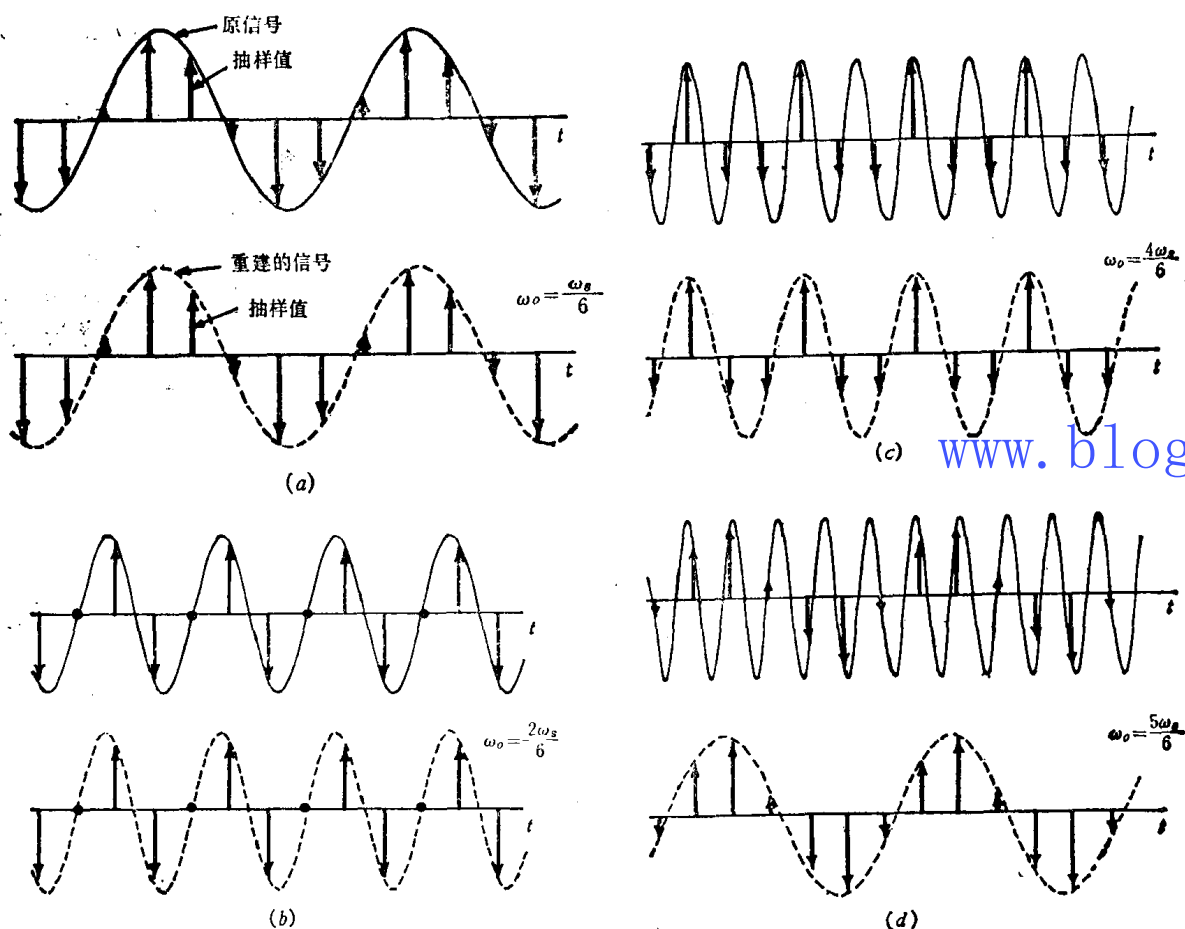


图8.17 关于正弦信号的混迭效应。对于四种 ω_0 值, 画出了每种频率时的原始正弦信号(实线)、抽样值和重建的信号(虚线): (a) $\omega_0 = \omega_s/6$; (b) $\omega_0 = 2\omega_s/6$; (c) $\omega_0 = 4\omega_s/6$; (d) $\omega_0 = 5\omega_s/6$ 。在(a)和(b)中无混迭发生, 而在(c)和(d)中有混迭

在图8.17中, 已画出了上述每种情况下的信号 $x(t)$ 、抽样值和重建的信号 $x_r(t)$ 。从这些图中可以看到, 低通滤波器怎样在抽样值间内插, 尤其可看到, 总是使频率小于 $\omega_s/2$ 的正弦波与 $x(t)$ 的各抽样值相吻合。

把较高频率映照到较低频率的欠抽样效应, 就是频闪效应所依据的原理。例如, 考虑画于图8.18的情况, 图中有一等速旋转的圆盘, 圆盘上画有单独一根径向线。闪光门的作用好

像一个抽样系统，因为它按一定的周期率在极短暂的时间间隔内照亮圆盘。当闪光门频率较圆盘的旋转速度高得多时，可正确地感知圆盘的旋转速度。当闪光门频率小于圆盘频率的两倍时，则圆盘的旋转频率看起来较其实际情况要低（而且，附带地说，有相反的旋转方向）。当每转一圈闪光一次，即相当于 $\omega_s = \omega_0$ 时，则径向线看起来是静止的（亦即，圆盘旋转频率及其各谐波已混迭至零频率）。一种类似的效果通常可在电影中看到，电影里马车轮子的转速看起来要比按照车子向前运动应有的转速慢得多，且有时旋转方向是相反的。在这种情况下，抽样过程与活动电影是许多单帧画面的序列这种事实相对应，其帧速（通常在每秒18帧到24帧之间）相当于抽样频率。

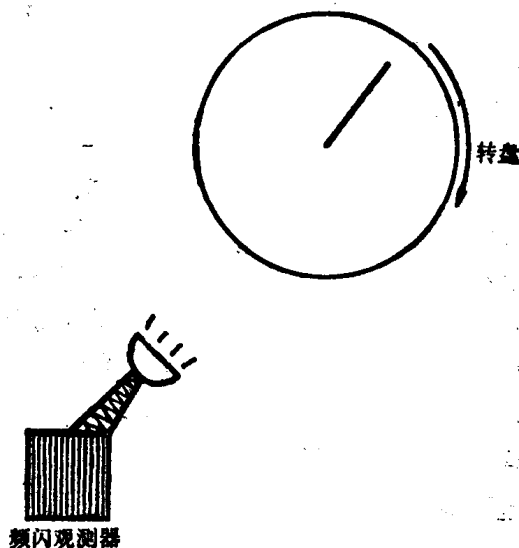


图8.18 频闪效应

上面的讨论是把频闪效应看作由于欠抽样造成混迭的一个例子的一般性启示，而且在许多情况下，它代表了混迭的一种有益的应用。混迭效应的另一种有效的应用，在称做取样示波器的测试仪器中出现。这种仪器是用来观察极高频率波形的，它利用抽样原理把这些高频信号混迭至比较易于显示的频率，这一应用在习题8.9中更详细地进行研究。

8.4 连续时间信号的离散时间处理 www.blogoil.com

在许多应用中，要处理一个连续时间信号时，首先把连续时间信号变换为离散时间信号，而在处理以后，再变回到连续时间信号，这样会有很大的好处。离散时间信号处理可用通用的或专用的计算机、微处理机或任何特别为离散时间信号处理而制造的各种装置来实现。

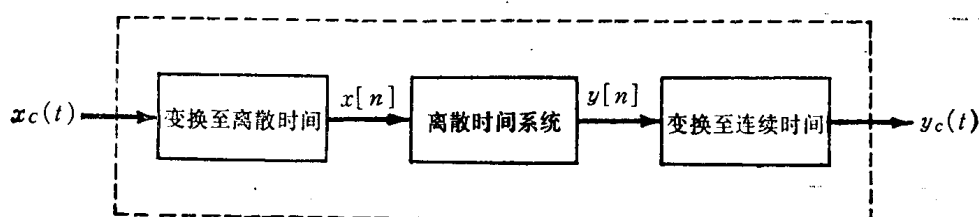


图8.19 连续时间信号的离散时间处理

概括地说，这种连续时间信号处理方法可以看做如图8.19所示的三种处理步骤的级联，其中 $x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 是连续时间信号，而 $x[n]$ 和 $y[n]$ 是代表 $x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 的离散时间信号。当然，从系统的输入和输出均为连续时间信号的意义上来说，图8.19中的整个系统是一个连续时间系统。把连续时间信号变换到离散时间信号，以及从信号的离散时间表示来恢复连续时间信号的理论基础，是8.1节中讨论过的抽样定理。在抽样频率符合抽样定理的条件下，通过周期抽样过程，连续时间信号 $x_c(t)$ 精确地由瞬时抽样值 $x_c(nT)$ 的序列所表示，就是说，离散时间序列 $x[n]$ 与 $x_c(t)$ 的关系为

$$x[n] = x_c(nT) \quad (8.14)$$

对应于图8.19中第一个系统从 $x_c(t)$ 到 $x[n]$ 的变换, 称为连续时间至离散时间变换, 并简写为 C/D 。而对应于图8.19中的第三个系统为相反的变换, 简写为 D/C , 它表示离散时间到连续时间的变换。在诸如各种数字计算机和数字系统这样的系统中, 离散时间信号表示为数字形式。通常, 用来实现 C/D 变换的装置, 称为模拟—数字 ($A-D$) 变换器, 用于实现 D/C 变换的变换器, 称为数字—模拟 ($D-A$) 变换器。

为了进一步理解连续时间信号 $x_c(t)$ 和它的离散时间表示 $x[n]$ 间的关系, 把连续时间至离散时间的变换, 表示为一个周期性抽样过程再加上一个由冲激串至一个序列的映射是有益的, 这两个步骤由图8.20说明。第一步代表抽样过程, 冲激串 $x_p(t)$ 相当于一个冲激序列, 其大小相当于 $x_c(t)$ 的各个抽样值, 其时间间隔等于抽样周期 T 。在从冲激串到离散时间序列的变换中, 我们得到 $x[n]$, 它相当于 $x_c(t)$ 抽样值的同一个序列, 但用了新的独立变量 n 表示的单位间隔。因此, 实际上, 从抽样值的冲激串至抽样值的离散时间序列的变换, 可以看作是一种时间的归一化。在图8.20(b)和(c)中, 把 $x_p(t)$ 变换到 $x[n]$ 时的时间归一化是明显的, 图中表明了抽样速度 $T=T_1$ 和 $T=2T_1$ 时的 $x_p(t)$ 和 $x[n]$ 。

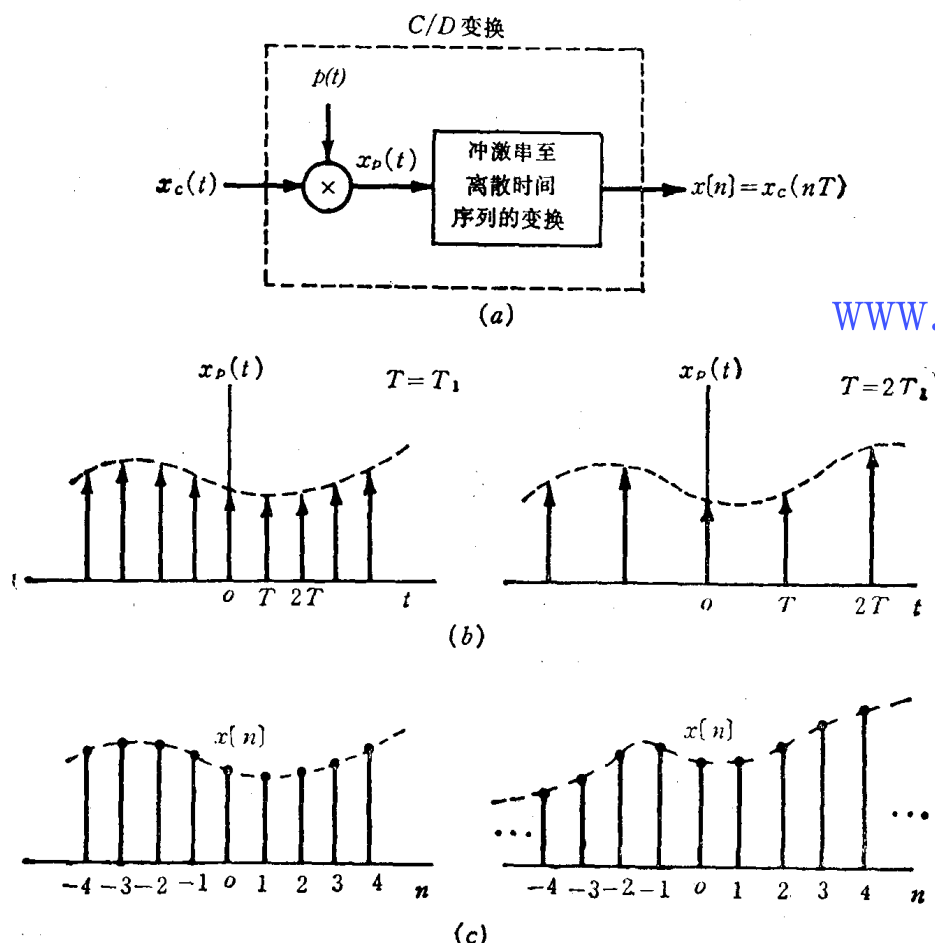


图8.20 周期冲激串变换到离散时间序列: (a)整个系统; (b)两种抽样速度时的 $x_p(t)$, 虚线包络线表示 $x_c(t)$; (c)两种不同抽样速度时的输出序列

在频域中, $x_c(t)$ 和 $x_p(t)$ 间的关系就是由式(8.5)导出, 并由图8.4所示的:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(\omega - k\omega_s) \quad (8.15)$$

另一方面,通过对式(8.2)进行傅里叶变换,可用 $x_c(t)$ 的抽样值来表示 $X_p(\omega)$ 。因此,

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) \quad (8.16)$$

$$X_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT} \quad (8.17)$$

现在来研究由下式给出的 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (8.18)$$

或者,利用式(8.14)

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n} \quad (8.19)$$

比较式(8.17)和(8.19),可以看到, $X(\Omega)$ 和 $X_p(\omega)$ 是通过下式联系的

$$X(\Omega) = X_p\left(\frac{\Omega}{T}\right) \quad (8.20)$$

两种不同抽样速度时的 $X_c(\omega)$, $X_p(\omega)$ 和 $X(\Omega)$ 间的关系,如图8.21所示。从这一图中,可注意到 $X(\Omega)$ 是 $X_p(\omega)$ 的频率刻度改变了的复制品,尤其要注意的是以 2π 为周期的关于 Ω 的周期性。当然,这种周期性是任何离散时间傅里叶变换的特征。 $x[n]$ 的频谱与 $x_c(t)$ 的频谱,是通过式(8.15)表示的周期性重复再加上式(8.20)表示的线性频率刻度改变相联系的。这种周期性重复是图8.20中变换过程的第一步,也就是冲激串抽样的结果。式(8.20)的线性频率刻度改变,可以看做是由冲激串 $x_p(t)$ 变换到离散时间序列 $x[n]$ 时所引入的时间归一化的结果。根据4.6.5节傅里叶变换的时间尺度性质,时轴刻度改变 $1/T$ 倍,将导致频率轴刻度改变 T 倍。因此, $\Omega = \omega T$ 的关系是与从 $x_p(t)$ 到 $x[n]$ 的变换中时轴刻度改变 $1/T$ 倍的概念相一致的。

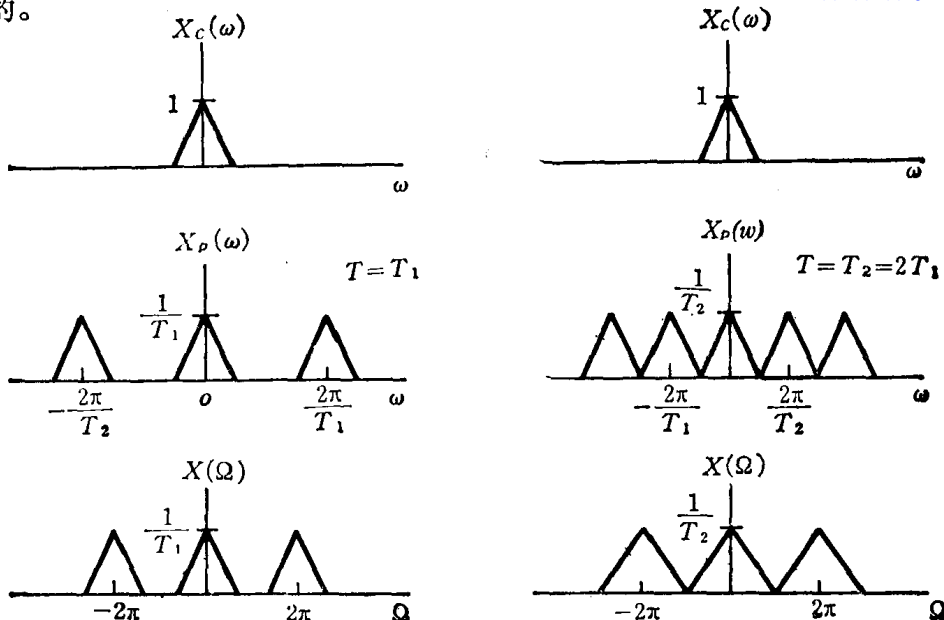


图8.21 两种不同抽样速度时, $X_c(\omega)$, $X_p(\omega)$ 和 $X(\Omega)$ 间的关系

在图8.19的总系统中,在用离散时间系统处理以后,所产生的序列要变回到连续时间信号,这个过程是图8.20中各个步骤的相反过程,具体说,由序列 $y[n]$ 可以生成一个连续时间冲激串 $y_p(t)$,然后,如图8.22所示,从这个冲激串恢复连续时间信号 $y_c(t)$,可通过

低通滤波来实现。

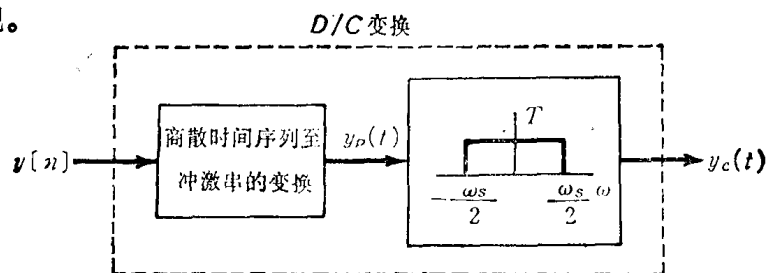


图8.22 离散时间序列到连续时间信号的变换

现在, 来考察如图8.23所示的图8.19的总体系统。很清楚, 若离散时间系统是一个恒等系统 (即, $x[n]=y[n]$), 假定抽样定理的条件满足时, 则总系统将为一恒等系统。通过研究图8.24中所描述的典型例子, 则对于具有更一般频率响应 $H(\Omega)$ 的总体系统的特性,

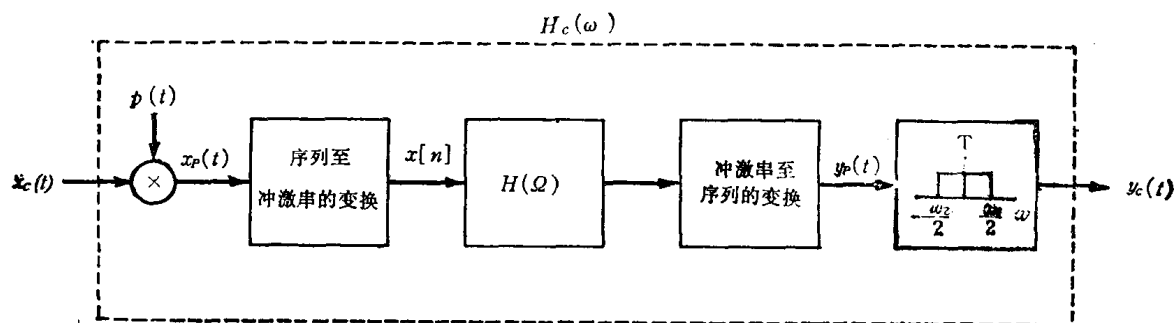


图8.23 利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的总体系统

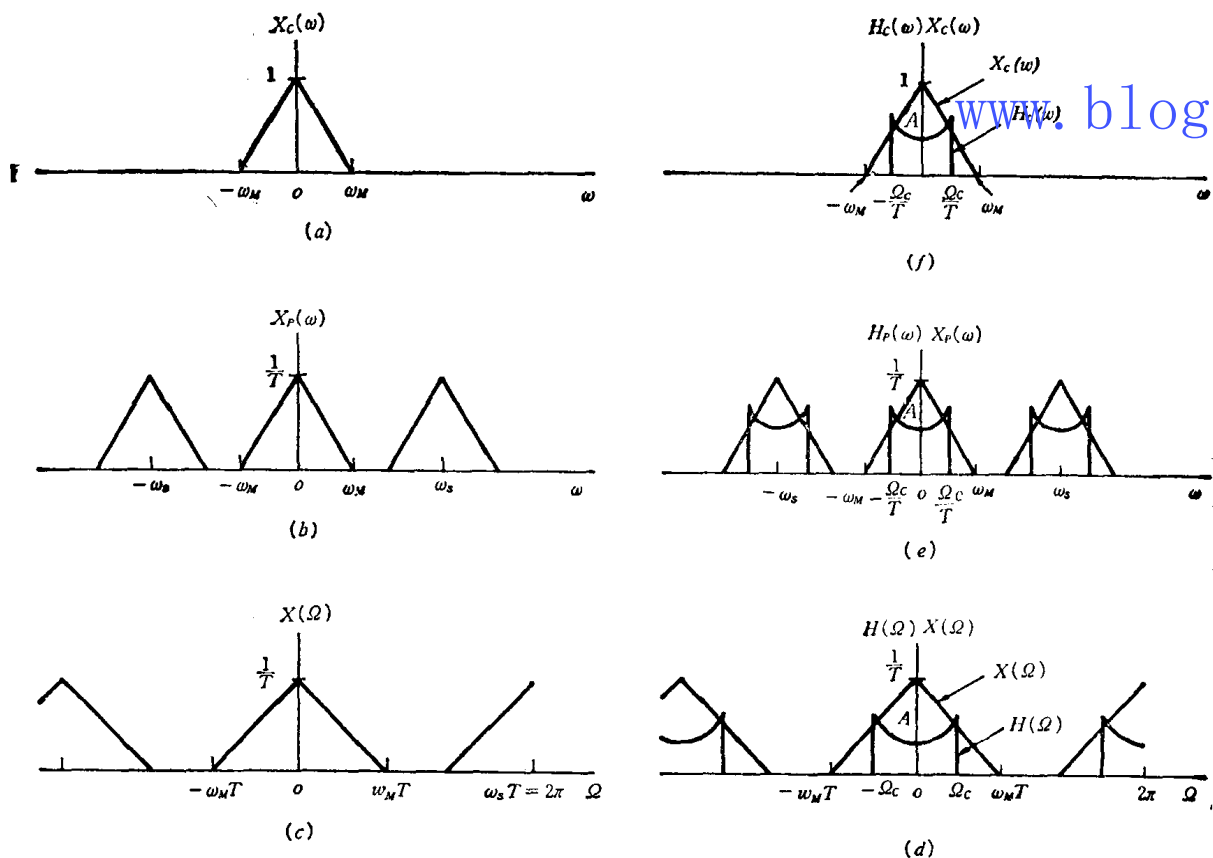


图8.24 图8.23中系统的频域说明: (a) 连续时间频谱 $X_c(\omega)$; (b) 冲激串抽样后的频谱; (c) 离散时间序列的频谱; (d) $H(\Omega)$ 和 $X(\Omega)$ 相乘以形成 $Y(\Omega)$; (e) 用来相乘以得到 $Y_p(\omega)$ 的频谱; (f) 用来相乘以得到 $Y_c(\omega)$ 的频谱

就可能更易于理解。在该图的左边是典型的频谱 $X_c(\omega)$ 、 $X_p(\omega)$ 和 $X(\Omega)$ ，相应于离散时间滤波器输出的频谱 $Y(\Omega)$ ，是 $X(\Omega)$ 和 $H(\Omega)$ 的乘积，这一乘积是以 $H(\Omega)$ 和 $X(\Omega)$ 重迭地画在图 8.24 (d) 中，从 $Y(\Omega)$ 到 $Y_c(\omega)$ 的变换，则相当于应用频率刻度改变和低通滤波，得出的频谱如图 8.24 (e) 和 (f) 所示。由于 $Y(\Omega)$ 是图 8.24 (d) 中的两个重迭频谱的乘积，故频率刻度改变和滤波要同时施加于两种频谱。比较图 8.24 (a) 和 (f)，显然有

$$Y_c(\omega) = X_c(\omega)H(\omega T) \quad (8.21)$$

因此，图 8.23 的总体系统，实际上等效于一个具有频率响应 $H_c(\omega)$ 的连续时间 LTI 系统，而 $H_c(\omega)$ 与离散时间频率响应 $H(\Omega)$ 由下式相联系

$$H_c(\omega) = \begin{cases} H(\omega T), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases} \quad (8.22)$$

等效的连续时间滤波器的频率响应，是离散时间滤波器频率响应的一个周期，但其频率轴刻度需线性改变。离散时间频率响应和等效连续时间频率响应的关系如图 8.25 所示。

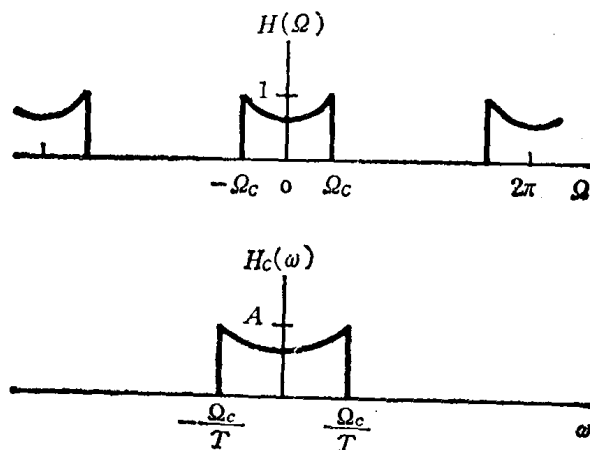


图 8.25 图 8.23 中系统的离散时间频率响应和等效连续时间频率响应

由于实际上冲激串调制器明显地不是一个时不变系统，图 8.23 的总系统与一个 LTI 系统的等效性是有点令人惊奇的。事实上，图 8.23 的总系统并不是对任意输入都是时不变的。例如，若 $x_c(t)$ 是一个持续时间小于 T 的窄矩形脉冲，则 $x_c(t)$ 的时间位移会产生一个序列 $x[n]$ ，根据矩形脉冲相对于抽样冲激串的对准情况，这一序列或者全部为零序列值，或者有一个非零序列值。然而，如由图 8.24 的频谱所提示的那样，在抽样速度高得足以避免混迭的情况下，对于带限输入信号来说，图 8.23 的系统等效于一个连续时间时不变系统。就这样的输入信号来说，图 8.23 和式 (8.22) 提供了利用离散时间滤波器处理连续时间信号的概念性基础。现在要进一步通过一些具体例子来进行研究。

8.4.1 数字微分器

我们来考虑连续时间带限微分滤波器的离散时间实现，如第 5 章中讨论过的，连续时间微分滤波器的频率响应是

$$H_c(\omega) = j\omega \quad (8.23)$$

而具有截止频率为 ω_c 的带限微分器的频率响应为

$$H_c(\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (8.24)$$

如图8.26所示。在抽样频率 $\omega_s = 2\omega_c$ 时, 利用式(8.22), 则相应的离散时间传递函数 $H(\Omega)$ 为

$$H(\Omega) = \frac{1}{T} j \left(\frac{\Omega}{T} \right), \quad |\Omega| < \pi \quad (8.25)$$

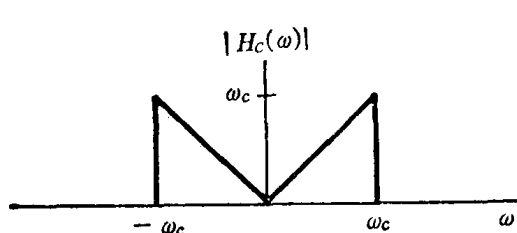


图8.26 连续时间理想带限微分器 $H_c(\omega) = j\omega$, $|\omega| < \omega_c$ 的频率响应

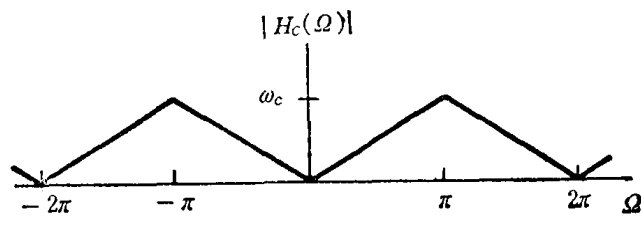


图8.27 为实现连续时间带限微分器的离散时间滤波器的频率响应

如图8.27所画的那样。在这一离散时间传递函数条件下, 只要在对 $x_c(t)$ 抽样时不存在混迭, 则图8.23中的 $y_c(t)$ 应当是 $x_c(t)$ 的导数。

8.4.2 半抽样延迟

我们来考虑通过应用图8.19形式的系统来实现连续时间信号的时间位移(延迟), 于是就要求总系统的输入和输出由下式联系,

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta) \quad (8.26)$$

式中 Δ 表示延迟时间。根据在4.3.6节中导出的时移性质,

$$Y_c(\omega) = e^{-j\omega\Delta} X_c(\omega)$$

由于要用图8.19的系统处理的 $x_c(t)$ 必须是带限的, 而要实现等效连续时间系统也必须是带限的, 故选定

$$H_c(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\Delta}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8.27)$$

式中 ω_c 是连续时间滤波器的截止频率。频率响应的幅度和相位如图8.28(a)所示。在抽样频率 ω_s 取为 $\omega_s = 2\omega_c$ 时, 相应的离散时间频率响应是

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega\Delta/T}, \quad |\Omega| < \pi \quad (8.28)$$

如图8.28(b)所示。

对于带限输入, 在 $H(\Omega)$ 如式(8.28)那样的情况下, 图8.23系统的输出是输入有延迟的复制品。当 Δ/T 是整数时, 序列 $y[n]$ 是 $x[n]$ 的有延迟的复制品, 也就是说,

$$y[n] = x\left[n - \frac{\Delta}{T}\right] \quad (8.29)$$

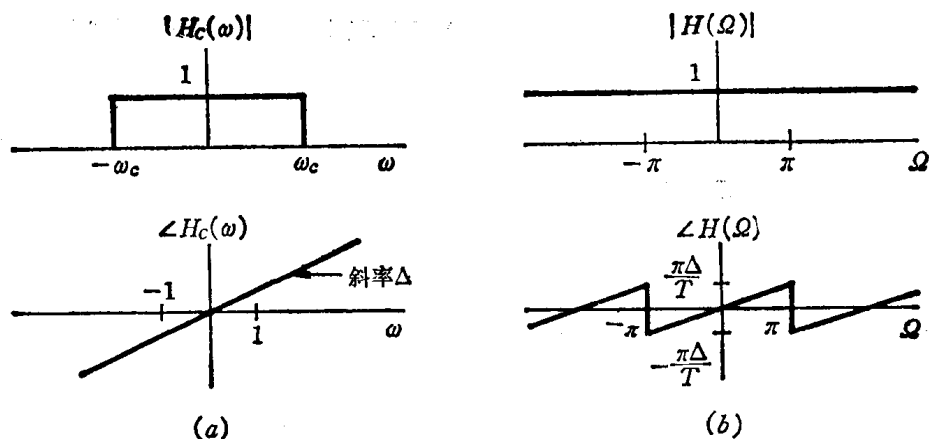


图8.28 (a)连续时间延迟系统的幅频特性和相频特性; (b)相应的离散时间延迟系统的幅频特性和相频特性

由于序列仅在序数为整数值时有定义, 当 Δ/T 不是整数时, 则式(8.29)没有意义。然而, 在此情况下, 我们可用带限内插来说明 $x[n]$ 和 $y[n]$ 间的关系。信号 $x_c(t)$ 和 $x[n]$ 通过抽样和带限内插相联系, $y_c(t)$ 和 $y[n]$ 也是这样。在式(8.28)中 $H(\Omega)$ 的情况下, $y[n]$ 等于序列 $x[n]$ 的带限内插的抽样值。在 $(\Delta/T)=1/2$ 的情况下, 这一关系由图8.29说明, 它有时被称为半抽样延时。

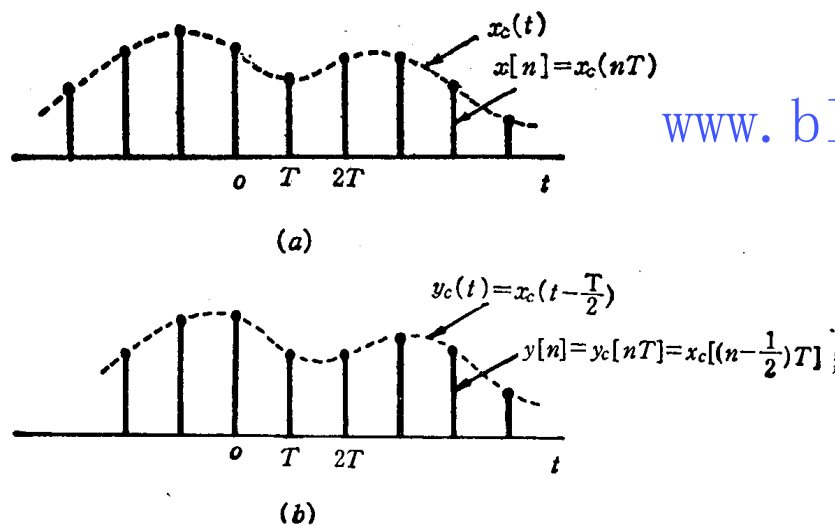


图8.29 (a)连续时间信号 $x_c(t)$ 的抽样序列; (b)具有半抽样延迟的(a)中的序列

8.5 频域抽样

带限信号时域抽样的抽样定理, 已在8.1节中研究过。正如在4.6.6节讨论过的那样, 对于连续时间信号来说, 在时域和频域间具有对偶性。在这一节, 我们要研究与时域抽样定理对偶的定理, 利用这一对偶定理, 时间受限信号可由频域抽样值恢复。

为导出这个结果, 考虑图8.30的频域抽样过程, 它是图8.3中时域冲激串抽样的频域对偶。由于在频域有

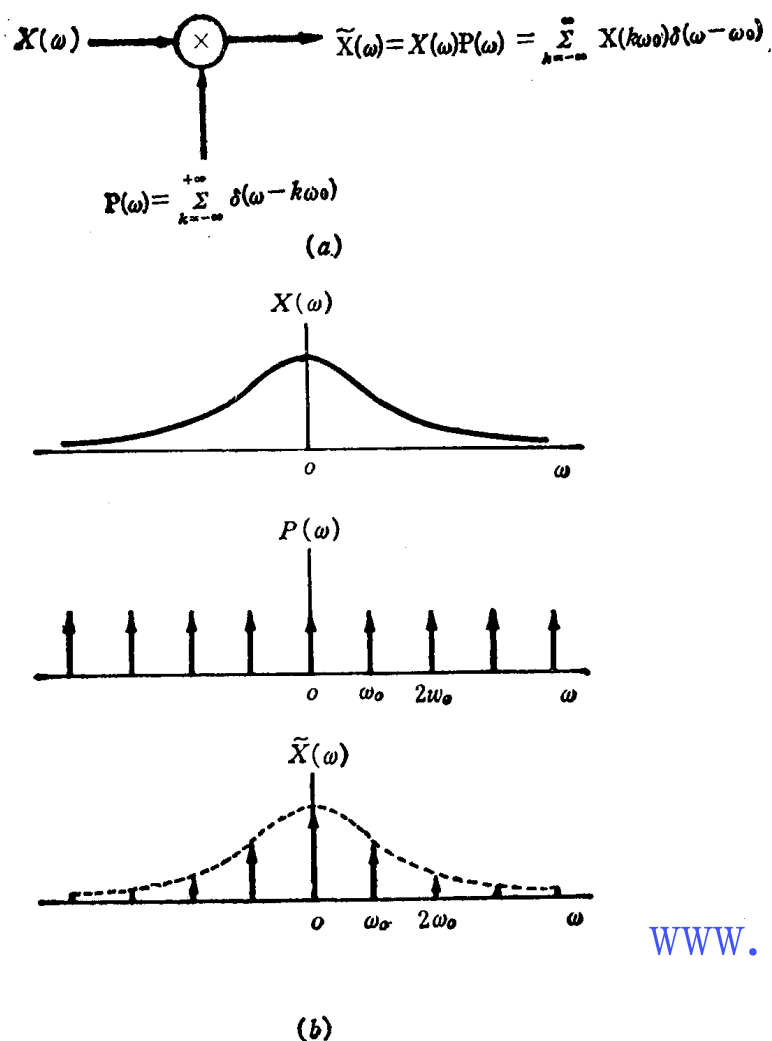


图8.30 频域冲激串抽样：(a)整个抽样过程；(b)有关的频谱

$$\tilde{X}(\omega) = X(\omega)P(\omega) \quad (8.30)$$

则在时域有

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t) \quad (8.31)$$

式中

$$p(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}k\right) \quad (8.32)$$

于是

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(t - \frac{2\pi k}{\omega_0}\right) \quad (8.33)$$

方程(8.33)是式(8.5)的对偶，而式(8.33)中 $x(t)$ 和 $\tilde{x}(t)$ 间的关系类似于图4.12中 $x(t)$ 和 $\tilde{x}(t)$ 间的关系。若 $x(t)$ 是时间受限的，有

$$x(t) = 0, \quad |t| > T_m \quad (8.34)$$

则如图8.31所示，在

$$\frac{2\pi}{\omega_0} > 2T_m \quad (8.35)$$

情况下，如式(8.33)所给出的， $\tilde{x}(t)$ 由 $x(t)$ 的非交迭周期性复制品所组成，它们的间隔为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 的整数倍。在这种情况下，原信号 $x(t)$ [当然，它的变换 $X(\omega)$] 也同样可用 $\tilde{x}(t)$ 的“低时窗”处理来恢复，也就是

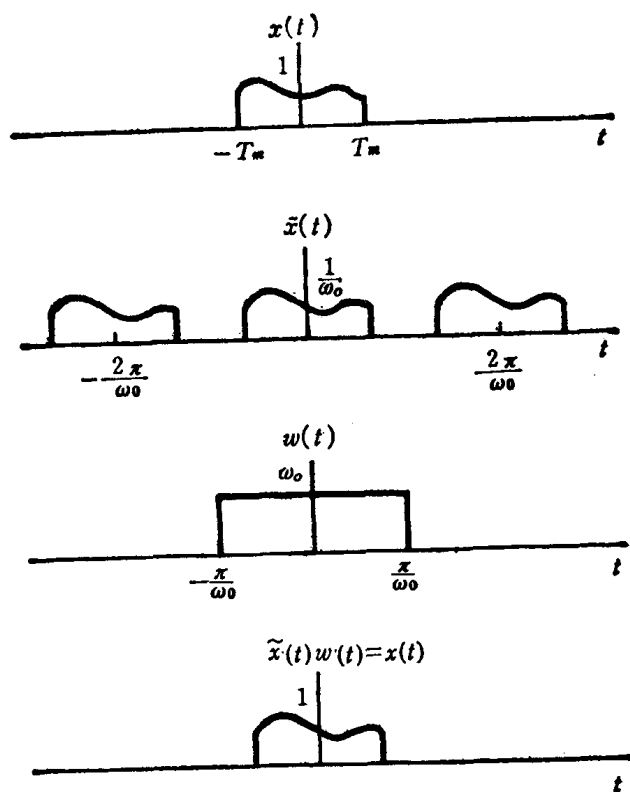


图8.31 有关频域抽样的时域波形

$$x(t) = \tilde{x}(t)w(t) \quad (8.36)$$

式中

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0, & |t| \leq \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{\omega_0} \end{cases} \quad (8.37)$$

www.blogoil.com

如图8.31所示。若式(8.35)的不等式不满足,则在式(8.33)和图8.31中, $x(t)$ 的各个复制品将交迭,而且不再能从 $\tilde{x}(t)$ 中恢复 $x(t)$ 。这是8.1节中讨论过的频域混迭的对偶,且通常称为时域混迭^①。

类似于第8.2节中的讨论,用来恢复 $x(t)$ 的 $\tilde{x}(t)$ 的低时窗处理,可以看做 $X(\omega)$ 的频域抽样值间的内插。具体说,根据式(8.36),

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{X}(\omega) * W(\omega) \quad (8.38)$$

式中

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \quad (8.39)$$

而 $W(\omega)$ 是 $w(t)$ 的傅里叶变换,亦即

$$W(\omega) = 2\pi \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (8.40)$$

把式(8.38)、(8.39)和(8.40)结合起来,得

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \operatorname{sinc} \left[\frac{\omega - k\omega_0}{\omega_0} \right] \quad (8.41)$$

^①在式(8.34)中,假定 $x(t)$ 为非零的时间区间是以 $t=0$ 为中心的。但如在习题8.20中所研究的,这一节中的结论可容易地修正,以使能适用于任何指定长度为 $2T_m$ 的时间区间上 $x(t)$ 为非零的情况。

此式就是式(8.10)的对偶。特别是, 对时限信号在等间隔频率抽样值之间, $\sin c$ 函数提供了精确的内插, 这正像它对于带限信号的等时间间隔抽样值间提供精确内插一样。

8.6 离散时间信号的抽样

到现在为止, 在本章中, 我们已仔细地研究了连续时间信号的抽样, 而且, 除了进行为理解连续时间信号抽样所必须的分析之外, 还介绍了它的一些应用。我们在本节中将会看到, 对于离散时间信号的抽样来说, 可以导出具有许多重要应用的一组非常类似的性质和结论。

与用图8.3的系统实现连续时间抽样相类似, 离散时间信号抽样可表示为如图8.32所示。这里, 由抽样过程得出的新序列 $x_p[n]$, 在抽样周期 N 的整数倍处等于原序列值 $x[n]$, 而在中间各抽样点处为零, 亦即

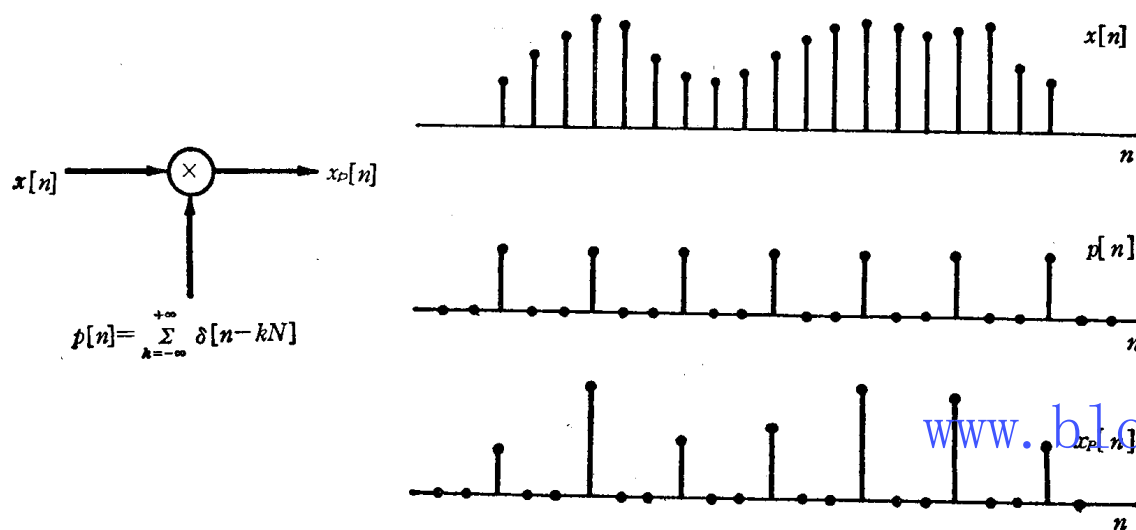


图8.32 离散时间抽样

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & \text{若 } n \text{ 为 } N \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8.42)$$

类似于8.1节中的推导, 离散时间抽样在频域的效果, 可用5.7节中导出的调制性质来搞清楚。这样, 当

$$x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\delta[n - kN] \quad (8.43)$$

在频域则有

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta) X(\Omega - \theta) d\theta \quad (8.44)$$

如例5.11中推导过的, 抽样序列 $p[n]$ 的傅里叶变换为

$$P(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \quad (8.45)$$

式中, 抽样频率 Ω_s 为 $2\pi/N$ 。结合方程(8.44)和(8.45), 就有

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\Omega - k\Omega_s) \quad (8.46)$$

式(8.46)是连续时间抽样的公式(8.5)在离散时间抽样时的对应式, 并可由图8.33所说明。在

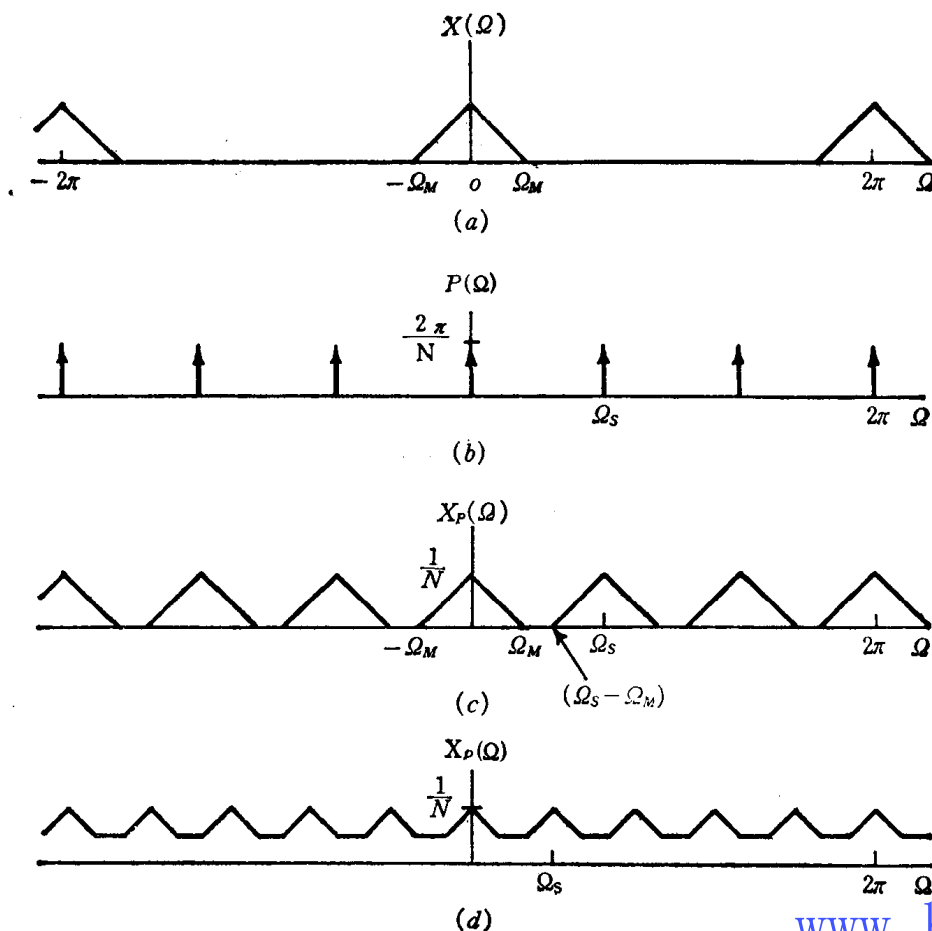


图8.33 离散时间信号冲激串抽样的频域效果: (a) 原信号的频谱; (b) 抽样序列的频谱; (c) 已抽样信号的频谱, $\Omega_s > 2\Omega_M$ 时; (d) 已抽样信号的频谱, $\Omega_s < 2\Omega_M$ 时, 注意混迭发生

图8.33(c)中, 有 $\Omega_s - \Omega_M > \Omega_M$ 或等效为 $\Omega_s > 2\Omega_M$, 不存在混迭 (即, $X(\Omega)$ 的复制品的非零部分不交迭)。而在 $\Omega_s < 2\Omega_M$ 的情况下, 如在图8.33(d)中那样, 就出现频域混迭。当不存在混迭时, 在 $\Omega = 0$ 和 2π 的整数倍周围, $X(\Omega)$ 可正确地再现。因此, 如图8.34所示, 利用一个增益为 N , 而截止频率大于 Ω_M 但小于 $\Omega_s - \Omega_M$ 的低通滤波器, 就可从 $x_p[n]$ 中恢复 $x[n]$, 在图中, 我们规定低通滤波器的截止频率为 $\Omega_s/2$ 。若对于加到图8.34中系统的序列来说, $\Omega_s < 2\Omega_M$, 以致出现混迭, 则 $x_r[n]$ 将不再等于 $x[n]$ 。然而, 像在连续时间抽样时一样, 在抽样周期的倍数处, 这两个序列应当是相等的, 亦即, 与式(8.12)相当, 有

$$x_r[kN] = x[kN] \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.47)$$

这种情况与混迭是否发生无关 (见习题8.23)。

通过应用加有 $x_p[n]$ 的低通滤波器来重建 $x[n]$, 在时域中可看做类似于式(8.10)的内插公式。明确说, 用 $h[n]$ 表示低通滤波器的冲激响应时, 我们有

$$h[n] = \frac{N\Omega_s}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_s n}{\pi}\right) \quad (8.48)$$

则恢复得到的序列 $x_r[n]$ 为

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n] \quad (8.49)$$

或等效地,

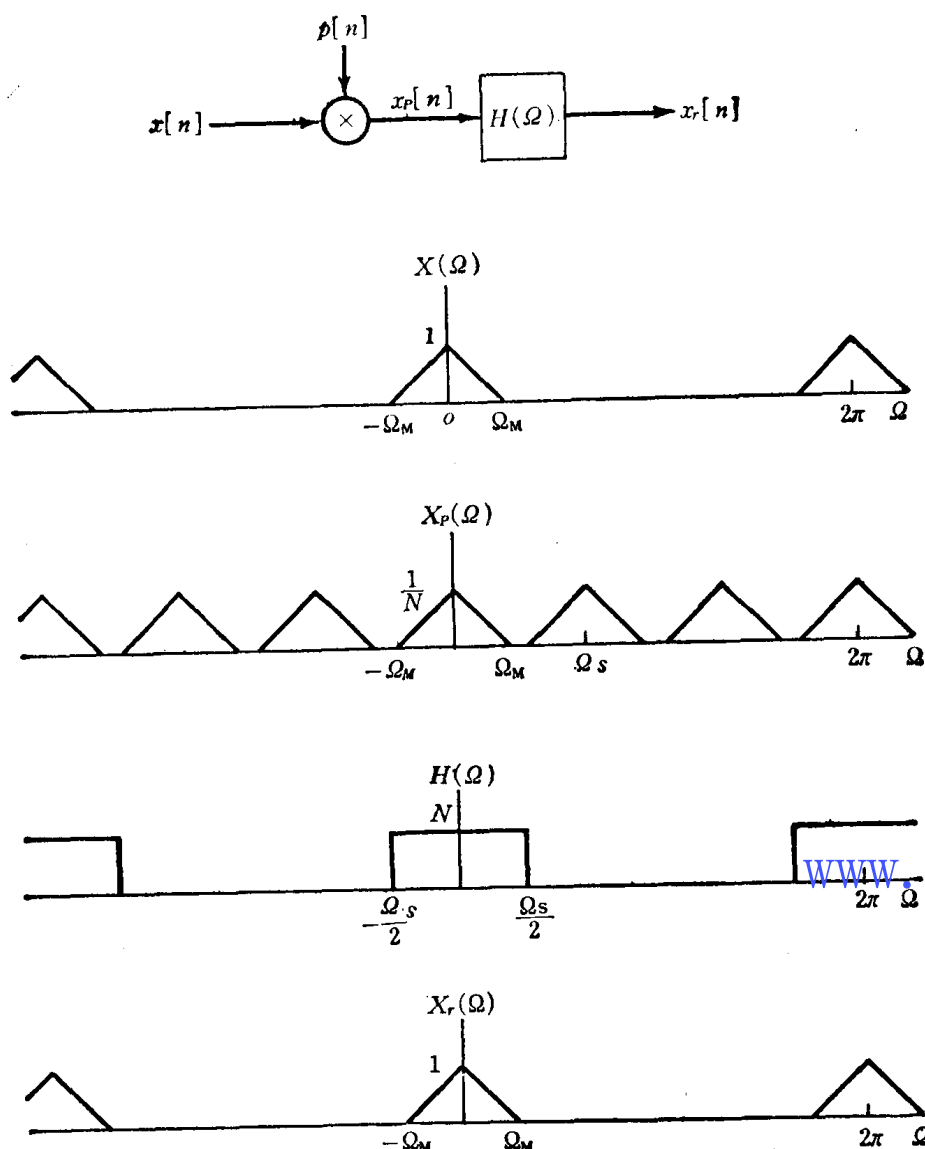


图8.34 利用理想低通滤波器，从抽样值精确地恢复离散时间信号

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \frac{N\Omega_c}{2\pi} \text{sinc}\left[\frac{\Omega_c}{\pi}(n-kN)\right] \quad (8.50)$$

式(8.50)表示理想带限内插，它需要一个理想低通滤波器的实现。在通常的应用中，采用了图8.34中的低通滤波器的适当近似，在那种情况下，等效内插公式有如下形式

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] h_r[n-kN] \quad (8.51)$$

其中 $h_r[n]$ 是内插滤波器的冲激响应。一些具体例子在习题8.22中研究，其中包括了与8.2节中讨论过的连续时间内插的零阶保持和一阶保持相对应的离散时间保持系统。

在8.5节中，讨论过连续时间带限信号时域抽样的对偶，即时限信号的频域抽样。类似的结果也适用于对时限序列的离散时间傅里叶变换的抽样。如图8.35所示，仍然设想用一个频域冲激串与一个序列的离散时间傅里叶变换相乘。除了频率抽样点间的间隔 Ω_0 受到限制以使 $2\pi/\Omega_0$ 为一整数 N ，从而保证 $P(\Omega)$ 和 $\tilde{X}(\Omega)$ 都是周期为 2π 的 Ω 的周期函数之外，这是

与图8.30中所说明的过程是相同的。于是，在时域有

$$\tilde{x}[n] = x[n] * p[n] \quad (8.52)$$

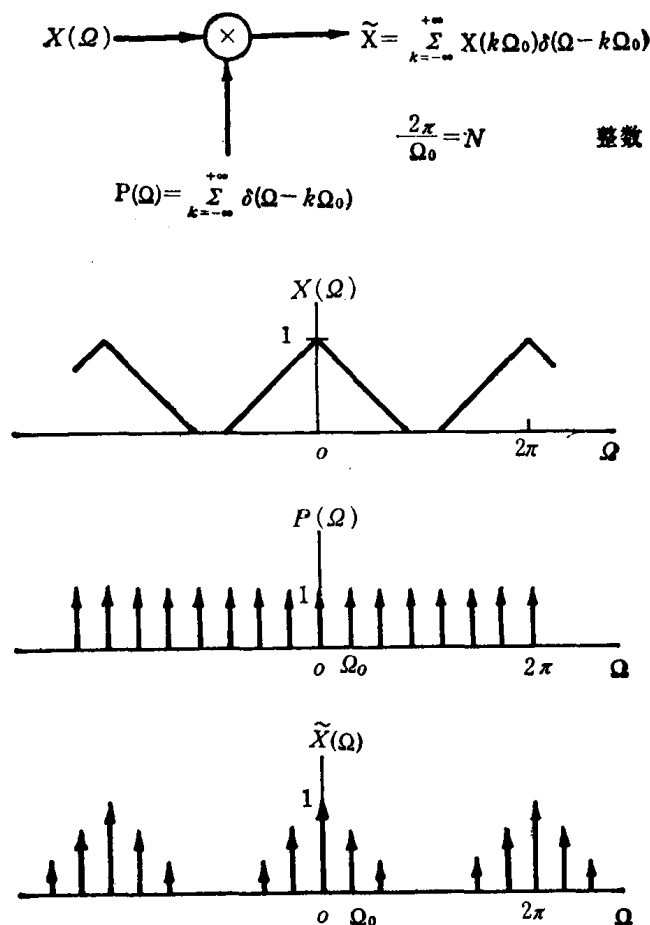


图8.35 离散时间傅里叶变换的冲激串抽样

由例5.11,

$$p[n] = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left[n - k \frac{2\pi}{\Omega_0} \right] \quad (8.53)$$

或在 $\Omega_0 = 2\pi/N$ 的情况下,

$$\tilde{x}[n] = \frac{N}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN] \quad (8.54)$$

方程(8.52)和(8.54)对应于式(8.31)和(8.33)。假设 $x[n]$ 是时间受限的, 有

$$x[n] = 0, \quad n < 0, \quad n > N-1 \quad (8.55)$$

则像在图8.36所示, $\tilde{x}[n]$ 是由间距为 N 的整数倍的 $x[n]$ 的非交迭周期性重复所组成。因此, 原信号 $x[n]$ 可由 $\tilde{x}[n]$ 的“低时窗处理”而恢复, 也就是,

$$x[n] = \tilde{x}[n] w[n] \quad (8.56)$$

式中

$$w[n] = \begin{cases} \Omega_0, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8.57)$$

如图8.36所示。像在连续时情况那样, 若式(8.55)不满足, 则式(8.52)中 $x[n]$ 的周期性复制品交迭而在时域出现混迭。

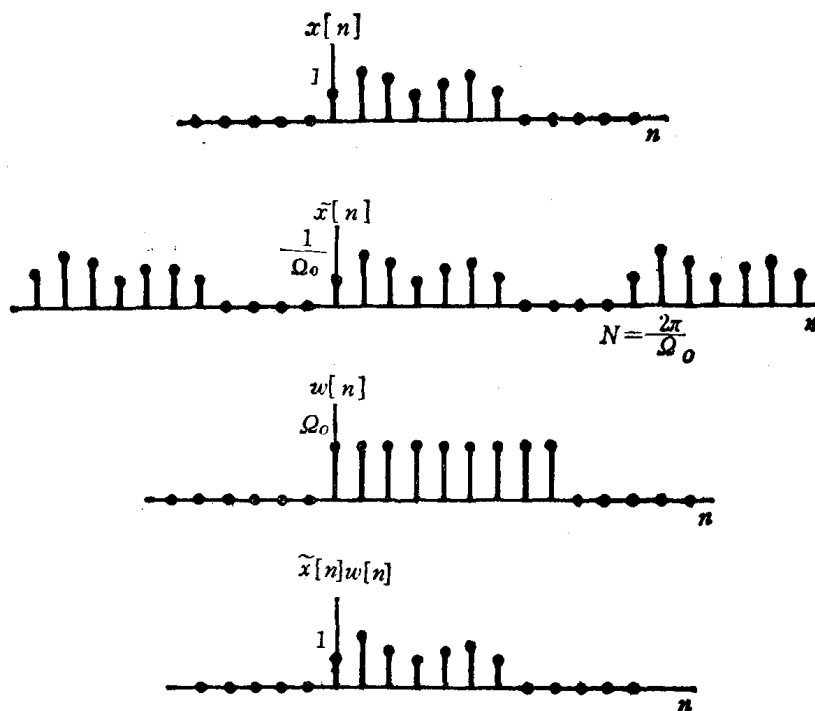


图8.36 与频域抽样有关的时域序列

注意到这样一点是有益的, 即除比例系数 $N/2\pi$ 以外, 式 (8.54) 的周期序列 $\tilde{x}[n]$ 与在 5.34 节中研究过的有限时宽序列的周期性重复是相同的。事实上, 长度为 N 的序列 $x[n]$ 的 DFT, 正比于等频率间隔为 $2\pi/N$ 的离散时间傅里叶变换的抽样值。

www.blogoil.com

8.7 离散时间抽选和插入

离散时间抽样的原理, 在诸如信号的多路复用以及滤波器的设计和实现中有着种种重要的应用。由于已知在抽样时刻之间已抽样序列 $x_p[n]$ 为零, 故在许多应用中, 直接以图 8.32 中所描述的形式来表示、传送或存储已抽样序列 $x_p[n]$ 是低效率的。因此, 已抽样序列 $x_p[n]$ 常常用一个新序列 $x_d[n]$ 来替代, 它就是 $x_p[n]$ 或等价地就是 $x[n]$ 的全部相隔为 N 的值, 亦即

$$x_d[n] = x[nN] = x_p[nN] \quad (8.58)$$

抽取所有的第 N 个抽样值的操作过程, 通常称为抽选^①。 $x[n]$, $x_p[n]$ 和 $x_d[n]$ 间的关系由图 8.37 所示。为确定抽选的频域效果, 需要求出 $x_d[n]$ 的傅里叶变换 $X_d(\Omega)$ 。为此, 注意到

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n} \quad (8.59)$$

或利用式 (8.58),

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[nN] e^{-j\Omega n} \quad (8.60)$$

因为除在 N 的整数倍处以外, $x_p[n]$ 均为零, 故可等效地写为

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{-j\Omega n/N} \quad (8.61)$$

^①在技术上, 抽选 (decimation) 应相当于抽取所有的第 10 个样品, 然而, 即使在 N 不等于 10 时, 也把这种操作过程称作抽选, 这已成为通用术语。

和式中的各项仅当 n 等于 N 的整数倍时为非零。此外，我们把式(8.61)的右边看做 $x_p[n]$ 的傅里叶变换，明确地说，

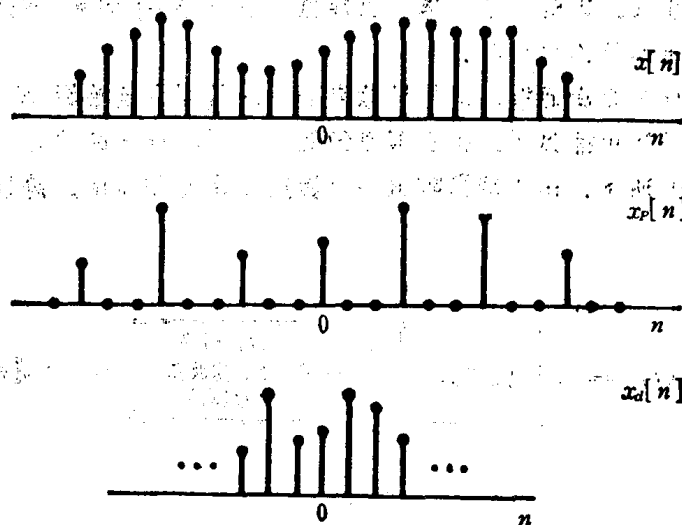


图8.37 $x_p[n]$ 和 $x_d[n]$ 间的关系 (相当于抽样和抽选间的关系)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p[n] e^{-j\Omega n/N} = X_p\left(\frac{\Omega}{N}\right) \quad (8.62)$$

于是，从式(8.61)和(8.62)，可以得出

$$X_d(\Omega) = X_p\left(\frac{\Omega}{N}\right) \quad (8.63)$$

这一关系由图8.38所示，而且从式(8.63)，我们注意到已抽样序列的频谱和已抽选序列的频谱间的差别，仅在于频率刻度的改变或归一化。若使原频谱 $X(\Omega)$ 的频带适当受限，以便在 $X_p(\Omega)$ 中没有混迭存在，则如图 8.38 所示，抽选的效果是把原序列的频谱扩展至更大的频带范围。

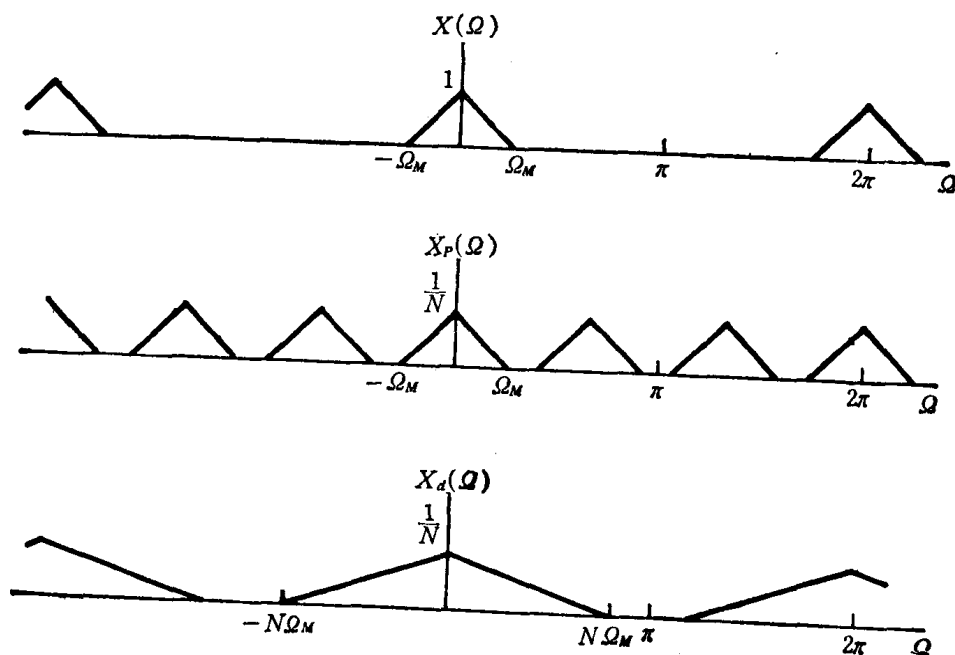


图8.38 抽样和抽选间关系的频域说明

当原序列 $x[n]$ 是由对连续时间信号抽样得到时, 抽选过程可看做对连续时间信号的抽样率降低 N 倍。为避免抽选过程中的混迭, $X(\Omega)$ 不能占有整个频带, 这一要求表明原连续时间信号被过抽样的事实, 因此, 抽样率可被降低。在把序列 $x[n]$ 看作连续时间信号的抽样值时, 则抽选过程通常称为降抽样。

在某些应用中, 序列是由连续时间信号抽样而得, 其原来的抽样率或许是在不致引起混迭的情况下已尽可能低了, 但在其他的处理以后, 序列的带宽可能降低, 这种情况的一个例子如图 8.39 所示。由于离散时间滤波器的输出是带限的, 降抽样或抽选就可被应用。

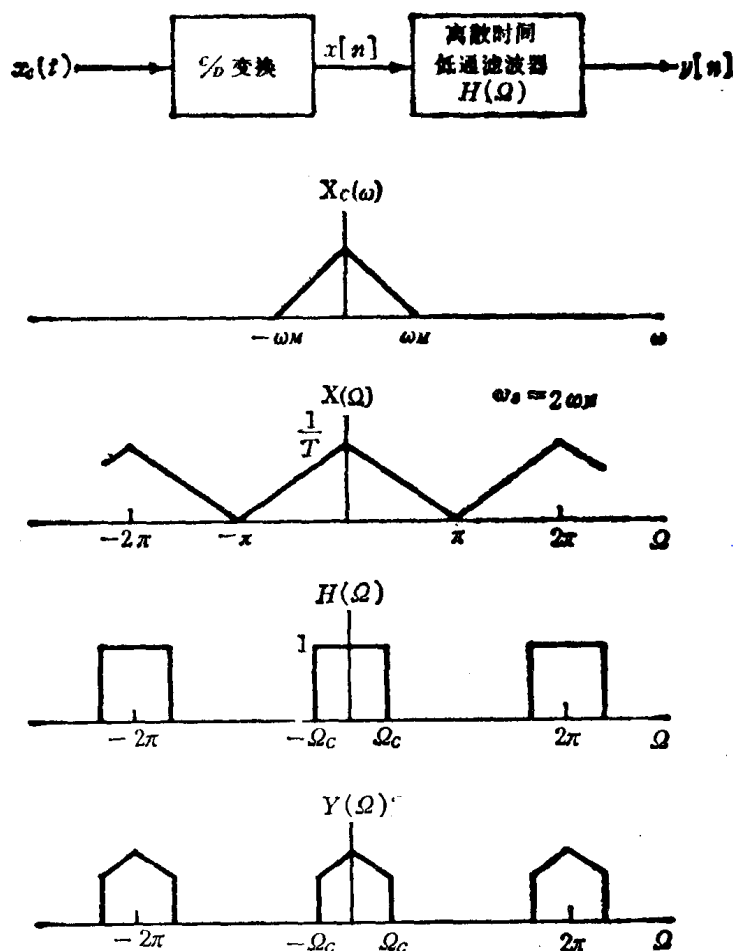


图 8.39 原来以奈奎斯特率抽样的连续时间信号, 在离散时间滤波以后, 所得到的序列可以进一步降抽样

正如在某些应用中降抽样是有用的那样, 在有些情况下, 把一个序列变换到更高的等效抽样率是有用的, 这种变换过程称为升抽样或插入。插入或升抽样基本上是抽选或降抽样的逆过程。如在图 8.37 和图 8.38 中所表明的那样, 我们采用先是抽样, 然后仅保留抽样瞬刻的序列值的方式, 分析了抽选过程。对于升抽样, 可把上述过程倒过来。因此, 参看图 8.37, 考察对序列 $x_d[n]$ 升抽样以获得 $x[n]$ 的过程, 通过在 $x_d[n]$ 的每个序列值之间“插入” $N-1$ 个零值序列点的办法, 可以由 $x_d[n]$ 形成序列 $x_p[n]$ 。然后, 采用低通过滤, 已插入序列 $x[n]$ 就可从 $x_p[n]$ 得到。整个升抽样步骤概述于图 8.40。

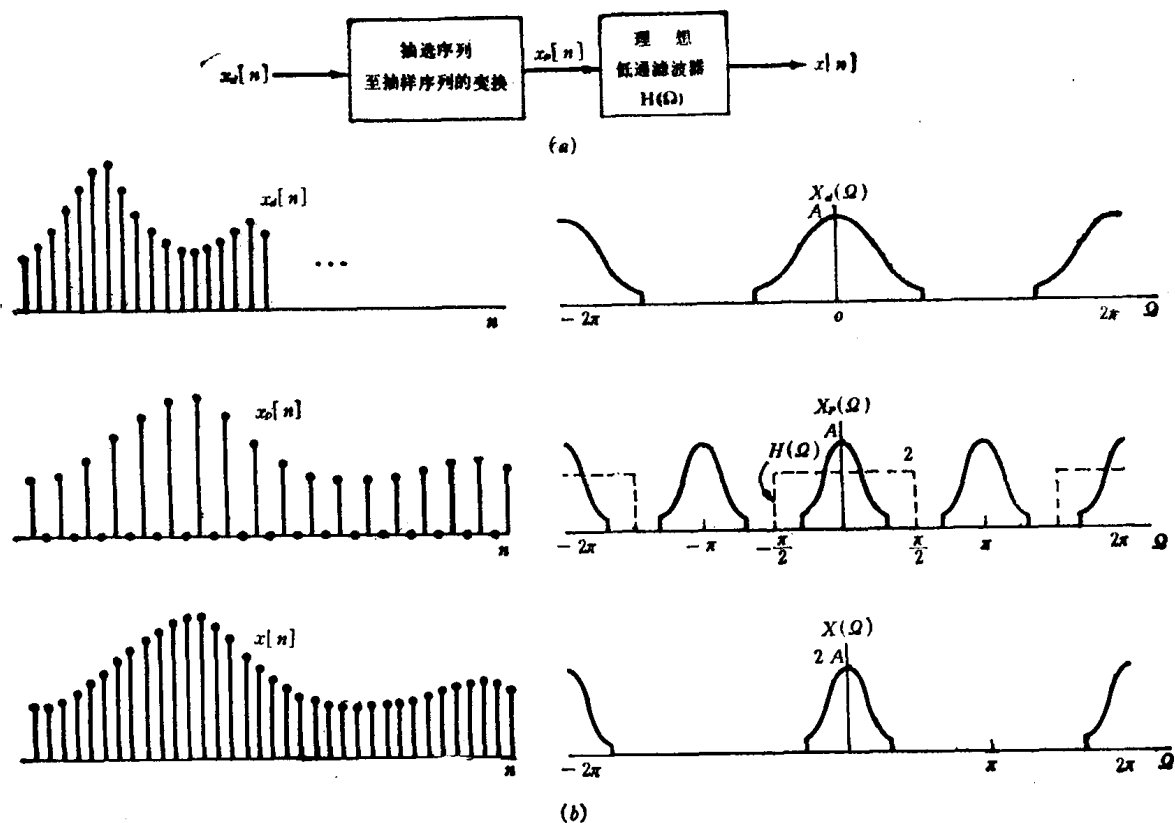


图8.40 升抽样：(a)总体系统；(b)升抽样倍数为2时的序列和频谱

作为升抽样的一个应用例子，设想有一组序列，这些序列是我们打算用作频分多路复用的。有 M 个信道，要求每个信道输入 $x_i[n]$ 的频谱能量是频带受限的，亦即

$$X_i(\Omega) = 0, \quad \frac{\pi}{M} < |\Omega| < \pi \quad (8.64)$$

假如各序列原来占有整个频带，例如相当于以奈奎斯特率抽样的一组连续时间信号所占有的频带，则在频分多路复用之前，它们首先必须变换至更高的抽样率（即升抽样）。

8.7.1 离散时间调制转换

广泛采用离散时间调制、抽选和插入的一个领域是数字通信系统。一般地，在这种系统中利用本章提供的抽样概念，连续时间信号以离散时间信号的形式在通信信道中传输。在这样的通信系统中，连续时间信号往往是时分多路(TDM)或频分多路(FDM)信号的形式，然后，为了存储和远距离传输，这些信号被变换为用数字表示的离散时间序列。在某些系统中，因为在发送终端和接收终端处有不同的限制或要求，或者因为已经各自以不同方式多路复用的许多信号的一些集合，在必要时再一起被多路复用，常常需要把表示TDM信号的序列转换为表示FDM信号的序列，或者相反。这样从一种调制或一种多路复用方式至另一种多路复用方式的变换，称为调制转换或多路复用转换。在数字通信领域里，一个明显的实现多路复用转换的途径是首先变回到连续时间信号、多路分离、解调，然后按照要求再调制和多路复用。然而，若新的信号到时候仍要被变回到离散时间，则显然，对于要实现的整个过程而言，直接在离散时间范畴进行就更加有效。图8.41以方框图形式表示把一个离散时间TDM信号转换为离散时间FDM信号的各有关步骤。注意，在TDM信号多路分离之后，

为准备频分多路复用，每个信道必须升抽样。

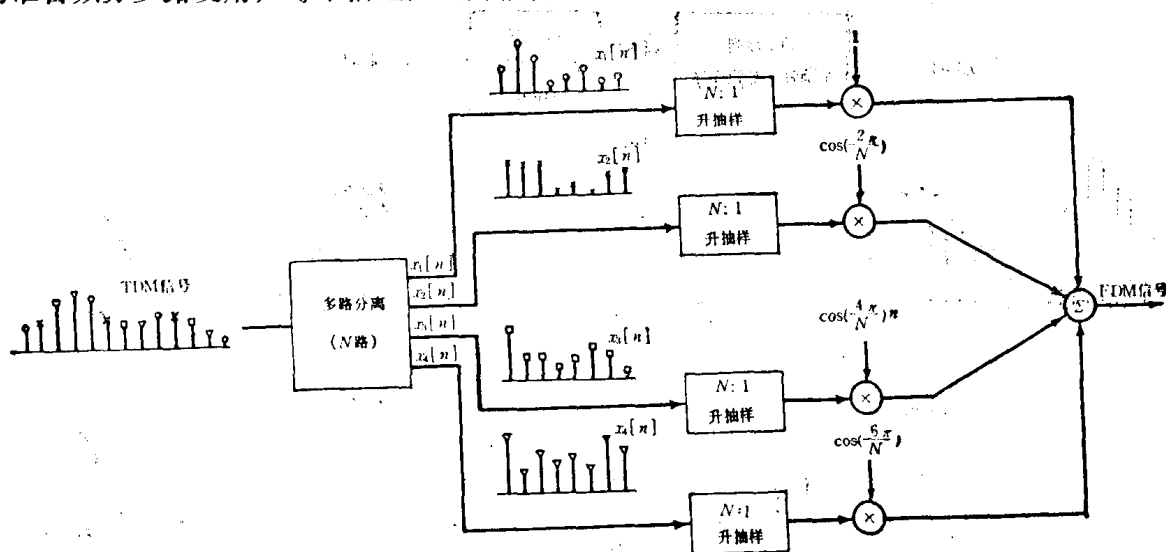


图8.41 TDM 至 FDM 多路复用转换的方框图

8.8 小 结

在这一章里，研究了抽样的概念，利用这一概念，连续时间或离散时间信号可用等间隔的抽样序列来表示。信号可从其抽样值精确恢复的条件概括在抽样定理中。为精确恢复原信号，这一定理要求被抽样的信号是带限的，且抽样频率大于被抽样信号中最高频率的两倍。在这些条件下，原信号的恢复可用理想低通滤波来实现。这种理想恢复过程的时域解释是采用 sinc 函数的内插，通常称为理想带限内插。实际上，内插时所用低通滤波器是近似的，而在时域中，内插不再是精确的。在有些场合，简单的内插法，诸如零阶保持或线性内插（一阶保持）就可满足需要。

若信号是欠抽样的（即抽样频率小于抽样定理所要求的频率），则由理想带限内插重建得到的信号，将由称做混迭的失真形式与原信号相联系。在许多情况下，选择抽样率以避免混迭是重要的。然而，存在例如闪光测频仪那样的一些重要例子，在这些例子中，混迭的存在是重要而且是被利用的。

抽样有许多重要的应用，关于抽样概念的一类特别重要的应用，是采用微计算机或微处理器，或任何类型的专用离散时间信号处理装置这样的离散时间系统，来处理连续时间信号。

对于连续时间和离散时间信号来说，抽样的基本理论都是类似的。在离散时间情况下，有非常相似的抽选概念，利用这一概念，在周期间隔处抽取序列值可得到已抽选序列。抽样和抽选间的差别在于：对已抽样序列，在抽样值之间为零值，而在已抽选序列中，这些零值被弃去，从而使序列在时间上被压缩。抽选的逆过程是插入。序列抽选和插入的概念，出现在包括调制转换系统在内的种种实际应用中。

习 题

- 8.1. 在图 P 8.1 所示系统中，两个时间函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 相乘，乘积 $w(t)$ 由周期冲激串抽样。 $x_1(t)$ 带限为 ω_1 ，而 $x_2(t)$ 带限为 ω_2 ，也就是说

$$X_1(\omega)=0, \quad |\omega|>\omega_1$$

$$X_2(\omega)=0, \quad |\omega|>\omega_2$$

试确定最大抽样间隔 T ，使得利用理想低通滤波器，可以由 $w_p(t)$ 恢复 $w(t)$ 。

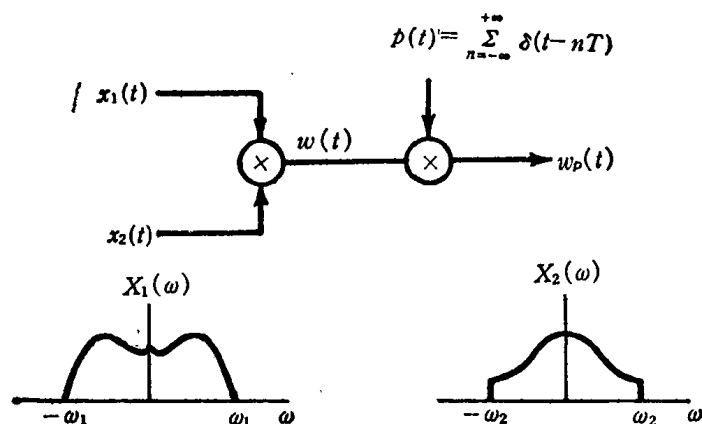


图 P 8.1

8.2. 图 P 8.2 所示是一个系统，其抽样信号是一个正负交替的冲激串。输入信号的傅里叶变换如图 P 8.2 所示。

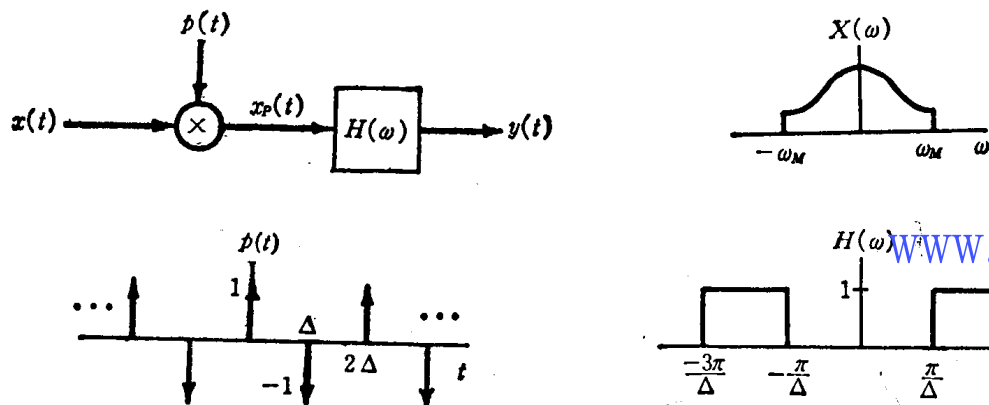


图 P 8.2

- 当 $\Delta < \pi/2\omega_M$ 时，试画出 $x_p(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶变换的示意图；
- 当 $\Delta < \pi/2\omega_M$ 时，试决定一个能从 $x_p(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统；
- 当 $\Delta < \pi/2\omega_M$ 时，试决定一个能从 $y(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统；
- 当 $x(t)$ 既可以从 $x_p(t)$ 亦可以从 $y(t)$ 中恢复时，与 ω_M 有关的 Δ 最大值是什么？

8.3. 在图 P 8.3 所示系统中，其输入信号与周期方波相乘。 $s(t)$ 的周期为 T 。输入信号是带限的，在 $|\omega| \geq \omega_M$ 时， $|X(\omega)|=0$ 。

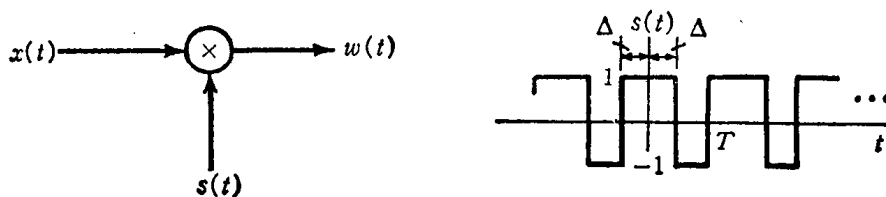


图 P 8.3