第五讲　　原函数与不定积分
Cauchy 积分公式
解析函数的高阶导数

§3.4 原函数与不定积分

- 1. 原函数与不定积分的概念
- 2. 积分计算公式

1. 原函数与不定积分的概念

由 §2 基本定理的推论知：设 $f(z)$ 在单连通区域 B 内解析，则对 B 中任意曲线 C, 积分 $\int_c f dz$ 与路径无关，只与起点和终点有关。

当起点固定在 z_0, 终点 z 在 B 内变动 $\int_c f(z)dz$ 在 B 内就定义了一个变上限的单值函数，记作

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma \quad (1)$$

定理 设 $f(z)$ 在单连通区域 B 内解析，则 $F(z)$ 在 B 内解析，且 $F'(z)=f(z)$

定义 若函数 $\varphi(z)$ 在区域 B 内的导数等于 $f(z)$，即 $\varphi'(z)=f(z)$，称 $\varphi(z)$ 为 $f(z)$ 在 B 内的原函数.

上面定理表明 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

设 $H(z)$ 与 $G(z)$ 是 $f(z)$ 的任何两个原函数，

$$\because\ [G(z)-H(z)]'=G'(z)-H'(z)=f(z)-f(z)=0$$

$$\therefore G(z)-H(z)=c,\quad (c\text{为任意常数})$$

(见第二章 §2 例 3)

这表明：$f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数。

定义　设 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，称 $F(z)$+c(c 为任意常数) 为 $f(z)$ 的不定积分，记作

$$\int f(z)dz = F(z) + c$$

2. 积分计算公式

定理　设 $f(z)$ 在单连通区域 B 内解析， $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，则

$$\boxed{\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)} \quad (\forall z_0, z_1 \in B)$$

- 此公式类似于微积分学中的牛顿-莱布尼兹公式.
- 但是要求函数是解析的，比以前的连续条件要强

例 1　计算下列积分：

1) $\int_C \frac{1}{z^2} dz$

其中C为半圆周 $|z| = 3, \mathrm{Re}\, z \quad 0,$

起点为$-3i$,终点为$3i$;

解 1)　$\because \quad \frac{1}{z^2}$在$\mathrm{Re}\, z \quad 0$，$z \neq 0$上解析,

故　$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{-2+1} z^{-2+1} \Big|_{-3i}^{3i} = \frac{2i}{3}$$

解2：$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3ie^{i\theta}}{9e^{2i\theta}} d\theta = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{i}{e^{i\theta}} d\theta = \frac{2i}{3}$$

2) $\int_C \frac{1}{z} dz$

其中C为单连通区域$D: -\pi < \arg z < \pi$内起点为1,终点为z的任意曲线.

解 2) $\because$ $\frac{1}{z}$在D内解析,又$\ln z$是$\frac{1}{z}$的一个原函数,

故 $\int_C \frac{1}{z} dz = \ln z - \ln 1 = \ln z \ (z \in D)$.

例 3 计算下列积分：

$$\int_{-i}^{+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{-i}^{i} = -\frac{2i}{3}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1}\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{n+1}\left(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\right)$$

$$\int_0^i z \sin z dz = \left(\sin z - z\cos z\right)\Big|_0^i = \sin i - i\cos i$$

小结 求积分的方法

$$(1)\int_c f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$$

$$(2)\int_c f(z)dz=\int udx-vdy+i\int vdx+udy$$

$$(3)\int_c f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

(4)若$f(z)$解析,B单连通,$C\subset B$,则$\oint_c f(z)dz=0$

(5)若$f(z)$在B内解析,B单连通,则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=F(z)\Big|_{z_0}^{z_1},\quad F'(z)=f(z)$$

§3.5 Cauchy 积分公式

内容简介

利用 Cauchy-Goursat 基本定理在多连通域上
的推广，即复合闭路定理，导出一个用边界值表示解
析函数内部值的积分公式，该公式不仅给出了解析
函数的一个积分表达式，从而成为研究解析函数
的有力工具，而且提供了计算某些复变函数沿闭
路积分的方法.

分析　设D－单连通，$f(z)$在D内解析，

$z_0\in B$，C是D内围绕z_0的一条闭曲线，则

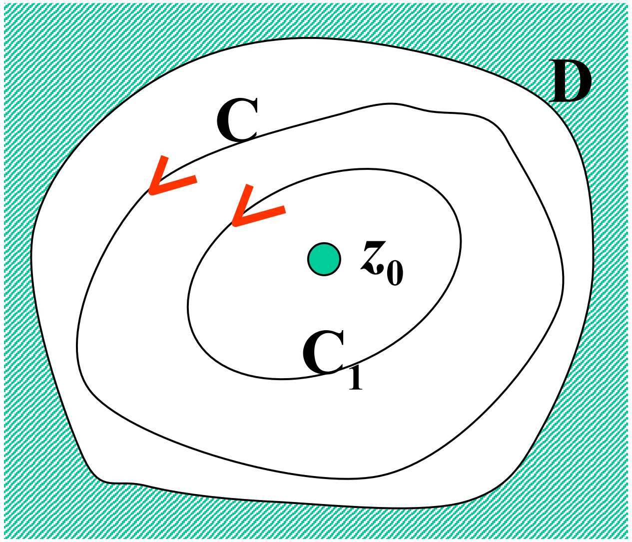
$\dfrac{f(z)}{z-z_0}$在z_0不解析。$\therefore \oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz \overset{一般}{\neq} 0$

由复合闭路定理得，

任意包含z_0在内部的

曲线$C_1\subset C$的内部

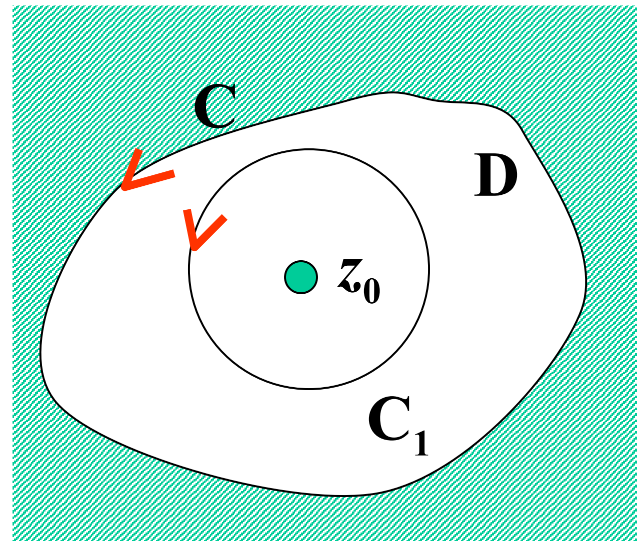
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$



特别取 $C_1 = \{z \mid |z - z_0| = \delta(\delta > 0\text{可充分小})\}$

$\because\ f(z)$的连续性,在C上的函数值$f(z)$

当$\delta \to 0$时,$f(z) \to f(z_0)$



$\therefore$ 猜想积分

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \xrightarrow{\delta \to 0}$$

$$\to f(z_0) \oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

这个猜想是对的,这就是下面的定理.

定理 (*Cauchy* 积分公式)

1)设$f(z)$在D内处处解析,

2)C是D内任意一条正向简单闭 曲线,

它的内部完全含于D,

3)z_0为C内任意一点 $\Rightarrow$ $\boxed{f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz}$

证明 设$\forall K=\{z \mid |z-z_0|=R\}\subset C$的内部.

$$\because \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz \text{与}K\text{的半径}R\text{无关},$$

$$\therefore \text{只须证明}: \lim_{R\to 0}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).$$

即要证：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 , \ni \left| z - z_0 \right| = R < \delta$

$$\left| \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < \varepsilon$$

$$\because \left| \oint_k \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \oint_k \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \oint_k \frac{1}{z - z_0} dz \right|$$

$$= \left| \oint_k \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \le \oint_K \frac{\left| f(z) - f(z_0) \right|}{\left| z - z_0 \right|} ds < \frac{\varepsilon}{R} \oint_K ds = 2\pi\varepsilon$$

$\because \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \quad \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \ni \left| z - z_0 \right| = R < \delta \quad \left| f(z) - f(z_0) \right| < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{R\to 0}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

(1)若定理条件改为 $f(z)$在C所围区域B内解析, 及在$C+B=\overline{B}$上连续, $Cauchy$积分公式仍成立.

(2) $Cauchy$积分公式表明函数在C内部任一点的值可以用它在边界的 值来表示. 即若f(z)在区域边界上的值一经 确定, 则它在区域内部任一处的值也就确 定了.

(3)若$C: z = z_0 + \mathrm{R}e^{i\theta}$ 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \mathrm{R}e^{i\theta})}{\mathrm{R}e^{i\theta}} Rie^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{R}e^{i\theta})d\theta$$

一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

例 1 求：1) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\dfrac{\sin z}{z}dz$ 2) $\oint_{|z|=4}\left(\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{2}{z-3}\right)dz$

解 1) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz=\sin z\Big|_{z=0}=0$$

2) $$\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz=\oint_{|z|=4}\frac{dz}{z+1}+\oint_{|z|=4}\frac{2}{z-3}dz$$

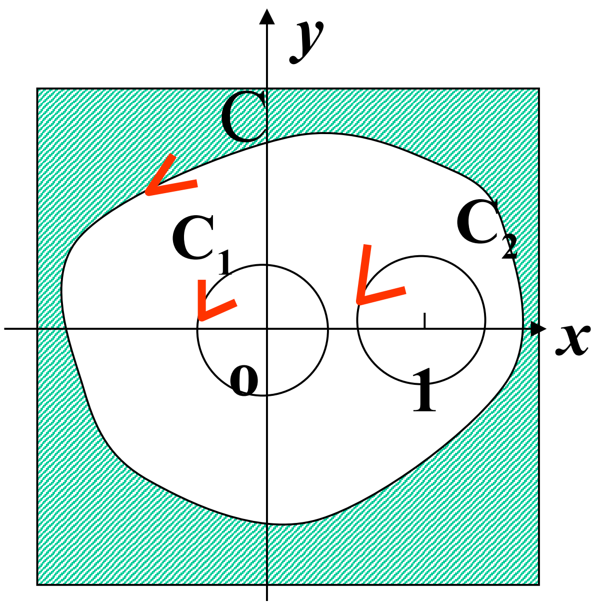
$$\overset{f(z)=1\text{及}2}{=}2\pi i\cdot 1+2\pi i\cdot 2=6\pi i$$

例 2 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$

C为包含$|z|=1$在内的任意简单正向曲线.

解 $$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{2z-1}{z-1}}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{2z-1}{z}}{z-1}dz$$



由C积分公式

$$= \left.\frac{2z-1}{z-1}\right|_{z=0} 2\pi i + \left.\frac{2z-1}{z}\right|_{z=1} 2\pi i$$

$$= 4\pi i$$

例 3 设C 表圆周$x^2+y^2=3$, $f(z)=\int_C \frac{3\varsigma^2+7\varsigma+1}{\varsigma-z}d\varsigma$,

求$f'(1+i)$.

解 $\because$ $3z^2+7z+1$在全平面上处处解析，

$$\therefore f(z)=\int_C \frac{3\varsigma^2+7\varsigma+1}{\varsigma-z}d\varsigma=\begin{cases}0 & |z|>3\\ 2\pi i(3z^2+7z+1) & |z|<3\end{cases}$$

又 $$f'(z)=\begin{cases}0 & |z|>3\\ 2\pi i(6z+7) & |z|<3\end{cases}$$

故 $$f'(1+i)=2\pi i[6(1+i)+7]=2\pi(13i-6)$$

§6 解析函数的高阶导数

内 容 简 介

本节研究解析函数的无穷次可导性，并导出高阶导数计算公式。研究表明：一个解析函数不仅有一阶导数，而且有各阶导数，它的值也可用函数在边界上的值通过积分来表示。这一点与实变函数有本质区别。

形式上，

对积分公式$f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz(z_0\in D)$

两边在积分号下对z_0求导得

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz \quad \cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad (n=1,2,\cdots)$$

以下将对这些公式的正确性加以证明。

定理 解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数，它的n阶导数为

$$\boxed{f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz}\quad(n=1,2,\cdots)$$

其中C为在$f(z)$的解析区域D内围绕z_0的任意正向简单闭曲线,而且它的内部$\subset D$.

证明 用数学归纳法和导数定义。

先证$n=1$的情形.

$$\forall z_0\in D\quad f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

由柯西积分公式 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$

$$f(z_0+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}dz$$

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i\Delta z}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}dz-\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz$$

令为 I

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz+\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}dz}$$

$$|I| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|\Delta z||f(z)|}{|z - z_0 - \Delta z||z - z_0|^2} ds$$

$\because$ $f(z)$在C上解析，$\therefore$ $f(z)$在C上连续

则$\exists M, \partial\ |f(z)| \leq M, d = \min\limits_{z\in C}|z - z_0|$ 取$|\Delta z| < \dfrac{1}{2}d$,则有

$$|z - z_0| \quad d, \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{d}$$

$$|z - z_0 - \Delta z| \quad |z - z_0| - |\Delta z| > \frac{d}{2}, \quad \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} < \frac{2}{d}$$

$$\therefore |I| < |\Delta z| \frac{ML}{\pi d^3} \quad (L\text{——}C\text{的长度})$$

显然，$\lim\limits_{\Delta z \to 0} I = 0$，从而有

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \quad (*)$$

再利用(*)式及推导(*)的方法可证$n = 2$的情形.

$$f''(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f'(z_0 + \Delta z) - f'(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$ 依次类推，用数学归纳法可得

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

定理表明$f(z)$在z平面上D内解析$\Rightarrow f(z)$在D内具有各阶导数,即在D内解析$--$无穷次可导.

一个解析函数的导数仍为解析函数。

用途:可计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$

例 1 求下列积分值 $C:|z|=r>1$

$$1)\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}dz \qquad 2)\oint_C \frac{e^z}{(1+z^2)^2}dz$$

解 1) $\because$ $\cos\pi z$在全平面处处解析

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!}(\cos\pi z)^{(4)}\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{2\pi i}{4!}(-\pi^4) = -\frac{\pi^5}{12}i$$

$2)\because \dfrac{e^z}{(z^2+i)^2}$在$z=\pm i$处不解析.取$C_1:|z-i|=\rho_1$

$C_2:|z+i|=\rho_2$ C_1,C_2不相交且在C的内部

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{(1+z^2)^2}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{(i+z^2)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{(i+z^2)^2}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z+i)^2}dz$$

$$=\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left(\frac{e^z}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i}+\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left(\frac{e^z}{(z-i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-i}$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)(e^{i} - ie^{-i})$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)^{2}(\cos 1 - \sin 1) = \pi i\sqrt{2}\sin(1-\frac{\pi}{4})$$

3)求下列积分值, $C: |z| = r > 1, \oint_C \frac{e^z}{z^n} dz$

$n = 1$, 原式 $= 2\pi i$;　$n \neq 1$, 原式 $= \frac{2\pi i}{(n-1)!}$

4)求下列积分值, $\oint_{|z|=4} \frac{\cos \pi z}{z^3 (z-1)^2} dz$　　$(12-\pi)\pi i$

作业

- P100 7(3)(5)(7)(9) 8(1)(2) 9(3)(5)