Character 1. 信号与系统 ——信号

- 信号的定义
- 信号的类型
- 信号的能量与功率
- 信号的变换
- 几种基本的信号

信号的定义

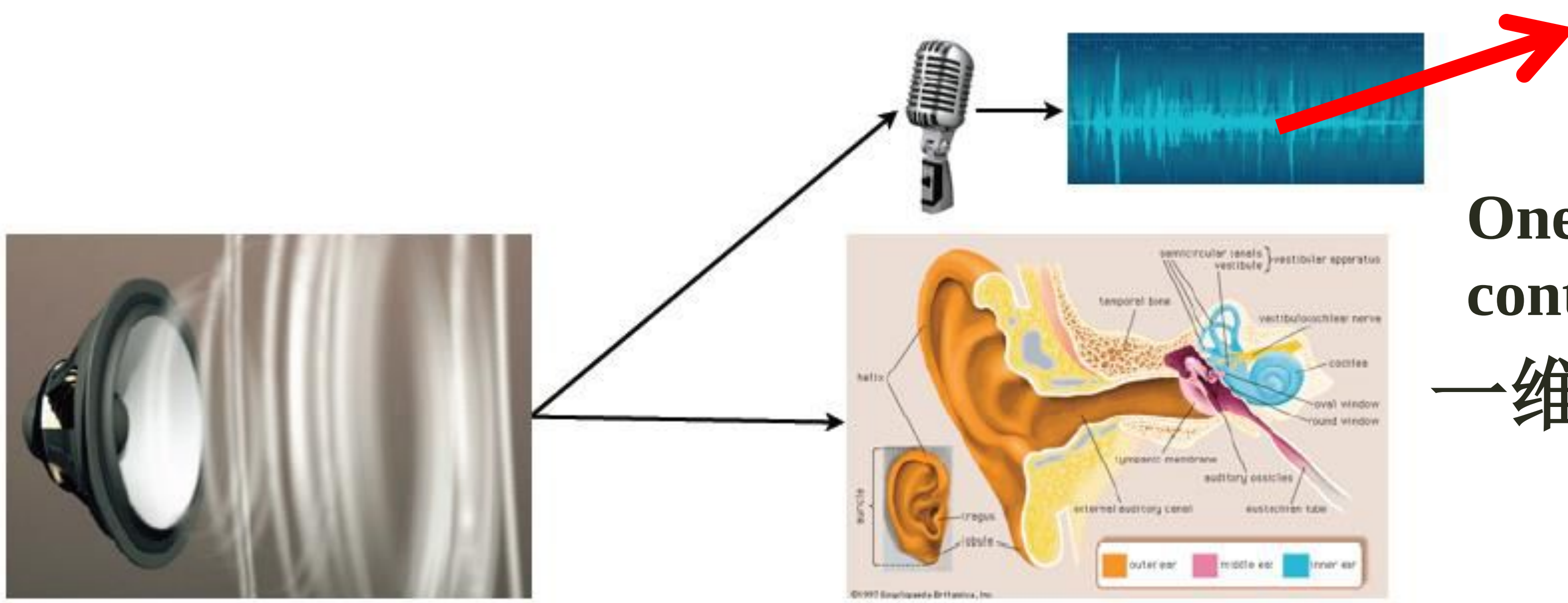
什么是信号

带有信息的随时间和空间变化的**物理量或物理现象**，可以用波形表示。
在数学上，信号便是为一个带有**独立变量**、携带一定信息的**函数**。

声音信号的例子

物体振动→空气振动→声波→人耳鼓膜→声音信号

物体振动→空气振动→声波→麦克风等→电信号 $\xrightarrow{\text{采样}}$ 离散声音信号



$x(t)$ $\xrightarrow{\text{采样}}$ $x[n]$

One dimensional continuous signal
一维连续信号

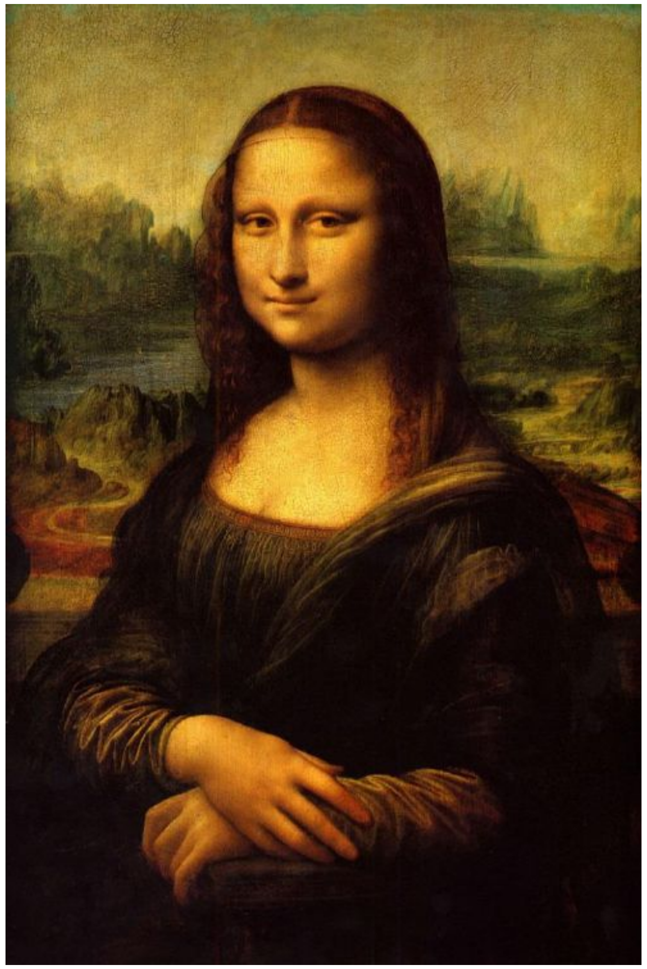
One dimensional discrete signal
一维离散信号

信号的定义

图像信号的例子

二维连续信号

two dimensional continuous signal

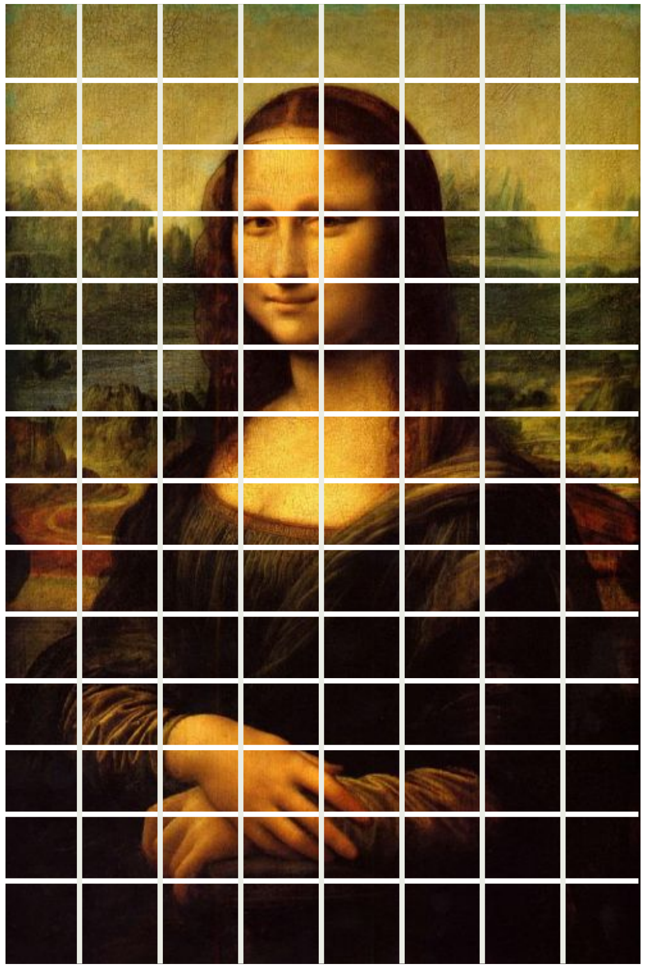


$x(t, s)$

数字相机
扫描仪等

二维离散信号

two dimensional discrete signal



14*8

$$x[m,n]=\begin{bmatrix} I_{00} & I_{01} & & I_{0M} \\ I_{10} & I_{11} & & I_{1M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_{N0} & I_{N1} & & I_{NM} \end{bmatrix}$$

信号的定义

one dimensional discrete signal 一维离散信号

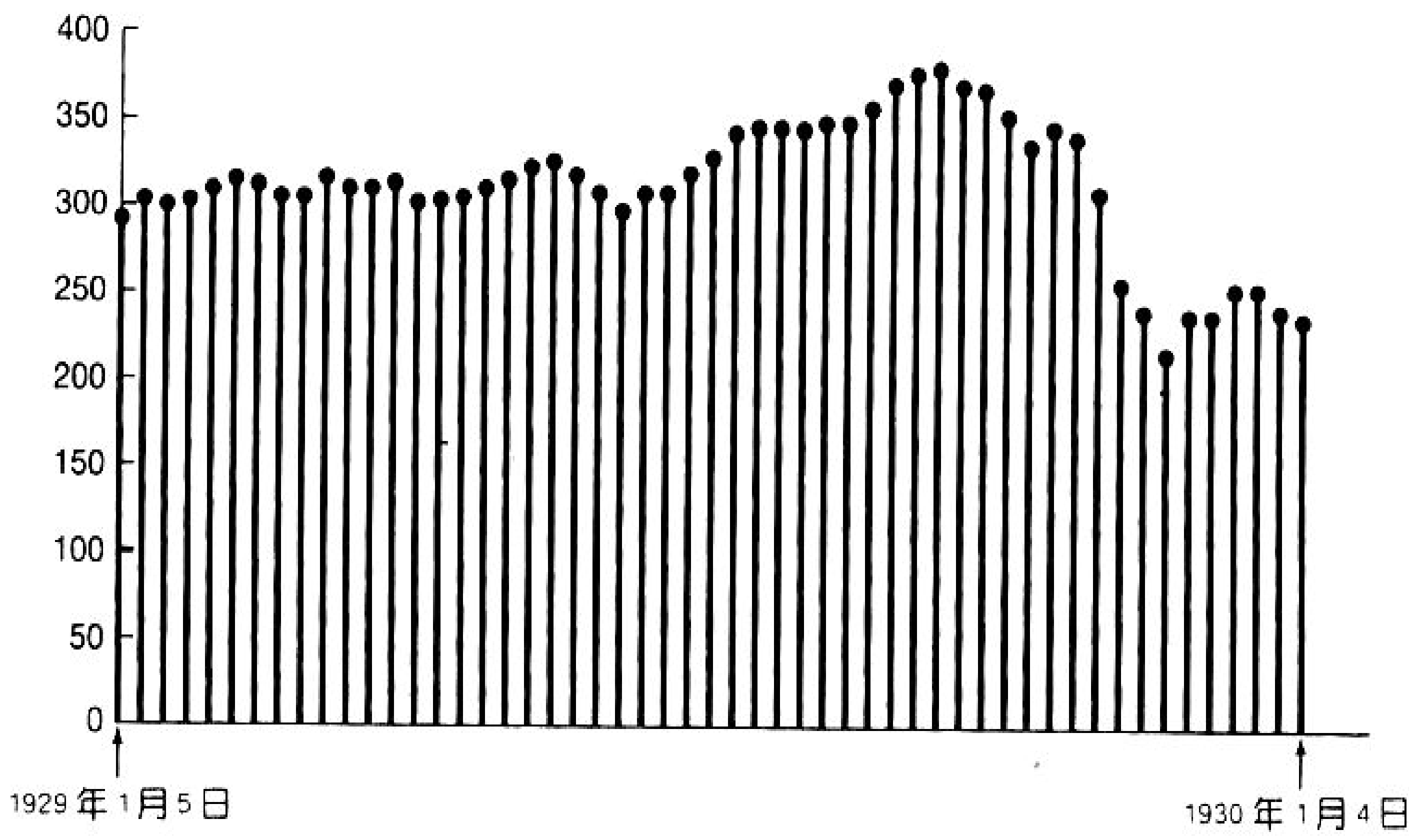
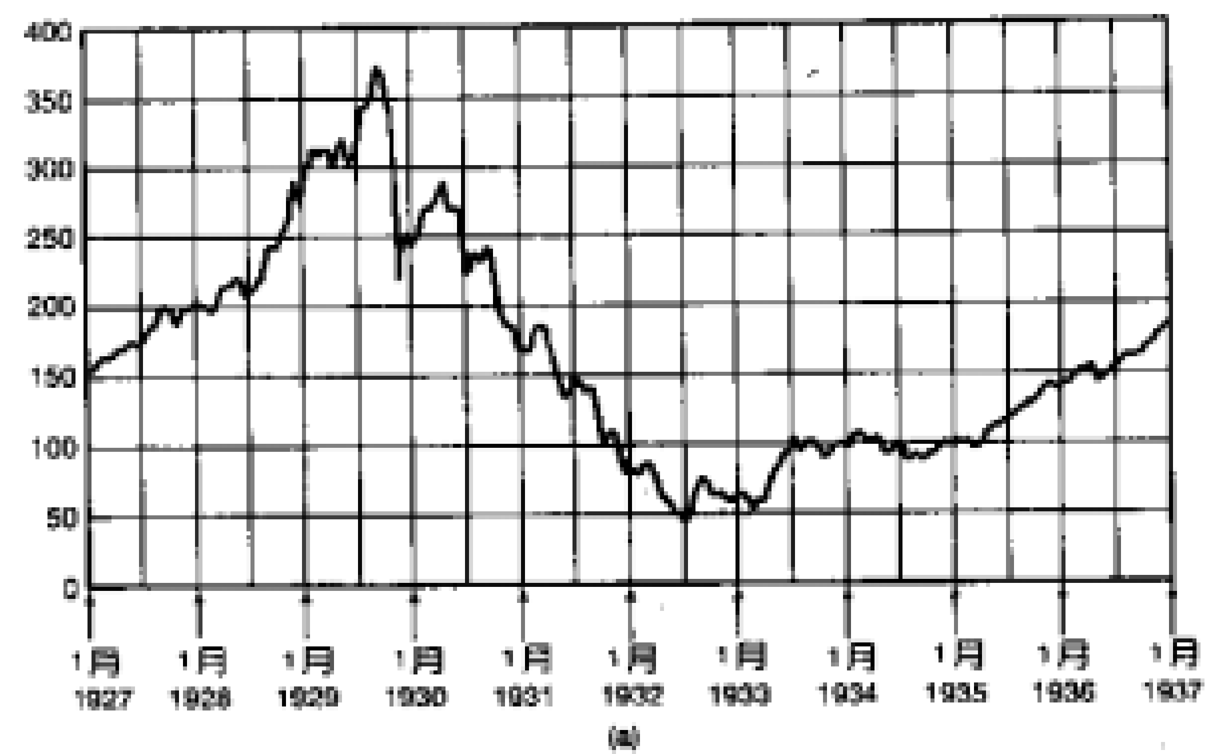


图 1.6 离散时间信号的例子:从 1929 年 1 月 5 日至 1930 年 1 月 4 日,
每周道·琼斯股票市场指数的变化



道.琼斯股票市场指数变化 $x[n]$

信号的定义

电信号的例子

$$i(t)=\frac{v_s(t)-v_r(t)}{R}$$

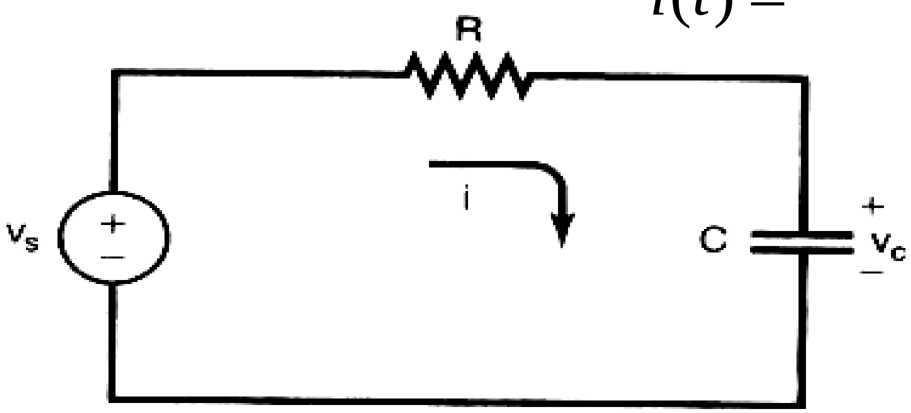


图 1.1　含有电压源 v_s 和电容器电压 v_c 的简单电路

$v_s(t)$

$v_c(t)$

汽车速度变化

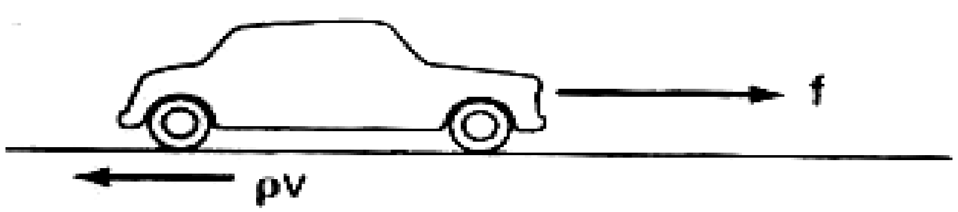


图 1.2　一部汽车。f 系来自发动机的外加力，ρv 系正比于汽车速度 v 的摩擦力

$v(t)$

风信号的例子

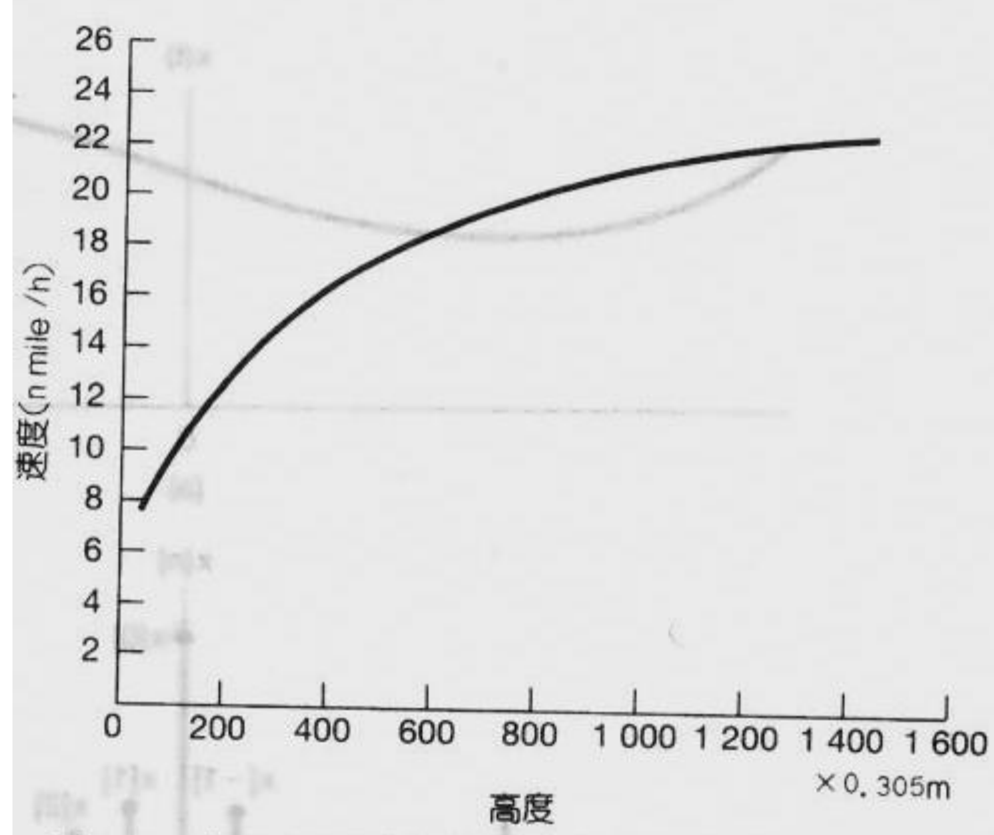


图 1.5　典型的年平均沿垂直方向风速分布图(摘引自 Crawford and Hubson, National Severe Storms Laboratory Report, ESSA ERLTM – NSSL 48, August 1970)

垂直方向风速变化 $s(h)$
（高度为自变量）

信号的属性与表达方式

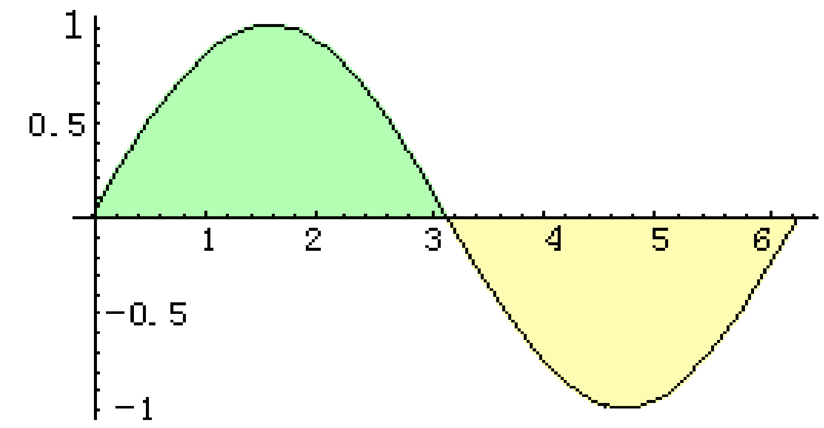
时间/空间属性

信号随时间和空间的变化而变化。

表达方式
- 数学表达式：一个/几个变量的函数
- 波形：函数的曲线图形

交流电

$u=\sin(t)$

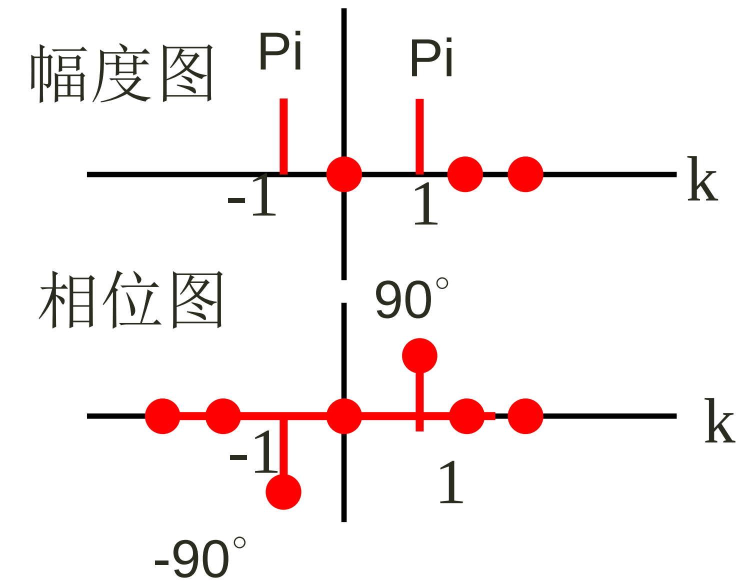


频率属性

不同的信号有不同的频率成分，每个频率的幅度和相位可能不同。

$$FT(\sin t) = j\pi[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]$$

表达方式
- 频率成分（频谱）数学表示：每个频率的振幅、和相位的数学表示。
- 频谱图表示：频谱函数的曲线图形

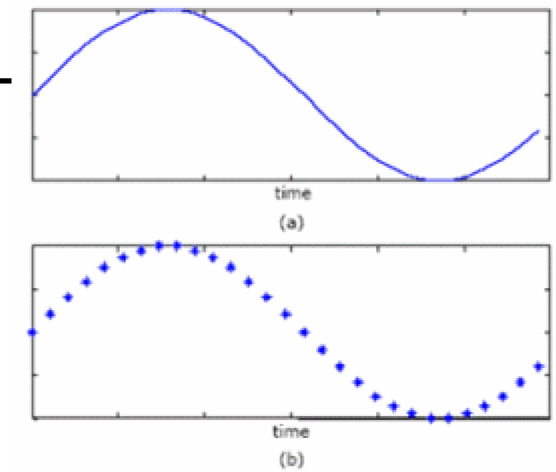


能量属性

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt \qquad E=\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(n)|^2$$

信号的分类

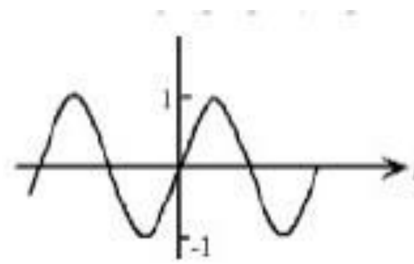
物理变量取值是否连续
- 连续时间信号 $x(t)$
- 离散时间信号 $x[n]$



t: 连续变量

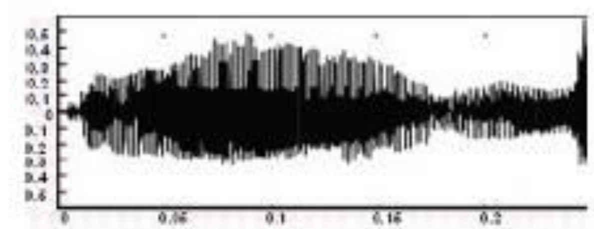
n: 整数变量,

波形是否有规律重复
- 周期信号
- 非周期信号

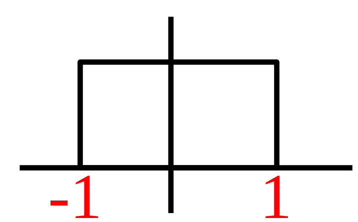


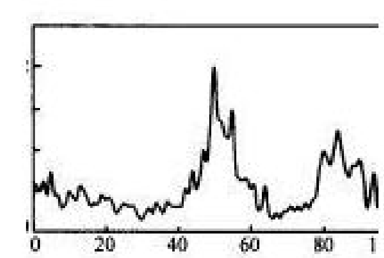
本课程重点介绍**单一独立变量**的情况

是否有明确的数学表达
- 确定信号
- 随机信号

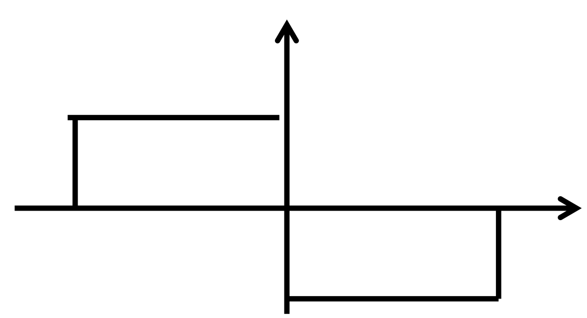


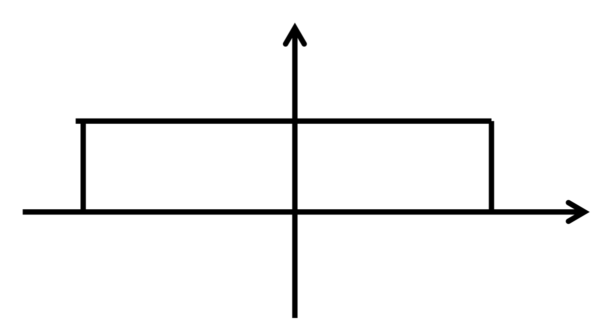
能量功率是否有限
- 能量信号
- 功率信号





波形对原点的对称性
- 奇信号
- 偶信号





信号的分类

连续时间信号（continuous-time signal, CT）

自然界中的大部分信号都是连续信号。如声音、图像、温度、电压、电流、阻力、压力、角速度等等。

	无限区间	有限区间
能量	$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} \lvert f(t)\rvert^2 dt$	$E = \int_{t_1}^{t_2} \lvert f(t)\rvert^2 dt$
功率	$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{E_\infty}{2T}$	$P = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \lvert f(t)\rvert^2 dt$

无限区间内按能量与功率的信号分类

$E_\infty < \infty$	能量信号
$0 < P_\infty < \infty$	功率信号
其它	非功率非能量信号

$E_\infty < \infty \longrightarrow P_\infty = 0$

$P_\infty < \infty \longrightarrow E_\infty = \infty$

离散时间信号

discrete-time signals, DT

自然界信号: DNA　性别

人造信号:连续信号采样得到的信号

	无限区间	有限区间
能量	$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(n)\rvert^2$	$E = \sum_{n_1}^{n_2} \lvert f(n)\rvert^2$
功率	$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} \lvert f(n)\rvert^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{E_\infty}{2N+1}$	$P = \frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n_1}^{n_2} \lvert f(n)\rvert^2$

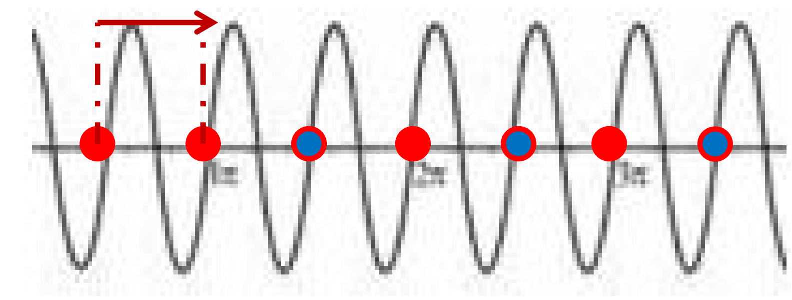
$x(t)=\sin(t)$?	功率信号
$x[n]=2$;	功率信号
$x(t)=t$	都不是
$x = \begin{cases} 2 & -1 \le t \le 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$	能量信号

信号的分类

周期(*periodic*)信号与非周期(*aperiodic*)信号

周期信号指的是信号波形以一定间隔重复出现，否则成为非周期信号。

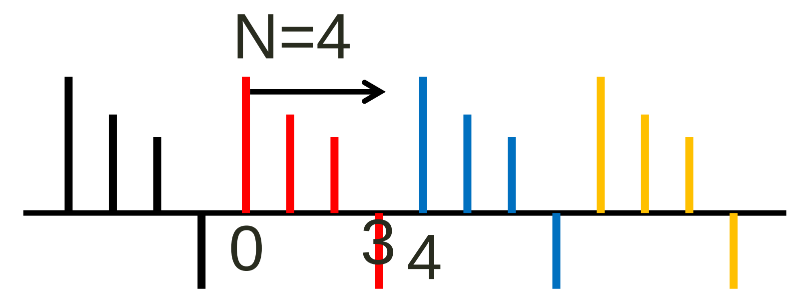
连续：设信号x(t)，t∈R，若存在一个常数T，使得x(t+T)=x(t)，则称f(t)是以T为周期的周期信号。



sin4t =sin(4(t+π/2)

离散：设信号x[n]，n∈R，若存在一个常数N，使得x[n+N]=x[n],则称f(n)是以N为周期的周期信号。

满足上述条件的最小的正$T(T_0)$、正$N(N_0)$称为信号的基本周期(基波周期)。



f(n) =f(n+4)

周期信号的特点：

1) 周期信号必须在时间上是无始无终的。

2) 随时间变化的规律必须具有周期性。

3) 在各周期内信号的波形完全一样。

信号的分类

周期(*periodic*)信号与非周期(*aperiodic*)信号

周期信号指的是信号波形以一定间隔重复出现，否则成为非周期信号。

周期信号的特点：

1) 周期信号必须在时间上是无始无终的。

2) 随时间变化的规律必须具有周期性。

3) 在各周期内信号的波形完全一样。

思考：下列信号是否为周期信号

$f(t) = \cos(7\pi t + 60^\circ)$　　是

x(t)=sin(4t)+cos(5t)　　是　　⟶ 找公倍数　　$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{N_1}{N_2}$

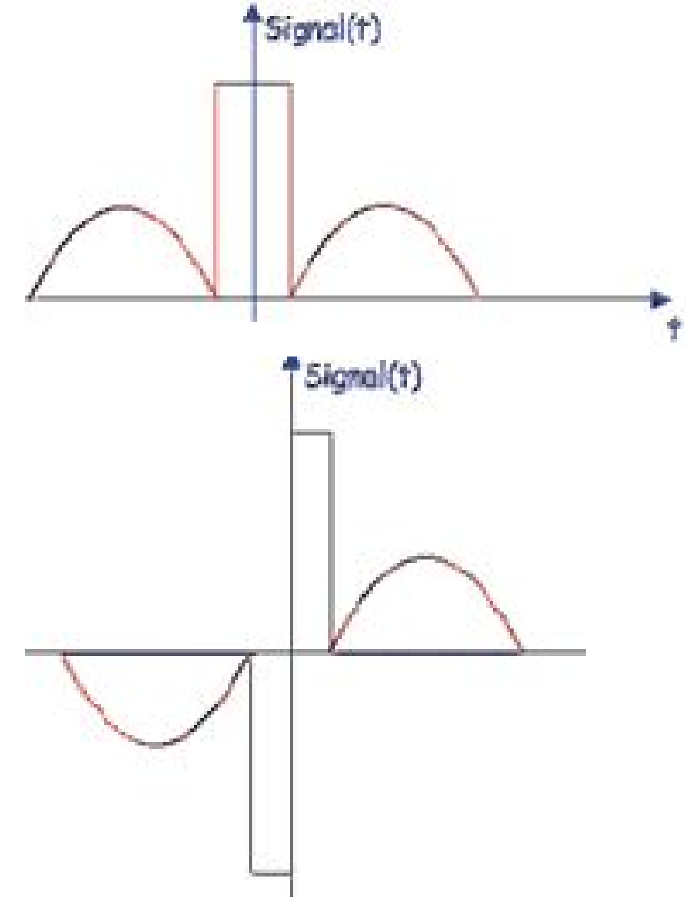
$T = N_1 x_2(t) = N_2 x_1(t)$

f(t)=sin2t+cosπt　　否

信号的分类

奇（Odd）信号与偶（Even）信号

	连续信号 Continuous signal	离散信号 Discrete signal
偶信号	$x(t)=x(-t)$	$x[n]=x[-n]$
奇信号	$x(t)=-x(-t)$	$x[n]=-x[-n]$



下列信号是奇信号与偶信号?

$$x_e(t)=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$$

$$x_o(t)=\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$$

$$x_e[n]=\frac{1}{2}(x[n]+x[-n])$$

$$x_o[n]=\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])$$

任何信号都可分解为奇信号与偶信号之和

$x_e(t)/x_e[n]$称为偶部Even Part
$x_o(t)/x_o[n]$称为奇部Odd Part

若$x(t)=\sin(t)$，计算 $x_e(t)$， $x_o(t)$

$$x(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)+x(t)-x(-t)]$$

$$=x_e(t)+x_o(t)$$

$$x[n]=\frac{1}{2}[x[n]+x[-n]+x[n]-x[-n]]$$

$$=x_e[n]+x_o[n]$$

信号的基本变换

- 时移/延时 *Time Shift/Time Delay*
- 反转 *Time reversal*
- 尺度变换（缩放）*Time scaling*

自变量的变换

- 幅度缩放
- 信号相加
- 信号相乘

信号自变量的基本变换

时移*Time shift*

$$x(t) \longrightarrow x(t-t_0)$$

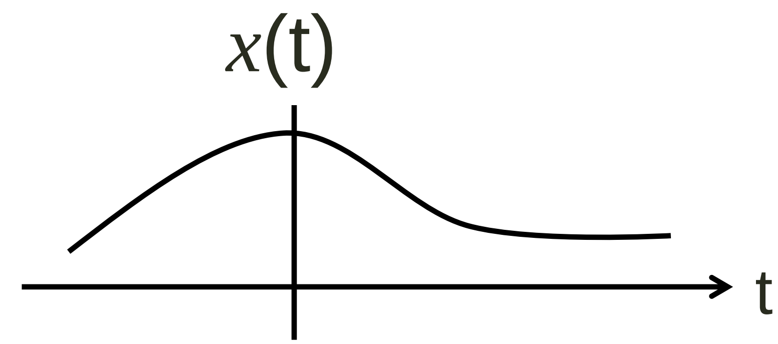
$t_0<0$，信号超前；

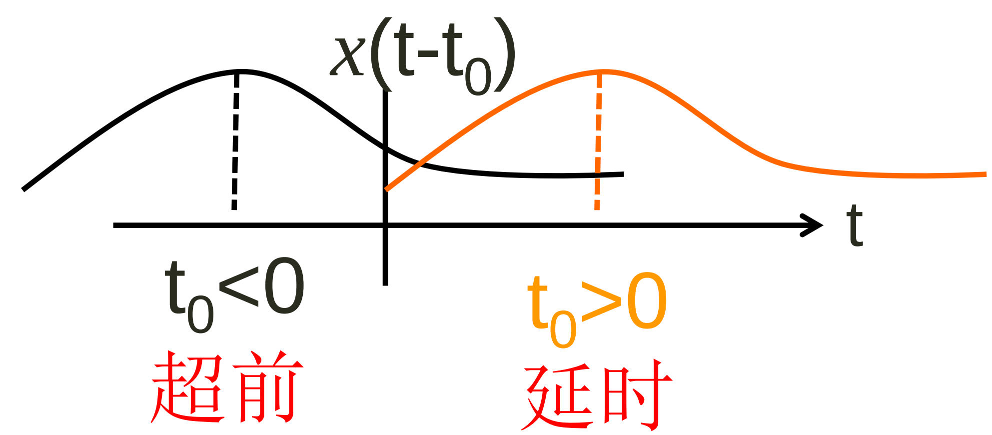
$t_0>0$，信号延时。

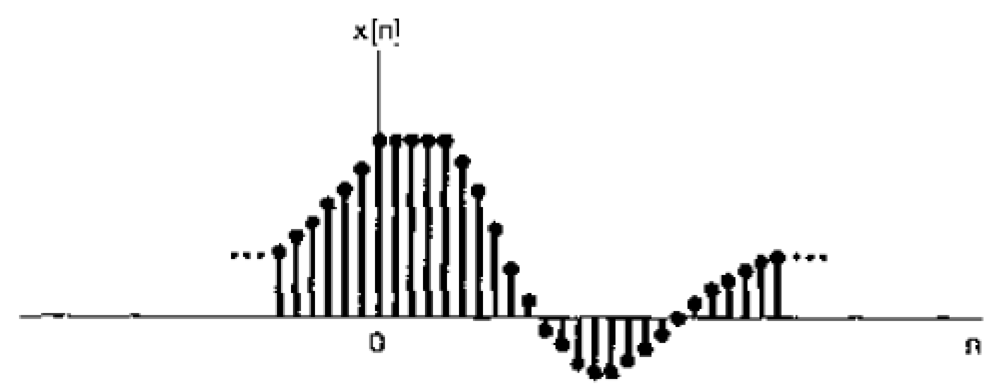
$$x[n] \longrightarrow x[n-n_0]$$

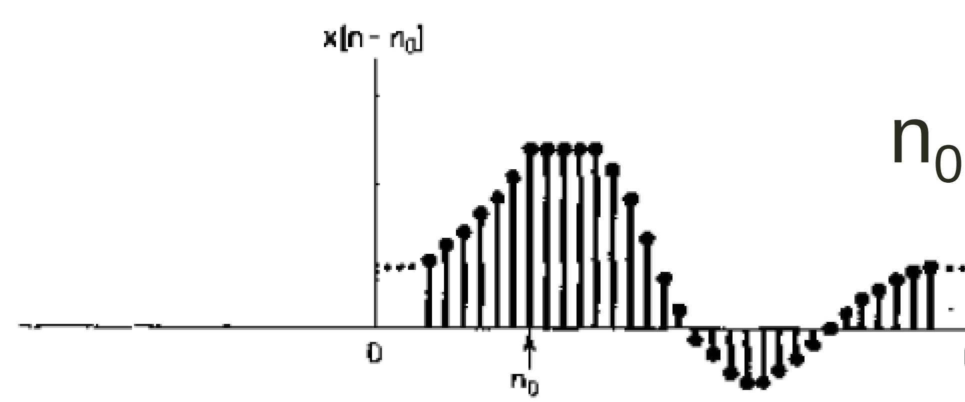
$n_0<0$，信号超前；

$n_0>0$，信号延时。









$n_0>0$

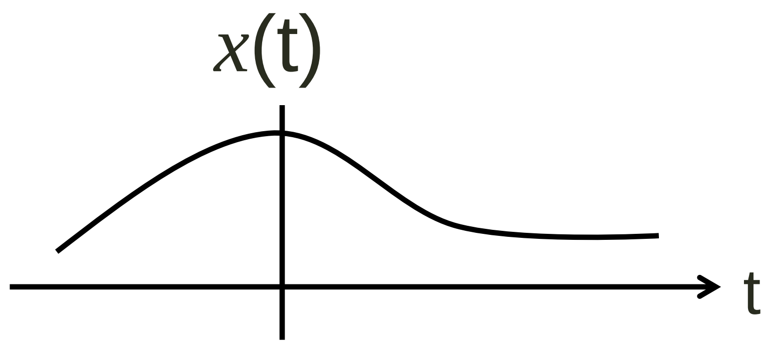
延时

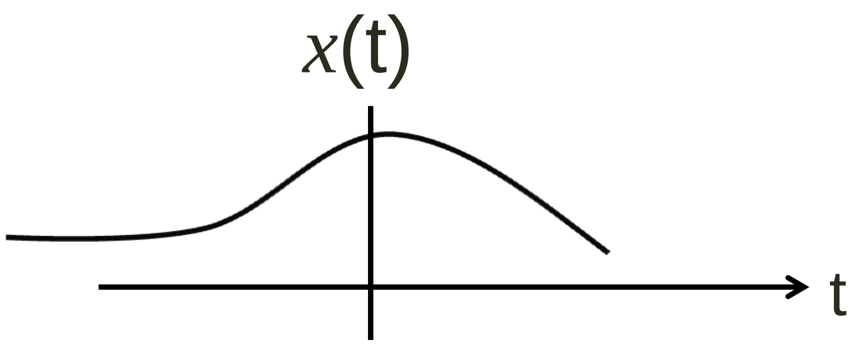
信号自变量的基本变换

反转Time reversal

$$x(t) \longrightarrow x(-t)$$

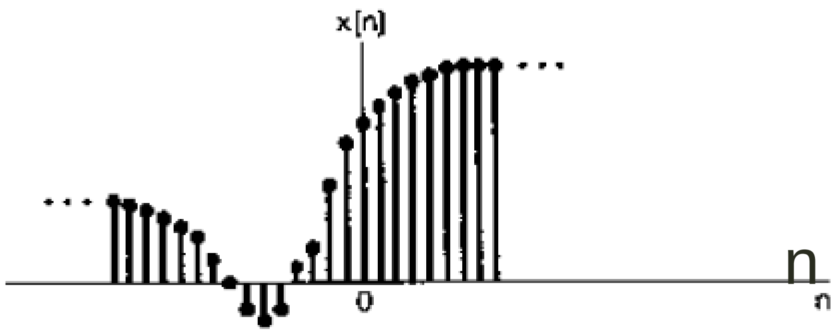
以$t=0$为轴反转

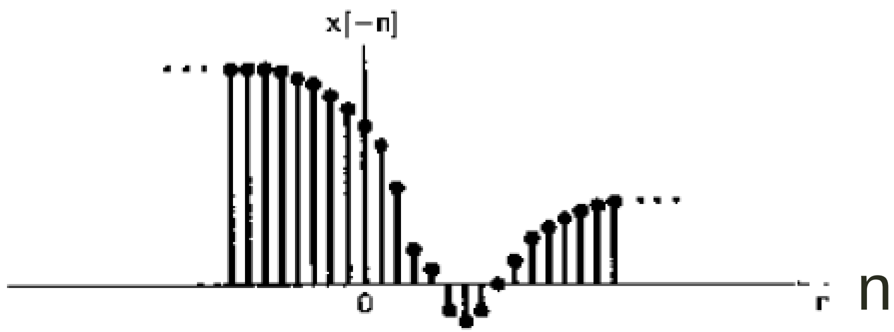




$$x[n] \longrightarrow x[-n]$$

以$n=0$为轴反转





信号自变量的基本变换

尺度变换Time Scaling

$$x(t) \longrightarrow x(at)$$

若$a>1$, $x(at)$是由**x(t)**沿时间轴压缩而得到;

若$0<a<1$, $x(at)$是由**x(t)**沿时间轴展宽而得到;

若$a=-1$, $x(t)=x(-t)$, $x(at)$是由**x(t)**沿**t=0**反转而得到;

若$a<0$, 且不等于-1, $x(at)$是由**x(t)**同时进行尺度变换和反转而得到.

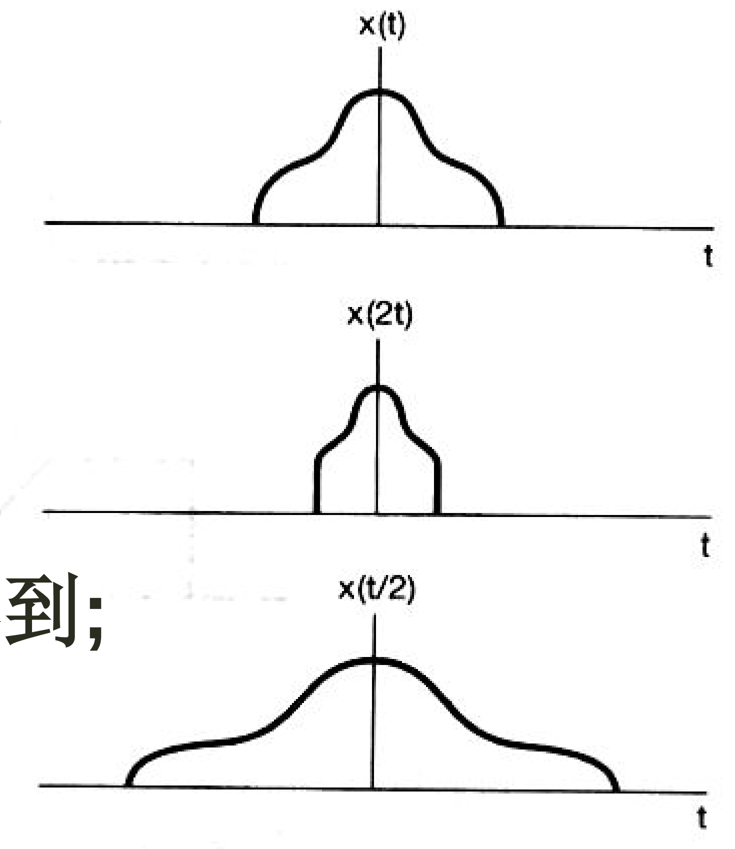


图 1.12　用时间尺度变换关联的连续时间信号

$$x[n] \longrightarrow x[kn]$$

原理分析同上，但是不完全相同，尤其是k>1时。要注意

信号自变量的基本变换

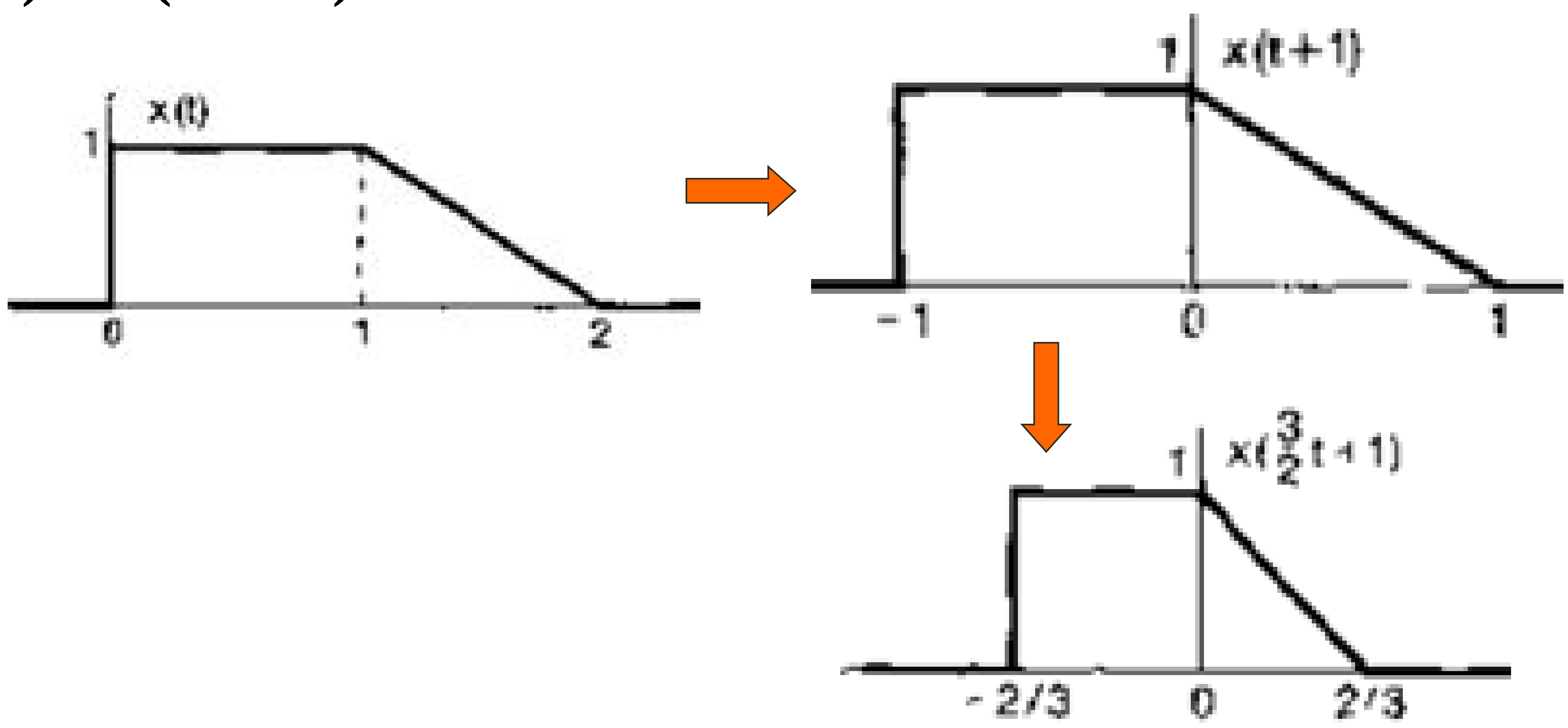
➡ 综合变换 $x(t) \longrightarrow x(at+\beta)$

法1：先平移再尺度

(1)对$x(t)$根据β值进行时移变换，$x(t) -> x(t+\beta)$。

(2) 对时移后的信号进行尺度变换。$x(t+\beta) -> x(at+\beta)$

x(t) to x(3/2t+1)



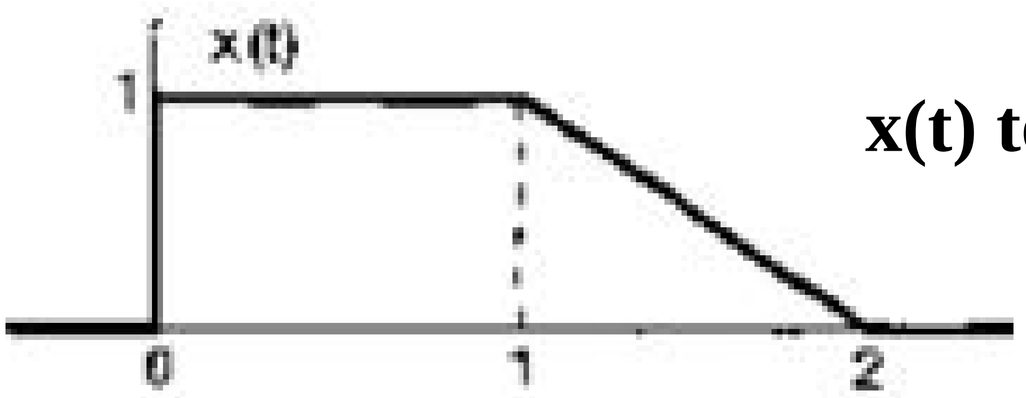
信号自变量的基本变换

➡ 综合变换 $x(t) \longrightarrow x(at+\beta)$

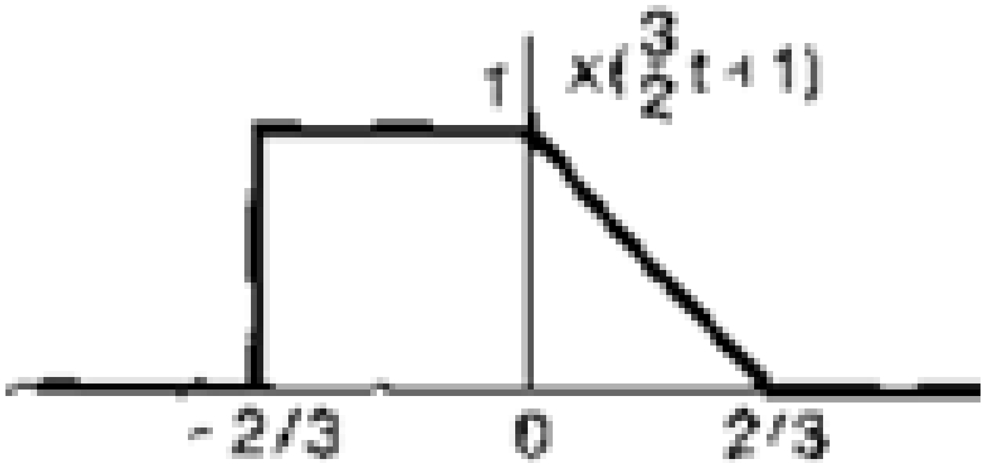
法2：逐点对应法 首先设 $t = at_1 + \beta \longrightarrow t_1 = (t-\beta)/a$

根据上述关系，将x(t)的函数数值逐点变换成$x(t_1)$, $t_1=(t-\beta)/\alpha$, $x(t_1)=x(t)$

若给出图形，一般首先选择关键点进行变换，然后再连接图形。



x(t) to x(3/2t+1)



相当于

(1)对$x(t)$进行尺度变换，$x(t) -> x(\frac{t}{\alpha})$。

(2) 对时移后的信号进行平移变换。 $x(\frac{t}{\alpha}) > x(\frac{t}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha})$

信号的基本变换

信号相加

两个信号相加，其和在任意时刻t的信号值等于两个信号在该时刻的信号值之和。

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t) \qquad x[n]=x_1[n]+x_2[n]$$

信号相乘

两个信号相乘，其积在任意时刻t的信号值等于两个信号在该同一时刻的信号值之积。

$$x(t)=x_1(t)\bullet x_2(t) \qquad x[n]=x_1[n]\bullet x_2[n]$$

幅度缩放

幅度变为原来的**a**倍，自变量坐标不变。

$$y(t)=ax(t) \qquad y[n]=ax[n]$$

几种基本的信号

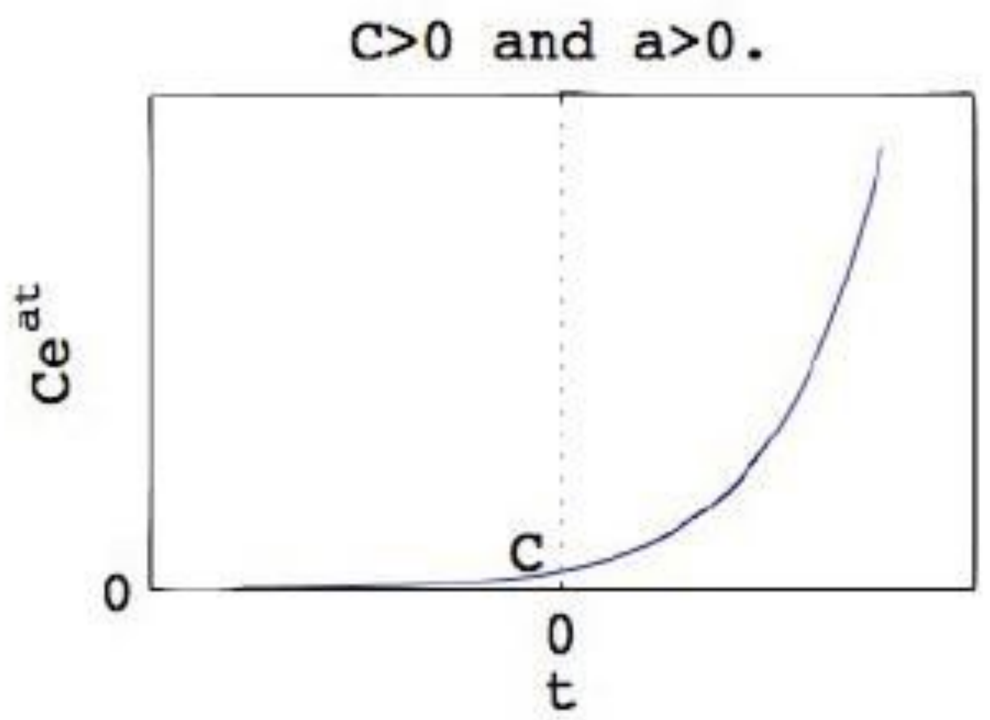
- 直流信号
- **指数信号**
  - 实指数信号
  - 复指数信号
    - 纯虚指数信号
    - 一般虚指数信号
- **正弦信号**
  - 正弦信号
  - 余弦信号
- **脉冲信号**
- **单位阶越信号**
- 斜坡信号

基本信号类型

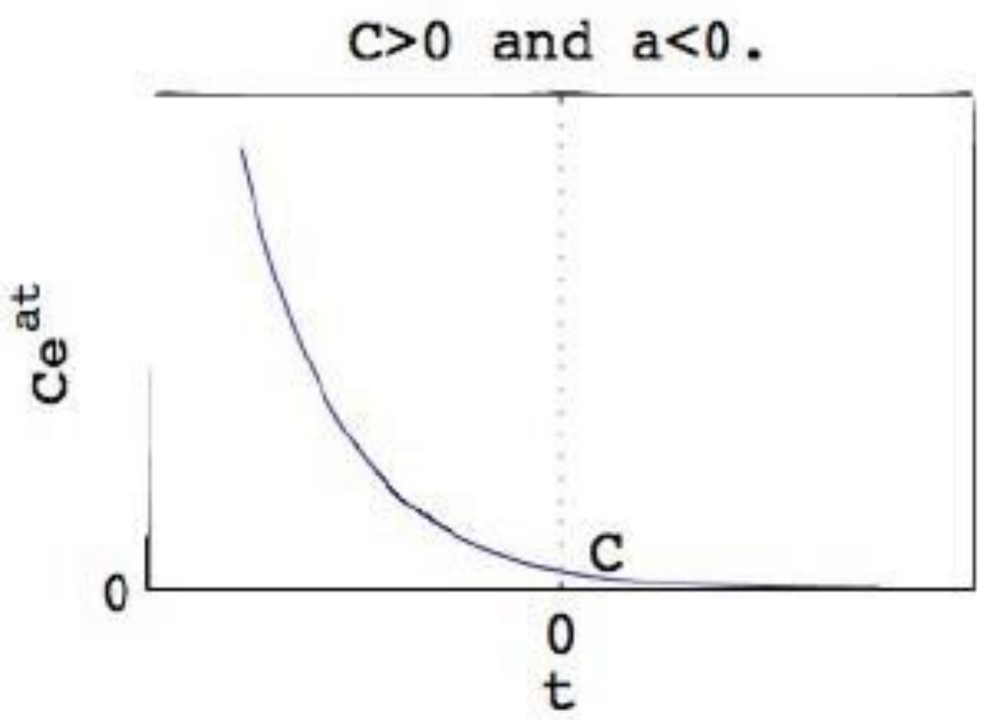
连续时间指数信号

$$x(t) = Ce^{at}$$

（1）实指数信号：C和a为实数



指数增长



指数衰减

原子弹爆炸，复杂化学反应等

放射性衰变、阻尼系统响应等

基本信号类型

连续时间指数信号 $x(t)=Ce^{at}$

（2）特殊虚指数信号 $e^{j\omega_0 t}$　a为纯虚数， C=1

根据欧拉公式：$e^{j\omega_0 t}=\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t$ → $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ 为周期信号

实部　虚部

周期性分析

(1) 若 $\omega_0=0$ 对任意T都是周期信号

(2)若$\omega_0\neq 0$　都是周期的

$$x(t+T)=e^{j\omega_0(t+T)}=e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T}=e^{j\omega_0 t}\longrightarrow e^{j\omega_0 T}=1\longrightarrow \begin{cases}\cos\omega_0 T=1\\ \sin\omega_0 T=0\end{cases}$$

$$\omega_0 T=2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\longrightarrow T=\frac{2\pi k}{\omega_0}\ \text{周期}\longrightarrow T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}\ \text{基波周期}\longrightarrow$$

$e^{j\omega_0 T}$ 和 $e^{-j\omega_0 T}$ 具有相同的基波周期

谐波族　$\left\{e^{j\omega_0 kt}\right\}_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ 均是以 $\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ 为周期的周期信号，它们被称为一族谐波复指数信号，其中 $e^{j\omega_0 kt}$ 是第K次谐波

基本信号类型

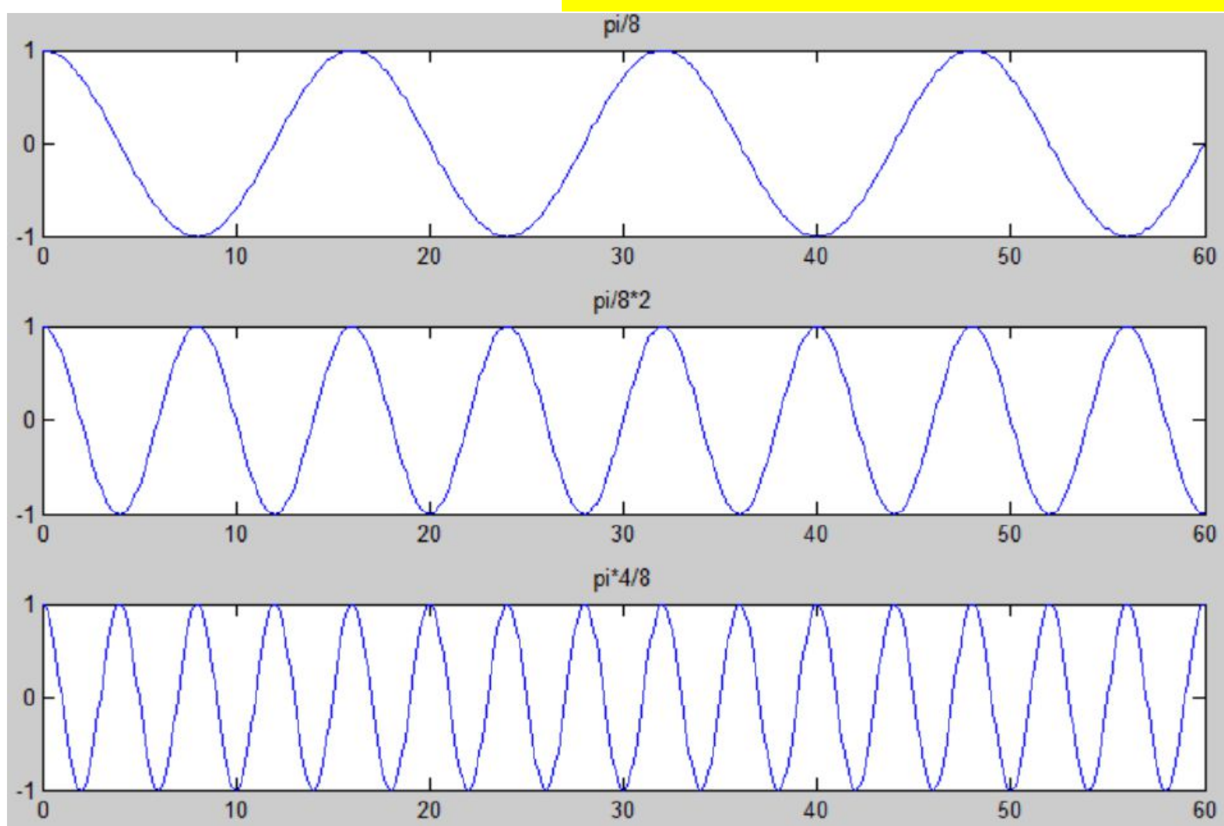
连续时间指数信号 $x(t) = Ce^{at}$

（2）特殊虚指数信号 $e^{j\omega_0 t}$　　**a为纯虚数， C=1**

根据**欧拉公式**：$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t \longrightarrow x(t) = e^{j\omega_0 t}$ 为周期信号

基波周期 $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$　　　周期 $T = \dfrac{2k\pi}{\omega_0}$

谐波族 $\left\{e^{j\omega_0 kt}\right\}_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ **均是以** $\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ **为周期的周期信号,它们被称为一族谐波复指数信号，其中 $e^{j\omega_0 kt}$ 是第K次谐波**



基本信号类型

➡ **连续时间指数信号** $x(t) = Ce^{at}$

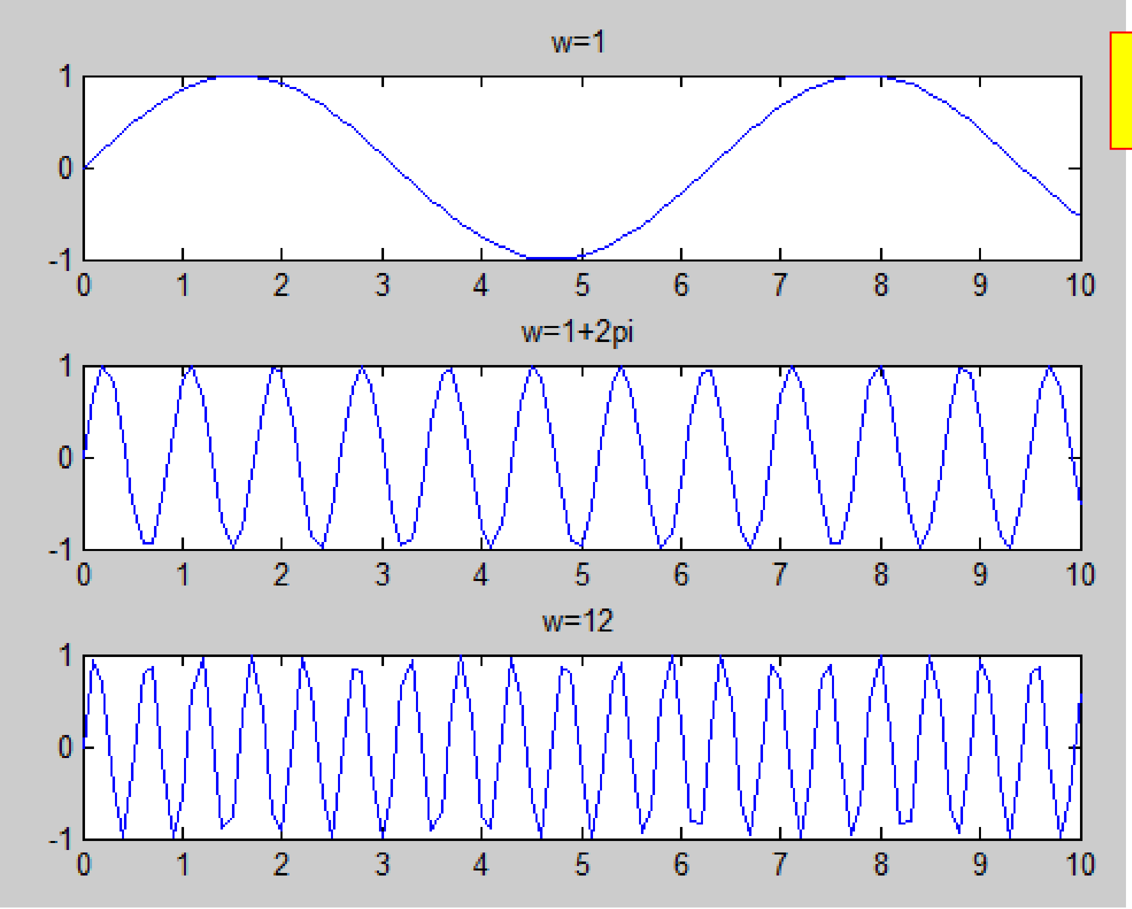
（2）特殊虚指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ **a为纯虚数， C=1**

根据**欧拉公式**：$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$ ⟶ $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

实部　　虚部　　　　为周期信号

角速度分析　**(2) 若 ω 不同,信号不同** $\omega_0\uparrow, T\downarrow, f_0\uparrow,\quad \omega_0\downarrow, T\uparrow, f_0\downarrow$

```
w=1;  x=0:.1:10;
subplot(3,1,1);
plot(x, sin(w*x));
title('w=1');
w=1+2pi;
subplot(3,1,2);
plot(x,sin(w*x)); title('w=1;');
w=12;
subplot(3,1,3)
plot(x,sin(w*x));title('w=13;');
```



能量与功率分析

$E_\infty = \infty$

$P_\infty = 1$

$E_{period} = T_0$

$P_{period} = 1$

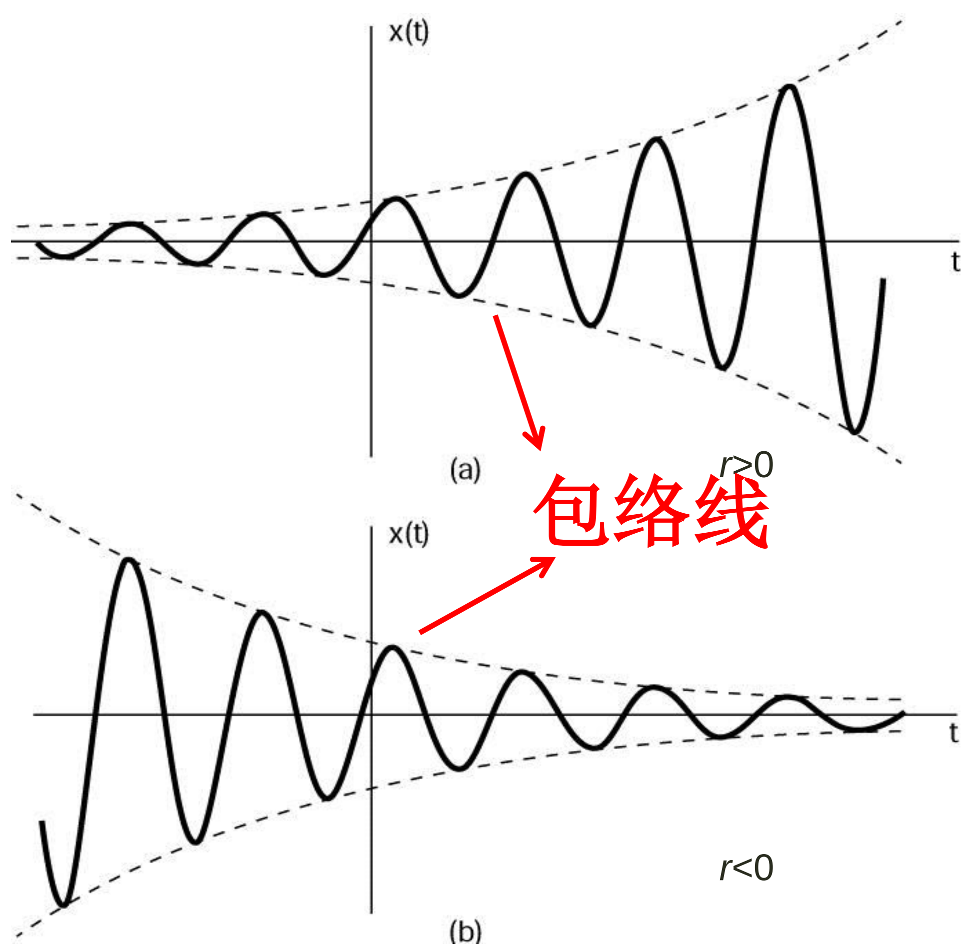
基本信号的类型

连续时间指数信号 $x(t)=Ce^{at}$

（3）一般周期复指数信号： C/**a**均为一般复数

假设 $C=|C|e^{j\theta},\ a=r+j\omega_0 \longrightarrow Ce^{at}=|C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t}=|C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)}$

若**r=0**，则复指数信号的实部和虚部都是正弦型的。
若**r>0**，则复指数信号的实部和虚部的振幅为指数增长的正弦信号。
若**r<0**，则复指数信号的实部和虚部的振幅为指数衰减的正弦信号。



说明

(1)具有指数衰减振幅的正弦信号称为阻尼正弦信号(***Damped sinusoids***)。

(2) $|C|e^{rt}$ 起振荡变化的包络作用。

基本信号类型

➡ **连续时间正弦信号** $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$ $x(t)=A\sin(\omega_0 t+\phi)$

参数说明 ϕ 单位弧度rad，时间t单位为秒，角速度ω_0的单位是rad/s。

周期性 周期信号，周期为 $T=\dfrac{2\pi k}{\omega_0}$，基波周期为$T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 频率 $f_0=\dfrac{1}{T_0}=\omega_0$

参数关系 $\omega_0\uparrow, T\downarrow, f_0\uparrow,\quad \omega_0\downarrow, T\uparrow, f_0\downarrow$

与指数信号的关系 利用欧拉公式可得

关系1：实部/虚部关系

$$\cos\omega_0 t=\mathrm{Re}\{e^{j\omega_0 t}\}\qquad A\cos(\omega_0 t+\phi)=A\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\}$$

$$\sin\omega_0 t=\mathrm{Im}\{e^{j\omega_0 t}\}\qquad A\sin(\omega_0 t+\phi)=A\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\}$$

关系2：奇部/偶部关系

$$\cos\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\qquad \sin\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$A\cos(\omega_0 t+\phi)=\frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\phi)}+e^{-j(\omega_0 t++\phi)}\right]=\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t}+\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$

$$A\sin(\omega_0 t+\phi)=\frac{A}{2j}\left[e^{j(\omega_0 t+\phi)}-e^{-j(\omega_0 t++\phi)}\right]=\frac{A}{2j}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t}-\frac{A}{2j}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$

能量与功率分析

$$E_\infty\{A\cos(\omega_0 t+\phi)\}=\infty\qquad E_\infty\{A\sin(\omega_0 t+\phi)\}=\infty$$

$$P_\infty\{A\cos(\omega_0 t+\varphi)\}=\frac{A}{2}\qquad P_\infty\{A\sin(\omega_0 t+\varphi)\}=\frac{A}{2}$$

基本信号类型

连续时间正弦信号 $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$ $x(t)=A\sin(\omega_0 t+\phi)$

例1.5 绘制复合复指数信号的幅度图. $x(t)=e^{j2t}+e^{j3t}$

若一个信号能表示成 $x(t)=Ae^{j\omega t}$ 的形式,其中**A**是实数

幅度/模 $|A|$ **相位: arctan(虚部/实部)**

指数部分 ωt

技巧

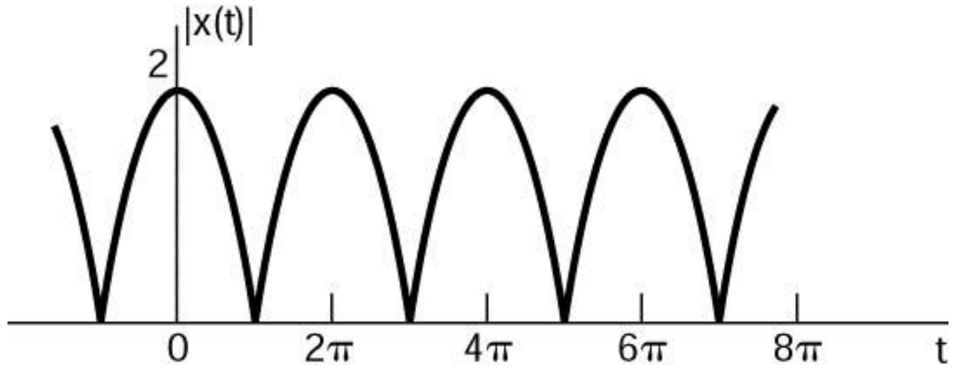
计算两个频率的平均值,作为公共因子提出来。最后表示成单一复指数信号与正弦信号的乘积.

$$x(t)=e^{j2t}+e^{j3t}=e^{j2.5t}\left(e^{-j0.5t}+e^{j0.5t}\right)$$

$$=2e^{j2.5t}\cos(0.5t)$$

$$\downarrow$$

$$|x(t)|=2|\cos(0.5t)|$$



基本信号的类型

离散时间指数信号

表达形式1 $x[n]=C\alpha^{n}$

表达形式2 若 $\alpha=e^{\beta}\longrightarrow x[n]=Ce^{\beta n}$

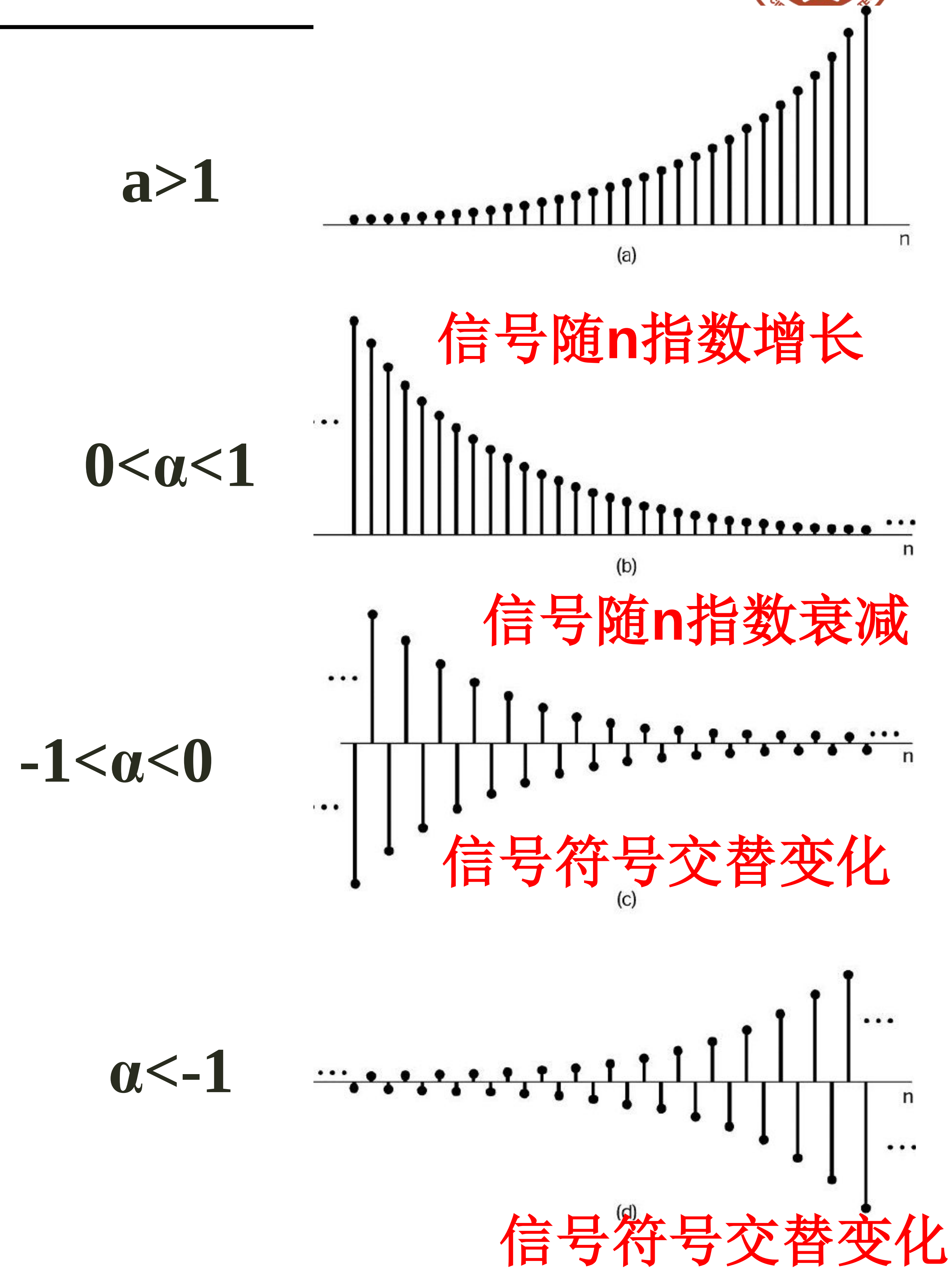
(1) 实指数信号 C和a为实数

$a=1$

信号为常数C

$a=-1$

信号为常在C和-C之间交替改变。



基本信号类型

离散时间指数信号 $x[n]=Ce^{\beta n}$

(2) 虚指数信号 β为纯虚数， $|a|=1 \longrightarrow x[n]=e^{jw_0 n}$

ω 对信号的影响 $e^{j(\omega_0+2k\pi)n}=e^{j\omega_0 n}e^{2k\pi n}=e^{j\omega_0 n}$ 2π为基波周期

（1）不同的**w0**可对应相同的信号，频率为 ω_0和$\omega_0+2k\pi$ 的信号

（2）一般选择 $0\le\omega_0\ge 2\pi$ 或者 $-\pi\le\omega_0\le\pi$ 间隔区间对信号进行分析。

（3）$e^{j\omega_0 n}$不具有随着 ω_0 增加而振荡速度增大的特点。ω_0 从0增加，其振荡频率越来越快，直到 $\omega_0=\pi$。其后，ω_0 增加，信号振荡频率下降，直到 $\omega_0=2\pi$

（4）离散时间复指数的低频部分集中在 $0,\pm2\pi,\pm4\pi,\ldots$等π的偶数倍附近，

离散时间复指数的高频部分集中在 $\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\ldots$等$\pi$的奇数倍附近。

离散时间复指数在 $\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\ldots$等$\pi$的奇数倍处为$(-1)^n$，振荡最剧烈。

ω 对信号的影响

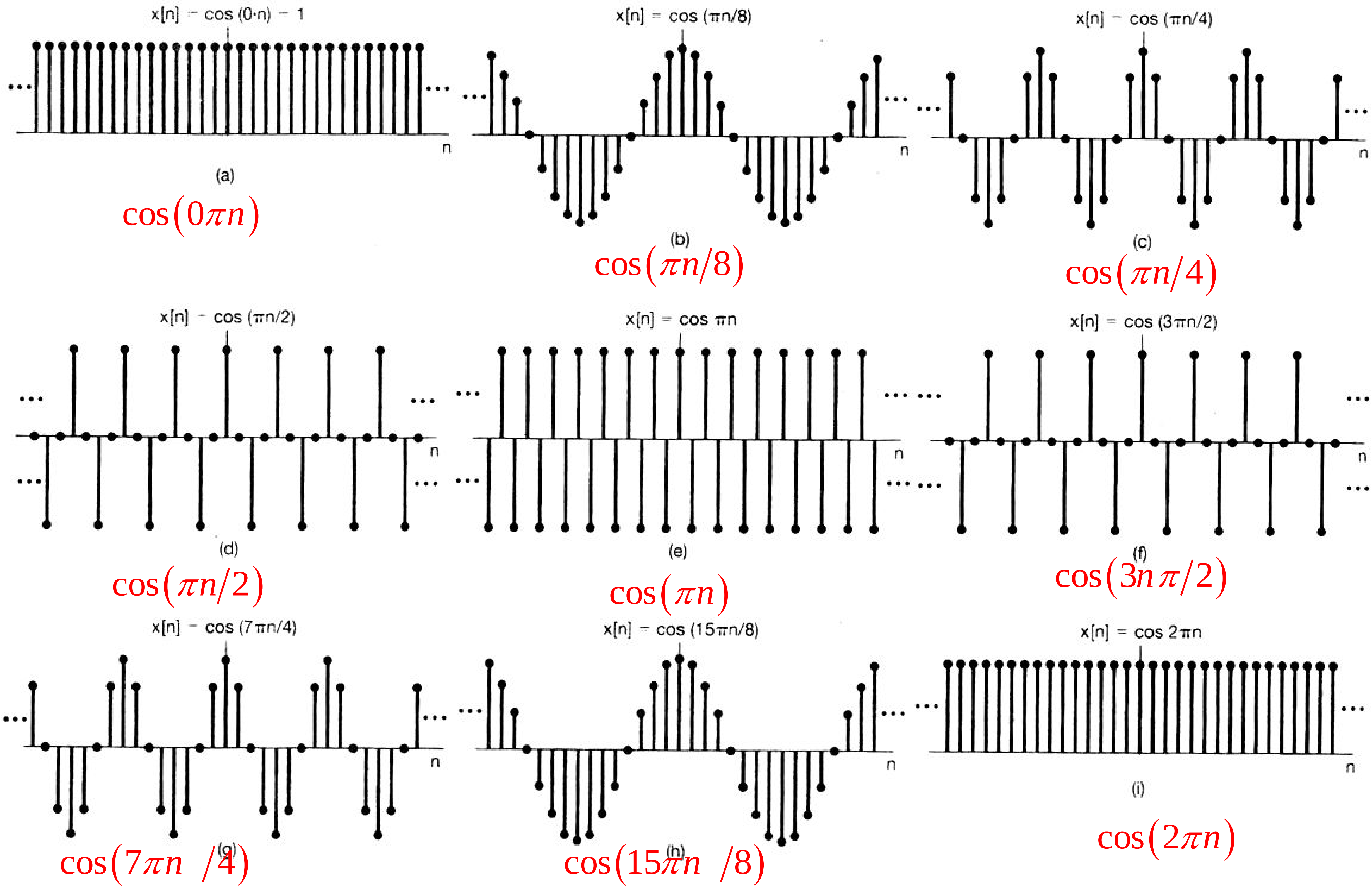


图 1.27 对应于几个不同频率时的离散时间正弦序列

基本信号类型

离散时间指数信号 $x[n]=Ce^{\beta n}$

(2) 虚指数信号　β为纯虚数

$\beta = jw_0$ → $\begin{cases} x[n]=e^{jw_0 n} \\ |a|=1 \end{cases}$

周期性 假设其周期为N，$e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 n}e^{j\omega_0 N}=e^{j\omega_0 n} \longrightarrow e^{j\omega_0 N}=1$

$\omega_0 N = 2k\pi$

$f_0=\dfrac{\omega_0}{k}$　　$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$必须为有理数 $\longleftarrow \dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{N}{k}$ 或 $N=\dfrac{2k\pi}{\omega_0} \longleftarrow \omega_0 N=2k\pi$

结论　(1)当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为有理数，$e^{j\omega_0 n}$ 为周期信号，否则为非周期信号。

(2)基波周期：$N_0=m\left(\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$，$m, N_0$ 无公共因子，$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 的最小整数倍。

思考：下面这些信号是否为周期信号？若是，周期是多少？

$x[n]=e^{j\frac{\pi}{4}n}$　$N_0=8$

$x[n]=e^{j\frac{31\pi}{8}n+0.9\pi}$　$N_0=16$

$x[n]=e^{j\frac{\pi}{4}n}+e^{j\frac{31\pi}{8}n+0.9\pi}$　$N_0=16$

$x[n]=\cos 6n$　×

基本信号类型

➡ **离散时间指数信号** $x[n]=Ce^{\beta n}$

(2) 虚指数信号 **β为纯虚数** $x[n]=e^{jw_0 n}$ $|a|=1$

离散谐波族

$\left\{e^{j\omega_0 kn}\right\}_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ 均是以 $N_0=m\left(\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 为周期的周期信号,它们被称为一族离散谐波复指数信号，其中 $e^{j\omega_0 kn}$ 是第K次谐波。

该谐波族的信号是否相同/不同？

$$e^{j\omega_0 kn}=\begin{cases} e^{j\omega_0 kn} & 0<k\le N_0 \\ e^{j\omega_0(m+N_0)n}\ (m=1,2,\ldots) & k>N_0 \end{cases}=\begin{cases} e^{j\omega_0 kn} & k=0,1,\ldots N_0 \\ e^{j\omega_0 mn}\underbrace{e^{j\omega_0 N_0 n}}_{=1}\ (m=1,2,\ldots) & k>N_0 \end{cases}$$

因为离散时间信号在频率上相差2kπ倍的信号都是相同的，因此该谐波族的信号只有N个是不相同的。而连续时间谐波族的信号都是不同的。

基本信号类型

离散时间指数信号 $x[n]=Ce^{\beta n}$

(2) 虚指数信号　　β为纯虚数

$e^{j\omega_0 n}$与$e^{j\omega_0 t}$的比较见书第22页！

$$x[n]=e^{jw_0 n}$$

$$|a|=1$$

表 1.1　信号 $e^{j\omega_0 t}$和 $e^{j\omega_0 n}$的比较

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0 不同，信号不同	频率相差 2π 的整倍数，信号相同
对任何 ω_0 值都是周期的	仅当 $\omega_0=2\pi m/N$ 时才是周期的，这里 $N(>0)$和 m 均为整数
基波频率为 ω_0	基波频率* ω_0/m
基波周期：$\omega_0=0$，无定义 $\omega_0\neq0$，$2\pi/\omega_0$	基波周期：* $\omega_0=0$，无定义 $\omega_0\neq0$，$m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$

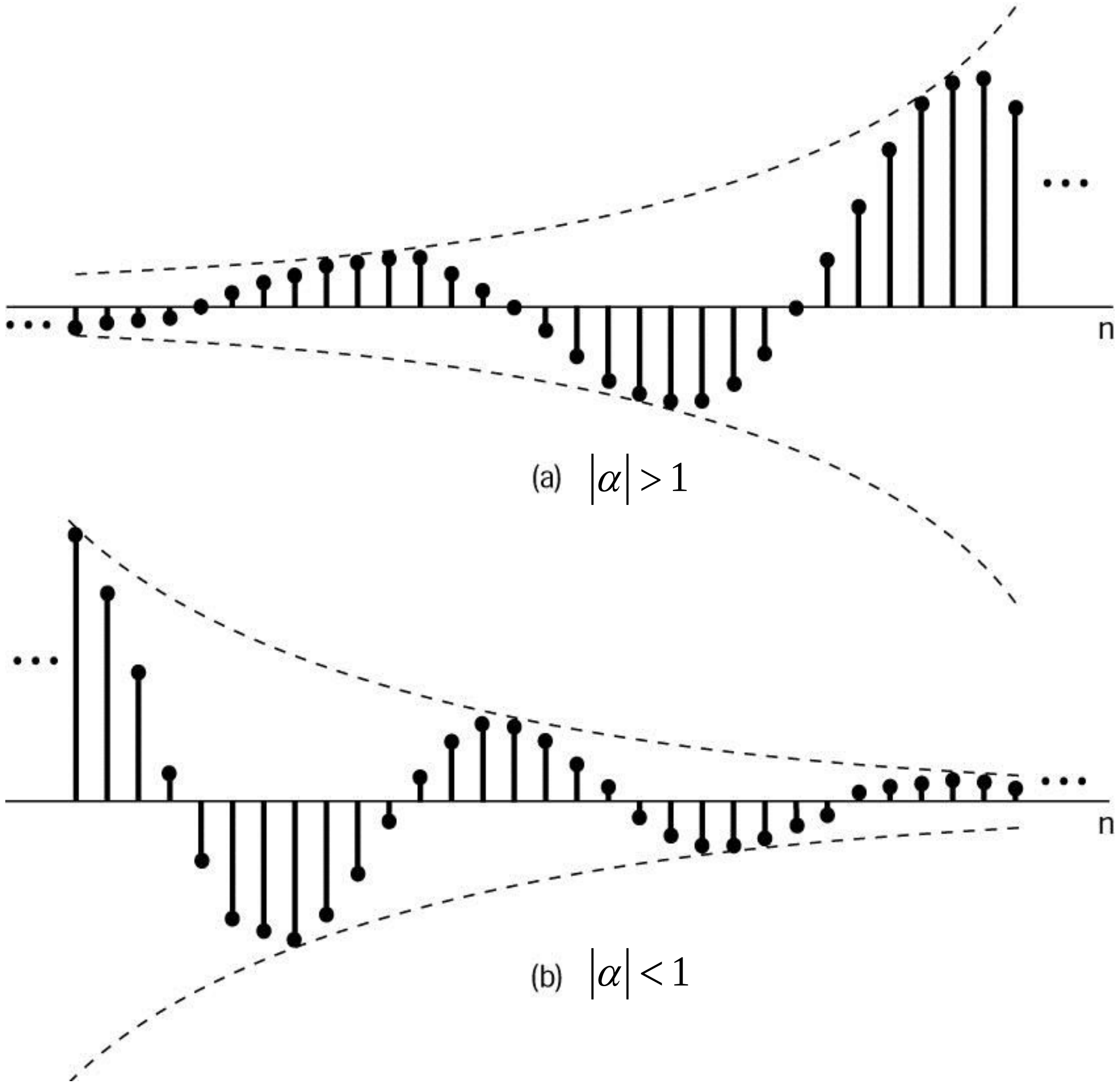
* 这里假设 m 和N 无任何公共因子。

基本信号类型

（3）**一般周期复指数信号**：C/a均为一般复数 $x[n]=C\alpha^{n}$

假设 $C=|C|e^{j\theta}$，$a=|a|e^{j\omega_0} \longrightarrow x[n]=|C||\alpha|^{n}\cos(w_0 n+\theta)+j|C||\alpha|^{n}\sin(w_0 n+\theta)$

- 若 $|a|=1$，则复指数信号的实部和虚部都是正弦型的。
- 若 $|a|>1$，则复指数信号的实部和虚部的振幅为指数增长的正弦信号。
- 若 $|a|<1$，则复指数信号的实部和虚部的振幅为指数衰减的正弦信号。



(a) $|\alpha|>1$

(b) $|\alpha|<1$

基本信号类型

离散正弦信号

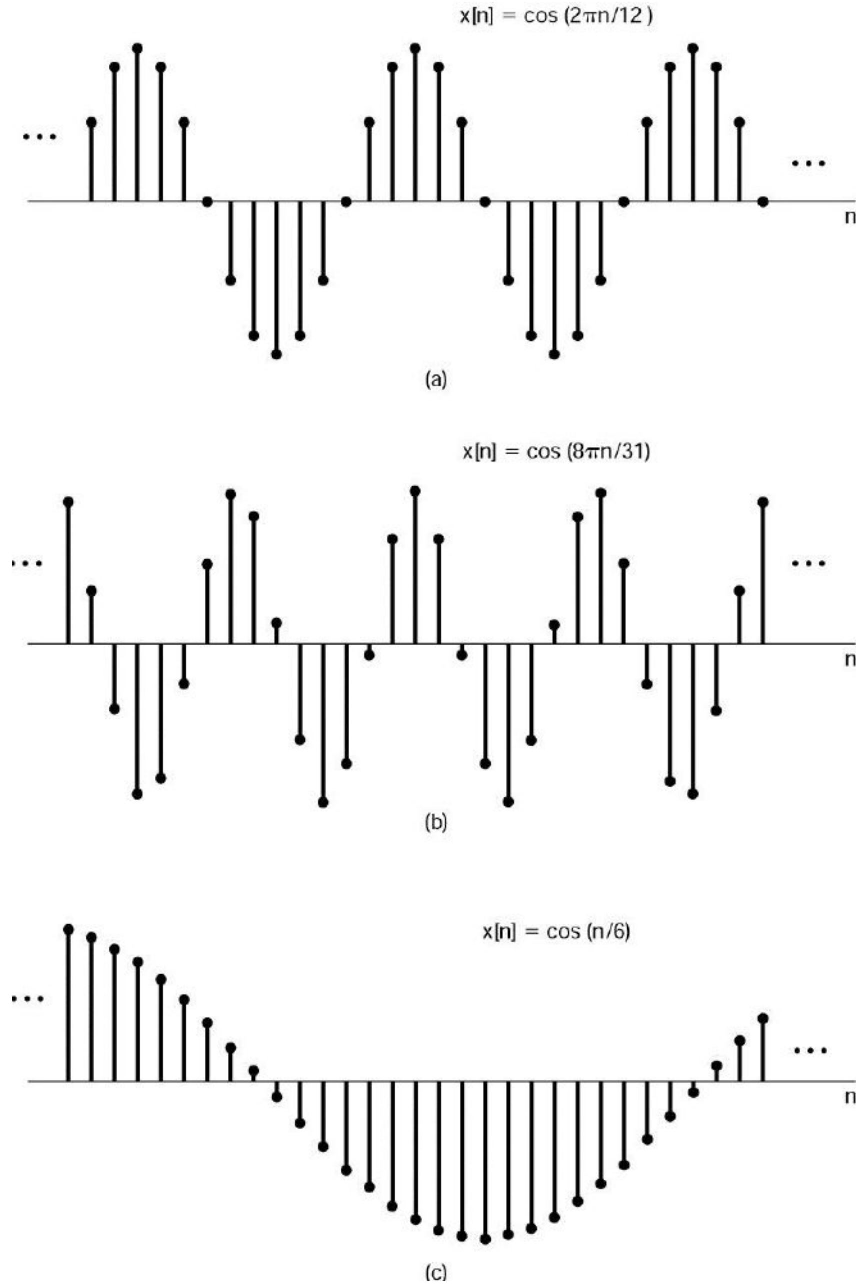
$$\cos(\omega_0 n+\phi)=\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 n+\phi)}\}$$

$$\sin(\omega_0 n+\phi)=\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 n+\phi)}\}$$

$$\cos\omega_0 n=\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

$$\sin\omega_0 n=\frac{e^{j\omega_0 n}-e^{-j\omega_0 n}}{2j}$$

周期性及信号特点与$e^{j\omega_0 n}$ 的分析相同。

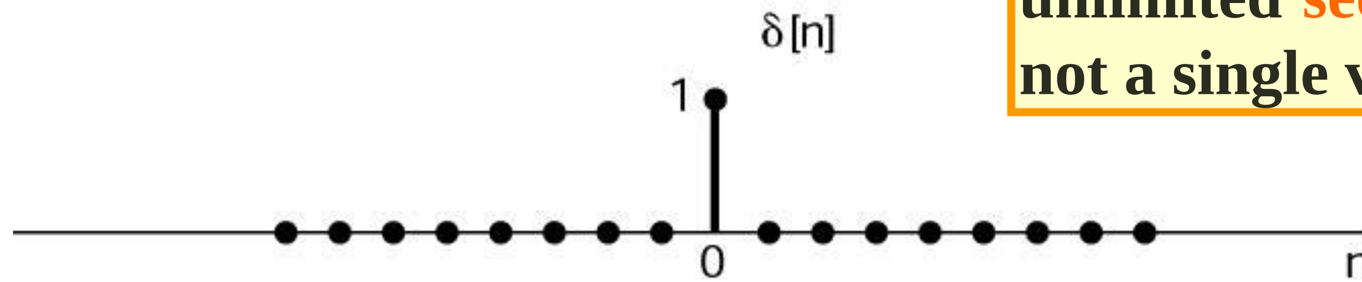


基本信号类型

离散单位脉冲信号 Unit Impulse

注意：二者都是无限长序列。 an unlimited sequence, not a single value.

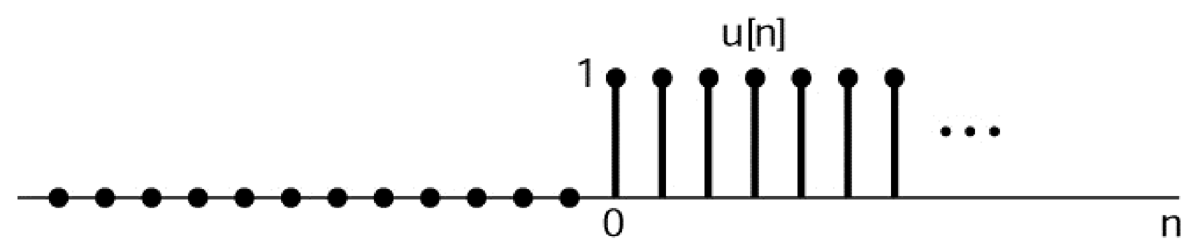
$$\delta[n]=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$



采样特性 $x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$ $\quad x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$

离散单位阶跃信号 Unit Step

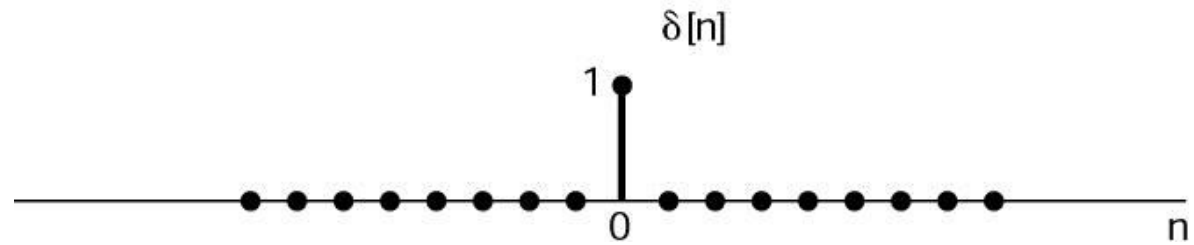
$$u[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\geq 0\end{cases}$$



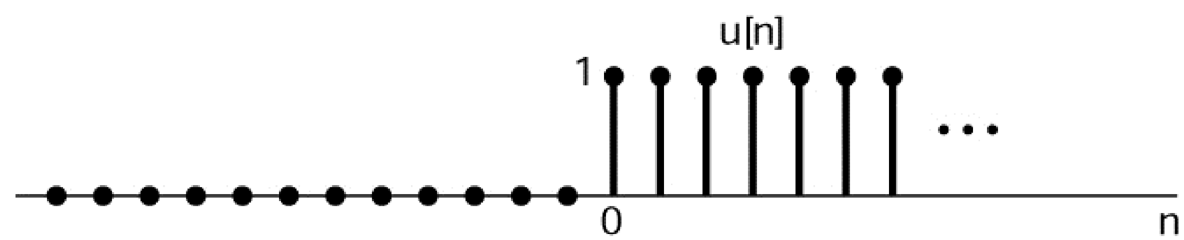
基本信号类型

离散单位冲激信号与离散单位阶跃信号之间的关系

$$\delta[n]=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$



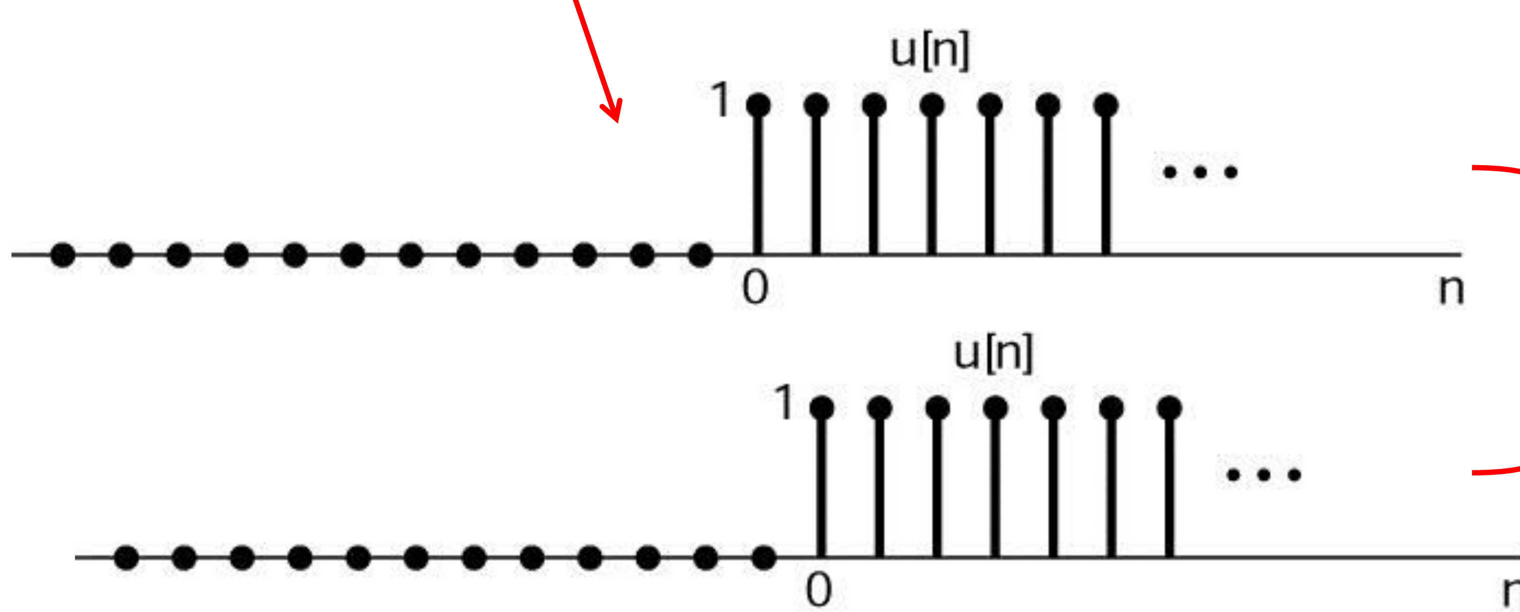
$$u[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\geq 0\end{cases}$$



二者关系

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k] \qquad u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

序列值求和



序列相减

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

基本信号类型

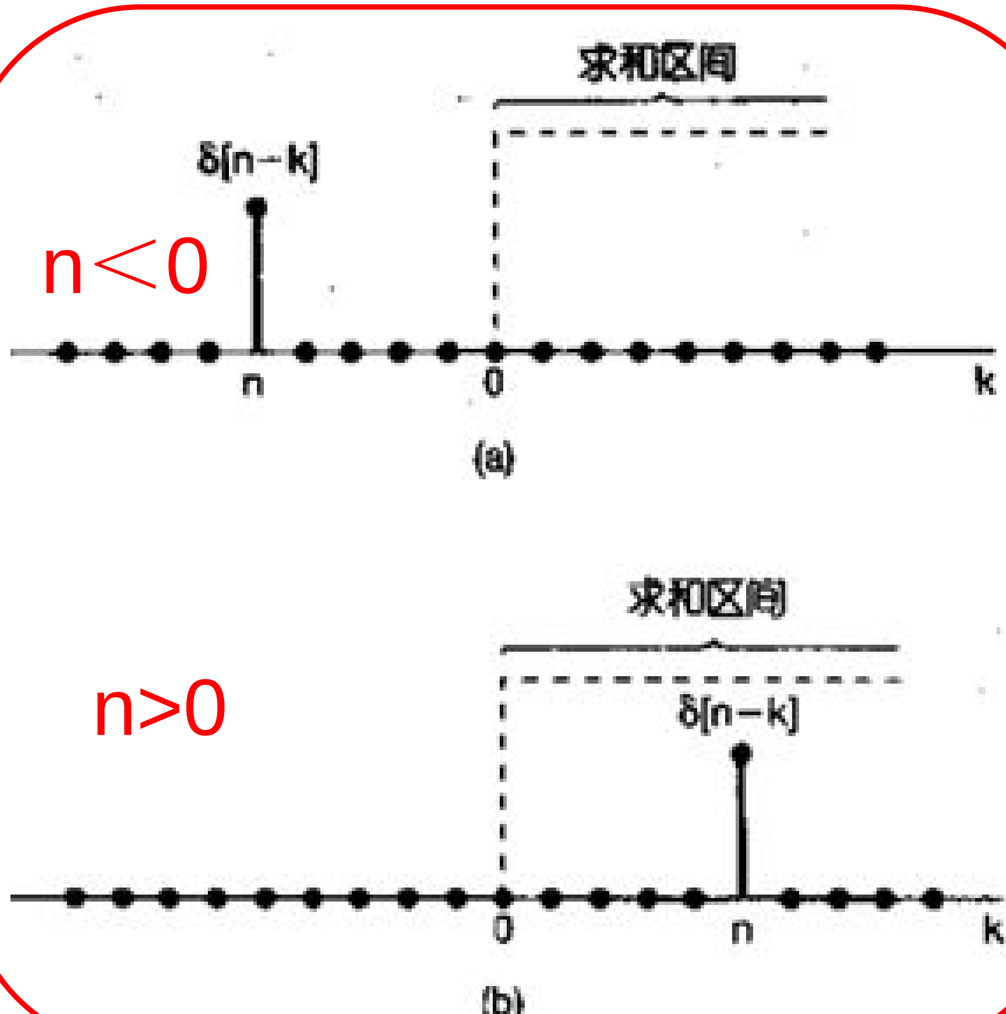
离散单位冲激信号与离散单位阶越信号之间的关系

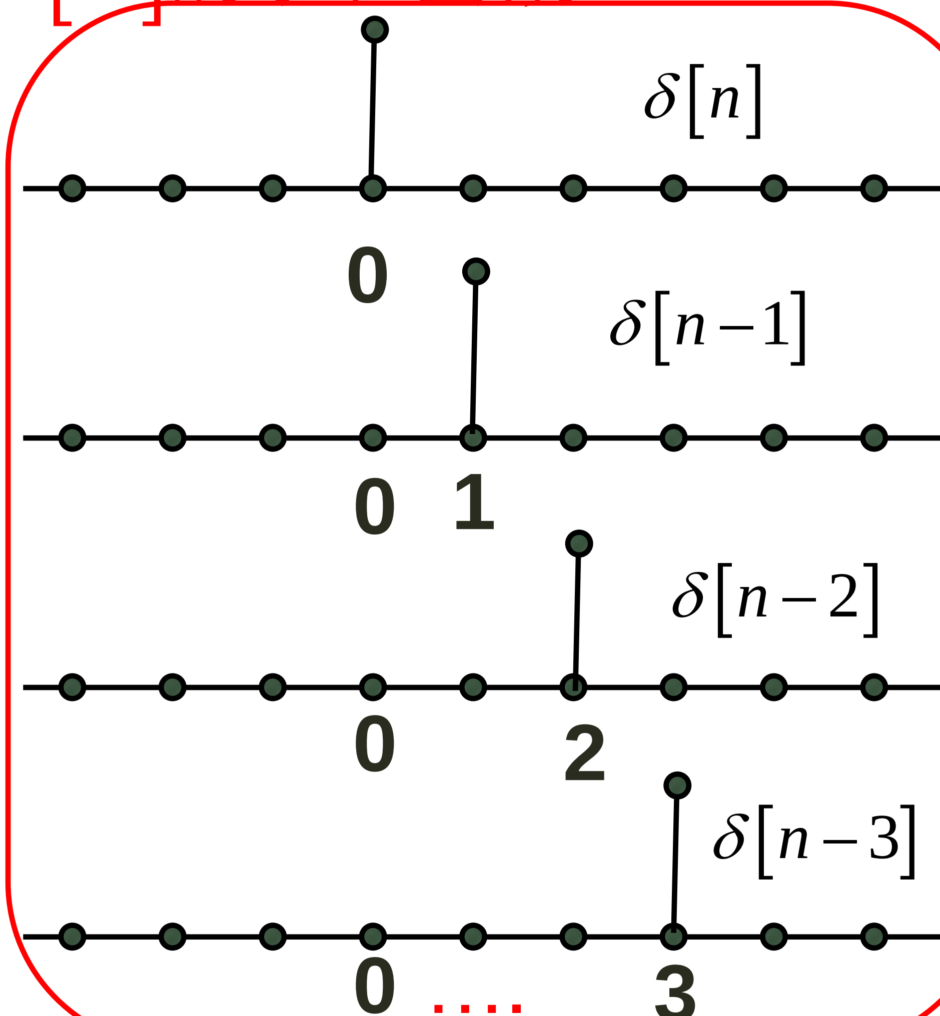
$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m] \qquad u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

序列值求和

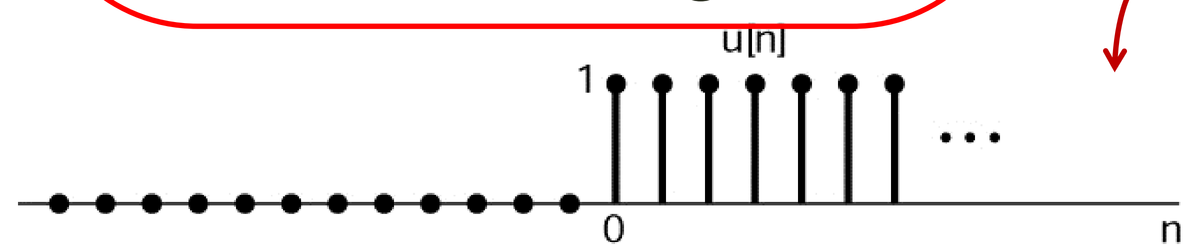
$u[n]$是$\delta[m]$的求和函数

序列求和





序列相加

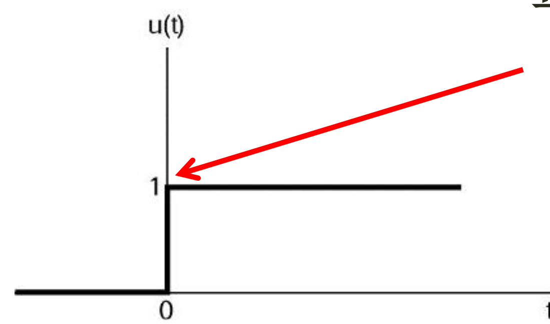


基本信号类型

连续单位阶跃信号 CT Unit Step

单位阶跃信号在点**t=0**处不连续。

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & n>0\end{cases}$$



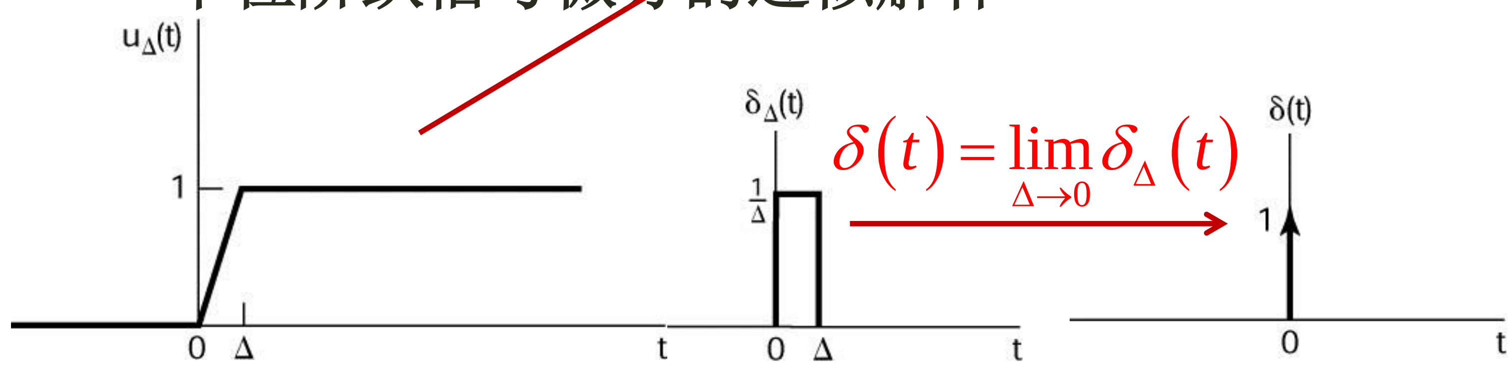
$$u_{\Delta}(t)=\begin{cases}1 & t>\Delta\\ \dfrac{1}{\Delta}t & 0<t<\Delta\\ 1 & t<0\end{cases}$$

连续单位冲激信号 CT Unit Impulse

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$\delta_{\Delta}=\begin{cases}0 & t>\Delta\\ \dfrac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta\\ 0 & t<0\end{cases}$$

单位阶跃信号微分的近似解释



$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_{\Delta}(t)$$

不连续点的微分产生一个单位冲激

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\delta(0)=1$$

DT单位冲激信号的采样特性

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

二者的关系小结

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma$$

$$\int_{-\infty}^{t}k\delta(\tau)d\tau=ku(t)$$

基本信号类型

连续单位阶跃信号

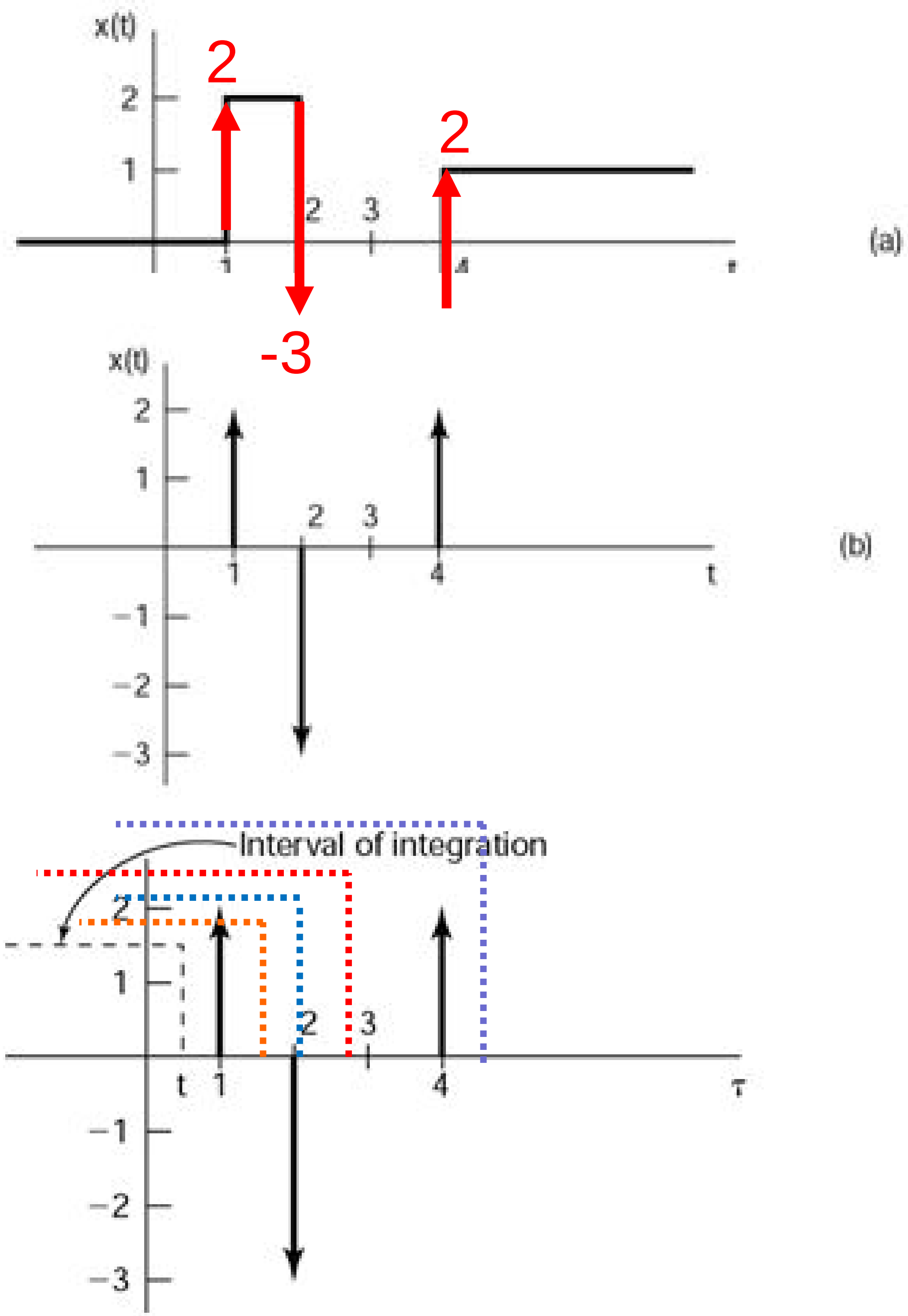
$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

连续单位冲激信号

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

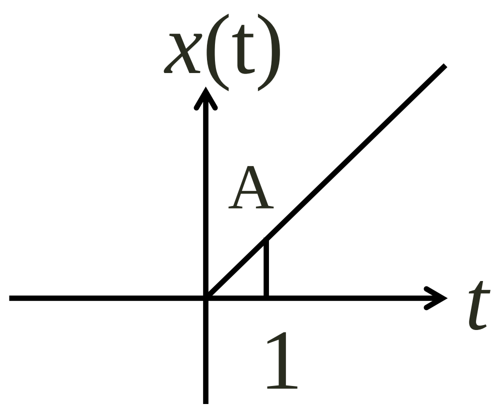
$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma$$

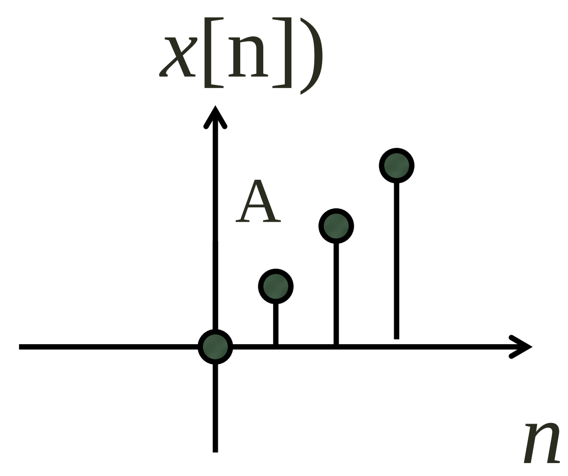
例子



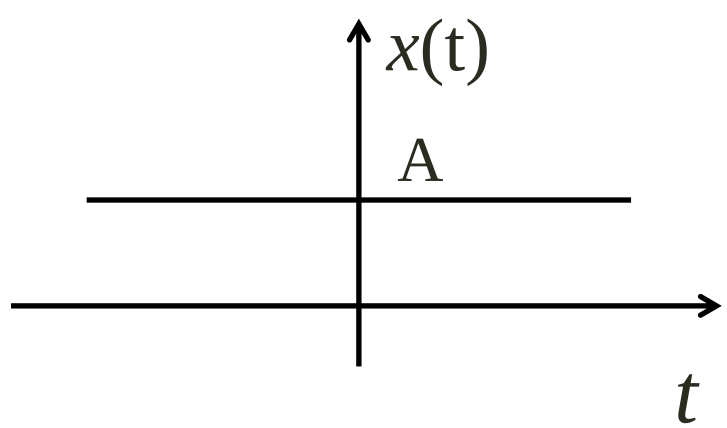
几种基本的信号

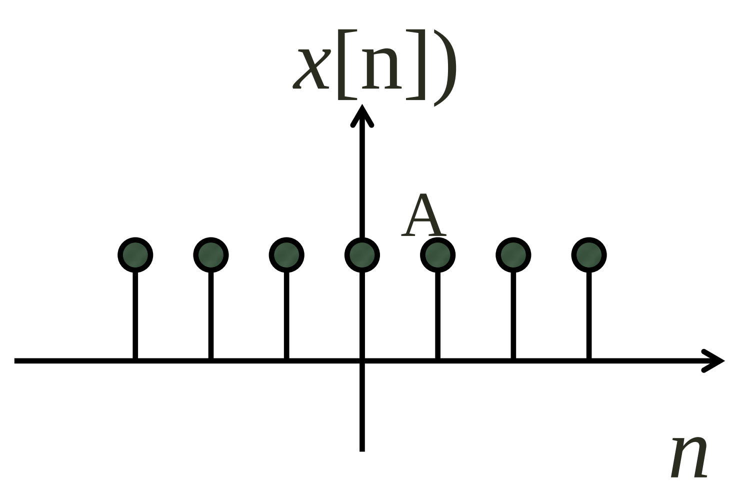
斜坡信号 $x(t) = At$ $\qquad x[n] = An$





直流信号 $x(t) = A$ $\qquad x[n] = A$





作业

1.1 第8小题 （选做）

1.2 第4小题 （选做）

1.3 (a)(d)(e) (f)

1.4(b)(e)

1.5 (b) (e)

1.6(b)(c) （(c)画图观察）

1.7(a) （画图观察）

1.8(a)(d) （选做）

1.9(b)(e)

1.10

1.11