

课程简介

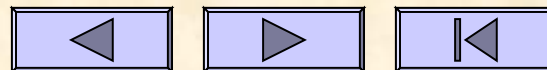
课程名称 复变函数与积分变换 B

教材 复变函数与积分变换

陈艳萍 主编

总学时 48 学时

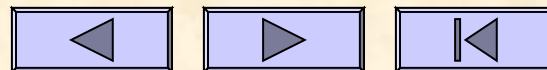
教师姓名 丁军



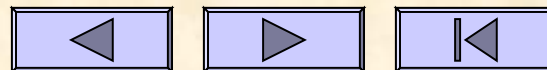
对 象 复变函数（自变量为复数的函数）

主要任务 研究复变数之间的相互依赖关系，
具体地就是复数域上的微积分。

主要内容 复数与复变函数、解析函数、
复变函数的积分、级数、留数、
积分变换。

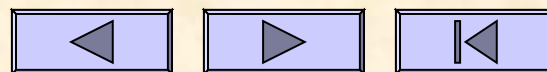


学习方法 复变函数中许多概念、理论、和方法是实变函数在复数域内的推广和发展，它们之间有许多相似之处。但又有不同之处，在学习
中要善于比较、区别、特别要注意复数域上特有的那些性质与结果。



背景

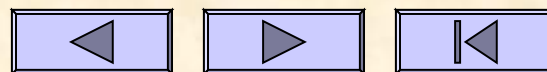
复数是十六世纪人们在解代数方程时引进的。为使负数开方有意义，需要再一次扩大数系，使实数域扩大到复数域。但在十八世纪以前，由于对复数的概念及性质了解得不清楚，用它们进行计算又得到一些矛盾，所以，在历史上长时期人们把复数看作不能接受的“虚数”。直到十八世纪，J.D'Alembert(1717-1783)与L.Euler(1707-1783)等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，澄清了复数的概念，并且应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题。复数才被人们广泛承认接受，复变函数论才能顺利建立和发展。



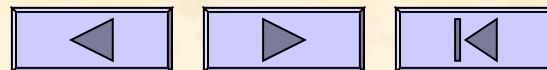
复变函数的理论基础是十九世纪奠定的。

A.L.Cauchy (1789-1866) 和 K.Weierstrass(1815-1897) 分别应用积分和级数研究复变函数， G.F.B.Riemann (1826-1866) 研究复变函数的映照性质。他们是这一时期的三位代表人物。经过他们的巨大努力，复变函数形成了非常系统的理论，且渗透到了数学的许多分支，同时，它在热力学，流体力学和电学等方面也得到了很多的应用。

二十世纪以来，复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论和天体力学等方面，与数学中其它分支的联系也日益密切。



第一讲 复数



CH1 §1 复数及其代数运算

 1. 复数的概念

 2. 代数运算

 3. 共轭复数

1. 复数的概念

定义 对任意两实数 x 、 y , 称 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 为复数。 $i^2 = -1$, i 称为虚单位。

• 复数 z 的实部 $\operatorname{Re}(z) = x$; 虚部 $\operatorname{Im}(z) = y$.
(real part) (imaginary part)

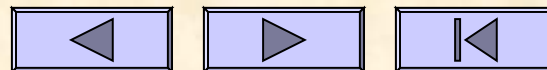
• 复数的模 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

• 判断复数相等

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$, 其中 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$

$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$

□ 一般, 任意两个复数不能比较大小。



2. 代数运算

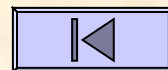
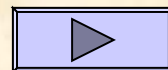
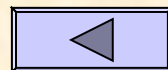
• 四则运算

定义 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的和、差、积和商为：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|z_2|^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{|z_2|^2} \quad (z_2 \neq 0)$$



•运算规律

复数的运算满足交换律、结合律、分配律。

(与实数相同) 即 ,

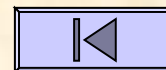
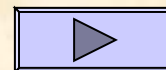
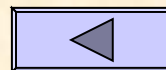
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad ;$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad ;$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad ;$$

$$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \quad ;$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 .$$



3. 共轭复数

定义 若 $z=x+iy$, 称 $\bar{z}=x-iy$ 为 z 的共轭复数.

(conjugate)

• 共轭复数的性质

$$(1) \quad \overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad (2) \quad \overline{\bar{z}} = z$$

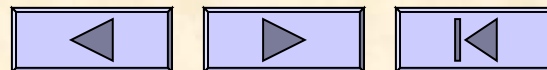
$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$(4) \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$(3) \quad z \bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

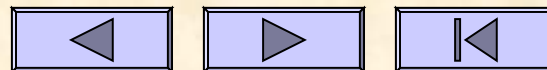


例1：设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$,

求 $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ 及它们的实部，虚部。

解：
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{7 + i}{-5}$$

例2：求 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$ $\frac{1+i}{1-i} = i$

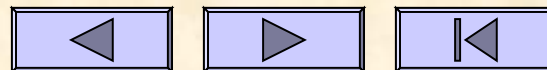


例3.证明若 z 是实系数方程





$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

的根,则 \bar{z} 也是其根. (实多项式的零点成对出现)

例4.证明 : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 \right)$



§2 复数的表示方法

-  1. 点的表示
-  2. 向量表示法
-  3. 三角表示法
-  4. 指数表示法

1. 点的表示

易见, $z = x + iy \leftrightarrow$ 一对有序实数 (x, y) ,

在平面上取定直角坐标系, 则

任意点 $P(x, y) \leftrightarrow$ 一对有序实数 (x, y)

$\Rightarrow z = x + iy \leftrightarrow$ 平面上的点 $P(x, y)$

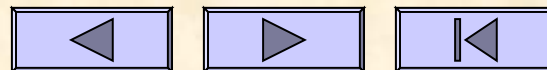
\therefore 复数 $z = x + iy$ 可用平面上坐标为 (x, y) 的点 P 表示.

此时, x 轴 — 实轴 y 轴 — 虚轴

平面 — 复平面 或 z 平面

点的表示 : $z = x + iy \leftrightarrow$ 复平面上的点 $P(x, y)$

□ 数 z 与点 z 同义.



2. 向量表示

∴ **法** $P(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \{x, y\}$

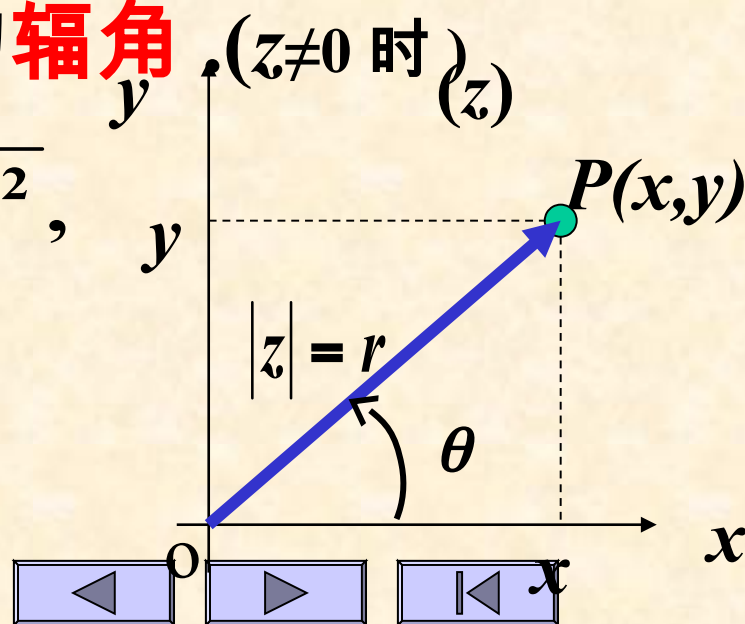
∴ 可用向量 \overrightarrow{OP} 表示 $z = x + iy$.

称向量的长度为复数 $z = x + iy$ 的**模**或**绝对值**；
以正实轴为始边，向量 \overrightarrow{OP} 为终边的角的
弧度数称为复数 $z = x + iy$ 的**辐角**。(z ≠ 0 时)

模： $|z| = |\overrightarrow{OP}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

记作
辐角： $\theta = \operatorname{Arg} z$

□ $z = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = 0$



$$z \neq 0 \text{ 时 } \tan(\operatorname{Arg} z) = y / x$$

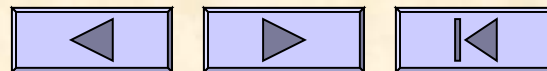
辐角无穷多： $\operatorname{Arg} z = \theta = \theta_0 + 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

把其中满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为辐角 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，
记作 $\theta_0 = \arg z$ 。

\square $z=0$ 时，辐角不确定。

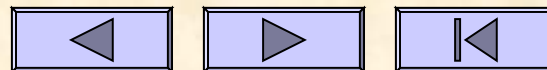
计算
 $\arg z (z \neq 0)$
的公式

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0, y \in \mathbb{R} \\ \pm \frac{\pi}{2} & x = 0, y \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \\ \arctan \frac{y}{x} \pm \pi & x < 0, y \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \\ \pi & x < 0, y = 0 \end{cases}$$



- 当 z 落于一，四象限时，不变。
- 当 z 落于第二象限时，加 π
- 当 z 落于第三象限时，减 π

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$$



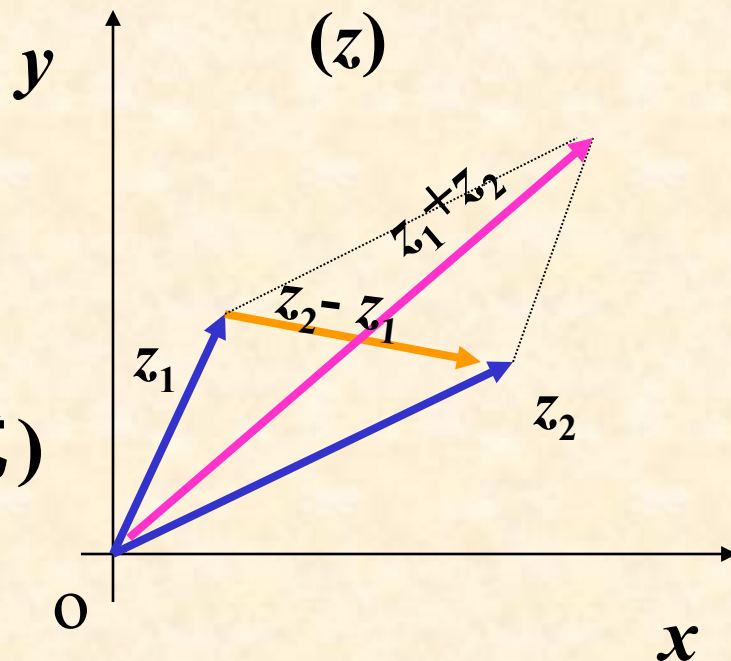
由向量表示法知

$|z_2 - z_1|$ 一点 z_1 与 z_2 之间的距离

由此得：

$$|z_2 + z_1| \leq |z_2| + |z_1| \quad (\text{三角不等式})$$

$$|z_2 - z_1| \quad ||z_2| - |z_1||$$



3. 三角表示

法由 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ 得

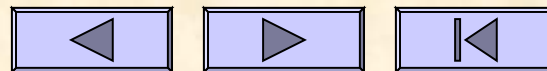
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

4. 指数表示

法由 *Euler* 公式：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ 得}$$

$$z = re^{i\theta}$$



引进复数的几何表示，可将平面图形用复数方程（或不等式）表示；反之，也可由给定的复数方程（或不等式）来确定它所表示的平面图形。

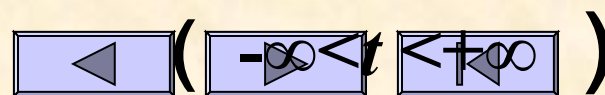
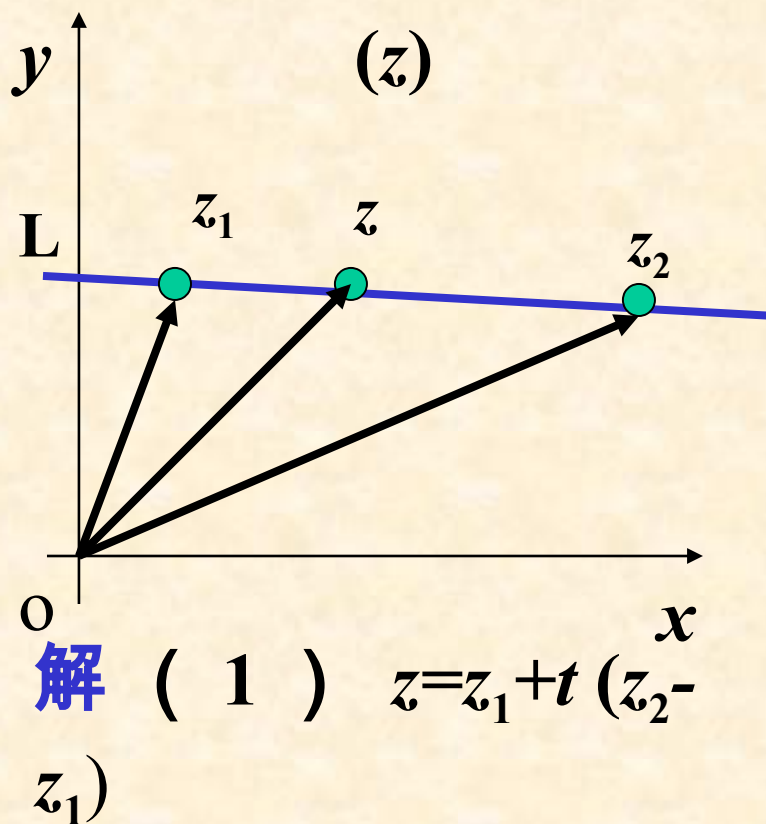
例 1 用复数方程表示：

(1) 过两点

$$z_j = x_j + iy_j$$

($j=1,2$) 的直线；

(2) 中心在点 (0, -1)



$$(2) \quad |z - (-i)| = 2$$

例 2 方程 $\operatorname{Re}(i\bar{z}) = 3$ 表示什么图形？

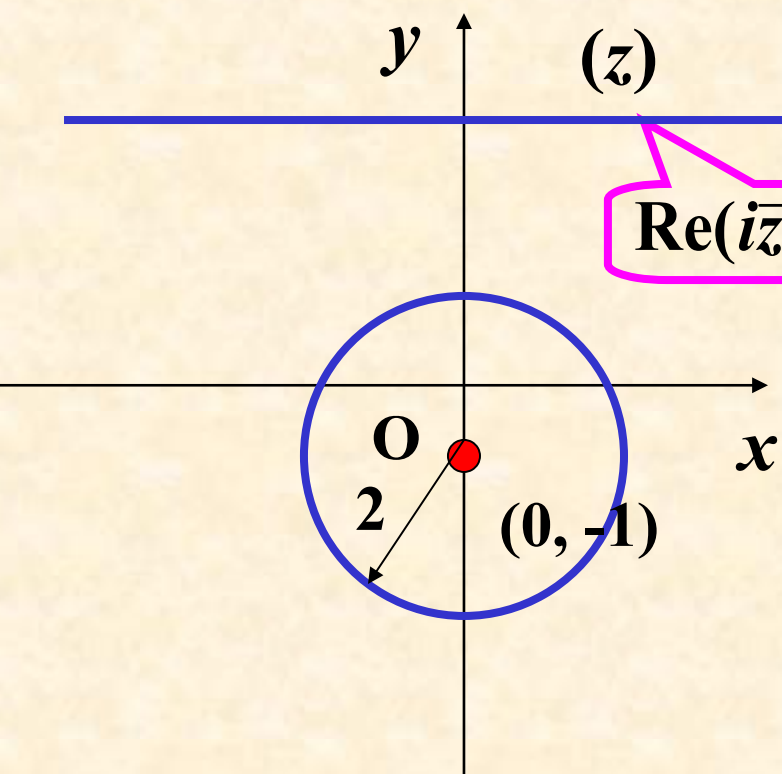
解 设 $z = x + iy$

$$\begin{aligned}\therefore i\bar{z} &= i(x - iy) \\ &= y + ix\end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{Re}(i\bar{z}) = y$$

$$\Rightarrow y = 3$$

故 $\operatorname{Re}(i\bar{z}) = 3$ 图形为平行于实轴的直线

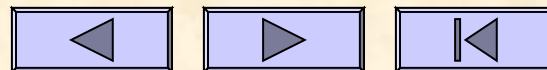


注意. 复数的各种表示法可以相互转化, 以适应不同问题的需要.

例3. 求 (1) $1+i$ (2) i (3) -3 (4) $-1-\frac{\sqrt{3}i}{2}$
的模, 辐角及辐角主值.

例4. 求 (1) e^{2i} (2) $3e^{-i}$ (3) $e^{-\pi/2}$ 的模, 辐角.

例5. 将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化为三角形式与指数形式.



§3 复数的乘幂与方根



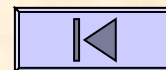
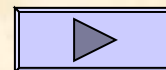
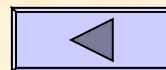
1. 复数的乘积与商



2. 复数的乘幂



3. 复数的方根



1. 乘积与商

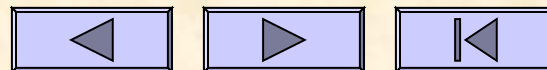
定理 1 两个复数乘积的模等于它们的模相乘，
两个复数乘积的辐角等于它们的辐角相加。

证明 设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$

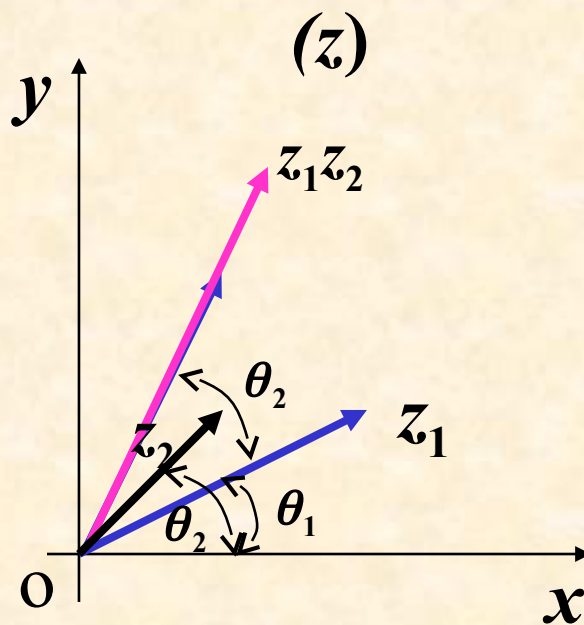
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

因此 $|z_1 z_2| = r_1 r_2$, $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2$



几何意义 将复数 z_1 按逆时针方向旋转一个角度 $\text{Arg}z_2$, 再将其伸缩到 $|z_2|$ 倍。



□ 定理 1 可推广到 n 个复数的乘积。

例1. 设 $z_1 = -1, z_2 = i$, 则 $z_1 z_2 = -i$

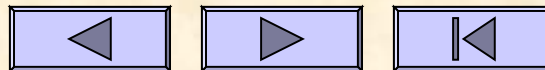
$$\operatorname{Arg} z_1 = \pi + 2m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{代入上式} \quad \frac{3\pi}{2} + 2(m+n)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

要使上式成立, 必须且只需 $k = m + n + 1$.



定理 2 两个复数的商的模等于它们的模的商，
两个复数的商的辐角等于被除数与除
数的辐角之差。

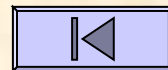
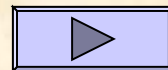
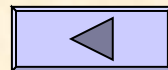
证明 设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

由复数除法的定义 $z = z_2 / z_1$ ，即 $z_1 z = z_2$

$\therefore |z| |z_1| = |z_2|$ 及 $\text{Arg} z_1 + \text{Arg} z = \text{Arg} z_2$ ($z_1 \neq 0$)

$\therefore \text{Arg} z = \text{Arg} z_2 - \text{Arg} z_1$ 即：

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$$



2. 复数的乘幂

定义 n 个相同的复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂，记作 z^n ，即 $z^n = z \cdot z \cdots z$ （共 n 个）。

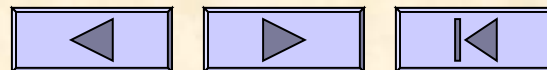
设 $z = re^{i\theta}$ ，由复数的乘法定理和数学归纳法可证明 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$ 。

特别：当 $|z|=1$ 时，即： $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ，则有

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

— 棣莫佛 (De Moivre) 公式。

定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ 。 由定义得 $z^{-n} = r^{-n} e^{-in\theta}$



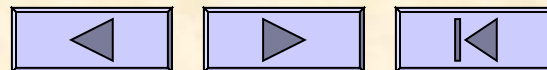
3. 复数的方根(开方)——乘方的逆运算

问题 给定复数 $z=re^{i\theta}$, 求所有的满足 $\omega^n=z$ 的复数 ω 。

当 $z \neq 0$ 时, 有 n 个不同的 ω 值与 $\sqrt[n]{z}$ 相对应, 每一个这样的 ω 值都称为 z 的 n 次方根, 记 $\omega = \sqrt[n]{z}$

设 $\omega = \rho e^{i\varphi}$, 由 $\omega^n = z$, 有 $\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$
 $\Rightarrow \rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \omega &= \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)\end{aligned}$$

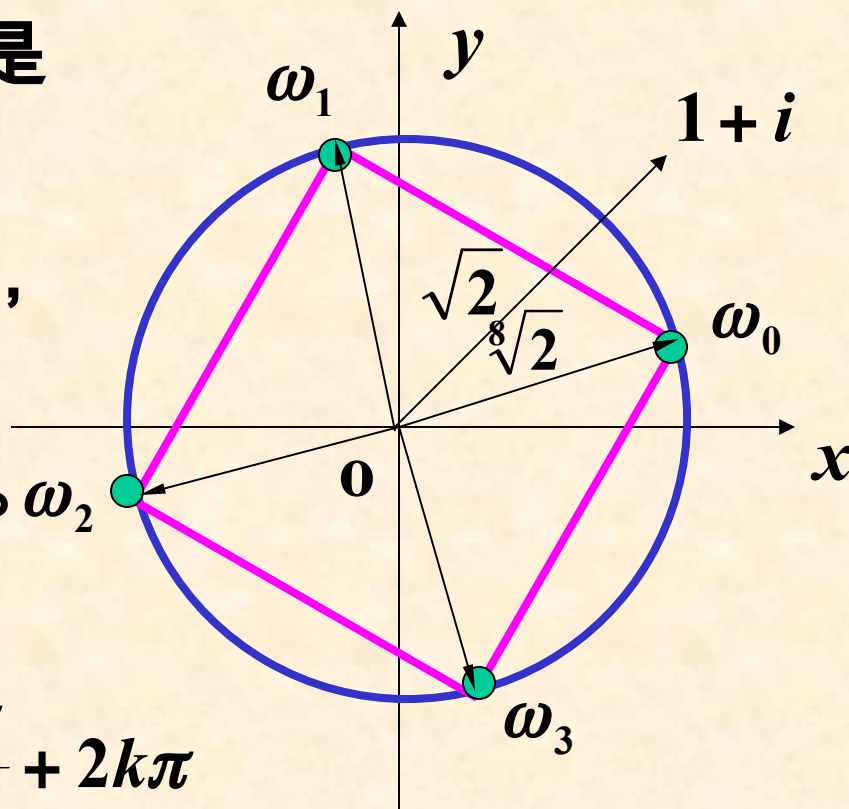


□ 当 $k=0, 1, \dots, n-1$ 时, 可得 n 个不同的根, 而 k 取其它整数时, 这些根又会重复出现。

几何上, $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上 n 个等分点, 即它们是内接于该圆周的正 n 边形的 n 个顶点。

如 $\omega_k = \sqrt[4]{1+i}$

$$= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3) \text{ (见图)}$$

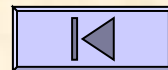
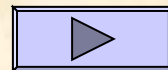
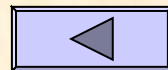


例2: 求 $\sqrt[3]{1}$

解: $\because 1 = (\cos 0 + i \sin 0)$


$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3}, (k = 0, 1, 2).$$

$$\text{即 } \omega_0 = 1, \omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



§4 区域

 1. 区域的概念

 2. 简单曲线 (或 Jordan 曲线)

 3. 单连通域与多连通域

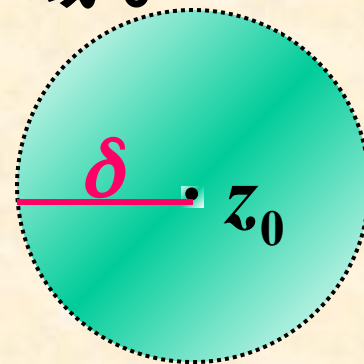
1. 区域的概念

•邻域

复平面上以 z_0 为中心，任意 $\delta > 0$ 为半径的圆 $|z - z_0| < \delta$ (或 $0 < |z - z_0| < \delta$) 内部的点的集合称为点 z_0 的 δ (去心) ~~邻域~~。

记为 $U(z_0, \delta) = \{z \mid |z - z_0| < \delta\}$ 即，

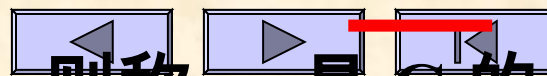
$$(U^\circ(z_0, \delta) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \delta\})$$



设 G 是一平面上点集

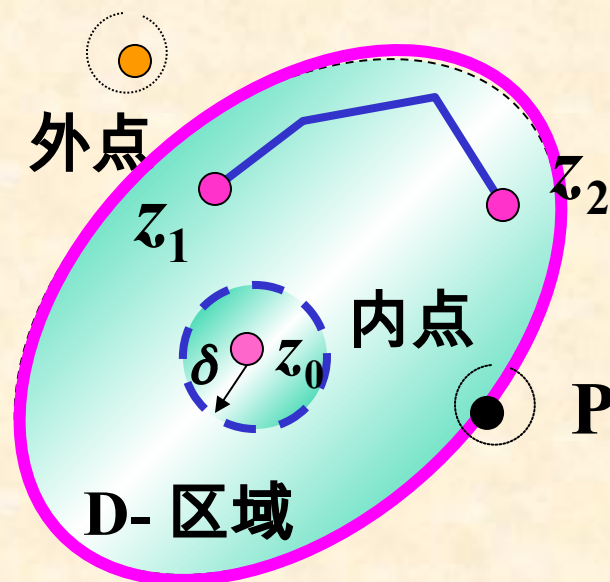
内点 对任意 z_0 属于 G ，若存在 $U(z_0, \delta)$ ，使该邻

域内的所有点都属于 G ，则称 z_0 是 G 的内



开集 若 G 内的每一点都是内点，则称 G 是开集。

• **区域** 设 D 是一个开集，且 D 是连通的，称 D 是一个区域。



连通是指 D 中任意两点均可用完全属于 D 的折线连接。

边界与边界点 已知点 P 不属于 D ，若点 P 的任何邻域中都包含 D 中的点及不属于 D 的点，则称 P 是 D 的边界点； D 的所有边界点组成 D 的边界。

• **闭区域** 区域 D 与它的边界一起构成闭区域, 记为 \overline{D} .

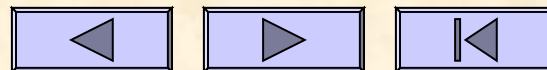
有界区域与无界区域

若存在 $R > 0$, 对任意 $z \in D$, 均有

$z \in G = \{z \mid |z| < R\}$, 则 D 是有界区域; 否则无界。

$$|z - z_0| < r$$

表示以 z_0 为圆点, 以 r 为半径的圆内所有的点.



$\operatorname{Re} z = \alpha, \operatorname{Im} z = \beta$ 表示分别平行于y轴和x轴的直线.

$\operatorname{Re} z > 0$ 表示右半复平面,

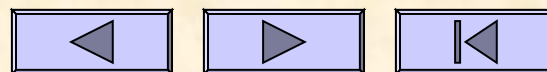
$\operatorname{Im} z < 0$ 表示下半复平面.

$r_1 < |z - z_0| < r_2$ 表示一个圆环,而且是有界的.

它的边界由两个圆周 $|z - z_0| = r_2, |z - z_0| = r_1$ 组成,

如果在其中去掉一个或几个点,它仍然是区域,

只是边界增加了一个或几个点.



2. 简单曲线 (或 Jordan 曲线)

平面上一条连续曲线可表示为：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b), \text{实变函数 } x(t), y(t) \in C[a, b]$$

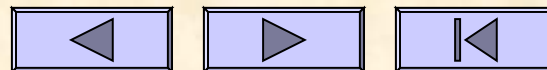
令 $z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \leq t \leq b$;

则曲线方程可记为： $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$

若 $x'(t), y'(t) \in C[a, b]$ 且 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$

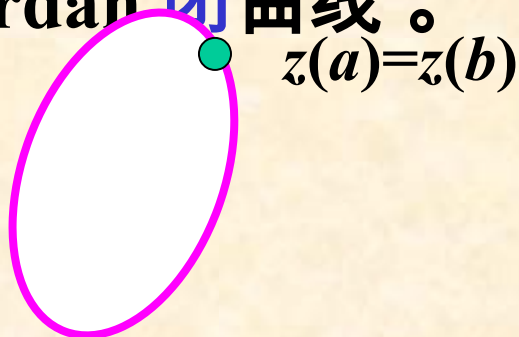
则称该曲线为光滑的。

有限条光滑曲线相连接构成一条分段光滑曲线。

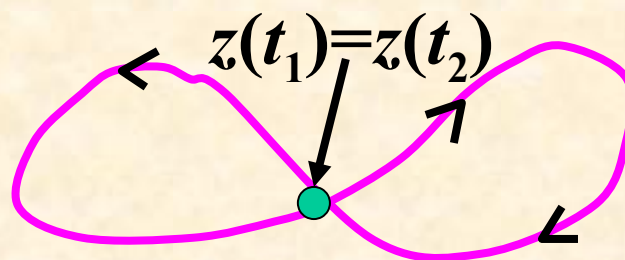


重点 设连续曲线 $C : z=z(t)$, $a \leq t \leq b$,
对于 $t_1 \in (a, b)$, $t_2 \in [a, b]$, 当 $t_1 \neq t_2$ 时, 若 $z(t_1)=z(t_2)$,
称 $z(t_1)$ 为曲线 C 的重点。

定义 称没有重点的连续曲线 C 为简单曲线或
Jordan 曲线 ; 若简单曲线 C 满足
 $z(a)=z(b)$ 时, 则称此曲线 C 是简单闭曲线或
Jordan 闭曲线 。



简单闭曲线



不是简单闭曲线

简单闭曲线的性质

任一条简单闭曲线 $C : z=z(t)$, $t \in [a, b]$, 把复平面唯一地分成三个互不相交的部分：一个是有界区域，称为 C 的内部；一个是无界区域，称为 C 的外部；还有一个是它们的公共边界。

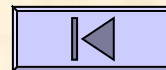
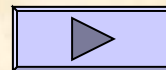
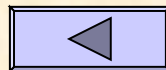
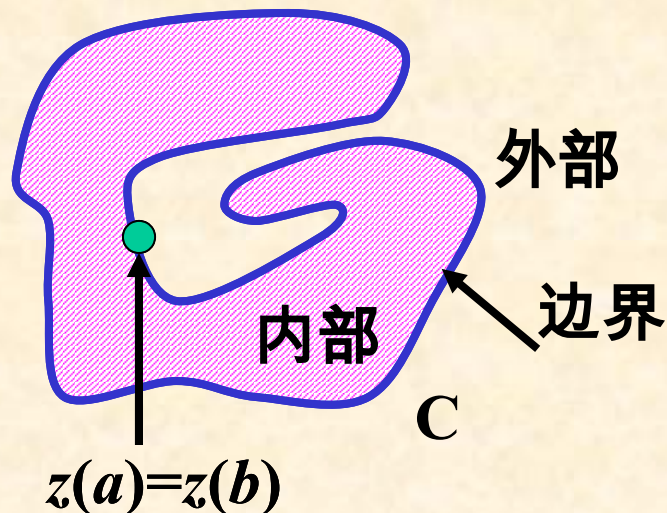
3. 单连通域与多连通域

定义 复平面上的一个区域 B

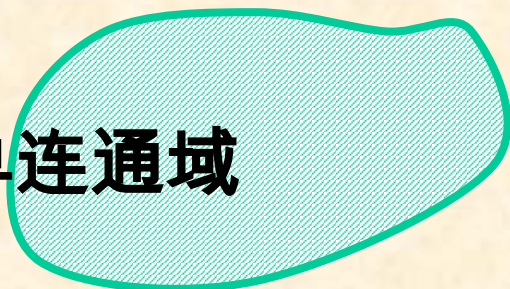
，
如果 B 内的任何简单闭曲线的内部总在 B 内，就称 B 为单连

通

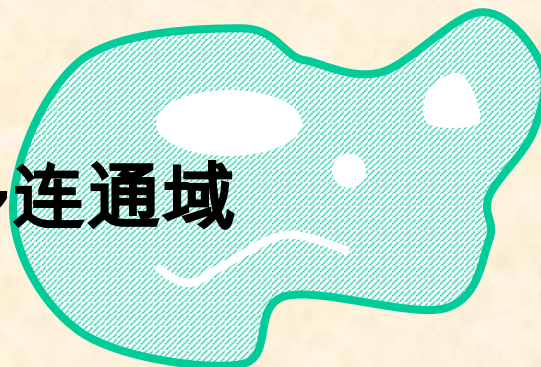
域。非单连通域称为多连通域。



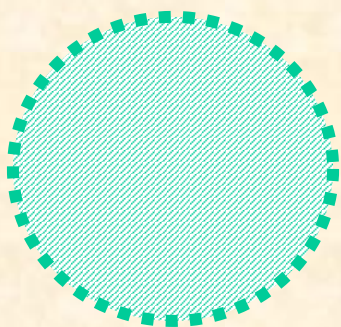
单连通域



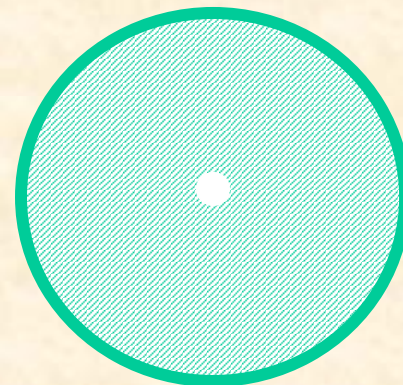
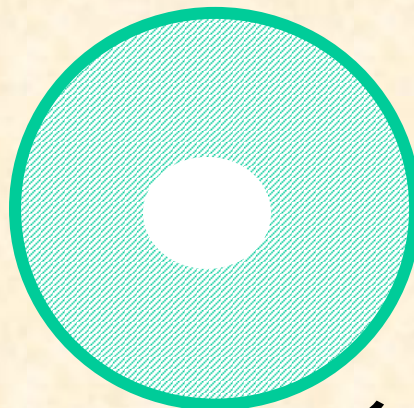
多连通域



例如 $|z| < R$ ($R > 0$) 是单连通的；
 $0 \leq r < |z| \leq R$ 是多连通的。



单连通域



多连通域

作业

P31 1 (2) (4) ,

2 ,

8 (3) (4) (5) ,

1 4 (2) (4) ,

2 1 (4) (8) (9)

2 2 (3) (4) (6)

