常微分方程的求解

P158

常微分方程的求解

- 设微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

分为：符号解法和数值解法

符号解法：

- 命令形式 1 ：
  - dsolve('eqution','var')
- 命令形式 2 ：
  - dsolve('eqution' , 'cond1,cond2,…' , 'var')

符号解法

初始条件

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{x-c}$$

dsolve('Dy=y^2','x')

大写

自变量

```
?dsolve('Dy=y^2','x')

ans =

-1/(x-C1)
```

求解 $xy''-3y'=x^2, y(1)=0, y(5)=0$

对应求导阶数

大写

condition

```
?dsolve('x*D2y-3*Dy=x^2','y(1)=0,y(5)=0','x')
ans =-1/3*x^3+125/468+31/468*x^4
```

常微分方程的数值解法

“常微分方程初值问题数值解”的提法：

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x_0 \le x \le x_n \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{........(1)}$$

假设(1)式的解 $y = y(x)$ 存在且唯一

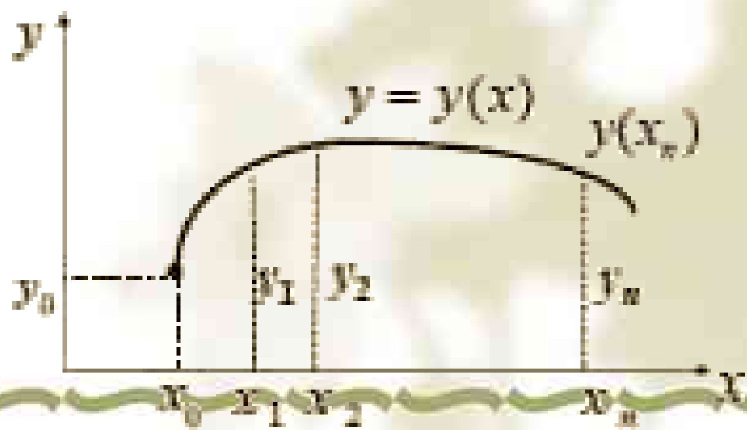
不求解析解 $y = y(x)$（无解析解或求解困难）

而在一系列离散点 $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

求 $y(x_i)$ 的近似值 $y_i (i = 0,1,2,\ldots)$

通常取等步长 h

$x_n = x_0 + nh$



常用的数值方法：

欧拉方法

梯形公式

龙格库塔方法

欧拉方法

$$y' = f(x, y) \quad \text{........(1)}$$

基本思路　对 (1) 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上积分

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \quad \text{........(*)}$$

将（*）右边定积分应用于不同公式

各种数值方法

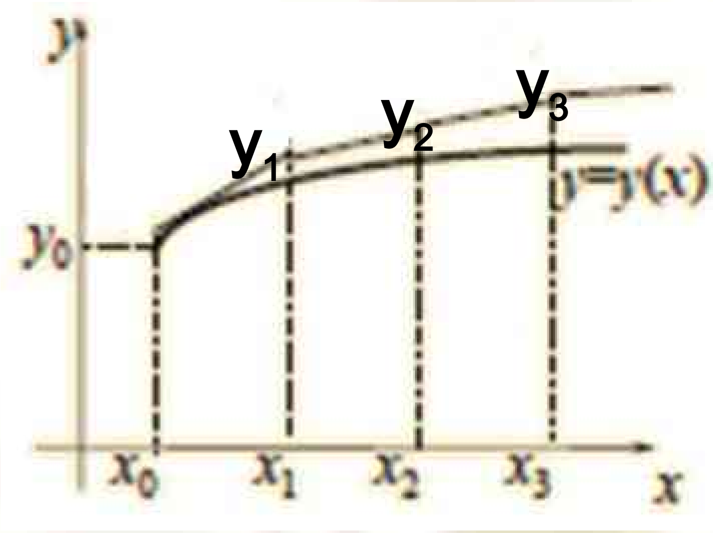
将（*）右边定积分应用于左矩形公式

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))$$

$$y_{i+1} \approx y(x_{i+1}), y_i \approx y(x_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

向前欧拉公式



欧拉方法

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx$$

将（ * ）右边定积分应用于右矩形公式

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$y_{i+1} \approx y(x_{i+1}), y_i \approx y(x_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), i = 0,1,\ldots$$

向后欧拉公式

右端点 y_{i+1} 未知，需迭代求解。常用的方法是：先用向前欧拉法提供初值，然后再利用向后欧拉法迭代。计算公式为：

$$\begin{cases} y_{i+1}^{0} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1}^{k+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^{k}) \end{cases}$$

梯形公式

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx$$

将（*）右边定积分应用于梯形公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], n = 0,1,\ldots$$

龙格库塔方法

·向前，向后欧拉公式

用 $[x_i,x_{i+1}]$ 内 1 个点的导数代替 $f(x,y(x))$

·梯形公式

用 $[x_i,x_{i+1}]$ 内 2 个点的导数平均值代替 $f(x,y(x))$

龙格库塔方法的基本思想

在 $[x_i,x_{i+1}]$ 内多取几个点，将它们的导数加权平均代替 $f(x,y(x))$，构造出精度更高的计算公式。

2 阶龙格—库塔公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2\right) \\ k_1 = f\left(x_n, y_n\right) \\ k_2 = f\left(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1\right) \end{cases} \qquad 0 < \alpha, \beta < 1$$

其中 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 1,$ 具有 2 阶精度。

4 阶龙格—库塔公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ k_1 = f\left(x_n, y_n\right) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f\left(x_n + h, y_n + hk_3\right) \end{cases}$$

其计算精度为 4 阶。

常微分方程的数值解法

龙格库塔方法的 Matlab 实现：

$$\begin{cases} y' = f(t, y), t_0 \le t \le t_m \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

[t,y]=ode23('fun',tspan,y0)

[t,y]=ode45('fun',tspan,y0)

其中，fun 是定义函数的文件名，该函数 fun 必须以 dy 输出量，以 t,y 为输入量。tspan=[t0 tf] 表示积分的起始值和终止值；y0 是初始状态列向量。

例 7-44： 考虑初值问题:

$$y' = y\tan t + \sec t, 0 \le t \le 1, y|_{t=0} = \frac{\pi}{2}$$

试求数值解，并与精确解做比较。

精确解为： $y(t) = \dfrac{t + \dfrac{\pi}{2}}{\cos t}$

解： 1) 编写函数文件 funst.m

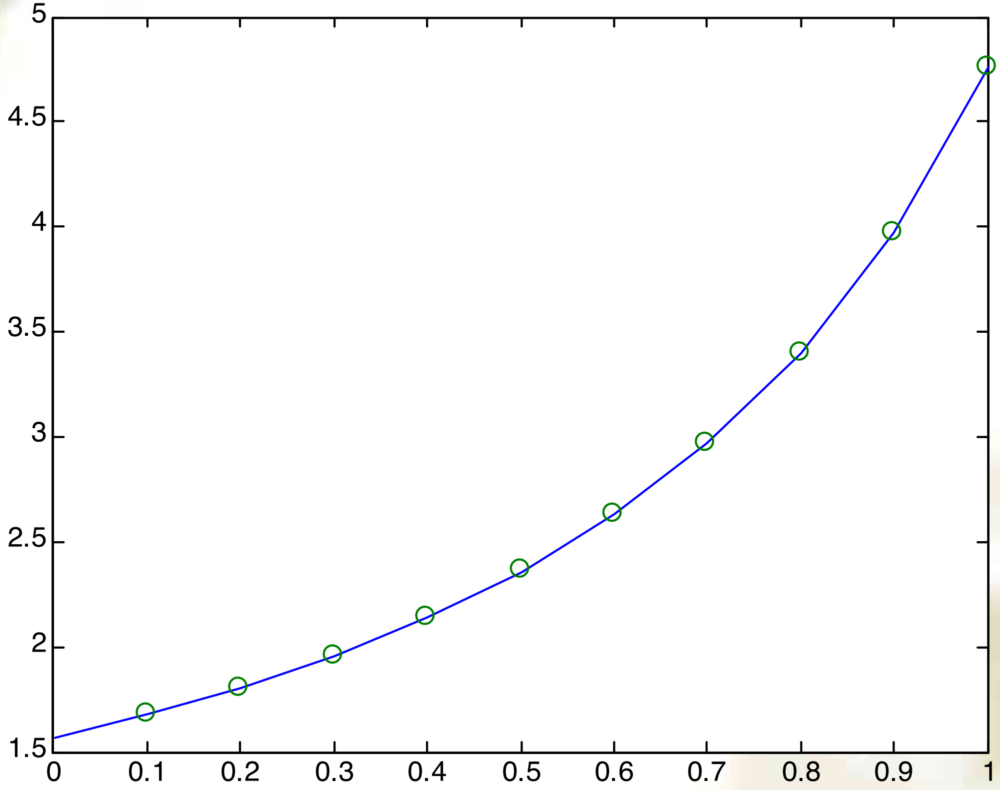
```
function yp=funst(t,y)
yp=sec(t)+y*tan(t);
```

2) 主程序：

```
t0=0;tf=1;
y0=pi/2;
[t,y]=ode23('funst',[t0,tf],y0);
yy=(t+pi/2)./cos(t);
plot(t,y,'-',t,yy,'o')
[t,y,yy]
```

ans =

0	1.5708	1.5708
0.1000	1.6792	1.6792
0.2000	1.8068	1.8068
0.3000	1.9583	1.9583
0.4000	2.1397	2.1397
0.5000	2.3596	2.3597
0.6000	2.6301	2.6302
0.7000	2.9689	2.9690
0.8000	3.4027	3.4029
0.9000	3.9745	3.9748
1.0000	4.7573	4.7581



5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

例 7-45：用数值积分的方法求解微分方程：$y''+y=1-\frac{t^2}{2\pi}$

设初始时间 $t_0=0$；终止时间 $t_f=3\pi$

初始条件 $y|_{t=0}=0,\ y'|_{t=0}=0$

$$y=x_1,\quad y'=x_2,\quad y''=x_2'$$

分析：求解

令：$x_1=y, x_2=y'=x_1' \Rightarrow y''=x_2'$

$x_2'+x_1=1-\frac{t^2}{2\pi}$（化为一阶微分方程）即原微分方程化为：

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=-x_1+1-\frac{t^2}{2\pi} \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1'=0x_1+x_2+0 \\ x_2'=-x_1+0x_2+\left(1-\frac{t^2}{2\pi}\right) \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x_1' = 0x_1 + x_2 + 0 \\ x_2' = -x_1 + 0x_2 + \left(1 - \dfrac{t^2}{2\pi}\right) \end{cases}$

$y = x_1,$

$y' = x_2$

$y'' = x_2'$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(1 - \frac{t^2}{2\pi}\right)$$

y y'

$$x' == \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(1 - \frac{t^2}{2\pi}\right)$$

u

（化为一阶微分方程）

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

放入函数 exf.m 中

$$\text{xdot}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u \qquad u=\left(1-\frac{t^2}{2\pi}\right)$$

1) 编写函数文件 exf.m

```
function xdot=exf(t,x)
u=1-(t.^2)/(2*pi);
xdot=[0,1;-1,0]*x+[0 1]'*u;
```

该函数用来记录一阶微分方程

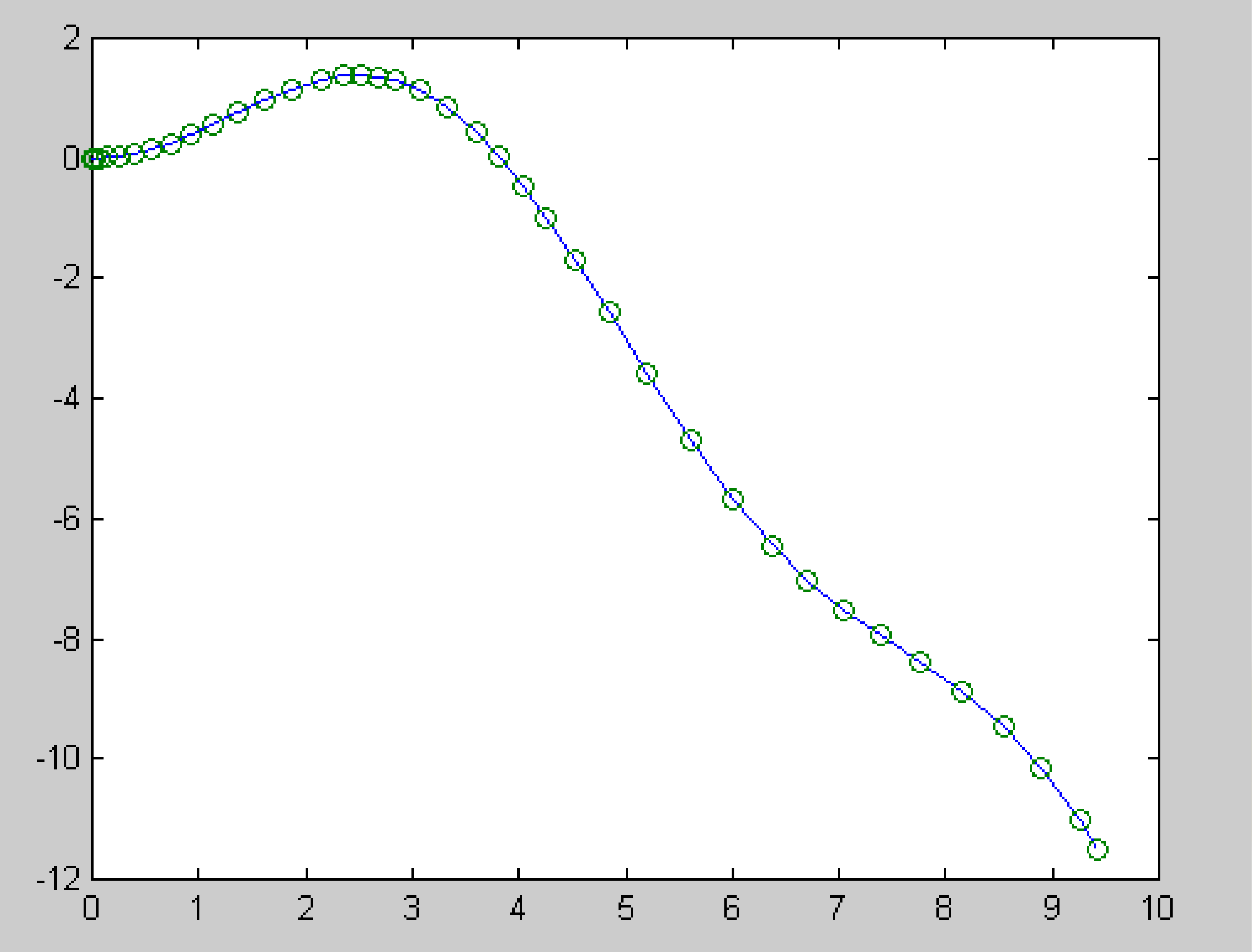
2) 主程序如下：

```
clf;
t0=0;                ------  初始和终止时间
tf=3*pi;
x0t=[0;0];           ------  初始条件
[t,x]=ode23('exf',[t0,tf],x0t)      exf 为已定义的子函数
```

```
y=x(:,1); %[t,x] 中求出的 x 是按列排列， 故用 ode23 求出 x 后 只要第
                一列即为 y
y2=-1/2*(-2*pi-2+t.^2)/pi-(pi+1)/pi*cos(t);
clf,
plot(t,y,'-', t,y2,'o')
```

解析解为：

```
dsolve('D2y+y=1-t^2 /(2*pi)','y(0)=0,Dy(0)=0','t')
ans =
-1/2*(-2*pi-2+t^2)/pi-(pi+1)/pi*cos(t)
```



2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

作业

p168

24　27