串讲 卷

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 曲面 $x^2+2y^2+5z^2=8$ 在点 $p_0(1,1,1)$ 处得切平面方程为 $x+2y+5z=8$______.

2. 设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$，其周长为 a，则 $\oint_L(2xy+4x^2+3y^2)\,\mathrm{d}s=$ __$12a$_______.

3. 设 $\vec{a},\vec{b}$ 为两个非零向量，当向量 $\vec{a}+t\vec{b}$（t 为实数）的模 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 为最小时，$t=$_

$t=-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$____.

4. 函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数_____$\dfrac{98}{13}$______.

5. 函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值为 ____-5___________.

6. 函数 $y_1=\mathrm{e}^x$，$y_2=2x$ 所满足的阶数最低的常系数齐次线性微分方程为____$y'''-y''=0$_.

二、单项选择题（(7) B；(8) B；(9) D；(10) C；(11) B；(12) A；）

7. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 【　　　　　　】.

(A) 连续且存在一阶偏导数．　　(B) 不连续，但存在一阶偏导数．

(C) 连续但不存在一阶偏导数．　　(D) 可微．

8. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 【　　　　　　】.

(A) $\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x.$　　(B) $\int_0^a \mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

(C) $\int_0^a \mathrm{d}y\int_a^y f(x,y)\,\mathrm{d}x.$　　(D) $\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

9. 设 l 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y\geq 0$，沿逆时针方向，则

$\int_l(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\,\mathrm{d}y=$ 【　　】 .

(A) a^2.　　　　　　(B) $\frac{1}{2}\pi a^2$.

(C) $2\pi a^2$.　　　　　　(D) πa^2.

10. 设 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域，则 $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ 【　　　　　】.

(A) $\frac{\pi}{4}(\ln 2-1)$.　　　　(B) $\frac{\pi}{8}(\ln 2-1)$.

(C) $\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$　　　　(D) $\frac{\pi}{8}(2\ln 2-1)$

11. 设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$，其中 f 为连续函数,且 $f(0)=0, f'(0)=1, t>0$,则 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^5}$ 之值为 【　　　　　】.

(A) π.　　　　(B) $\frac{4}{5}\pi$.

(C) $\frac{3}{5}\pi$.　　　　(D) $\frac{2}{5}\pi$.

12. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ 　　【　　　　　】.

(A) $\frac{z}{x+z}$ 　.　　　　$\frac{y}{x+z}$ 　(B

(C) $\frac{z}{y+z}$.　　　　(D) $\frac{x}{x+z}$.

（7） B；(8) B；(9) D；（10）C；（11）B；（12）A；

三、解答题

13(10 分). 设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中 f 具有二阶连续偏导数 ,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$ ，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解：由题设 $g'(1)=0, g(1)=1$，

又 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2'$， ，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}''[g(x)+xg'(x)]+g'(x)f_2'+yg(x)g'(x)f_{22}''$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1,)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$$

14. 设 L 为以点 $A(1,2)$ 为起点，$B(3,4)$ 为终点的曲线，求曲线积分

$$\int_L (6xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+\ \ (6x^2y-3xy^2)\,\mathrm{d}y.$$

解：因为 $P=6xy^2-y^3, Q=6x^2y-3xy^2$ 在整个 xoy 面这个单连通域内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

所以曲线积分在 xoy 面内与路径无关.

如图选取积分路经

$$\text{原式}=\int_1^3(24x-8)dx+\int_2^4(54y-9y^2)dy$$

$$=80+156=236$$

15 (11 分)设闭区域 D ： $x^2+y^2\le y, x\ge 0$, $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且 $f(x,y)=$ $\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ，求 $f(x,y)$.

解： 令 $A=\iint\limits_D f(u,v)dudv$，则

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A,$$

在 D 上对上式两边积分，有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\frac{8}{\pi}A\iint\limits_D dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}rdr-\frac{8}{\pi}A\frac{\pi}{8}$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta-1)d\theta-A=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}-A$$

即 $A=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}-A$，所以 $A=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}$，

从而 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{2}{3}+\frac{8}{9\pi}$

16 (11 分). 计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma\frac{bx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$， 其中 $b>0$，Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 的外侧 .

解：原式$=\oiint\limits_\Sigma\frac{1}{b^2}(bxdydz+yz^2dzdx+z^3dxdy)$

$$=\frac{1}{b^2}\iiint\limits_\Omega(b+z^2+3z^2)dxdydz$$

$$=\frac{4}{3}\pi\ b^2+\frac{8}{b^2}\int_0^b z^2dz\iint\limits_{D_{zz}}d\sigma$$

$$=\frac{4}{3}\pi\ b^2+\frac{16}{15}\pi\ b^3$$

四、综合证明题

17. 设$f(x)$为一连续函数，且满足方程$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$，求$f(x)$.

解： 由原方程知 $f(0)=0$，且有

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$$

两边对x求导，得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$$

（知 $f'(0)=1$）两边再对x求导，得

$$f''(x)+f(x)=-\sin x \qquad （*）$$

这是二阶线性微分方程，由其特征方程$r^2+1=0$得$r=\pm\ i$，又$\lambda+\omega\ i=i$为方程的单根，故设特解 $f^*=x(A\cos x+B\sin x)$ 代入（*）式，得$A=\frac{1}{2},B=0$，于是 $f^*=\frac{1}{2}x\cos x$，从而通解 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

再由 $f(0)=0$， $f'(0)=1$，得$C_1=0,C_2=\frac{1}{2}$，故所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x.$$

18. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，利用二重积分，证明：$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$, 其中$D: a\le x\le b, a\le y\le b.$

证明方法 1 $\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x)f(y)dxdy \le \iint\limits_D \frac{1}{2}(f^2(x)+f^2(y))dxdy$

方法 2 $[f(x)-f(y)]^2\ge 0,$

$$\therefore 0\le\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy=\int_a^b dx\int_a^b[f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)]dy$$

$$=2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-2[\int_a^b f(x)dx]^2.$$

所以 $\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$