线性代数复习课

主讲人：罗宇飞

第一部分 矩阵基础

矩阵的运算

- 矩阵的线性运算
- 矩阵的加法：$A+B=B+A$（满足交换律）
- 矩阵的数乘：$\mu A=(\mu a_{ij})_{m\times n}$
- 矩阵的非线性运算
- 矩阵间相乘：$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$（不满足交换律）
- 矩阵的转置：$A^T=(a_{ji})_{m\times n}$，i表示行，j表示列
  - $(AB)^T=B^TA^T$
  - $A^T=A$，A为对称阵；$A^T=-A$，A为反对称阵
- 矩阵的共轭：$\bar{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$

可逆矩阵

- 可逆矩阵的引出
  - $Y=AX, X=BY; A, B$互为逆变换，即互为逆矩阵
  - 方阵才可讨论逆矩阵
- 可逆矩阵的判定
  - A, B为n阶方阵，$AB=E_n$，则$A=B^{-1}$，$B=A^{-1}$
  - 有些矩阵不可逆，如零矩阵，有零行或零列的矩阵
- 可逆矩阵的性质
  - $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
  - $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

可逆矩阵

- $AB = E_n$

➢ 例：设方阵A满足$A^2 + A - 4E = 0$，证明$A - E$可逆

- 证明：
- $A^2 + A - 4E = 0$
- $A^2 + A - 2E = 2E$
- $(A - E)(A + 2E) = 2E$
- $(A - E)^{-1} = \frac{1}{2}(A + 2E)$

初等变换和初等方阵

- 初等行变换

(1) $r_i \Leftrightarrow r_j$

(2) $r_i \times k$

(3) $r_i + kr_j$

- 将线性方程组的增广矩阵化为行简化阶梯阵求解线性方程组

- 初等方阵

- $E(i,j), E\big(i(k)\big), E\big(i,j(k)\big)$ 注意：第i列的k倍加到第j列
- 可逆矩阵可通过初等行变换化为单位阵
- 构造(A,E)利用初等方阵得到(E,A^{-1})，得逆矩阵

初等变换和初等方阵

求解矩阵方程

- $AX = B$, 构造(A, B), 使用初等行变换
- $YA = B$, 构造$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 使用初等列变换

矩阵相抵（等价关系）

- A经过有限次初等变化化为B，则A相抵于B，记为$A \cong B$
- 相抵标准型 $A_{m\times n} \xrightarrow[\text{列变换}]{\text{行变换}} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，r为$A$的秩
- $r(A) = r(A^T)$
- n阶矩阵A可逆的充要条件是$r(A) = n$

第二部分 行列式

行列式的定义

- 低阶（二，三阶）行列式的计算方法

➢ 主对角线元素乘积减去副对角线元素乘积

- $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

- $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

行列式的定义

高阶行列式的计算方法（1）

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

- 其中$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$表示$j_1j_2\cdots j_n$排列的逆序数，即各数的逆序之和，逆序数为奇数为奇排列，为偶数为偶排列
- $j_1j_2\cdots j_n$排列中两数对换会改变排列的奇偶性
- 上三角行列式$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

行列式的性质

- $|A| = |A^T|$，行列地位相同
- $|AB| = |A||B|$
- $A \xrightarrow[(c_i \leftrightarrow c_k)]{r_i \leftrightarrow r_k} B$ ，$|B| = -|A|$
- $A \xrightarrow[(k \times c_i)]{k \times r_i} B$ ，$|B| = k|A|$，**注意：$k|A|$与$|kA|$不同**
- $A \xrightarrow[(c_i + kc_j)]{r_i + kr_j} B,$ ，$|B| = |A|$

行列式的性质

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 + b_1 & c_2 + b_2 & \cdots & c_n + b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

- 高阶行列式的计算方法（2）

- 利用性质将行列式化为上三角或下三角行列式

- 例1

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=-(-2)(-1)(-6)=12.$$

行列式的性质

- 高阶行列式的计算方法（2）

➤ 例2

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+\ldots+c_n} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} =[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

行列式展开定理

- 高阶行列式的计算方法（3）

➢ 将行列式按行（列）展开

- $\left|A\right| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

- 利用行列式的性质将所给行列式的某行(列)化成只含有一个非零元素

- 按此行(列)展开，每展开一次，行列式的阶数可降低1阶

➢ 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \left|A\right|, i = j. \\ 0, \quad i \neq j. \end{cases}$$

行列式展开定理

- 高阶行列式的计算方法（3）
  - 递推法，加边法
- 伴随矩阵与矩阵求逆
  - $AA^* = A^*A = |A|E.\quad \therefore A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}.$
  - $|A^*| = \left||A|A^{-1}\right| = |A|^n|A^{-1}| = |A|^{n-1}$
  - $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
  - $(AB)^* = B^*A^*, (A^m)^* = (A^*)^m, \left(A^T\right)^* = (A^*)^T$
  - $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

克莱姆法则

- 只针对n个变量n个方程的线性方程组（公式法）
  - $x_j = \dfrac{D_j}{D} (1 \le j \le n)$
  - 系数行列式$D \neq 0$，唯一解
    - 对齐次线性方程组，只有0解
  - 系数行列式$D = 0$，无解或多解
    - 对齐次线性方程组，有多解，即会有非0解

第三部分 向量空间

向量的线性关系

- 向量的线性表示

- 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$均为n维向量，若存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s$，则称$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示
- 两个向量组可以相互线性表示，则两向量组等价
- 若矩阵A经过初等列变换变为矩阵B，则矩阵A的列向量组与矩阵B的列向量组等价

向量的线性关系

向量的线性相关性

- 对于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 1)$，若存在不全为0的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s=0$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关
- 线性无关的判断：
  - 首先设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s=0$
  - 若只能推出$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，则向量组线性无关
- 部分相关，整体相关
- 低维无关，高维无关

向量的线性关系

- 向量的线性相关性

➢ 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，且r>s，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关

向量组的秩

- 极大线性无关组
  - 向量组的极大线性无关组所含向量的个数为**向量组的秩**
  - 极大线性无关组不唯一，但所含向量个数相同
- 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$中的向量均非0，且两两正交，称向量组为正交向量组
- **施密特正交化与单位化（重点）**
  - 正交化：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r \longrightarrow \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$
  - 单位化：$\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|},\boldsymbol{e}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|},\cdots,\boldsymbol{e}_r=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_r}{|\boldsymbol{\beta}_r|}$

向量组的秩

- 正交化思路：减去额外的投影分量
- $$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\beta_1, \alpha_3)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_3)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

矩阵的秩

- 矩阵A经初等行变换化为矩阵B，则矩阵A的列向量组与矩阵B的列向量组对应的向量有相同的线性关系
  - 初等行变换之后线性关系明显，从而得到原列向量组的线性关系
- 矩阵的行秩等于列秩等于矩阵的秩
  - 求解矩阵的秩

矩阵的秩

- 例：已知矩阵$A_{m\times n}, B_{n\times p}$，证：$\mathrm{r(AB)} \geq r(A)+r(B)-n$

- 证明：

- 设$r(A)=s$，则存在可逆矩阵P, Q可使$PAQ=\begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$

- 因为$Q^{-1}B=C=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} s行 \\ n-s行 \end{matrix}$

- 所以$PAB=PAQQ^{-1}B=\begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $r(B)=r(C)\leq r(C_1)+r(C_2)\leq r(AB)+n-r(A)$

第四部分 线性方程组

齐次线性方程组

- $A_{m\times n}x = 0$基础解系的个数由$n - r$个向量组成
- 将系数矩阵化为行简化阶梯阵得基础解析
- 根据行简化阶梯阵可判断是否无解
- 由基础解系得通解

非齐次线性方程组

- 有解的充要条件：$\mathrm{r}(A) = r(A, \beta)$
- 首先得到导出组的基础解系
- 齐次通解加上非齐次特解得非齐次通解（选择题）
- 带参数方程（大题）

非齐次线性方程组

- 例：

已知：$\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\alpha_2=(2,7,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T,\beta=(3,10,b,4)^T$

问： a, b 取何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

a, b 取何值时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

转换为非齐次方程组解的问题

能线性表示 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 有解

不能线性表示 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 无解

第五部分 对角化与二次型

相似与合同

- 对角化是一种相似关系
  - 设A, B都是n阶方阵, 如果存在n阶可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=B$，则A与B相似
  - 若A与一个对角阵相似，则A可以对角化
- 二次型化为标准形是一种合同关系
  - 设A, B都是n阶方阵, 如果存在n阶可逆矩阵C，使得 $C^TAC=B$，则A与B合同
  - 若A与一个对角阵合同，则A可以化为标准形
- 相似一定合同，合同不一定相似

特征值与特征向量

- 对于n阶方阵A，$(\lambda E-A)x=0$，有非0解
- $|\lambda E-A|=0$
- 解得A的n个特征值，分别代入原齐次线性方程组得到特征值的特征向量
- 特征值的代数重数不小于几何重数

矩阵	A	$\phi(A)$	$A^*=\|A\|A^{-1}$
特征值	λ	$\phi(\lambda)$	$\|A\|\lambda^{-1}$
特征向量	x	x	x

矩阵的对角化

- n阶矩阵A矩阵有n个线性无关的特征值
  - 矩阵可以对角化
  - 对每一个特征值解出的基础解系个数等于该特征值根的重数
  - 特征向量构成需要的可逆矩阵P，特征值构成相似标准型，注意：特征向量与特征值要一一对应

实对称矩阵的对角化

- 实对称矩阵一定可以对角化
- 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的
- 对每个特征值的基础解析正交化再单位化，则P的列向量两两正交，且是单位矩阵，P $\rightarrow$ Q，Q是正交矩阵
- 实对称矩阵一定存在正交矩阵Q使其对角化

二次型的标准形

- 含n个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + \cdots\cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

称为n元二次型，简称二次型

- $f = x^T Ax$ ，A 称为二次型的矩阵，为实对称矩阵

二次型的标准形

- 寻求可逆矩阵C，使得 $C^TAC = B$，B为对角阵
- 正交变换法
- A为实对称矩阵
- 一定存在正交矩阵Q使其对角化，即使$Q^{-1}AQ = B$
- 一定存在正交矩阵Q使其对角化，即使$Q^TAQ = B$
- Q即是要寻求的C，使得 $C^TAC = B$，B为对角阵
- 二次型用正交变换化为标准形
- 通过$|\lambda E - A| = 0$得到矩阵A的特征值，特征向量
- 施密特正交化单位化得到Q

二次型的规范形

- 二次型的标准型不唯一，化为规范型后唯一

➤ 通过$x = Cy$，$f = x^T Ax = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$

➤ 作 $\begin{cases} z_1 = \sqrt{d_1}\, y_1 \\ \cdots\cdots \\ z_p = \sqrt{d_p}\, y_p \\ z_{p+1} = \sqrt{-d_{p+1}}\, y_{p+1} \\ \cdots\cdots \\ z_r = \sqrt{-d_r}\, y_r \\ z_{r+1} = y_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ z_n = y_n \end{cases}$，即$z = My, y = M^{-1}z$，化为规范型

➤ 综合来说，通过$x = CM^{-1}z$，化为规范型，CM^{-1}是要寻求的线性变换

祝大家取得好成绩！

谢谢！