第二部分　积分变换

Integral　Transform

2012.10.24

积分变换，是指通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的一种变换．这类积分一般要含有参变量，具体形式可写为：

$$\int_a^b K(t,\omega)f\left(t\right)dt \xrightarrow{\text{记为}} F\left(\omega\right)$$

$f(t)$ - 象**原函数**　$F\left(\omega\right)$ - **象函数**　$K(t,\omega)$ - **核（kernel）**

$K(t,\omega)=e^{-j\omega t}$　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ -- **傅里叶变换**

$K(t,s)=e^{-st}$　$\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ -- **拉普拉斯变换**

这两种变换在工程上是频谱分析、信号分析、线性系统分析的重要工具．

第八章　　Fourier 积分变换

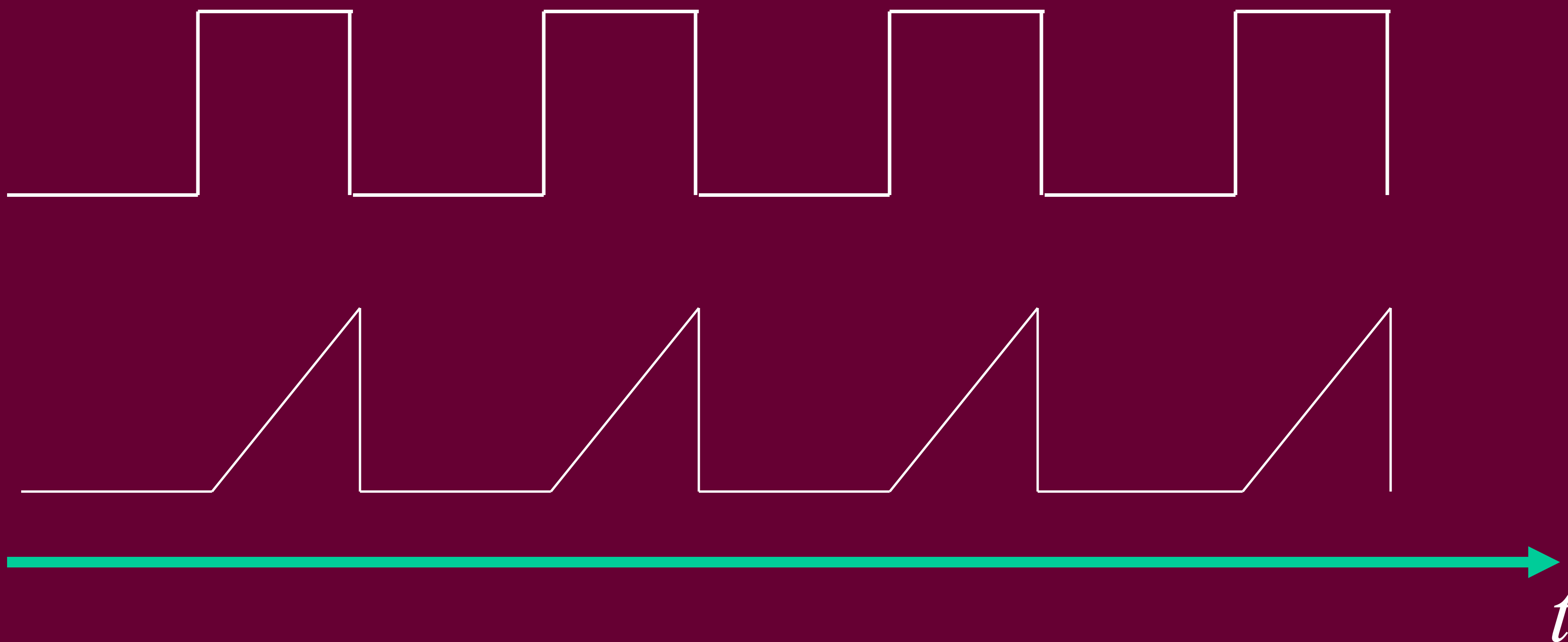
一、周期函数的傅里叶级数展开

二、非周期函数的傅里叶级数展开

三、傅里叶积分变换

四、傅里叶积分变换的性质

在工程计算中，无论是电学还是力学，经常要和随时间而变的周期函数 $f_T(t)$ 打交道．例如：

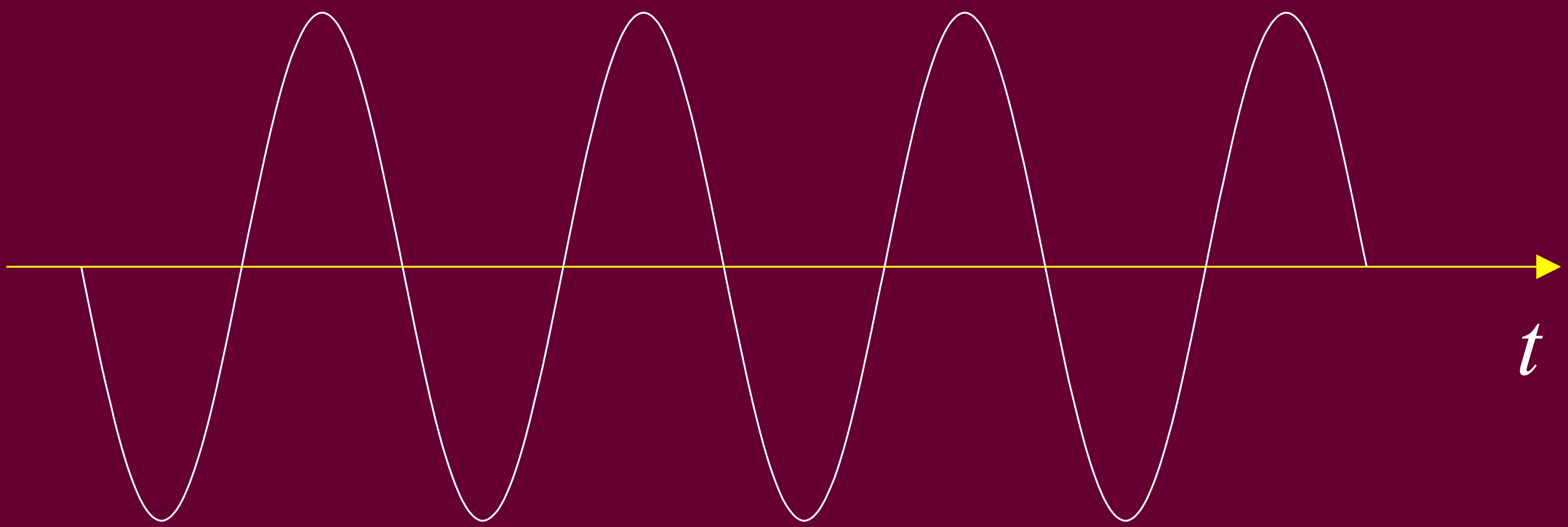


具有性质 $f_T(t+T)=f_T(t)$, 其中 T 称作**周期**，而 $1/T$ 代表单位时间振动的次数，单位时间通常取秒，即每秒重复多少次，单位是**赫兹** (Herz, **或** Hz).

最常用的一种周期函数是三角函数

$$f_T(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$（谐波）

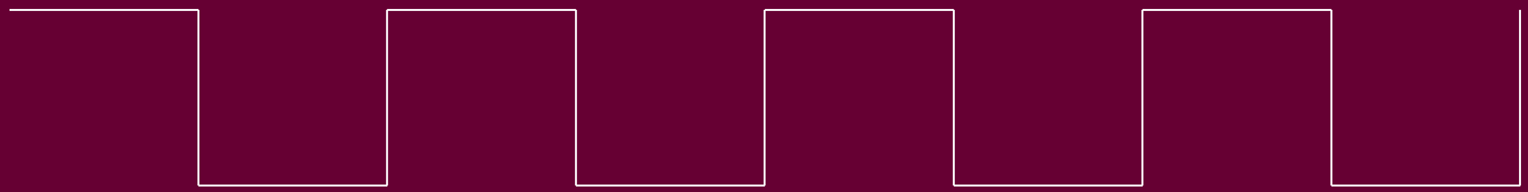
其中 $\omega=2\pi/T$



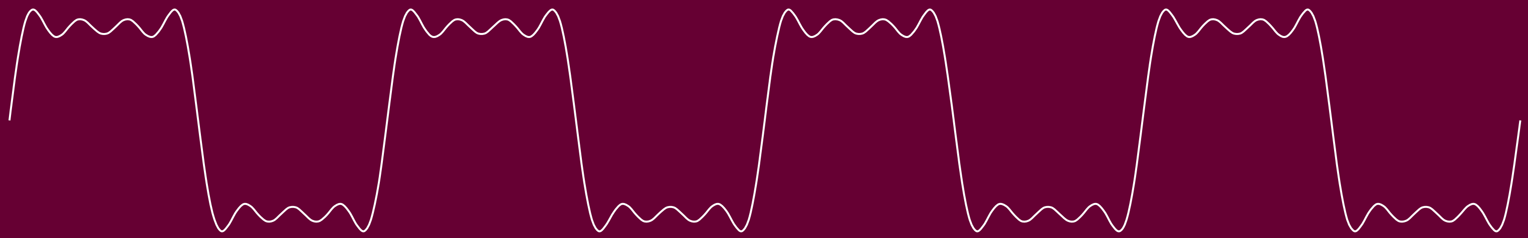
而 $A\sin(\omega t+\varphi)$ 又可以看作是两个周期函数 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 的线性组合

$$A\sin(\omega t+\varphi)=a\sin\omega t+b\cos\omega t$$（叠加）

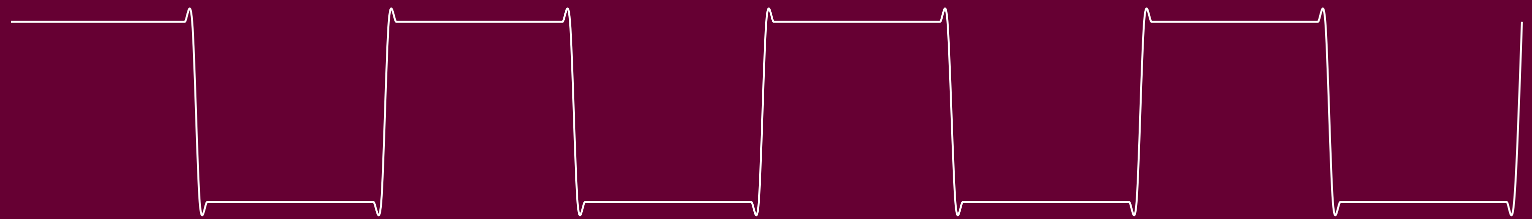
人们发现，所有的工程中使用的**周期函数**都可以用一系列的**三角函数的线性组合**来逼近.



方波



4 个正弦波的逼近



100 个正弦波的逼近

研究周期函数实际上只须研究其中的一个周期内的情况即可，通常研究在闭区间 $[-T/2,T/2]$ 内函数变化的情况．并非理论上的所有周期函数都可以用傅里叶级数逼近，而是要满足狄利克雷 (Dirichlet) 条件，

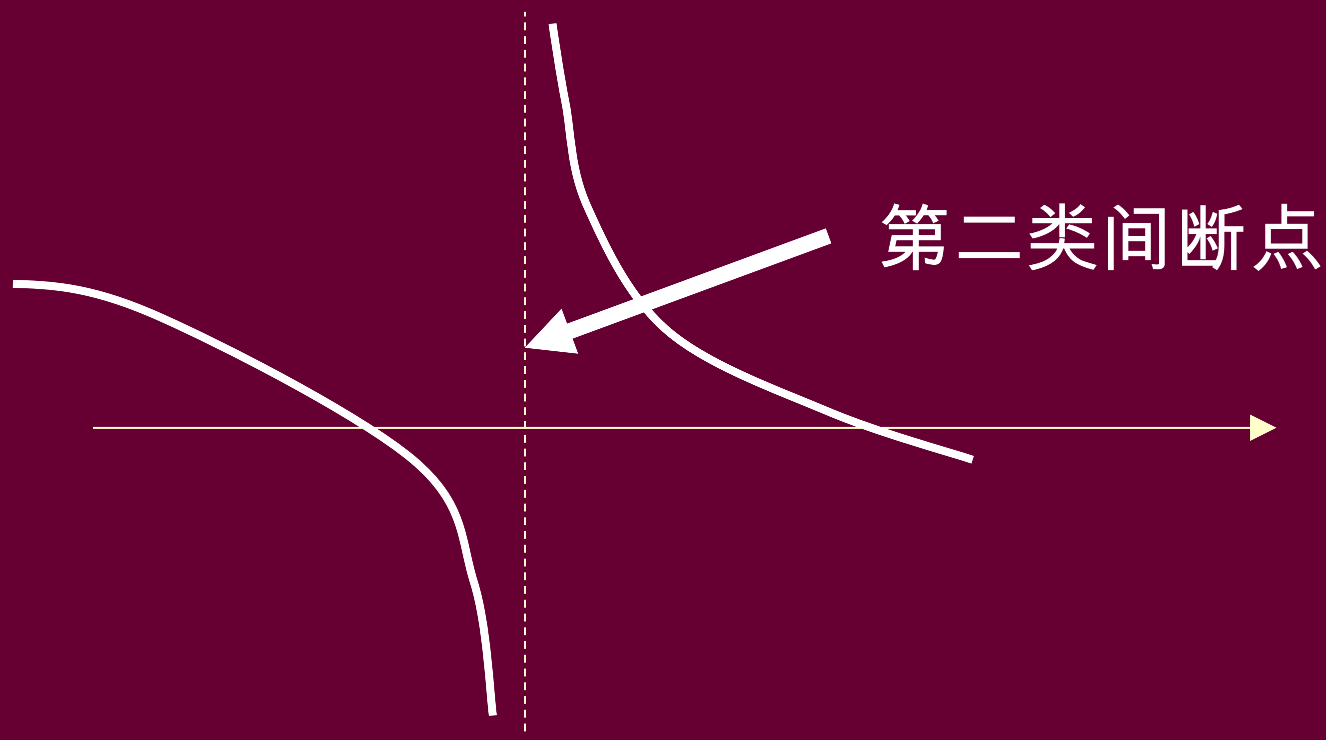
即在区间 $[-T/2,T/2]$ 上

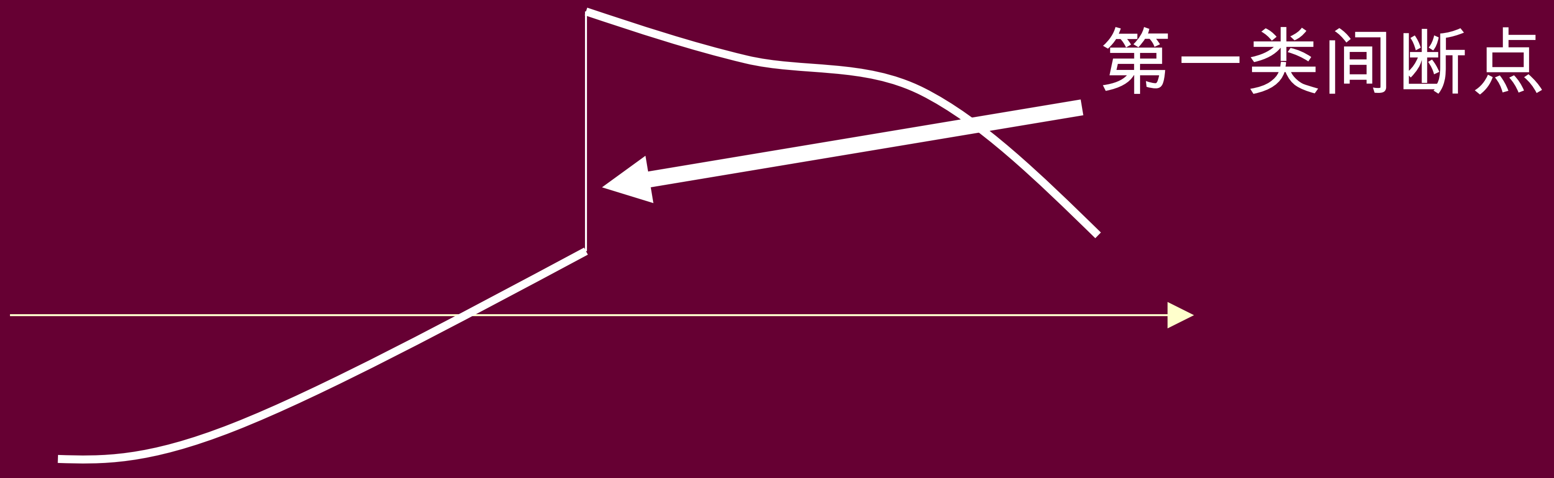
1、连续或只有有限个第一类间断点

2、只有有限个极值点

这两个条件实际上就是要保证函数是可积函数．

第一类间断点和第二类间断点的区别：





不满足狄氏条件的例：

$$f(t) = \mathrm{tg}\, t$$

存在第二类间断点

$$f(t) = \sin(\frac{1}{t})$$

在靠近0处存在着无限多个极值点.

而在工程上所应用的函数，尤其是物理量的变化函数，全部满足狄氏条件.

在区间 $[-T/2,T/2]$ 上满足狄氏条件的函数的全体也构成一个集合，这个集合在通常的函数加法和数乘运算上也构成一个线性空间 V，此空间的向量就是函数，线性空间的一切理论在此空间上仍然成立．更进一步地也可以在此线性空间 V 上定义内积运算，这样就可以建立元素(即函数)的长度(范数)，及函数间角度，及正交的概念．两个函数 f 和 g 的内积定义为：

$$[f,g]=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

一个函数 $f(t)$ 的长度为

$$\|f\| = \sqrt{[f,f]} = \sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

而许瓦兹不等式成立：

$$|[f,g]| \le \|f\|\cdot\|g\|$$

即 $$\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

这样可令

$\cos\theta = \dfrac{[f,g]}{\|f\|\cdot\|g\|}$ 是 f,g 间的夹角余弦，

则如果 $[f,g]=0$ 称为 f 与 g 正交.

而在区间 $[-T/2, T/2]$ 上的三角函数系

$1, \cos\omega t, \sin\omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \ldots,$

$\cos n\omega t, \sin n\omega t, \ldots$

是两两正交的，其中$\omega=2\pi/T$，这是因为 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 都可以看作是复指数函数 $e^{jn\omega t}$ 的线性组合．当 $n\neq m$ 时，

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{e}^{\mathrm{j}n\omega t}\mathbf{e}^{-\mathrm{j}m\omega t}\,\mathbf{d}t = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{e}^{\mathrm{j}(n-m)\theta}\,\mathbf{d}\theta = 0$$

其中$\theta = \omega t = \dfrac{2\pi t}{T}$,则$\mathbf{d}\theta = \dfrac{2\pi\,\mathbf{d}t}{T}$,$\mathbf{d}t = \dfrac{T}{2\pi}\mathbf{d}\theta$

这是因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-m)\theta} d\theta = \frac{1}{j(n-m)} e^{j(n-m)\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{j(n-m)} [e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}]$$

$$= \frac{1}{j(n-m)} e^{-j(n-m)\pi} [e^{j2(n-m)\pi} - 1] = 0$$

由此不难验证

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega t \,\mathrm{d}t = 0 \qquad (n = 1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t \,\mathrm{d}t = 0 \qquad (n = 1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t \cos m\omega t \,\mathrm{d}t = 0 \qquad (n, m = 1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t \sin m\omega t \,\mathrm{d}t = 0 \qquad (n, m = 1,2,3,\cdots, n \neq m),$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega t \cos m\omega t \,\mathrm{d}t = 0 \quad (n, m = 1,2,3,\cdots, n \neq m),$$

而 1, $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, ..., $\cos n\omega t$, $\sin n\omega t$, ... 的函数的长度计算如下：

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1^2 \,\mathrm{d}t} = \sqrt{T}$$

$$\|\cos n\omega t\| = \sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 n\omega t \,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1+\cos 2n\omega t}{2} \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$\|\sin n\omega t\| = \sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 n\omega t \,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1-\cos 2n\omega t}{2} \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T}{2}}$$

因此，任何满足狄氏条件的周期函数 $f_T(t)$，可表示为三角级数的形式如下：

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\quad(1.1)$$

为求出 a_0，计算 $[f_T,1]$，即

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos n\omega t\,\mathrm{d}t+b_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin n\omega t\,\mathrm{d}t\right)=\frac{a_0}{2}T$$

即 $a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{d}t$

为求 a_n，计算 $[f_T(t), \cos n\omega t]$，即

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{a_0}{2}\cos n\omega t\,\mathrm{d}t +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos m\omega t \cos n\omega t\,\mathrm{d}t +$$

$$+\sum_{m=1}^{n} b_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin m\omega t \cos n\omega t\,\mathrm{d}t =$$

$$= a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 n\omega t\,\mathrm{d}t = a_n\frac{T}{2}$$

即 $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$

同理，为求 b_n，计算 $[f_T(t), \sin n\omega t]$，即

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{a_0}{2}\sin n\omega t\,\mathrm{d}t +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos m\omega t \sin n\omega t\,\mathrm{d}t +$$

$$+\sum_{m=1}^{n} b_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin m\omega t \sin n\omega t\,\mathrm{d}t =$$

$$= b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 n\omega t\,\mathrm{d}t = b_n \frac{T}{2}$$

即 $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$

最后可得：

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos m\omega t+b_n\sin n\omega t)\quad(1.1)$$

其中 $$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$$

而利用三角函数的指数形式可将级数表示为：

由 $\cos\phi=\dfrac{e^{\mathrm{j}\phi}+e^{-\mathrm{j}\phi}}{2}, \sin\phi=-\mathrm{j}\dfrac{e^{\mathrm{j}\phi}-e^{-\mathrm{j}\phi}}{2}$ 得：

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{\mathrm{j}n\omega t}+e^{-\mathrm{j}n\omega t}}{2}-\mathrm{j}b_n\frac{e^{\mathrm{j}n\omega t}-e^{-\mathrm{j}n\omega t}}{2}\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}e^{\mathrm{j}n\omega t}+\frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2}e^{-\mathrm{j}n\omega t}\right]$$

如令$\omega_n = n\omega \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

且令$c_0 = \dfrac{a_0}{2}$,

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, n = 1,2,3,\cdots$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}, n = 1,2,3,\cdots$$

$$f_T(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n} e^{-j\omega_n t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

给定 $f_T(t)$, c_n 的计算如下：

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{d}\,t$$

当n 1时 $c_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}\,t-$

$$-j\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)[\cos n\omega t-j\sin n\omega t]\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}\,t$$

而

$$c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{j} b_n}{2} = \overline{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{\mathrm{j} n\omega t} dt$$

因此可以合写成一个式子

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-\mathrm{j}\omega_n t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

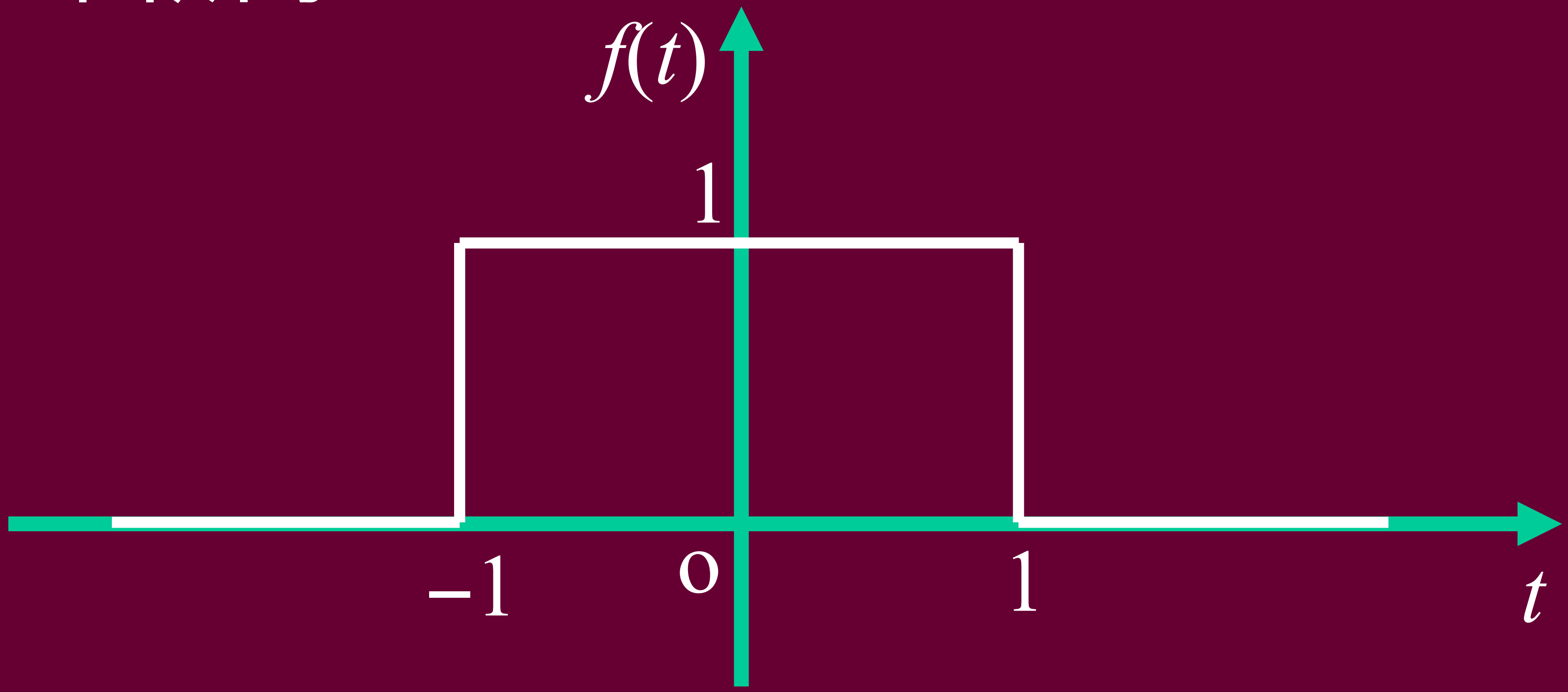
$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{j}\omega_n t}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-\mathrm{j}\omega_n \tau}\, \mathrm{d}\tau\right] e^{\mathrm{j}\omega_n t}$$

例 定义方波函数为

$$f(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$

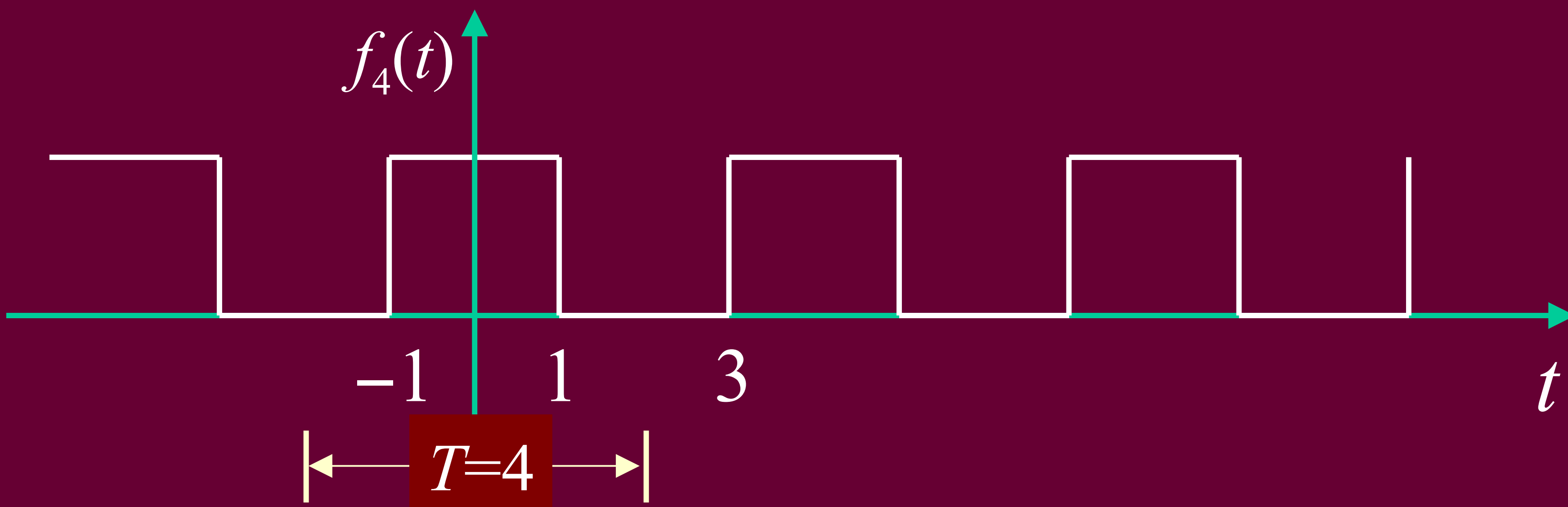
如图所示：



现以 $f(t)$ 为基础构造一周期为 T 的周期函数 $f_T(t)$，令 $T=4$，则

$$f_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+4n),$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \ \omega_n = n\omega = \frac{n\pi}{2}$$



则

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-j\omega_n t}dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f_4(t)e^{-j\omega_n t}dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-j\omega_n t}dt$$

$$= \frac{1}{-4j\omega_n}e^{-j\omega_n t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4j\omega_n}\left(e^{j\omega_n} - e^{-j\omega_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\omega_n}{\omega_n} = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\omega_n)\ (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

sinc 函数介绍

sinc函数定义为

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}$$

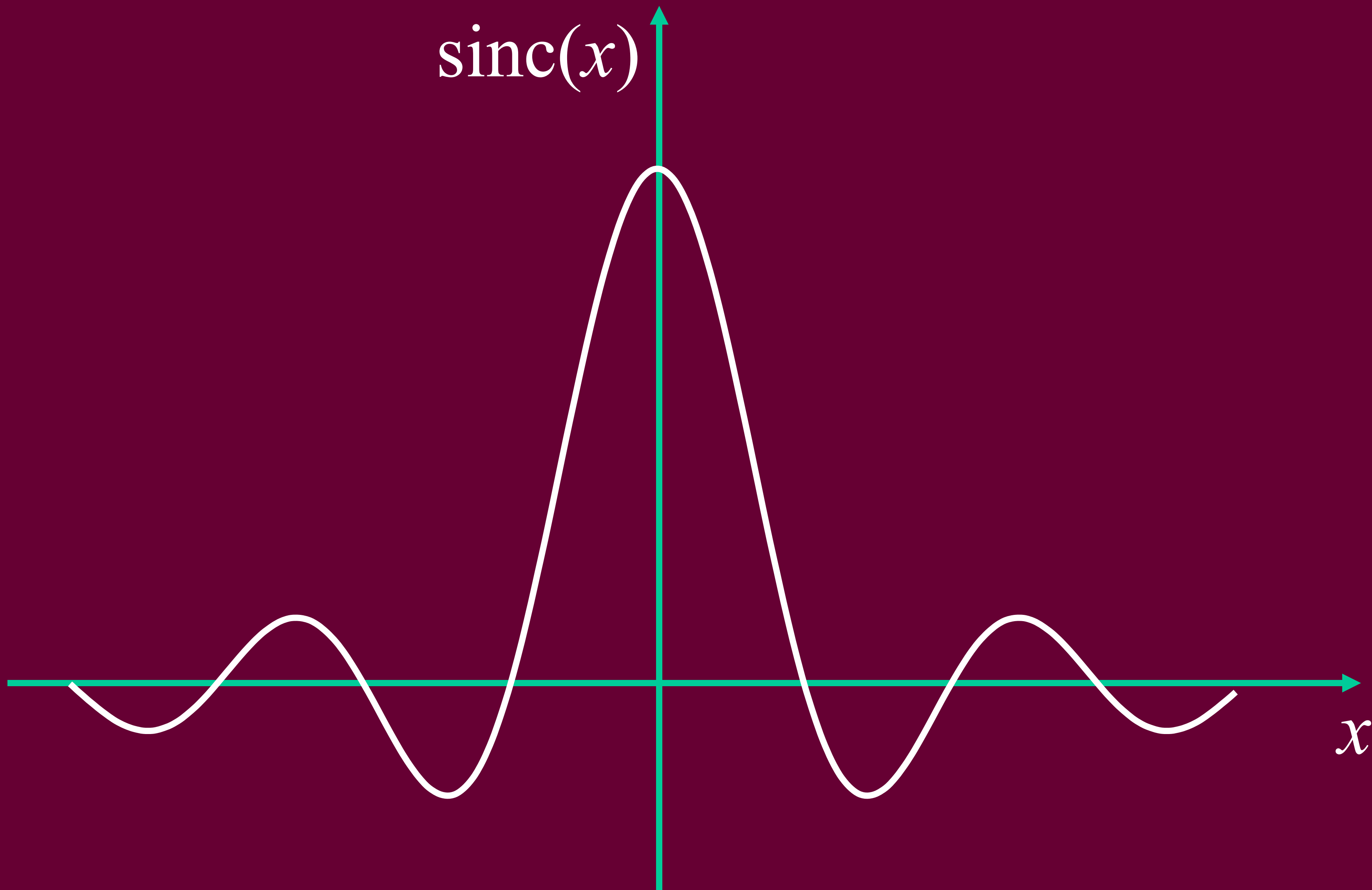
严格讲函数在$x=0$处是无定义的,但是因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

所以定义$\mathrm{sinc}(0)=1$,用不严格的形式就写作

$\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0}=1$,则函数在整个实轴连续

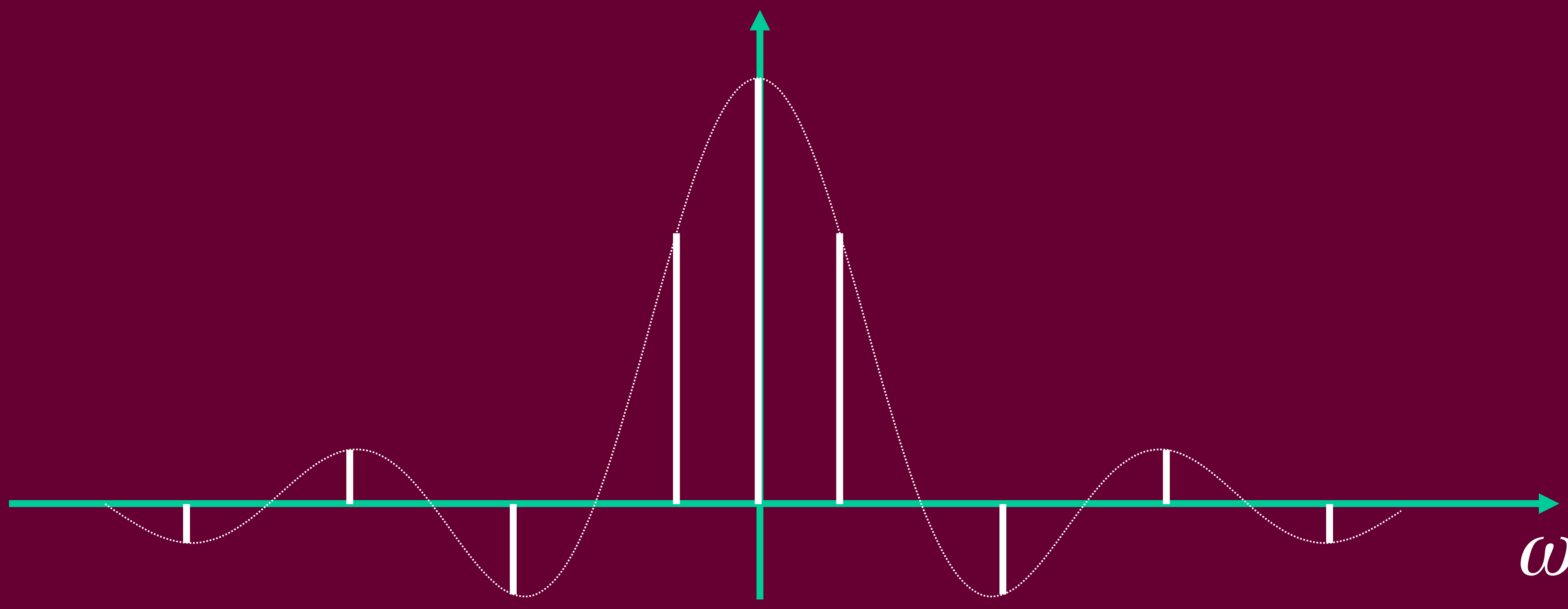
sinc 函数的图形：



前面计算出

$$c_n = \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(\omega_n)\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

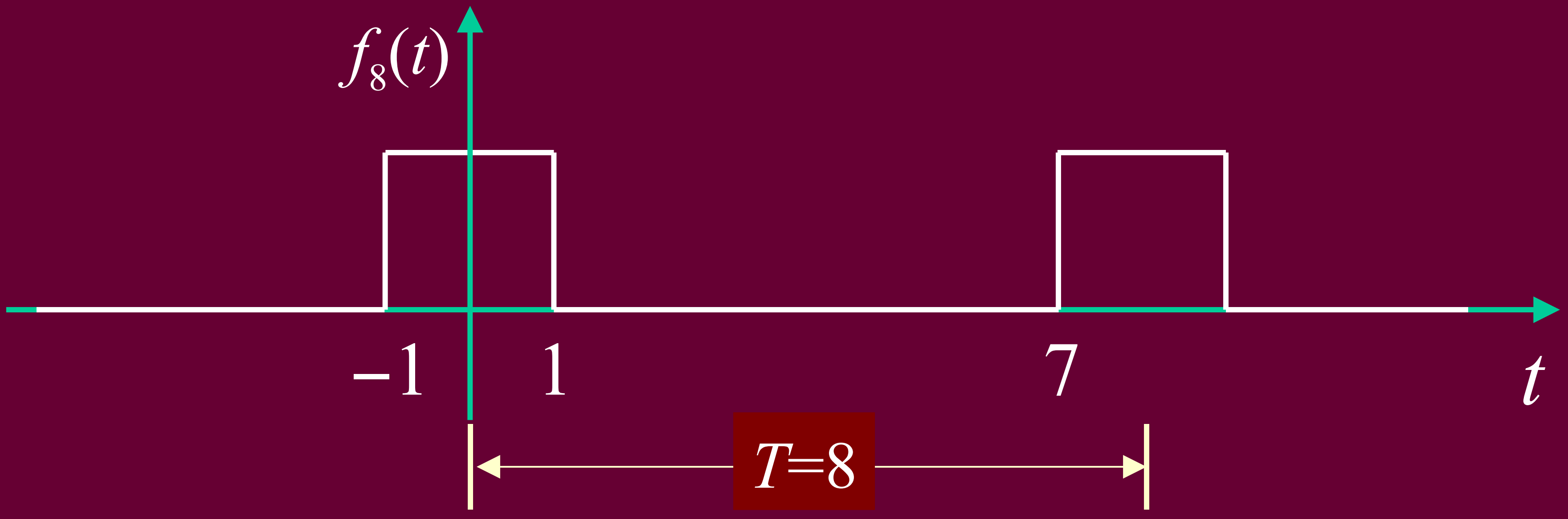
$$\omega_n = n\omega = n\frac{2\pi}{T} = \frac{n\pi}{2},$$ 可将 c_n 以竖线标在**频率图**上



现在将周期扩大一倍，令 T=8，以 $f(t)$ 为基础构造一周期为 8 的周期函数 $f_8(t)$

$$f_8(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+8n),$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4},\ \omega_n=n\omega=\frac{n\pi}{4}$$



则

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-j\omega_n t}dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} f_8(t)e^{-j\omega_n t}dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} e^{-j\omega_n t}dt$$

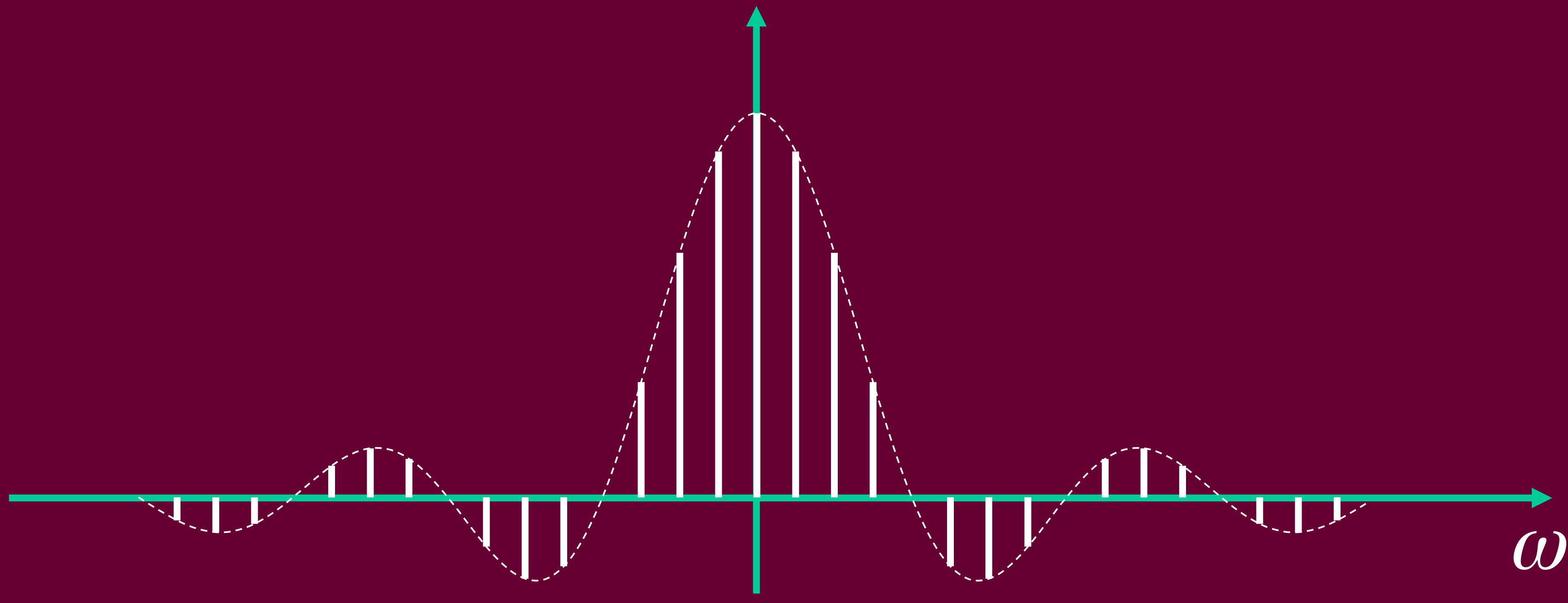
$$= \frac{1}{-8j\omega_n}e^{-j\omega_n t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{8j\omega_n}\left(e^{j\omega_n} - e^{-j\omega_n}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\omega_n}{\omega_n} = \frac{1}{4}\mathrm{sinc}(\omega_n)\ (n = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

则在 T=8 时，

$$c_n = \frac{1}{4}\mathrm{sinc}(\omega_n)\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

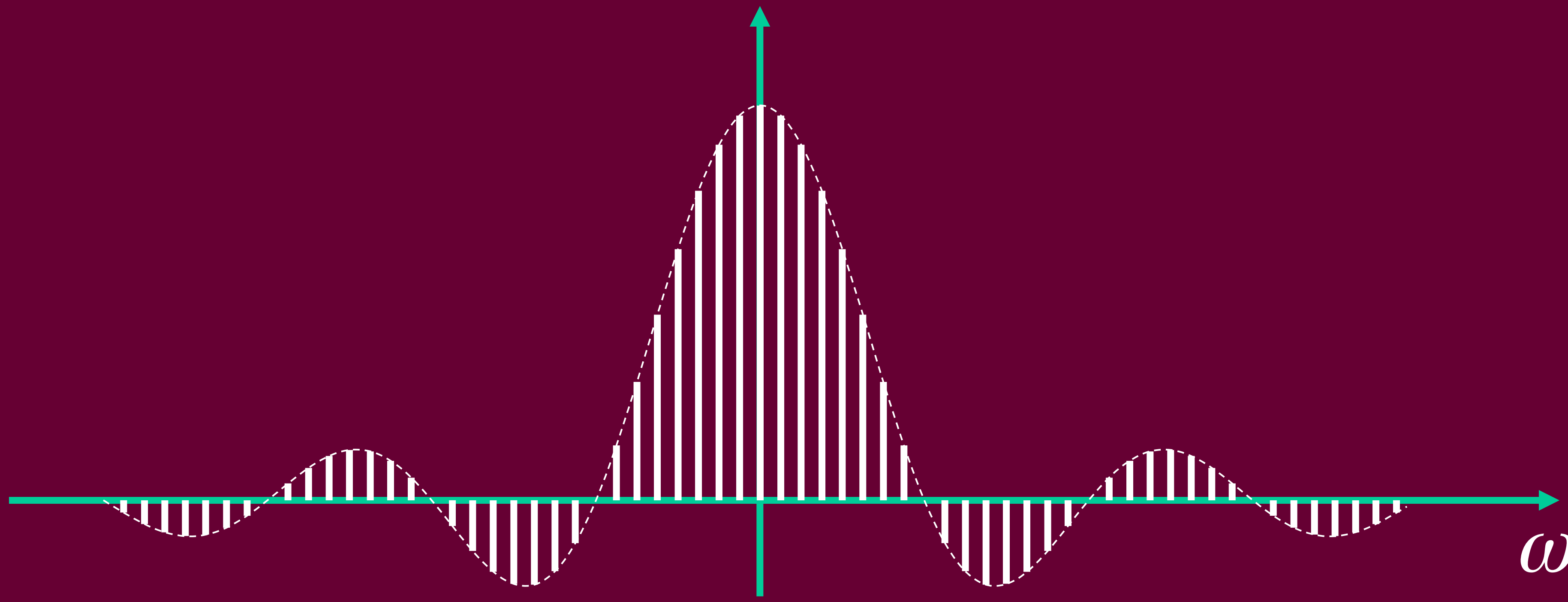
$\omega_n = n\omega = n\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{n\pi}{4}$,再将$c_n$以竖线标在频率图上



如果再将周期增加一倍，令 T=16, 可计算出

$$c_n = \frac{1}{8}\operatorname{sinc}(\omega_n)\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\omega_n = n\omega = n\frac{2\pi}{16} = \frac{n\pi}{8},$$ 再将 c_n 以竖线标在频率图上



一般地，对于周期 T

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-j\omega_n t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} e^{-j\omega_n t}dt$$

$$= \frac{1}{-Tj\omega_n} e^{-j\omega_n t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{Tj\omega_n}\left(e^{j\omega_n} - e^{-j\omega_n}\right)$$

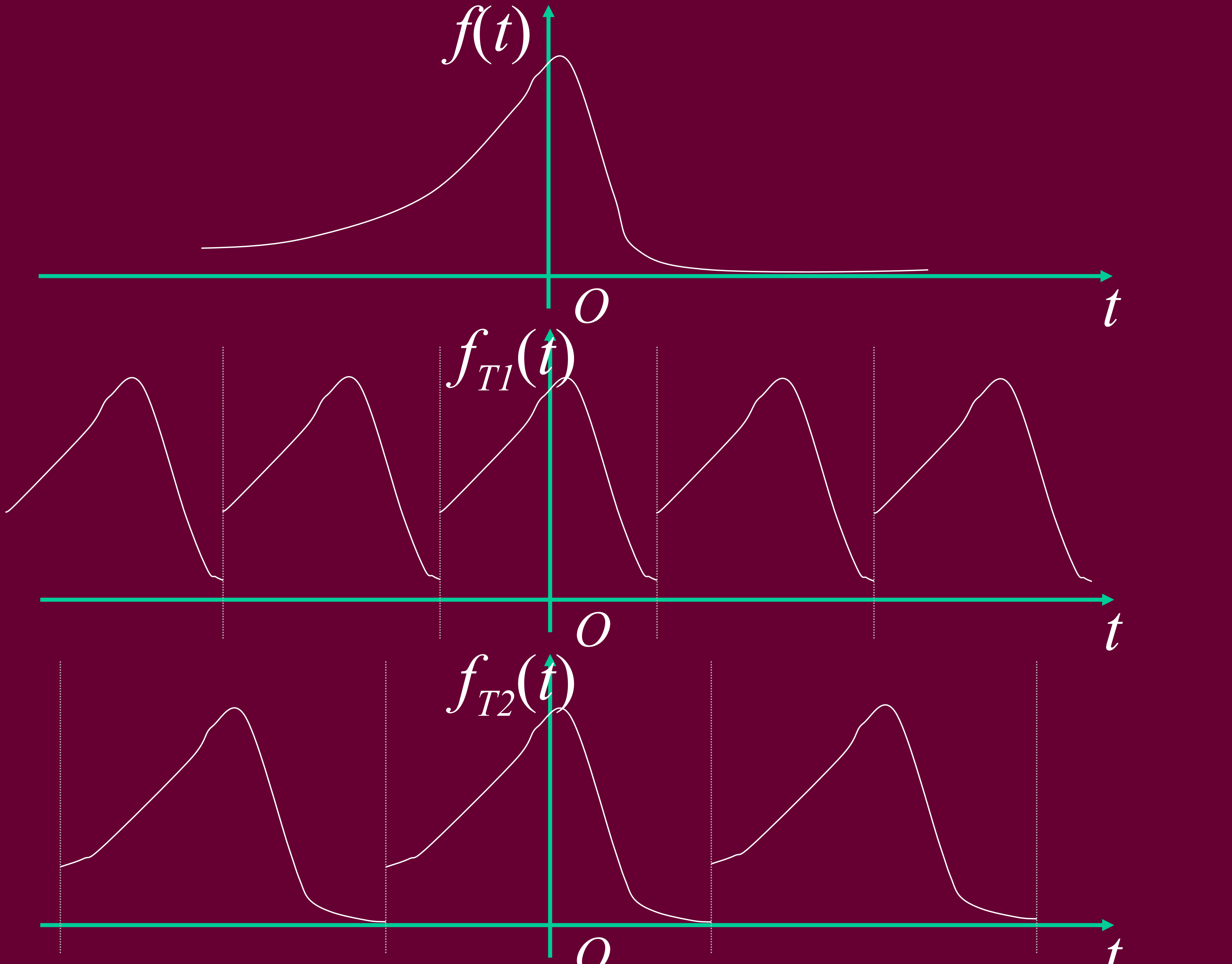
$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{\sin\omega_n}{\omega_n} = \frac{2}{T}\mathrm{sinc}(\omega_n)\ (n = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当周期 T 越来越大时，各个频率的正弦波的频率间隔越来越小，而它们的强度在各个频率的轮廓则总是 sinc 函数的形状，因此，如果将方波函数 $f(t)$ 看作是周期无穷大的周期函数，则它也可以看作是由无穷多个无穷小的正弦波构成，将那个频率上的轮廓即 sinc 函数的形状看作是 $f(t)$ 的各个频率成份上的分布，称作 $f(t)$ 的傅里叶变换．

对任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T\to\infty$ 时转化而来的.

作周期为 T 的函数 $f_T(t)$, 使其在 $[-T/2,T/2]$ 之内等于 $f(t)$, 在 $[-T/2,T/2]$ 之外按周期 T 延拓到整个数轴上，则 T 越大，$f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围也越大，这就说明当 $T\to\infty$ 时，周期函数 $f_T(t)$ 便可转化为 $f(t)$, 即有

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t) = f(t)$$



f(t)
O
t
fT1(t)
O
t
fT2(t)
O
t

由公式

$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{\mathrm{j}\omega_n t}$$

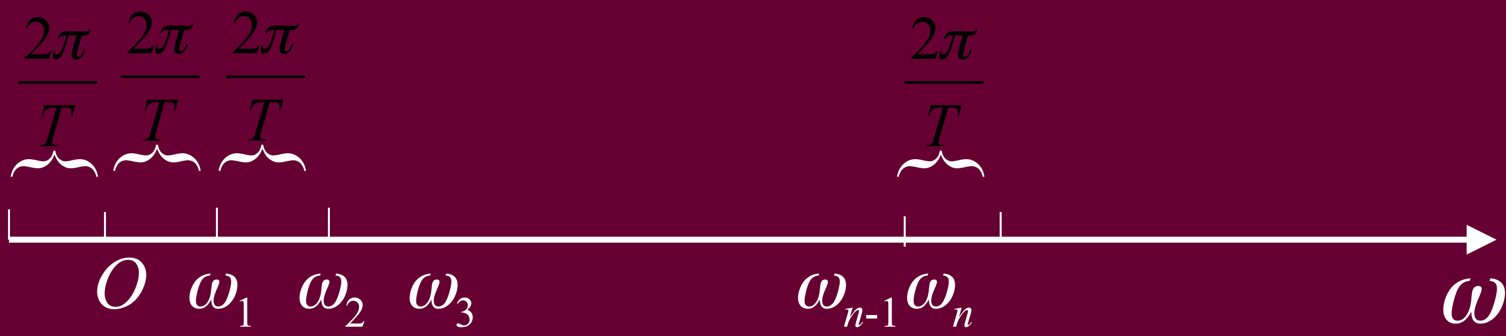
可知

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{\mathrm{j}\omega_n t}$$

当n取一切整数时,ω_n所对应的点便均匀分布在整个数轴上,两个相邻的点的距离为

$$\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{2\pi}{T},\text{或}T=\frac{2\pi}{\Delta\omega_n},$$

如图



$f(t)$又可写为

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{\mathrm{j}\omega_n t}$$

$$=\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{\mathrm{j}\omega_n t}\Delta\omega_n$$

令 $\Phi_T(\omega_n) = \dfrac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,d\tau\right]e^{j\omega_n t}$

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega_n\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,d\tau\right]e^{j\omega_n t}\Delta\omega_n$$

$$= \lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi_T(\omega_n)\Delta\omega_n$$

当$\Delta\omega_n \to 0$，即$T \to +\infty$，$\Phi_T(\omega_n) \to \Phi(\omega_n)$

$$\Phi(\omega_n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,d\tau\right]e^{j\omega_n t}$$

由$\Phi(\omega_n)=\dfrac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{\mathrm{j}\omega_n t}$

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi_T(\omega_n)\Delta\omega_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega_n)\,\mathrm{d}\,\omega_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega$$

最后得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

此公式称为函数$f(t)$的傅里叶积分公式，简称傅氏积分公式，

傅氏积分定理 若 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足条件：1, $f(t)$ 在任一有限区间上满足狄氏条件；2, $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积，则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right]e^{j\omega t}\,d\omega \quad (1.4)$$

成立，而左端的 $f(t)$ 在它的**间断点** t 处，应以

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

来代替.

在 $(-\infty, +\infty)$ 绝对可积是指的 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ 收敛

(1.4) 式也可以转化为三角形式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right.$$

$$\left.+j\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

因$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$是$\omega$的奇函数,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega \quad (1.5)$$

又考虑到积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

是ω的偶函数,

从

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega \quad (1.5)$$

可得

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega \quad (1.6)$$

傅里叶积分变换

1. 傅里叶变换的概念

我们知道，若函数 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件，则在 $f(t)$ 的连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \quad (1.7)$$

设 $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \quad (1.8)$$

则 $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \quad (1.9)$$

(1.8) 式叫做 $f(t)$ 的傅氏变换式，(1.9) 式为 $F(\omega)$ 的傅式逆变换式，$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 可相互转换，可记为

$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$ 和 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

还可以将 $f(t)$ 放在左端, $F(\omega)$ 放在右端，中间用双向箭头连接：

$$f(t) \quad \leftrightarrow \quad F(\omega)$$

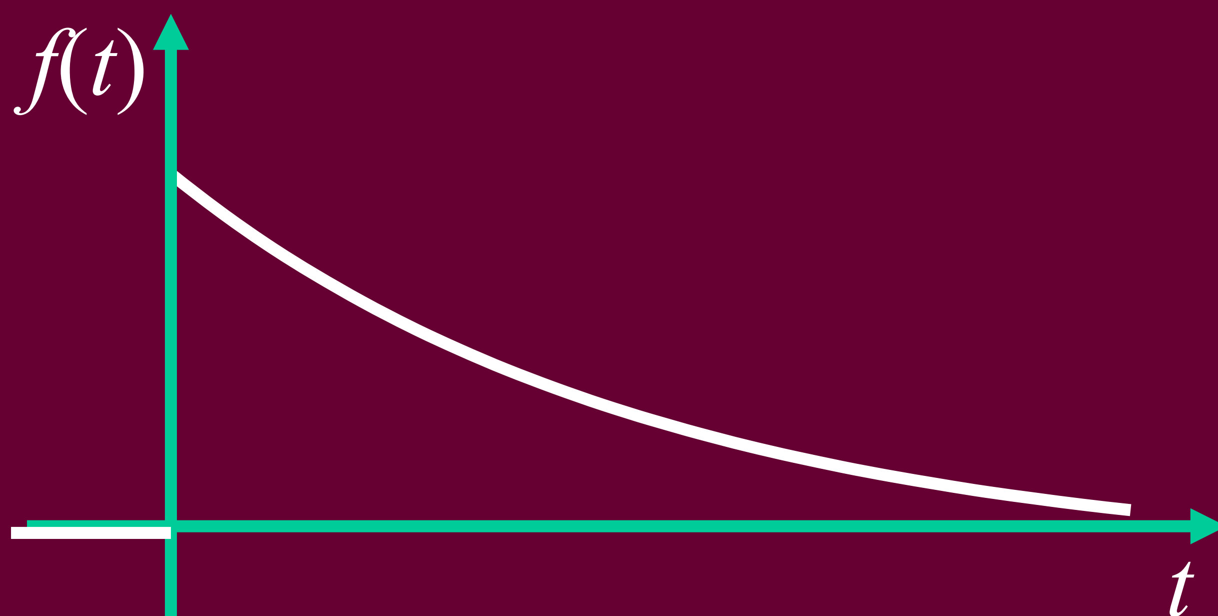
(1.8) 式右端的积分运算，叫做 $f(t)$ 的傅氏变换，同样, (1.9) 式右端的积分运算，叫做 $F(\omega)$ 的傅氏逆变换.

$F(\omega)$ 称作 $f(t)$ 的象函数,

$f(t)$ 称作 $F(\omega)$ 的象原函数.

可以说象函数 $F(\omega)$ 和象原函数 $f(t)$ 构成了一个傅氏变换对.

例1 求函数$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t \quad 0\end{cases}$的傅氏变换及其积分表达式,其中$\beta>0$.这个$f(t)$叫做指数衰减函数,是工程技术中常碰到的一个函数.



根据 (1.8) 式，有

$$F(\omega)=\mathscr{F}\,[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}=\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^{2}+\omega^{2}}$$

这就是指数衰减函数的傅氏变换 .

根据 (1.9) 式，有

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

因此 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0 & t<0\\ \pi/2 & t=0\\ \pi\,\mathrm{e}^{-\beta t} & t>0\end{cases}$

例2 求函数$f(t)=A\mathrm{e}^{-\beta t^2}$的傅氏变换及其积分表达式,其中$A,\beta>0$.这个函数叫做钟形脉冲函数,也是工程技术中常碰到的一个函数.

根据(1.8)式,有

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-\beta\left(t+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}\right)^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$$

因此有

$$A\mathrm{e}^{-\beta t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$$

如果令$\beta=1/2$，就有

$$A\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \leftrightarrow \sqrt{2\pi}A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

可见钟形函数的傅氏变换也是钟形函数

求钟形脉冲函数的积分表达式，根据 (1.9) 式

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}(\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{A}{\sqrt{\pi\beta}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

因此

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{\sqrt{\pi\beta}}{A}f(t)=\sqrt{\pi\beta}\,e^{-\beta t^2}$$

2. 单位脉冲函数及其傅氏变换

在物理和工程技术中，常常会碰到单位脉冲函数．因为有许多物理现象具有脉冲性质，如在电学中，要研究线性电路受具有脉冲性质的电势作用后产生的电流；在力学中，要研究机械系统受冲击力作用后的运动情况等．研究此类问题就会产生我们要介绍的单位脉冲函数．

在原来电流为零的电路中，某一瞬时(设为t=0)进入一单位电量的脉冲，现在要确定电路上的电流 $i(t)$. 以 $q(t)$ 表示上述电路中的电荷函数，则

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0;\\ 1, & t=0.\end{cases}$$

由于电流强度是电荷函数对时间的变化率，即

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}\,q(t)}{\mathrm{d}\,t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$$

所以，当 $t\neq 0$ 时，$i(t)=0$, 由于 $q(t)$ 是不连续的，从而在普通导数意义下，$q(t)$ 在这一点是不能求导数的．

如果我们形式地计算这个导数，则得

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)=\infty$$

这表明在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够表示这样的电流强度．为了确定这样的电流强度，引进一称为狄拉克 (Dirac) 的函数，简单记成δ- 函数．有了这种函数，对于许多集中于一点或一瞬时的量，例如点电荷，点热源，集中于一点的质量及脉冲技术中的非常窄的脉冲等，就能够象处理连续分布的量那样，以统一的方式加以解决．

对于在 $(-\infty,\infty)$ 上定义的所有可积函数的集合，也可以构成一线性空间，进一步地在上面定义内积，就可以构成一欧氏空间，两个函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的内积可以定义为：

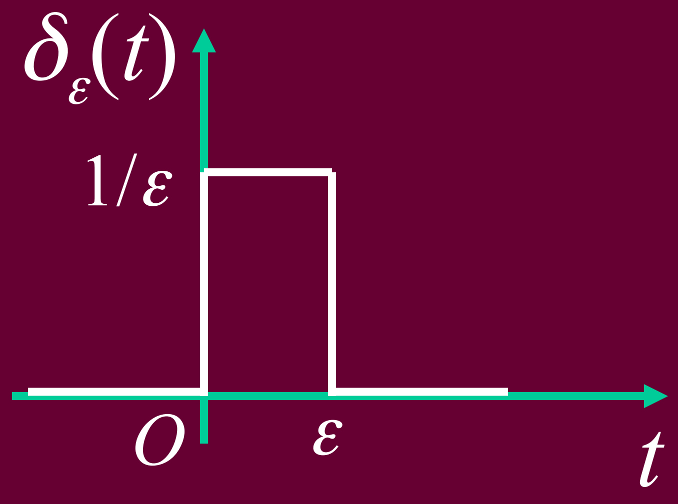
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

对于给定的 $f(t)$，我们希望找到一个函数和它的内积能够正好等于 $f(0)$. 如果 $f(t)$ 在 0 处连续，我们可以用一非常小的正数 $\varepsilon>0$，计算 $f(t)$ 在区间 $[0,\varepsilon]$ 上的平均值，则这个平均值近似等于 $f(0)$:

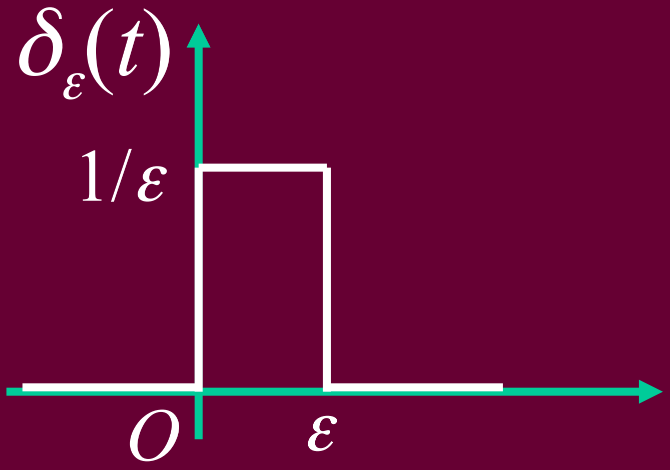
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(0)$$

而实际上这相当于 $f(t)$ 和一称作 $\delta_\varepsilon(t)$ 的函数内积：

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}1/\varepsilon & 0\le t\le\varepsilon\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



称$\delta_\varepsilon(t)$的极限为δ-函数，记为$\delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) f(t) \,\mathrm{d}t = f(0)$$

如 $f(t)$ 在 0 点连续，则在 0 附近的非常小的一个领域可以看作是常数 $c=f(0)$. 因此，任给一个在 $(-\infty,\infty)$ 上积分值为 1 的函数 $g(t)$

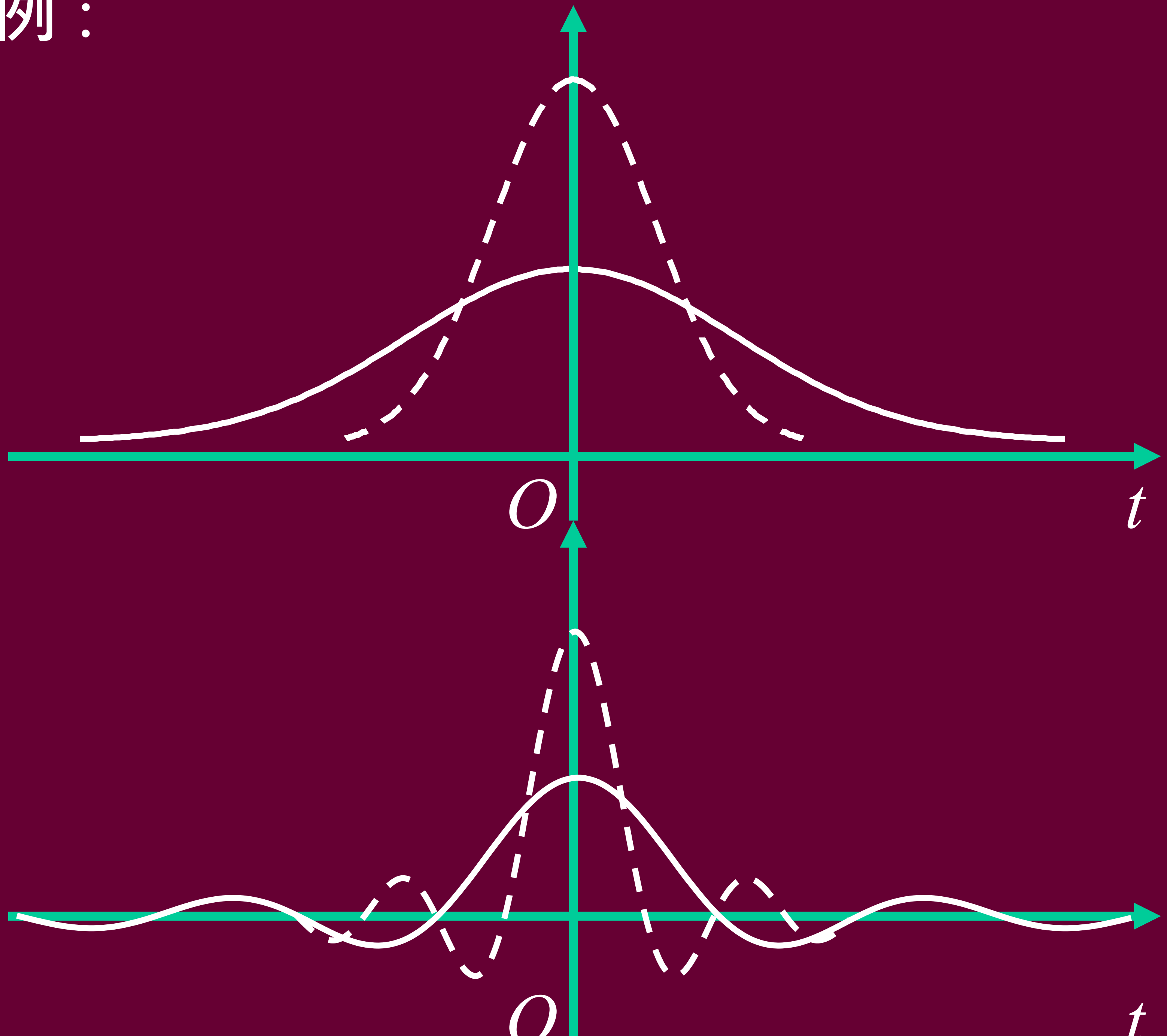
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1, \text{则} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}t = 1$$

$$\text{令} \delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \text{则} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

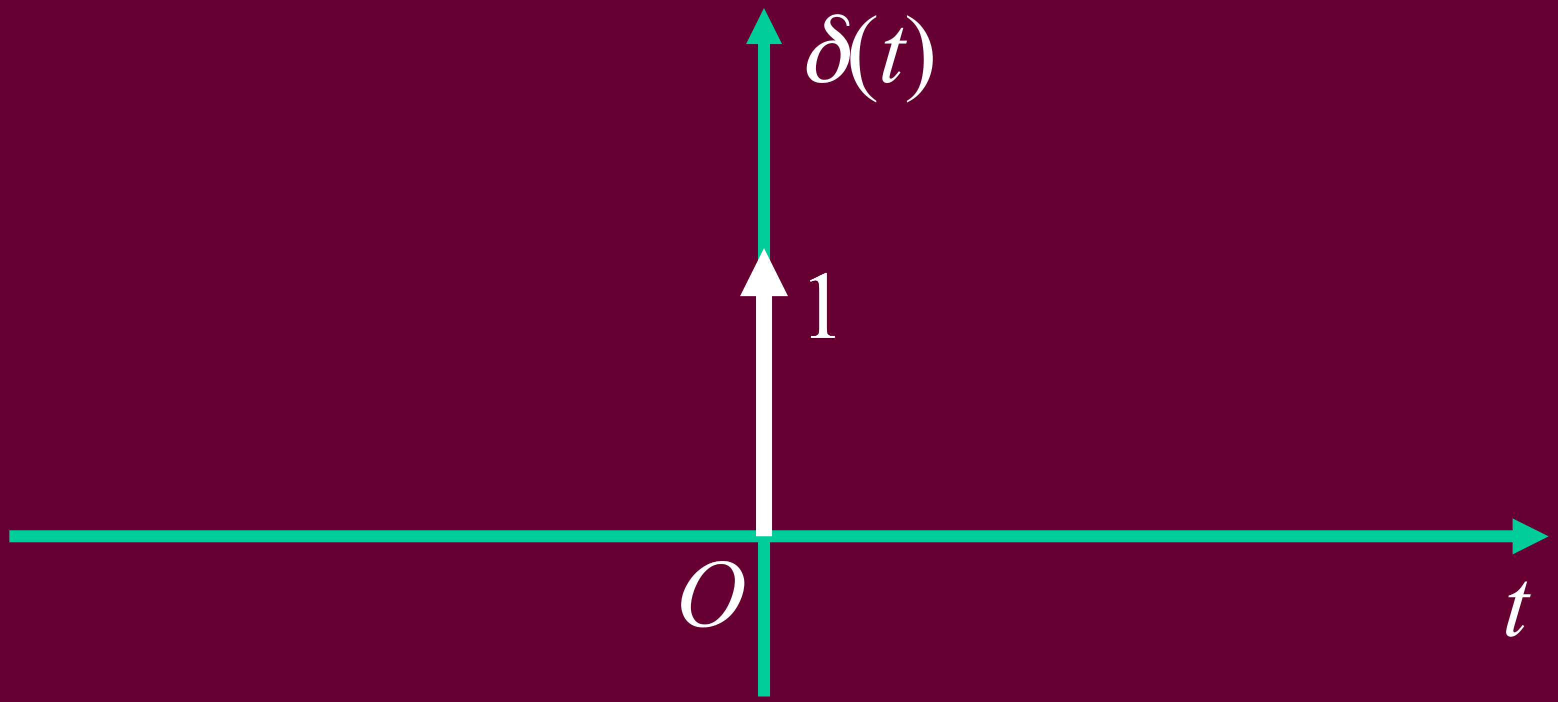
当ε非常小,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) f(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) c\,\mathrm{d}t = c = f(0)$$

图例：



工程上将δ-函数称为单位脉冲函数，可将δ-函数用一个长度等于1的有向线段表示，这个线段的长度表示δ-函数的积分值，称为δ-函数的强度.



δ- 函数有性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

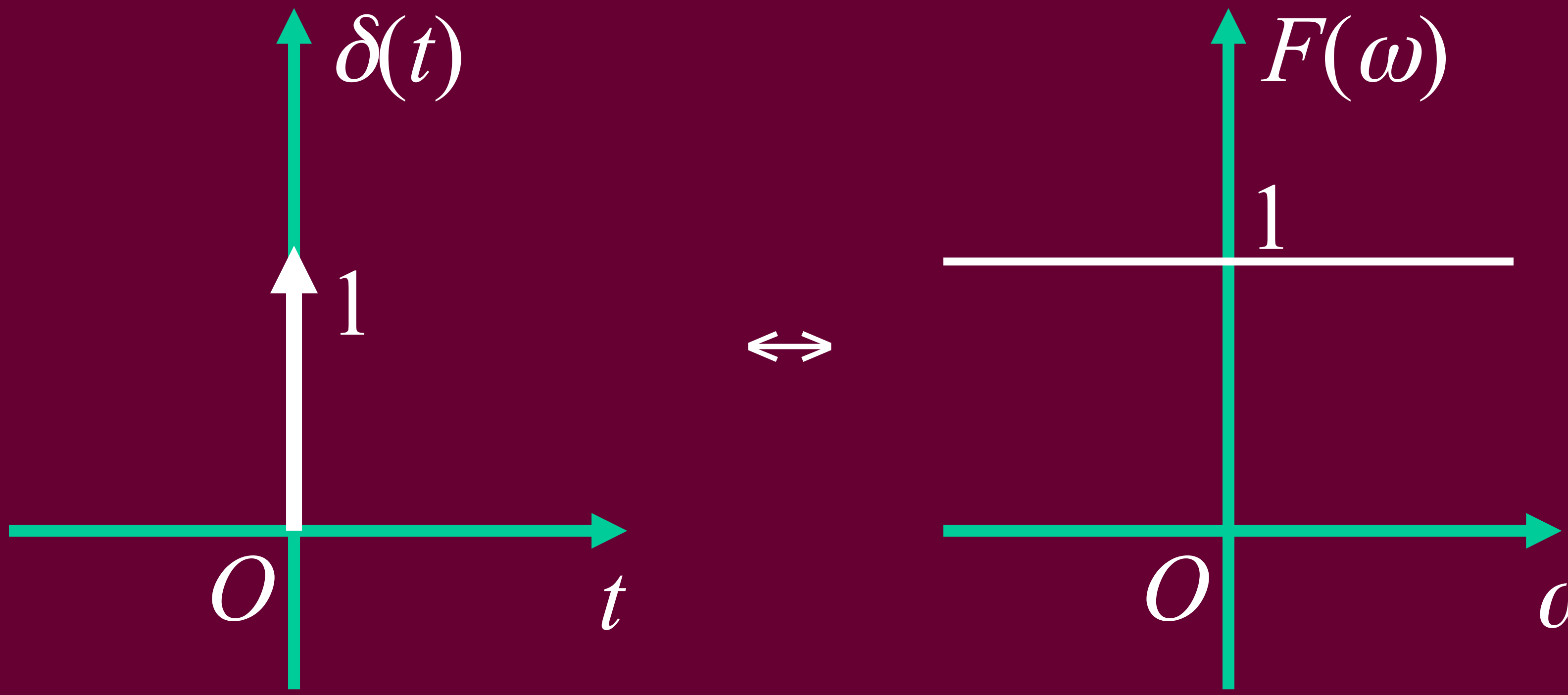
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

及 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$

δ- 函数的傅氏变换为：

$$F(\omega) = \mathcal{F}\,[\delta(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$



可见，单位脉冲函数$\delta(t)$与常数 1 构成了一傅氏变换对．同理，$\delta(t-t_0)$和$e^{-j\omega t_0}$亦构成了一个傅氏变换对．

在物理学和工程技术中，有许多重要函数不满足傅氏积分定理中的绝对可积条件，即不满足条件

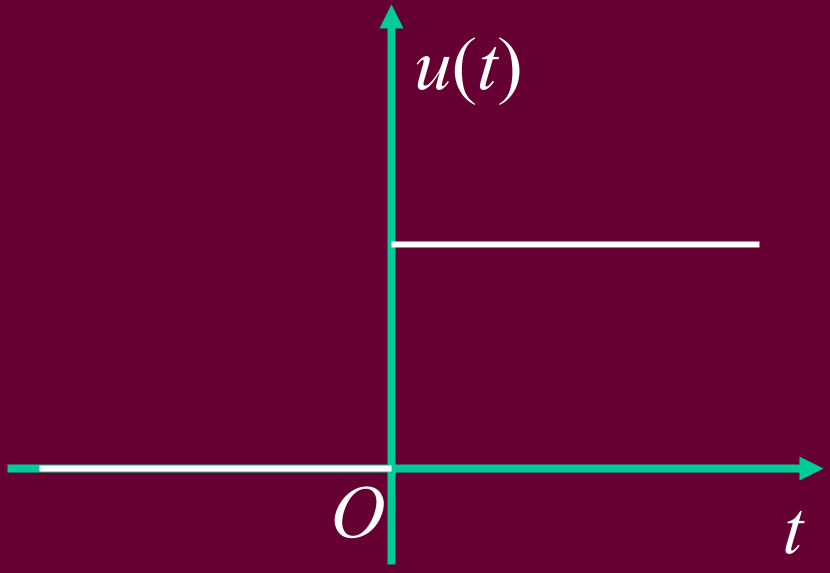
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

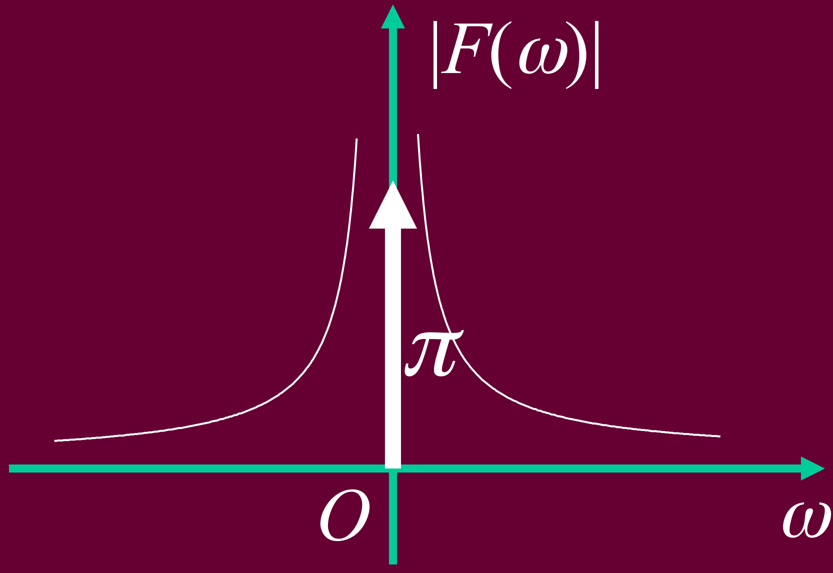
例如常数，符号函数，单位阶跃函数以及正，余弦函数等，然而它们的广义傅氏变换也是存在的，利用单位脉冲函数及其傅氏变换就可以求出它们的傅氏变换．所谓广义是相对于古典意义而言的，在广义意义下，同样可以说，象函数 F(w) 和象原函数 f(t) 亦构成一个傅氏变换对．

例3 证明单位阶跃函数$u(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1 & t>0\end{cases}$

的傅氏变换为

$$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega).$$





事实上,若$F(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$,

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]e^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

因为$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}$,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & t<0\\ 0, & t=0\\ \dfrac{\pi}{2}, & t>0\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

若 $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ 时，由傅氏逆变换可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=1$$

所以 1 和 2pd(w) 也构成傅氏变换对 .

同理，如 F(w)=2pd(w-w0)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$$

即 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 和 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 也构成了一个傅氏变换对

由上面两个函数的变换可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

例 4 求正弦函数 f(t)=sinw0t 的傅氏变换

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

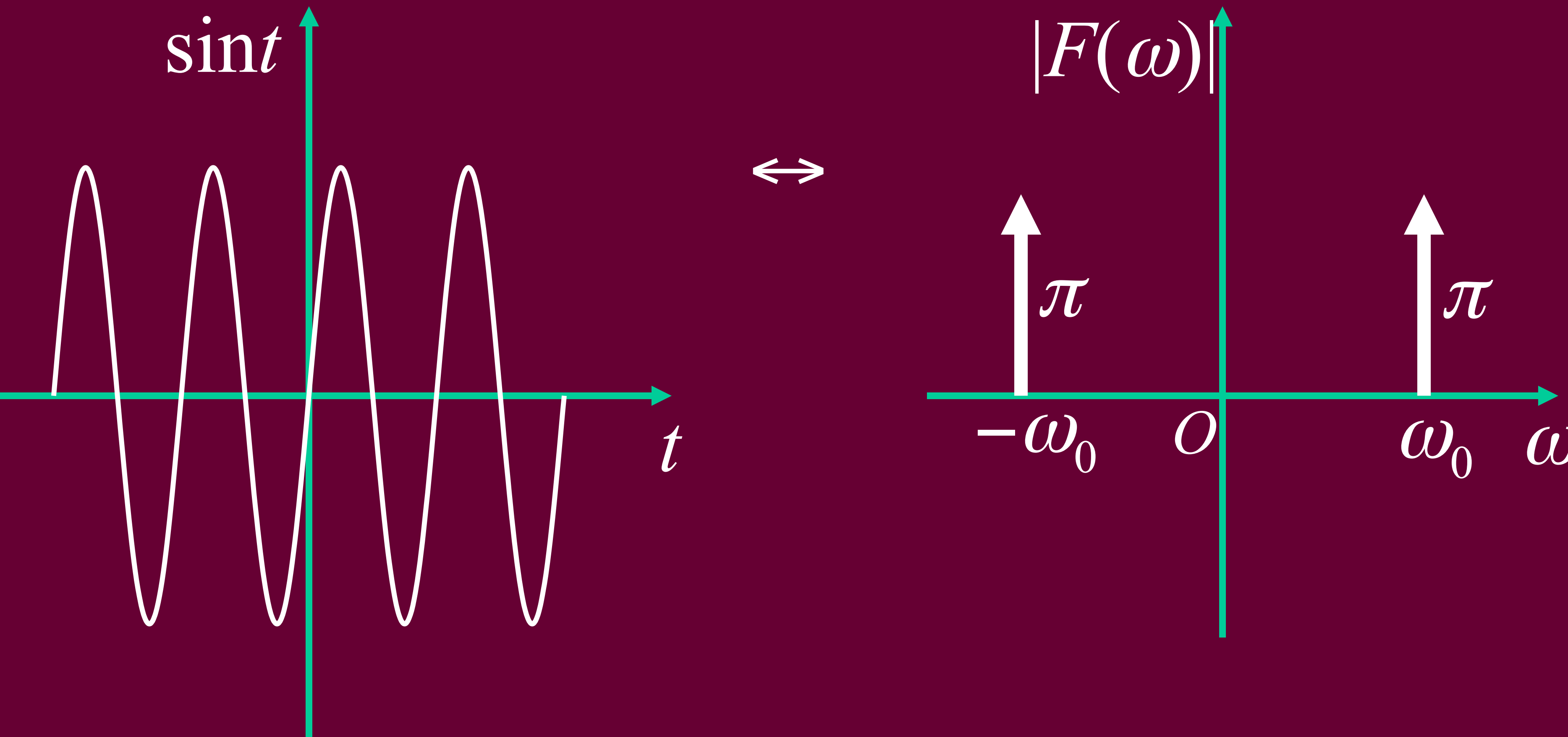
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

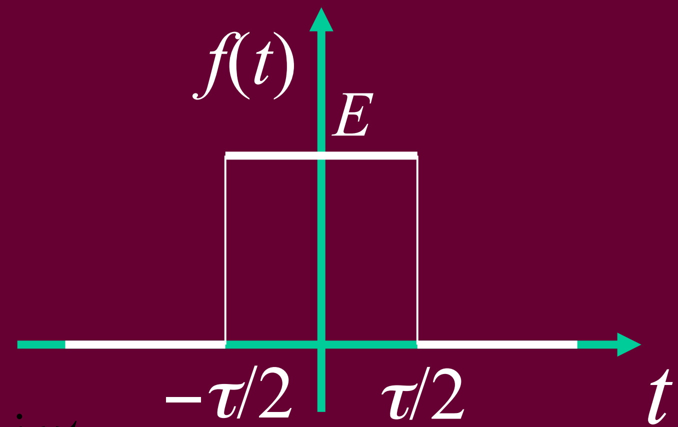
$$=\mathrm{j}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

如图所示：



在频谱分析中，傅氏变换 $F(w)$ 又称为 $f(t)$ 的频谱函数，而它的模 $|F(w)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱 (亦简称为频谱). 由于 w 是连续变化的，我们称之为连续频谱，对一个时间函数作傅氏变换，就是求这个时间函数的频谱.

例 5 作如图所示的单个矩形脉冲的频谱图



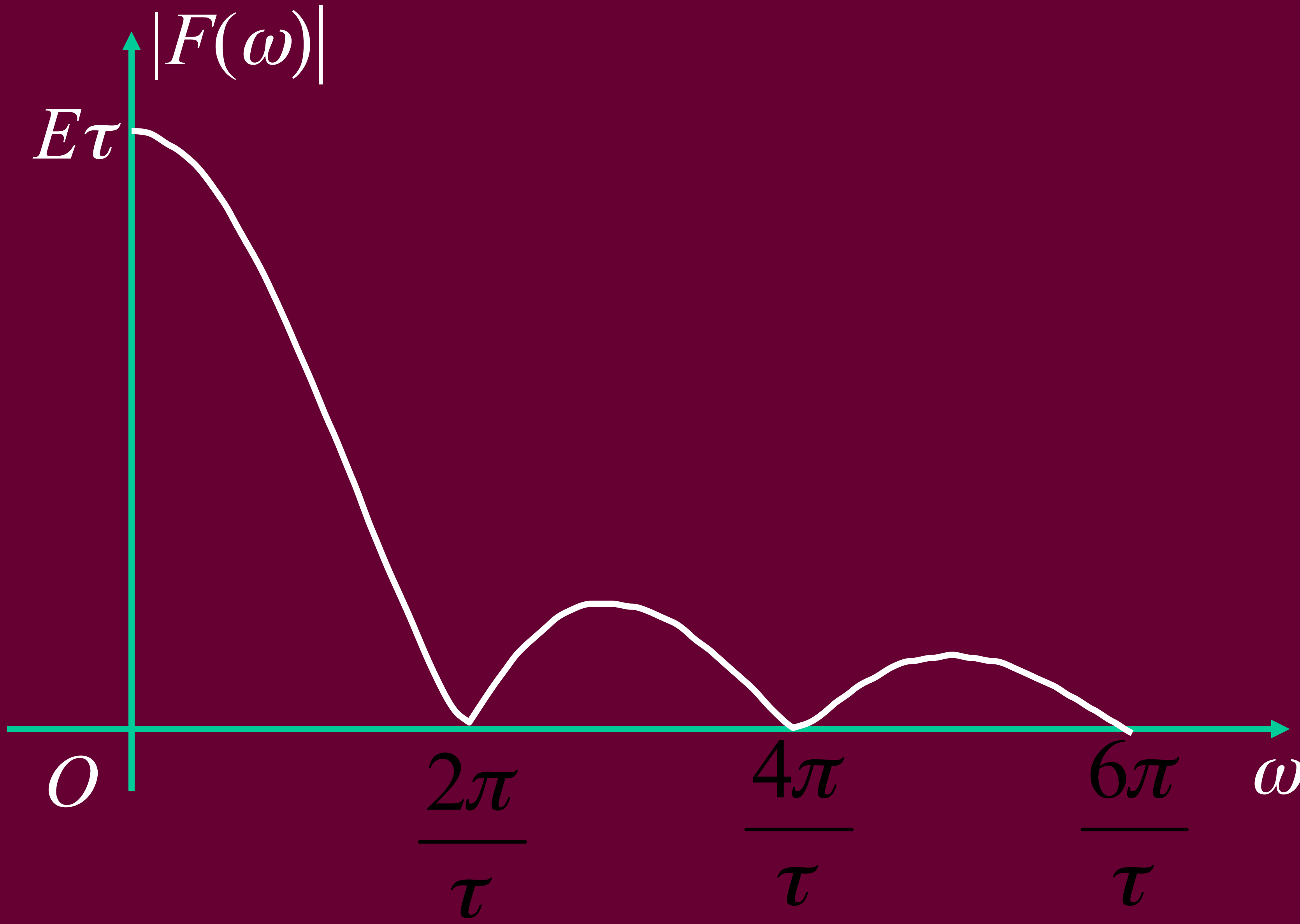
单个矩形脉冲的频谱函数为：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=E\tau\,\mathrm{sinc}\frac{\omega\tau}{2}$$

则振幅频谱 $|F(\omega)|=E\tau\left|\mathrm{sinc}\frac{\omega\tau}{2}\right|$

矩形脉冲的频谱图为



振幅函数 |F(w)| 是角频率 w 的偶函数，即

$$|F(\omega)|=|F(-\omega)|$$

因为, $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

所以

$$|F(\omega)|=\sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right)^2+\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

显然有 $|F(\omega)|=|F(-\omega)|$.

我们定义

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}$$

为 f(t) 的相角频谱．显然，相角频谱 j(w) 是 w 的奇函数，即 j(w)=-j(-w).

3. 傅氏变换的性质

以下假定所讨论的函数满足 Fourier 积分定理的条件.

(1) 线性性质 设 a, b 是常数 $F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]$, 则

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$$

$$=\alpha\mathcal{F}[f_1(t)]+\beta\mathcal{F}[f_2(t)].$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)]+\beta\mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)].$$

(2) 对称性质 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则

$$\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega).$$

证明 由 Fourier 逆变换有 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.$

于是 $f(-t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}\mathrm{d}\omega.$ 将 t 与ω互换，则

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t,$$

所以 $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega).$

特别地，若 $f(t)$ 是偶函数，则$\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(\omega).$

(3) **相似性质** 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$ (其中 $a\neq 0$ 为常数).

证明 由 Fourier 变换的定义，

$$\mathcal{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t.$$

令 $x=at$,则 $\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\mathrm{d}x$. 于是当 $a>0$ 时，

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right);$$

当 $a<0$ 时，

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

综上所证，即得 $\mathcal{F}[f(at)] = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right).$

由相似性质可直接得到

(4) 翻转性质　设 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$，则

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega).$$

(5) 时移性质 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则

$$\mathcal{F}[f(t\pm t_0)]=e^{\pm j\omega t_0}F(\omega)$$（其中 t_0 为常数）.

证明 由 Fourier 变换的定义，

$$\mathcal{F}[f(t\pm t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t\pm t_0)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t.$$

令 $x=t\pm t_0$，代入上式得

$$\mathcal{F}[f(t\pm t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega(x\mp t_0)}\mathrm{d}x$$

$$=e^{\pm j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega x}\mathrm{d}x=e^{\pm j\omega t_0}F(\omega).$$

利用 时移性质和 相似性质 ，易见

$$\mathcal{F}[f(at-b)]=\frac{1}{|a|}e^{-j\frac{b}{a}\omega}F\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

其中 a, b 为常数，并且$a\neq 0.$ 事实上，

$$\mathcal{F}[f(at-b)]=\mathcal{F}\left[f\left(a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right)\right]$$

$$=e^{-j\frac{b}{a}\omega}\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}e^{-j\frac{b}{a}\omega}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

(6) 频 (位) 移性质 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则

$$\mathcal{F}\left[f(t)e^{\pm j\omega_0 t}\right]=F(\omega\mp\omega_0)$$（其中ω_0为常数）.

证明 由 Fourier 变换的定义，

$$\mathcal{F}\left[f(t)e^{\pm j\omega_0 t}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\pm j\omega_0 t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j(\omega\mp\omega_0)t}\mathrm{d}t=F(\omega\mp\omega_0).$$

(7) 微分性质 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，并且 $f^{(n)}(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在 (n 为正整数). 如果当 $t\to\pm\infty$ 时，$f^{(k)}(t)\to 0\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，则

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(j\omega)^n F(\omega).$$

证明 只证明 $n=1$ 的情形，类推可得高阶情形.

$$\mathcal{F}[f'(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=f(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+j\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=j\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=j\omega F(\omega).$$

上面是关于时域的微分性质．类似地也有关于频域的微分性质：

设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，并且 $F^{(n)}(\omega)$ 在$(-\infty,+\infty)$上存在 (n 为正整数). 如果当$\omega\to\pm\infty$ 时，

$$F^{(k)}(\omega)\to 0 \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

则

$$F^{(n)}(\omega)=(-j)^n\mathcal{F}\left[t^n f(t)\right]$$

例 6 设 $f(t)=\begin{cases} te^{-\beta t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ $(\beta>0)$，求$\mathcal{F}[f(t)]$.

解：令 $g(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$， 于是由例 8. 2. 2 可知

$$\mathcal{F}[g(t)]=\frac{1}{\beta+j\omega}.$$

所以

$$\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}[tg(t)]$$

$$=j\left(\frac{1}{\beta+j\omega}\right)'=\frac{1}{(\beta+j\omega)^2}.$$

(8) 积分性质 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，并且 $F(0)=0$.

如果 $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$，则

$$\mathcal{F}[g(t)]=\frac{1}{j\omega}F(\omega).$$

证明 因为 $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau=0$，并且

$$\lim_{t\to+\infty} g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i0\tau}\mathrm{d}\tau=F(0)=0,$$

所以根据 $g'(t)=f(t)$ 可知

$$\mathcal{F}[g(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{j\omega}g(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{j\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{j\omega}F(\omega).$$

(9) 卷积性质 设 $F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)],\ F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]$,

则 $\mathcal{F}[(f_1*f_2)(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega)$.

证明 由卷积和 Fourier 变换的定义，可得

$$\mathcal{F}[(f_1*f_2)(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}(f_1*f_2)(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(t-x)\mathrm{d}x\right]e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-x)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)F_2(\omega)e^{-j\omega x}\mathrm{d}x=F_2(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)e^{-j\omega x}\mathrm{d}x$$

$$=F_1(\omega)F_2(\omega).$$

同理 $\mathcal{F}[(f_1(t)f_2(t)] = \dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$

例 7 求 $\delta(\omega-2)$ 傅氏逆变换以及 $tu(t)$ 的傅氏变换 .

解： $F^{-1}[\delta(\omega-2)] = e^{j2t}F^{-1}[\delta(\omega)] = e^{j2t}\dfrac{1}{2\pi}$

$$F[tu(t)] = jF(-jtu(t)) = j\frac{d}{d\omega}F[u(t)]$$

$$= j\frac{d}{d\omega}[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)] = -\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$$

第七周周三作业

习题8　6（1）、7，　8