

自觉遵守考试规则，诚信考试，谢绝作弊

装订线内不得答题

北京科技大学 2015-2016 学年第一学期

高等数学 AI 模拟 (A) 试卷

院 (系) \_\_\_\_\_ 班级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 考试教室 \_\_\_\_\_

试卷卷面成绩						占课程考核成绩 70%	平时成绩占 30%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	小计			
得分								
评阅								

- 说明：1、要求正确的写出主要的计算或推倒过程，过程有错或只写答案者不得分；
- 2、考场、学院、班级、学号、姓名均需全写，不写全的试卷为废卷；
- 3、涂改学号以及姓名的试卷为废卷；
- 4、请在试卷上作答，在其它纸上解答一律无效。

得分

一、填空题

1. 下列各题可供选择的四种结果是：
- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充要条件 D. 无关条件
- (1) “ $f(x)$  在  $x_0$  处有定义”是“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在”的\_\_\_\_\_.
- (2) “ $f(x)$  在  $[a,b]$  上连续”是“ $f(x)$  在  $[a,b]$  上可积”的\_\_\_\_\_.
- (3) “ $f(x)$  在  $[a,b]$  上连续”是“ $f(x)$  在  $[a,b]$  上原函数存在”的\_\_\_\_\_.

2. 曲线  $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$  的水平渐近线是\_\_\_\_\_. 垂直渐近线是\_\_\_\_\_.

3.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n+1)} =$  \_\_\_\_\_.

4. 若不恒为常数的函数  $f(x)$  满足  $f^2(x) = \int_0^x f(t)(t+1)dt$ ，则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

5. 试求下列极限：

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)} =$  \_\_\_\_\_.

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t e^{t^2-x^2} dt}{x^2} =$  \_\_\_\_\_.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [\arctan(n+1) - \arctan n] =$  \_\_\_\_\_.

得分

二、选择题

6.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$ ，则  $\int_0^2 f(x-1)dx =$  \_\_\_\_\_.

- A.  $\ln 2$     B.  $\ln(e+1) + \ln 2$     C.  $\ln(e+1)$     D.  $\ln(e+1) - \ln 2$

7. 设  $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^6 x dx$ ,  $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$

$P = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x^3 \sin^2 x - \cos^4 x) dx$ ，则有 \_\_\_\_\_.

- A.  $N < P < M$     B.  $M < P < N$     C.  $N < M < P$     D.  $P < M < N$

8. 已知  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$ ，则  $\int_0^\pi f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

- A. 2    B. -2    C.  $\pi$     D.  $-\pi$

9. 若  $[x_0, f(x_0)]$  为连续函数  $y = f(x)$  上凹弧和凸弧的分界点，则\_\_\_\_\_.

- A.  $f'(x_0)$  必为 0      B.  $[x_0, f(x_0)]$  必为拐点  
C.  $x_0$  必为  $f(x)$  极值点      D.  $x_0$  必为驻点

10. 下列广义积分收敛的是\_\_\_\_\_.

- A.  $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$     B.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$     C.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$     D.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

11. 积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^a} dx$  条件收敛的充要条件是\_\_\_\_\_.

- A.  $a \in (0, 1)$     B.  $a \in (0, \frac{3}{2})$     C.  $a \in (0, 2)$     D.  $a \in (0, 3)$

得分

### 三、解答题

12.  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{(|\cos x| + 2)^2} dx$  .

13.  $\begin{cases} x = 5t + 3 \\ t^2 + y - k \cos y = 1 \end{cases}$  , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$  .

14. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$  的收敛域和和函数。

学生讲师团

15

(1)  $\int \frac{1}{x^6(x+1)} dx$

(2)  $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

16. 设  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$

(1) 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$

(2) 证明: 若  $\forall \lambda > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛



得分

四、证明题

17. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .

(1) 若  $\int_a^b e^x f(x)dx = 0$ , 试证  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少有两个零点。

(2) 试证明:  $\exists \varepsilon \in (a, b)$ , 使得  $\int_a^\varepsilon f(x)dx = \varepsilon f(\varepsilon)$

18. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的二阶导, 且  $f'(a) = f'(b)$ .

试证明:  $\exists \varepsilon \in (a, b)$ , 使得  $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a) + \frac{1}{24}f''(\varepsilon)(b-a)^3$ .