第十讲
唯一决定分式线性映射的条件

§3 唯一决定分式线性映射的条件

- 1. 分式线性映射的存在唯一性
- 2. 举例

1. 分式线性映射的存在唯一性

虽然$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$含有a,b,c,d四个常数,实际只有三个是独立的.

所以,只需给定三个条件,就能决定一个分式线性映射,我们有:

定理 在z平面上任意给定三个相异的点z_1,z_2,z_3,在w平面上也任意给定三个相异的点w_1,w_2,w_3
$\Rightarrow$ 存在唯一的分式线性映射$f(z)$:

$$f: z_k \xrightarrow{f} w_k \,(k=1,2,3)$$

证明 设$w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$,将$z_k(k=1,2,3)$依次

$\rightarrow w_k(k=1,2,3)$, 即$w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}\quad(k=1,2,3)$

因而有
$$w-w_k=\frac{(z-z_k)(ad-bc)}{(cz+d)(cz_k+d)},(k=1,2)$$

$$w_3-w_k=\frac{(z_3-z_k)(ad-bc)}{(cz_3+d)(cz_k+d)},(k=1,2)$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{(z-z_1)\cancel{(ad-bc)}}{\cancel{(cz+d)}(cz_1+d)}\,\frac{\cancel{(cz+d)}(cz_2+d)}{(z-z_2)\cancel{(ad-bc)}}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\,\frac{(cz_2+d)}{(cz_1+d)}$$

同理 $$\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\frac{(cz_2+d)}{(cz_1+d)}$$

所求分式线性映射

故 $$\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\quad --(1)$$

① 式 (1) 是三对点所确定的唯一的一个映射。

② 点 $z_1, z_2, z_3 \xrightarrow{\text{由(1)}}$ 点 w_1，w_2，w_3

且等式两边依次同时变为 $0, \infty, 1$.

③ 式(1)左端的式子通常称为四 个点

w, w_1, w_2, w_3 的交比($cross-ratio$).

因此，式 (1) 说明分式线性映射具有保交比不变性。

由分式线性映射的存在唯一性定理知：

在已知圆周C和C'上分别取定三个不同

点以后,必存在分式线性映射F将$C \xrightarrow{F} C'$.

以下讨论这个映射会把 C 的内部映射成什么？

$\because$ C将z平面划分为两个区域：内部为d_1,外部为d_2，

它的象C'把w平面分为内部D_1,外部D_2,则可以断

定d_1的象$F(d_1)$必然是D_1, D_2中的一个,而d_2的象

$F(d_2)$是D_1和D_2中的另一个(不可能把 d_1 的部分映

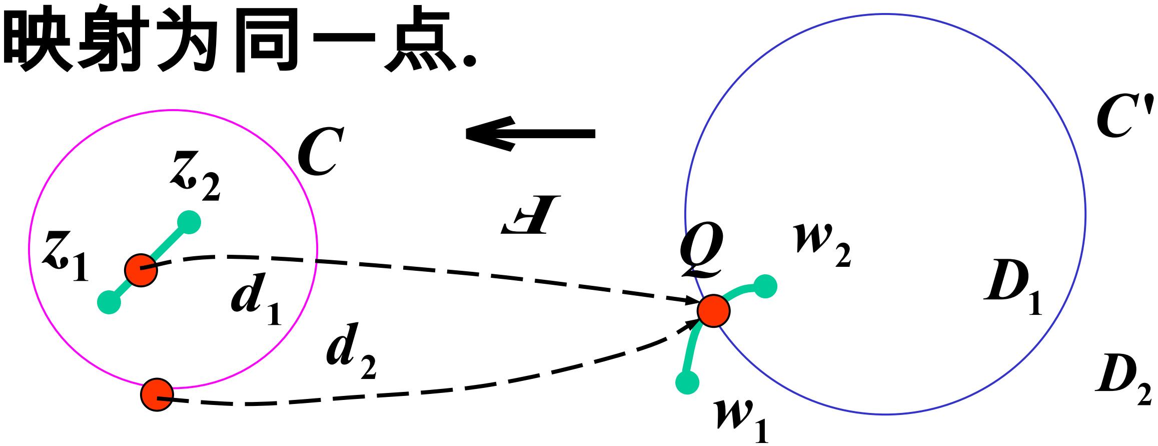
入 D_1 ，d_1 的另一部分映入 D_2).

事实上，

设$z_1, z_2 \in d_1$,若线段$\overline{z_1 z_2} \xrightarrow{F}$圆弧$\overset{\frown}{w_1 w_2}$(或直线段$\overline{w_1, w_2}$),

且$w_1 \in D_2, w_2 \in D_1 \Rightarrow$弧$\overset{\frown}{w_1 w_2}$必与$C'$交于一点$Q \in C'$,

它一定是C上某点的象,由假设Q又是$\overline{z_1 z_2}$上某一点的象,$\therefore$就有两个不同的点(一个在圆周C上,另一在线段$\overline{z_1 z_2}$上)被映射为同一点.



这与分式线性映射的一一对应性相矛盾!

由以上讨论给出确定对应区域的两个方法：

(1) $\forall z_0 \in d_1$, 若 $w_0 = F(z_0) \in D_1 \Rightarrow d_1 \xrightarrow{F} D_1$;

否则, 若 $w_0 = F(z_0) \in D_2 \Rightarrow d_1 \xrightarrow{F} D_2$.

(2) $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$, 则 $w_1 = F(z_1), w_2 = F(z_2)$,

$w_3 = F(z_3) \in C'$

若 C 依 $z_1 \to z_2 \to z_3$ 的绕向与 C' 依 $w_1 \to w_2 \to w_3$ 的绕向相同时, 那么 $d_1 \xrightarrow{\quad F \quad} D_1$, 反之 $d_1 \xrightarrow{\quad F \quad} D_2$

(沿曲线方向绕行时, 在观察者左方的区域)

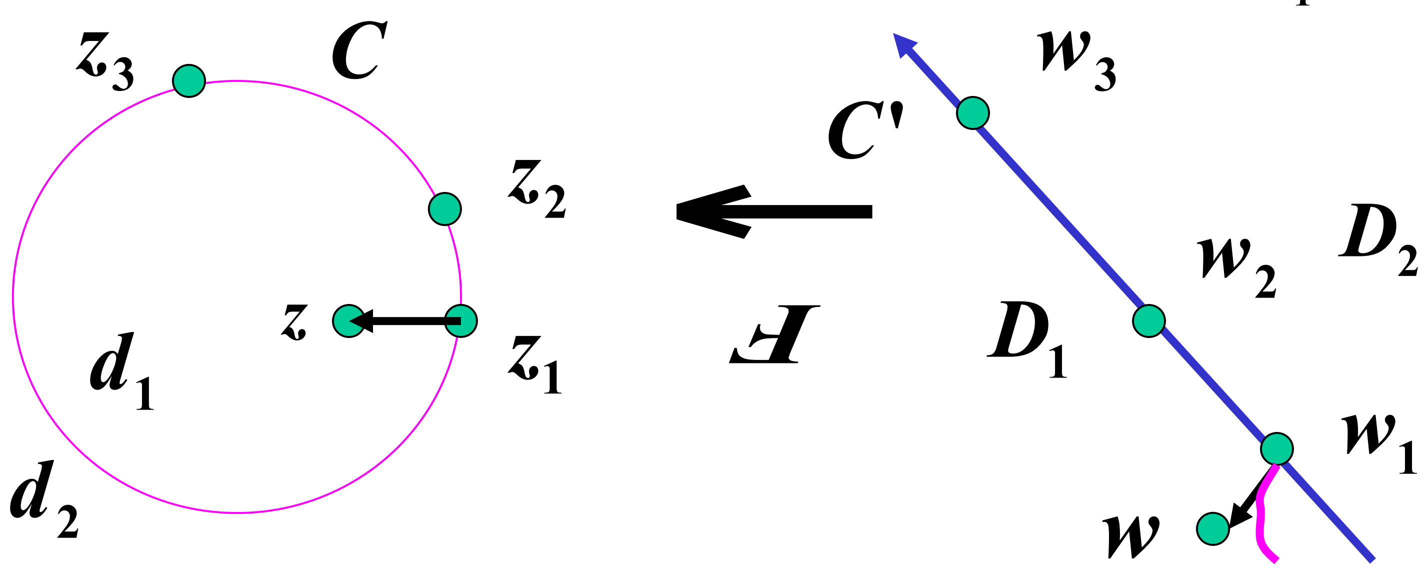
事实上 过z_1作C的一段法线$\overline{z_1z}$ $\partial\,\overline{z_1z}\subset d_1$,于是,

顺着$z_1\to z_2\to z_3$看,$\overline{z_1z}$在观察者的左方,象$F(\overline{z_1z})$

是过w_1,并与C'正交的一段圆弧(或者直线段)

由于在z_1的保角性,顺着w_1,w_2,w_3看,$F(\overline{z_1z})$也

应在观察者的左方,$\therefore\ d_1\xrightarrow{F}D_1$; 反之$d_1\xrightarrow{F}D_2$



由上一节和本节的讨论，还有以下结论：

(Ⅰ)当二圆周上没有点映射成无穷远点时,这二圆周的弧所围成的区域 $\xrightarrow{F}$ 二圆弧所围成的区域;

(Ⅱ)当二圆周上有一个点映射成∞点时,这二圆周的弧所围成的区域 $\xrightarrow{F}$ 一圆弧与一直线所围成的区域;

(Ⅲ)当二圆周交点中的一个 $\xrightarrow{F}$ ∞点时,这二圆周的弧所围成区域 $\xrightarrow{F}$ 角形区域.

分式线性映射具有保圆性与保对称性,在处理边界,由圆周,圆弧,直线,直线段所组成的区域的共形映射问题时,分式线性映射起着十分重要的作用.

2. 举例

例 1 求将 $\mathrm{Im}(z)>0 \to \mathrm{Im}(w)>0$ 的分式线性映射.

解 设 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $\quad \forall z_k \in R,(k=1,2,3)$, 即实轴上的点,

当 a,b,c,d 均为实数时, $w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$ 也为实数,

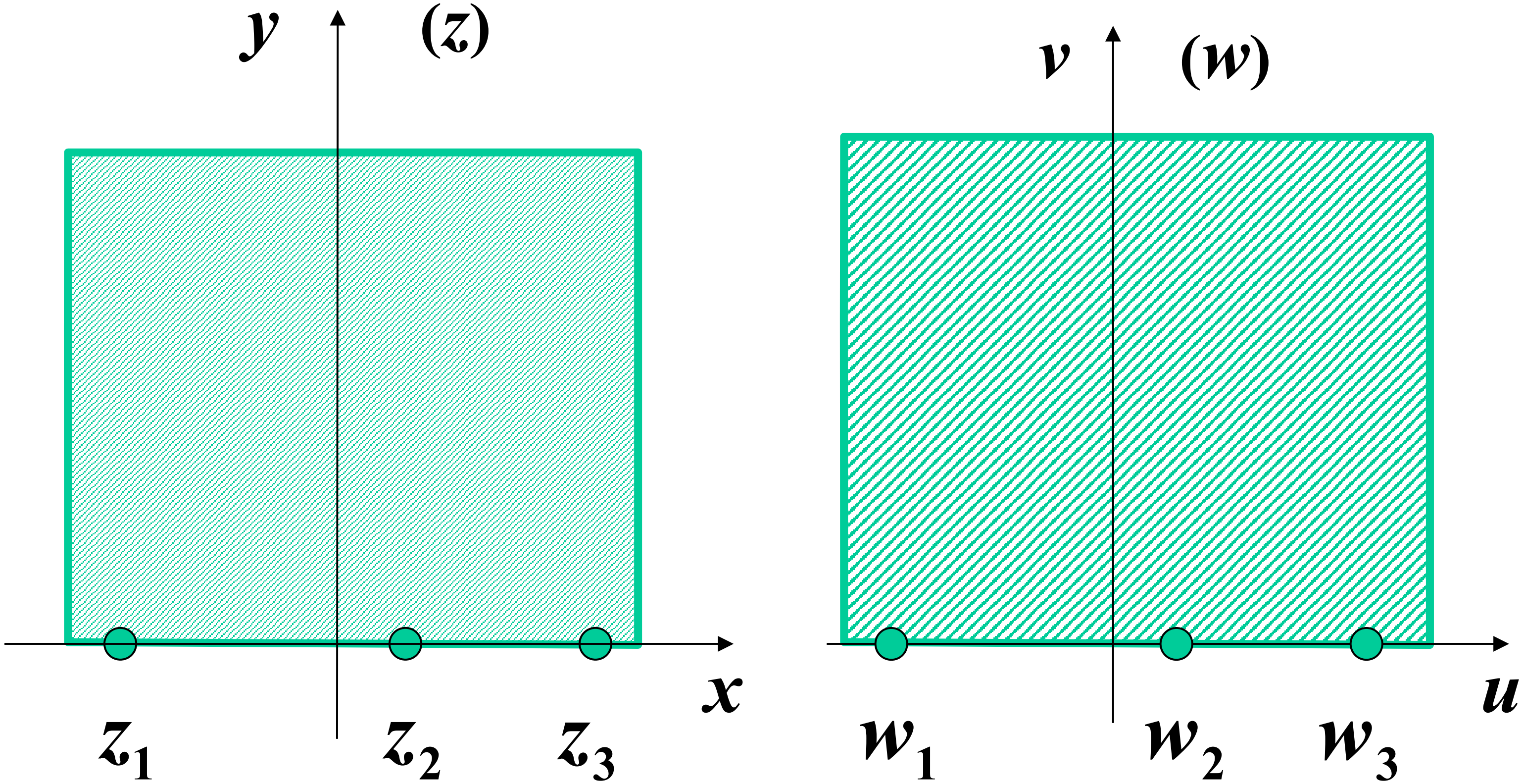
故, w 必将实轴 $\to$ 实轴.

又 $w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}>0$(当 z 为实数且 $ad-bc>0$ 时)

即, 实轴变成实轴是同向的,

因此, 上半 z 平面 $\to$ 上半 w 平面.

即，当a,b,c,d均为实数时,且$ad-bc>0$,线性分式映射$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$将$\mathrm{Im}(z)>0\rightarrow\mathrm{Im}(w)>0$



①具有这一形式的映射

也将 $\mathrm{Im}(z) < 0 \to \mathrm{Im}(z) < 0$

②$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$,其中a, b, c, d

为实数,$ad - bc < 0$

将 $\underset{\text{上半}z\text{平面}}{\mathrm{Im}(z) > 0} \to \underset{\text{下半}w\text{平面}}{\mathrm{Im}(w) < 0}$

③求 $\mathrm{Im}(z) > 0 \to \mathrm{Im}(w) > 0$

的映射,可在实轴上取三对

相异的对应点:

$z_1 < z_2 < z_3$,

$w_1 < w_2 < w_3$代入

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

即得.

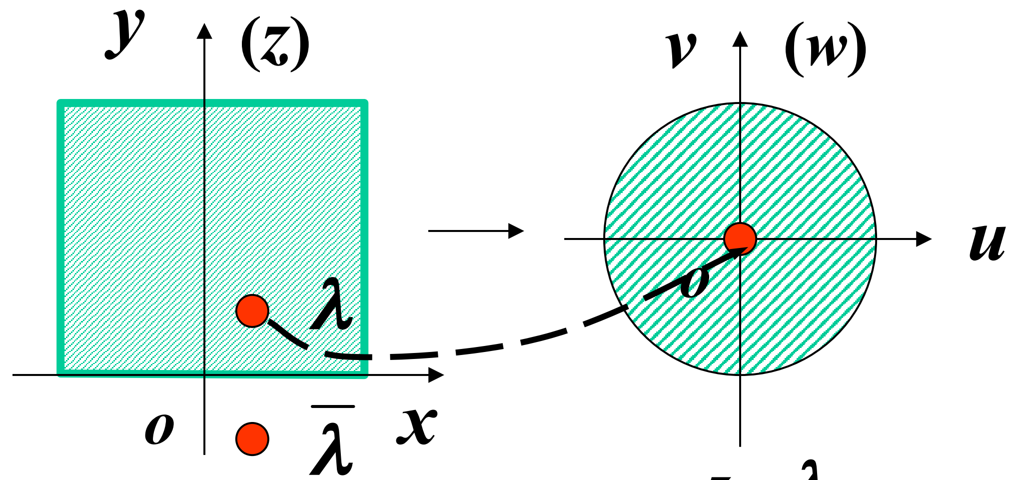
例 2 求将上半z平面$\mathrm{Im}(z)>0$映射成单位圆$|w|<1$的分式线性映射,且满足条件$w(2i)=0$, $\arg(w'(2i))=0$的分式线性映射.

解 若我们把上半平面看成是半径为∞的圆域,那么实轴就相当于圆域的边界圆周,$\because$ 分式线性映射具有保圆性,$\therefore$ 它必将上半平面 $\rightarrow$ 单位圆$|w|<1$. $\exists\, z=\lambda \rightarrow |w|=1$的圆心,即 $w=0$

实轴$R \rightarrow |w|=1$,又$\because$ $z=\lambda$与$z=\overline{\lambda}$关于实轴对称,由保对称性$\overline{\lambda} \rightarrow w=\infty$

$$\therefore w = k\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)$$

$(k$为常数$)$



$\because\ \forall z \in R \to w \in \{w \mid |w| = 1\}$

$$\left|\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right| = 1,\text{又}\because\ |w| = 1, \therefore |k| = 1$$

设$k = e^{i\theta}$　θ为任意实数

因此,所求分式线性映射

一般形式为：

$$w = e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)$$

$(\mathrm{Im}(\lambda) > 0) - -(2)$

反之,形如(2)

式的分式线性

映射必将

$\mathrm{Im}(z) > 0 \to |w| < 1$

进一步,由条件$w(2i)=0$

$\therefore$ 在(2)式中取$\lambda=2i$

即$w=e^{i\theta}\left(\dfrac{z-2i}{z-\overline{2i}}\right)=e^{i\theta}\left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right)$

$\because\ w'=e^{i\theta}\dfrac{4i}{(z+2i)^2},w'(2i)=-\dfrac{i}{4}e^{i\theta}$

$\Rightarrow \arg w'(2i)=\arg e^{i\theta}+\arg(-\dfrac{i}{4})$

$=\theta+(-\dfrac{\pi}{2})=0\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}$,从而有$w=i\left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right)$

(1)本题可在x轴上任意取定三点，在$|w| = 1$上依次取三点，由交比形式可求得分式线性映射(见P_{203}解法二)。

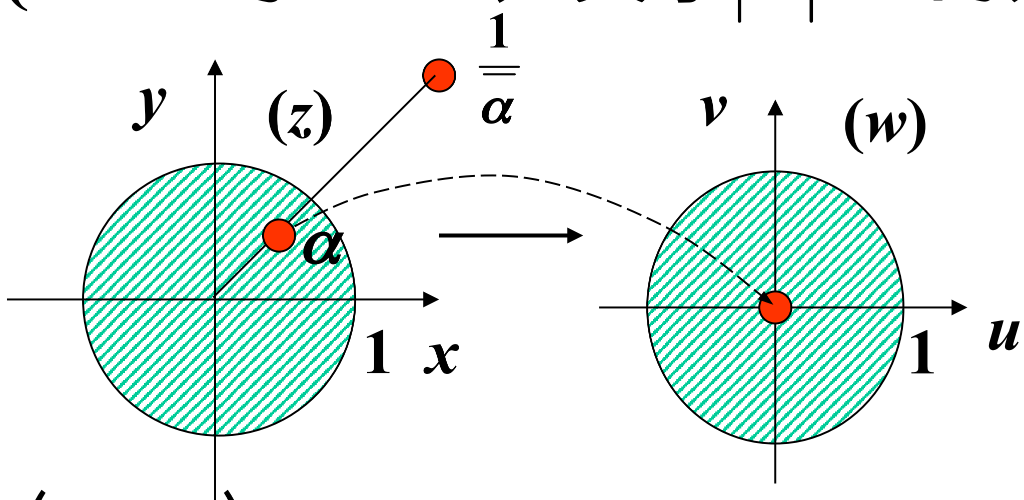
(2)由于θ的任意性，$\mathrm{Im}(z) > 0 \to |w| < 1$的映射不唯一，且无穷多。

例 3 求将 $|z|<1 \to |w|<1$ 的分式线性映射.

设 $\alpha \in \{z \| z| < 1\} \to |w|<1$ 的中心 $w=0$

解 由保对称性 α 关于 $|z|=1$ 的对称点 $\dfrac{1}{\overline{\alpha}} \to w=\infty$

($w=0$ 与 $w=\infty$ 是关于 $|w|=1$ 的对称点)



$$\therefore w = k\left(\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\overline{\alpha}}}\right) = k\overline{\alpha}\left(\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}\right) = k'\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right)$$

(其中 $k' = -k\overline{\alpha}$)

$\because\ |z|=1\rightarrow|w|=1\quad\therefore|z|=1,|w|=1$

将$z=1$代入上式得$|k'|\left|\dfrac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}\right|=|w|=1$

又$\because\ |1-\alpha|=|1-\overline{\alpha}|\quad\therefore|k'|=1,$

取$k'=e^{i\theta}\quad\theta$实常数,故

$\therefore|z|<1\rightarrow|w|<1$的线性分式映射为

$$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right)\quad(|\alpha|<1)--(3)$$

例 4 求将 $\mathrm{Im}(z) > 0 \to |w - w_0| < R$ 的分式线性变换使满足条件 $w(i) = w_0, w'(i) > 0$

解 令 $\xi = \dfrac{w - w_0}{R}$ (4)

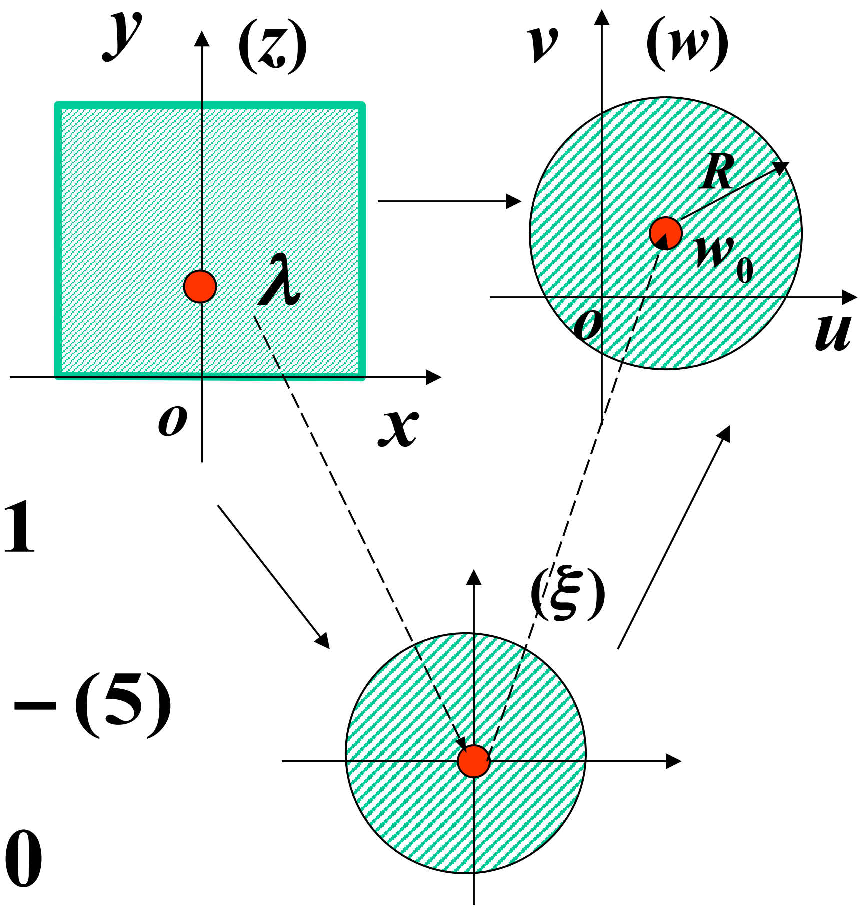
$w = w_0 \to \xi = 0$

将 $|w - w_0| < R \to |\xi| < 1,$

再将 $\mathrm{Im}(z) > 0 \to |\xi| < 1$

由例2有，$\xi = e^{i\theta}\dfrac{z - i}{z + i}$ —(5)

$z = i \to \xi = 0$



由(4)有$w=w_0+R\xi$ --(6)

复合(5)(6)有 $w=w_0+\mathrm{R}e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$ --(7)

再由$w'(i)>0$先求得

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=i}=\mathrm{R}e^{i\theta}\left.\frac{z+i-z+i}{(z+i)^2}\right|_{z=i}=\mathrm{R}e^{i\theta}\frac{1}{2i}$$

即 $w'(i)=\mathrm{R}e^{i\theta}\dfrac{1}{2i}=\dfrac{R}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$

$\therefore\theta-\dfrac{\pi}{2}=0\quad\theta=\dfrac{\pi}{2}\quad e^{i\theta}=i$ 故$w=Ri\dfrac{z-i}{z+i}+w_0$

例 5　中心分别在$z=1$与$z=-1$,半径为$\sqrt{2}$的二圆弧所围区域,在映射$w=\dfrac{z-i}{z+i}$下映成什么区域?

解　两圆弧的交点为$-i$与i,且互相正交,交点

$$z=i\to w=0 \quad z=-i\to w=\infty$$

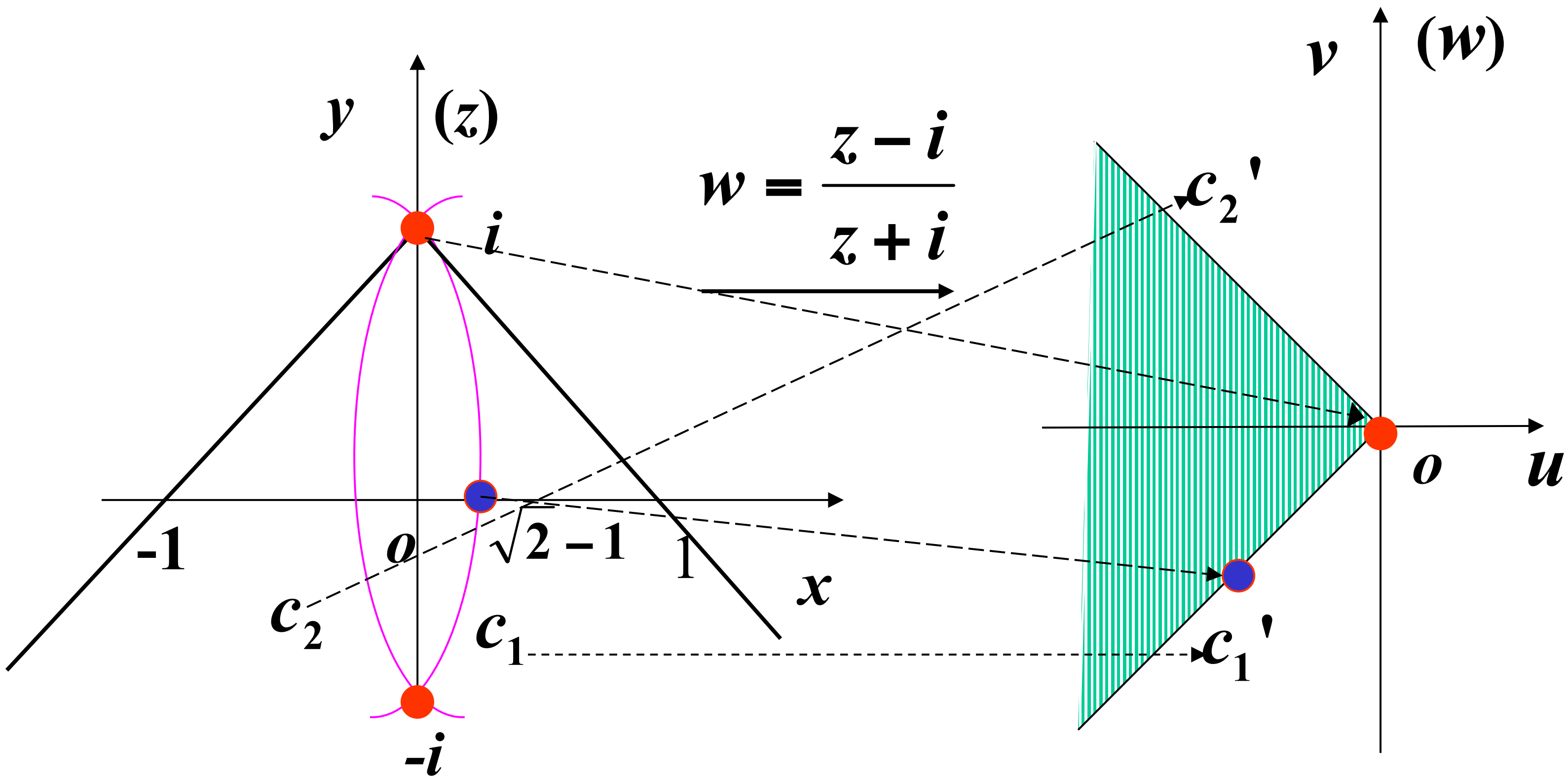
$\therefore$映射后的区域是以原点为顶点张角为$\dfrac{\pi}{2}$的角形区域.

(第三象限的点)

取$z=\sqrt{2}-1\in C_1\to w=\dfrac{(1-\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}$

$\therefore C_1 \to C_1' --$第三象限的分角线

由保角性$C_2 \to C_2' --$第二象限的分角线



作业

- P246 15(1)(2),16(1)(2)