

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

1. Найти все простые числа в промежутке от 1 до 101 с помощью алгоритма Эратосфена.

Решение. – Ответ.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101

2. Пользуясь таблицей простых чисел, найти канонические разложения следующих чисел: а) 492, б) 22011, в) 7533, г) 4144.

НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

1. Вычислить: а) НОК(744,198); б) НОК(60,1575); в) НОК(128,81).

2. Вычислить: а) НОК(15,-12,3); б) НОК(1500,-1224,1440);

в) НОК(176,288,394).

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

1. Вычислить: а) НОД (72, 96); б) НОД (231, 1089); в) НОД (50, 42).

2. Вычислить: а) НОД (–585, 81, –189); б) НОД (105, 165, 384);

в) НОД (198, 294, 780); г) НОД (78, 294, 570, 36).

АЛГОРИТМЫ ЕВКЛИДА

1. Вычислить НОД при помощи: 1) алгоритма Евклида делением с остатком; 2) бинарного алгоритма Евклида; 3) расширенного алгоритма Евклида. Сравнить количество итераций.

а) $a = 715, b = 195$; б) $a = 246, b = 396$; в) $a = 175, b = 14945$;

г) $a = 1818, b = 726$; д) $a = 6887, b = 6319$.

Решение.

а) $a = 715, b = 195$.

1) алгоритм Евклида делением с остатком:

$$715 = 3 \cdot 195 + 130$$

$$195 = 1 \cdot 130 + 65$$

$$130 = 2 \cdot 65 + 0$$

$$\text{НОД}(715, 195) = 65. \text{ (3 итерации)}$$

2) бинарного алгоритм Евклида:

1. a и b четные, то $\text{НОД}(a, b) = 2 \cdot \text{НОД}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$;

2. a нечетное, b четное, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}\left(a, \frac{b}{2}\right)$;

3. a и b нечетные, $a > b$, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$;

4. $a = b$, то $\text{НОД}(a, b) = a$.

$\text{НОД}(715, 195) = [3] = \text{НОД}(715 - 195, 195) = \text{НОД}(520, 195) = [2] =$
 $\text{НОД}(260, 195) = [2] = \text{НОД}(130, 195) = [2] = \text{НОД}(65, 195) = [3] =$
 $\text{НОД}(165, 130) = [2] = \text{НОД}(65, 65) = [4] = 65. \text{ (7 итераций - сколько раз}$
использовали свойства)

3) расширенный алгоритм Евклида:

j	r_j	x_j	y_j	q_j
0	715	1	0	
1	195	0	1	3
2	130	1	-3	1
3	65	-1	4	2

0

Пояснения.

Заполняем таблицу по столбцам.

Сначала заполняем столбцы r_j и q_j :

$$r_0 = 715 \text{ (большее из заданных чисел)}$$

$$r_1 = 195$$

Далее используем формулу $r_{i-1} = q_i \cdot r_i + r_{i+1}$:

$$r_0 = q_1 \cdot r_1 + r_2$$

$$715 = q_1 \cdot 195 + r_2$$

Очевидно, $715 = 3 \cdot 195 + 130 \Rightarrow q_1 = 3, r_2 = 130$ – записали;

$$r_1 = q_2 \cdot r_2 + r_3$$

$$195 = q_2 \cdot 130 + r_3$$

Очевидно, $195 = 1 \cdot 130 + 65 \Rightarrow q_2 = 1, r_3 = 65$ – записали;

$$r_2 = q_3 \cdot r_3 + r_4$$

$$130 = q_3 \cdot 65 + r_4$$

Очевидно, $130 = 2 \cdot 65 + 0 \Rightarrow q_3 = 2, r_4 = 0$ – записали;

Так как $r_4 = 0$, то с этими столбцами закончили.

Теперь заполняем x_j столбец:

$$x_0 = 1, x_1 = 0 \text{ всегда!}$$

Далее используем формулу $x_{i+1} = x_{i-1} - q_i \cdot x_i$:

$$x_2 = x_0 - q_1 \cdot x_1 = 1 - 3 \cdot 0 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \text{ – записали;}$$

$$x_3 = x_1 - q_2 \cdot x_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1 \Rightarrow x_3 = -1 \text{ – записали.}$$

Теперь заполняем y_j столбец:

$$y_0 = 0, y_1 = 1 \text{ всегда!}$$

Далее используем формулу $y_{i+1} = y_{i-1} - q_i \cdot y_i$:

$$y_2 = y_0 - q_1 \cdot y_1 = 0 - 3 \cdot 1 = -3 \Rightarrow y_2 = -3 \text{ – записали;}$$

$$y_3 = y_1 - q_2 \cdot y_2 = 1 - 1 \cdot (-3) = 4 \Rightarrow y_3 = 4 \text{ – записали.}$$

Ответом будет НОД $= r_n = r_3 = 65$, а его разложением: $r_n = r_0 \cdot x_n + r_1 \cdot y_n$, то есть $r_3 = r_0 \cdot x_3 + r_1 \cdot y_3 \Rightarrow 65 = 715 \cdot (-1) + 195 \cdot 4$.

Ответ. НОД(715,195) = 65 = 715 · (−1) + 195 · 4. (3 итерации – смотри по таблице).