

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

## Электромагнитные волны в волноводах

выполнила студентка 653 группы ФФКЭ

Карпова Татьяна

Долгопрудный, 2017 г.

# 1 Цель работы

Ознакомление с методами получения и анализа электромагнитных волн СВЧ - диапазона

## 2 В работе используются:

- генератор СВЧ типа Г4-83
- измерительная линия Р1-28
- усилитель 28 ИМ
- заглушка
- отрезок волновода с поглощающей нагрузкой
- отрезки волноводов различных сечений
- детекторная головка

## 3 Теоретические положения

В СВЧ-диапазоне энергия передаётся с помощью металлических труб, называемых волноводами (в миллиметровом диапазоне длин волн волноводы могут быть сделаны и из диэлектрика). Электромагнитные волны могут распространяться по металлическим трубам любого профиля, но из технологических соображений сечения волноводов делаются либо круглыми, либо прямоугольными.

Построим э.м. поле в волноводе, складывая падающую и отражённые от стенок плоские волны. Такой метод называется *концепцией Бриллюэна*.

Абсолютное значение волнового вектора  $\mathbf{k}$  - волновое число - равно

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_{ph}} \quad (1)$$

Уравнения падающей и отражённой электромагнитных волн:

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - k_1 r)} \quad (2)$$

$$E_1 = -E_0 e^{i(\omega t - k_2 r)}, \quad (3)$$

где  $k_1 = k_2 = \frac{\omega}{c}$ . Проекции волновых векторов на оси координат:

$$k_{1x} = -k \cos \theta, \quad k_{2x} = k \cos \theta, \quad k_{1z} = k \sin \theta, \quad k_{2z} = k \cos \theta, \quad (4)$$

Суммарное электрическое поле в точке М:

$$E = E_0 [e^{i(\omega t - k_1 r)} - e^{i(\omega t - k_2 r)}] \quad (5)$$

Подставляя в (5) координаты вектора  $\mathbf{r}(x, 0, z)$  и значения  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  из (4),

$$E = 2iE_0 \sin(kx \cos \theta) e^{i\omega(t - z \sin \theta / c)} \quad (6)$$

Это выражение описывает волну с амплитудой

$$2iE_0 \sin(kx \cos \theta), \quad (7)$$

бегущую в направлении  $z$  с фазовой скоростью

$$v_{ph} = \frac{c}{\sin \theta} \quad (8)$$

Отметим две важные особенности этой волны: 1) её фазовая скорость больше скорости света; 2) при фиксированном угле амплитуда поля гармонически зависит от  $x$  и не меняется со временем.

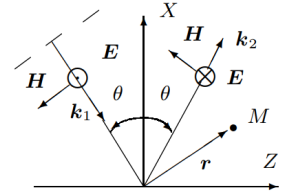


Рис. 1: Отражение плоской волны от проводящей плоскости

Иначе говоря, в результате интерференции падающей и отражённой волн в пространстве над проводящей поверхностью в направлении оси  $X$  образуется система стоячих волн. Электрическое поле стоячей волны равно нулю в точках, где  $kx \cos \theta = n\pi$ , т.е. там, где

$$x = \frac{n\pi}{k \cos \theta} \quad (9)$$

Мы показали, что в волноводе прямоугольного сечения может распространяться э.м. волна, которую в пределах волновода можно рассматривать как результат суперпозиции двух плоских волн. Каждая плоская волна является чисто поперечной, так что электрическое и магнитное поля перпендикулярны к направлению их распространения. В суммарной волне электрическое поле имеет только составляющую  $E_y$  и, следовательно, перпендикулярно оси волновода, а магнитное поле имеет составляющие  $H_x$  и  $H_z$ .

*Электромагнитное поле в волноводе не является чисто поперечным, а имеет продольные составляющие.*

Если даны две параллельные проводящие плоскости, расположенные на расстоянии  $a$  друг от друга, то между ними могут распространяться волны, если

$$\cos \theta_n = \frac{n\pi}{ka} = \frac{n\lambda_0}{2a} = \frac{n}{a\omega}, \quad (10)$$

где  $\lambda_0$  – длина волны в свободном пространстве.

Движение э.м. волны по волноводу возможно, если углы падения подчиняются условию

$$\cos \theta_n = \frac{n\lambda_0}{2a} \leq 1 \quad (11)$$

Нижняя критическая частота волны

$$\omega_{cr} = \frac{\pi c}{a} \quad (12)$$

и верхняя критическая длина волны

$$\lambda_{cr} = 2a \quad (13)$$

соответствуют  $n = 1$

Выражение для фазовой скорости э.м. волны, распространяющейся в волноводе:

$$v_{ph} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{cr}/\omega)^2}} \quad (14)$$

Фазовая скорость (скорость перемещения поверхности постоянной фазы  $v + p + h = \omega/k$ ) в волноводе больше скорости света в пустоте, а групповая (скорость распространения возмущения  $u = d\omega/dk$ ) всегда меньше.

Волновое число  $k_z$ , описывающее распространение волны вдоль волновода:

$$k_z = \frac{\omega}{v_{ph}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - (\frac{\omega_{cr}}{\omega})^2} \quad (15)$$

При частотах  $\omega < \omega_{cr} = \pi c/a$  волны вдоль трубы экспоненциально затухают. Поэтому критическую частоту называют граничной частотой волновода.

Преобразуя соотношение (15), можно связать длины волн в волноводе ( $\lambda_w$ ), в открытом пространстве ( $\lambda_0$ ) и критическую ( $\lambda_{cr}$ ):

$$\frac{1}{\lambda_w^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{cr}^2} \quad (16)$$

В случае прямоугольного волновода с поперечными размерами  $a$  и  $b$  все возможные критические длины волн определяются общей формулой

$$\lambda_{cr} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{m}{2a})^2 + (\frac{n}{2b})^2}}$$

Величина  $m$  представляет собой полное число полупериодов изменения той или иной составляющей поля вдоль пути, идущего параллельно широкой стенке волновода ( $a$ ), а  $n$  — то же для узкой стенки ( $b$ ).

Если в волноводе имеется какое-либо препятствие, нерегулярность (в предельном случае он просто закрыт металлической пластиной), то в нём появляется отражённая волна. Падающая и отражённая волны интерферируют и создают в волноводе стоячую волну. Прямая волна, движущаяся в положительном направлении оси  $Z$ :

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - k_z z)},$$

а отражённая -

$$E_2 = \rho E_0 e^{i(\omega t + k_z z + \phi)}, \quad (17)$$

где  $\rho$  — коэффициент отражения по амплитуде, а  $\phi$  — фаза отражённой волны. Суммарное поле в волноводе имеет вид

$$E(z) = E_1 + E_2 = E_0 e^{-ik_z z} (1 + \rho e^{i(2k_z z + \phi)}) e^{i\omega t} = A_0 e^{i\omega t}$$

Из этого выражения видно, что в каждом сечении волновода ( $z = \text{const}$ ) поле зависит от времени по гармоническому закону, а квадрат амплитуды равен

$$A_0^2 = E_0^2 [1 + \rho^2 + 2\rho \cos(2k_z z + \phi)] \quad (18)$$

Максимальное (в пучности) и минимальное (в узле) значения поля равны соответственно:

$$E_{max} = E_0(1 + \rho), \quad E_{min} = E_0(1 - \rho) \quad (19)$$

Из формулы (18) следует, что расстояние  $l$  между соседними узлами (или пучностями) составляет

$$l = \frac{\pi}{k_z} = \frac{\lambda_w}{2} \quad (20)$$

Это даёт удобный способ измерения длины волны в волноводе. Отношение

$$K = \frac{E_{max}}{E_{min}} \quad (21)$$

называется коэффициентом стоячей волны (к.с.в.). Из (19) следует, что коэффициент отражения от препятствия по амплитуде

$$\rho = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}} = \frac{K - 1}{K + 1} \quad (22)$$

В случае полного отражения (металлическая заглушка)  $\rho = 1$ , а если в волновод вставлено вещество, поглощающее СВЧ-излучение (согласованная нагрузка), то  $\rho = 0$ .

## 4 Экспериментальная установка

### 4.1 Волны в волноводе при частоте выше критической

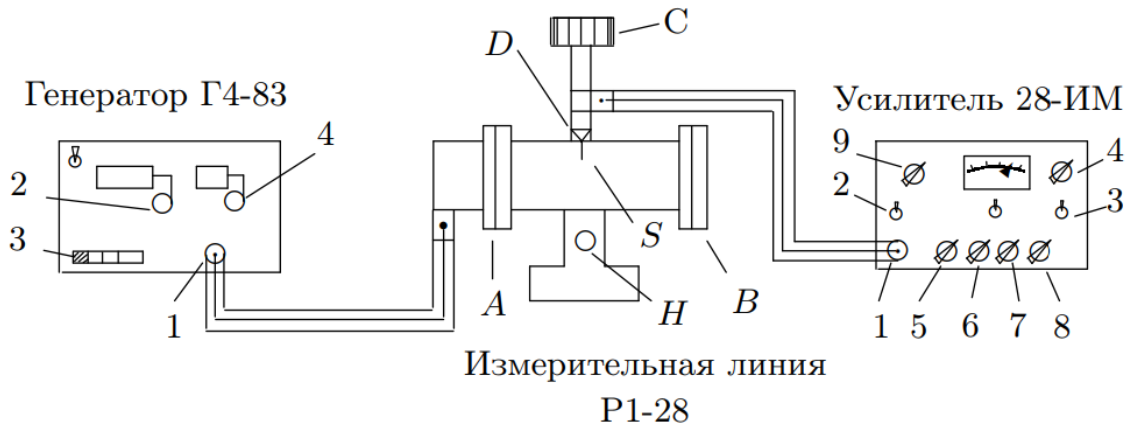


Рис. 2: Схема для исследования структуры волн СВЧ

Схема для исследования структуры волн в волноводе при частоте выше критической представлена на рис. 2. Модулированный сигнал от высокочастотного генератора (дуги с частотой повторения 1 кГц) поступает на вход А измерительной линии, вдоль которой перемещается зонд S. Высокочастотный сигнал с зонда поступает на кристаллический детектор D.

С нагрузки детектора (с RC-цепочки) снимается огибающая высокочастотного сигнала и подается на усилитель низкой частоты. Величина сигнала регистрируется вольтметром, вмонтированным в усилитель. Ручка С — настройка измерительной линии — служит для согласования зонда (как антенны) со входом усилителя. В волноводе с закрытым выходом образуется стоячая волна. Определив расстояние между узлами, можно рассчитать длину волны и фазовую скорость СВЧ-сигнала в волноводе. Устройство детекторной головки, установленной на измерительной линии, таково, что отклик вольтметра  $U$  на величину напряженности электрического поля  $E$  в волноводе пропорционален  $E^n$

$$U \propto E^n, \quad (23)$$

а показатель степени  $n$  сам зависит от величины сигнала: при малых сигналах детектирование квадратичное ( $n = 2$ ), при больших — линейное ( $n = 1$ ). Если известно распределение поля  $E(z)$  вдоль измерительной линии, то, изучив распределение  $U(z)$ , можно по графику  $\ln(U) = f[\ln(E)]$  определить характер детектирования: в двойном логарифмическом масштабе любая степенная функция — прямая линия, по наклону которой можно определить  $n$ . Распределение  $E(z)$  нетрудно рассчитать для волновода с закороченным концом (металлической заглушкой), когда фаза отраженной волны  $\phi = \pi$ , а  $\rho = 1$ . Как следует из (17), электрическое поле в этом случае имеет вид:

$$E(z) = E_0 e^{-ik_1 z} (1 - e^{2ik_z z}) e^{i\omega t} = E_0 e^{i\omega t} (e^{-ik_1 z} - e^{ik_1 z}) = 2E_0 e^{i\omega t} \sin(k_z z) \propto \sin(k_z z), \quad (24)$$

где  $z$  — смещение от узла.

Меняя нагрузку на выходе измерительной линии (В на рис. 2) и сравнивая максимальное и минимальное показания вольтметра, можно рассчитать коэффициент стоячей волны (к.с.в.) и коэффициент отражения  $\rho$ .

## 4.2 Волны в волноводе при частоте ниже критической

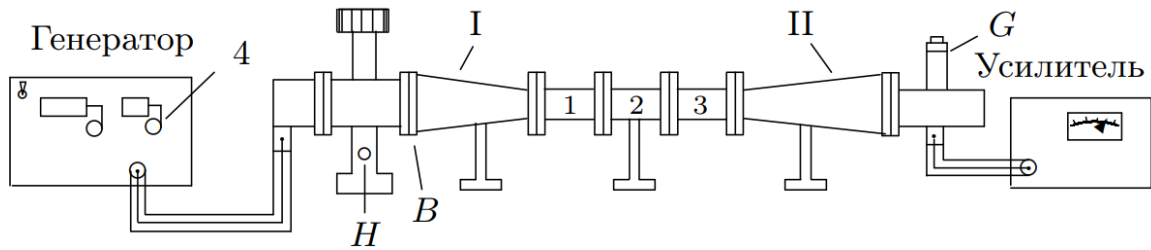


Рис. 3: Схема для исследования затухания

Для исследования затухания волн в волноводе при частоте ниже критической используются те же генератор, усилитель, измерительная линия и дополнительный набор волноводов с отдельной детекторной головкой  $G$  (рис. 3). Дополнительный набор начинается и заканчивается волноводами переменного сечения I и II. Между ними можно разместить 1, 2 или 3 одинаковых отрезка с постоянным сечением. В такой системе волны с частотами меньше критической экспоненциально затухают.

Мощность сигнала на выходе из волновода  $W$  можно связать с мощностью входного сигнала  $W_0$  двумя способами:

$$W = W_0 e^{-\alpha z} \text{ или } W = W_0 10^{-\beta z}, \text{ } z - \text{длина волновода.}$$

Коэффициент  $(\alpha z)$  измеряется в неперах (Нп). 1 непер соответствует отношению интенсивностей, равному основанию натуральных логарифмов. Коэффициент  $(\beta z)$  принято измерять в децибелах [дБ]: один бел соответствует уменьшению мощности в 10 раз; децибел — одна десятая бела. Измеренное в децибелах затухание определяется формулой

$$(\beta z) = 10 \lg \frac{W_0}{W}$$

Из этого определения вытекает, что

$$\alpha = 2,3\beta \quad (25)$$

Как следует из (17), в закритическом волноводе при квадратичном детектировании интенсивность сигнала падает по закону  $E^2 \propto e^{-\alpha z}$ , где — коэффициент затухания:

$$\alpha = 2ik_z$$

Подставляя волновое число из (15) и заменяя частоты с помощью (10) и (12), найдём

$$\alpha = 2ik_z = \frac{2\omega}{c} \sqrt{\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{2\pi}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2} \quad (26)$$

Здесь  $\lambda_0 = c/\nu = 3,22$  см — длина волны в свободном пространстве, соответствующая рабочей частоте  $\nu = 9320$  МГц,  $a = 1,6$  см — размер широкой стенки волновода-вставки.

## 5 Выполнение работы

### 5.1 Исследование структуры волн при частоте выше критической

#### 5.1.1 Определение длины волны СВЧ-сигнала в волноводе

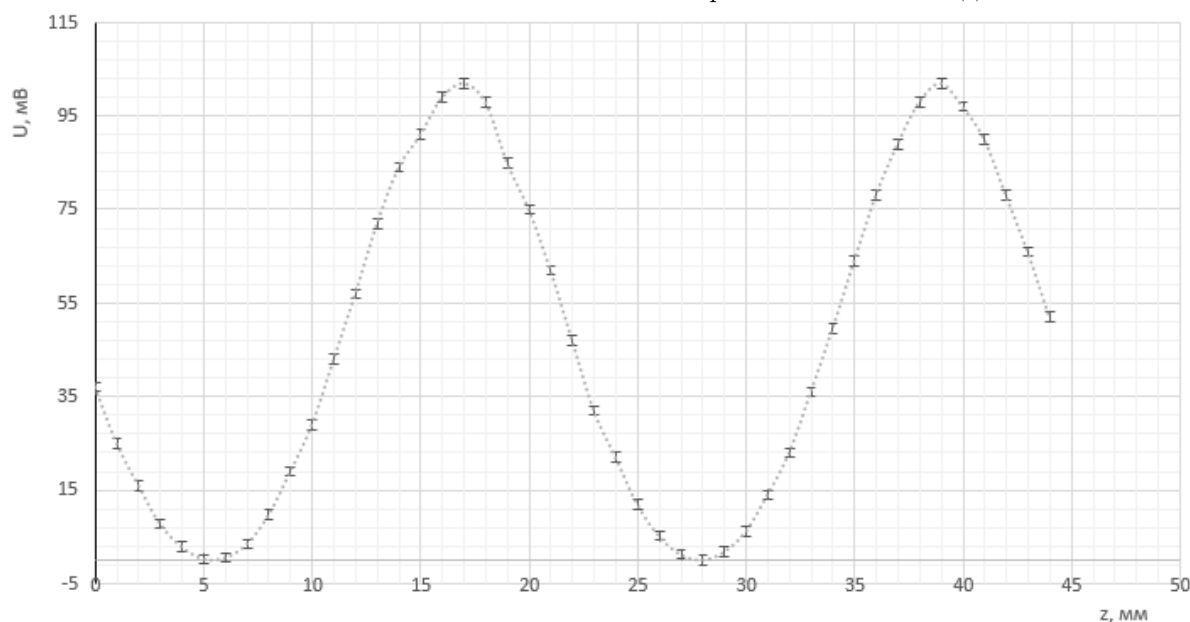
1. Определим критическую частоту для данного волновода по формуле  $\nu_{cr} = c/2a = 6517$  МГц ( $a = 23$  мм), она больше рабочей частоты 9320 МГц. Проведём настройку приборов.
2. Снимем зависимость показаний вольтметра  $U$  от положения зонда  $z$ . Результаты занесём в таблицу 1.

Таблица 1: Показания вольтметра в зависимости от положения зонда на измерительной линии

$U$ , мВ	37	25	16	7,8	2,9	0,3	0,54	3,5	9,7	19	29	43	57	72	84
$z$ , мм	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$U$ , мВ	91	99	101	98	85	75	62	47	32	22	12	5,2	1,25	0,09	1,8
$z$ , мм	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$U$ , мВ	6,15	14	23	36	49,5	64	78	89	98	102	97	90	78	66	52
$z$ , мм	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44

3. Построим график  $U = f(z)$  (рис. 4) и определим по нему длину волны  $\lambda_w$  в волноводе.  $\lambda_w = 22$  мм. Используя формулу (16), рассчитаем теоретическое значение длины волны в волноводе:  $\lambda_w = \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{cr}^2}\right)^{-1/2} = 44,54$  мм

Рис. 4: Зависимость показаний вольтметра от положения зонда



Расстояние между соседними узлами в стоячей волне составляет  $1/2$  длины свободной волны. По графику определяем длину свободной волны в волноводе  $\lambda_w = 2l = 44,5$  мм. Она совпадает с длиной волны  $\lambda_w = 44,54$  мм, рассчитанной теоретически. Отсюда можем судить, что в данном режиме работы зонд исправен и даёт точные показания.

Длина волны в свободном пространстве  $\lambda_0 = 32,2$  мм меньше критической длины волны  $\lambda_{cr} = 46$  мм.

Фазовая скорость волн в волноводе из (14)  $v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_{cr}/\omega)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-(\nu_{cr}/\nu)^2}} = 419361,71$  км/с,  $v_{ph} > c$ . Это не противоречит законам, так как с такой скоростью перемещаются узлы волн, при этом не передаётся ни энергия, ни информация (именно они не могут передаваться со скоростью, большей скорости света в вакууме).

Групповая скорость  $u = \frac{c^2}{v_{ph}} = 214315,04$  км/с.

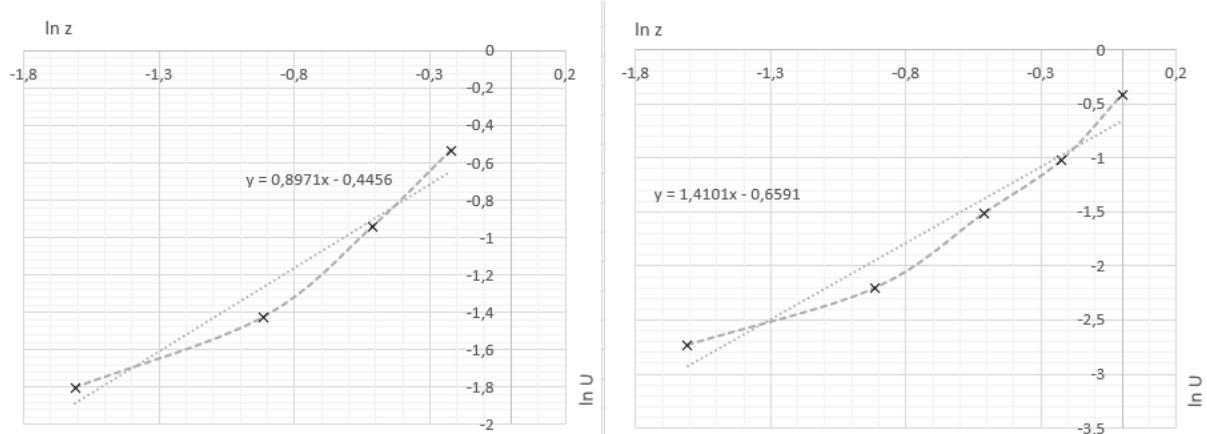
### 5.1.2 Определение характера детектирования

1. Перемещая зонд вблизи узла 28 мм, оценим диапазон измерений вольтметра U. Снимем зависимость  $U$  от координаты зонда вблизи узла ( $z = \pm 1$  мм), фиксируя значения множителей  $K_5$  и  $K_9$ . Результаты занесём в таблицу 2.

Таблица 2: Изменение показаний вольтметра при перемещении вблизи узла

$U$ , мВ	0,83	0,59	0,39	0,24	0,17	0,08	0,07	0,11	0,22	0,36	0,66
$z$ , мм	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Рис. 5: Определение характера детектирования зонда по графикам



2. Аппроксимируя зависимость  $\ln(U) = f(\ln(z))$  к прямой и вычисляя коэффициент наклона аппроксимирующей прямой, определяем характер детектирования зонда. Коэффициент при аргументе примерно равен 1, если принять во внимание оба графика - *характер детектирования в этом эксперименте линейный*

### 5.1.3 Определение коэффициентов отражения

1. Снимем металлическую заглушку с фланца измерительной линии, измерим максимальное и минимальное напряжения в волне

$$U_{max} = 162 \text{ мВ} \quad U_{min} = 43 \text{ мВ}$$

2. Наденем на выходной фланец измерительной линии отрезок волновода с поглощающей нагрузкой, измерим максимальное и минимальное напряжения в волне

$$U_{max} = 96 \text{ мВ} \quad U_{min} = 71 \text{ мВ}$$

3. По формуле (22) определим коэффициенты отражения от препятствия по амплитуде для открытого, закрытого волновода и для волновода с поглощающей нагрузкой

$$\rho_{closed} = 0,998 \quad \rho_{opened} = 0,580 \quad \rho_{load} = 0,151$$

Только по значениям коэффициентов отражения можно было бы определить состояние волновода. При  $\rho \approx 1$  волновод наглухо закрыт металлической заглушкой ( $\rho_{closed} = 0,998$ ), при  $\rho \approx 0$  на конце волновода поставлено вещество, поглощающее СВЧ-излучение ( $\rho_{load} = 0,151$ ). Воздух не препятствует распространению СВЧ-волн, но в воздушной среде при распространении излучение становится менее интенсивным ( $\rho_{opened} = 0,580$ )

## 5.2 Исследование затухания волн при частоте ниже критической

1. Соберем схему согласно рис. 3, измерим длину каждой секции.

$$\begin{array}{lll} l_{gold} = 4,95 \text{ см} & l_{blue} = 3,95 \text{ см} & l_{white} = 5,7 \text{ см} \\ l_{var} = 14,5 \text{ см} & l_{line} = 15,3 \text{ см} & l_{det} = 10,1 \text{ см} \end{array}$$

Критическая частота для этого эксперимента  $\nu_{cr} = c/2a = 9368,5$  МГц, рабочая частота  $\nu = 9320$  МГц  $< \nu_{cr}$

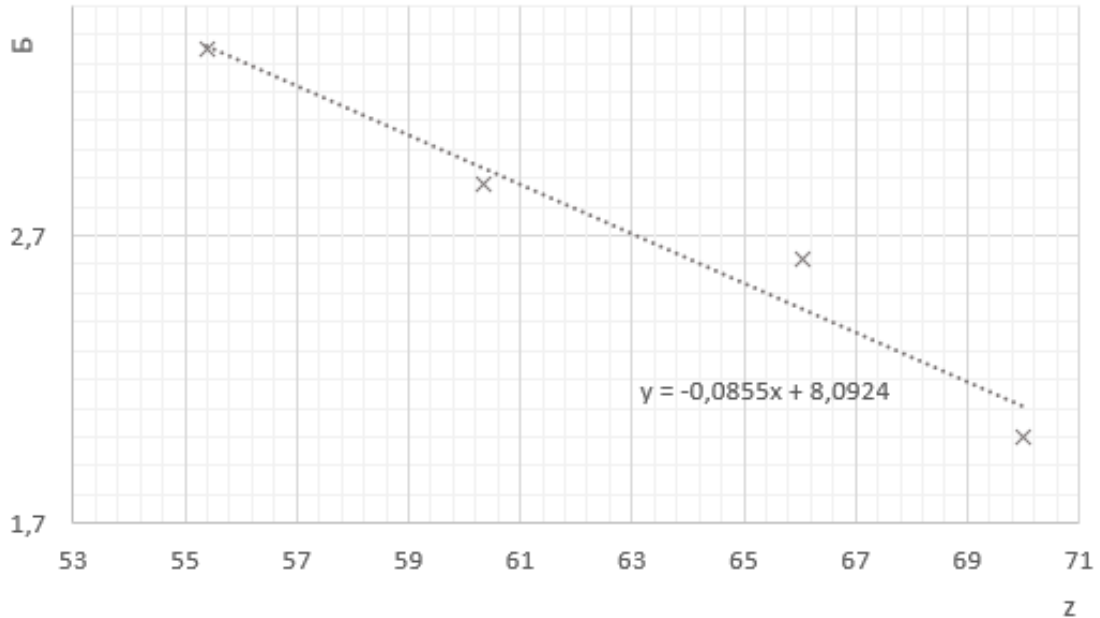
2. Последовательно уменьшая количество секций волновода от трёх до нуля, будем подбирать такое ослабление  $\gamma$  с генератора, чтобы показания вольтметра на усилителе ( $U = 5$  мВ) оставались неизменными. Результаты занесём в таблицу 3.

Таблица 3: Зависимость ослабления от длины волновода

$\gamma$ , дБ	20	26,2	28,8	33,45
$z$ , см	70	66,05	60,35	55,4

3. Построим график зависимости ослабления  $\gamma$  от длины волновода  $z$  (рис. 6)

Рис. 6: Зависимость ослабления входящего сигнала от длины волновода



По углу наклона графика определим значение коэффициента затухания  $\beta$ :  $\beta = -\gamma/z = 0,0855$  Б/см. Тогда коэффициент  $\alpha = 2,3\beta = 0,1969$  Нп/см.

Рассчитаем теоретические значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ . Если при квадратичном детектировании интенсивность сигнала падает по закону  $E^2 \propto e^{-\alpha z}$ , где  $\alpha = 2ik_z$ , то при линейном детектировании  $E \propto e^{-\alpha z}$  или  $\alpha = ik_z$ . Тогда, преобразовав формулу (26) по линейный характер детектирования, получим, что



$$\alpha = ik_z = \frac{\pi}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2} = 0,2184 \text{ Нп/см}$$

$$\beta = \alpha/2,3 = 0,0950 \text{ Б/см.}$$

В итоге, сравнивая теоретические и экспериментальные данные:

$$\begin{array}{ll} \alpha_{th} = 0,218 \text{ Нп/см} & \alpha_{ex} = 0,197 \text{ Нп/см} \\ \beta_{th} = 0,095 \text{ Б/см} & \beta_{ex} = 0,086 \text{ Б/см} \end{array}$$

Результаты, полученные теоретически и экспериментально, практически совпадают. Примечательно, что если бы мы использовали формулу для квадратичного детектирования, указанную в указании к работе, результаты бы не совпали (см. вывод)

## 6 Вывод

В ходе работы было исследовано распространение СВЧ-волн в волноводах различных сечений. Проанализированы результаты измерения различных параметров волн при их частоте выше и ниже критической для соответствующего волновода.

1. Была измерена длина волны в волноводе при частоте выше критической. Передвигая зонд, подсоединённый к усилителю с вольтметром, измерялась величина СВЧ-сигнала (стоячая волна). Данным методом получилось с большой точностью определить длину волны в волноводе:

$$\lambda_{w(th)} = 44,54 \text{ мм} \quad \lambda_{w(ex)} = 44,50 \text{ мм}$$

Также определена фазовая скорость волны в волноводе

$$v_{ph} = 419361,71 \text{ км/с}$$

и её групповая скорость

$$u = 214315,04 \text{ км/с.}$$

2. Определён характер детектирования зонда при малых сдвигах от местоположения узла волны. Он оказался линейным, а не квадратичным.
3. Определены коэффициенты отражения волны от разных материалов - металлическая заглушка, воздушное пространство и поглощающая нагрузка.

$$\rho_{closed} = 0,998 \quad \rho_{opened} = 0,580 \quad \rho_{load} = 0,151$$

Действительно, в теории коэффициент отражения от металлической заглушки  $\approx 1$ , от поглощающей нагрузки  $\approx 0$

4. Было исследовано затухание СВЧ-волн при частоте ниже критической. В этом пункте при выполнении работы были замечены значительные несоответствия теории, предложенной в указании к работе, и экспериментальными данными.

- Во-первых, формула  $\gamma = \beta z$  неверна чисто с логической точки зрения.  $\beta$  – коэффициент затухания - по определению  $\beta z = 10 \lg \frac{W_0}{W}$  должен быть больше нуля (так как при длине волны ниже критической мощность сигнала на входе  $W_0$ , очевидно, больше мощности на выходе  $W$ ). С другой стороны, при *уменьшении* длины волновода для того, чтобы сигнал на выходе оставался тем же, нужно *ослаблять* входящий сигнал, то есть увеличивать ослабление. Таким образом, при уменьшении  $z$  должна увеличиваться  $\gamma$ , но при  $\beta > 0$  и  $\gamma = \beta z$  это не выполняется. Получается, нужная нам формула

$$\boxed{\gamma = -\beta z}.$$

- Во-вторых, в описании к работе указаны формулы, принимая, что детектирование зонда квадратичное. Учитывая результаты измерений п. 5.1.2, мы вывели формулу для линейного характера детектирования и получили значения коэффициентов затухания  $\alpha$  и  $\beta$ , очень близкие к практическим. Теперь посчитаем теоретические значения этих коэффициентов для квадратичного детектирования.

$$\alpha = 2ik_z = \frac{2\pi}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2} = 0,4368 \text{ Нп/см}$$

$$\beta = \alpha/2,3 = 0,1899 \text{ Б/см.}$$

Эти значения почти в 2 раза больше, чем полученные экспериментально  $\alpha = 2,3\beta = 0,1969 \text{ Нп/см}$  и  $\beta = -\gamma/z = 0,0855 \text{ Б/см}$ .

Полученная нами формула  $\alpha = ik_z$  гораздо лучше описывает практические результаты

$$\alpha_{th} = 0,218 \text{ Нп/см} \quad \alpha_{ex} = 0,197 \text{ Нп/см}$$

$$\beta_{th} = 0,095 \text{ Б/см} \quad \beta_{ex} = 0,086 \text{ Б/см}$$