

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Электромагнитные волны в волноводах

выполнила студентка 653 группы ФФКЭ

Карпова Татьяна

Долгопрудный, 2017 г.

1 Цель работы

Ознакомление с методами получения и анализа электромагнитных волн СВЧ - диапазона

2 В работе используются:

- генератор СВЧ типа Г4-83
- измерительная линия Р1-28
- усилитель 28 ИМ
- заглушка
- отрезок волновода с поглощающей нагрузкой
- отрезки волноводов различных сечений
- детекторная головка

3 Теоретические положения

В СВЧ-диапазоне энергия передаётся с помощью металлических труб, называемых волноводами (в миллиметровом диапазоне длин волн волноводы могут быть сделаны и из диэлектрика). Электромагнитные волны могут распространяться по металлическим трубам любого профиля, но из технологических соображений сечения волноводов делаются либо круглыми, либо прямоугольными.

Построим э.м. поле в волноводе, складывая падающую и отражённые от стенок плоские волны. Такой метод называется *концепцией Бриллюэна*.

Абсолютное значение волнового вектора \mathbf{k} - волновое число - равно

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_{ph}} \quad (1)$$

Уравнения падающей и отражённой электромагнитных волн:

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - k_1 r)} \quad (2)$$

$$E_1 = -E_0 e^{i(\omega t - k_2 r)}, \quad (3)$$

где $k_1 = k_2 = \frac{\omega}{c}$. Проекции волновых векторов на оси координат:

$$k_{1x} = -k \cos \theta, \quad k_{2x} = k \cos \theta, \quad k_{1z} = k \sin \theta, \quad k_{2z} = k \cos \theta, \quad (4)$$

Суммарное электрическое поле в точке М:

$$E = E_0 [e^{i(\omega t - k_1 r)} - e^{i(\omega t - k_2 r)}] \quad (5)$$

Подставляя в (5) координаты вектора $\mathbf{r}(x, 0, z)$ и значения \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 из (4),

$$E = 2iE_0 \sin(kx \cos \theta) e^{i\omega(t - z \sin \theta / c)} \quad (6)$$

Это выражение описывает волну с амплитудой

$$2iE_0 \sin(kx \cos \theta), \quad (7)$$

бегущую в направлении z с фазовой скоростью

$$v_{ph} = \frac{c}{\sin \theta} \quad (8)$$

Отметим две важные особенности этой волны: 1) её фазовая скорость больше скорости света; 2) при фиксированном угле амплитуда поля гармонически зависит от x и не меняется со временем.

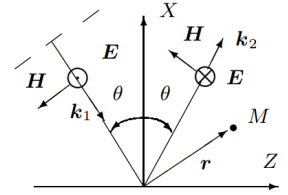


Рис. 1: Отражение плоской волны от проводящей плоскости

Иначе говоря, в результате интерференции падающей и отражённой волн в пространстве над проводящей поверхностью в направлении оси X образуется система стоячих волн. Электрическое поле стоячей волны равно нулю в точках, где $kx \cos \theta = n\pi$, т.е. там, где

$$x = \frac{n\pi}{k \cos \theta} \quad (9)$$

Мы показали, что в волноводе прямоугольного сечения может распространяться э.м. волна, которую в пределах волновода можно рассматривать как результат суперпозиции двух плоских волн. Каждая плоская волна является чисто поперечной, так что электрическое и магнитное поля перпендикулярны к направлению их распространения. В суммарной волне электрическое поле имеет только составляющую E_y и, следовательно, перпендикулярно оси волновода, а магнитное поле имеет составляющие H_x и H_z .

Электромагнитное поле в волноводе не является чисто поперечным, а имеет продольные составляющие.

Если даны две параллельные проводящие плоскости, расположенные на расстоянии a друг от друга, то между ними могут распространяться волны, если

$$\cos \theta_n = \frac{n\pi}{ka} = \frac{n\lambda_0}{2a} = \frac{n}{a\omega}, \quad (10)$$

где λ_0 – длина волны в свободном пространстве.

Движение э.м. волны по волноводу возможно, если углы падения подчиняются условию

$$\cos \theta_n = \frac{n\lambda_0}{2a} \leq 1 \quad (11)$$

Нижняя критическая частота волны

$$\omega_{cr} = \frac{\pi c}{a} \quad (12)$$

и верхняя критическая длина волны

$$\lambda_{cr} = 2a \quad (13)$$

соответствуют $n = 1$

Выражение для фазовой скорости э.м. волны, распространяющейся в волноводе:

$$v_{ph} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{cr}/\omega)^2}} \quad (14)$$

Фазовая скорость (скорость перемещения поверхности постоянной фазы $v + p + h = \omega/k$) в волноводе больше скорости света в пустоте, а групповая (скорость распространения возмущения $u = d\omega/dk$) всегда меньше.

Волновое число k_z , описывающее распространение волны вдоль волновода:

$$k_z = \frac{\omega}{v_{ph}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - (\frac{\omega_{cr}}{\omega})^2} \quad (15)$$

При частотах $\omega < \omega_{cr} = \pi c/a$ волны вдоль трубы экспоненциально затухают. Поэтому критическую частоту называют граничной частотой волновода.

Преобразуя соотношение (15), можно связать длины волн в волноводе (λ_w), в открытом пространстве (λ_0) и критическую (λ_{cr}):

$$\frac{1}{\lambda_w^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{cr}^2} \quad (16)$$

В случае прямоугольного волновода с поперечными размерами a и b все возможные критические длины волн определяются общей формулой

$$\lambda_{cr} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{m}{2a})^2 + (\frac{n}{2b})^2}}$$

Величина m представляет собой полное число полупериодов изменения той или иной составляющей поля вдоль пути, идущего параллельно широкой стенке волновода (a), а n — то же для узкой стенки (b).

Если в волноводе имеется какое-либо препятствие, нерегулярность (в предельном случае он просто закрыт металлической пластиной), то в нём появляется отражённая волна. Падающая и отражённая волны интерферируют и создают в волноводе стоячую волну. Прямая волна, движущаяся в положительном направлении оси Z :

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - k_z z)},$$

а отражённая -

$$E_2 = \rho E_0 e^{i(\omega t + k_z z + \phi)}, \quad (17)$$

где ρ — коэффициент отражения по амплитуде, а ϕ — фаза отражённой волны. Суммарное поле в волноводе имеет вид

$$E(z) = E_1 + E_2 = E_0 e^{-ik_z z} (1 + \rho e^{i(2k_z z + \phi)}) e^{i\omega t} = A_0 e^{i\omega t}$$

Из этого выражения видно, что в каждом сечении волновода ($z = \text{const}$) поле зависит от времени по гармоническому закону, а квадрат амплитуды равен

$$A_0^2 = E_0^2 [1 + \rho^2 + 2\rho \cos(2k_z z + \phi)] \quad (18)$$

Максимальное (в пучности) и минимальное (в узле) значения поля равны соответственно:

$$E_{max} = E_0(1 + \rho), \quad E_{min} = E_0(1 - \rho) \quad (19)$$

Из формулы (18) следует, что расстояние l между соседними узлами (или пучностями) составляет

$$l = \frac{\pi}{k_z} = \frac{\lambda_w}{2} \quad (20)$$

Это даёт удобный способ измерения длины волны в волноводе. Отношение

$$K = \frac{E_{max}}{E_{min}} \quad (21)$$

называется коэффициентом стоячей волны (к.с.в.). Из (19) следует, что коэффициент отражения от препятствия по амплитуде

$$\rho = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}} = \frac{K - 1}{K + 1} \quad (22)$$

В случае полного отражения (металлическая заглушка) $\rho = 1$, а если в волновод вставлено вещество, поглощающее СВЧ-излучение (согласованная нагрузка), то $\rho = 0$.

4 Экспериментальная установка

4.1 Волны в волноводе при частоте выше критической

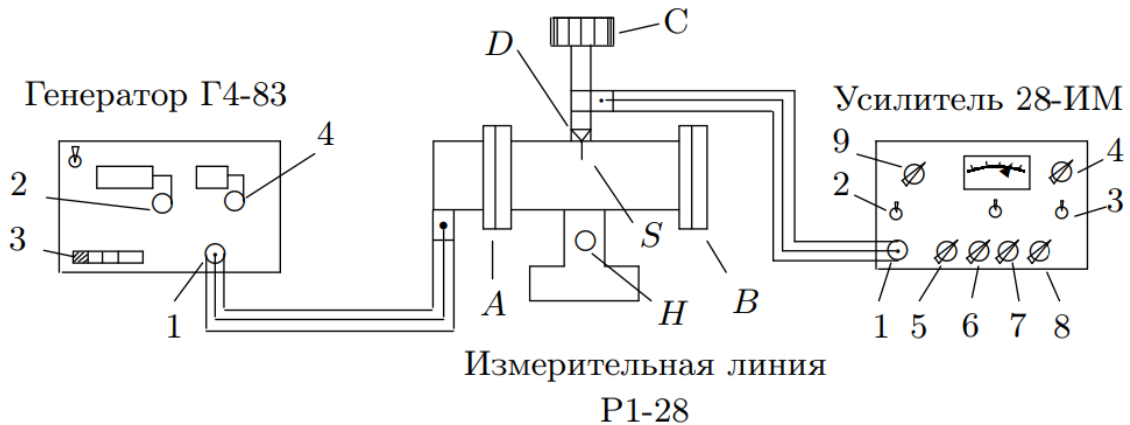


Рис. 2: Схема для исследования структуры волн СВЧ

Схема для исследования структуры волн в волноводе при частоте выше критической представлена на рис. 2. Модулированный сигнал от высокочастотного генератора (дуги с частотой повторения 1 кГц) поступает на вход А измерительной линии, вдоль которой перемещается зонд S. Высокочастотный сигнал с зонда поступает на кристаллический детектор D.

С нагрузки детектора (с RC-цепочки) снимается огибающая высокочастотного сигнала и подается на усилитель низкой частоты. Величина сигнала регистрируется вольтметром, вмонтированным в усилитель. Ручка С — настройка измерительной линии — служит для согласования зонда (как антенны) со входом усилителя. В волноводе с закрытым выходом образуется стоячая волна. Определив расстояние между узлами, можно рассчитать длину волны и фазовую скорость СВЧ-сигнала в волноводе. Устройство детекторной головки, установленной на измерительной линии, таково, что отклик вольтметра U на величину напряженности электрического поля E в волноводе пропорционален E^n

$$U \propto E^n, \quad (23)$$

а показатель степени n сам зависит от величины сигнала: при малых сигналах детектирование квадратичное ($n = 2$), при больших — линейное ($n = 1$). Если известно распределение поля $E(z)$ вдоль измерительной линии, то, изучив распределение $U(z)$, можно по графику $\ln(U) = f[\ln(E)]$ определить характер детектирования: в двойном логарифмическом масштабе любая степенная функция — прямая линия, по наклону которой можно определить n . Распределение $E(z)$ нетрудно рассчитать для волновода с закороченным концом (металлической заглушкой), когда фаза отраженной волны $\phi = \pi$, а $\rho = 1$. Как следует из (17), электрическое поле в этом случае имеет вид:

$$E(z) = E_0 e^{-ik_1 z} (1 - e^{2ik_z z}) e^{i\omega t} = E_0 e^{i\omega t} (e^{-ik_1 z} - e^{ik_1 z}) = 2E_0 e^{i\omega t} \sin(k_z z) \propto \sin(k_z z), \quad (24)$$

где z — смещение от узла.

Меняя нагрузку на выходе измерительной линии (В на рис. 2) и сравнивая максимальное и минимальное показания вольтметра, можно рассчитать коэффициент стоячей волны (к.с.в.) и коэффициент отражения ρ .

4.2 Волны в волноводе при частоте ниже критической

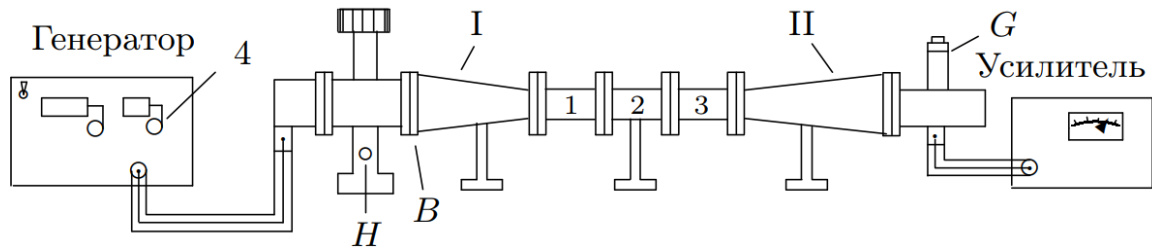


Рис. 3: Схема для исследования затухания

Для исследования затухания волн в волноводе при частоте ниже критической используются те же генератор, усилитель, измерительная линия и дополнительный набор волноводов с отдельной детекторной головкой G (рис. 3). Дополнительный набор начинается и заканчивается волноводами переменного сечения I и II. Между ними можно разместить 1, 2 или 3 одинаковых отрезка с постоянным сечением. В такой системе волны с частотами меньше критической экспоненциально затухают.

Мощность сигнала на выходе из волновода W можно связать с мощностью входного сигнала W_0 двумя способами:

$$W = W_0 e^{-\alpha z} \text{ или } W = W_0 10^{-\beta z}, \text{ } z - \text{длина волновода.}$$

Коэффициент (αz) измеряется в неперах (Нп). 1 непер соответствует отношению интенсивностей, равному основанию натуральных логарифмов. Коэффициент (βz) принято измерять в децибелах [дБ]: один бел соответствует уменьшению мощности в 10 раз; децибел — одна десятая бела. Измеренное в децибелах затухание определяется формулой

$$(\beta z) = 10 \lg \frac{W_0}{W}$$

Из этого определения вытекает, что

$$\alpha = 2,3\beta \quad (25)$$

Как следует из (17), в закритическом волноводе при квадратичном детектировании интенсивность сигнала падает по закону $E^2 \propto e^{-\alpha z}$, где — коэффициент затухания:

$$\alpha = 2ik_z$$

Подставляя волновое число из (15) и заменяя частоты с помощью (10) и (12), найдём

$$\alpha = 2ik_z = \frac{2\omega}{c} \sqrt{\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{2\pi}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2} \quad (26)$$

Здесь $\lambda_0 = c/\nu = 3,22$ см — длина волны в свободном пространстве, соответствующая рабочей частоте $\nu = 9320$ МГц, $a = 1,6$ см — размер широкой стенки волновода-вставки.

5 Выполнение работы

5.1 Исследование структуры волн при частоте выше критической

5.1.1 Определение длины волны СВЧ-сигнала в волноводе

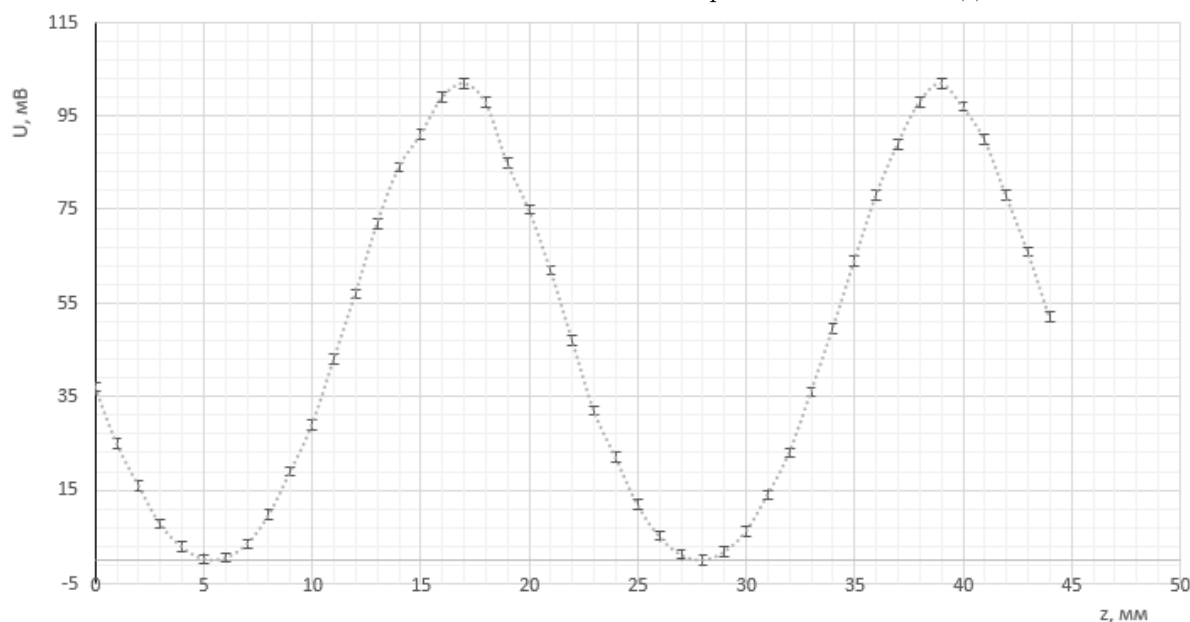
1. Определим критическую частоту для данного волновода по формуле $\nu_{cr} = c/2a = 6517$ МГц ($a = 23$ мм), она больше рабочей частоты 9320 МГц. Проведём настройку приборов.
2. Снимем зависимость показаний вольтметра U от положения зонда z . Результаты занесём в таблицу 1.

Таблица 1: Показания вольтметра в зависимости от положения зонда на измерительной линии

U , мВ	37	25	16	7,8	2,9	0,3	0,54	3,5	9,7	19	29	43	57	72	84
z , мм	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
U , мВ	91	99	101	98	85	75	62	47	32	22	12	5,2	1,25	0,09	1,8
z , мм	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
U , мВ	6,15	14	23	36	49,5	64	78	89	98	102	97	90	78	66	52
z , мм	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44

3. Построим график $U = f(z)$ (рис. 4) и определим по нему длину волны λ_w в волноводе. $\lambda_w = 22$ мм. Используя формулу (16), рассчитаем теоретическое значение длины волны в волноводе: $\lambda_w = \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{cr}^2}\right)^{-1/2} = 44,54$ мм

Рис. 4: Зависимость показаний вольтметра от положения зонда



Расстояние между соседними узлами в стоячей волне составляет $1/2$ длины свободной волны. По графику определяем длину свободной волны в волноводе $\lambda_w = 2l = 44,5$ мм. Она совпадает с длиной волны $\lambda_w = 44,54$ мм, рассчитанной теоретически. Отсюда можем судить, что в данном режиме работы зонд исправен и даёт точные показания.

Длина волны в свободном пространстве $\lambda_0 = 32,2$ мм меньше критической длины волны $\lambda_{cr} = 46$ мм.

Фазовая скорость волн в волноводе из (14) $v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_{cr}/\omega)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-(\nu_{cr}/\nu)^2}} = 419361,71$ км/с, $v_{ph} > c$. Это не противоречит законам, так как с такой скоростью перемещаются узлы волн, при этом не передаётся ни энергия, ни информация (именно они не могут передаваться со скоростью, большей скорости света в вакууме).

Групповая скорость $u = \frac{c^2}{v_{ph}} = 214315,04$ км/с.

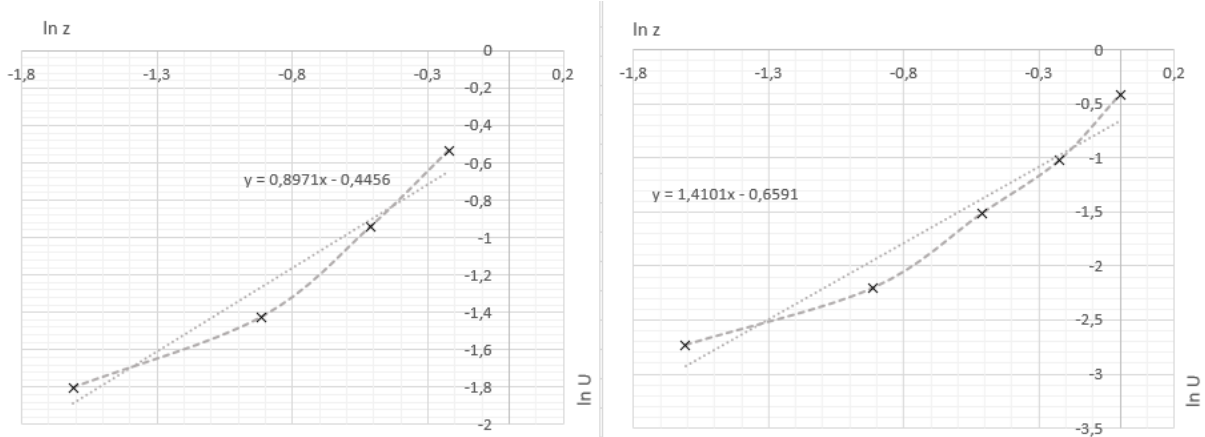
5.1.2 Определение характера детектирования

1. Перемещая зонд вблизи узла 28 мм, оценим диапазон измерений вольтметра U. Снимем зависимость U от координаты зонда вблизи узла ($z = \pm 1$ мм), фиксируя значения множителей K_5 и K_9 . Результаты занесём в таблицу 2.

Таблица 2: Изменение показаний вольтметра при перемещении вблизи узла

U , мВ	0,83	0,59	0,39	0,24	0,17	0,08	0,07	0,11	0,22	0,36	0,66
z , мм	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Рис. 5: Определение характера детектирования зонда по графикам



2. Аппроксимируя зависимость $\ln(U) = f(\ln(z))$ к прямой и вычисляя коэффициент наклона аппроксимирующей прямой, определяем характер детектирования зонда. Коэффициент при аргументе примерно равен 1, если принять во внимание оба графика - *характер детектирования в этом эксперименте линейный*

5.1.3 Определение коэффициентов отражения

1. Снимем металлическую заглушку с фланца измерительной линии, измерим максимальное и минимальное напряжения в волне

$$U_{max} = 162 \text{ мВ} \quad U_{min} = 43 \text{ мВ}$$

2. Наденем на выходной фланец измерительной линии отрезок волновода с поглощающей нагрузкой, измерим максимальное и минимальное напряжения в волне

$$U_{max} = 96 \text{ мВ} \quad U_{min} = 71 \text{ мВ}$$

3. По формуле (22) определим коэффициенты отражения от препятствия по амплитуде для открытого, закрытого волновода и для волновода с поглощающей нагрузкой

$$\rho_{closed} = 0,998 \quad \rho_{opened} = 0,580 \quad \rho_{load} = 0,151$$

Только по значениям коэффициентов отражения можно было бы определить состояние волновода. При $\rho \approx 1$ волновод наглухо закрыт металлической заглушкой ($\rho_{closed} = 0,998$), при $\rho \approx 0$ на конце волновода поставлено вещество, поглощающее СВЧ-излучение ($\rho_{load} = 0,151$). Воздух не препятствует распространению СВЧ-волн, но в воздушной среде при распространении излучение становится менее интенсивным ($\rho_{opened} = 0,580$)

5.2 Исследование затухания волн при частоте ниже критической

1. Соберем схему согласно рис. 3, измерим длину каждой секции.

$$\begin{array}{lll} l_{gold} = 4,95 \text{ см} & l_{blue} = 3,95 \text{ см} & l_{white} = 5,7 \text{ см} \\ l_{var} = 14,5 \text{ см} & l_{line} = 15,3 \text{ см} & l_{det} = 10,1 \text{ см} \end{array}$$

Критическая частота для этого эксперимента $\nu_{cr} = c/2a = 9368,5$ МГц, рабочая частота $\nu = 9320$ МГц $< \nu_{cr}$

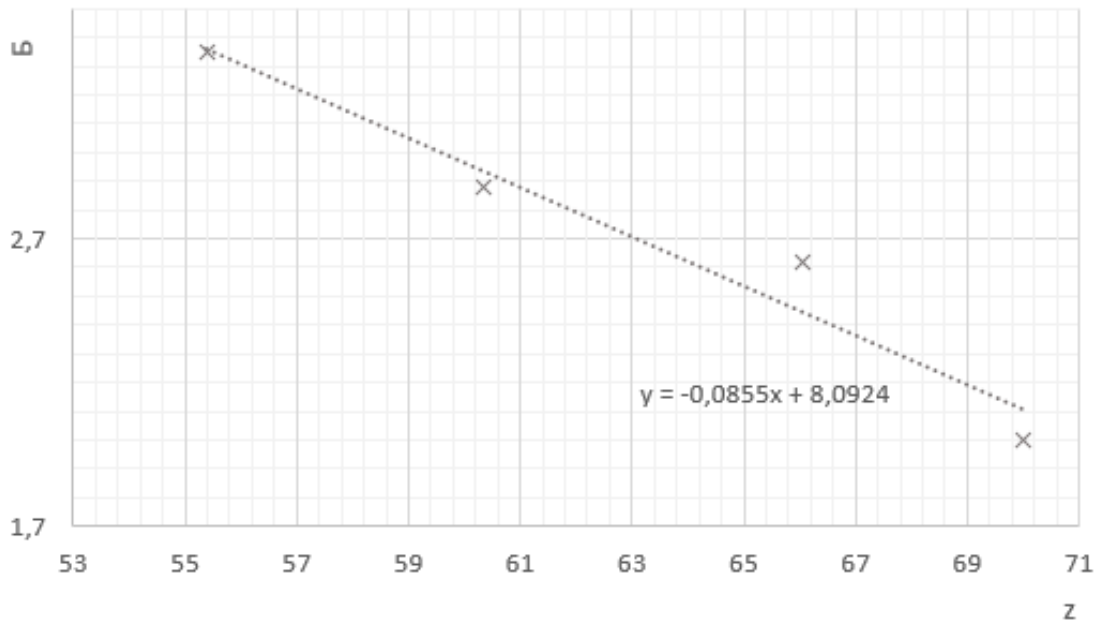
2. Последовательно уменьшая количество секций волновода от трёх до нуля, будем подбирать такое ослабление γ с генератора, чтобы показания вольтметра на усилителе ($U = 5$ мВ) оставались неизменными. Результаты занесём в таблицу 3.

Таблица 3: Зависимость ослабления от длины волновода

γ , дБ	20	26,2	28,8	33,45
z , см	70	66,05	60,35	55,4

3. Построим график зависимости ослабления γ от длины волновода z (рис. 6)

Рис. 6: Зависимость ослабления входящего сигнала от длины волновода



По углу наклона графика определим значение коэффициента затухания β : $\beta = -\gamma/z = 0,0855$ Б/см. Тогда коэффициент $\alpha = 2,3\beta = 0,1969$ Нп/см.

Рассчитаем теоретические значения коэффициентов α и β . Если при квадратичном детектировании интенсивность сигнала падает по закону $E^2 \propto e^{-\alpha z}$, где $\alpha = 2ik_z$, то при линейном детектировании $E \propto e^{\alpha z}$ или $\alpha = ik_z$. Тогда, преобразовав формулу (26) по линейный характер детектирования, получим, что

$$\alpha = ik_z = \frac{\pi}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2} = 0,2184 \text{ Нп/см}$$

$$\beta = \alpha/2,3 = 0,0950 \text{ Б/см.}$$

В итоге, сравнивая теоретические и экспериментальные данные:

$$\begin{array}{ll} \alpha_{th} = 0,218 \text{ Нп/см} & \alpha_{ex} = 0,197 \text{ Нп/см} \\ \beta_{th} = 0,095 \text{ Б/см} & \beta_{ex} = 0,086 \text{ Б/см} \end{array}$$

Результаты, полученные теоретически и экспериментально, практически совпадают. Примечательно, что если бы мы использовали формулу для квадратичного детектирования, указанную в указании к работе, результаты бы не совпали (см. вывод)

6 Вывод

В ходе работы было исследовано распространение СВЧ-волн в волноводах различных сечений. Проанализированы результаты измерения различных параметров волн при их частоте выше и ниже критической для соответствующего волновода.

1. Была измерена длина волны в волноводе при частоте выше критической. Передвигая зонд, подсоединённый к усилителю с вольтметром, измерялась величина СВЧ-сигнала (стоячая волна). Данным методом получилось с большой точностью определить длину волны в волноводе:

$$\lambda_{w(th)} = 44,54 \text{ мм} \quad \lambda_{w(ex)} = 44,50 \text{ мм}$$

Также определена фазовая скорость волны в волноводе

$$v_{ph} = 419361,71 \text{ км/с}$$

и её групповая скорость

$$u = 214315,04 \text{ км/с.}$$

2. Определён характер детектирования зонда при малых сдвигах от местоположения узла волны. Он оказался линейным, а не квадратичным.
3. Определены коэффициенты отражения волны от разных материалов - металлическая заглушка, воздушное пространство и поглощающая нагрузка.

$$\rho_{closed} = 0,998 \quad \rho_{opened} = 0,580 \quad \rho_{load} = 0,151$$

Действительно, в теории коэффициент отражения от металлической заглушки ≈ 1 , от поглощающей нагрузки ≈ 0

4. Было исследовано затухание СВЧ-волн при частоте ниже критической. В этом пункте при выполнении работы были замечены значительные несоответствия теории, предложенной в указании к работе, и экспериментальными данными.

- Во-первых, формула $\gamma = \beta z$ неверна чисто с логической точки зрения. β – коэффициент затухания - по определению $\beta z = 10 \lg \frac{W_0}{W}$ должен быть больше нуля (так как при длине волны ниже критической мощность сигнала на входе W_0 , очевидно, больше мощности на выходе W). С другой стороны, при *уменьшении* длины волновода для того, чтобы сигнал на выходе оставался тем же, нужно *ослаблять* входящий сигнал, то есть увеличивать ослабление. Таким образом, при уменьшении z должна увеличиваться γ , но при $\beta > 0$ и $\gamma = \beta z$ это не выполняется. Получается, нужная нам формула

$$\boxed{\gamma = -\beta z}.$$

- Во-вторых, в описании к работе указаны формулы, принимая, что детектирование зонда квадратичное. Учитывая результаты измерений п. 5.1.2, мы вывели формулу для линейного характера детектирования и получили значения коэффициентов затухания α и β , очень близкие к практическим. Теперь посчитаем теоретические значения этих коэффициентов для квадратичного детектирования.

$$\alpha = 2ik_z = \frac{2\pi}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2} = 0,4368 \text{ Нп/см}$$

$$\beta = \alpha/2,3 = 0,1899 \text{ Б/см.}$$

Эти значения почти в 2 раза больше, чем полученные экспериментально $\alpha = 2,3\beta = 0,1969 \text{ Нп/см}$ и $\beta = -\gamma/z = 0,0855 \text{ Б/см}$.

Полученная нами формула $\alpha = ik_z$ гораздо лучше описывает практические результаты

$$\alpha_{th} = 0,218 \text{ Нп/см} \quad \alpha_{ex} = 0,197 \text{ Нп/см}$$

$$\beta_{th} = 0,095 \text{ Б/см} \quad \beta_{ex} = 0,086 \text{ Б/см}$$