学号________ 密 姓名________ 封 年级________ 专业________ 线 学院________

西南大学　数学与统计学院

《　线性代数Ⅰ》课程试题 【A】卷参考答案和评分标准

2020～2021 学年　第 1 学期								期末考试	
考试时间	120 分钟	考核方式		闭卷笔试	学生类别		本科	人数	
适用专业或科类		经济管理学院各专业					年级	2019 级	
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	合计
得分										
签名										

阅卷须知：阅卷用红色墨水笔书写，得分用阿拉伯数字写在每小题题号前，用正分表示，不得分则在题号前写 0；大题得分登录在对应的分数框内；统一命题的课程应集体阅卷，流水作业；阅卷后要进行复核，发现漏评、漏记或总分统计错误应及时更正；对评定分数或统分记录进行修改时，修改人必须签名。

特别提醒：学生必须遵守课程考核纪律，违规者将受到严肃处

一、单项选择题（每小题列出的四个选项中只有一个选项最符合题目要求，请将其代码写在题前表格对应处。错选，多选或者漏选均不得分。共 10 题，每小题 3 分，共 30 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B	C	D	D	B	D	C	C	A

二、填空题（共 5 题，3 分/题，共 15 分）

1、负号　2、6　3、-3　4、1，-1　5、$\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$

三、计算题（5 道题，共 49 分）

1.（7 分）计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

解：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 & 14 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 9 & 20 \\ 0 & 11 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 9 & 20 \\ 11 & 2 & 12 \end{vmatrix}$ （4 分）

$=7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 11 & 2 & 12 \end{vmatrix}=126$ （7 分）

2.（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$，且 $BA=A+B$，求矩阵 B

解：由 $BA=A+B$ 得 $B(A-E)=A$，（2 分）

$A-E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ （3 分）

$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ （7 分）

所以 $B=A(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ （10 分）

3.（10 分）求向量组

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 的一个极大无关组，并将其余向量用这一极大无关组表示出来。

解：令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-1\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{pmatrix}$ （2 分）

$$A\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ （6 分）

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大无关组 （8 分）

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$ （10 分）

4.（10 分）设线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=1\\x_1-2x_2-x_3+x_4=-1\\x_1-2x_2+5x_3+x_4=a\end{cases}$$

当实数 a 为何值时，方程组无解、有唯一解或无穷多解。并在有解时求出其通解。

解：对增广矩阵实行初等行变换化为

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\1&-2&-1&1&-1\\1&-2&5&1&a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&4&0&a-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&a-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&a-5\end{pmatrix}$$

（4 分）

1) 当 $a\neq5$ 时，方程组无解 （5 分）

2) 当 a=5 时，方程组有无穷多解 （6 分）

特解为 $\xi_0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ (7 分)

基础解系为 $\eta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ ，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ (9 分)

通解为 $\xi=\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$,其中 c_1, c_2 为任意常数。 (10 分)

5.（12 分）将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 通过正交线性替换 $X=PY$，化为标准形。

解：1）写出二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}$ （2 分）

2）求其特征值 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\2&4&\lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9)=0$，特征值为

$\lambda_1=9,\ \lambda_1=\lambda_2=18$ （4 分）

3）将 $\lambda_1=9$ 代入 $(\lambda E-A)x=\theta$，得基础解系 $\xi_1=(\frac{1}{2},1,1)^T$

将 $\lambda_2=\lambda_3=18$ 代入 $(\lambda E-A)x=\theta$，得基础解系 $\xi_2=(-2,1,0)^T,\xi_3=(-2,0,1)^T$ （8 分）

4） 特征向量正交化

取 $\alpha_1=\xi_1,\alpha_2=\xi_2,\alpha_3=\xi_3-\dfrac{(\alpha_2,\xi_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2$,

将其单位化得：

$\eta_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{45}\\-4/\sqrt{45}\\5/\sqrt{45}\end{pmatrix}$ （10 分）

5）得正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45}\\2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45}\\2/3 & 0 & 5/\sqrt{45}\end{pmatrix}$，所求正交线性替换为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

原二次型化为标准形 $f=9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$ （12 分）

四、（6 分）证明题

已知 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\beta)=3$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\beta$ 线性无关。

证明：由 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关得 α_3 可由 α_1,α_2 线性表出即

$\alpha_3=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$, （2 分）

若存在 $k_1,k_2,k_3\in P$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_3-\beta)=\theta$ （3 分）

将 $\alpha_3=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$, 代入得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(c_1\alpha_1-c_2\alpha_2-\beta)=(k_1+k_3c_1)\alpha_1+(k_2-k_3c_2)\alpha_2-k_3\beta=\theta$

因为 $r(\alpha_1,\alpha_2,\beta)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\beta$ 线性无关，从而 $\begin{cases}k_1+k_3c_1=0\\k_2-k_3c_2=0\\k_3=0\end{cases}$，（5 分）

进一步得 $\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\beta$ 线性无关。（6 分）