UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Modelare probabilistică a pierderilor în jocurile de noroc de tip slots

LUCRARE DE LICENȚĂ

Coordonator Științific:
Lect. dr. Albişoru Andrei-Florin

Absolvent:
Filipovici Sebastian-Ionel

2025

Abstract

This essay analyzes the mathematical principles involved in slot-machine gambling, using probability theory, mathematical statistics, and Monte Carlo simulations. We demon- on both theoretical and empirical reasons, why the players are statistically doomed to lose in the long run. The research blends traditional theorems, tangible examples, and nume- computer simulations to edify and sensitize the public to the risks of gambling.

Cuprins

Introducere

Jocurile de noroc au fascinat omenirea de secole, atrăgând oamenii prin promisiunea câștigurilor rapide. Astăzi, în era digitală, jocurile de tip slot-machine au devenit unele dintre cele mai răspândite forme de divertisment în industria gamblingului, fiind prezente atât în sălile de jocuri, cât și în mediul online.

Cu toate acestea, în spatele luminilor colorate și al sunetelor captivante, slot-machine-urile funcționează pe baza unor mecanisme matematice precise, gândite astfel încât, pe termen lung, avantajul să revină întotdeauna *casei*, iar jucătorii să fie, inevitabil, în pierdere. Mulți jucători ignoră aceste realități, mizând pe noroc sau pe diverse strategii, fără a înțelege cu adevărat șansele implicate.

Scopul acestei lucrări este de a analiza, dintr-o perspectivă matematică riguroasă, probabilitatea reală de câștig la jocurile de tip slots și de a arăta, cu ajutorul teoriei probabilităților, al statisticii și al simulărilor numerice, de ce jucătorii nu pot ieși în avantaj pe termen lung. Ne propunem astfel să oferim o imagine clară și bine fundamentată științific asupra mecanismelor care stau la baza acestor jocuri.

Structura lucrării este următoarea:

- **Capitolul 1** prezintă noțiunile fundamentale din teoria probabilităților, necesare pentru înțelegerea fenomenelor aleatorii;
- **Capitolul 2** introduce modelele matematice specifice jocurilor de tip slots;
- **Capitolul 3** discută concepte esențiale din statistica matematică;
- **Capitolul 4** conține demonstrații clare care explică de ce avantajul casei nu poate fi învins;
- **Capitolul 5** utilizează simulări Monte Carlo pentru a ilustra numeric comportamentul pe termen lung;
- **Capitolul 6** abordează implicațiile sociale ale gamblingului și prezintă aplicația web dezvoltată ca instrument educațional;
- **Capitolul 7** oferă concluziile generale și sugestii pentru cercetări viitoare.

Contribuția personală constă în selectarea și organizarea materialului teoretic, adaptarea demonstrațiilor la contextul jocurilor de noroc, realizarea unor simulări relevante și dezvoltarea unui instrument online menit să ajute publicul larg să înțeleagă riscurile asociate.

Prin această lucrare, ne dorim nu doar să demonstrăm matematic de ce „casa câștigă întotdeauna”, ci și să contribuim la creșterea gradului de conștientizare asupra riscurilor asociate jocurilor de noroc, în special în rândul celor tentați de iluzia câștigului rapid.

Capitolul 1

Introducere în teoria probabilităților

1.1 Spații de probabilitate și evenimente

Teoria probabilităților reprezintă ramura matematicii care studiază fenomenele aleatorii, adică acele situații în care rezultatul nu poate fi prezis cu certitudine, deși putem identifica toate rezultatele posibile. Este fundamentul matematic pe care sunt construite modelele jocurilor de noroc.

Definiții fundamentale

Definiție. Un *spațiu de probabilitate* este un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, unde:

- Ω este mulțimea tuturor rezultatelor posibile (numită și *spațiul mostrelor*);
- $\mathcal{F}$ este o familie de subseturi ale lui Ω, numite *evenimente*;
- P este o funcție de probabilitate care asociază fiecărui eveniment $A \in \mathcal{F}$ un număr real $P(A)$ astfel încât:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$ pentru orice $A \in \mathcal{F}$;
  - $P(\Omega) = 1$;
  - pentru orice familie de evenimente disjuncte A_i ($A_i \cap A_j = \varnothing$ dacă $i \neq j$), avem:
  $$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

Exemple simple

- Aruncarea unui zar cu șase fețe: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, iar pentru fiecare i, $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$.
- Aruncarea unei monede: $\Omega = \{\text{Cap}, \text{Pajură}\}$, $P(\text{Cap}) = P(\text{Pajură}) = \frac{1}{2}$.
- O rotire la slot-machine: $\Omega =$ toate combinațiile de simboluri pe role, fiecare având o anumită probabilitate calculată în funcție de configurația aparatului.

Evenimente și operații între evenimente

Definiție. Un *eveniment* este orice subset al lui Ω. **Eveniment elementar** = un singur rezultat (ex. „la zar iese 4"); **Eveniment compus** = o mulțime de rezultate (ex. „la zar iese par").

Operații:

- Reuniune: $A \cup B$ („A sau B apare");
- Intersecție: $A \cap B$ („A și B apar simultan");
- Complement: $\overline{A}$ („A nu apare").

Proprietăți ale probabilității

- Monotonie: dacă $A \subseteq B$, atunci $P(A) \leq P(B)$;
- Subaditivitate: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$;
- Formula probabilității complementare: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Aplicare la slot-machine

La slot-machine, fiecare rotire are un set fix de rezultate posibile Ω (ex. combinații de simboluri), iar fiecare combinație are o probabilitate asociată. În general, aceste probabilități nu sunt egale, ci sunt ajustate de către producător pentru a garanta un anumit profit pe termen lung (house edge). Analiza probabilistică ne permite să estimăm frecvența câștigurilor și șansele de a obține combinații favorabile.

1.2 Variabile aleatoare și distribuții

Definiții fundamentale

Definiție. O *variabilă aleatoare* (v.a.) este o funcție care asociază fiecărui rezultat ω din spațiul Ω un număr real $X(\omega)$. Cu alte cuvinte, variabila aleatoare traduce evenimentele abstracte în valori numerice, permițând calculul de medii, variante și alte caracteristici numerice.

Exemplu simplu:

- Aruncarea unui zar: $X(\omega) =$ numărul ieșit.
- Slot-machine: $X(\omega) =$ câștigul obținut la o rotire (ex. 0 RON, 5 RON, 10 RON etc.).

Funcția de distribuție de probabilitate

Definiție. Dacă X este o variabilă aleatoare discretă, *funcția sa de distribuție* este:

$$P_X(x) = P(X = x),$$

adică probabilitatea ca X să ia valoarea x.

Exemplu: Dacă aruncăm un zar echilibrat:

$$P_X(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Caz slot-machine: Probabilitățile $P_X(x)$ reflectă șansa fiecărui câștig:

$$P_X(0 \text{ RON}) = 0.75, \quad P_X(5 \text{ RON}) = 0.2, \quad P_X(10 \text{ RON}) = 0.05,$$

unde 75% din rotiri nu aduc câștig, 20% aduc 5 RON, iar 5% aduc 10 RON.

Funcția de distribuție cumulativă (FDC)

Definiție. FDC-ul (sau CDF în engleză) al lui X este:

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Exemplu: Pentru zar,

$$F_X(3) = P(X \leq 3) = \frac{3}{6} = 0.5.$$

Utilitate: FDC-ul arată „cât de jos” este distribuită o valoare, fiind foarte util în calculul probabilităților cumulative.

Interpretarea variabilelor aleatoare în exemplul cu zaruri

În exemplul clasic al aruncării unui zar, variabila aleatoare X ia valori numerice corespunzătoare feței superioare a zarului după aruncare. Spațiul de probabilitate este:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

iar funcția de distribuție de probabilitate este uniformă:

$$P_X(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Aceasta înseamnă că:

- fiecare rezultat $1, 2, \ldots, 6$ are șanse egale de $16.\overline{6}\%$;
- distribuția este simetrică, fără valori favorizate sau defavorizate;
- se pot calcula ușor caracteristici precum media aritmetică a rezultatelor ($E[X]$), varianța sau distribuția cumulativă.

De exemplu, dacă definim câștigul ca suma egală cu fața zarului, câștigul mediu per aruncare este:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{6} x \cdot P_X(x) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5.$$

Astfel de modele simple ajută la înțelegerea noțiunilor fundamentale de probabilitate, înainte de a trece la aplicații mai complexe, cum sunt cele din jocurile de noroc.

Distribuții discrete importante

- **Distribuția binomială:** Probabilitatea de a obține k succese din n încercări independente, fiecare cu probabilitate p:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

  Exemplu: numărul de rotiri câștigătoare în 100 de jocuri.

- **Distribuția geometrică:** Probabilitatea ca primul succes să apară la încercarea k:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

  Exemplu: numărul de rotiri până la primul câștig.

- **Distribuția negativ binomială:** Extinderea geometrică pentru r succese, nu doar unul:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Aplicare la slot-machine

Într-un slot-machine, fiecare rotire poate fi modelată ca o variabilă aleatoare X ce ia valori numerice corespunzătoare câștigurilor. De exemplu, dacă 75% dintre rotiri sunt pierderi, 20% câștiguri mici și 5% câștiguri mari, atunci X are o distribuție discretă compusă, iar prin agregarea mai multor rotiri putem modela întreg comportamentul jucătorului.

Analiza acestor variabile aleatoare este esențială pentru a calcula speranța matematică, varianța și alte caracteristici pe care le vom studia în capitolele următoare. Aceasta va sta la baza demonstrațiilor referitoare la avantajul matematic al casei.

1.3 Teoreme fundamentale: formula probabilității totale, teorema lui Bayes, legea numerelor mari

Formula probabilității totale

Enunț. Fie $B_1, B_2, \ldots, B_n$ o partiție a spațiului Ω (adică evenimente disjuncte două câte două, a căror reuniune este Ω). Atunci, pentru orice eveniment A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i).$$

Interpretare. Probabilitatea unui eveniment poate fi calculată împărțind universul în cazuri disjuncte și ponderând probabilitățile condiționate.

Exemplu (slot-machine): Fie B_1 = „joacă pe linia 1”, B_2 = „joacă pe linia 2”, A = „obține câștig”. Dacă știm probabilitățile condiționate $P(A \mid B_i)$ și șansele de alegere $P(B_i)$, putem calcula probabilitatea totală de câștig:

$$P(A) = P(A \mid B_1) P(B_1) + P(A \mid B_2) P(B_2).$$

Teorema lui Bayes

Enunț. Dacă $B_1, B_2, \ldots, B_n$ este o partiție a lui Ω și A este un eveniment cu $P(A) > 0$, atunci:

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}.$$

Interpretare. Teorema lui Bayes permite recalcularea probabilităților evenimentelor „cauză” B_j, știind că s-a produs un „efect” A.

Exemplu (slot-machine): Dacă știm că un câștig a apărut (A), putem calcula probabilitatea ca el să fi venit de pe linia 1:

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A)}.$$

Legea numerelor mari (forma slabă)

Enunț. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente și identic distribuite, cu $E[X_i] = \mu$. Atunci:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu \quad \text{(în probabilitate, când } n \to \infty\text{)}.$$

Interpretare. Media aritmetică a observațiilor repetate converge către valoarea medie teoretică pe măsură ce crește numărul de observații.

Exemplu (slot-machine): Dacă jucătorul face un număr foarte mare de rotiri, câștigul mediu pe rotire se va apropia de speranța matematică a câștigului:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \approx E[X].$$

Implicație practică: Pe termen lung, casa își păstrează avantajul, iar jucătorii nu pot „învinge” statisticile prin volum de joc.

Legea numerelor mari (forma tare)

Enunț. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente și identic distribuite, cu $E[X_i] = \mu$ și $\mathrm{Var}[X_i] < \infty$. Atunci:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu\right) = 1.$$

Interpretare. Forma tare a legii numerelor mari afirmă că media aritmetică a observațiilor repetate nu doar că tinde în probabilitate către media teoretică, ci *aproape sigur* va converge către ea. Cu alte cuvinte, cu probabilitate 1, orice șir de rezultate suficient de lung va reflecta media așteptată.

Diferență față de forma slabă: Dacă forma slabă garantează o apropiere „probabilistică”, forma tare garantează o convergență efectivă, aproape sigură.

Exemplu (slot-machine): Pe termen foarte lung, un jucător care efectuează un număr foarte mare de rotiri va experimenta un câștig mediu pe rotire care converge aproape sigur către speranța matematică (în general negativă). Aceasta înseamnă că, indiferent de norocul pe termen scurt, avantajul casei se va manifesta inevitabil pe termen lung.

Relevanță pentru tema lucrării: Deși forma slabă a legii numerelor mari este suficientă pentru a arăta tendințele generale, forma tare întărește mesajul matematic: nu există strategie sau volum de joc care să poată învinge legea probabilității pe termen lung. Aceasta oferă un argument suplimentar în sprijinul mesajului educațional adresat jucătorilor.

1.4 Exemple introductive: aplicări simple ale noțiunilor

Pentru a înțelege mai bine conceptele prezentate anterior, vom discuta câteva exemple simple, care vor forma baza pentru modelele mai complexe din capitolele următoare.

Exemplul 1: aruncarea unui zar

Considerăm un zar obișnuit, cu fețe numerotate de la 1 la 6. Spațiul de probabilitate este:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

iar probabilitățile sunt egale:

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Variabila aleatoare X asociată aruncării zarului are distribuția:

$$P_X(i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6,$$

iar media aritmetică (speranța matematică) este:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5.$$

Interpretare: dacă aruncăm zarul de un număr mare de ori, media rezultatelor va tinde către 3.5, chiar dacă fiecare rezultat individual variază aleator.

Exemplul 2: probabilitate condiționată

Considerăm aruncarea unui zar și definim evenimentele:

$$A = \{\text{număr par}\} = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{\text{număr} \geq 4\} = \{4, 5, 6\}.$$

Calculăm:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5, \quad P(B) = \frac{3}{6} = 0.5,$$

și probabilitatea condiționată:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{4, 6\})}{0.5} = \frac{2/6}{0.5} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

Interpretare: știind că am obținut un număr ≥ 4, probabilitatea ca acesta să fie par crește la $2/3$.

Exemplul 3: slot-machine simplificat

Considerăm un slot-machine cu următoarele rezultate posibile:

$$0 \text{ RON} \quad (75\%), \quad 5 \text{ RON} \quad (20\%), \quad 10 \text{ RON} \quad (5\%).$$

Variabila aleatoare X ia valorile:

$$P_X(0) = 0.75, \quad P_X(5) = 0.20, \quad P_X(10) = 0.05,$$

iar speranța matematică este:

$$E[X] = 0 \cdot 0.75 + 5 \cdot 0.20 + 10 \cdot 0.05 = 0 + 1 + 0.5 = 1.5 \,\text{RON}.$$

Dacă miza per joc este 2 RON, atunci câștigul net mediu este:

$$E[X - 2] = 1.5 - 2 = -0.5 \,\text{RON},$$

ceea ce arată că jucătorul pierde, în medie, 0.5 RON pe rotire.

Interpretare: chiar dacă există șansa unor câștiguri ocazionale, pe termen lung, jucătorul va pierde bani constant, reflectând avantajul matematic al casei.

Capitolul 2

Modele matematice pentru jocurile de tip slots

2.1 Descriere formală a slot-machine-urilor

Jocurile de tip slot-machine sunt dispozitive electronice sau mecanice care permit jucătorilor să plaseze o miză și să rotească un set de role (reels) pe care sunt afișate diverse simboluri. La oprirea rolelor, combinația afișată pe o linie de plată (payline) determină dacă jucătorul câștigă sau pierde.

Elementele de bază ale unui slot-machine

- **Numărul de role (r):** Cele mai multe sloturi au între 3 și 5 role, fiecare conținând un set fix de simboluri.
- **Simboluri pe fiecare rolă (S_i):** Fiecare rolă are un număr finit de simboluri (ex. cireșe, bare, șeptari), iar unele simboluri pot apărea de mai multe ori.
- **Linii de plată (paylines):** Sunt secvențe predeterminate de poziții care definesc combinațiile câștigătoare.
- **Payout (câștiguri):** Fiecărei combinații câștigătoare îi este asociat un multiplicator al mizei.

Modelarea matematică

Pentru a modela matematic un slot-machine, considerăm:

- spațiul de probabilitate Ω, format din toate combinațiile posibile de simboluri afișate după o rotire;
- o variabilă aleatoare X care reprezintă câștigul obținut la o rotire;
- o distribuție de probabilitate $P_X(x)$ care reflectă frecvența fiecărui câștig posibil.

Exemplu simplu de model:

- 3 role ($r = 3$), fiecare cu 10 simboluri;

- 1 linie de plată;
- combinația „777" plătește jackpotul;
- probabilitatea apariției fiecărui simbol pe fiecare rolă: p_i (nu neapărat egală, simbolurile rare pot avea p_i mai mic).

Probabilitatea jackpotului:

$$P(777) = p_7^3,$$

unde p_7 este probabilitatea ca un „7" să apară pe o rolă.

Rolul producătorului

Producătorii ajustează frecvența simbolurilor astfel încât:

- să creeze impresia de câștiguri frecvente (câștiguri mici și frecvente);
- să mențină avantajul casei (house edge), adică un profit mediu stabil pe termen lung.

Aceasta face ca distribuția $P_X(x)$ să fie puternic dezechilibrată:

$$P_X(0 \text{ RON}) \gg P_X(\text{câștiguri mici}) \gg P_X(\text{jackpot}).$$

Importanța modelării matematice

Modelarea matematică permite:

- estimarea șanselor reale de câștig;
- calcularea câștigului mediu pe rotire;
- evaluarea riscului asumat de jucători;
- simularea rezultatelor pe termen lung.

În capitolele următoare, vom detalia cum distribuțiile binomiale, geometrice și negative binomiale se aplică în analiza slot-machine-urilor.

2.2 Modele probabilistice: distribuții binomiale, geometrice, negative binomiale

Pentru a înțelege cum putem analiza matematic comportamentul slot-machine-urilor, este esențial să folosim modele probabilistice care descriu distribuția evenimentelor de câștig și pierdere pe termen scurt și lung. Cele mai relevante distribuții în acest context sunt: binomială, geometrică și negativ binomială.

Distribuția binomială

Definiție. Distribuția binomială descrie numărul de succese (de exemplu, câștiguri) într-un număr fix de încercări independente, fiecare având aceeași probabilitate de succes p.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

unde:

- n = numărul de rotiri,
- k = numărul de câștiguri,
- p = probabilitatea de câștig la o rotire.

Exemplu aplicat: Dacă un slot-machine are $p = 0.2$ (20% șanse de câștig mic) și facem $n = 10$ rotiri, probabilitatea de a câștiga exact de 3 ori este:

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.2^3 (0.8)^7.$$

Distribuția geometrică

Definiție. Distribuția geometrică descrie numărul de încercări necesare până la primul succes.

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p,$$

unde:

- k = numărul rotirii la care apare primul câștig,
- p = probabilitatea de câștig la o rotire.

Exemplu aplicat: Cu $p = 0.2$, probabilitatea ca primul câștig să apară la a 5-a rotire:

$$P(X = 5) = (0.8)^4 \cdot 0.2.$$

Interpretare. Această distribuție arată „cât de răbdător” trebuie să fie un jucător până vede un câștig, reflectând riscul pe termen scurt.

Distribuția negativ binomială

Definiție. Distribuția negativ binomială descrie numărul de încercări necesare pentru a obține un număr fix r de succese.

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r},$$

unde:

- k = numărul total de rotiri,

- r = numărul de câștiguri dorit,
- p = probabilitatea de câștig la o rotire.

Exemplu aplicat: Pentru $p = 0.2$ și dorința de a obține $r = 3$ câștiguri în $k = 10$ rotiri:

$$P(X = 10) = \binom{9}{2} 0.2^3 (0.8)^7.$$

Rolul acestor modele

Aceste distribuții permit:

- estimarea frecvenței câștigurilor în serii de rotiri;
- evaluarea „norocului” jucătorului pe termen scurt;
- simularea performanței strategiei de joc (număr fix de rotiri, urmărirea câștigurilor, etc.);
- calcularea riscului de pierdere înainte de atingerea unui obiectiv.

În capitolele următoare, vom folosi aceste modele pentru a calcula speranța matematică, varianța câștigurilor și riscul ruinării.

2.3 Calculul avantajului casei

Notă introductivă: În această secțiune vom folosi un exemplu ipotetic simplificat, ales doar pentru a ilustra clar calculul speranței matematice și al avantajului casei (*house edge*). Valorile și probabilitățile prezentate nu reprezintă un standard universal al industriei, ci sunt utilizate strict în scop educativ.

Definiție

Avantajul casei (în engleză *house edge*) reprezintă procentul mediu din miză pe care cazinoul îl reține, pe termen lung, din fiecare rotire a unui slot-machine sau din fiecare joc de noroc.

Formal, avantajul casei se definește astfel:

$$\text{House Edge} = 1 - \frac{E[X]}{\text{Miza pe joc}},$$

unde:

- $E[X]$ = câștigul mediu (speranța matematică) per rotire;
- Miza pe joc = suma pe care jucătorul o pariază la fiecare rotire.

Calculul speranței matematice

Pentru a calcula $E[X]$, considerăm:

$$E[X] = \sum_x x \cdot P_X(x),$$

unde x sunt valorile posibile ale câștigului (inclusiv 0 RON), iar $P_X(x)$ este probabilitatea fiecărui câștig.

Exemplu aplicat:

$$P_X(0) = 0.75, \quad P_X(5) = 0.20, \quad P_X(10) = 0.05.$$

Calculul speranței:

$$E[X] = 0 \cdot 0.75 + 5 \cdot 0.20 + 10 \cdot 0.05 = 0 + 1 + 0.5 = 1.5\,\text{RON}.$$

Dacă miza per rotire este 2 RON, atunci avantajul casei este:

$$\text{House Edge} = 1 - \frac{1.5}{2} = 1 - 0.75 = 0.25 = 25\%.$$

Interpretarea avantajului casei

Un avantaj al casei de 25% înseamnă că, în medie:

- pentru fiecare 2 RON pariați, cazinoul păstrează 0.50 RON;
- jucătorul primește înapoi, în medie, doar 1.50 RON (sub forma unor câștiguri mici și ocazionale).

Atenție: Pe termen scurt, pot apărea variații semnificative (câștiguri sau pierderi mari), dar pe termen lung media tinde inevitabil către valoarea teoretică dată de house edge.

Factorii care influențează house edge

- Frecvența câștigurilor mici;
- Probabilitatea jackpot-ului sau a câștigurilor rare;
- Dimensiunea multiplicatorilor de câștig;
- Numărul liniilor de plată și modul de configurare a simbolurilor.

Importanța calculului

Calcularea avantajului casei este esențială pentru:

- jucători, pentru a înțelege șansele reale și riscurile;
- operatori, pentru a regla profitabilitatea jocului;
- reglementatori, pentru a verifica transparența și corectitudinea jocurilor.

Integrarea conceptului RTP

Definiție. RTP (*Return To Player*) reprezintă procentul mediu din miza totală pariată de jucători care este returnat acestora sub formă de câștiguri, pe termen lung. Este o măsură comună folosită în industrie pentru a descrie „generozitatea” unui joc de noroc.

$$\text{RTP} = \frac{E[X]}{\text{miza pe joc}} \times 100\%,$$

unde:

- $E[X]$ = câștigul mediu teoretic per rotire;
- miza pe joc = suma pariată per rotire.

Legătura cu avantajul casei:

$$\text{House Edge} = 100\% - \text{RTP}.$$

Exemplu aplicat: Presupunem un slot-machine cu:

$$E[X] = 1.9\,RON, \quad \text{miza pe joc} = 2\,RON.$$

Calculăm:

$$\text{RTP} = \frac{1.9}{2} \times 100\% = 95\%, \quad \text{House Edge} = 5\%.$$

Importanța RTP în analiza matematică

RTP este esențial pentru:

- jucători — oferă o estimare generală a șanselor de recuperare a banilor;
- operatori — permite reglarea profitabilității jocului;
- analiza matematică — oferă o legătură directă între modelul probabilistic și performanța așteptată a jocului.

Pe termen scurt, rezultatele reale pot varia considerabil față de RTP, dar pe termen lung, conform legii numerelor mari, media câștigurilor tinde să se apropie de RTP-ul teoretic.

2.4 Exemple aplicate: calculul probabilității jackpotului și al profitului pe termen scurt

Pentru a ilustra aplicarea modelelor probabilistice în contextul slot-machine-urilor, vom analiza două exemple practice: probabilitatea de a obține jackpotul și probabilitatea de a avea profit după un număr limitat de rotiri.

Calculul probabilității jackpotului

Considerăm un slot-machine cu 3 role, fiecare având 10 simboluri. Jackpotul se obține dacă apare combinația „777”, iar probabilitatea ca simbolul „7” să apară pe fiecare rolă este $p_7 = 0.05$.

$$P(777) = p_7^3 = (0.05)^3 = 0.000125.$$

Interpretare: Probabilitatea de a obține jackpotul la o singură rotire este de 0.0125%, adică aproximativ 1 la 8.000 de rotiri.

Calculul probabilității de profit pe termen scurt

Presupunem că jucătorul face 10 rotiri, cu următoarele șanse:

$$P_X(0) = 0.7, \quad P_X(2) = 0.25, \quad P_X(10) = 0.045, \quad P_X(100) = 0.005.$$

Cost total al jocurilor:

$$10 \times 2\,RON = 20\,RON.$$

Profitul apare dacă suma câștigurilor depășește 20 RON.

Strategie de calcul: Estimăm câștigul mediu pe 10 rotiri:

$$E[X_{10}] = 10 \times E[X],$$

unde:

$$E[X] = 0 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.25 + 10 \cdot 0.045 + 100 \cdot 0.005 = 0 + 0.5 + 0.45 + 0.5 = 1.45\,RON.$$

$$E[X_{10}] = 10 \times 1.45 = 14.5\,RON.$$

Interpretare: Media așteptată după 10 rotiri este 14.5 RON, sub pragul de break-even. Probabilitatea de profit efectiv poate fi calculată mai precis doar cu un model combinatoric sau simulare Monte Carlo, dar estimarea mediei ne arată că, pe termen scurt, profitul este puțin probabil.

Mesaj matematic important

Chiar dacă există câștiguri ocazionale sau chiar jackpoturi rare, probabilitatea de a obține profit pe termen scurt este scăzută. Pe termen lung, avantajul casei determină pierderea medie a jucătorului, indiferent de norocul momentului.

Notă importantă: Exemplele și calculele prezentate în această lucrare sunt ipotetice și au rol strict ilustrativ. Valorile de tipul $P_X(0) = 0.7$, $P_X(2) = 0.25$ etc. sunt simplificate pentru a face exemplele clare și accesibile, dar nu reflectă distribuții reale din industria jocurilor de noroc. Pentru analiza exactă ar fi necesare date oficiale de la producători sau cazinouri.

Capitolul 3

Statistica matematică aplicată

3.1 Speranță matematică, variantă și abatere standard

Analiza statistică a jocurilor de noroc permite o înțelegere mai profundă a riscurilor și a performanței așteptate pe termen lung. Trei concepte fundamentale sunt:

- speranța matematică (*expected value*),
- varianța,
- abaterea standard.

Speranța matematică (Expected Value)

Definiție. Pentru o variabilă aleatoare discretă X, speranța matematică este media ponderată a valorilor posibile:

$$E[X] = \sum_{x} x \cdot P_X(x).$$

Interpretare. Speranța matematică reprezintă câștigul mediu teoretic pe rotire, pe termen lung.

Exemplu aplicat (slot-machine):

$$P_X(0) = 0.7, \quad P_X(2) = 0.25, \quad P_X(10) = 0.045, \quad P_X(100) = 0.005.$$

Calcul:

$$E[X] = 0 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.25 + 10 \cdot 0.045 + 100 \cdot 0.005 = 0 + 0.5 + 0.45 + 0.5 = 1.45\, RON.$$

Dacă miza per joc este $2\, RON$:

$$E[X - 2] = 1.45 - 2 = -0.55\, RON.$$

Mesaj cheie: jucătorul pierde, în medie, 0.55 RON per rotire.

Varianța

Definiție. Varianța măsoară dispersia valorilor față de medie:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \sum_x (x - E[X])^2 \cdot P_X(x).$$

Interpretare. Varianța arată cât de „imprevizibile” sunt rezultatele rotirilor față de media așteptată.

Exemplu aplicat:

$$Var[X] = (0 - 1.45)^2 \cdot 0.7 + (2 - 1.45)^2 \cdot 0.25 + (10 - 1.45)^2 \cdot 0.045 + (100 - 1.45)^2 \cdot 0.005.$$

Calcul numeric:

$$= (2.1025 \cdot 0.7) + (0.3025 \cdot 0.25) + (73.1025 \cdot 0.045) + (9684.3025 \cdot 0.005).$$

$$= 1.47175 + 0.075625 + 3.2896125 + 48.4215125 \approx 53.26.$$

Abaterea standard

Definiție. Abaterea standard este rădăcina pătrată a varianței:

$$\sigma[X] = \sqrt{Var[X]}.$$

Interpretare. Abaterea standard măsoară, în medie, cât de mult variază rezultatele față de medie. Este o măsură directă a „volatilității” jocului.

Calcul exemplu:

$$\sigma[X] = \sqrt{53.26} \approx 7.3\,RON.$$

Importanța în analiza jocurilor de noroc

- Speranța matematică ne spune dacă jocul este profitabil pe termen lung.
- Varianța și abaterea standard ne spun cât de „volatil” este jocul pe termen scurt.

Exemplu concluzie: Deși un slot-machine are o speranță negativă, un jucător poate avea câștiguri mari pe termen scurt datorită varianței ridicate, dar pe termen lung, media câștigurilor tinde să reflecte avantajul casei.

3.2 Legea numerelor mari aplicată sloturilor

Definiție generală

Legea numerelor mari (forma slabă) afirmă că, dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt variabile aleatoare independente și identic distribuite, cu speranță matematică $E[X_i] = \mu$, atunci:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu \quad \text{(în probabilitate, când } n \to \infty\text{)}.$$

Forma tare întărește această afirmație, garantând că:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu\right) = 1.$$

Aplicare la slot-machine

În cazul sloturilor, fiecare rotire este un experiment independent, cu același set de probabilități și câștiguri:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{(câștigurile de la fiecare rotire).}$$

Dacă $E[X_i] = 1.45\,RON$ pe miză de $2\,RON$:

$$\mu = E[X_i - 2] = 1.45 - 2 = -0.55\,RON.$$

Conform legii numerelor mari:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 2) \to -0.55\,RON,$$

ceea ce înseamnă că, pe termen lung, pierderea medie per rotire va converge către 0.55 RON.

Interpretare intuitivă

Pe termen scurt, jucătorul poate câștiga peste medie sau poate avea noroc excepțional. Pe termen lung, rezultatele individuale se „compensează" și media generală va reflecta valoarea teoretică calculată.

Exemplu concret:

- La 10 rotiri: fluctuații mari, posibile câștiguri peste miză.
- La 10.000 de rotiri: media câștigului pe rotire se va apropia de $1.45\,RON$ câștig brut, adică $0.55\,RON$ pierdere netă per joc.

Importanță pentru jucători

Mulți jucători cad în iluzia că, jucând „suficient de mult", vor reuși să „bată sistemul". Legea numerelor mari arată exact opusul: pe măsură ce crește numărul de rotiri, avantajul casei devine tot mai vizibil, iar pierderea medie tinde către valoarea teoretică impusă de RTP și house edge.

Legătura cu RTP

RTP-ul exprimă exact media teoretică pe termen lung:

$$\frac{E[X]}{\text{miza pe joc}} \times 100\%.$$

Legea numerelor mari garantează că, în final, această medie se va reflecta în jocul real.

3.3 Paradoxul jucătorului (Gambler's Fallacy)

Definiție și explicație

Paradoxul jucătorului, cunoscut în engleză ca *Gambler's Fallacy*, este o eroare de gândire frecventă în rândul celor care practică jocuri de noroc. Aceasta constă în convingerea greșită că probabilitatea unui eveniment aleatoriu se schimbă pe termen scurt în funcție de evenimentele anterioare.

Exemplu clasic: Dacă la o ruletă au ieșit de cinci ori la rând numere roșii, jucătorul crede că este „mai probabil" ca următorul număr să fie negru, deși probabilitatea rămâne constantă la fiecare rotire.

Aplicare la slot-machine

La slot-machine:

- Jucătorii cred că, după multe rotiri fără câștig, „urmează" să apară o plată mare.
- Alții cred că, după un câștig mare, șansele la următoarea rotire scad.

Realitate matematică: Fiecare rotire este un eveniment independent, cu aceeași distribuție de probabilitate. Indiferent ce s-a întâmplat în trecut:

$$P_X(0) = 0.7, \quad P_X(2) = 0.25, \quad P_X(10) = 0.045, \quad P_X(100) = 0.005,$$

aceste probabilități nu se schimbă.

Legătura cu independența evenimentelor

Matematic, două evenimente A și B sunt independente dacă:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

În contextul sloturilor, rezultatele rotirilor consecutive sunt independente. Chiar dacă un jucător a pierdut 10 rotiri la rând:

$$P(\text{câștig la următoarea rotire}) = p,$$

exact ca înainte.

Consecințe psihologice

- Jucătorii pot crește mizele după o serie de pierderi, convinși că un câștig e „iminent".
- Jucătorii pot interpreta câștigurile drept „semne" și își modifică comportamentul irațional.

Mesaj educațional

Înțelegerea paradoxului jucătorului este esențială pentru prevenirea comportamentului de joc riscant. Indiferent de istoricul recent, probabilitățile rămân constante, iar casa își menține avantajul matematic.

Capitolul 4

Demonstrații matematice ale pierderilor inevitabile

4.1 Demonstrarea avantajului casei

Obiectiv

Scopul acestei secțiuni este de a demonstra, cu ajutorul instrumentelor matematice, de ce avantajul casei (*house edge*) duce inevitabil la pierderi pentru jucători, pe termen lung. Vom lega conceptele de speranță matematică, RTP, legea numerelor mari și independența evenimentelor.

Enunț matematic

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare care reprezintă câștigurile obținute la fiecare dintre cele n rotiri. Presupunem că:

- $E[X_i] = \mu < \text{miza}$,
- rotirile sunt independente,
- suma totală pariată este $n \times \text{miza}$.

Atunci, suma totală a câștigurilor este:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

iar câștigul net este:

$$G_n = S_n - n \times \text{miza}.$$

Speranța matematică a câștigului net:

$$E[G_n] = n \times E[X_i - \text{miza}] = n \times (\mu - \text{miza}).$$

Deoarece $\mu <$ miza, rezultă că $E[G_n] < 0$ pentru orice n.

Interpretare

Pe termen lung, indiferent câte rotiri face jucătorul:

- câștigul mediu net va fi negativ,
- pierderea medie per rotire va converge către miza $- \mu$,
- variabilitatea rezultatelor scade relativ pe măsură ce n crește, conform legii numerelor mari.

Exemplu numeric

Presupunem:

$$\text{miza} = 2\,RON, \quad E[X_i] = 1.45\,RON,$$

atunci:

$$E[X_i - 2] = 1.45 - 2 = -0.55\,RON.$$

Pentru $n = 1000$ rotiri:

$$E[G_{1000}] = 1000 \times (-0.55) = -550\,RON.$$

Mesaj: chiar dacă jucătorul are câștiguri mari pe termen scurt, media pe termen lung este matematic garantată să fie negativă.

Legătura cu RTP și house edge

Deoarece:

$$\text{RTP} = \frac{\mu}{\text{miza}} \times 100\%,$$

avem:

$$\text{House Edge} = 100\% - \text{RTP},$$

iar pierderea medie per rotire este:

$$\text{miza} \times (1 - \frac{\mu}{\text{miza}}) = \text{miza} - \mu.$$

Concluzie

Matematic, avantajul casei nu poate fi „bătut” pe termen lung, indiferent de strategie, volum de joc sau tipar al rotirilor. Singura garanție este pierderea medie previzibilă, proporțională cu house edge-ul.

4.2 Modelarea ruinării jucătorului

Definiție și context

Prin ruinarea jucătorului înțelegem situația în care jucătorul își epuizează complet capitalul disponibil (bankroll-ul) înainte de a atinge un obiectiv dorit (de exemplu, un anumit câștig sau un număr fix de rotiri). Modelarea matematică a acestui fenomen este esențială pentru a înțelege riscurile reale din jocurile de noroc.

Model simplificat

Presupunem:

- Capital inițial: C RON.
- Miza per rotire: b RON.
- Probabilitatea câștigului: p.
- Probabilitatea pierderii: $q = 1 - p$.

Jucătorul este considerat „ruinat” dacă:

$$\text{numărul de pierderi cumulative} \times b \geq C.$$

Probabilitatea ruinării (formulă clasică)

În cazul unui joc aleator cu probabilități fixe:

$$P_r = \begin{cases} 1 & \text{dacă } p \leq q, \\ \left(\frac{q}{p}\right)^C & \text{dacă } p > q. \end{cases}$$

Pentru slot-machine, unde $p \ll q$, aproape orice strategie duce la ruinare cu probabilitate 1 pe termen suficient de lung.

Exemplu numeric

Presupunem:

$$C = 100\,RON, \quad b = 2\,RON, \quad p = 0.3, \quad q = 0.7.$$

Numărul maxim de rotiri:

$$\frac{C}{b} = 50\,\text{rotiri}.$$

Pe termen lung:

$$P_r \approx 1,$$

deoarece $p < q$ și avantajul casei lucrează împotriva jucătorului.

Importanța varianței

Deși jucătorul poate avea perioade de câștig, varianța ridicată nu îl protejează pe termen lung. Chiar și cu câștiguri mari ocazionale, casa își recuperează avantajul datorită volumului mare de joc.

Mesaj educațional

Strategiile populare („dublajul mizei”, „parierea pe serii câștigătoare”) nu pot învinge matematica. Pe termen lung, probabilitatea ruinării tinde la 1 dacă jucătorul nu are un capital infinit și joacă împotriva unui joc cu house edge pozitiv.

4.3 Strategii populare și de ce eșuează matematic

Introducere

Mulți jucători de jocuri de noroc încearcă să contracareze avantajul casei folosind strategii de pariere progresive. Cele mai cunoscute sunt martingala, Fibonacci și strategia d'Alembert. Vom arăta de ce, din punct de vedere matematic, aceste strategii nu funcționează pe termen lung.

Martingala

Descriere: După fiecare pierdere, jucătorul își dublează miza, astfel încât primul câștig să recupereze toate pierderile anterioare plus să aducă un profit egal cu miza inițială.

Exemplu: Miză inițială = 2 RON. Secvență posibilă:

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Problema matematică:

- Miza crește exponențial.
- Capitalul jucătorului este finit.
- După n pierderi consecutive:

  $$\text{miza totală} = 2^n - 1,$$

  ceea ce depășește rapid bankroll-ul.

Probabilitatea ruinării: Deși teoretic succesul pare garantat, în practică, chiar o serie scurtă de pierderi poate ruina jucătorul.

Fibonacci

Descriere: Mizele cresc conform șirului Fibonacci (1,1,2,3,5,8,13,...), astfel încât să recupereze pierderile mai lent decât martingala.

Problema matematică:

- Deși creșterea este mai lentă, necesită tot creștere progresivă de capital.
- House edge-ul rămâne nealterat.

Strategia d'Alembert

Descriere: După fiecare pierdere, jucătorul mărește miza cu o unitate; după fiecare câștig, o scade cu o unitate.

Problema matematică:

- Este o strategie liniară, mai conservatoare.
- Pe termen lung, nu elimină avantajul casei.
- În serii lungi de pierderi, bankroll-ul se epuizează.

Analiză comună

- Toate strategiile se bazează pe iluzia memoriei evenimentelor independente.
- Nicio strategie nu modifică distribuția fundamentală a jocului sau house edge-ul.
- Bankroll-ul finit și miza maximă impusă de cazinou fac imposibilă recuperarea pe termen lung.

Mesaj educațional

Matematic, strategia optimă într-un joc cu house edge pozitiv pentru cazinou este:

Să nu joci.

Orice strategie de pariere progresivă este doar o iluzie de control într-un sistem construit să producă profit casei pe termen lung.

4.4 Demonstrarea matematică a inevitabilității pierderii cumulative

Enunț

Într-un joc de noroc cu house edge pozitiv pentru cazinou, indiferent de strategia adoptată, pe termen lung, suma pierderilor jucătorului va crește cumulativ și va reflecta avantajul matematic al casei.

Model matematic

Considerăm:

- n = număr de rotiri,
- b = miza per rotire,
- X_i = câștigul la rotirea i,
- $E[X_i] = \mu < b$ (câștigul mediu teoretic per rotire),
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (suma câștigurilor),
- $G_n = S_n - n \times b$ (câștigul net).

Rezultatul esențial:

$$E[G_n] = n \times (\mu - b) < 0.$$

Pe termen lung:

$$\frac{G_n}{n} \to \mu - b < 0,$$

adică pierderea medie pe rotire converge către o valoare negativă determinată de house edge.

Demonstrație informală

Fiecare rotire este independentă, cu probabilități fixe. Dacă speranța matematică $E[X_i]$ este negativă net:

$$E[X_i - b] = \mu - b < 0,$$

atunci suma netă:

$$E[G_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i - b] = n(\mu - b),$$

este negativă și scade proporțional cu numărul de rotiri.

Exemplu numeric

Presupunem:

$$b = 2\,RON, \quad \mu = 1.45\,RON,$$

avem:

$$\mu - b = -0.55\,RON.$$

După $n = 1000$ rotiri:

$$E[G_{1000}] = 1000 \times (-0.55) = -550\,RON.$$

Legătura cu legea numerelor mari

Conform legii numerelor mari:

$$\frac{S_n}{n} \to \mu, \quad \frac{G_n}{n} \to \mu - b.$$

Astfel, cu cât crește n, cu atât media netă pe rotire reflectă mai exact pierderea teoretică.

Concluzie matematică

Nicio strategie nu poate schimba distribuția fundamentală a jocului:

- nu poate elimina avantajul casei,
- nu poate transforma o speranță matematică negativă în una pozitivă,
- nu poate reduce probabilitatea ruinării la zero.

Pe termen lung, pierderile cumulative ale jucătorului sunt garantate de legea numerelor mari și de structura probabilistică a jocului.

Capitolul 5

Simulări Monte Carlo aplicate jocurilor de noroc

5.1 Introducere în metodele Monte Carlo

Definiție

Metoda Monte Carlo reprezintă un ansamblu de tehnici numerice care utilizează generarea de numere aleatoare pentru a aproxima soluții la probleme matematice sau statistice complexe. Ea se bazează pe ideea că, prin simularea repetată a unui proces aleatoriu, putem estima caracteristicile sale globale (medie, varianță, distribuție, etc.).

Motivație

În contextul jocurilor de noroc:

- problemele sunt adesea greu de rezolvat analitic (ex. probabilitatea profitului pe termen scurt, distribuția câștigurilor după n rotiri),
- simulările permit aproximarea empirică a acestor valori,
- metoda oferă o modalitate intuitivă și vizuală de a demonstra riscul pe termen lung.

Pașii metodei Monte Carlo

1. Definirea problemei (ex. simularea n rotiri la slot-machine).
2. Generarea de rezultate aleatoare pe baza distribuției cunoscute (ex. $P_X(0), P_X(2), P_X(10), P_X(100)$
3. Calcularea indicatorilor de interes (ex. câștigul net, rata de ruinare, distribuția profiturilor).
4. Repetarea simulării de un număr mare de ori pentru stabilitate statistică.
5. Calculul mediilor și interpretarea rezultatelor.

Exemplu simplu: simularea rotirilor la slot-machine

Presupunem:

$$P_X(0) = 0.7, \quad P_X(2) = 0.25, \quad P_X(10) = 0.045, \quad P_X(100) = 0.005.$$

Pași:

- Simulăm 1000 de rotiri.
- Înregistrăm câștigurile individuale și suma totală.
- Calculăm câștigul net:
$$G = \sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \times 2.$$
- Repetăm simularea de 10.000 de ori.
- Calculăm media și distribuția câștigurilor nete.

Beneficiile metodei Monte Carlo

- Permite vizualizarea distribuțiilor reale de câștig.
- Evidențiază variațiile extreme (jackpoturi rare vs. pierderi constante).
- Demonstrează empiric avantajul casei.

Legătura cu teoria matematică

Simulările Monte Carlo confirmă numeric predicțiile teoretice:

- speranța matematică negativă,
- distribuția varianței și a abaterii standard,
- convergența pe termen lung către media teoretică (RTP, house edge).

5.2 Simularea câștigurilor și pierderilor pe termen scurt și lung

Obiectiv

Scopul acestei secțiuni este de a utiliza metoda Monte Carlo pentru a simula rezultatele unui slot-machine pe perioade diferite de timp:

- termen scurt (ex. 10–100 rotiri),
- termen lung (ex. 10.000–100.000 rotiri).

Astfel, vom observa cum variază câștigurile și pierderile și cum se manifestă avantajul casei.

Parametrii de simulare

Presupunem un slot-machine cu:

$$P_X(0) = 0.7, \quad P_X(2) = 0.25, \quad P_X(10) = 0.045, \quad P_X(100) = 0.005,$$

miza per joc:

$$b = 2\,RON.$$

Rezultate așteptate pe termen scurt

Pe termen scurt (10–100 rotiri):

- variații mari,
- posibilitate de câștig net datorită jackpotului sau câștigurilor frecvente,
- volatilitate ridicată, reflectată de abaterea standard.

Exemplu de scenariu scurt:

- 20 rotiri → câștig total: 40 RON → profit net: 0 RON,
- 20 rotiri → câștig total: 60 RON → profit net: +20 RON,
- 20 rotiri → câștig total: 20 RON → pierdere netă: -20 RON.

Rezultate așteptate pe termen lung

Pe termen lung (10.000–100.000 rotiri):

- media câștigului pe rotire converge către $E[X] = 1.45\,RON$,
- profitul net converge către:

$$10.000 \times (1.45 - 2) = -5.500\,RON,$$

- volatilitatea relativă scade, pierderea devine previzibilă.

Simularea propriu-zisă (pași)

1. Se generează n rezultate aleatoare conform distribuției.
2. Se calculează câștigul total:
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
3. Se calculează profitul net:
$$G_n = S_n - n \times b.$$
4. Se repetă simularea de m ori (ex. $m = 10.000$ repetiții).
5. Se extrag media, varianța și distribuția profitului net.

Interpretare intuitivă

Simulările arată:

- pe termen scurt, jucătorul poate câștiga datorită varianței,
- pe termen lung, avantajul casei devine dominant,
- jackpoturile nu modifică tendința generală de pierdere.

Legătura cu teoria

Rezultatele simulării confirmă predicțiile:

$$\frac{S_n}{n} \to E[X], \quad \frac{G_n}{n} \to E[X] - b.$$

Pe termen lung, simulările se aliniază legii numerelor mari, demonstrând inevitabilitatea pierderilor nete.

5.3 Analiza rezultatelor și vizualizarea distribuțiilor

Obiectiv

Scopul acestei secțiuni este de a interpreta rezultatele obținute din simulările Monte Carlo, de a identifica tiparele emergente și de a demonstra vizual impactul avantajului casei asupra jucătorilor.

Distribuția câștigurilor nete

După rularea unui număr mare de simulări (ex. 10.000 de seturi a câte 10.000 de rotiri), putem construi histograme care arată:

- distribuția câștigurilor nete,
- media distribuției,
- forma asimetrică datorată jackpoturilor rare.

Rezultate tipice:

- marea majoritate a scenariilor $\to$ pierdere netă,
- câteva scenarii excepționale $\to$ câștig mare (jackpot),
- distribuția are o „coadă lungă” către câștiguri, dar masa principală este concentrată pe pierdere.

Calculul mediei și varianței empirice

Se calculează media câștigului net:

$$\bar{G} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} G_j,$$

și varianța:

$$Var[G] = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(G_j - \bar{G})^2,$$

unde G_j este profitul net al simulării j.

Interpretarea grafică

Graficele rezultate arată:

- o medie negativă, confirmând house edge-ul,
- o dispersie largă (volatilitate),
- cazuri extreme rare, care nu modifică tendința globală.

Concluzie vizuală: Simulările vizuale sunt instrumente educaționale puternice, ajutând jucătorii să înțeleagă impactul matematic al jocurilor de noroc.

Mesaj educațional

Deși un jucător poate avea noroc pe termen scurt, pe termen lung:

$$\frac{G_n}{n} \to \mu - b < 0.$$

Simulările arată clar:

- efectul cumulativ al avantajului casei,
- riscul ridicat asociat strategiilor agresive

5.4 Integrarea graficelor vizuale în lucrare

Exemple de grafice

Pentru a susține partea teoretică, am pregătit următoarele tipuri de grafice rezultate din simulările Monte Carlo:

- **Figura 1: Histogramă a profitului net**
  Arată distribuția câștigurilor și pierderilor după 10.000 de simulări.
- **Figura 2: Evoluția bankroll-ului în timp**
  Prezintă cum variază capitalul unui jucător pe termen lung (ex. 10.000 de rotiri).
- **Figura 3: Boxplot profit pe termen scurt vs. lung**
  Compară volatilitatea rezultatelor pentru 100 vs. 10.000 de rotiri.

Inserarea în lucrare

Interpretarea generală

Graficele arată vizual ceea ce teoria demonstrează formal: pe termen scurt există volatilitate și șanse ocazionale de câștig, dar pe termen lung, casa își impune avantajul matematic, iar jucătorii ajung aproape sigur în pierdere.

Legătura între concepte: Legea numerelor mari arată matematic că, pe termen lung, rezultatele medii vor tinde către valorile teoretice (de exemplu, RTP și house edge). Simulările Monte Carlo validează empiric această tendință, arătând cum, cu un număr suficient de rotiri, media câștigurilor converge către valoarea așteptată, iar volatilitatea scade relativ. Astfel, partea teoretică și cea practică se completează și se susțin reciproc în demonstrarea inevitabilității pierderilor.

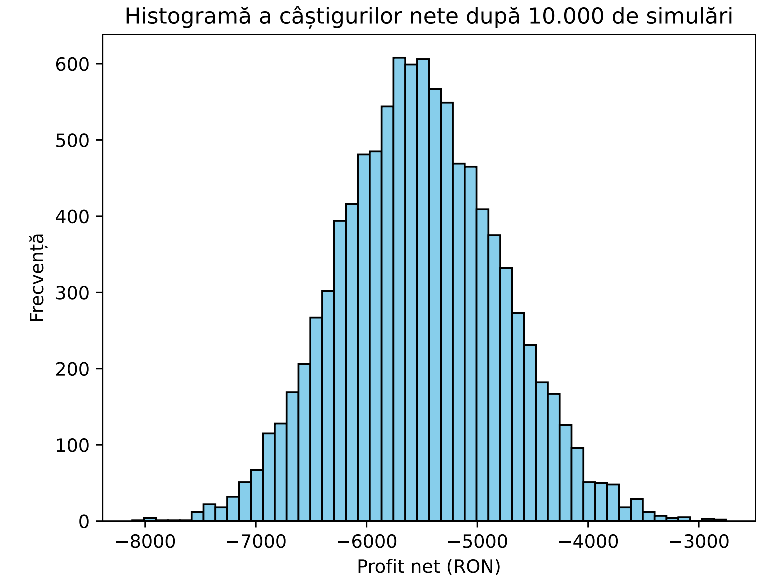

Figura 5.1: Histogramă a câștigurilor nete după 10.000 de simulări

Notă explicativă: Majoritatea simulărilor duc la pierderi nete, iar câteva scenarii rare produc câștiguri mari datorită jackpoturilor. Distribuția este asimetrică, cu o coadă lungă spre câștiguri.

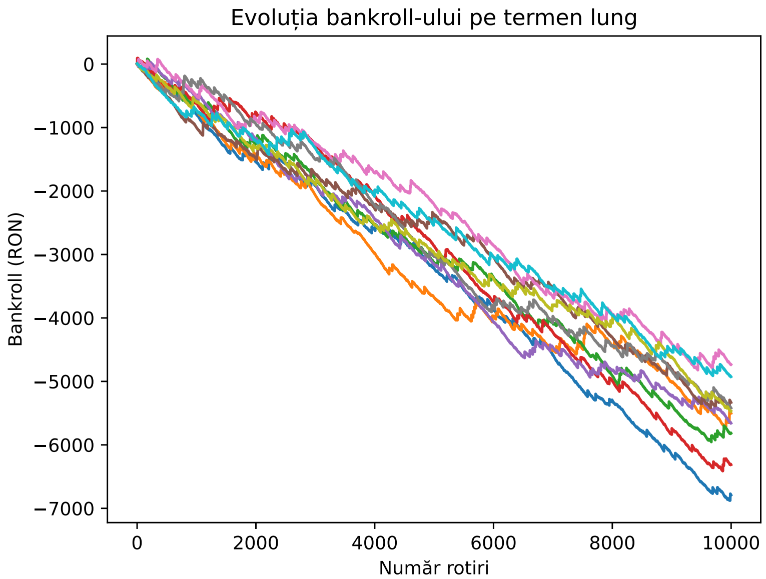

Figura 5.2: Evoluția bankroll-ului pe termen lung

Notă explicativă: Curbele fluctuează semnificativ pe termen scurt, dar tendința generală este descendentă, reflectând avantajul casei și pierderea cumulativă a jucătorului.

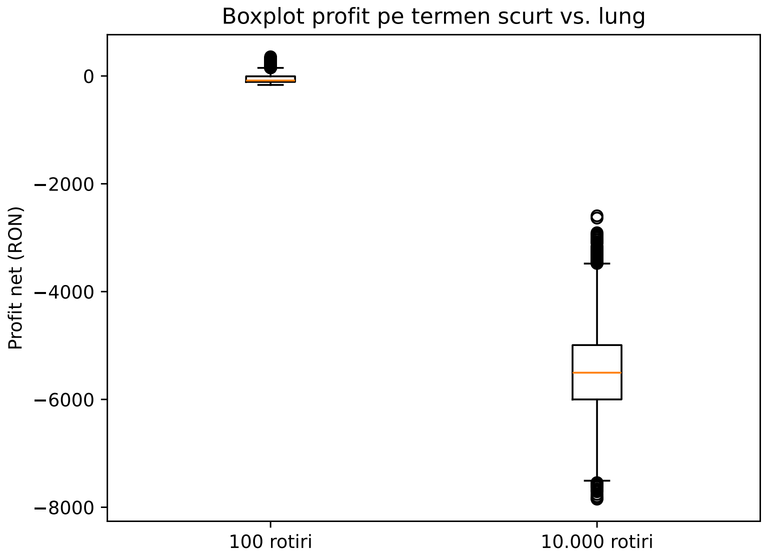

Figura 5.3: Boxplot profit pe termen scurt vs. lung

Notă explicativă: Pe termen scurt, variațiile profiturilor sunt foarte largi, dar pe termen lung rezultatele devin mai stabile și concentrate în jurul pierderii medii impuse de avantajul casei.

Capitolul 6

Implicații sociale și aplicații practice

6.1 Impactul jocurilor de noroc

Introducere

Jocurile de noroc reprezintă o activitate răspândită la nivel global, având un impact semnificativ asupra individului și societății. În România, fenomenul a căpătat amploare, în special datorită accesibilității slot-machine-urilor și extinderii cazino-urilor online. Este esențial să înțelegem nu doar aspectele matematice ale acestor jocuri, ci și consecințele sociale generate.

Dependenta de jocuri de noroc

Dependenta patologică de jocuri de noroc (*gambling addiction*) este recunoscută drept o tulburare de sănătate mintală. Aceasta se manifestă prin:

- nevoia constantă de a juca sume tot mai mari,
- dificultatea de a opri comportamentul de joc,
- mințirea familiei și prietenilor în legătură cu pierderile,
- neglijarea responsabilităților sociale, familiale și profesionale.

Efecte financiare

Consecințele financiare sunt severe:

- acumularea de datorii,
- pierderea economiilor personale,
- împrumuturi nesustenabile,
- în cazuri extreme, pierderea locuinței sau a locului de muncă.

Efecte psihologice și sociale

Impactul psihologic include:

- depresie și anxietate,
- pierderea încrederii în sine,
- deteriorarea relațiilor personale,
- izolare socială.

La nivel social, efectele negative se extind:

- costuri crescute pentru sistemele de sănătate și asistență socială,
- creșterea ratei divorțurilor,
- probleme în mediul profesional.

Cadrul legislativ

În România, există reglementări privind:

- vârsta minimă de participare (18 ani),
- licențierea operatorilor,
- informarea jucătorilor despre riscurile implicate.

Cu toate acestea, aplicarea practică și măsurile de prevenție sunt adesea insuficiente pentru a reduce amploarea fenomenului.

Înțelegerea impactului social al jocurilor de noroc nu este completă fără înțelegerea mecanismelor matematice care stau la bază. Această lucrare își propune să îmbine cele două perspective și să ofere jucătorilor instrumente educaționale pentru a lua decizii mai informate.

6.2 Rolul matematicii în prevenție

Introducere

Matematica nu este doar un instrument teoretic, ci și un mijloc de educare și prevenție în fața comportamentelor de risc asociate jocurilor de noroc. Înțelegerea principiilor matematice de bază poate ajuta jucătorii să conștientizeze șansele reale de câștig, riscurile asumate și inevitabilitatea pierderilor pe termen lung.

Instrumente matematice relevante

- **Speranța matematică**: arată media câștigurilor așteptate, ajutând jucătorii să înțeleagă că, în medie, fiecare rotire este o pierdere.
- **Legea numerelor mari**: explică faptul că, pe termen lung, rezultatele individuale se apropie de media teoretică, adică de pierdere netă.

- **RTP și house edge**: clarifică procentele reale returnate jucătorului și cât reține casa, eliminând iluziile despre „șanse egale”.
- **Simulările Monte Carlo**: permit vizualizarea empirică a riscurilor, făcând abstractul tangibil și ușor de înțeles.

Cum ajută matematica jucătorii

- Corectează așteptările nerealiste („Pot bate jocul dacă am o strategie bună”).
- Dezvăluie mecanismele ascunse ale jocurilor (cum funcționează sloturile, cum sunt setate payout-urile).
- Demonstrează inevitabilitatea pierderilor pe termen lung.
- Încurajează luarea unor decizii informate și renunțarea la comportamente riscante.

Rol educațional

Integrarea matematicii în campanii de educație publică are potențialul de a:

- reduce numărul jucătorilor problemă,
- îmbunătăți alfabetizarea financiară,
- schimba percepția socială despre jocurile de noroc.

În concluzie, matematica nu este doar un instrument academic, ci și o resursă esențială pentru prevenirea dependenței de jocuri de noroc și pentru promovarea unei atitudini raționale și informate în fața tentațiilor din industria gamblingului.

6.3 Prezentarea aplicației web

6.4 Exemple și scenarii de utilizare

Capitolul 7

Concluzii

Rezumatul principalelor rezultate, mesajul central, recomandări și direcții de cercetare viitoare.

Bibliografie

Bibliografie

[1] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, 1968.

[2] Grimmett, G., Stirzaker, D.: *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, 2001.

[3] Ethier, S. N.: *The Doctrine of Chances: Probabilistic Aspects of Gambling*, Springer, 2010.

[4] Wong, P.: Fixed Point Theory and Applications, `http://abacus.bates.edu/pwong/research/mini-course.pdf`