# Notes MAT346

Julien Houle

Automne 2025

# Contents

# Chapitre 1 Intégration

## Section 1.1 Intégrales de Riemann

*Notation.*

$\mathcal{B}[c,d] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}$.
$\mathcal{R}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}$.
$\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}$.

On suppose nos fonctions bornées.

**Définition.**

a) Une partition de $[a,b]$ est un ensemble fini de points $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$ t.q. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

b) L'ensemble des partitions de $[a,b]$ est $\Omega[a,b]$.

c) On dit $\Delta'$ est *plus fine* que $\Delta$, noté $\Delta' \geq \Delta$, si $\Delta' \supseteq \Delta$.

d) *Raffinement commun* de $\Delta_1$ et $\Delta_2$, noté $\Delta_1 \vee \Delta_2$, est la partition de $[a,b]$ formée de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ordonnés.

e) La *norme* de $\Delta$, notée $\|\Delta\|$, est $\|\Delta\| = \max\limits_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|$.

f)

$$\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$
$$\underline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$

*Remarque.*

$$\|x\| \geq 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$
$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

**Définition.**

a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de $f$ pour la partition $\Delta$ est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de $f$ pour la partition $\Delta$ est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

**Proposition.**

*a)*
$$\underline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, \Delta), \forall \Delta \in \Omega\,[a, b]$$

*b)*
$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta)$$

*c)*
$$\overline{S}(f, \Delta) \leq \overline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a)$$

**Proposition.** *Si* $\Delta' \geq \Delta$*, alors* $\overline{S}(f, \Delta') \leq \overline{S}(f, \Delta)$*.*

*démonstration.*
Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \ldots < x_n = b$$

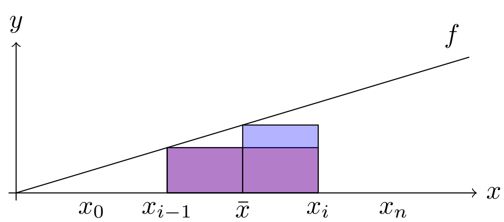
On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_1 - x_{i-1})\right] \\ &\quad - \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) + \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x})\right] \\ &= (x_i - \bar{x}) \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])\right] \\ &\quad + (\bar{x} - x_{i-1}) \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])\right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

**Proposition.** *Si* $\Delta' \geq \Delta$*, alors* $\underline{S}(f, \Delta') \geq \underline{S}(f, \Delta)$

*démonstration.*




□

*Remarque.* $\underline{S}(f, \Delta) = -\overline{S}(-f, \Delta)$.

**Corollaire.** $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Omega\,[a, b]\,, \underline{S}(f, \Delta_1) \leq \overline{S}(f, \Delta_2)$

*démonstration.*
On a $\Delta_1 \vee \Delta_2 \geq \Delta_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta_1) &\leq \underline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_2) \end{aligned}$$

□

**Définition.**

a) La somme par défaut de $f$ est $\underline{S}(f) = \sup\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$.

b) La somme par excès de $f$ est $\overline{S}(f) = \inf\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$.

**Théorème.** $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$

*démonstration.*
Soit $\Delta_1 \in \Omega\,[a, b]$
$\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ est le plus petit majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega\,[a, b]$.
Du corollaire précédant, on a que $\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.
Donc, $\overline{S}(f, \Delta_1)$ est un majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$.
Ainsi, $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.
De même, $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ est le plus grand minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega\,[a, b]$.
Comme $\underline{S}(f)$ est un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$. □

**Définition.**
Soit $f \in \mathcal{B}\,[a, b]$. On dit que $f$ est *intégrable au sens de Riemann sur* $[a, b]$ si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et on note $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$. La valeur commune de $\underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f)$ est notée $\int_a^b f(x)\, dx$

**Théorème** (Critère d'intégrabilité)**.**
*Soit $f \in \mathcal{B}\,[a, b]$. Alors $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$ si, et seulement si,* $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega\,[a, b])$ *t.q.* $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

*démonstration.*

($\Rightarrow$) Supposons $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
On a $\displaystyle\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$.
Comme $\overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut minorer $\overline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_1 \in \Omega\,[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$.
Comme $\underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut majorer $\underline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_2 \in \Omega\,[a, b]$ t.q. $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \left(\overline{S}(f) - \underline{S}(f)\right) + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $\exists \Delta$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

Mais alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Du théorème du sandwich, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$, car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Donc, $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$.

$\square$

**Corollaire.** *S'il existe $\Delta \in \Omega\,[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) = \underline{S}(f, \Delta)$, alors $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$.*

**Théorème.** *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

*démonstration.*

Soit $f \in \mathcal{C}\,[a, b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par la proposition d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n\varepsilon > b - a$.

*Rappel.*

$f$ est uniformément continue sur $[a, b]$ si $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

*Rappel.*

Si $f$ est continue sur $[a, b]$, alors $f$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Comme $f \in \mathcal{C}\,[a, b]$, elle est uniformément continue sur $[a, b]$.
Alors, $\exists \delta > 0$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$.
Soit donc $\Delta \in \Omega\,[a, b] : a = x_0 < x_1, \ldots < x_n = b$ avec $\|\Delta\| < \delta$.
Alors, $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{1}{n}$.

*Remarque.* $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])$ peut être noté $\mathrm{osc}_f([x_{i-1}, x_i])$.

On obtient

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b - a}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$. $\square$

**Théorème.** *Toute $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

*démonstration.*

(1) Si $f$ est constante, alors $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) = 0 < \varepsilon$.

(2) Si $f$ est croissante,

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon > (b - a)(f(b) - f(a))$

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}, i \in [0..n]$

On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta)&=\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i-x_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\left(\frac{b-a}{n}\right)\\&=\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

Donc, $f\in\mathcal{R}\,[a,b]$.

(3) Si $f$ est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f\in\mathcal{R}\,[a,b]$.
Donc, $f\in\mathcal{R}\,[a,b]$.

□

**Théorème.**
*Si $f_1,f_2\in\mathcal{R}\,[a,b]$, alors $f_1+f_2\in\mathcal{R}\,[a,b]$ et $\int(f_1+f_2)=\int f_1+\int f_2$.*

*démonstration.*
Soit $\varepsilon>0$.
Comme $f_i\in\mathcal{R}\,[a,b]$, $\exists\Delta_i\in\Omega\,[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f_i,\Delta_i)-\underline{S}(f_i,\Delta_i)<\frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $\Delta=\Delta_1\vee\Delta_2$.
Alors, $\overline{S}(f_i,\Delta)-\underline{S}(f_i,\Delta)<\frac{\varepsilon}{2}$.
Supposons $\Delta : a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.
On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f_1+f_2,\Delta)\leq\overline{S}(f_1,\Delta)+\overline{S}(f_2,\Delta)\\\underline{S}(f_1+f_2,\Delta)\geq\underline{S}(f_1,\Delta)+\underline{S}(f_2,\Delta)\end{aligned}$$

Car $\sup(f_1+f_2)\leq\sup f_1+\sup f_2$ et $\inf(f_1+f_2)\geq\inf f_1+\inf f_2$.
Alors,

$$\begin{aligned}\overline{S}(f_1+f_2,\Delta)-\underline{S}(f_1+f_2,\Delta)&\leq\overline{S}(f_1,\Delta)+\overline{S}(f_2,\Delta)-\underline{S}(f_1,\Delta)-\underline{S}(f_2,\Delta)\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

Donc, $f_1+f_2\in\mathcal{R}\,[a,b]$.
De plus,

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1+f_2&\leq\overline{S}(f_1+f_2,\Delta)\\&\leq\overline{S}(f_1,\Delta)+\overline{S}(f_2,\Delta)\\&<\underline{S}(f_1,\Delta)+\frac{\varepsilon}{2}+\underline{S}(f_2,\Delta)+\frac{\varepsilon}{2}\\&\leq\int_a^b f_1+\frac{\varepsilon}{2}+\int_a^b f_2+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b f_1+f_2<\int_a^b f_1+\int_a^b f_2+\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$.
Donc, $\int_a^b f_1+f_2\leq\int_a^b f_1+\int_a^b f_2$.
De même, on peut montrer que $\int_a^b f_1+f_2\geq\int_a^b f_1+\int_a^b f_2$.
Donc, $\int_a^b f_1+f_2=\int_a^b f_1+\int_a^b f_2$. □

**Théorème.**
*Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\int \lambda f = \lambda \int f$.*

*démonstration.*
Laissé en exercice.
Utiliser $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ et $\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$. $\square$

**Corollaire.**
*Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, alors $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.*

*démonstration.*
$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0$. $\square$

**Théorème** (Inégalité du triangle)**.**
*Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, alors $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.*

*démonstration.*
Soit $\varepsilon > 0$
Alors, $\exists \Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
Enfin,

$$\begin{aligned}
-|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\
&\Rightarrow \int f \leq \int |f|
\end{aligned}$$

$\square$

**Théorème.**
*Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $a \leq c < d \leq b$, alors $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[a,b]$.*

*démonstration.*
Soit $\varepsilon > 0$
Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\exists \Delta_1 \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$.
Soit $\Delta_2$ le raffinement de $\Delta_1$ en ajoutant les points $c$ et $d$.
Alors, $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) \leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$
Donc, $f \in \mathcal{R}[c,d]$. $\square$

**Théorème.**
*Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $a < c < b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

*démonstration.*
Soit $\varepsilon > 0$
$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a,c]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\exists \Delta_2 \in \Omega[c,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$. Alors, $\Delta \in \Omega\,[a,b]$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &\leq \overline{S}(f,\Delta) \\
&= \overline{S}(f,\Delta_1) + \overline{S}(f,\Delta_2) \\
&< \underline{S}(f,\Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f,\Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \underline{S}(f,\Delta_1) + \underline{S}(f,\Delta_2) + \varepsilon \\
&\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$.
De même, $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$. □

**Théorème.**
*Soit $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.*
*Si $f$ possède $n$ discontinuités dans $[a,b]$, alors $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.*

*démonstration.*
Pour $n = 0$, $f \in \mathcal{C}\,[a,b]$, donc $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$ est un résultat connnu.
Supposons l'énoncé vrai pour $n$.
Supposons que $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$ admet $n+1$ discontinuités.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$
Il y a deux cas à considérer

1. $a$ ou $b$ est une discontinuité

   SPDG, supposons que $a$ est la discontinuité.

   Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. $a$ est l'unique discontinuité de $[a,a+\eta]$ et $\eta < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

   Alors, $[a+\eta,b]$ contient $n$ discontinuités.

   De l'hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{R}\,[a+\eta,b]$.

   Il existe donc $\Delta \in \Omega\,[a+\eta,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$.

   On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f,\Delta_\varepsilon) &= \big(\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta)\big) + \big(\overline{M}(f,[a,a+\eta]) - \underline{M}(f,[a,a+\eta])\big)\,\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

2.

□