

MAT141 - Éléments d'algèbre
Donné par Jean-Philippe Burelle

Julien Houle

Automne 2025

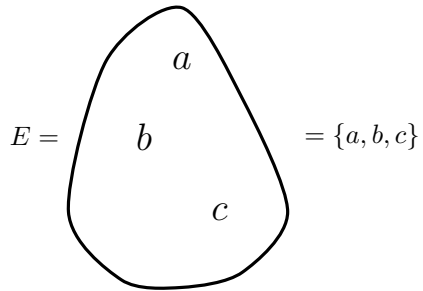
Table des matières

1	Ensembles	1
	Manières de définir une fonction	1
6	Groupes	8
	Propriétés élémentaires des groupes	9
	Produit cartésien de groupes	10
	Isomorphismes de groupes	11
	Puissances d'éléments de groupes	13
	Sous-groupes	16
2	Applications et équivalences	19
	2.4 Relations d'équivalence	19
	Ordre et groupes cycliques	22
6	Groupes (suite)	24
	6.13 Groupes symétriques S_n	24
8	Homomorphismes	29
	Équivalence modulo H et théorème de Lagrange	31
	8.6 Groupes quotients	34
	Groupes monogènes	41
	8.3 Théorème de Cayley	42
	Actions de groupes	44
	Lemme de Burnside	53
	Compléments/rappels	57

Chapitre 1 Ensembles

Cours 1

Idée : ensemble = patate.



Notation. $E \subseteq F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F$.

Remarque. $E \subseteq E$.

Notation. La cardinalité d'un ensemble, $|E|$, est le nombre d'éléments d'un ensemble.

Définition. Définition d'un ensemble par *compréhension*

Exemple. $E = \{n \in \mathbb{Z} | 1 \leq n \leq 20\}$.

Notation. $E = F \Leftrightarrow E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

Définition. Produit cartésien : $E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}$.

Définition. Fonction/Application

$f : A \rightarrow B$, A et B des ensembles, associe à *chaque* $x \in A$ un *unique* élément $f(x) \in B$.

Cours 2

Rappel.

- Ensemble collection d'objets
- \in "élément" d'un ensemble
- sous-ensemble (\subseteq) $E \subseteq F$ si $x \in E$ implique $x \in F$
- $E = F$ si, et seulement si, $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$
- \cup union
- \cap intersection
- $E \times F$ produit cartésien (paires (x, y))
- $f : E \rightarrow F$ fonction ou application, associe à chaque $x \in E$ un unique $f(x) \in F$, image de x par f
- $\mathbb{1}$ $\mathbb{1}_E : E \rightarrow E$ est définie comme $\mathbb{1}_E(x) = x$

Manières de définir une fonction

- énumérer $f(x)$ pour chaque $x \in E$
- donner une formule
une formule ne définit pas toujours une fonction, elle doit être valide pour chaque x de l'ensemble de départ.
- en mots (décrire la valeur pour chaque $x \in E$)

- mélange de formule et mots

Définition. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est *inversible* s'il existe une fonction $\underbrace{g : F \rightarrow E}_*$ telle que $\underbrace{g(f(x)) = x}_{**}$ pour tout $x \in E$ et $\underbrace{f(g(y)) = y}_{***}$ pour tout $y \in F$.

Exemple. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$ est inversible d'inverse $g(y) = y - 1$

Démonstration.

On vérifie que

$$\begin{array}{ll} g(f(x)) = x & g(f(x)) = g(x + 1) \\ & = (x + 1) - 1 \\ & = x \\ f(g(y)) = y & f(g(y)) = f(y - 1) \\ & = (y - 1) + 1 \\ & = y \end{array}$$

□

Proposition. Si f admet un inverse, celui-ci est unique.

Démonstration.

Supposons que g_1 et g_2 sont tous deux inverses de f et montrons qu'elles sont égales.

(Pour démontrer que deux fonctions sont égales, il suffit de montrer que $g_1(y) = g_2(y)$ pour tout $y \in F$)

Soit $y \in F$.

On a

$$\begin{array}{c} g_1(y) \overset{***}{=} g_1(\underbrace{f(g_2(y))}_*) \\ \overset{**}{=} g_2(y) \end{array}$$

□

Définition. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, alors la *composée* de f et g est la fonction $g \circ f : E \rightarrow G$ définie par la formule $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Définition (Redéfinition de l'inverse).

$$g \circ f = \mathbb{1}_E$$

$$f \circ g = \mathbb{1}_F$$

Exemple.

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{d, e, f\}$$

$$f : A \rightarrow B, a \mapsto d, b \mapsto e, c \mapsto f$$

$$g : B \rightarrow A, d \mapsto a, e \mapsto b, f \mapsto c$$

$$g \circ f : A \rightarrow A, g \circ f(x) = x, g \circ f = \mathbb{1}_A.$$

De la même manière, $f \circ g = \mathbb{1}_B$.

Ainsi, g est l'inverse de f .

Notation. On note $g = f^{-1}$ l'inverse de f .

Rappel. Pour trouver l'inverse d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par une formule $f(x) = y$, on isole x en fonction de y .

Exemple.

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x - 8 \\y &= 3x - 8 \\y + 8 &= 3x \\\frac{y + 8}{3} &= x \\g(y) &= \frac{y + 8}{3}\end{aligned}$$

Dans un devoir, on commence par la formule de l'inverse et on vérifie $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$.

Définition. On dit que $f : E \rightarrow F$ est une fonction *injective* si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Définition. On dit que $f : E \rightarrow F$ est une fonction *surjective* si pour tout $y \in F$, $\exists x \in E$ t.q. $f(x) = y$.

Définition. On dit que $f : E \rightarrow F$ est une fonction *bijective* si elle est injective **et** surjective.

Exemple.

•

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, f(x) = |x|$$

f n'est pas injective, car $f(1) = |1| = 1$ et $f(-1) = |-1| = 1$, mais $1 \neq -1$.

f est surjective, car soit $y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, alors pour $x = y$, on a $f(x) = f(y) = |y| = y$.

•

$$\begin{aligned}f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\x &\mapsto x + 1\end{aligned}$$

f est injective :

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$.

On suppose $f(x_1) = f(x_2)$.

$$x_1 + 1 = x_2 + 1$$

$$x_1 = x_2$$

f n'est pas surjective

$y = 0 \in \mathbb{N}$ n'est pas égal à $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$. Si il existait x avec $f(x) = 0$, $x + 1 = 0$, $x = -1$, $x \notin \mathbb{N}$.

•

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\x &\mapsto 2x + 3\end{aligned}$$

f est injective :

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

supposons $f(x_1) = f(x_2)$, $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$, $2x_1 = 2x_2$, $x_1 = x_2$.

f est surjective :

Soit $y \in \mathbb{R}$.

On cherche x t.q. $f(x) = y$.

Posons $x = \frac{y - 3}{2} \in \mathbb{R}$.

Alors, $f(x) = f\left(\frac{y - 3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y - 3}{2} + 3 = y - 3 + 3 = y$.

Ainsi, f est bijective.

•

$$f : A \rightarrow B; A = \{1, 48, 57\}, B = \{a, b, c\}$$

$$1 \mapsto a, 48 \mapsto a, 57 \mapsto b$$

f n'est pas injective, car $1 \mapsto a$ et $48 \mapsto a$ avec $1 \neq 48$.

f n'est pas surjective, car aucun élément de $x \in A \mapsto c$.

Remarque. La fonction $f' : A \rightarrow B'$ avec $B' = \{a, b\}$ est surjective.

Cours 3

Rappel. A, B deux ensembles

- $f : A \rightarrow B$ une fonction, associe à chaque $x \in A$ un unique $f(x) \in B$. $x \mapsto f(x)$.
- f est *inversible* s'il existe $g : B \rightarrow A$ t.q. $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$ et $f(g(b)) = b$ pour tout $b \in B$.
- l'inverse est *unique*.
- La composition de $f : A \rightarrow B$ avec $g : B \rightarrow C$ est $g \circ f : A \rightarrow C$ avec $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- f est injective si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f est surjective si pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ t.q. $f(a) = b$.
- f est bijective si elle est injective et surjective.

Proposition. $f : A \rightarrow B$ est bijective si, et seulement si, elle est inversible.

Démonstration.

$\Leftarrow :$

Supposons que f est inversible.

Alors, il existe un inverse $g : B \rightarrow A$.

(inj) :

Soient $x_1, x_2 \in A$.

On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$.

Alors, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Donc, $x_1 = x_2$.

(surj) :

Soit $y \in B$.

Posons $x = g(y) \in A$.

Alors, $f(x) = f(g(y)) = y$.

Ainsi, f est bijective.

$\Rightarrow :$

Supposons f est injective et surjective.

Lemme. Pour chaque $y \in B$, il existe un unique $x \in A$ t.q. $f(x) = y$.

Démonstration.

Existence : Comme f est surjective, x existe.

Unicité : Supposons $x_1, x_2 \in A$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$ puisque f est injective. ■

On définit $g : B \rightarrow A$ par $g(y) = x$ où x est l'unique élément du lemme.

On vérifie :

Soit $x \in A$, alors $g(\underbrace{f(x)}_y) = x$, par définition de g .

Soit $y \in B$, alors $f(\underbrace{g(y)}_{\text{l'unique } x \text{ t.q. } f(x) = y}) = y$.

□

Définition. Une *opération* (interne, binaire) sur un ensemble E est un fonction $m : E \times E \rightarrow E$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$,

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(n, m) \longmapsto n + m$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(n, m) \longmapsto n \cdot m$$

$$d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{x}{y}$$

n'est pas une opération, car $(1, 0) \mapsto \frac{1}{0}$ qui n'est pas défini. (d n'est pas une fonction.)

Cependant,

$$d : \mathbb{Q}_* \times \mathbb{Q}_* \longrightarrow \mathbb{Q}_*$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{x}{y}$$

est une opération.

A un ensemble

$E = \{f : A \rightarrow A\}$, où f est une fonction.

$$c : E \times E \longrightarrow E$$

$$(f, g) \longmapsto f \circ g$$

La composition est une opération.

Notation. On note la plupart du temps une opération par un symbole entre les entrées.

Exemple. $m(x, y) := x * y$, ou $x + y$, ou $x \circ y$, ou xy .

Définition.

Un *élément neutre* pour une opération $*$ est un élément $e \in E$ t.q. pour tout $x \in E$, $e * x = x$ et $x * e = x$.

Cours 4

Rappel.

- $f : E \rightarrow F$ est bijective $\Leftrightarrow f$ est inversible.
- L'inverse est unique ($g = f^{-1}$)
- Opération : $m : E \times E \rightarrow E$, ou
$$* : E \times E \rightarrow E$$
$$(x, y) \mapsto z$$
- Élément neutre : $e \in E$ t.q. $e * x = x$ et $x * e = x$.
- f est injective si tout $y \in F$ a au plus un antécédent
- f est surjective si tout $y \in F$ a au moins un antécédent
- f est bijective si tout $y \in F$ a exactement un antécédent
- x est antécédent de y si $f(x) = y$

Exemple.

Sur \mathbb{N} ,

- 0 est neutre pour $+$.

$$0 + n = n$$

$$n + 0 = n$$

- 1 est neutre pour \times .

$$1 \times n = n$$

$$n \times 1 = n$$

Sur \mathbb{Z} , $-$ est une opération mais elle n'a pas d'élément neutre.

En effet,

Supposons que $e \in \mathbb{Z}$ est neutre, alors $e - n = n$ pour tout n .

Pour $n = 0$, $e - 0 = 0$, donc $e = 0$.

Pour $n = 1$, $e - 1 = 1$, donc $-1 = 1$.

4

- Sur l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, la multiplication matricielle \times est une opération.

La matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est neutre pour \times .

- Sur $E = \{f : A \rightarrow A\}$, la fonction $\mathbb{1}_A$ est neutre pour la composition de fonctions.

Démonstration.

On doit montrer $\mathbb{1}_A \circ f = f$ et $f \circ \mathbb{1}_A = f$ pour tout $f \in E$.

(1) Soit $x \in A$, alors

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A \circ f)(x) &= \mathbb{1}_A(f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc, $\mathbb{1}_A \circ f = f$.

(2) Soit $x \in A$, alors

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbb{1}_A)(x) &= f(\mathbb{1}_A(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc, $f \circ \mathbb{1}_A = f$.

□

On peut décrire une opération sur un ensemble fini avec sa table "de multiplication".

Exemple. $A = \{0, 1\}$

$$f_1 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_2 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, f_3 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_4 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix} \quad \text{On a } f_2 = \mathbb{1}_A.$$

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_4	f_3	f_2	f_1
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

Définition.

Une opération $*$ sur E est *associative* si pour tout $x, y, z \in E$, on a $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Proposition.

Si $$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.*

Démonstration.

Supposons que e et e' sont neutres pour $*$.

On a

$$\begin{aligned} e * e' &= e' && \text{car } e \text{ est neutre} \\ e * e' &= e && \text{car } e' \text{ est neutre} \end{aligned}$$

Donc, $e = e'$.

□

Définition.

Soit E un ensemble, $*$ une opération sur E et $e \in E$ un neutre pour $*$. On dit que $a, b \in E$ sont *inverses* si $a * b = e$ et $b * a = e$.

Dans ce cas, on dit que a et b sont inversibles.

Exemple.

Dans \mathbb{Z} avec $+$, 3 et -3 sont inverses. En effet, on a $3 + (-3) = 0$ et $(-3) + 3 = 0$ avec 0 l'élément neutre de $+$.

Exemple.

Dans \mathbb{Z} avec \times , le neutre est 1, mais seuls 1 et -1 sont inversibles. En effet, on a $1 \times 1 = 1$ et $(-1) \times (-1) = 1$.

Remarque.

L'élément neutre est son propre inverse. En effet, $e * e = e$, pour tout $*$ qui admet e comme élément neutre.

Proposition.

Si $$ est associative et admet un élément neutre e , alors les inverses sont uniques s'ils existent.*

Démonstration.

Soit $a \in E$.

Supposons b, b' sont inverses de a .

Alors,

$$\begin{aligned} b &= b * e \\ \text{car } b' \text{ est inverse de } a &= b * (a * b') \\ \text{associativité} &= (b * a) * b' \\ \text{car } b \text{ est inverse de } a &= e * b' \\ &= b' \end{aligned}$$

□

Notation.

Comme l'inverse de a est unique, on le note a^{-1} .

Exemple.

Dans $E = \{f : A \rightarrow A\}$, avec l'opération \circ , les fonctions bijectives sont exactement celles qui sont inversibles pour \circ .

Proposition.

La composition de fonctions est associative.

Démonstration.

Soient $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$.

Soit $a \in A$.

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= h((g \circ f)(a)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(a) \\ \Rightarrow (h \circ g) \circ f &= h \circ (g \circ f) \end{aligned}$$

□

Chapitre 6 Groupes

Définition.

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération $*$ t.q.

- (A) $*$ est associative
- (N) $*$ admet un neutre
- (I) tout $g \in G$ admet un inverse

Exemple.

- (1) $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
Neutre : 0
Inverse de n : $-n$
- (2) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes.
- (3) (\mathbb{Z}, \times) n'est pas un groupe, car, par exemple, 2 n'est pas inversible.
- (4) (\mathbb{Q}, \times) n'est pas un groupe, car 0 n'est pas inversible.
- (5) (\mathbb{Q}_*, \times) et (\mathbb{R}_*, \times) sont des groupes.
Neutre : 1
Inverse de x : $\frac{1}{x}$

Remarque. (1), (2) et (5) sont *commutatifs*.

Remarque. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.

Définition. Si l'opération d'un groupe est commutative, on note le groupe comme *abélien* (ou commutatif).

- (6) $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.
 $GL(n, \mathbb{R}) = \{M | M \text{ est une matrice } n \times n \text{ réelle inversible}\}.$
 GL : général linéaire
Neutre : $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$
 M^{-1} la matrice inverse est l'inverse.
Pour $n \geq 2$, $GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas abélien.
- (7) A un ensemble quelconque
 $S(A) = \{f : A \rightarrow A | f \text{ est bijective}\}$ est un groupe pour \circ .
Neutre : $\mathbb{1}_A$
Inverse de f : f^{-1}

Remarque.

Pour $A = \{0, 1\}$

$$f_1 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_2 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, f_3 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_4 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, S(A) = \{f_2, f_3\}.$$

Cours 5

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$
 G ensemble
 $*$ opération sur G
 (A) $*$ est associative
 $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$
 (N) $*$ admet un élément neutre dans G
 $\exists e \in G$ t.q. $\forall a \in G, e * a = a = a * e$
 (I) tout élément de G est inversible
 $\forall a \in G, \exists b \in G$ t.q. $a * b = e = b * a$
- Le neutre et l'inverse sont uniques

Remarque.

“Le groupe \mathbb{R} ” implique l'opération $+$ et “le groupe \mathbb{R}_* ” implique l'opération \times .

Propriétés élémentaires des groupes

- (1) $\forall a, b \in G, (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.
- (2) $\forall a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$
- (3) Si $a * b = a * c$, alors $b = c$
- (4) Si $b * a = c * a$, alors $b = c$

Démonstration.

- (1) On calcule

$$\begin{aligned}
 (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * (b^{-1} * a^{-1})) & (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * (a^{-1} * (a * b)) \\
 &= a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) & &= b^{-1} * ((a^{-1} * a) * b) \\
 &= a * (e * a^{-1}) & &= b^{-1} * (e * b) \\
 &= a * a^{-1} & &= b^{-1} * b \\
 &= e & &= e
 \end{aligned}$$

Donc, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

- (2) Comme $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$, a est l'inverse de a^{-1} , donc $(a^{-1})^{-1} = a$.
- (3) Supposons $a * b = a * c$. Alors

$$\begin{aligned}
 a^{-1} * (a * b) &= a^{-1} * (a * c) \\
 (a^{-1} * a) * b &= (a^{-1} * a) * c \\
 e * b &= e * c \\
 b &= c
 \end{aligned}$$

- (4) Supposons $b * a = c * a$. Alors

$$\begin{aligned}
 (b * a) * a^{-1} &= (c * a) * a^{-1} \\
 b * (a * a^{-1}) &= c * (a * a^{-1}) \\
 b * e &= c * e \\
 b &= c
 \end{aligned}$$

□

Exemple.

$(\mathbb{Z}_3, +)$.

$$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$+$ est associative.

$\bar{0}$ est l'élément neutre.

$$(\bar{1})^{-1} = \bar{2}.$$

$$(\bar{2})^{-1} = \bar{1}.$$

$(\mathbb{Z}_3, +)$ est un groupe abélien.

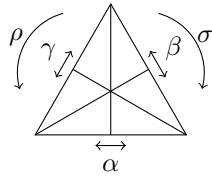
Remarque. La symétrie de la table par rapport à la diagonale implique la commutativité.

Exemple.

(\mathbb{D}_3, \circ) - groupe diédral d'ordre 3.

Groupe des symétries d'un triangle équilatéral.

$$\mathbb{D}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \text{identité} \end{array}, \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma \\ \text{réflexion} \end{array}, \begin{array}{l} \rho, \sigma \\ \text{rotation} \end{array} \right\}.$$



\circ	ε	α	β	γ	ρ	σ
ε	ε	α	β	γ	ρ	σ
α	α	ε	ρ	σ	β	γ
β	β	σ	ε	ρ	γ	α
γ	γ	ρ	σ	ε	α	β
ρ	ρ	γ	α	β	σ	ε
σ	σ	β	γ	α	ε	ρ

(\mathbb{D}_3, \circ) n'est pas un groupe abélien.

Cours 6

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$ avec A, N, I .

Abélien : C .

•

$$\begin{aligned} a * b &= a * c & \Rightarrow & b = c \\ b * a &= c * a & \Rightarrow & b = c \\ (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$

•

Exemple.

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{Q}_*, \times) , (\mathbb{R}_*, \times) sont des groupes abéliens ; \mathbb{Z}_3 , \mathbb{D}_3 , $GL(n, \mathbb{R})$ sont des groupes non abéliens.

$S(E) = \{f : E \rightarrow E \mid f \text{ est bijective}\}$.

Remarque. E n'est pas l'ensemble utilisé dans la définition du groupe.

Produit cartésien de groupes

$(G, *)$ et (H, \diamond) deux groupes.

Proposition.

$G \times H$ est un groupe lorsque muni de l'opération $(a, b) \bullet (a', b') = (a * a', b \diamond b')$, avec $a, a' \in G$ et $b, b' \in H$.

Démonstration.

(N) $e \in G$ le neutre et $e' \in H$ le neutre, alors $(e, e') \in G \times H$

$$\begin{aligned}(a, b) \bullet (e, e') &= (a * e, b \diamond e') \\ &= (a, b) \\ (e, e') \bullet (a, b) &= (e * a, e' \diamond b) \\ &= (a, b)\end{aligned}$$

(e, e') est bien neutre.

(I) $(a, b) \in G \times H$, alors (a^{-1}, b^{-1}) est inverse de (a, b) .

En effet,

$$\begin{aligned}(a, b) \bullet (a^{-1}, b^{-1}) &= (a * a^{-1}, b \diamond b^{-1}) \\ &= (e, e') \\ (a^{-1}, b^{-1}) \bullet (a, b) &= (a^{-1} * a, b^{-1} \diamond b) \\ &= (e, e')\end{aligned}$$

(A) Soient $(a, b), (c, d), (e, f) \in G \times H$. On a

$$\begin{aligned}((a, b) \bullet (c, d)) \bullet (e, f) &= (a * c, b \diamond d) \bullet (e, f) \\ &= ((a * c) * e, (b \diamond d) \diamond f) \\ &= (a * (c * e), b \diamond (d \diamond f)) \\ &= (a, b) \bullet (c * e, d \diamond f) \\ &= (a, b) \bullet ((c, d) \bullet (e, f))\end{aligned}$$

□

Exemple.

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

- $(\mathbb{Z}_2, +)$

$$\begin{array}{c|c|c} + & \bar{0} & \bar{1} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \hline \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}$$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

+	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$
$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$

Isomorphismes de groupes

Définition. $(G, *)$ et (H, \diamond) deux groupes.

Un *isomorphisme* de G vers H est une application $f : G \rightarrow H$ t.q.

- (1) $\forall a, b \in G, f(a * b) = f(a) \diamond f(b)$.

Préservation des opérations

(2) f est bijective.

Exemple.

- $(\mathbb{R}, +)$ et (\mathbb{R}_*^+, \times)

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$
 est un isomorphisme de groupes.

(1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= e^{x+y} \\ &= e^x \times e^y \\ &= f(x) \times f(y) \end{aligned}$$

(2) $\ln : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est inverse de $f : \ln e^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln x} = x, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$.

Proposition. Si $f : G \rightarrow H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(e_G) = e_H$, où e_G est l'élément neutre de G et e_H est l'élément neutre de H .

Démonstration. Stratégie : montrer que $f(e_G)$ est neutre pour H et utiliser l'unicité.

Soit $b \in H$.

Comme f est bijective, $\exists a \in G$ t.q. $f(a) = b$

$$\begin{aligned} f(e_G) \diamond b &= f(e_G) \diamond f(a) & b \diamond f(e_G) &= f(a) \diamond f(e_G) \\ &= f(e_G * a) & &= f(a * e_G) \\ &= f(a) & &= f(a) \\ &= b & &= b \end{aligned}$$

On a donc que $f(e_G) \in H$ est neutre pour \diamond , mais comme l'élément neutre est unique, $f(e_G) = e_H$. □

Exemple. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$
 $x \mapsto e^x$, $f(0) = e^0 = 1$.

Proposition. Si $f : G \rightarrow H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, pour tout $a \in G$.

Démonstration. Stratégie : montrer que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$ et utiliser l'unicité.

$$\begin{aligned} f(a^{-1}) \diamond f(a) &= f(a^{-1} * a) & f(a) \diamond f(a^{-1}) &= f(a * a^{-1}) \\ &= f(e_G) & &= f(e_G) \\ &= e_H & &= e_H \end{aligned}$$

On a donc que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$, mais comme l'inverse est unique, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. □

Exemple. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$
 $x \mapsto e^x$, $f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} = f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$, où $-x$ est l'inverse de x pour $+$ et $\frac{1}{f(x)}$ est l'inverse de $f(x)$ pour \times .

Remarque. Si G, H sont des groupes finis et f est un isomorphisme, alors f “envoie la table de G à celle de H ”.

$$G : \begin{array}{c|c|c|c|c} * & e_G & a_1 & a_2 & \dots \\ \hline e_G & & & & \\ a_1 & & & a_1 * a_2 & \\ a_2 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c|c|c|c|c} \diamond & e_H & f(a_1) & f(a_2) & \dots \\ \hline f(e_G) & & & & \\ f(a_1) & & & f(a_1) \diamond f(a_2) & \\ f(a_2) & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} : H$$

Avec $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \diamond f(a_2)$.

Exemple.

$$\mathbb{Z}_2 : \begin{array}{c|c|c} + & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array} \quad H : \begin{array}{c|c|c} \circ & \varepsilon & \alpha \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \varepsilon \end{array} \quad C_2 : \begin{array}{c|c|c} \times & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array}$$

\mathbb{Z}_2 , H et C_2 sont isomorphes.

Il existe un isomorphisme entre chaque paire.

Proposition. Si $f : G \rightarrow H$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : H \rightarrow G$ est un isomorphisme.

Démonstration.

(1) Soient $b_1, b_2 \in H$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1 \diamond b_2) &= f^{-1}(f[f^{-1}(b_1)] \diamond f[f^{-1}(b_2)]) \\ &= f^{-1}(f[f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2)]) \\ &= f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2) \end{aligned}$$

(2) f^{-1} est bijective, car elle est inversible d'inverse f .

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \mathbb{1}_H \\ f^{-1} \circ f &= \mathbb{1}_G \end{aligned}$$

□

Proposition (Transitivité).

Si $f : G \rightarrow H$ et $g : H \rightarrow K$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : G \rightarrow K$ est un isomorphisme.

Démonstration.

(1) Soient $a, b \in G$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a * b) &= g(f(a * b)) \\ &= g(f(a) \diamond f(b)) \\ &= g(f(a)) \oplus g(f(b)) \\ &= (g \circ f)(a) \oplus (g \circ f)(b) \end{aligned}$$

(2) $g \circ f$ est inversible d'inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Puissances d'éléments de groupes

Définition (par récurrence).

$a \in G, n \in \mathbb{N}$

(1) $a^0 := e_G$

(2) $a^n = a * a^{n-1}, \forall n \geq 1$

Exemple.

•

$$\begin{aligned} a^4 &= a * a^3 \\ &= a * a * a^2 \\ &= a * a * a * a^1 \\ &= a * a * a * a * a^0 \\ &= a * a * a * a * e \\ &= a * a * a * a \end{aligned}$$

- Dans $(\mathbb{Z}, +)$, $2^3 = 3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. par récurrence sur n .

(1) $n = 0$:

$$\begin{aligned} a^{0+m} &= a^m \\ &= e * a^m \\ &= a^0 * a^m \end{aligned}$$

(2) supposons que $a^{n+m} = a^n * a^m$ pour un $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} a^{(n+1)+m} &= a^{n+m+1} \\ &= a * a^{n+m} \\ \text{hyp rec} &= a * (a^n * a^m) \\ &= (a * a^n) * a^m \\ &= a^{n+1} * a^m \end{aligned}$$

□

Définition. Pour $n \in \mathbb{Z}$.

Si $n \geq 0$, on a déjà défini a^n .

Si $n < 0$, on définit $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

Exemple. $a^{-3} = (a^{-1})^3 = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1}$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Proposition. $(a^n)^m = a^{nm}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. Vraie aussi pour $m, n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. par récurrence sur m .

(1) $m = 0$:

$$\begin{aligned} (a^n)^0 &= e \\ a^{n \cdot 0} &= a^0 = e \end{aligned}$$

(2) supposons que $(a^n)^m = a^{nm}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (a^n)^{m+1} &= (a^n)(a^n)^m \\ \text{hyp rec} &= (a^n)a^{nm} \\ &= a^{n+nm} \\ &= a^{n(m+1)} \end{aligned}$$

□

Cours 7

Rappel.

- Isomorphisme : $f : G \rightarrow H$ t.q.

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$

avec $a * b$ et $f(a) \diamond f(b)$ implicitement.

(2) f est bijective

“même table”

- f, g isomorphismes $\Rightarrow f^{-1}, g \circ f$ isomorphismes.
 $\mathbb{1}_G : G \rightarrow G$ est trivialement un isomorphisme.
- G est isomorphe à H s'il existe un isomorphisme $f : G \rightarrow H$.
- Puissances :
 Soit $a \in G$ avec G un groupe.
 - $a^0 = e$
 - $a^{n+1} = aa^n$
 - $a^{-n} = (a^{-1})^n$
 - $a^{n+m} = a^n a^m$
 - $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- f isomorphisme
 - $f(e_G) = e_H$
 - $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Proposition. f isomorphisme $f : G \rightarrow H$.

$a \in G$. Alors, $f(a^n) = f(a)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. par récurrence sur n .

$n \geq 0$ (1) $n = 0$

$$\begin{aligned} f(a^0) &= f(e_G) \\ &= e_H \\ &= f(a)^0 \end{aligned}$$

(2) supposons que $f(a^n) = f(a)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(a^{n+1}) &= f(a \cdot a^n) \\ &= f(a)f(a^n) \\ \text{hyp rec} &= f(a)f(a)^n \\ &= f(a)^{n+1} \end{aligned}$$

$n < 0$ alors, $-n > 0$ et

$$\begin{aligned} f(a^n) &= f((a^{-1})^{-n}) \\ &= f(a^{-1})^{-n} \\ &= (f(a)^{-1})^{-n} \\ &= f(a)^n \end{aligned}$$

□

Exemple. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, avec la multiplication de matrices.

$$\text{Soient } \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

(A) : associatif, car la multiplication de matrices est associative.

(N) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ est neutre

(I) : l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, H est un groupe pour la multiplication matricielle.

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & H \\ \text{On définit} & & \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1) f(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y)$$

(2) montrons que f est bijective.

- f est injective

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

Supposons $f(x) = f(y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = y$$

- f est surjective

Soit $Y = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, avec $y \in \mathbb{R}$.

$Y = f(y)$.

□

Sous-groupes

Définition. $H \subseteq G$ est un *sous-groupe* de G si H est un groupe pour la même opération que G .

Exemple.

- $\{e\} \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $G \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = 2\mathbb{Z} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$
- Dans $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ est un sous-groupe.

$$\begin{array}{c|c|c} + & \bar{0} & \bar{2} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \hline \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \end{array}$$

Ce groupe est isomorphe à \mathbb{Z}_2 et à $C_2 = (\{-1, 1\}, \times)$.

- $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +) \subseteq (\mathbb{R}, +)$.
- $C_2 \subseteq \mathbb{Q}_* \subseteq \mathbb{R}_*$.
- $\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$.
 $\{\varepsilon, \alpha\}$ et $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$ sont des sous-groupes de \mathbb{D}_3 .

Notation. On note l'ensemble $m\mathbb{Z} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Cours 8

Rappel.

- $a \in G$.
 — $a^n = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}$
 — $a^n = a * a^{n-1}$
 — $a^0 = e$
 — $a^{-n} = (a^{-1})^n$
- Sous-groupe de $(G, *) : H \subseteq G$ qui est un groupe pour $*$.

Exemple. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ pour $+$.

Exemple.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

Proposition. $H \subseteq G$ un sous-groupe.

- (1) Si G est abélien, alors H est abélien ;
- (2) Le neutre de H est le neutre de G ;
- (3) Si $a \in H$, son inverse $a^{-1} \in H$ est l'inverse de a dans G .

Démonstration.

- (1) G est abélien, alors $\forall a, b \in G, ab = ba$.
En particulier, $\forall a, b \in H, ab = ba$.
- (2) Le neutre de G e_G a la propriété que $\forall a \in G, e_G a = a = a e_G$.
Comme $H \subseteq G$, cette propriété est vraie pour H aussi.
Donc, $a e_G = a = e_G a$.
Ainsi, e_G est le neutre de H , par l'unicité de l'élément neutre.
- (3) $a \in H$, il existe un inverse $b \in G$ pour a t.q. $ab = ba = e$.
Comme H est un groupe, $\exists! a^{-1} \in H$.
De $ab = e$, on a $a^{-1}ab = a^{-1}e$, donc $b = a^{-1}$.

□

Théorème.

Un sous-ensemble non-vide $H \subseteq G$ est un sous-groupe si, et seulement si, pour tous $a, b \in H, ab^{-1} \in H$.

Démonstration.

- (\Rightarrow) Supposons que H est un sous-groupe, donc $a, b \in H$, alors $b^{-1} \in H$.
De plus, H est fermé pour la multiplication, donc $ab^{-1} \in H$.
- (\Leftarrow) (N) H est non-vide, donc $\exists a \in H$.
Par hypothèse, $aa^{-1} = e \in H$.
(I) On vient de montrer que $e \in H$.
Soit $b \in H$ quelconque. Par hypothèse, $eb^{-1} = b^{-1} \in H$.
(A) On sait que $\forall a, b, c \in G, (ab)c = a(bc)$.
En particulier, $\forall a, b, c \in H, (ab)c = a(bc)$.
Finalement, H est fermé pour l'opération de G , car $\forall a, b \in H, b^{-1} \in H$.
Donc, par hypothèse, $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$.

□

Exemple.

Soit $m \in \mathbb{Z}$.

Posons $H = m\mathbb{Z} = \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$, muni de l'addition.

montrons que. H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

H est non-vide, car $m0 = 0 \in H$.

Soient $a, b \in H$.

Par définition de H , $\exists a', b' \in \mathbb{Z}$ t.q. $a = ma'$ et $b = mb'$.

Dans \mathbb{Z} , $b^{-1} = -mb'$.

On a $a + (-b) = ma' + (-mb') = m(a' - b') \in H$.

Donc, H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

□

Réciproquement, soit $H \subseteq \mathbb{Z}$ un sous-groupe de \mathbb{Z} quelconque. Alors $\exists m \in \mathbb{Z}$ t.q. $H = m\mathbb{Z}$.

Démonstration.

On sait que $0 \in H$.

Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$ et l'énoncé est vrai.

Sinon, H contient un autre élément $a \in H$, donc $-a \in H$.

En particulier, H contient au moins un entier positif.

Soit m le *plus petit* élément positif de H .

Soit $h \in H$ quelconque. On divise h par m , donc $h = qm + r$, où $q, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < m$.

Si $r = 0$, $h = qm \in m\mathbb{Z}$.

Sinon, comme $h \in H$ et $m \in H$, $h - qm \in H$, mais $h - qm = r$, donc $r \in H$.

Comme $0 < r < m$, il y a une contradiction à la définition de m .

⚡

Ainsi, $H \subseteq m\mathbb{Z}$. Mais clairement, $m\mathbb{Z} \subseteq H$, car $m \in H$ et $mn \in H$, donc $H = m\mathbb{Z}$.

□

Proposition.

Soit $f : G \rightarrow H$ un isomorphisme. Alors, $K \subseteq G$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $f(K)$ est un sous-groupe de H .

Notation. $f(K) = \{f(k) \mid k \in K\}$.

(\Rightarrow) Supposons que K est un sous-groupe de G .

On sait que $e \in K$, alors $f(e) = e \in f(K)$, donc $f(K)$ est non-vide.

Soient $a, b \in f(K)$. On veut montrer que $ab^{-1} \in f(K)$.

Alors, $a = f(k)$ et $b = f(k')$, avec $k, k' \in K$.

Donc, $ab^{-1} = f(k)f(k')^{-1} = f(k)f(k'^{-1}) = f(kk'^{-1})$.

Comme $kk'^{-1} \in K$, $ab^{-1} \in f(K)$.

(\Leftarrow) On effectue la même preuve avec f^{-1} qui est un isomorphisme en remarquant que $f^{-1}(f(k)) = k$.

Notation.

$G \xrightarrow{f} H$ avec f un isomorphisme est équivalent à $G \xrightarrow{\sim} H$.

Notation.

$H \subseteq G$ un sous-groupe est équivalent à $H \leq G$.

Proposition.

Soit $\{H_i\}_{i \in I}$ une collection de sous-groupes de G . Alors $\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$.

Démonstration.

$H_i \leq G, \forall i \in I$.

Alors, $e \in H_i, \forall i$. Donc, $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$. En particulier, $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$.

Soient $a, b \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Alors, $a, b \in H_i, \forall i$.

Comme $H_i \leq G$, $ab^{-1} \in H_i, \forall i$, donc $ab^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$.

□

Remarque. Si $H_1, H_2 \leq G$, $H_1 \cup H_2$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de G .

Exemple. $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de \mathbb{Z} .

Plus précisément, $2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, mais $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

Exemple. $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

Chapitre 2 Applications et équivalences

Section 2.4 Relations d'équivalence

Définition. Une *relation d'équivalence* sur un ensemble E est un sous-ensemble $R \subseteq E \times E$ satisfaisant

(1) réflexivité

$$x \sim x, \forall x \in E.$$

(2) symétrie

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x.$$

(3) transitivité

$$x \sim y \text{ et } y \sim z, \text{ alors } x \sim z.$$

Notation. On note $x \sim y$ si, et seulement si, $(x, y) \in R$.

Exemple.

(1) $E = \mathbb{R}$

$$x \sim y \text{ si, et seulement si, } |x| = |y|$$

$$(\text{refl}) \quad |x| = |x|, \text{ donc } x \sim x.$$

$$(\text{sym}) \quad \text{Supposons } x \sim y. \text{ Alors, } |x| = |y|. \text{ Donc, } y \sim x.$$

$$(\text{trans}) \quad \text{Supposons } x \sim y \text{ et } y \sim z. \text{ Alors, } |x| = |y| \text{ et } |y| = |z|. \text{ Donc } |x| = |z|. \text{ Ainsi, } x \sim z.$$

(2) C est l'ensemble des élèves dans la classe.

$$x \sim y \text{ si, et seulement si, } x \text{ et } y \text{ ont le même âge est une relation d'équivalence.}$$

Définition. Si E est un ensemble et \sim est une relation d'équivalence sur E , la *classe d'équivalence* de $x \in E$ est $\bar{x} = \{y \in E \mid y \sim x\} \subseteq E$.

Lemme. $\bar{x} = \bar{y}$ si, et seulement si, $x \sim y$.

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons $\bar{x} = \bar{y}$.

Par (refl), $x \sim x$, donc $x \in \bar{x}$. Alors, $x \in \bar{y}$. Ainsi, $x \sim y$.

(\Leftarrow) Supposons $x \sim y$.

(\subseteq) Soit $z \in \bar{x}$. Alors $z \sim x$. Comme $x \sim y$, par (trans), $z \sim y$. Donc, $z \in \bar{y}$.

(\supseteq) Soit $z \in \bar{y}$. Alors, $z \sim y$ et, par (sym), $y \sim z$. Comme $x \sim y$, par (trans), $x \sim z$ et, par (sym), $z \sim x$.
Donc, $z \in \bar{x}$.

Ainsi, $\bar{x} = \bar{y}$.

□

Cours 9

Rappel.

- $H \leq G$, H un sous-groupe de G , si, et seulement si,
 - $H \neq \emptyset$;
 - $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$.

- Si $H \leq G$, H a le même neutre que G , mêmes inverses.
- G abélien $\Rightarrow H \leq G$ abélien.
- Si $f : G \rightarrow H$ isomorphisme, alors $K \leq G \Leftrightarrow f(K) \leq H$.
- Relations d'équivalence \sim sur E :

(Refl) $a \sim a, \forall a \in E$;

(Sym) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$;

(Trans) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

- Classe d'équivalence : $\bar{a} = \{b \in E \mid b \sim a\}$.
- $a \sim b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$.

Équivalence modulo m :

$a \sim b$ si, et seulement si, $a - b = km$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Notation. $m \mid a - b$, m divise $a - b$: $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = km$.

$a \sim b \Leftrightarrow m \mid a - b$.

Démonstration. que c'est bel et bien une équivalence

(Refl) Soit $a \in \mathbb{Z}$.

$$a - a = 0m \Rightarrow a \sim a.$$

(Sym) Supposons que $a \sim b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

Alors, $a - b = km$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Or, $-(a - b) = -km \Rightarrow b - a = (-k)m$, donc $b \sim a$.

(Trans) Supposons que $a \sim b$ et $b \sim c$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Alors, $a - b = k_1m$ et $b - c = k_2m$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

En additionnant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} a - c &= k_1m + k_2m \\ &= (k_1 + k_2)m \end{aligned}$$

Donc, $a \sim c$.

□

Si $m = 2$, les classes d'équivalence sont

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 0\} & \bar{1} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 1\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 0 = 2k\} & &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 1 = 2k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k\} & &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k + 1\} \\ &= 2\mathbb{Z} & &= \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Remarque.

$$\bar{0} = \bar{2} = \bar{4} = \overline{-2} = \dots \qquad \bar{1} = \bar{3} = \bar{5} = \overline{-1} = \dots$$

Plus généralement, pour $m\mathbb{Z}$, on a m classes d'équivalence.

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}$$

Notation. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ pour la relation de congruence modulo m .

Définition. Une *partition* d'un ensemble E est une collection $\mathcal{P} = \{E_i\}$, avec $i \in I$ de sous-ensembles de E t.q.

$$(1) \bigcup_{i \in I} E_i = E;$$

$$(2) E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j.$$

Remarque. Chaque $x \in E$ est élément d'exactly un E_i .

Proposition. Si \sim est une relation d'équivalence sur E , alors $\mathcal{P} = \{\bar{a} \mid a \in E\}$ est une partition de E .

Exemple. $E = \mathbb{Z}$, \sim équivalence modulo 3.

$\mathcal{P} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ est une partition de \mathbb{Z} .

Démonstration.

(1) Clairement, $\bigcup_{a \in E} \bar{a} \subseteq E$.

On veut montrer que $E \subseteq \bigcup_{a \in E} \bar{a}$.

Soit $x \in E$, alors $x \sim x$ par réflexivité, donc $x \in \bar{x}$ et $x \in \bigcup_{a \in E} \bar{a}$.

(2) Supposons que $x \in \bar{a}$ et $x \in \bar{b}$, avec $\bar{a} \neq \bar{b}$.

Alors, $x \sim a$ et $x \sim b$. Donc, par symétrie, $a \sim x$ et $x \sim b$. Donc, par transitivité, $a \sim b$. Donc $\bar{a} = \bar{b}$. Ceci est une contradiction, donc $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset, \forall \bar{a} \neq \bar{b} \in \mathcal{P}$.

□

On définit une opération sur \mathbb{Z}_m pour la congruence modulo m .

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m &\rightarrow \mathbb{Z}_m \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\mapsto \overline{a+b} \end{aligned}$$

Autrement dit, $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$.

Remarque. L'écriture d'un élément \bar{a} n'est pas unique ($\bar{a} = \bar{a'}$ si $a \sim a'$).

Il faut vérifier que l'opération $+$ est correctement définie (définie sans ambiguïté).

Autrement dit, si $\bar{a} = \bar{a'}$ et $\bar{b} = \bar{b'}$, on veut montrer que $\bar{a} + \bar{b} = \bar{a'} + \bar{b'}$.

Cours 10

Rappel.

- Relation d'équivalence (\sim) \rightarrow partition en classes d'équivalence ($\bar{a} = \{b \mid b \sim a\}$).
- Équivalence (congruence) mod m (sur \mathbb{Z}) :

$$\begin{aligned} a \sim b &\Leftrightarrow m \mid a - b \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } a - b = km \end{aligned}$$

On note l'ensemble des classes d'équivalence mod m par $\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$.

On veut définir une opération $+$ sur \mathbb{Z}_m par $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$.

On doit vérifier que cette définition n'est pas ambiguë (ne dépend pas des représentants).

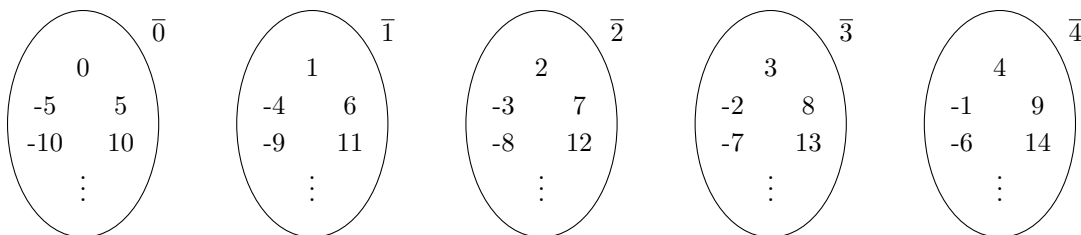
Supposons $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ et $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$. On doit vérifier que $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$, c'est-à-dire que $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.

Les hypothèses donnent : $a_1 - a_2 = k_a m$ et $b_1 - b_2 = k_b m$. En additionnant ces deux équations, on obtient $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = k_a m + k_b m$. Alors, $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (k_a + k_b)m$. Donc, $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.

□

Remarque. On doit faire ce genre de preuve pour chaque définition de fonction/opération qui ont comme domaine des classes d'équivalence.

Exemple. $m = 5$.



Pour faire $\bar{2} + \bar{1}$, on peut prendre $\overline{2+1} = \bar{2}$, ou bien $\overline{17+(-4)} = \bar{13}$.

Proposition. $(\mathbb{Z}_m, +)$ est un groupe abélien.

Démonstration.

(A) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$.

$$\begin{aligned} (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \overline{a+b} + \bar{c} \\ &= \overline{(a+b) + c} \\ &= \overline{a + (b+c)} \\ &= \bar{a} + \overline{b+c} \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \end{aligned}$$

(C) $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \bar{b} + \bar{a}$.

(N) $\bar{0} + \bar{a} = \overline{0+a} = \bar{a}$, donc $\bar{0}$ est neutre. Par commutativité, la propriété est satisfaite.

(I) $\bar{a} + \overline{-a} = \overline{a-a} = \bar{0}$, donc $\overline{-a}$ est l'inverse de \bar{a} . Par commutativité, la propriété est satisfaite.

On peut donc écrire $-\bar{a} = \overline{-a}$.

□

Ordre et groupes cycliques

Définition. Soient G un groupe et $a \in G$.

L'ordre de a , noté $o(a)$ est la plus petite quantité positive $k \in \mathbb{N}_*$ t.q. $a^k = e$, si elle existe. Sinon, on note $o(a) = \infty$.

Exemple.

- $o(e) = 1$
- Dans \mathbb{D}_3
 - $o(\alpha) = 2$
 - $o(\rho) = 3$
- Dans \mathbb{Z}
 - $o(0) = 1$
 - $o(n) = \infty, \forall n \neq 0$
- Dans \mathbb{Z}_6
 - $o(\bar{2}) = 3$

Proposition. Soit $m \in \mathbb{Z}$. $a^m = e$, si, et seulement si, $o(a) \mid m$.

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons $a^m = e$.

On divise m par $o(a)$: $m = q \cdot o(a) + r$, avec $0 \leq r < o(a)$.

Si $r = 0$, $o(a) \mid m$ et on a terminé.

Supposons que $0 < r < o(a)$, alors

$$\begin{aligned} r &= m - q \cdot o(a) \\ a^r &= a^{m-q \cdot o(a)} \\ &= a^m \cdot a^{-q \cdot o(a)} \\ &= e \cdot (a^{o(a)})^{-q} \\ &= e \cdot e^{-q} \\ &= e \end{aligned}$$

mais $0 < r < o(a)$ contredit la minimalité de $o(a)$.

□

Cours 11

Rappel.

- $a \sim b \Leftrightarrow m \mid a - b$ est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .
- $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ sont les classes d'équivalence.
- $(\mathbb{Z}_m, +)$ est un groupe, où $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$.
- $o(a) = \min\{k \in \mathbb{N}_* \mid a^k = e\}$ ordre de a . Si $a^k \neq e, \forall k > 0$, $o(a) = \infty$.
- Si $a^k = e$, $o(a) \mid k$.

Exemple.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ M^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M^4 = -M$$

$$M^5 = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M^6 &= \left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } o(M) = 6, \text{ puisque } M^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 6 Groupes (suite)

Section 6.13 Groupes symétriques S_n

Rappel. $S(E) = \{f : E \rightarrow E \mid f \text{ est bijective}\}$.

$S(E)$ est un groupe lorsque muni de l'opération \circ .

1_E est l'élément neutre.

f^{-1} est l'élément inverse de f .

$S(E)$ s'appelle le *groupe symétrique* de l'ensemble E .

Remarque.

$E = \{\text{rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo, violet}\}$.

$$S(E) \ni f : \begin{cases} \text{rouge} & \mapsto \text{jaune} \\ \text{jaune} & \mapsto \text{rouge} \\ \text{autres} & \mapsto \text{elles-mêmes} \end{cases}.$$

Le groupe $S(E)$ est isomorphe au groupe $S(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\})$, en numérotant les éléments.

Définition. $S_n = S(\{1, 2, \dots, n\})$ le groupe symétrique de n éléments.

Les éléments de S_n sont des bijections, aussi appelées permutations.

Notation. On note une permutation σ de la manière suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 3 \end{array}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

L'élément neutre est $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{D}_3.$$

Remarque. Tous les éléments de S_3 donnent des isométries du triangle, mais pas tous les éléments de S_4 donnent des isométries du carré.

Proposition. S_n contient $n!$ éléments.

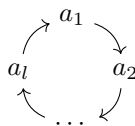
idée.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & \dots & & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ n \text{ choix} & & n-1 \text{ choix} & & n-2 \text{ choix} & & & & 1 \text{ choix} \end{array}$$

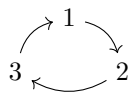
Ainsi, $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$.

#

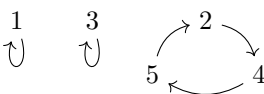
Définition. Un *cycle* est une permutation de la forme $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_l \rightarrow a_1$, où $a_i \neq a_j$ quand $i \neq j$.



Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur $l = 3$.



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur $l = 5$.



Notation. Écriture raccourcie pour un cycle : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 4 \ 5) \in S_5$.

Proposition. L'ordre d'un cycle est égal à sa longueur.

Démonstration.

Si le cycle σ permute les éléments a_i comme $\sigma = a_1 \xrightarrow{\sigma} a_2 \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} a_l \xrightarrow{\sigma} a_1$.

Alors, calculons σ^l

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_l \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_l & a_1 & a_2 & \dots & a_{l-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_l \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\sigma^l = e$.

□

Exemple. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas un cycle.

Cependant, σ se décompose en cycles $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$, où $\sigma_1 = (1 \ 2)$, $\sigma_2 = (3 \ 4)$.

Proposition. Toute permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit de manière unique comme une composition de cycles disjoints. (les cycles sont uniques, mais pas l'ordre de l'écriture).

Notation. Des cycles disjoints sont des cycles de *supports* disjoints, où le support d'un cycle est $\text{supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$.

Lemme. Les cycles disjoints commutent entre eux.

Exemple.

$$(1 \ 4 \ 5) \circ (2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ 3) \circ (1 \ 4 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Soient $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_l)$ et $\eta = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_k)$ deux cycles disjoints.

Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Il y a trois cas :

(1) $i \in \text{supp}(\sigma)$, $i \notin \text{supp}(\eta)$.

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta(i) &= \sigma(i) \\ \eta \circ \sigma(i) &= \sigma(i)\end{aligned}$$

(2) $i \notin \text{supp}(\sigma)$, $i \in \text{supp}(\eta)$.

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta(i) &= \eta(i) \\ \eta \circ \sigma(i) &= \eta(i)\end{aligned}$$

(3) $i \notin \text{supp}(\sigma)$, $i \notin \text{supp}(\eta)$.

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta(i) &= i \\ \eta \circ \sigma(i) &= i\end{aligned}$$

□

idée de la démonstration. Par récurrence.

$n = 2$, $(1 \ 2)$.

Si vrai pour toutes les permutations de longueur $\leq n$.

σ permutation de $n + 1$ éléments.

On prend $i \in \text{supp}(\sigma)$.

$$\underbrace{i \rightarrow \sigma(i) \rightarrow \sigma^2(i) \rightarrow \sigma^3(i) \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma^n(i)}_{n+1 \text{ éléments de } \{1, 2, \dots, n\}}$$

ces éléments ne peuvent pas tous être distincts.

$\exists m_1 > m_2$ t.q. $\sigma^{m_1}(i) = \sigma^{m_2}(i)$, donc $\sigma^{m_1-m_2}(i) = i$.

Alors, $i \rightarrow \sigma(i) \rightarrow \sigma^2(i) \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma^{m_1-m_2-1}(i) \rightarrow i$ est un cycle.

Les éléments restants $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{m_1-m_2-1}(i)\}$ sont permutés entre eux par σ .

Utiliser l'hypothèse de récurrence.

#

Exemple.

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 6) (3 \ 4 \ 5 \ 7)$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 8 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 8 \ 6) (2 \ 7 \ 5 \ 3)$$

Proposition. L'ordre d'une permutation σ est le ppcm des longueurs des cycles dans sa décomposition.

Démonstration. $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_k$, où σ_i sont des cycles de longueur l_i .

Puisque les cycles disjoints commutent, $\sigma^m = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k)^m = \sigma_1^m \sigma_2^m \cdots \sigma_k^m$.

$\sigma_1^m \sigma_2^m \cdots \sigma_k^m = e$, si, et seulement si, $\sigma_1^m = e$, $\sigma_2^m = e$, \cdots , $\sigma_k^m = e$.

Alors, $o(\sigma_1) \mid m$, $o(\sigma_2) \mid m$, \cdots , $o(\sigma_k) \mid m$.

Donc, $l_i \mid m$, $\forall i$.

L'ordre de σ est le plus petit multiple des l_i .

□

Cours 12

Rappel.

• $S_n = S(\{1, 2, \dots, n\}) = \{\sigma \mid \sigma \text{ est une bijection de } \{1, 2, \dots, n\}\}$ est un groupe pour \circ .

• Notations : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Cycle : $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l)$

• $o(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l) = l$

• Toute permutation de S_n s'écrit comme un produit (composition) de cycles disjoints uniques

- Les cycles disjoints commutent
- Si $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ est la décomposition, $o(\sigma) = \text{ppcm}(l_1, \dots, l_k)$, où l_k est la longueur de σ_k

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1 \ 2) \circ (3 \ 5) \circ (6 \ 7 \ 8)$$

$$o(\sigma) = \text{ppcm}(2, 2, 3) = 6.$$

$$\sigma^2 = (1 \ 2)^2 \circ (3 \ 5)^2 \circ (6 \ 7 \ 8)^2 = (6 \ 7 \ 8)^2 = (6 \ 8 \ 7)$$

Définition. Le *signe* d'une permutation $\sigma \in S_n$ est le nombre

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma) &= \left(\frac{\overline{3 \rightarrow 4}}{\overline{1 \rightarrow 2}} \right) \left(\frac{\overline{3 \rightarrow 1}^{-1}}{\overline{1 \rightarrow 3}} \right) \left(\frac{\overline{3 \rightarrow 2}^{-1}}{\overline{1 \rightarrow 4}} \right) \left(\frac{\overline{4 \rightarrow 1}^{-1}}{\overline{2 \rightarrow 3}} \right) \left(\frac{\overline{4 \rightarrow 2}^{-1}}{\overline{2 \rightarrow 4}} \right) \left(\frac{\overline{1 \rightarrow 2}}{\overline{3 \rightarrow 4}} \right) \\ &= (-1)^4 = 1 \end{aligned}$$

Remarque. Chaque terme $(i - j)$ apparaît au dénominateur et au numérateur, à signe près, donc $\text{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Proposition. Soient $\alpha, \beta \in S_n$, alors $\text{sgn}(\alpha \circ \beta) = \text{sgn}(\alpha) \cdot \text{sgn}(\beta)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\alpha \circ \beta) &= \prod_{i < j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j} \\ &= \prod_{i < j} \left(\frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j} \right) \left(\frac{\beta(i) - \beta(j)}{\beta(i) - \beta(j)} \right) \\ &= \prod_{i < j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\beta(i) - \beta(j)}{i - j} \\ &= \left(\prod_{i < j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)} \right) \cdot \text{sgn}(\beta) \\ &= \text{sgn}(\alpha) \cdot \text{sgn}(\beta) \end{aligned}$$

□

Définition. Un cycle longueur 2 s'appelle une *transposition*.

Remarque. On peut décomposer un cycle en un produit de transposition :

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l) = (a_1 \ a_l) \circ (a_1 \ a_{l-1}) \circ \cdots \circ (a_1 \ a_2)$$

Exemple.

$$\sigma = (2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8)$$

$$(2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) (2) = 3 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) (3) &= (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) (2) \\ &= 5 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) (5) &= (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) (5) \\
 &= (2 \ 8) \circ (2 \ 6) (2) \\
 &= 6
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) (6) &= (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) (6) \\
 &= (2 \ 8) \circ (2 \ 6) (6) \\
 &= (2 \ 8) (2) \\
 &= 8
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) (8) &= (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) (8) \\
 &= (2 \ 8) \circ (2 \ 6) (8) \\
 &= (2 \ 8) (8) \\
 &= 2
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$(2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) = (2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8)$$

Alors, $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}((2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3)) = (-1)^4 = 1$.

Proposition. *Le signe d'une transposition est -1 .*

Démonstration. par exemple

$$(2 \ 4) \in S_4.$$

$$\begin{aligned}
 \text{sgn}(\sigma) &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3^{-1} \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2^{-1} \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2^{-1} \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= (-1)^3 = -1
 \end{aligned}$$

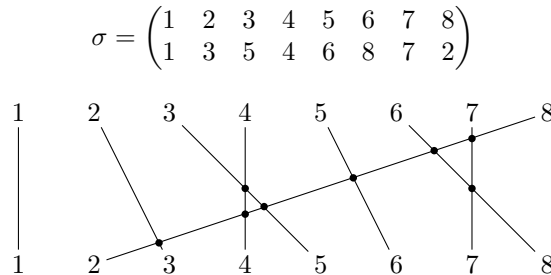
#

Proposition. *Le signe d'un cycle de longueur l est*

- 1 si l est impair
- -1 si l est pair

Plus généralement, le signe d'une permutation σ est $(-1)^\gamma$, où γ est le nombre de transpositions dans une décomposition de σ en transpositions.

Remarque. Une autre façon de calculer le signe d'une permutation.



Connecter chaque élément, compter les intersections des segments, $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^\gamma$, où γ est le nombre d'intersections. Ici, $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^8 = 1$.

Chapitre 8 Homomorphismes

Cours 13

Définition. Soient G, H deux groupes et $f : G \rightarrow H$.

On dit que f est un *homomorphisme* (ou morphisme de groupes) si $f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in G$.

Exemple.

- (1) Tous les isomorphismes sont des morphismes.
- (2) $f : G \rightarrow H$, $a \mapsto e_H$ est toujours un homomorphisme.
En effet, $f(ab) = e_H = e_H e_H = f(a)f(b)$.
 f n'est pas un isomorphisme, sauf si $G = H = \{e\}$.
- (3) $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\} = C_2$.
 $\text{sgn}(\alpha \circ \beta) = \text{sgn}(\alpha) \cdot \text{sgn}(\beta)$, donc sgn est un homomorphisme.
- (4) $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_*$ est un homomorphisme, car $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- (5) Pour un $m \in \mathbb{Z}$ fixé, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = m \cdot n$ est un homomorphisme.
En effet, $f(n_1 + n_2) = m(n_1 + n_2) = mn_1 + mn_2 = f(n_1) + f(n_2)$.
- (6) Si $H \leq G$, $i : H \rightarrow G$, $i(x) = x$ est un homomorphisme.
Ce n'est pas $\mathbb{1}$, car $H \neq G$ en général.

Proposition.

Si $f : G \rightarrow H$ est un homomorphisme, alors

- (1) $f(e_G) = e_H$
- (2) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Démonstration.

(1)

$$\begin{aligned} f(e_G) &= f(e_G e_G) \\ &= f(e_G) f(e_G) \\ f(e_G)^{-1} f(e_G) &= f(e_G)^{-1} f(e_G) f(e_G) \\ e_H &= e_H f(e_G) \\ &= f(e_G) \end{aligned}$$

(2) $f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e_G) = e_H$, donc $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

□

Proposition.

La composition de deux homomorphismes est un homomorphisme.

Démonstration.

Soient $f : G \rightarrow H$ et $g : H \rightarrow K$ deux homomorphismes, et $a, b \in G$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(ab) &= g(f(ab)) \\ &= g(f(a)f(b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(f(a))g(f(b)) \\
&= (g \circ f)(a)(g \circ f)(b)
\end{aligned}$$

□

Proposition. Soit $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme. Alors,

- (1) $\text{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in G\}$ est un sous-groupe de H ;
- (2) le noyau $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$ est un sous-groupe de G .

Exemple.

$$\begin{aligned}
\text{(a) } \text{Im}(\det) &= \mathbb{R}_*, \det \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = x \\
\ker(\det) &= \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\} = SL(n, \mathbb{R}). \\
\text{(b) } f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = mn. \\
\text{Im}(f) &= m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \\
\ker(f) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Démonstration.

- (1) $f(e_G) \in \text{Im}(f)$, donc $\text{Im}(f) \neq \emptyset$.
Si $a, b \in \text{Im}(f)$, alors $a = f(c)$ et $b = f(d)$.
On a alors

$$\begin{aligned}
ab^{-1} &= f(c)f(d)^{-1} \\
&= f(c)f(d^{-1}) \\
&= f(cd^{-1}) \in \text{Im}(f)
\end{aligned}$$

- (2) $f(e_G) = e_H \Rightarrow f(e_G) \in \ker(f) \Rightarrow \ker(f) \neq \emptyset$.
Soient $a, b \in \ker(f)$. Alors, $f(a) = e_H$ et $f(b) = e_H$.

$$\begin{aligned}
f(ab^{-1}) &= f(a)f(b^{-1}) \\
&= f(a)f(b)^{-1} \\
&= e_H e_H^{-1} \\
&= e_H
\end{aligned}$$

donc $ab^{-1} \in \ker(f)$.

□

Exemple.

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\text{sgn}) &= C_2 = \{-1, 1\}, \text{ si } n \geq 1. \\
\ker(\text{sgn}) &= \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\} \text{ est un sous-groupe de } S_n.
\end{aligned}$$

Notation. On note ce sous-groupe A_n et on l'appelle le *groupe alterné*.

Exemple. $n = 3$.

$$A_3 = \{e, (123), (132)\}.$$

Proposition.

Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme.
 $\ker(f) = \{e\}$ si, et seulement si, f est injective.

Démonstration.

(\Leftarrow) Supposons que f est injective.

On sait que $e_G \in \ker(f)$.

Supposons que $\exists a \in \ker(f)$. On a

$$\begin{aligned} f(a) &= e_H && \text{par définition de } \ker \\ &= f(e_G) \\ a &= e_G && \text{car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

Donc, $\ker(f) = \{e_G\}$.

(\Rightarrow) Supposons que $\ker(f) = \{e_G\}$.

Soient $a, b \in G$ t.q. $f(a) = f(b)$.

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ f(a)f(b)^{-1} &= e_H \\ f(a)f(b^{-1}) &= e_H \\ f(ab^{-1}) &= e_H \\ ab^{-1} &= e_G \\ a &= b \end{aligned}$$

□

Remarque. $\text{Im}(f) = H$ si, et seulement si, f est surjective.

Cours 14

Rappel.

- homomorphisme : $f : G \rightarrow H$ t.q. $f(ab) = f(a)f(b)$
- Si f est un homomorphisme, alors
 - $f(e_G) = e_H$
 - $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
 - $f(a^n) = f(a)^n$
- $\text{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in G\} \leq H$
- $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e_H\} \leq G$
- $\ker(f) = \{e_G\} \Leftrightarrow f$ est injective

Exemple.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}_m \\ n & \mapsto & \bar{n} \end{array} \text{ est un homomorphisme.}$$

En effet,

$$\begin{aligned} f(n_1 + n_2) &= \overline{n_1 + n_2} \\ &= \overline{n_1} + \overline{n_2} \\ &= f(n_1) + f(n_2) \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{Z}_m.$$

$$\ker(f) = m\mathbb{Z}.$$

Équivalence modulo H et théorème de Lagrange

G un groupe quelconque et $H \leq G$ un sous-groupe.

On définit une relation sur G par $a \sim b$ si, et seulement si, $ab^{-1} \in H$.

Cette relation est appelée *équivalence modulo H* .

Proposition.

\sim est une relation d'équivalence.

Démonstration.

(refl) Soit $a \in G$.

$aa^{-1} = e_G \in H$, puisque $H \leq G$.

Alors, $a \sim a$.

(sym) Soient $a, b \in G$.

Supposons que $a \sim b$.

Alors, $ab^{-1} \in H$.

Comme H est un groupe, H est fermé pour la prise d'inverses, donc $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$.

Ainsi, $b \sim a$.

(trans) Soient $a, b, c \in G$.

Supposons que $a \sim b$ et $b \sim c$.

Alors, $ab^{-1} \in H$ et $bc^{-1} \in H$.

Comme H est un groupe, H est fermé pour son opération, donc $(ab^{-1})(bc^{-1}) = a(bb^{-1})c^{-1} = ac^{-1} \in H$.

Ainsi, $a \sim c$.

□

Le groupe G se partitionne en classes d'équivalence modulo H : $G = \overline{a_1} \cup \overline{a_2} \cup \dots$

Exemple.

$G = \mathbb{Z}_8$, $H = \{\overline{0}, \overline{4}\}$.

La classe de $\overline{0} \in G$ mod H est l'ensemble des $\overline{n} \in \mathbb{Z}_8$ t.q. $\overline{0} - \overline{n} \in H$.

Alors, $-\overline{n} \in \{\overline{0}, \overline{4}\}$, donc $\overline{n} = \overline{0}$ ou $\overline{n} = \overline{4}$.

$C(\overline{0}) = \{\overline{0}, \overline{4}\}$, $C(\overline{1}) = \{\overline{1}, \overline{5}\}$, $C(\overline{2}) = \{\overline{2}, \overline{6}\}$, $C(\overline{3}) = \{\overline{3}, \overline{7}\}$.

Lemme.

La classe modulo H de $a \in G$ est $\{ha \mid h \in H\}$.

Notation.

$\{ha \mid h \in H\}$ est noté Ha .

Démonstration.

Soient $a, b \in G$.

(\subseteq) Supposons que $b \sim a$ mod H , c'est-à-dire $b \in \overline{a}$.

Alors, $ba^{-1} \in H$, disons $ba^{-1} = h$ avec $h \in H$, donc $b = ha$.

$\therefore \overline{a} \subseteq Ha$.

(\supseteq) Supposons que $b \in Ha$.

Alors, $b = ha$ avec $h \in H$, donc $ba^{-1} = h \in H$. Ainsi, $b \sim a$, donc $b \in \overline{a}$.

$\therefore Ha \subseteq \overline{a}$.

Ainsi, $Ha = \overline{a}$.

□

Corollaire.

Toutes les classes d'équivalence modulo H ont le même nombre d'éléments.

Plus précisément, $|Ha| = |H|$.

Démonstration.

$f : \begin{matrix} H & \rightarrow & Ha \\ h & \mapsto & ha \end{matrix}$ est bijective, car elle est inversible d'inverse $f^{-1} : \begin{matrix} Ha & \rightarrow & H \\ b & \mapsto & ba^{-1} \end{matrix}$.

□

Cours 15

Rappel. Pour déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ d'un homomorphisme f .

Exemple. $f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_6$
 $\bar{n} \mapsto \bar{n}$.

$$\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}.$$

Supposons que $\bar{n} \in \ker(f)$. Alors,

$$\begin{aligned} f(\bar{n}) &= \bar{0} \\ \bar{n} &= \bar{0} \\ n &= 6k \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc, $\ker(f) \subseteq 6\mathbb{Z}_{12}$.

Pour avoir $\ker(f) = 6\mathbb{Z}_{12}$, il faut aussi montrer $6\mathbb{Z}_{12} \subseteq \ker(f)$.

Supposons que $n = 6k \Rightarrow \bar{n} = \bar{6k} \Rightarrow f(\bar{n}) = f(\bar{6k}) = \bar{6k} = \bar{0}$, donc $\bar{n} \in \ker(f)$.

Rappel.

G groupe, $H \leq G$ sous-groupe.

- Équivalence mod H :
 $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$;
- Les classes d'équivalence mod H sont $\bar{a} = Ha = \{ha \mid h \in H\}$;
- Toutes les classes ont la même taille, $|Ha| = |H|$.

Exemple.

$$G = S_3 = \{e, (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}, H = \{e, (1 \ 2)\}.$$

Calculons les classes mod H .

- $He = \{e \circ e, (1 \ 2) \circ e\} = H$;
- $H(1 \ 3) = \{e \circ (1 \ 3), (1 \ 2) \circ (1 \ 3)\} = \{(1 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$;
- $H(2 \ 3) = \{e \circ (2 \ 3), (1 \ 2) \circ (2 \ 3)\} = \{(2 \ 3), (1 \ 2 \ 3)\}$.

Théorème (Lagrange).

Soit G un groupe fini.

Si $H \leq G$, alors $|H| \mid |G|$.

Démonstration.

Les classes modulo H partitionnent G est sous-ensembles (classes) de taille $|H|$ chacun, donc

$$\begin{aligned} G &= Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_n \\ |G| &= |H| + |H| + \dots + |H| \\ &= n|H| \end{aligned}$$

□

Corollaire. $a \in G$, $o(a) \mid |G|$.

Démonstration.

$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, le sous-groupe engendré par a , est un sous-groupe car

- $a^0 = e \in \langle a \rangle$, donc $\langle a \rangle \neq \emptyset$;
- Si $a^n, a^m \in \langle a \rangle$, alors $a^n(a^m)^{-1} = a^{n-m} \in \langle a \rangle$, donc $\langle a \rangle \leq G$.

Par le théorème de Lagrange, $|\langle a \rangle| \mid |G|$.

De plus, $|\langle a \rangle| = o(a)$, qu'on démontrera plus tard, donc $o(a) \mid |G|$.

□

Corollaire. Si $|G| = m$ et $a \in G$, alors $a^m = e$.

Démonstration.

On sait que $a^{o(a)} = e$.

Par le corollaire précédent, $m = ko(a)$, car $o(a) \mid m$, donc $a^m = a^{ko(a)} = (a^{o(a)})^k = e^k = e$.

□

Corollaire (petit théorème de Fermat). Si $a \in \mathbb{Z}$ et p est un nombre premier t.q. $p \nmid a$, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Lemme. \mathbb{Z}_{p*} est un groupe pour la multiplication.

Démonstration.

\mathbb{Z}_{p*} est un groupe avec $|\mathbb{Z}_{p*}| = p - 1$.

Par le corollaire précédent, si $a \in \mathbb{Z}_{p*}$, alors $\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$, donc $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. □

Notation. $|G|$ s'appelle aussi l'ordre de G .

Définition. $H \leq G$.

On appelle *indice* de H dans G le nombre de classes modulo H et on le note $[G : H]$.

Le théorème de Lagrange implique que si G est fini, $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$.

L'indice peut être fini même si G et H sont infinis.

Exemple. $[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m$.

Exemple. Les seuls sous-groupes de \mathbb{Z}_p avec p premier sont $\{\bar{0}\}$ et \mathbb{Z}_p , car si $H \leq \mathbb{Z}_p$. Par Lagrange, $|H| \in \{1, p\}$.

Exemple. $H \leq \mathbb{Z}_8$ qui contient au moins 5 éléments distincts, alors $H = \mathbb{Z}_8$, car les diviseurs de 8 sont $\{1, 2, 4, 8\}$.

Section 8.6 Groupes quotients

On veut définir une opération sur les classes d'équivalence $\text{mod } H$ pour en faire un groupe.

Tentative

On voudrait définir $Ha * Hb = H(a * b)$. Est-ce défini sans ambiguïté?

Supposons que $Ha = Ha'$ et $Hb = Hb'$, c'est-à-dire $a(a')^{-1} \in H$ et $b(b')^{-1} \in H$. Alors, on voudrait montrer que $H(ab) = H(a'b') \Leftrightarrow (ab)(a'b')^{-1} \in H \Leftrightarrow ab(b')^{-1}(a')^{-1} \in H$. Cependant, ce n'est pas vrai en général.

Définition.

Un sous-groupe $H \leq G$ est *distingué*, ou *normal*, si $\forall a \in G, Ha = aH$, c'est-à-dire, $\{ha \mid h \in H\} = \{ah \mid h \in H\}$.

Remarque.

$Ha = aH$ ne veut pas dire $ha = ah$ pour tout $h \in H$.

Plutôt, $Ha = aH$ signifie $ha = ah'$ pour un certain $h' \in H$.

Exemple.

Pour $G = S_3 = \{e, (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$.

- Le sous-groupe $H = \{e, (1 \ 2)\}$ n'est pas distingué. En effet, regardons la classe de $(1 \ 3)$.

$$\begin{aligned} H(1 \ 3) &= \{(1 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\} \\ (1 \ 3)H &= \{(1 \ 3) \circ e, (1 \ 3) \circ (1 \ 2)\} = \{(1 \ 3), (1 \ 2 \ 3)\} \end{aligned}$$

- Le sous-groupe $N = \{e, (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$ est distingué. En effet

$$\begin{aligned} Ne &= \{e \circ e, (1 \ 2 \ 3) \circ e, (1 \ 3 \ 2) \circ e\} = \{e, (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\} = N \\ eN &= \{e \circ e, e \circ (1 \ 2 \ 3), e \circ (1 \ 3 \ 2)\} = \{e, (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\} = N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(1 \ 2) &= \{e \circ (1 \ 2), (1 \ 2 \ 3) \circ (1 \ 2), (1 \ 3 \ 2) \circ (1 \ 2)\} = \{(1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3)\} \\ (1 \ 2)N &= \{(1 \ 2) \circ e, (1 \ 2) \circ (1 \ 2 \ 3), (1 \ 2) \circ (1 \ 3 \ 2)\} = \{(1 \ 2), (2 \ 3), (1 \ 3)\} \end{aligned}$$

Proposition. Si $f : G \rightarrow H$ est un homomorphisme, $\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G .

Démonstration. $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$.

Soit $b \in G$. On veut montrer que $b\ker(f) = \ker(f)b$.

(\subseteq) Soit $ba \in b \ker(f)$.

$$ba = bab^{-1}b$$

posons $a' = bab^{-1}$

$$\begin{aligned} f(a') &= f(bab^{-1}) \\ &= f(b)f(a)f(b^{-1}) \\ &= f(b)ef(b^{-1}) \\ &= e \end{aligned}$$

donc $a' \in \ker(f) \Rightarrow ba = a'b \in \ker(f)b \Rightarrow b \ker(f) \subseteq \ker(f)b$.

(\supseteq) Soit $ab \in \ker(f)b$.

$$ab = bb^{-1}ab$$

posons $a' = b^{-1}ab$

$$\begin{aligned} f(a') &= f(b^{-1}ab) \\ &= f(b^{-1})f(a)f(b) \\ &= f(b^{-1})ef(b) \\ &= e \end{aligned}$$

donc $a' \in \ker(f) \Rightarrow ab = ba' \in b \ker(f) \Rightarrow \ker(f)b \subseteq b \ker(f)$.

□

Cours 16

Rappel.

- Classes d'équivalence à droite modulo H de $a \in G$: Ha
- Théorème de Lagrange : $|H| \mid |G|$
- Indice de H dans G : $[G : H]$ représente le nombre de classes
- Corollaires de Lagrange :
 - $o(a) \mid |G|$
 - $a^{|G|} = e$
 - petit théorème de Fermat : si $p \nmid a$, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, avec p un nombre premier
- Sous-groupe *normal* ou *distingué* : $Ha = aH$
- $\ker(f)$ est toujours distingué

Proposition.

$H \leqslant G$ est distingué si, et seulement si, pour tous $h \in H$ et $g \in G$, $ghg^{-1} \in H$.

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons que H est distingué.

Soient $h \in H$ et $g \in G$. On a $gh \in gH$. Mais alors, $gh \in Hg$, donc $gh = h'g$ avec $h' \in H$.

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= h'gg^{-1} \\ &= h' \in H \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Supposons que $ghg^{-1} \in H$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

On veut montrer que $gH = Hg$, $\forall g \in G$.

(\subseteq) Soit $gh \in gH$. On a

$$\begin{aligned} gh &= ghg^{-1}g \\ &= h'g \in Hg \end{aligned}$$

(\supseteq) Soit $hg \in Hg$. Alors

$$\begin{aligned} hg &= gg^{-1}hg \\ &= gh' \in gH \end{aligned}$$

□

Nouvelle tentative

Soit G un groupe. Soit N un sous-groupe normal de G .

On a G/N l'ensemble des classes mod N :

$$G/N = \{Na \mid a \in G\}$$

Proposition.

G/N est un groupe par l'opération $(Na)(Nb) = N(ab)$.

Démonstration.

Montrons que l'opération est définie sans ambiguïté.

Supposons que $Na = Na'$ et $Nb = Nb'$. Alors, $a(a')^{-1} \in N$ et $b(b')^{-1} \in N$.

$$\begin{aligned} ab(a'b')^{-1} &= ab(b')^{-1}(a')^{-1} \\ &= ab(b')^{-1}(a')^{-1}aa^{-1} \end{aligned}$$

On sait que $b(b')^{-1} \in N$.

De plus, $(a')^{-1}a \in N$, car $a(a')^{-1} \in N$ et N est normal, donc $a^{-1}(a(a')^{-1})a \in N$.

Comme N est fermé pour la multiplication, $b(b')^{-1}(a')^{-1}a \in N$ que nous noterons n .

On a donc

$$ab(a'b')^{-1} = ana^{-1} \in N$$

Ainsi, $N(ab) = N(a'b')$, donc l'opération est définie sans ambiguïté.

Maintenant, montrons que G/N est un groupe.

(A) Soient $Na, Nb, Nc \in G/N$.

$$\begin{aligned} (NaNb)Nc &= N(ab)Nc \\ &= N((ab)c) \\ &= N(a(bc)) \\ &= NaN(bc) \\ &= Na(NbNc) \end{aligned}$$

(N) On vérifie que $Ne = N$ est neutre.

$$\begin{aligned} NeNa &= N(ea) & NaNe &= N(ae) \\ &= Na & &= Na \end{aligned}$$

(I) L'inverse de Na est Na^{-1}

$$\begin{aligned} NaNa^{-1} &= N(aa^{-1}) & Na^{-1}Na &= N(a^{-1}a) \\ &= N & &= N \end{aligned}$$

□

Notation. $N \trianglelefteq G$ représente N est un sous-groupe normal de G .

Proposition.

$$\begin{array}{ccc} p : G & \rightarrow & G/N \\ a & \mapsto & Na \end{array} \text{ est un homomorphisme.}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} p(ab) &= N(ab) \\ &= NaNb \\ &= p(a)p(b) \end{aligned}$$

□

Cours 17

Rappel.

- $N \trianglelefteq G$ sous-groupe normal (ou distingué)
 - $\forall g \in G, gN = Ng$
 - $\forall g \in G, \forall n \in N, gng^{-1} \in N$
- $f : G \rightarrow H$ homomorphisme $\Rightarrow \ker(f) \trianglelefteq G$
- Groupe quotient : $G/N = \{Ng \mid g \in G\}$
 - opération : $NaNb = Nab$
 - neutre : N
 - inverse : $(Na)^{-1} = Na^{-1}$
- $p : G \rightarrow G/N$ est un homomorphisme avec $p(a) = Na$.

Notation. Effectuer ghg^{-1} s'appelle la *conjugaison* de h par g .

Remarque. $H \leq G$ et $g \in G$, alors $gHg^{-1} \leq G$.

Dans le cas d'un sous-groupe normal, le sous-groupe obtenu par la conjugaison reste le même sous-groupe.

Exemple.

- Dans \mathbb{D}_3 ¹
 - $\{\varepsilon, \alpha\}$
 - $\{\varepsilon, \beta\}$
 - $\{\varepsilon, \gamma\}$
 ne sont pas normaux.
 - $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$
 est normal.
- Soient $G = \mathbb{D}_3$ et $N = \{\varepsilon, \rho, \sigma\}$.
 Les classes à droites sont
 - $N = N\varepsilon = \{\varepsilon, \rho, \sigma\}$
 - $N\alpha = N\beta = N\gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
 Alors, $G/N = \{N, N\alpha\}$.

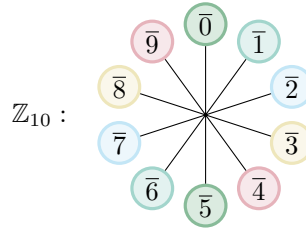
\circ	N	$N\alpha$
N	N	$N\alpha$
$N\alpha$	$N\alpha$	N

- Soient $G = \mathbb{Z}_{10}$ et $N = \{\bar{0}, \bar{5}\}$
 Les classes d'équivalence sont
 - $N = N + \bar{0} = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

1. Pour la définition de \mathbb{D}_3 , voir p.10

- $N + \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{6}\}$
- $N + \bar{2} = \{\bar{2}, \bar{7}\}$
- $N + \bar{3} = \{\bar{3}, \bar{8}\}$
- $N + \bar{4} = \{\bar{4}, \bar{9}\}$

$$G/N = \{N, N + \bar{1}, N + \bar{2}, N + \bar{3}, N + \bar{4}\}.$$



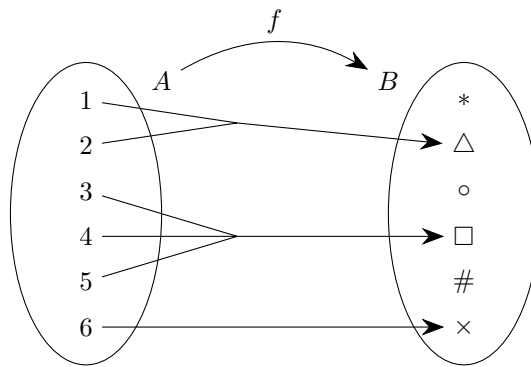
$$\mathbb{Z}_{10}/5\mathbb{Z}_{10} = \{\text{green}, \text{teal}, \text{light blue}, \text{yellow}, \text{pink}\}.$$

- Soient $G = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $N = \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

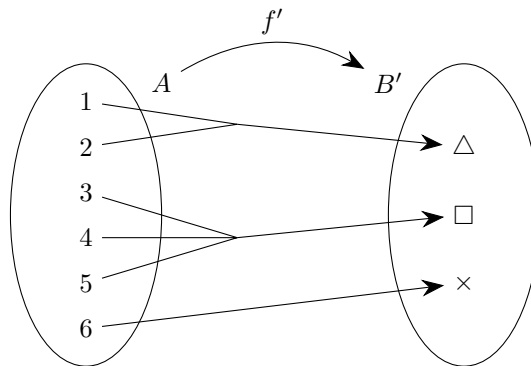
$$N \leq G.$$

G/N est infini et l'opération sur G/N est : $(N + (x, y)) + (N + (x', y')) = N + (x + x', y + y')$.

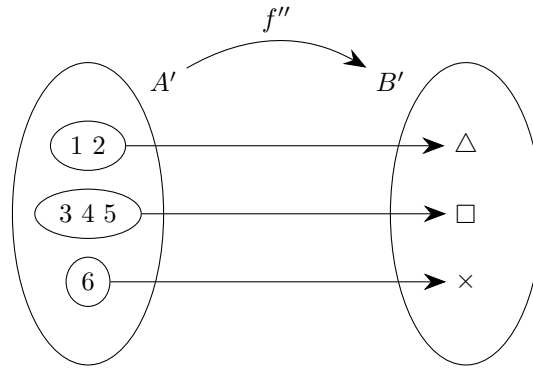
Motivation



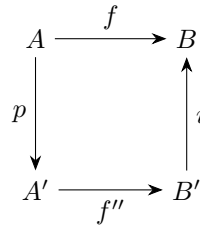
f n'est ni injective ni surjective.



f' est surjective, mais elle n'est toujours pas injective.



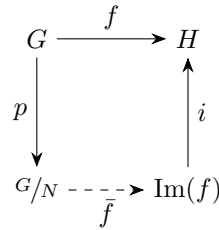
f'' est injective et surjective, donc bijective.



où p représente une projection et i une inclusion. Donc, $f = i \circ f'' \circ p$, où i est injective, p est surjective et f'' est bijective.

Théorème (d'isomorphisme de Jordan).

Soit $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme de groupes. Posons $N = \ker(f) \trianglelefteq G$.



$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} P : G & \rightarrow & G/N & i : \text{Im}(f) & \rightarrow & H \\ a & \mapsto & Na & h & \mapsto & h \end{array} \right).$$

Alors, il existe un unique homomorphisme $\bar{f} : G/N \rightarrow \text{Im}(f)$ t.q. $f = i \circ \bar{f} \circ p$. De plus, \bar{f} est un isomorphisme.

Exemple. $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_*$.

$N = \ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$ les matrices dont le déterminant vaut 1.

$\text{Im}(\det) = \mathbb{R}_*$.

Le théorème implique que $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}_*$.

Démonstration.

Unicité de \bar{f} .

Supposons que \bar{f} existe.

Soit \tilde{f} un autre homomorphisme t.q. $f = i \circ \tilde{f} \circ p$.

Alors, soit $Na \in G/N$. On a

$$\begin{aligned} f(a) &= (i \circ \tilde{f} \circ p)(a) \\ &= i(\tilde{f}(p(a))) \\ &= \tilde{f}(Na) \end{aligned}$$

De même, $f(a) = \bar{f}(a)$.

Donc, $\tilde{f}(Na) = \bar{f}(Na) = f(a)$, alors $\tilde{f} = \bar{f}$. ■

Existence de \bar{f} .

On veut définir $\bar{f}(Na) = f(a)$. Vérifions que cette définition est sans ambiguïté.

Supposons $Na = Nb$, c'est-à-dire, $ab^{-1} \in N = \ker(f)$.

Alors, $f(ab^{-1}) = e$, donc $f(a)f(b)^{-1} = e$, ainsi $f(a) = f(b)$, qui est équivalent à $\bar{f}(Na) = \bar{f}(Nb)$. ■

\bar{f} est un homomorphisme.

$\bar{f}(NaNb) = \bar{f}(Nab) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(Na)\bar{f}(Nb)$. ■

\bar{f} est un isomorphisme.

surjectivité.

Soit $b \in \text{Im}(f)$. Alors, $b = f(a)$ pour un certain $a \in G$. Donc, $b = \bar{f}(Na)$. #

injectivité.

Supposons $Na \in \ker(\bar{f})$. Alors, $\bar{f}(Na) = e$, donc $f(a) = e$, ainsi $a \in \ker(f) = N$.

Comme $a \in N$, $Na = N$. Donc, $\ker(\bar{f}) \subseteq \{N\}$, alors $\ker(\bar{f}) = N$. #

□

Exemple.

• $\text{sgn} : S_n \rightarrow C_2$.

$\ker(\text{sgn}) = A_n$.

$\text{Im}(\text{sgn}) = C_2$.

Alors, $S_n/A_n \cong C_2 \cong \mathbb{Z}_2$.

• $f : \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_5$
 $\bar{n} \mapsto \bar{n}$. f est un homomorphisme.

$\ker(f) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$.

$\text{Im}(f) = \mathbb{Z}_5$.

Alors, $\mathbb{Z}_{10}/\{\bar{0}, \bar{5}\} \cong \mathbb{Z}_5$.

• $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x - y$. f est un homomorphisme.

$\ker(f) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} =: N$.

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Alors, $\mathbb{R}^2/N \cong \mathbb{R}$.

Cours 18

Rappel.

• Théorème d'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ G/\ker(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im}(f) \end{array}$$

$\exists!$ isomorphisme $\bar{f} : G/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ t.q. $f = i \circ \bar{f} \circ p$.

Notation. \hookrightarrow : fonction injective, \twoheadrightarrow : fonction surjective.

2 cas importants :

(1) Si f est surjectif

$\text{Im}(f) = H$.

Le théorème dit que $\bar{f} : G/\ker(f) \rightarrow H$
 $Na \mapsto f(a)$ est un isomorphisme.

(2) Si f est injectif

$$\ker(f) = \{e\}.$$

$G/\ker(f) = G/\{e\}$, les classes sont de la forme $\{e\}a = \{a\}$, donc chaque élément de G est seul dans sa classe d'équivalence.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\cong} & G/\{e\} \\ a & \mapsto & \{a\} \end{array} \text{ est un isomorphisme.}$$

Dans ce cas, $G \cong G/\{e\} \cong \text{Im}(f)$. On a que G est isomorphe au sous-groupe $\text{Im}(f)$ de H .

Corollaire.

$f : G \rightarrow H$ un homomorphisme entre groupes finis. Alors, $|G| = |\ker(f)| |\text{Im}(f)|$.

Démonstration.

\bar{f} est une bijection entre $G/\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$. Alors, $|G/\ker(f)| = |\text{Im}(f)|$. Donc, $\frac{|G|}{|\ker(f)|} = |\text{Im}(f)|$. □

Groupes monogènes

$a \in G$, $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ le groupe engendré par a .

Théorème (Classification des groupes monogènes).

Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe monogène. Alors

(1) Si $o(a) = \infty$, alors $G \cong \mathbb{Z}$.

(2) Si $o(a) = m$, alors $G \cong \mathbb{Z}_m$.

Démonstration.

La fonction
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & G \\ n & \mapsto & a^n \end{array}$$
 est un homomorphisme. En effet

$$\begin{aligned} f(n_1 + n_2) &= a^{n_1 + n_2} \\ &= a^{n_1} a^{n_2} \\ &= f(n_1) f(n_2) \end{aligned}$$

f est surjectif, car tout élément de G s'écrit a^n par définition.

Le théorème d'isomorphisme nous dit que $\mathbb{Z}/\ker(f) \cong G$.

(1) Le seul n t.q. $a^n = e$ est $n = 0$, donc $\ker(f) = \{0\}$, alors $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\{0\} \cong G$.

(2) On veut montrer que $\ker(f) = m\mathbb{Z}$.

$\subseteq :$

Supposons $n \in \ker(f)$, alors $f(n) = a^n = e$, donc $o(a) \mid n$, c'est-à-dire, $n = ko(a) = km \in m\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\ker(f) \subseteq m\mathbb{Z}$. ■

$\supseteq :$

Supposons $n \in m\mathbb{Z}$, alors $n = km$, donc $f(n) = a^n = a^{mk} = (a^m)^k = e$.

Ainsi, $m\mathbb{Z} \subseteq \ker(f)$. ■

Ainsi, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \cong G$. □

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6 = (1 \ 3) (2 \ 6 \ 4 \ 5). \quad o(\sigma) = \text{ppcm}(2, 4) = 4.$$

Par le théorème de classification, $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_4$.

Autrement dit, $\langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} = \{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$.

Section 8.3 Théorème de Cayley

G un groupe quelconque, $a \in G$.

On définit une fonction

$$\begin{aligned} \sigma_a : G &\rightarrow G \\ b &\mapsto ab \end{aligned}$$

Lemme. σ_a est bijective.

Démonstration.

$\sigma_{a^{-1}}$ est un inverse de σ_a . En effet

$$\begin{aligned} \sigma_{a^{-1}}(\sigma_a(b)) &= \sigma_{a^{-1}}(ab) & \sigma_a(\sigma_{a^{-1}}(b)) &= \sigma_a(a^{-1}b) \\ &= a^{-1}ab & &= aa^{-1}b \\ &= b & &= b \end{aligned}$$

□

Remarque. Ce lemme implique que $\sigma_a \in S(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ est bijective}\}$.

Définition. On définit $\Psi : G \rightarrow S(G)$.
 $a \mapsto \sigma_a$.

Proposition. Ψ est un homomorphisme de groupes.

Démonstration.

Soient $a, b, c \in G$.

$$\begin{aligned} \Psi(ab)(c) &= \sigma_{ab}(c) \\ &= (ab)c \\ &= a(bc) \\ &= a\sigma_b(c) \\ &= \sigma_a(\sigma_b(c)) \\ &= (\sigma_a \circ \sigma_b)(c) \end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$, c'est-à-dire, $\Psi(ab) = \Psi(a) \circ \Psi(b)$.

□

Cours 19

Rappel.

- *Théorème d'isomorphismes* : $f : G \rightarrow H$, $G/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$.
 - Si f surjective, $G/\ker(f) \cong H$;
 - Si f injective, $G \cong \text{Im}(f)$.
- $|G| = |\ker(f)| \cdot |\text{Im}(f)|$;
- Groupe monogène (ou cyclique) $G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
- Classification
 - $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ si $o(a) = \infty$;
 - $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_m$ si $o(a) = m$.
- $a \in G$
 - $\sigma_a : G \rightarrow G$
 $b \mapsto ab$ est une bijection;
 - $\Psi : G \rightarrow S(G)$, où $S(G)$ est le groupe des bijections de G .
 $a \mapsto \sigma_a$

Proposition. Ψ est injectif.

Démonstration. Montrons que $\ker(\Psi) = \{e\}$.

Supposons que $(a \in G) \in \ker(\Psi)$, alors $\Psi(a) = e$.

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= \mathbb{1}_G \\ \sigma_a &= \mathbb{1}_G \\ \sigma_a(e) &= \mathbb{1}_G(e) \\ ae &= e \\ a &= e\end{aligned}$$

Alors, $\ker(\Psi) \subseteq \{e\}$.

De plus, $\{e\} \subseteq \ker(\Psi)$ trivialement.

Ainsi, $\ker(\Psi) = \{e\}$, donc Ψ est injectif. □

Théorème (Cayley). *Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique $S(E)$.*

Démonstration.

On prend $E = G$. $\Psi : G \rightarrow S(G)$ est un homomorphisme injectif.

Alors, $G \cong \text{Im}(\Psi) \leq S(G)$. □

Exemple.

$\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$.

Calculons Ψ .

$$\begin{aligned}\Psi(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \varepsilon\varepsilon & \varepsilon\alpha & \varepsilon\beta & \varepsilon\gamma & \varepsilon\rho & \varepsilon\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \alpha\varepsilon & \alpha\alpha & \alpha\beta & \alpha\gamma & \alpha\rho & \alpha\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \alpha & \varepsilon & \rho & \sigma & \beta & \gamma \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \ \alpha) (\beta \ \rho) (\gamma \ \sigma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\beta) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \beta\varepsilon & \beta\alpha & \beta\beta & \beta\gamma & \beta\rho & \beta\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \beta & \sigma & \varepsilon & \rho & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \ \beta) (\alpha \ \sigma) (\gamma \ \rho)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \gamma\varepsilon & \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma\gamma & \gamma\rho & \gamma\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \gamma & \rho & \sigma & \varepsilon & \alpha & \beta \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \ \gamma) (\alpha \ \rho) (\beta \ \sigma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\rho) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \rho\varepsilon & \rho\alpha & \rho\beta & \rho\gamma & \rho\rho & \rho\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \rho & \gamma & \alpha & \beta & \sigma & \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \ \rho \ \sigma) (\alpha \ \gamma \ \beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \sigma\varepsilon & \sigma\alpha & \sigma\beta & \sigma\gamma & \sigma\rho & \sigma\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \sigma & \beta & \gamma & \alpha & \varepsilon & \rho \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \ \sigma \ \rho) (\alpha \ \beta \ \gamma)\end{aligned}$$

Remarque. Le groupe $S(G)$ est toujours plus grand que G .

Exemple. Si on prend $G = S_n$, $\Psi : S_n \rightarrow S(S_n)$, où $|S_n| = n!$ et $|S(S_n)| = (n!)!$.

Exemple. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$.

$$\Psi : G \rightarrow S(G) \cong S_4$$

Numérotions les éléments de G comme $\{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{aligned}\Psi(\bar{0}, \bar{0}) &= \mathbb{1} & \Psi(\bar{0}, \bar{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \Psi(\bar{1}, \bar{0}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \Psi(\bar{1}, \bar{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & & &= (1 \ 2) (3 \ 4) & &= (1 \ 3) (2 \ 4) & &= (1 \ 4) (2 \ 3)\end{aligned}$$

Cayley nous dit que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \{1, (1 \ 2) (3 \ 4), (1 \ 3) (2 \ 4), (1 \ 4) (2 \ 3)\}$.

Actions de groupes

Soient G un groupe et E un ensemble.

Définition. Une *action* de G sur E est une fonction $\bullet : G \times E \rightarrow E$, $(a, x) \mapsto a \bullet x$, satisfaisant à

- (1) $\forall x \in E, e \bullet x = x$;
- (2) $\forall a, b \in G, \forall x \in E, a \bullet (b \bullet x) = (ab) \bullet x$.

Exemple.

- (1) $G = GL(n, \mathbb{R}), E = \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \bullet : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (M, \vec{v}) &\mapsto M\vec{v} \end{aligned}$$

est une action.

- (2) $G = S_n, E = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} \bullet : S_n \times \{1, 2, \dots, n\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \\ (\sigma, i) &\mapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

est une action.

- (3) $G = \mathbb{Z}_2, E = \text{👤} \subseteq \mathbb{R}^2$.
 \mathbb{Z}_2 agit sur E par

$$\begin{aligned} \bar{0} \bullet (x, y) &= (x, y) \\ \bar{1} \bullet (x, y) &= (-x, y) \end{aligned}$$

- (4) $G = \mathbb{Z}_3, E = \text{🔄} \subseteq \mathbb{R}^2$.

G agit sur E où $\bar{1}$ est une rotation de 120° et $\bar{2}$ est une rotation de 240° .

- (5) \mathbb{D}_3 agit sur un triangle équilatéral.
- (6) G agit sur lui-même par

$$\begin{aligned} \bullet : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

- (7) G agit sur lui-même aussi par

$$\begin{aligned} \bullet : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto aba^{-1} \end{aligned}$$

En effet.

- (a) Soit $b \in G$, alors

$$\begin{aligned} e \bullet b &= ebe^{-1} \\ &= b \end{aligned}$$

- (b) Soient $a, b, c \in G$

$$\begin{aligned} (ab) \bullet c &= (ab)c(ab)^{-1} \\ &= abcb^{-1}a^{-1} \\ &= a(b \bullet c)a^{-1} \\ &= a \bullet (b \bullet c) \end{aligned}$$



Définition. Une *action* de G sur E est un homomorphisme $\Psi : G \rightarrow E$.

Pour passer de la première définition à la deuxième, on pose $\Psi(a) = \sigma_a$, où $\sigma_a(x) = a \bullet x$.

Pour passer de la deuxième définition à la première, on pose $a \bullet x = (\Psi(a))(x)$.

Définition. G un groupe qui agit sur un ensemble E .

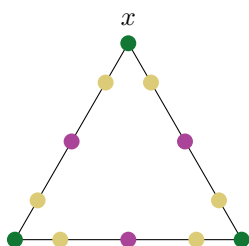
Soit $x \in E$.

L'*orbite* de x est l'ensemble $G \bullet x = \{a \bullet x \mid a \in G\} \subseteq E$.

Définition. Soit $x \in E$.

Le *stabilisateur* de x est $\text{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leq G$.

Exemple. avec \mathbb{D}_3 ²



●, ● et ● sont trois orbites.

$$\text{stab}(x) = \{\varepsilon, \alpha\}$$

Cours 20

Rappel.

- Théorème de Cayley

$$\begin{array}{ccc} \Psi : G & \rightarrow & S(G) \\ a & \mapsto & \sigma_a \end{array}, \text{ où } \sigma_a(b) = ab \text{ est un homomorphisme injectif;}$$

$$- G \cong \text{Im}(\Psi) \leq S(G).$$

- Action de G sur E

$$- a \bullet x \in E$$

$$(1) e \bullet x = x$$

$$(2) (ab) \bullet x = a \bullet (b \bullet x)$$

$$- \text{homomorphisme } \begin{array}{ccc} \Psi : G & \rightarrow & S(E) \\ a & \mapsto & (x \mapsto a \bullet x) \end{array}$$

- Orbite de $x \in E : G \bullet x = \{a \bullet x \in E \mid a \in G\} \subseteq E$

- Stabilisateur de $x \in E : \text{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leq G$

Remarque. $x \bullet a$ n'est pas défini.

Proposition. $\text{stab}(x) \leq G$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} e \bullet x &= x \\ \Rightarrow e &\in \text{stab}(x) \\ \Rightarrow \text{stab}(x) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Soient $a, b \in \text{stab}(x)$. On veut vérifier que $ab^{-1} \in \text{stab}(x)$, c'est-à-dire $(ab^{-1}) \bullet x = x$.

Remarquons que $b \bullet x = x$, alors $b^{-1} \bullet (b \bullet x) = b^{-1} \bullet x$, donc $(b^{-1}b) \bullet x = b^{-1} \bullet x$, donc $e \bullet x = b^{-1} \bullet x$, ainsi $x = b^{-1} \bullet x$.

2. voir p.10

On a donc

$$\begin{aligned}(ab^{-1}) \bullet x &= a \bullet (b^{-1} \bullet x) \\ &= a \bullet x \\ \text{car } a &\in \text{stab}(x) = x\end{aligned}$$

Ainsi, $ab^{-1} \in \text{stab}(x)$. □

Proposition. La relation $x \sim y$ si, et seulement si, $\exists a \in G$ t.q. $y = a \bullet x$ est une équivalence donc les classes d'équivalence sont les orbites, c'est-à-dire, $\bar{x} = G \bullet x$.

En particulier, les orbites forment une partition de E .

Démonstration.

Équivalence.

(Refl) Soit $x \in E$.

Or, $x = e \bullet x$, donc $x \sim x$.

(Sym) Soient $x, y \in E$ t.q. $x \sim y$.

Ainsi, $\exists a \in G$ t.q. $y = a \bullet x$.

Or, $a^{-1} \in G$, donc $a^{-1} \bullet y = a^{-1} \bullet (a \bullet x) = (a^{-1}a) \bullet x = x$.

Ainsi, $y \sim x$.

(Trans) Soient $x, y, z \in E$ t.q. $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors, $\exists a, b \in G$ t.q. $y = a \bullet x$ et $z = b \bullet y$.

Or, $z = b \bullet y = b \bullet (a \bullet x) = (ba) \bullet x$, où $ba \in G$.

Ainsi, $x \sim z$. ■

Les classes d'équivalence sont les orbites.

La classe d'équivalence de $x \in E$, par définition, est

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \{y \in E \mid x \sim y\} \\ &= \{y \in E \mid \exists a \in G, y = a \bullet x\} \\ &= \{a \bullet x \mid a \in G\} \\ &= G \bullet x\end{aligned}$$
■

□

Exemple.

(1) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, $E = \mathbb{R}^2$ avec l'action $M \bullet \vec{v} = M\vec{v}$ la multiplication matricielle usuelle.

Calculons l'orbite d'un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}G \bullet \vec{v} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Si $y = 0$, $G \bullet \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Si $y \neq 0$, $\{x + ay, a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, donc $G \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

(2) $G = S_3$, $E = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

S_3 agit sur un sous-ensemble en agissant sur chaque élément du sous-ensemble, c'est-à-dire, par exemple,

$\sigma \bullet \{i, j\} = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$.

Les orbites de l'action sont

$$\{\emptyset\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}; \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}; \{\{1, 2, 3\}\}$$

Cours 21

Rappel.

- Orbite d'un élément $x \in E$
 - $G \bullet x = \{a \bullet x \mid a \in G\}$
- Stabilisateur de $x \in E$
 - $\text{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leq G$
- Les orbites forment une *partition* de E
 - la même que la relation $x \sim y \Leftrightarrow y = a \bullet x$

Lemme.

Si $y = a \bullet x$, alors $a^{-1} \bullet y = x$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} y &= a \bullet x \\ a^{-1} \bullet y &= (a^{-1}a) \bullet x \\ &= x \end{aligned}$$

□

Proposition.

Si $y = a \bullet x$, alors $\text{stab}(y) = a \text{stab}(x) a^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in \text{stab}(x)\}$.

En particulier, si x et y sont dans la même orbite, alors $\text{stab}(x) \cong \text{stab}(y)$.

Démonstration.

$\subseteq :$

Supposons $b \in \text{stab}(y)$. Alors, $b \bullet y = y$.

Écrivons $b = a(a^{-1}ba)b^{-1}$.

De plus

$$\begin{aligned} (a^{-1}ba) \bullet x &= a^{-1} \bullet (b \bullet (a \bullet x)) \\ &= a^{-1} \bullet (b \bullet y) \\ &= a^{-1} \bullet y \\ &= x \end{aligned}$$

Donc, $a^{-1}ba \in \text{stab}(x)$, alors $b \in a \text{stab}(x) a^{-1}$. ■

$\supseteq :$

Supposons $b \in \text{stab}(x)$, alors $aba^{-1} \in a \text{stab}(x) a^{-1}$.

$$\begin{aligned} (aba^{-1}) \bullet y &= a \bullet (b \bullet (a^{-1} \bullet y)) \\ &= a \bullet (b \bullet x) \\ &= a \bullet x \\ &= y \end{aligned}$$

Alors, $aba^{-1} \in \text{stab}(y)$. ■

Ainsi, $\text{stab}(y) = a \text{stab}(x) a^{-1}$. □

De plus,

$$\text{On définit } \begin{array}{ccc} f : \text{stab}(x) & \rightarrow & \text{stab}(y) \\ h & \mapsto & aha^{-1} \end{array}.$$

$$f \text{ est bijective, car son inverse est } \begin{array}{ccc} g : \text{stab}(y) & \rightarrow & \text{stab}(x) \\ b & \mapsto & a^{-1}ba \end{array}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} f(g(i)) &= f(a^{-1}ia) & g(f(i)) &= g(aia^{-1}) \\ &= aa^{-1}iaa^{-1} & &= a^{-1}aia^{-1}a \\ &= i & &= i \end{aligned}$$

f est un homomorphisme, car

$$\begin{aligned} f(h_1h_2) &= a(h_1h_2)a^{-1} \\ &= ah_1a^{-1}ah_2a^{-1} \\ &= f(h_1)f(h_2) \end{aligned}$$

Ainsi, f est un isomorphisme entre $\text{stab}(x)$ et $\text{stab}(y)$. ■

Exemple.

- $G = \mathbb{D}_6$, les isométries d'un hexagone régulier, et $E = \{\text{diagonales de l'hexagone}\}$.

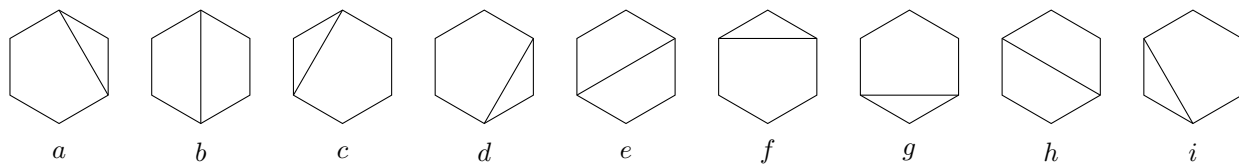


FIGURE 8.1 – Représentation des diagonales d'un hexagone régulier

Calculons les orbites :

$$\begin{aligned} o_1 &= \{a, c, d, f, g, i\} \\ o_2 &= \{b, e, h\} \end{aligned}$$

Calculons les stabilisateurs :

$$\begin{aligned} \text{stab}(a) &= \{\varepsilon, \mu\} \\ \text{stab}(b) &= \{\varepsilon, \phi, \eta, \lambda\} \end{aligned}$$

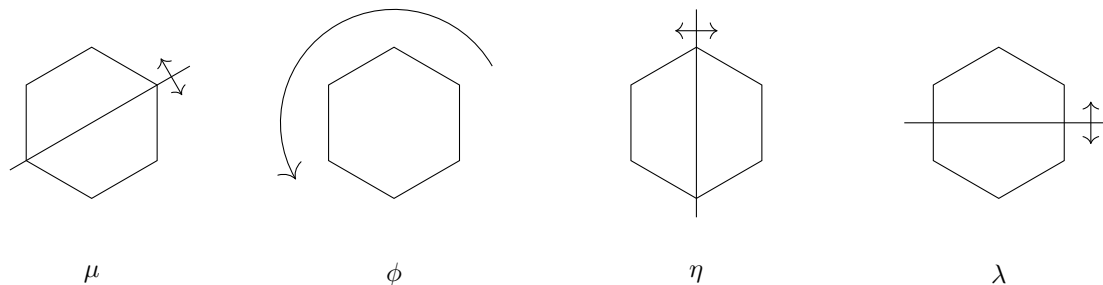
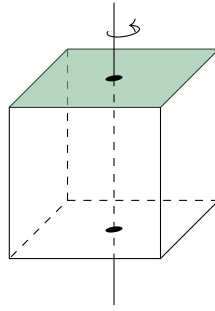


FIGURE 8.2 – Représentation des isométries présentes dans les stabilisateurs

- Combien un cube a-t-il de rotations ?



- Combien de rotations préservent la face du haut ?
4, en incluant l'identité.
- Il y a 6 faces et 4 façons d'envoyer la face du haut à une face quelconque, donc il y a $4 \times 6 = 24$ rotations au total.

Théorème (orbite-stabilisateur).

Soit G un groupe fini qui agit sur E un ensemble fini. Soit $x \in E$.

Alors, $|G| = |G \bullet x| \cdot |\text{stab}(x)|$.

Démonstration.

Posons $H := \text{stab}(x)$. Notons $G/H := \{aH \mid a \in G\}$ l'ensemble des classes d'équivalence à gauche modulo H .

On définit $f : G/H \rightarrow G \bullet x$
 $aH \mapsto a \bullet x$.

On veut montrer que f est bijective.

f est définie sans ambiguïté.

Supposons que $aH = bH$, avec $a, b \in G$. Alors, $a^{-1}b \in H$. Donc,

$$\begin{aligned} (a^{-1}b) \bullet x &= x \\ a^{-1} \bullet (b \bullet x) &= x \\ b \bullet x &= a \bullet x \\ f(bH) &= f(aH) \end{aligned}$$

■

f est bijective.

f est injective.

Soient $aH, bH \in G/H$ t.q. $f(aH) = f(bH)$. Alors

$$\begin{aligned} a \bullet x &= b \bullet x \\ x &= a^{-1} \bullet (b \bullet x) \\ &= (a^{-1}b) \bullet x \\ &\Rightarrow a^{-1}b \in \text{stab}(x) = H \\ &\Rightarrow aH = bH \end{aligned}$$

Ainsi, f est injective.

#

f est surjective.

Soit $y \in G \bullet x$, alors, $\exists a \in G$ t.q. $a \bullet x = y$, donc $f(aH) = y$.

Ainsi, f est surjective.

#

Comme f est injective et surjective, f est bijective.

■

Ainsi, $|G/H| = |G \bullet x|$, c'est-à-dire $\frac{|G|}{|H|} = |G \bullet x|$, donc $|G| = |G \bullet x| \cdot |H|$.

□

Exemple (revenons au cube).

$E_1 = \{\text{faces du cube}\}$. $E_2 = \{\text{sommets du cube}\}$.

G agit sur E_2 . Il n'a qu'une seule orbite et $|E_2| = 8$.

$\text{stab}(a) = \{\varepsilon, \theta, \phi\}$.

$24 = |G| = |E_2| \cdot |\text{stab}(a)| = 8 \times 3$.

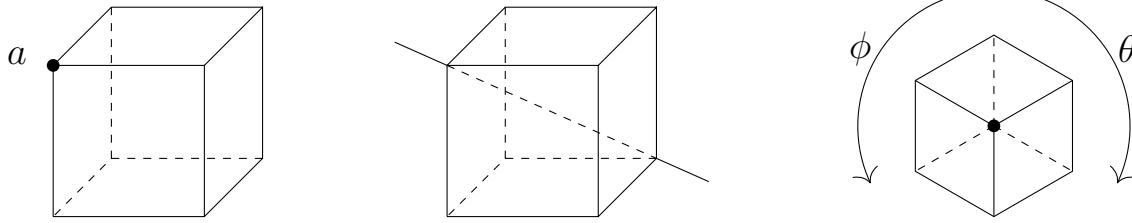


FIGURE 8.3 – Représentation du sommet a et des rotations θ et ϕ

G agit aussi sur $A = \{\text{arêtes du cube}\}$.

Il y a encore une seule orbite, A et $|A| = 12$.

$\text{stab}(\overline{\alpha\beta}) = \{\varepsilon, \rho\}$.

$24 = |G| = |A| \cdot |\text{stab}(\overline{\alpha\beta})| = 12 \times 2$.

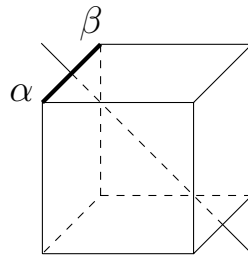


FIGURE 8.4 – Représentation de l'arête $\overline{\alpha\beta}$ et de l'axe de la rotation ρ

Notation. Nous noterons le groupe des rotation d'un cube comme $\text{Isom}^+(\text{cube})$.

Proposition.

$\text{Isom}^+(\text{cube})$ est isomorphe à S_4 .

Idée de la démonstration.

On regarde l'action de $\text{Isom}^+(\text{cube})$ sur $E = \{\text{paires de sommets opposés}\}$.

Cette action définit un homomorphisme $\text{Isom}^+(\text{cube}) \rightarrow S_4$.

Exemple.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3 \ 2)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 3 \ 4)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 4)$

Cet homomorphisme est surjectif et injectif, donc bijectif.

#

Proposition.

$\text{Isom}^+(\text{tétraèdre})$ est isomorphe à A_4 , le sous-groupe de S_4 contenant seulement les permutations de signe positif.

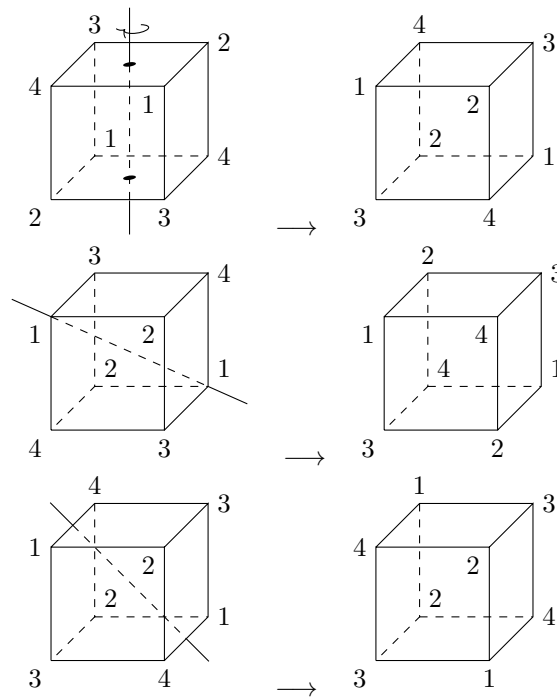


FIGURE 8.5 – Représentation des rotations de l'exemple précédent

Cours 22

Rappel.

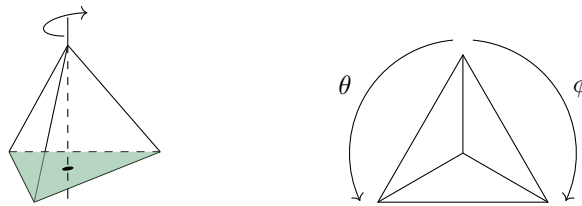
- Orbite-stabilisateur
 - $|G| = |\text{stab}(x)| \cdot |G \bullet x|$
 - idée : $\begin{array}{ccc} G/\text{stab}(x) & \rightarrow & G \bullet x \\ a(\text{stab}(x)) & \mapsto & a \bullet x \end{array}$ est une bijection.
- $\text{Isom}^+(\text{cube}) \cong S_4$, paires de sommets opposés
- $\text{Isom}^+(\text{tétraèdre}) \cong A_4$

Exemple.

$G = \text{Isom}^+(\text{tétraèdre})$ agit sur les 4 faces, avec $F = \{\text{faces}\}$. Il y a une seule orbite de taille 4.

$\text{stab}(f_1) = \{\varepsilon, \theta, \phi\}$.

$|\text{stab}(f_1)| = 3$, $|G| = |F| \cdot |\text{stab}(f_1)| = 4 \times 3 = 12$.

FIGURE 8.6 – Représentation du tétraèdre, de l'axe de rotation et des rotations θ et ϕ

Exemple.

Les cinq solides platoniques :

- cube
- tétraèdre
- octaèdre
- dodécaèdre
- icosaèdre

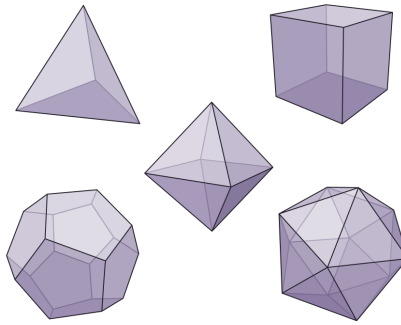


FIGURE 8.7 – Solides platoniques. Image tirée de Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

Définition (Dualité).

On met un sommet au milieu de chaque face et on relie les sommets à ceux associés aux faces adjacentes.

On associe les faces à des sommets, les arêtes à des arêtes, et les sommets à des faces.

Le cube et l'octaèdre sont duaux.

Le tétraèdre est dual à lui-même.

Le dodécaèdre et l'icosaèdre sont duaux.

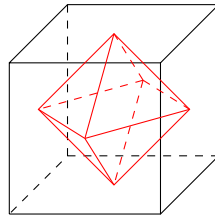


FIGURE 8.8 – Représentation de la dualité du cube et de l'octaèdre

Proposition.

$\text{Isom}^+(\text{dodécaèdre}) \cong \text{Isom}^+(\text{icosaèdre}) \cong A_5$, qui contient 60 éléments.

Les sommets d'un icosaèdre sont les mêmes que 5 cubes, donc chaque rotation permute ces 5 cubes.

Exemple (Combinaisons). Le nombre de manières de choisir k éléments parmi n sans remise.

On veut compter les sous-ensembles de taille k dans un ensemble de taille n .

Prenons $\{1, 2, 3, 4\}$, $n = 4$, $k = 2$. On a

$$\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{3, 4\} \Rightarrow \binom{4}{2} = 6$$

Le groupe S_n agit sur $E_{n,k}$ des sous-ensembles de taille k dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

Par exemple

$$(1 \ 2 \ 3) \bullet \{1, 4\} = \{(1 \ 2 \ 3) 1, (1 \ 2 \ 3) 4\} = \{2, 4\}$$

Tout ensemble de k éléments peut être envoyé à tout autre par une permutation. En effet,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k & & & \end{pmatrix}$$

avec n'importe quelle combinaison des autres éléments pour compléter σ .

$\sigma \bullet \{1, 2, \dots, k\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, donc l'orbite de $\{1, 2, \dots, k\}$ est $E_{n,k}$. Il n'y a qu'une seule orbite.

De plus, $\text{stab}(\{1, 2, \dots, k\}) \cong S_k \times S_{n-k}$ en permutant les k premiers éléments, puis les $n - k$ derniers éléments.

Donc, orbite-stabilisateur nous dit $|S_n| = |E_{n,k}| \cdot |\text{stab}(\{1, 2, \dots, k\})|$, c'est-à-dire, $n! = |E_{n,k}| \cdot (k!)(n-k)!$, d'où $|E_{n,k}| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exemple (motivation du prochain théorème).

Combien y a-t-il de façons de colorer les faces d'un cube avec deux couleurs, à symétrie près ?

- (1) Toutes les faces de la même couleur,
2 possibilités ;
- (2) Une face d'une couleur et cinq de l'autre,
2 possibilités ;
- (3) Deux faces d'une couleur et quatre de l'autre
4 possibilités ;
- (4) Trois faces de chaque couleur
2 possibilités.

Donc, au total, $2 + 2 + 4 + 2 = 10$ coloriage possibles.

Exemple (autre motivation).

Combien y a-t-il de façons de colorer les sommets d'un hexagone avec un certain nombre de couleurs, à symétrie près ?

Cours 23

Rappel.

- $\text{Isom}^+(\text{cube}) \cong \text{Isom}^+(\text{octahédre}) \cong S_4$, ordre 24 ;
- $\text{Isom}^+(\text{tétraédre}) \cong A_4$, ordre 12 ;
- $\text{Isom}^+(\text{icosahédre}) \cong \text{Isom}^+(\text{dodécaédre}) \cong A_5$, ordre 60.

Notation. $E/G = \{G \bullet x \mid x \in E\}$ est l'ensemble des orbites.

Exemple. Combien de façons de colorer les faces d'un cube avec k couleurs.

$G = \text{Isom}^+(\text{cube})$, $E = \{\text{cubes colorés}\}$.

On veut compter $|E/G|$.

Notation. $E^g = \{x \in E \mid g \bullet x = x\}$ est l'ensemble des éléments de E *invariants* par $g \in G$.

Exemple. Avec g une rotation de 90° autour d'un axe passant par le centre de deux faces opposées.

Dans E^g , les quatre faces des côtés sont de la même couleur et les deux autres faces sont libres.

Exemple. $G = \mathbb{D}_3$ qui agit sur $E = \{\text{les sommets d'un triangle}\}$.

$$E^\rho = \emptyset$$

$$E^\varepsilon = E$$

$$E^\alpha = \{1\}$$

Lemme de Burnside

Théorème (Lemme de Burnside).

$$|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g|$$

Démonstration.

Considérons $X = \{(g, x) \in G \times E \mid g \bullet x = x\}$.

Comptons le nombre d'éléments de X de deux manières différentes.

(1) On fixe $g \in G$. On a $|E^g|$ éléments $x \in E$ t.q. $g \bullet x = x$. Donc

$$|X| = \sum_{g \in G} |E^g|$$

(2) On fixe $x \in E$. Les éléments $g \in G$ t.q. $g \bullet x = x$ sont exactement ceux de $\text{stab}(x)$. Donc

$$|X| = \sum_{x \in E} |\text{stab}(x)| \quad (*)$$

Si deux $x, y \in E$ sont dans une même orbite, $|\text{stab}(x)| = |\text{stab}(y)|$.

Soit x_1, x_2, \dots, x_m un ensemble de représentants des orbites, avec $m = |E/G|$.

On a donc

$$|X| = \sum_{i=1}^m |\text{stab}(x_i)| |G \bullet x_i|$$

du théorème orbite-stabilisateur

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m |G| \\ &= m \cdot |G| \end{aligned} \quad (**)$$

Comme $(*) = (**)$, on a

$$\begin{aligned} m |G| &= \sum_{g \in G} |E^g| \\ |E/G| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g| \end{aligned}$$

□

Exemple. Combien peut-on faire de colliers à six billes avec k sortes de billes ?

$G = \mathbb{D}_6$, $E = \{\text{colliers à six billes fixes}\}$.

$|G| = 12$.

$$\begin{aligned} |E/G| &= \frac{1}{12} \left(\underbrace{k^6}_{\varepsilon} + \underbrace{2k}_{\pm\rho} + \underbrace{2k^2}_{\pm\rho^2} + \underbrace{k^3}_{\rho^3} + \underbrace{3k^3}_{\alpha} + \underbrace{3k^4}_{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{12} (k^6 + 2k + 2k^2 + 4k^3 + 3k^4) \end{aligned}$$

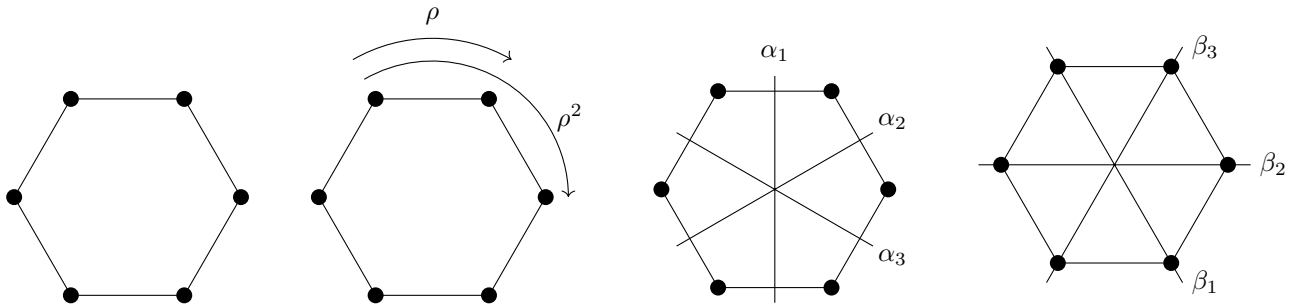


FIGURE 8.9 – Représentation du collier et de ses symétries

Exemple. Combien de coloriages possibles pour les faces d'un cube avec k couleurs ?

$$G = \text{Isom}^+(\text{cube}) \cong S_4, E = \{\text{coloriages d'un cube fixe}\}.$$

$$\begin{aligned} |E/G| &= \frac{1}{24} \left(\underbrace{k^6}_e + \underbrace{6k^3}_\alpha + \underbrace{3k^4}_\beta + \underbrace{8k^2}_\gamma + \underbrace{6k^3}_\delta \right) \\ &= \frac{1}{24} (k^6 + 8k^2 + 12k^3 + 3k^4) \end{aligned}$$

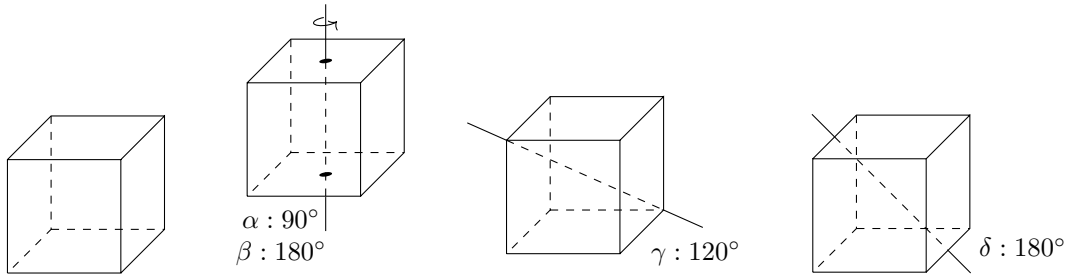


FIGURE 8.10 – Représentation du cube et de ses rotations

Exemple. Combien de manières y a-t-il de colorer les quatre sommets d'un tétraèdre avec k couleurs ?

$$G = \text{Isom}^+(\text{tétraèdre}) \cong A_4, E = \{\text{coloriages d'un tétraèdre fixe}\}.$$

$$\begin{aligned} |E/G| &= \frac{1}{12} \left(\underbrace{k^4}_e + \underbrace{8k^2}_\alpha + \underbrace{3k^2}_\beta \right) \\ &= \frac{1}{12} (k^4 + 11k^2) \end{aligned}$$

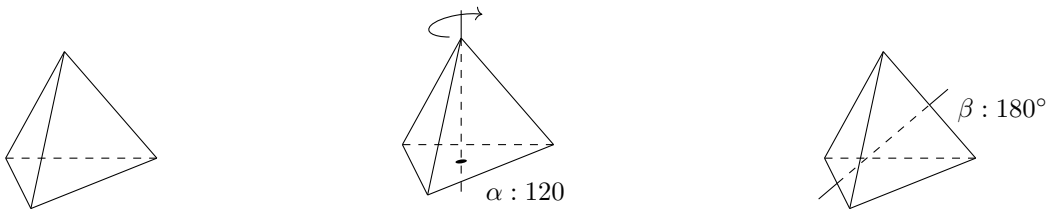


FIGURE 8.11 – Représentation du tétraèdre et de ses rotations

Cours 24

Rappel.

- $E^g = \{x \in E \mid g \bullet x = x\}$, éléments g -invariants
- Burnside
 - $|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g|$
 - $E/G = \{\text{orbites de } G \text{ sur } E\} = \{G \bullet x \mid x \in E\}$

Exemple. $E = \{\text{graphes étiquetés à trois sommets}\} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $G = S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. G agit sur E par permutation des sommets.

$$E^e = E, |E^e| = |E| = 2^3 = 8.$$

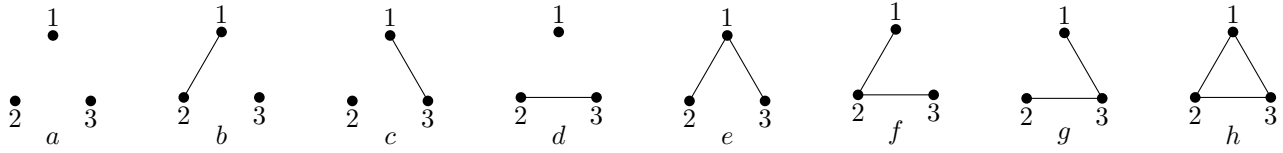
$$E^{(1\ 2)} = \{a, b, g, h\}.$$

$$E^{(1\ 2\ 3)} = \{a, h\}.$$

$$E/G = \{\text{graphes non-étiquetés à trois sommets}\} = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e, f, g\}, \{h\}\}.$$

$$|E/G| = 4.$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g| = \frac{1}{6} \left(\underbrace{8}_e + \underbrace{3 \times 4}_{\substack{(1\ 2) \\ (1\ 3) \\ (2\ 3)}} + \underbrace{2 \times 2}_{\substack{(1\ 2\ 3) \\ (1\ 3\ 2)}} \right) = \frac{24}{6} = 4.$$

FIGURE 8.12 – Représentation de E

Compléments/rappels

Le signe d'une permutation σ :

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\} = C_2$ est un homomorphisme, donc $\text{sgn}(\sigma\eta) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\eta)$.

Proposition. Toute permutation se décompose en un produit de cycles disjoints.

Proposition. Tout cycle se décompose en produit de transpositions.

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_l) = (a_1 \ a_l) (a_1 \ a_{l-1}) (a_1 \ a_{l-2}) \cdots (a_1 \ a_2)$$

Ainsi, tout $\sigma \in S_n$ se décompose en produit de transpositions.

Proposition. $\text{sgn}(\text{1 2}) = -1$, avec $(\text{1 2}) \in S_n$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\text{1 2}) &= \prod_{i < j} \frac{(\text{1 2})(i) - (\text{1 2})(j)}{i - j} \\ &= \frac{(12)(1) - (12)(2)}{1 - 2} \frac{(12)(1) - (12)(3)}{1 - 3} \frac{(12)(1) - (12)(4)}{1 - 4} \cdots \frac{(12)(2) - (12)(3)}{2 - 3} \cdots \frac{(12)(n-1) - (12)(n)}{(n-1) - n} \\ &= \frac{2-1}{1-2} \cdot \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \end{aligned}$$

avec $i < j$ et $\sigma(i) < \sigma(j)$, donc le produit vaut 1

$$= -1$$

□

De plus, $\text{sgn}(\eta\sigma\eta^{-1}) = \text{sgn}(\eta) \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\eta)^{-1} = \text{sgn}(\sigma)$.

$\text{sgn}(\text{1 } j) = \text{sgn}((\text{2 } j)(\text{1 2})(\text{2 } j)) = \text{sgn}(\text{1 2}) = -1$.

$\text{sgn}(i j) = \text{sgn}((\text{1 } i)(\text{1 } j)(\text{1 } i)) = -1$.

Ainsi, si σ se décompose en k transpositions, alors $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

Exemple.

Un jouet composé de deux roulettes avec les chiffres de 1 à 9. Les deux roulettes peuvent tourner dans n'importe quel sens. Il y a toujours un chiffre affecté par les deux roulettes en même temps.

Est-il possible de jouer à ce jeu et d'obtenir l'état suivant ?

On peut modéliser ce jouet à l'aide de permutations. Soit

$$\left\langle \underbrace{(\text{1 2 3 4 5})}_{\alpha}, \underbrace{(\text{2 6 7 9 8})}_{\beta} \right\rangle \leq S_9$$

le plus petit sous-groupe de S_9 qui contient α et β , $\{\varepsilon, \alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \alpha^2, \beta^2, \dots\}$.

On a $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\beta) = 1$. Alors, toutes les positions du jeu sont obtenues en appliquant une permutation paire à $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, mais (8 9) est impaire.

Ainsi, l'état désiré ne peut pas être obtenu.

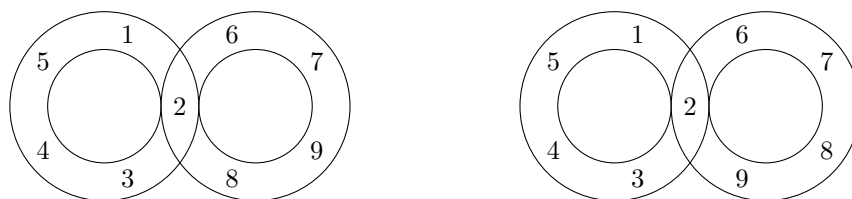


FIGURE 8.13 – Représentation du jouet dans l'état initial et l'état final désiré