

MAT346 - Analyse II  
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Intégration</b>	<b>2</b>
1	Intégrales de Riemann . . . . .	2
	Critère d'intégrabilité . . . . .	4
	Inégalité du triangle . . . . .	7
	Théorème de Darboux . . . . .	9
	Loi de la moyenne . . . . .	11
	Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral . . . . .	12

# Chapitre 1 Intégration

## Section 1.1 Intégrales de Riemann

*Notation.*

$\mathcal{B}[c, d] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}.$

$\mathcal{R}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}.$

$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}.$

On suppose nos fonctions bornées.

**Définition.**

- a) Une partition de  $[a, b]$  est un ensemble fini de points  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$  t.q.  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .
- b) L'ensemble des partitions de  $[a, b]$  est  $\Omega[a, b]$ .
- c) On dit  $\Delta'$  est *plus fine* que  $\Delta$ , noté  $\Delta' \geq \Delta$ , si  $\Delta' \supseteq \Delta$ .
- d) *Raffinement commun* de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , noté  $\Delta_1 \vee \Delta_2$ , est la partition de  $[a, b]$  formée de  $\Delta_1 \cup \Delta_2$  ordonnés.
- e) La *norme* de  $\Delta$ , notée  $\|\Delta\|$ , est  $\|\Delta\| = \max_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$ .
- f)

$$\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$
$$\underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

*Remarque.*

$$\|x\| \geq 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$
$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

**Définition.**

- a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de  $f$  pour la partition  $\Delta$  est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de  $f$  pour la partition  $\Delta$  est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

**Proposition.**

a)

$$\underline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, \Delta), \forall \Delta \in \Omega[a, b]$$

b)

$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta)$$

c)

$$\overline{S}(f, \Delta) \leq \overline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a)$$

**Proposition.** Si  $\Delta' \geq \Delta$ , alors  $\overline{S}(f, \Delta') \leq \overline{S}(f, \Delta)$ .

*démonstration.*

Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$$

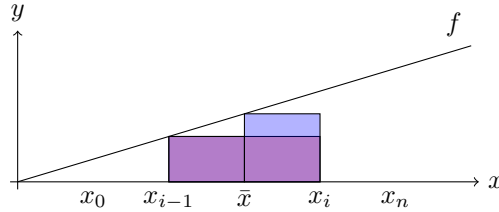
On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})] \\ &\quad - [\overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) + \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x})] \\ &= (x_i - \bar{x}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])] \\ &\quad + (\bar{x} - x_{i-1}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

**Proposition.** Si  $\Delta' \geq \Delta$ , alors  $\underline{S}(f, \Delta') \geq \underline{S}(f, \Delta)$

*démonstration.*



□

*Remarque.*  $\underline{S}(f, \Delta) = -\overline{S}(-f, \Delta)$ .

**Corollaire.**  $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Omega[a, b], \underline{S}(f, \Delta_1) \leq \overline{S}(f, \Delta_2)$

*démonstration.*

On a  $\Delta_1 \vee \Delta_2 \geq \Delta_1$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta_1) &\leq \underline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_2) \end{aligned}$$

□

**Définition.**

- a) La somme par défaut de  $f$  est  $\underline{S}(f) = \sup_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$ .
- b) La somme par excès de  $f$  est  $\overline{S}(f) = \inf_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$ .

**Théorème.**  $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ *démonstration.*Soit  $\Delta_1 \in \Omega[a, b]$  $\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$  est le plus petit majorant des  $\underline{S}(f, \Delta)$  avec  $\Delta \in \Omega[a, b]$ .Du corollaire précédant, on a que  $\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$ .Donc,  $\overline{S}(f, \Delta_1)$  est un majorant des  $\underline{S}(f, \Delta)$ .Ainsi,  $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$ .De même,  $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$  est le plus grand minorant des  $\overline{S}(f, \Delta)$  avec  $\Delta \in \Omega[a, b]$ .Comme  $\underline{S}(f)$  est un minorant des  $\overline{S}(f, \Delta)$ , on a que  $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ . □**Définition.**

Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ . On dit que  $f$  est *intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$*  si  $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$  et on note  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .  
 La valeur commune de  $\underline{S}(f)$  et  $\overline{S}(f)$  est notée  $\int_a^b f(x) dx$

**Critère d'intégrabilité****Théorème** (Critère d'intégrabilité).Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ . Alors  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  si, et seulement si,  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega[a, b])$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .*démonstration.* $(\Rightarrow)$  Supposons  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .Soit  $\varepsilon > 0$ .On a  $\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ .Comme  $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$  ne peut minorer  $\overline{S}(f, \Delta)$ , alors  $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ .De même,  $\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ .Comme  $\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$  ne peut majorer  $\underline{S}(f, \Delta)$ , alors  $\exists \Delta_2 \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ .Posons  $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\
 &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left( \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
 &= (\overline{S}(f) - \underline{S}(f)) + \varepsilon \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Soit  $\varepsilon > 0$ .

Alors  $\exists \Delta$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .

Mais alors,

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Du théorème du sandwich,  $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ , car  $\varepsilon > 0$  est arbitraire.

Donc,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

□

**Corollaire.** *S'il existe  $\Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) = \underline{S}(f, \Delta)$ , alors  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .*

**Théorème.** *Toute fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .*

*démonstration.*

Soit  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Par la proposition d'Archimède,  $\exists n \in \mathbb{Z}$  t.q.  $n\varepsilon > b - a$ .

*Rappel.*

$f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$  si  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$  t.q. pour  $x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

*Rappel.*

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

Comme  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , elle est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

Alors,  $\exists \delta > 0$  t.q. pour  $x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$ .

Soit donc  $\Delta \in \Omega[a, b] : a = x_0 < x_1, \dots < x_n = b$  avec  $\|\Delta\| < \delta$ .

Alors,  $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{1}{n}$ .

*Remarque.*  $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])$  peut être noté  $\text{osc}_f([x_{i-1}, x_i])$ .

On obtient

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b - a}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Donc  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

□

**Théorème.** *Toute  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotone est intégrable.*

*démonstration.*

(1) Si  $f$  est constante, alors  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) = 0 < \varepsilon$ .

(2) Si  $f$  est croissante,

Soit  $\varepsilon > 0$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  t.q.  $n\varepsilon > (b - a)(f(b) - f(a))$

Soit  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  avec  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ ,  $i \in [0..n]$

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \left( \frac{b-a}{n} \right) \\
&= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

(3) Si  $f$  est décroissante, alors  $-f$  est croissante et  $-f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Donc,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

□

### Théorème.

Si  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ , alors  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$ .

démonstration.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $f_i \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\exists \Delta_i \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f_i, \Delta_i) - \underline{S}(f_i, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

Alors,  $\overline{S}(f_i, \Delta) - \underline{S}(f_i, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Supposons  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
\underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\geq \underline{S}(f_1, \Delta) + \underline{S}(f_2, \Delta)
\end{aligned}$$

Car  $\sup(f_1 + f_2) \leq \sup f_1 + \sup f_2$  et  $\inf(f_1 + f_2) \geq \inf f_1 + \inf f_2$ .

Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1, \Delta) - \underline{S}(f_2, \Delta) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc,  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ .

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_1 + f_2 &\leq \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) \\
&\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
&< \underline{S}(f_1, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f_2, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_a^b f_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f_2 + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi,  $\int_a^b f_1 + f_2 < \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Donc,  $\int_a^b f_1 + f_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ .

De même, on peut montrer que  $\int_a^b f_1 + f_2 \geq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ .

Donc,  $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ .

□

**Théorème.**

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\int \lambda f = \lambda \int f$ .

démonstration.

Laissé en exercice.

Utiliser  $\frac{\varepsilon}{\lambda}$  et  $\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$ . □

**Corollaire.**

Si  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ , alors  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ .

démonstration.

$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0$ . □

**Inégalité du triangle****Théorème** (Inégalité du triangle).

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , alors  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $|\int f| \leq \int |f|$ .

démonstration.

Soit  $\varepsilon > 0$

Alors,  $\exists \Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc,  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Enfin,

$$\begin{aligned} -|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\ &\Rightarrow \int f \leq \int |f| \end{aligned}$$

□

**Théorème.**

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $a \leq c < d \leq b$ , alors  $f|_{[c, d]} \in \mathcal{R}[a, b]$ .

démonstration.

Soit  $\varepsilon > 0$

Comme  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$ .

Soit  $\Delta_2$  le raffinement de  $\Delta_1$  en ajoutant les points  $c$  et  $d$ .

Alors,  $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) \leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$

Donc,  $f \in \mathcal{R}[c, d]$ . □

**Théorème.**

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $a < c < b$ , alors  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

démonstration.

Soit  $\varepsilon > 0$

$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a, c]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

De même,  $\exists \Delta_2 \in \Omega[c, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ .



Posons  $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$ . Alors,  $\Delta \in \Omega[a, b]$  et

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\leq \overline{S}(f, \Delta) \\ &= \overline{S}(f, \Delta_1) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \underline{S}(f, \Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f, \Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \underline{S}(f, \Delta_1) + \underline{S}(f, \Delta_2) + \varepsilon \\ &\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a  $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$ .

De même,  $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$ . □

**Théorème.** Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f$  possède  $n$  discontinuités dans  $[a, b]$ , alors  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

*démonstration.*

Pour  $n = 0$ ,  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , donc  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  est un résultat connu.

Supposons l'énoncé vrai pour  $n$ .

Supposons que  $f \in \mathcal{B}[a, b]$  admet  $n + 1$  discontinuités.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Il y a deux cas à considérer

1.  $a$  ou  $b$  est une discontinuité

SPDG, supposons que  $a$  est la discontinuité.

Soit  $\eta \in \mathbb{R}^+$  t.q.  $a$  est l'unique discontinuité de  $[a, a + \eta]$  et  $\eta < \frac{\varepsilon}{4M}$ .

Alors,  $[a + \eta, b]$  contient  $n$  discontinuités.

De l'hypothèse de récurrence,  $f \in \mathcal{R}[a + \eta, b]$ .

Il existe donc  $\Delta \in \Omega[a + \eta, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Posons  $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$ .

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= (\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)) + (\overline{M}(f, [a, a + \eta]) - \underline{M}(f, [a, a + \eta])) \eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

2. ni  $a$  ni  $b$  ne sont des discontinuités

Soit  $c \in ]a, b[$  qui est une discontinuité de  $f$ .

Soit  $\eta \in \mathbb{R}^+$  t.q.  $c$  est l'unique discontinuité de  $[c - \eta, c + \eta] \subset [a, b]$  et  $\eta < \frac{\varepsilon}{8M}$ .

Alors,  $[a, c - \eta]$  et  $[c + \eta, b]$  contiennent au plus  $n$  discontinuités, par l'hypothèse de récurrence

$\exists \Delta_1 \in \Omega[a, c - \eta]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{4}$ .

$\exists \Delta_2 \in \Omega[c + \eta, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{4}$ .

Posons  $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= [\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1)] + [\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2)] \\
&\quad + [\overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) - \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta])] (2\eta) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4M\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

**Théorème.** Soient  $f : [a, b] \rightarrow [c, d] \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c, d]$ .

Alors  $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

*Remarque.* L'hypothèse que  $g \in \mathcal{C}[c, d]$  est nécessaire.

*Exemple.*

$$\begin{aligned}
f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ et } \text{pgcd}(m, n) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Fonction de Dirichlet modifiée.

$$\begin{aligned}
g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

$f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ .

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \circ f \notin \mathcal{R}[a, b]$ .

Fonction de Dirichlet.

**Lemme.** Si  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ ,  $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$  et  $\Delta'$  s'obtient de  $\Delta$  en ajoutant un unique point, alors  $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$ .

*démonstration.*

Soient  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ .

$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$ .

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x}) \\
&= (\bar{x} - x_{i-1}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])) + (x_i - \bar{x}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) ((\bar{x} - x_{i-1}) - (x_i - \bar{x})) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\|
\end{aligned}$$

□

**Corollaire.** Si  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ ,  $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$  et  $\Delta'$  s'obtient de  $\Delta$  en ajoutant  $p$  points, au plus un point par sous-intervalle de  $\Delta$ , alors  $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2p\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$ .

## Théorème de Darboux

**Théorème** (Darboux, 1875).

Si  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ , alors

$$\overline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) \qquad \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta)$$

démonstration.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ , on a que  $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$  n'est pas un minorant des  $\overline{S}(f, \Delta)$ .

Ainsi,  $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \dots < x_n = b$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_0) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $\delta > 0$  t.q.  $\delta < \min_{i \in [1..n]} |x_i - x_{i-1}|$  et  $\delta < \frac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b])}$ .

Soit  $\Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\|\Delta\| < \delta$ .

Alors,  $\|\Delta\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Considérons  $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$ .

Comme  $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$ , aucun sous-intervalle ouvert de  $\Delta$  ne contient plus d'un point de  $\Delta_0$ .

Comme  $\Delta'$  s'obtient de  $\Delta$  en ajoutant au plus  $n-1$  points  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ ,

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &\leq 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\| \\ &< 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f, \Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \overline{S}(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} -\overline{S}(-f, \Delta) \\ &= - \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(-f, \Delta) \\ &= -\overline{S}(-f) \\ &= \underline{S}(f) \end{aligned}$$

□

**Définition.** Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ .

Soit  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \in \Omega[a, b]$ .

Soient  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , pour  $i \in [1..n]$ .

Le nombre réel

$$S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

est appelé *somme de Riemann* de la fonction  $f$  correspondant à la partition  $\Delta$  et aux points  $\{\bar{x}_i\}_{i \in [1..n]}$ .

**Théorème.**

Soit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Alors,  $(\forall \varepsilon > 0)$ ,  $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$  t.q. pour toute partition  $\Delta$  de  $[a, b]$  avec  $\|\Delta\| < \delta$  et pour tout choix de points  $\{\bar{x}_i\}$ , on a

$$\left| \int_a^b f - S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire.

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$$

démonstration.

On a  $\underline{S}(f, \Delta) \leq S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \overline{S}(f, \Delta)$ .

Donc,

$$\underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Comme  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , on a  $\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \int_a^b f$ .

Par le théorème du sandwich,  $S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$ . □

## Loi de la moyenne

**Théorème** (Loi de la moyenne).

Soit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Alors,  $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$  t.q.  $\int_a^b f = (b - a) \cdot \mu$ .

démonstration.

Soit  $\phi$  la fonction donnée par  $\phi(x) = (b - a)x$ .

On a  $\underline{M}(f, [a, b]) \leq f \leq \overline{M}(f, [a, b])$ .

Donc

$$\phi(\underline{M}(f, [a, b])) = (b - a)\underline{M}(f, [a, b]) = \int_a^b \underline{M}(f, [a, b]) \leq \int_a^b f \leq \overline{M}(f, [a, b]) = (b - a)\overline{M}(f, [a, b]) = \phi(\overline{M}(f, [a, b]))$$

Rappel.

**Théorème** (Théorème de valeur intermédiaire).

$f$  continue sur  $[a, b]$ ,  $f(a) < c < f(b)$  implique  $\exists x_0 \in [a, b]$  t.q.  $f(x_0) = c$ .

Comme  $\phi$  est continue sur  $[\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$ , du TVI,  $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$  t.q.  $\phi(\mu) = c$  pour tout  $c \in [\phi(\underline{M}(f, [a, b])), \phi(\overline{M}(f, [a, b]))]$ .

En particulier, si  $c = \int_a^b f$ ,  $\exists \mu$  t.q.  $\phi(\mu) = \int_a^b c$ , c'est-à-dire t.q.  $(b - a)\mu = \int_a^b f$ . □

**Théorème.**

Soit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } x \mapsto F(x) = \int_a^x f(f)dt$$

Alors,

a)  $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \overline{M}(|f|, [a, b]) (b - a) \cdot |x_1 - x_2|$  pour tous  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ;

b)  $F$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ ;

c) Si  $f$  est continue, alors  $F$  est différentiable et  $F' = f$ .

démonstration.

a) Supp  $x_1 > x_2$

On a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f \right| \\ &= \left| \int_{x_2}^{x_1} f \right| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} |f| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} \overline{M}(|f|, [a, b]) \\ &= \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

b) Soit  $\varepsilon > 0$ .

Prenons  $\delta = \frac{\varepsilon}{\overline{M}(|f|, [a, b])}$ .

Soient  $x, y \in [a, b]$  avec  $|x - y| < \delta$ .

Alors,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x - y| \\ &< \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

c) Soit  $x_0 \in [a, b]$ .

On a

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{Loi de la moyenne}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f(x_0 + \theta(x - x_0))}{x - x_0} \quad \theta \in [0, 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + \theta(x - x_0)) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

□

## **Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral**