

MAT141 - Éléments d'algèbre
Donné par Jean-Philippe Burelle

Julien Houle

Automne 2025

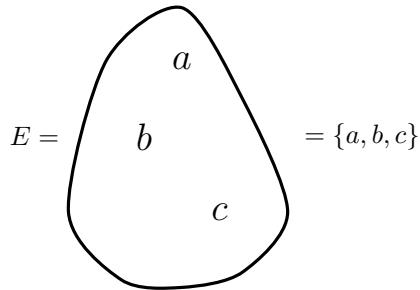
Table des matières

1	Ensembles	1
	Manières de définir une fonction	1
6	Groupes	8
	Propriétés élémentaires des groupes	9
	Produit cartésien de groupes	10
	Isomorphismes de groupes	11
	Puissances d'éléments de groupes	13
	Sous-groupes	16
2	Applications et équivalences	19
	2.4 Relations d'équivalence	19
	Ordre et groupes cycliques	22
6	Groupes (suite)	24
	6.13 Groupes symétriques S_n	24
8	Homomorphismes	29
	Équivalence modulo H et théorème de Lagrange	31
	8.6 Groupes quotients	34
	Groupes monogènes	41
	8.3 Théorème de Cayley	42
	Actions de groupes	44
	Lemme de Burnside	53

Chapitre 1 Ensembles

Cours 1

Idée : ensemble = patate.



Notation. $E \subseteq F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F$.

Remarque. $E \subseteq E$.

Notation. La cardinalité d'un ensemble, $|E|$, est le nombre d'éléments d'un ensemble.

Définition. Définition d'un ensemble par *compréhension*

Exemple. $E = \{n \in \mathbb{Z} | 1 \leq n \leq 20\}$.

Notation. $E = F \Leftrightarrow E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

Définition. Produit cartésien : $E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}$.

Définition. Fonction/Application

$f : A \rightarrow B$, A et B des ensembles, associe à *chaque* $x \in A$ un *unique* élément $f(x) \in B$.

Cours 2

Rappel.

- Ensemble collection d'objets
- \in “élément” d'un ensemble
- sous-ensemble (\subseteq) $E \subseteq F$ si $x \in E$ implique $x \in F$
- $E = F$ si, et seulement si, $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$
- \cup union
- \cap intersection
- $E \times F$ produit cartésien (paires (x, y))
- $f : E \rightarrow F$ fonction ou application, associe à chaque $x \in E$ un unique $f(x) \in F$, image de x par f
- $\mathbf{1}_E$: $E \rightarrow E$ est définie comme $\mathbf{1}_E(x) = x$

Manières de définir une fonction

- énumérer $f(x)$ pour chaque $x \in E$
- donner une formule
une formule ne définit pas toujours une fonction, elle doit être valide pour chaque x de l'ensemble de départ.
- en mots (décrire la valeur pour chaque $x \in E$)

- mélange de formule et mots

Définition. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est *inversible* s'il existe une fonction $\underbrace{g : F \rightarrow E}_{*}$ telle que $\underbrace{g(f(x)) = x}_{**}$ pour tout $x \in E$ et $\underbrace{f(g(y)) = y}_{***}$ pour tout $y \in F$.

Exemple. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$ est inversible d'inverse $g(y) = y - 1$

Démonstration.

On vérifie que

$$\begin{array}{ll} g(f(x)) = x & g(f(x)) = g(x + 1) \\ &= (x + 1) - 1 \\ &= x \\ f(g(y)) = y & f(g(y)) = f(y - 1) \\ &= (y - 1) + 1 \\ &= y \end{array}$$

□

Proposition. Si f admet un inverse, celui-ci est unique.

Démonstration.

Supposons que g_1 et g_2 sont tous deux inverses de f et montrons qu'elles sont égales.

(Pour démontrer que deux fonctions sont égales, il suffit de montrer que $g_1(y) = g_2(y)$ pour tout $y \in F$)

Soit $y \in F$.

On a

$$\begin{aligned} g_1(y) &\stackrel{***}{=} g_1(\underbrace{f(g_2(y))}_{*}) \\ &\stackrel{**}{=} g_2(y) \end{aligned}$$

□

Définition. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, alors la *composée* de f et g est la fonction $g \circ f : E \rightarrow G$ définie par la formule $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Définition (Redéfinition de l'inverse).

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathbf{1}_E \\ f \circ g &= \mathbf{1}_F \end{aligned}$$

Exemple.

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{d, e, f\}$$

$$f : A \rightarrow B, a \mapsto d, b \mapsto e, c \mapsto f$$

$$g : B \rightarrow A, d \mapsto a, e \mapsto b, f \mapsto c$$

$$g \circ f : A \rightarrow A, g \circ f(x) = x, g \circ f = \mathbf{1}_A.$$

De la même manière, $f \circ g = \mathbf{1}_B$.

Ainsi, g est l'inverse de f .

Notation. On note $g = f^{-1}$ l'inverse de f .

Rappel. Pour trouver l'inverse d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par une formule $f(x) = y$, on isole x en fonction de y .

Exemple.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 8 \\ y &= 3x - 8 \\ y + 8 &= 3x \\ \frac{y + 8}{3} &= x \\ g(y) &= \frac{y + 8}{3} \end{aligned}$$

Dans un devoir, on commence par la formule de l'inverse et on vérifie $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$.

Définition. On dit que $f : E \rightarrow F$ est une fonction *injective* si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Définition. On dit que $f : E \rightarrow F$ est une fonction *surjective* si pour tout $y \in F$, $\exists x \in E$ t.q. $f(x) = y$.

Définition. On dit que $f : E \rightarrow F$ est une fonction *bijective* si elle est injective et surjective.

Exemple.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, f(x) = |x|$

f n'est pas injective, car $f(1) = |1| = 1$ et $f(-1) = |-1| = 1$, mais $1 \neq -1$.

f est surjective, car soit $y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, alors pour $x = y$, on a $f(x) = f(y) = |y| = y$.

- $$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ & x & \mapsto x + 1 \end{array}$$

f est injective :

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$.

On suppose $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &= x_2 + 1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

f n'est pas surjective

$y = 0 \in \mathbb{N}$ n'est pas égal à $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$. Si il existait x avec $f(x) = 0$, $x + 1 = 0$, $x = -1$, $x \notin \mathbb{N}$.

- $$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto 2x + 3 \end{array}$$

f est injective :

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

supposons $f(x_1) = f(x_2)$, $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$, $2x_1 = 2x_2$, $x_1 = x_2$.

f est surjective :

Soit $y \in \mathbb{R}$.

On cherche x t.q. $f(x) = y$.

Posons $x = \frac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$.

Alors, $f(x) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y-3}{2} + 3 = y - 3 + 3 = y$.

Ainsi, f est bijective.

- $f : A \rightarrow B; A = \{1, 48, 57\}, B = \{a, b, c\}$

$$1 \mapsto a, 48 \mapsto a, 57 \mapsto b$$

f n'est pas injective, car $1 \mapsto a$ et $48 \mapsto a$ avec $1 \neq 48$.

f n'est pas surjective, car aucun élément de $x \in A$ mappe c .

Remarque. La fonction $f' : A \rightarrow B'$ avec $B' = \{a, b\}$ est surjective.

Cours 3

Rappel. A, B deux ensembles

- $f : A \rightarrow B$ une fonction, associe à chaque $x \in A$ un unique $f(x) \in B$. $x \mapsto f(x)$.
- f est *inversible* s'il existe $g : B \rightarrow A$ t.q. $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$ et $f(g(b)) = b$ pour tout $b \in B$.
- l'inverse est *unique*.
- La composition de $f : A \rightarrow B$ avec $g : B \rightarrow C$ est $g \circ f : A \rightarrow C$ avec $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- f est injective si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f est surjective si pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ t.q. $f(a) = b$.
- f est bijective si elle est injective et surjective.

Proposition. $f : A \rightarrow B$ est bijective si, et seulement si, elle est inversible.

Démonstration.

$\Leftarrow :$

Supposons que f est inversible.

Alors, il existe un inverse $g : B \rightarrow A$.

(inj) :

Soient $x_1, x_2 \in A$.

On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$.

Alors, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Donc, $x_1 = x_2$.

(surj) :

Soit $y \in B$.

Posons $x = g(y) \in A$.

Alors, $f(x) = f(g(y)) = y$.

Ainsi, f est bijective.

$\Rightarrow :$

Supposons f est injective et surjective.

Lemme. Pour chaque $y \in B$, il existe un unique $x \in A$ t.q. $f(x) = y$.

Démonstration.

Existance : Comme f est surjective, x existe.

Unicité : Supposons $x_1, x_2 \in A$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$ puisque f est injective. ■

On définit $g : B \rightarrow A$ par $g(y) = x$ où x est l'unique élément du lemme.

On vérifie :

Soit $x \in A$, alors $\underbrace{g(f(x))}_y = x$, par définition de g .

Soit $y \in B$, alors $f(\underbrace{g(y)}_{\text{l'unique } x \text{ t.q. } f(x) = y}) = y$.

□

□

Définition. Une *opération* (interne, binaire) sur un ensemble E est un fonction $m : E \times E \rightarrow E$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (n, m) &\longmapsto n + m \\ \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (n, m) &\longmapsto n \cdot m \\ d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

n'est pas une opération, car $(1, 0) \mapsto \frac{1}{0}$ qui n'est pas défini. (d n'est pas une fonction.)

Cependant,

$$\begin{aligned} d : \mathbb{Q}_* \times \mathbb{Q}_* &\longrightarrow \mathbb{Q}_* \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

est une opération.

A un ensemble

$E = \{f : A \rightarrow A\}$, où f est une fonction.

$$\begin{aligned} c : E \times E &\longrightarrow E \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

La composition est une opération.

Notation. On note la plupart du temps une opération par un symbole entre les entrées.

Exemple. $m(x, y) := x * y$, ou $x + y$, ou $x \circ y$, ou xy .

Définition.

Un élément neutre pour une opération $*$ est un élément $e \in E$ t.q. pour tout $x \in E$, $e * x = x$ et $x * e = x$.

Cours 4

Rappel.

- $f : E \rightarrow F$ est bijective $\Leftrightarrow f$ est inversible.
- L'inverse est unique ($g = f^{-1}$)
- Opération : $m : E \times E \rightarrow E$, ou $* : E \times E \rightarrow E$

$$(x, y) \mapsto z$$
- Élément neutre : $e \in E$ t.q. $e * x = x$ et $x * e = x$.
- f est injective si tout $y \in F$ a au plus un antécédent
- f est surjective si tout $y \in F$ a au moins un antécédent
- f est bijective si tout $y \in F$ a exactement un antécédent
- x est antécédent de y si $f(x) = y$

Exemple.

Sur \mathbb{N} ,

- 0 est neutre pour $+$.

$$\begin{aligned} 0 + n &= n \\ n + 0 &= n \end{aligned}$$

- 1 est neutre pour \times .

$$\begin{aligned} 1 \times n &= n \\ n \times 1 &= n \end{aligned}$$

Sur \mathbb{Z} , $-$ est une opération mais elle n'a pas d'élément neutre.

En effet,

Supposons que $e \in \mathbb{Z}$ est neutre, alors $e - n = n$ pour tout n .

Pour $n = 0$, $e - 0 = 0$, donc $e = 0$.

Pour $n = 1$, $e - 1 = 1$, donc $-1 = 1$. ↳

- Sur l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, la multiplication matricielle \times est une opération.
La matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est neutre pour \times .
- Sur $E = \{f : A \rightarrow A\}$, la fonction $\mathbb{1}_A$ est neutre pour la composition de fonctions.

Démonstration.

On doit montrer $\mathbb{1}_A \circ f = f$ et $f \circ \mathbb{1}_A = f$ pour tout $f \in E$.

(1) Soit $x \in A$, alors

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A \circ f)(x) &= \mathbb{1}_A(f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc, $\mathbb{1}_A \circ f = f$.

(2) Soit $x \in A$, alors

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbb{1}_A)(x) &= f(\mathbb{1}_A(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc, $f \circ \mathbb{1}_A = f$.

□

On peut décrire une opération sur un ensemble fini avec sa table “de multiplication”.

Exemple. $A = \{0, 1\}$

$f_1 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_2 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, f_3 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_4 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}$ On a $f_2 = \mathbb{1}_A$.

○	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_4	f_3	f_2	f_1
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

Définition.

Une opération $*$ sur E est *associative* si pour tout $x, y, z \in E$, on a $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Proposition.

Si $$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.*

Démonstration.

Supposons que e et e' sont neutres pour $*$.

On a

$$\begin{aligned} e * e' &= e' && \text{car } e \text{ est neutre} \\ e * e' &= e && \text{car } e' \text{ est neutre} \end{aligned}$$

Donc, $e = e'$.

□

Définition.

Soit E un ensemble, $*$ une opération sur E et $e \in E$ un neutre pour $*$. On dit que $a, b \in E$ sont *inverses* si $a * b = e$ et $b * a = e$.

Dans ce cas, on dit que a et b sont inversibles.

Exemple.

Dans \mathbb{Z} avec $+$, 3 et -3 sont inverses. En effet, on a $3 + (-3) = 0$ et $(-3) + 3 = 0$ avec 0 l'élément neutre de $+$.

Exemple.

Dans \mathbb{Z} avec \times , le neutre est 1, mais seuls 1 et -1 sont inversibles. En effet, on a $1 \times 1 = 1$ et $(-1) \times (-1) = 1$.

Remarque.

L'élément neutre est son propre inverse. En effet, $e * e = e$, pour tout $*$ qui admet e comme élément neutre.

Proposition.

Si $$ est associative et admet un élément neutre e , alors les inverses sont uniques s'ils existent.*

Démonstration.

Soit $a \in E$.

Supposons b, b' sont inverses de a .

Alors,

$$\begin{aligned} b &= b * e \\ \text{car } b' \text{ est inverse de } a &= b * (a * b') \\ \text{associativité} &= (b * a) * b' \\ \text{car } b \text{ est inverse de } a &= e * b' \\ &= b' \end{aligned}$$

□

Notation.

Comme l'inverse de a est unique, on le note a^{-1} .

Exemple.

Dans $E = \{f : A \rightarrow A\}$, avec l'opération \circ , les fonctions bijectives sont exactement celles qui sont inversibles pour \circ .

Proposition.

La composition de fonctions est associative.

Démonstration.

Soient $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$.

Soit $a \in A$.

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= h((g \circ f)(a)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(a) \\ \Rightarrow (h \circ g) \circ f &= h \circ (g \circ f) \end{aligned}$$

□

Chapitre 6 Groupes

Définition.

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération $*$ t.q.

- (A) $*$ est associative
- (N) $*$ admet un neutre
- (I) tout $g \in G$ admet un inverse

Exemple.

- (1) $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

Neutre : 0

Inverse de n : $-n$

- (2) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes.

- (3) (\mathbb{Z}, \times) n'est pas un groupe, car, par exemple, 2 n'est pas inversible.

- (4) (\mathbb{Q}, \times) n'est pas un groupe, car 0 n'est pas inversible.

- (5) (\mathbb{Q}_*, \times) et (\mathbb{R}_*, \times) sont des groupes.

Neutre : 1

Inverse de x : $\frac{1}{x}$

Remarque. (1), (2) et (5) sont *commutatifs*.

Remarque. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.

Définition. Si l'opération d'un groupe est commutative, on note le groupe comme *abélien* (ou commutatif).

- (6) $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.

$GL(n, \mathbb{R}) = \{M | M \text{ est une matrice } n \times n \text{ réelle inversible}\}$.

GL : général linéaire

$$\text{Neutre : } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

M^{-1} la matrice inverse est l'inverse.

Pour $n \geq 2$, $GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas abélien.

- (7) A un ensemble quelconque

$S(A) = \{f : A \rightarrow A | f \text{ est bijective}\}$ est un groupe pour \circ .

Neutre : $\mathbb{1}_A$

Inverse de f : f^{-1}

Remarque.

Pour $A = \{0, 1\}$

$$f_1 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_2 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, f_3 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_4 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, S(A) = \{f_2, f_3\}.$$

Cours 5

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$
 - G ensemble
 - * opération sur G
 - (A) * est associative

$$\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$$
 - (N) * admet un élément neutre dans G

$$\exists e \in G \text{ t.q. } \forall a \in G, e * a = a = a * e$$
 - (I) tout élément de G est inversible

$$\forall a \in G, \exists b \in G \text{ t.q. } a * b = e = b * a$$
- Le neutre et l'inverse sont uniques

Remarque.

“Le groupe \mathbb{R} ” implique l’opération + et “le groupe \mathbb{R}_* ” implique l’opération \times .

Propriétés élémentaires des groupes

- (1) $\forall a, b \in G, (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.
- (2) $\forall a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$
- (3) Si $a * b = a * c$, alors $b = c$
- (4) Si $b * a = c * a$, alors $b = c$

Démonstration.

- (1) On calcule

$$\begin{aligned}
 (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * (b^{-1} * a^{-1})) & (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * (a^{-1} * (a * b)) \\
 &= a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) & &= b^{-1} * ((a^{-1} * a) * b) \\
 &= a * (e * a^{-1}) & &= b^{-1} * (e * b) \\
 &= a * a^{-1} & &= b^{-1} * b \\
 &= e & &= e
 \end{aligned}$$

Donc, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

- (2) Comme $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$, a est l'inverse de a^{-1} , donc $(a^{-1})^{-1} = a$.
- (3) Supposons $a * b = a * c$. Alors

$$\begin{aligned}
 a^{-1} * (a * b) &= a^{-1} * (a * c) \\
 (a^{-1} * a) * b &= (a^{-1} * a) * c \\
 e * b &= e * c \\
 b &= c
 \end{aligned}$$

- (4) Supposons $b * a = c * a$. Alors

$$\begin{aligned}
 (b * a) * a^{-1} &= (c * a) * a^{-1} \\
 b * (a * a^{-1}) &= c * (a * a^{-1}) \\
 b * e &= c * e \\
 b &= c
 \end{aligned}$$

□

Exemple.

$(\mathbb{Z}_3, +)$.

$$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$+$ est associative.

$\bar{0}$ est l'élément neutre.

$$(\bar{1})^{-1} = \bar{2}.$$

$$(\bar{2})^{-1} = \bar{1}.$$

$(\mathbb{Z}_3, +)$ est un groupe abélien.

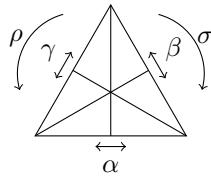
Remarque. La symétrie de la table par rapport à la diagonale implique la commutativité.

Exemple.

(\mathbb{D}_3, \circ) - groupe diédral d'ordre 3.

Groupe des symétries d'un triangle équilatéral.

$$\mathbb{D}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \text{identité} \\ \beta \\ \gamma \\ \alpha \\ \text{réflexion} \\ \sigma \\ \text{rotation} \end{array} \right\}.$$



\circ	ε	α	β	γ	ρ	σ
ε	ε	α	β	γ	ρ	σ
α	α	ε	ρ	σ	β	γ
β	β	σ	ε	ρ	γ	α
γ	γ	ρ	σ	ε	α	β
ρ	ρ	γ	α	β	σ	ε
σ	σ	β	γ	α	ε	ρ

(\mathbb{D}_3, \circ) n'est pas un groupe abélien.

Cours 6

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$ avec A, N, I .

Abélien : C .

-

$$\begin{aligned} a * b &= a * c && \Rightarrow b = c \\ b * a &= c * a && \Rightarrow b = c \\ (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$

-

Exemple.

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}_*, \times), (\mathbb{R}_*, \times)$ sont des groupes abéliens ; $\mathbb{Z}_3, \mathbb{D}_3, GL(n, \mathbb{R})$ sont des groupes non abéliens.
 $S(E) = \{f : E \rightarrow E \mid f \text{ est bijective}\}$.

Remarque. E n'est pas l'ensemble utilisé dans la définition du groupe.

Produit cartésien de groupes

$(G, *)$ et (H, \diamond) deux groupes.

Proposition.

$G \times H$ est un groupe lorsque muni de l'opération $(a, b) \bullet (a', b') = (a * a', b \diamond b')$, avec $a, a' \in G$ et $b, b' \in H$.

Démonstration.

(N) $e \in G$ le neutre et $e' \in H$ le neutre, alors $(e, e') \in G \times H$

$$\begin{aligned}(a, b) \bullet (e, e') &= (a * e, b \diamond e') \\ &= (a, b) \\ (e, e') \bullet (a, b) &= (e * a, e' \diamond b) \\ &= (a, b)\end{aligned}$$

(e, e') est bien neutre.

(I) $(a, b) \in G \times H$, alors (a^{-1}, b^{-1}) est inverse de (a, b) .

En effet,

$$\begin{aligned}(a, b) \bullet (a^{-1}, b^{-1}) &= (a * a^{-1}, b \diamond b^{-1}) \\ &= (e, e') \\ (a^{-1}, b^{-1}) \bullet (a, b) &= (a^{-1} * a, b^{-1} \diamond b) \\ &= (e, e')\end{aligned}$$

(A) Soient $(a, b), (c, d), (e, f) \in G \times H$. On a

$$\begin{aligned}((a, b) \bullet (c, d)) \bullet (e, f) &= (a * c, b \diamond d) \bullet (e, f) \\ &= ((a * c) * e, (b \diamond d) \diamond f) \\ &= (a * (c * e), b \diamond (d \diamond f)) \\ &= (a, b) \bullet (c * e, d \diamond f) \\ &= (a, b) \bullet ((c, d) \bullet (e, f))\end{aligned}$$

□

Exemple.

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
 $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- $(\mathbb{Z}_2, +)$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

+	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$
$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$

Isomorphismes de groupes

Définition. $(G, *)$ et (H, \diamond) deux groupes.

Un *isomorphisme* de G vers H est une application $f : G \rightarrow H$ t.q.

- (1) $\forall a, b \in G, f(a * b) = f(a) \diamond f(b)$.

Préservation des opérations

(2) f est bijective.

Exemple.

- $(\mathbb{R}, +)$ et (\mathbb{R}_*^+, \times)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ $x \mapsto e^x$ est un isomorphisme de groupes.

(1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= e^{x+y} \\ &= e^x \times e^y \\ &= f(x) \times f(y) \end{aligned}$$

(2) $\ln : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est inverse de $f : \ln e^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln x} = x, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$.

Proposition. Si $f : G \rightarrow H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(e_G) = e_H$, où e_G est l'élément neutre de G et e_H est l'élément neutre de H .

Démonstration. Stratégie : montrer que $f(e_G)$ est neutre pour H et utiliser l'unicité.

Soit $b \in H$.

Comme f est bijective, $\exists a \in G$ t.q. $f(a) = b$

$$\begin{array}{ll} f(e_G) \diamond b = f(e_G) \diamond f(a) & b \diamond f(e_G) = f(a) \diamond f(e_G) \\ = f(e_G * a) & = f(a * e_G) \\ = f(a) & = f(a) \\ = b & = b \end{array}$$

On a donc que $f(e_G) \in H$ est neutre pour \diamond , mais comme l'élément neutre est unique, $f(e_G) = e_H$. \square

Exemple. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ $x \mapsto e^x$, $f(0) = e^0 = 1$.

Proposition. Si $f : G \rightarrow H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, pour tout $a \in G$.

Démonstration. Stratégie : montrer que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$ et utiliser l'unicité.

$$\begin{array}{ll} f(a^{-1}) \diamond f(a) = f(a^{-1} * a) & f(a) \diamond f(a^{-1}) = f(a * a^{-1}) \\ = f(e_G) & = f(e_G) \\ = e_H & = e_H \end{array}$$

On a donc que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$, mais comme l'inverse est unique, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. \square

Exemple. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ $x \mapsto e^x$, $f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} = f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$, où $-x$ est l'inverse de x pour $+$ et $\frac{1}{f(x)}$ est l'inverse de $f(x)$ pour \times .

Remarque. Si G, H sont des groupes finis et f est un isomorphisme, alors f “envoie la table de G à celle de H ”.

*	e_G	a_1	a_2	\dots	\diamond	e_H	$f(a_1)$	$f(a_2)$	\dots
e_G					$f(e_G)$				
a_1			$a_1 * a_2$		$f(a_1)$			$f(a_1) \diamond f(a_2)$	
a_2					$f(a_2)$				
\vdots					\vdots				

$G : \xrightarrow{f} H$

Avec $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \diamond f(a_2)$.

Exemple.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c} + & \bar{0} & \bar{1} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \hline \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \quad H : \begin{array}{c|c|c} \circ & \varepsilon & \alpha \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \varepsilon \end{array} \quad C_2 : \begin{array}{c|c|c} \times & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array} \end{array}$$

\mathbb{Z}_2 , H et C_2 sont isomorphes.

Il existe un isomorphisme entre chaque paire.

Proposition. Si $f : G \rightarrow H$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : H \rightarrow G$ est un isomorphisme.

Démonstration.

(1) Soient $b_1, b_2 \in H$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1 \diamond b_2) &= f^{-1}(f[f^{-1}(b_1)] \diamond f[f^{-1}(b_2)]) \\ &= f^{-1}(f[f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2)]) \\ &= f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2) \end{aligned}$$

(2) f^{-1} est bijective, car elle est inversible d'inverse f .

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= 1_H \\ f^{-1} \circ f &= 1_G \end{aligned}$$

□

Proposition (Transitivité).

Si $f : G \rightarrow H$ et $g : H \rightarrow K$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : G \rightarrow K$ est un isomorphisme.

Démonstration.

(1) Soient $a, b \in G$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a * b) &= g(f(a * b)) \\ &= g(f(a) \diamond f(b)) \\ &= g(f(a)) \oplus g(f(b)) \\ &= (g \circ f)(a) \oplus (g \circ f)(b) \end{aligned}$$

(2) $g \circ f$ est inversible d'inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Puissances d'éléments de groupes

Définition (par récurrence).

$a \in G, n \in \mathbb{N}$

- (1) $a^0 := e_G$
- (2) $a^n = a * a^{n-1}, \forall n \geq 1$

Exemple.

•

$$\begin{aligned} a^4 &= a * a^3 \\ &= a * a * a^2 \\ &= a * a * a * a^1 \\ &= a * a * a * a * a^0 \\ &= a * a * a * a * e \\ &= a * a * a * a \end{aligned}$$

- Dans $(\mathbb{Z}, +)$, $2^3 = 3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. par récurrence sur n .

(1) $n = 0$:

$$\begin{aligned} a^{0+m} &= a^m \\ &= e * a^m \\ &= a^0 * a^m \end{aligned}$$

(2) supposons que $a^{n+m} = a^n * a^m$ pour un $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} a^{(n+1)+m} &= a^{n+m+1} \\ &= a * a^{n+m} \\ \text{hyp rec} &= a * (a^n * a^m) \\ &= (a * a^n) * a^m \\ &= a^{n+1} * a^m \end{aligned}$$

□

Définition. Pour $n \in \mathbb{Z}$.

Si $n \geq 0$, on a déjà défini a^n .

Si $n < 0$, on définit $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

Exemple. $a^{-3} = (a^{-1})^3 = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1}$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Proposition. $(a^n)^m = a^{nm}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. Vraie aussi pour $m, n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. par récurrence sur m .

(1) $m = 0$:

$$\begin{aligned} (a^n)^0 &= e \\ a^{n \cdot 0} &= a^0 = e \end{aligned}$$

(2) supposons que $(a^n)^m = a^{nm}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (a^n)^{m+1} &= (a^n)(a^n)^m \\ \text{hyp rec} &= (a^n)a^{nm} \\ &= a^{n+nm} \\ &= a^{n(m+1)} \end{aligned}$$

□

Cours 7

Rappel.

- Isomorphisme : $f : G \rightarrow H$ t.q.

- (1) $f(ab) = f(a)f(b)$
avec $a * b$ et $f(a) \diamond f(b)$ implicitement.
- (2) f est bijective
“même table”

- f, g isomorphismes $\Rightarrow f^{-1}, g \circ f$ isomorphismes.
 $1_G : G \rightarrow G$ est trivialement un isomorphisme.
- G est isomorphe à H s'il existe un isomorphisme $f : G \rightarrow H$.
- Puissances :
Soit $a \in G$ avec G un groupe.

- $a^0 = e$
- $a^{n+1} = aa^n$
- $a^{-n} = (a^{-1})^n$
- $a^{n+m} = a^n a^m$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

- f isomorphisme
 - $f(e_G) = e_H$
 - $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Proposition. f isomorphisme $f : G \rightarrow H$.

$a \in G$. Alors, $f(a^n) = f(a)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. par récurrence sur n .

$n \geq 0$ (1) $n = 0$

$$\begin{aligned} f(a^0) &= f(e_G) \\ &= e_H \\ &= f(a)^0 \end{aligned}$$

(2) supposons que $f(a^n) = f(a)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(a^{n+1}) &= f(a \cdot a^n) \\ &= f(a)f(a^n) \\ &\stackrel{\text{hyp rec}}{=} f(a)f(a)^n \\ &= f(a)^{n+1} \end{aligned}$$

$n < 0$ alors, $-n > 0$ et

$$\begin{aligned} f(a^n) &= f((a^{-1})^{-n}) \\ &= f(a^{-1})^{-n} \\ &= (f(a)^{-1})^{-n} \\ &= f(a)^n \end{aligned}$$

□

Exemple. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, avec la multiplication de matrices.

Soient $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

(A) : associatif, car la multiplication de matrices est associative.

(N) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ est neutre

(I) : l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, H est un groupe pour la multiplication matricielle.

$f : \mathbb{R} \rightarrow H$
On définit $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1) \quad f(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y)$$

(2) montrons que. f est bijective.

- f est injective

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

Supposons $f(x) = f(y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = y$$

- f est surjective

Soit $Y = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, avec $y \in \mathbb{R}$.

$Y = f(y)$.

□

Sous-groupes

Définition. $H \subseteq G$ est un *sous-groupe* de G si H est un groupe pour la même opération que G .

Exemple.

- $\{e\} \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $G \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = 2\mathbb{Z} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$
- Dans $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ est un sous-groupe.

+	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Ce groupe est isomorphe à \mathbb{Z}_2 et à $C_2 = (\{-1, 1\}, \times)$.

- $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +) \subseteq (\mathbb{R}, +)$.
- $C_2 \subseteq \mathbb{Q}_* \subseteq \mathbb{R}_*$.
- $\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$.
- $\{\varepsilon, \alpha\}$ et $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$ sont des sous-groupes de \mathbb{D}_3 .

Notation. On note l'ensemble $m\mathbb{Z} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Cours 8

Rappel.

- $a \in G$.
 - $a^n = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}$
 - $a^n = a * a^{n-1}$
 - $a^0 = e$
 - $a^{-n} = (a^{-1})^n$

- Sous-groupe de $(G, *) : H \subseteq G$ qui est un groupe pour $*$.

Exemple. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ pour $+$.

Exemple.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

Proposition. $H \subseteq G$ un sous-groupe.

- (1) Si G est abélien, alors H est abélien ;
- (2) Le neutre de H est le neutre de G ;
- (3) Si $a \in H$, son inverse $a^{-1} \in H$ est l'inverse de a dans G .

Démonstration.

- (1) G est abélien, alors $\forall a, b \in G, ab = ba$.

En particulier, $\forall a, b \in H, ab = ba$.

- (2) Le neutre de G e_G a la propriété que $\forall a \in G, e_G a = a = a e_G$.

Comme $H \subseteq G$, cette propriété est vraie pour H aussi.

Donc, $a e_G = a = e_G a$.

Ainsi, e_G est le neutre de H , par l'unicité de l'élément neutre.

- (3) $a \in H$, il existe un inverse $b \in G$ pour a t.q. $ab = ba = e$.

Comme H est un groupe, $\exists! a^{-1} \in H$.

De $ab = e$, on a $a^{-1}ab = a^{-1}e$, donc $b = a^{-1}$.

□

Théorème.

Un sous-ensemble non-vide $H \subseteq G$ est un sous-groupe si, et seulement si, pour tous $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons que H est un sous-groupe, donc $a, b \in H$, alors $b^{-1} \in H$.

De plus, H est fermé pour la multiplication, donc $ab^{-1} \in H$.

(\Leftarrow) (N) H est non-vide, donc $\exists a \in H$.

Par hypothèse, $aa^{-1} = e \in H$.

(I) On vient de montrer que $e \in H$.

Soit $b \in H$ quelconque. Par hypothèse, $eb^{-1} = b^{-1} \in H$.

(A) On sait que $\forall a, b, c \in G, (ab)c = a(bc)$.

En particulier, $\forall a, b, c \in H, (ab)c = a(bc)$.

Finalement, H est fermé pour l'opération de G , car $\forall a, b \in H, b^{-1} \in H$.

Donc, par hypothèse, $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$.

□

Exemple.

Soit $m \in \mathbb{Z}$.

Posons $H = m\mathbb{Z} = \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$, muni de l'addition.

montrons que. H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

H est non-vide, car $m0 = 0 \in H$.

Soient $a, b \in H$.

Par définition de H , $\exists a', b' \in \mathbb{Z}$ t.q. $a = ma'$ et $b = mb'$.

Dans \mathbb{Z} , $b^{-1} = -mb'$.

On a $a + (-b) = ma' + (-mb') = m(a' - b') \in H$.

Donc, H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

□

Réciproquement, soit $H \subseteq \mathbb{Z}$ un sous-groupe de \mathbb{Z} quelconque. Alors $\exists m \in \mathbb{Z}$ t.q. $H = m\mathbb{Z}$.

Démonstration.

On sait que $0 \in H$.

Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$ et l'énoncé est vrai.

Sinon, H contient un autre élément $a \in H$, donc $-a \in H$.

En particulier, H contient au moins un entier positif.

Soit m le plus petit élément positif de H .

Soit $h \in H$ quelconque. On divise h par m , donc $h = qm + r$, où $q, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < m$.

Si $r = 0$, $h = qm \in m\mathbb{Z}$.

Sinon, comme $h \in H$ et $m \in H$, $h - qm \in H$, mais $h - qm = r$, donc $r \in H$.

Comme $0 < r < m$, il y a une contradiction à la définition de m .



Ainsi, $H \subseteq m\mathbb{Z}$. Mais clairement, $m\mathbb{Z} \subseteq H$, car $m \in H$ et $mn \in H$, donc $H = m\mathbb{Z}$.



Proposition.

Soit $f : G \rightarrow H$ un isomorphisme. Alors, $K \subseteq G$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $f(K)$ est un sous-groupe de H .

Notation. $f(K) = \{f(k) \mid k \in K\}$.

(\Rightarrow) Supposons que K est un sous-groupe de G .

On sait que $e \in K$, alors $f(e) = e \in f(K)$, donc $f(K)$ est non-vide.

Soient $a, b \in f(K)$. On veut montrer que $ab^{-1} \in f(K)$.

Alors, $a = f(k)$ et $b = f(k')$, avec $k, k' \in K$.

Donc, $ab^{-1} = f(k)f(k')^{-1} = f(k)f(k'^{-1}) = f(kk'^{-1})$.

Comme $kk'^{-1} \in K$, $ab^{-1} \in f(K)$.

(\Leftarrow) On effectue la même preuve avec f^{-1} qui est un isomorphisme en remarquant que $f^{-1}(f(k)) = k$.

Notation.

$G \xrightarrow{f} H$ avec f un isomorphisme est équivalent à $G \xrightarrow{\sim} H$.

Notation.

$H \subseteq G$ un sous-groupe est équivalent à $H \leqslant G$.

Proposition.

Soit $\{H_i\}_{i \in I}$ une collection de sous-groupes de G . Alors $\bigcap_{i \in I} H_i \leqslant G$.

Démonstration.

$H_i \leqslant G, \forall i \in I$.

Alors, $e \in H_i, \forall i$. Donc, $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$. En particulier, $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$.

Soient $a, b \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Alors, $a, b \in H_i, \forall i$.

Comme $H_i \leqslant G$, $ab^{-1} \in H_i, \forall i$, donc $ab^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$.



Remarque. Si $H_1, H_2 \leqslant G$, $H_1 \cup H_2$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de G .

Exemple. $2\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de \mathbb{Z} .

Plus précisément, $2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, mais $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

Exemple. $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$.

Chapitre 2 Applications et équivalences

Section 2.4 Relations d'équivalence

Définition. Une *relation d'équivalence* sur un ensemble E est un sous-ensemble $R \subseteq E \times E$ satisfaisant

(1) réflexivité

$$x \sim x, \forall x \in E.$$

(2) symétrie

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x.$$

(3) transitivité

$$x \sim y \text{ et } y \sim z, \text{ alors } x \sim z.$$

Notation. On note $x \sim y$ si, et seulement si, $(x, y) \in R$.

Exemple.

(1) $E = \mathbb{R}$

$$x \sim y \text{ si, et seulement si, } |x| = |y|$$

$$(\text{refl}) \quad |x| = |x|, \text{ donc } x \sim x.$$

$$(\text{sym}) \quad \text{Supposons } x \sim y. \text{ Alors, } |x| = |y|. \text{ Donc, } y \sim x.$$

$$(\text{trans}) \quad \text{Supposons } x \sim y \text{ et } y \sim z. \text{ Alors, } |x| = |y| \text{ et } |y| = |z|. \text{ Donc } |x| = |z|. \text{ Ainsi, } x \sim z.$$

(2) C est l'ensemble des élèves dans la classe.

$$x \sim y \text{ si, et seulement si, } x \text{ et } y \text{ ont le même âge est une relation d'équivalence.}$$

Définition. Si E est un ensemble et \sim est une relation d'équivalence sur E , la *classe d'équivalence* de $x \in E$ est $\bar{x} = \{y \in E \mid y \sim x\} \subseteq E$.

Lemme. $\bar{x} = \bar{y}$ si, et seulement si, $x \sim y$.

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons $\bar{x} = \bar{y}$.

Par (refl), $x \sim x$, donc $x \in \bar{x}$. Alors, $x \in \bar{y}$. Ainsi, $x \sim y$.

(\Leftarrow) Supposons $x \sim y$.

(\subseteq) Soit $z \in \bar{x}$. Alors $z \sim x$. Comme $x \sim y$, par (trans), $z \sim y$. Donc, $z \in \bar{y}$.

(\supseteq) Soit $z \in \bar{y}$. Alors, $z \sim y$ et, par (sym), $y \sim z$. Comme $x \sim y$, par (trans), $x \sim z$ et, par (sym), $z \sim x$. Donc, $z \in \bar{x}$.

Ainsi, $\bar{x} = \bar{y}$.

□

Cours 9

Rappel.

- $H \leqslant G$, H un sous-groupe de G , si, et seulement si,
 - $H \neq \emptyset$;
 - $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$.

- Si $H \leq G$, H a le même neutre que G , mêmes inverses.
- G abélien $\Rightarrow H \leq G$ abélien.
- Si $f : G \rightarrow H$ isomorphisme, alors $K \leq G \Leftrightarrow f(K) \leq H$.
- Relations d'équivalence \sim sur E :
 - (Refl) $a \sim a, \forall a \in E$;
 - (Sym) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$;
 - (Trans) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$.
- Classe d'équivalence : $\bar{a} = \{b \in E \mid b \sim a\}$.
- $a \sim b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$.

Équivalence modulo m :

$a \sim b$ si, et seulement si, $a - b = km$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Notation. $m \mid a - b$, m divise $a - b$: $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = km$.

$$a \sim b \Leftrightarrow m \mid a - b.$$

Démonstration. que c'est bel et bien une équivalence

(Refl) Soit $a \in \mathbb{Z}$.

$$a - a = 0m \Rightarrow a \sim a.$$

(Sym) Supposons que $a \sim b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Alors, } a - b = km, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Or, } -(a - b) = -km \Rightarrow b - a = (-k)m, \text{ donc } b \sim a.$$

(Trans) Supposons que $a \sim b$ et $b \sim c$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Alors, } a - b = k_1m \text{ et } b - c = k_2m, \text{ avec } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

En additionnant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} a - c &= k_1m + k_2m \\ &= (k_1 + k_2)m \end{aligned}$$

Donc, $a \sim c$.

□

Si $m = 2$, les classes d'équivalence sont

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 0\} & \bar{1} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 1\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 0 = 2k\} & &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 1 = 2k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k\} & &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k + 1\} \\ &= 2\mathbb{Z} & &= \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Remarque.

$$\bar{0} = \bar{2} = \bar{4} = \bar{-2} = \dots$$

$$\bar{1} = \bar{3} = \bar{5} = \bar{-1} = \dots$$

Plus généralement, pour $m\mathbb{Z}$, on a m classes d'équivalence.

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m-1}$$

Notation. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m-1}\}$ pour la relation de congruence modulo m .

Définition. Une *partition* d'un ensemble E est une collection $\mathcal{P} = \{E_i\}$, avec $i \in I$ de sous-ensembles de E t.q.

$$(1) \bigcup_{i \in I} E_i = E;$$

$$(2) E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j.$$

Remarque. Chaque $x \in E$ est élément d'exactement un E_i .

Proposition. Si \sim est une relation d'équivalence sur E , alors $\mathcal{P} = \{\bar{a} \mid a \in E\}$ est une partition de E .

Exemple. $E = \mathbb{Z}$, \sim équivalence modulo 3.

$\mathcal{P} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ est une partition de \mathbb{Z} .

Démonstration.

(1) Clairement, $\bigcup_{a \in E} \bar{a} \subseteq E$.

On veut montrer que $E \subseteq \bigcup_{a \in E} \bar{a}$.

Soit $x \in E$, alors $x \sim x$ par réflexivité, donc $x \in \bar{x}$ et $x \in \bigcup_{a \in E} \bar{a}$.

(2) Supposons que $x \in \bar{a}$ et $x \in \bar{b}$, avec $\bar{a} \neq \bar{b}$.

Alors, $x \sim a$ et $x \sim b$. Donc, par symétrie, $a \sim x$ et $x \sim b$. Donc, par transitivité, $a \sim b$. Donc $\bar{a} = \bar{b}$. Ceci est une contradiction, donc $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset, \forall \bar{a} \neq \bar{b} \in \mathcal{P}$.

□

On définit une opération sur \mathbb{Z}_m pour la congruence modulo m .

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m &\rightarrow \mathbb{Z}_m \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\mapsto \bar{a+b} \end{aligned}$$

Autrement dit, $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$.

Remarque. L'écriture d'un élément \bar{a} n'est pas unique ($\bar{a} = \bar{a'}$ si $a \sim a'$).

Il faut vérifier que l'opération $+$ est correctement définie (définie sans ambiguïté).

Autrement dit, si $\bar{a} = \bar{a'}$ et $\bar{b} = \bar{b'}$, on veut montrer que $\bar{a} + \bar{b} = \bar{a'} + \bar{b'}$.

Cours 10

Rappel.

- Relation d'équivalence (\sim) \rightarrow partition en classes d'équivalence ($\bar{a} = \{b \mid b \sim a\}$).
- Équivalence (congruence) mod m (sur \mathbb{Z}) :

$$\begin{aligned} a \sim b &\Leftrightarrow m \mid a - b \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } a - b = km \end{aligned}$$

On note l'ensemble des classes d'équivalence mod m par $\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{m-1}\}$.

On veut définir une opération $+$ sur \mathbb{Z}_m par $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$.

On doit vérifier que cette définition n'est pas ambiguë (ne dépend pas des représentants).

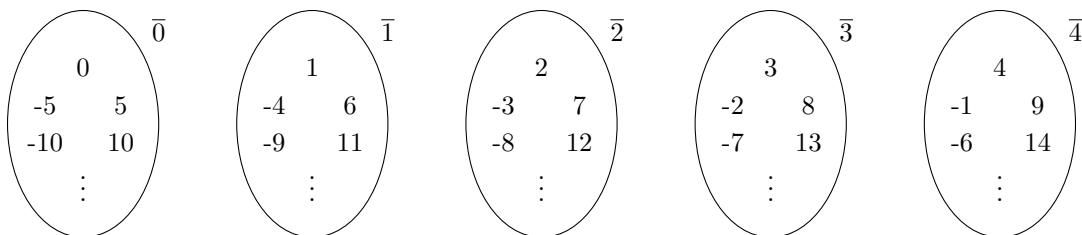
Supposons $\bar{a} = \bar{a'}$ et $\bar{b} = \bar{b'}$. On doit vérifier que $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$, c'est-à-dire que $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.

Les hypothèses donnent : $a_1 - a_2 = k_a m$ et $b_1 - b_2 = k_b m$. En additionnant ces deux équations, on obtient $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = k_a m + k_b m$. Alors, $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (k_a + k_b)m$. Donc, $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.

□

Remarque. On doit faire ce genre de preuve pour chaque définition de fonction/opération qui ont comme domaine des classes d'équivalence.

Exemple. $m = 5$.



Pour faire $\bar{2} + \bar{1}$, on peut prendre $\overline{2+1} = \bar{2}$, ou bien $\overline{17 + (-4)} = \bar{13}$.

Proposition. $(\mathbb{Z}_m, +)$ est un groupe abélien.

Démonstration.

(A) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$.

$$\begin{aligned} (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \overline{\bar{a} + \bar{b}} + \bar{c} \\ &= \overline{(\bar{a} + \bar{b}) + c} \\ &= \overline{\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})} \\ &= \overline{\bar{a}} + \overline{\bar{b} + \bar{c}} \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \end{aligned}$$

(C) $\bar{a} + \bar{b} = \overline{\bar{a} + \bar{b}} = \overline{\bar{b} + \bar{a}} = \bar{b} + \bar{a}$.

(N) $\bar{0} + \bar{a} = \overline{\bar{0} + \bar{a}} = \bar{a}$, donc $\bar{0}$ est neutre. Par commutativité, la propriété est satisfaite.

(I) $\bar{a} + \overline{-\bar{a}} = \overline{\bar{a} - \bar{a}} = \bar{0}$, donc $\overline{-\bar{a}}$ est l'inverse de \bar{a} . Par commutativité, la propriété est satisfaite.

On peut donc écrire $-\bar{a} = \overline{-a}$.

□

Ordre et groupes cycliques

Définition. Soient G un groupe et $a \in G$.

L'*ordre* de a , noté $o(a)$ est la plus petite quantité positive $k \in \mathbb{N}_*$ t.q. $a^k = e$, si elle existe. Sinon, on note $o(a) = \infty$.

Exemple.

- $o(e) = 1$
- Dans \mathbb{D}_3
 - $o(\alpha) = 2$
 - $o(\rho) = 3$
- Dans \mathbb{Z}
 - $o(0) = 1$
 - $o(n) = \infty, \forall n \neq 0$
- Dans \mathbb{Z}_6
 - $o(\bar{2}) = 3$

Proposition. Soit $m \in \mathbb{Z}$. $a^m = e$, si, et seulement si, $o(a) \mid m$.

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons $a^m = e$.

On divise m par $o(a)$: $m = q \cdot o(a) + r$, avec $0 \leq r < o(a)$.

Si $r = 0$, $o(a) \mid m$ et on a terminé.

Supposons que $0 < r < o(a)$, alors

$$\begin{aligned} r &= m - q \cdot o(a) \\ a^r &= a^{m-q \cdot o(a)} \\ &= a^m \cdot a^{-q \cdot o(a)} \\ &= e \cdot (a^{o(a)})^{-q} \\ &= e \cdot e^{-q} \\ &= e \end{aligned}$$

mais $0 < r < o(a)$ contredit la minimalité de $o(a)$.

□

Cours 11

Rappel.

- $a \sim b \Leftrightarrow m \mid a - b$ est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .
- $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ sont les classes d'équivalence.
- $(\mathbb{Z}_m, +)$ est un groupe, où $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.
- $o(a) = \min\{k \in \mathbb{N}_* \mid a^k = e\}$ ordre de a . Si $a^k \neq e$, $\forall k > 0$, $o(a) = \infty$.
- Si $a^k = e$, $o(a) \mid k$.

Exemple.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & M^4 &= -M \\ M^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & M^5 &= - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & M^6 &= \left(- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ & & &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $o(M) = 6$, puisque $M^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Chapitre 6 Groupes (suite)

Section 6.13 Groupes symétriques S_n

Rappel. $S(E) = \{f : E \rightarrow E \mid f \text{ est bijective}\}$.

$S(E)$ est un groupe lorsque muni de l'opération \circ .

1_E est l'élément neutre.

f^{-1} est l'élément inverse de f .

$S(E)$ s'appelle le *groupe symétrique* de l'ensemble E .

Remarque.

$E = \{\text{rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo, violet}\}$.

$$S(E) \ni f : \begin{cases} \text{rouge} & \mapsto \text{jaune} \\ \text{jaune} & \mapsto \text{rouge} \\ \text{autres} & \mapsto \text{elles-mêmes} \end{cases}.$$

Le groupe $S(E)$ est isomorphe au groupe $S(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\})$, en numérotant les éléments.

Définition. $S_n = S(\{1, 2, \dots, n\})$ le groupe symétrique de n éléments.

Les éléments de S_n sont des bijections, aussi appelées permutations.

Notation. On note une permutation σ de la manière suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 3 \end{array}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

L'élément neutre est $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{D}_3.$$

Remarque. Tous les élément de S_3 donnent des isométries du triangle, mais pas tous les éléments de S_4 donnent des isométries du carré.

Proposition. S_n contient $n!$ éléments.

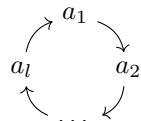
idée.

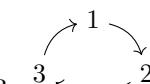
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n \text{ choix} & n-1 \text{ choix} & n-2 \text{ choix} & \cdots & 1 \text{ choix} & & \end{array}$$

Ainsi, $n(n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$.

#

Définition. Un *cycle* est une permutation de la forme $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_l \rightarrow a_1$, où $a_i \neq a_j$ quand $i \neq j$.



Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur $l = 3$. 

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur $l = 3$.

Notation. Écriture raccourcie pour un cycle : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 4 \ 5) \in S_5$.

Proposition. L'ordre d'un cycle est égal à sa longueur.

Démonstration.

Si le cycle σ permute les éléments a_i comme $\sigma = a_1 \xrightarrow{\sigma} a_2 \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} a_l \xrightarrow{\sigma} a_1$.
Alors, calculons σ^l

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_l \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_l & a_1 & a_2 & \cdots & a_{l-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\sigma^l = e$.

□

Exemple. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas un cycle.

Cependant, σ se décompose en cycles $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$, où $\sigma_1 = (1 \ 2)$, $\sigma_2 = (3 \ 4)$.

Proposition. Toute permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit de manière unique comme une composition de cycles disjoints. (les cycles sont uniques, mais pas l'ordre de l'écriture).

Notation. Des cycles disjoints sont des cycles de supports disjoints, où le support d'un cycle est $\text{supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$.

Lemme. Les cycles disjoints commutent entre eux.

Exemple.

$$(1 \ 4 \ 5) \circ (2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ 3) \circ (1 \ 4 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Soient $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l)$ et $\eta = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_k)$ deux cycles disjoints.

Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Il y a trois cas :

(1) $i \in \text{supp}(\sigma), i \notin \text{supp}(\eta)$.

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta(i) &= \sigma(i) \\ \eta \circ \sigma(i) &= \sigma(i)\end{aligned}$$

(2) $i \notin \text{supp}(\sigma), i \in \text{supp}(\eta)$.

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta(i) &= \eta(i) \\ \eta \circ \sigma(i) &= \eta(i)\end{aligned}$$

(3) $i \notin \text{supp}(\sigma), i \notin \text{supp}(\eta)$.

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta(i) &= i \\ \eta \circ \sigma(i) &= i\end{aligned}$$

□

idée de la démonstration. Par récurrence.

$n = 2, (1 \ 2)$.

Si vrai pour toutes les permutations de longueur $\leq n$.

σ permutation de $n + 1$ éléments.

On prend $i \in \text{supp}(\sigma)$.

$$\underbrace{i \rightarrow \sigma(i) \rightarrow \sigma^2(i) \rightarrow \sigma^3(i) \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma^n(i)}_{n+1 \text{ éléments de } \{1, 2, \dots, n\}}$$

ces éléments ne peuvent pas tous être distincts.

$\exists m_1 > m_2$ t.q. $\sigma^{m_1}(i) = \sigma^{m_2}(i)$, donc $\sigma^{m_1-m_2}(i) = i$.

Alors, $i \rightarrow \sigma(i) \rightarrow \sigma^2(i) \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma^{m_1-m_2-1}(i) \rightarrow i$ est un cycle.

Les éléments restants $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{m_1-m_2-1}(i)\}$ sont permutés entre eux par σ .

Utiliser l'hypothèse de récurrence.

#

Exemple.

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 6) (3 \ 4 \ 5 \ 7)$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 8 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 8 \ 6) (2 \ 7 \ 5 \ 3)$$

Proposition. L'ordre d'une permutation σ est le ppcm des longueurs des cycles dans sa décomposition.

Démonstration. $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_k$, où σ_i sont des cycles de longueur l_i .

Puisque les cycles disjoints commutent, $\sigma^m = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k)^m = \sigma_1^m \sigma_2^m \cdots \sigma_k^m$.

$\sigma_1^m \sigma_2^m \cdots \sigma_k^m = e$, si, et seulement si, $\sigma_1^m = e, \sigma_2^m = e, \dots, \sigma_k^m = e$.

Alors, $o(\sigma_1) \mid m, o(\sigma_2) \mid m, \dots, o(\sigma_k) \mid m$.

Donc, $l_i \mid m, \forall i$.

L'ordre de σ m est le plus petit multiple des l_i .

□

Cours 12

Rappel.

- $S_n = S(\{1, 2, \dots, n\}) = \{\sigma \mid \sigma \text{ est une bijection de } \{1, 2, \dots, n\}\}$ est un groupe pour \circ .

- Notations : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Cycle : $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l)$

- $o(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l) = l$

- Toute permutation de S_n s'écrit comme un produit (composition) de cycles disjoints uniques

- Les cycles disjoints commutent
- Si $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ est la décomposition, $o(\sigma) = \text{ppcm}(l_1, \dots, l_k)$, où l_k est la longueur de σ_k

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1 \ 2) \circ (3 \ 5) \circ (6 \ 7 \ 8)$$

$$o(\sigma) = \text{ppcm}(2, 2, 3) = 6.$$

$$\sigma^2 = (1 \ 2)^2 \circ (3 \ 5)^2 \circ (6 \ 7 \ 8)^2 = (6 \ 7 \ 8)^2 = (6 \ 8 \ 7)$$

Définition. Le *signe* d'une permutation $\sigma \in S_n$ est le nombre

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma) &= \left(\frac{3 \rightarrow 4}{1 \rightarrow 2} \right) \left(\frac{3 \rightarrow 1^{-1}}{1 \rightarrow 3} \right) \left(\frac{3 \rightarrow 2^{-1}}{1 \rightarrow 4} \right) \left(\frac{4 \rightarrow 1^{-1}}{2 \rightarrow 3} \right) \left(\frac{4 \rightarrow 2^{-1}}{2 \rightarrow 4} \right) \left(\frac{1 \rightarrow 2}{3 \rightarrow 4} \right) \\ &= (-1)^4 = 1 \end{aligned}$$

Remarque. Chaque terme $(i - j)$ apparaît au dénominateur et au numérateur, à signe près, donc $\text{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Proposition. Soient $\alpha, \beta \in S_n$, alors $\text{sgn}(\alpha \circ \beta) = \text{sgn}(\alpha) \cdot \text{sgn}(\beta)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\alpha \circ \beta) &= \prod_{i < j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j} \\ &= \prod_{i < j} \left(\frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j} \right) \left(\frac{\beta(i) - \beta(j)}{\beta(i) - \beta(j)} \right) \\ &= \prod_{i < j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\beta(i) - \beta(j)}{i - j} \\ &= \left(\prod_{i < j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)} \right) \cdot \text{sgn}(\beta) \\ &= \text{sgn}(\alpha) \cdot \text{sgn}(\beta) \end{aligned}$$

□

Définition. Un cycle longueur 2 s'appelle une *transposition*.

Remarque. On peut décomposer un cycle en un produit de transposition :

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l) = (a_1 \ a_l) \circ (a_1 \ a_{l-1}) \circ \cdots \circ (a_1 \ a_2)$$

Exemple.

$$\sigma = (2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8)$$

$$(2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) (2) = 3 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) (3) &= (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) (2) \\ &= 5 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3)(5) = (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5)(5) \\
 &= (2 & 8) \circ (2 & 6)(2) \\
 &= 6
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3)(6) = (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5)(6) \\
 &= (2 & 8) \circ (2 & 6)(6) \\
 &= (2 & 8)(2) \\
 &= 8
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3)(8) = (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5)(8) \\
 &= (2 & 8) \circ (2 & 6)(8) \\
 &= (2 & 8)(8) \\
 &= 2
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$(2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3) = (2 & 3 & 5 & 6 & 8)$$

Alors, $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}((2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3)) = (-1)^4 = 1$.

Proposition. Le signe d'une transposition est -1 .

Démonstration. par exemple

$$(2 & 4) \in S_4.$$

$$\begin{aligned}
 \text{sgn}(\sigma) &= \left(\frac{1 \cancel{<} 4}{\cancel{1} \cancel{<} 2} \right) \left(\frac{\cancel{1} \cancel{<} 3}{\cancel{1} \cancel{<} 3} \right) \left(\frac{\cancel{1} \cancel{<} 2}{\cancel{1} \cancel{<} 4} \right) \left(\frac{\cancel{4} \cancel{<} 3^{-1}}{\cancel{2} \cancel{<} 3} \right) \left(\frac{\cancel{4} \cancel{<} 2^{-1}}{\cancel{2} \cancel{<} 4} \right) \left(\frac{\cancel{3} \cancel{<} 2^{-1}}{\cancel{3} \cancel{<} 4} \right) \\
 &= (-1)^3 = -1
 \end{aligned}$$

#

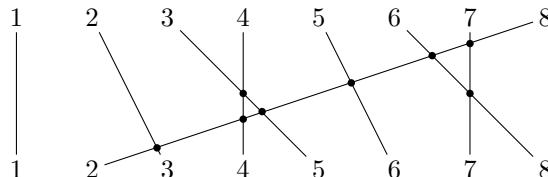
Proposition. Le signe d'un cycle de longueur l est

- 1 si l est impair
- -1 si l est pair

Plus généralement, le signe d'une permutation σ est $(-1)^\gamma$, où γ est le nombre de transpositions dans une décomposition de σ en transpositions.

Remarque. Une autre façon de calculer le signe d'une permutation.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$



Connecter chaque élément, compter les intersections des segments, $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^\gamma$, où γ est le nombre d'intersections. Ici, $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^8 = 1$.

Chapitre 8 Homomorphismes

Cours 13

Définition. Soient G, H deux groupes et $f : G \rightarrow H$.

On dit que f est un *homomorphisme* (ou morphisme de groupes) si $f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in G$.

Exemple.

- (1) Tous les isomorphismes sont des morphismes.
- (2) $f : G \rightarrow H$, $a \mapsto e_H$ est toujours un homomorphisme.
En effet, $f(ab) = e_H = e_H e_H = f(a)f(b)$.
 f n'est pas un isomorphisme, sauf si $G = H = \{e\}$.
- (3) $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\} = C_2$.
 $\text{sgn}(\alpha \circ \beta) = \text{sgn}(\alpha) \cdot \text{sgn}(\beta)$, donc sgn est un homomorphisme.
- (4) $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_*$ est un homomorphisme, car $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- (5) Pour un $m \in \mathbb{Z}$ fixé, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = m \cdot n$ est un homomorphisme.
En effet, $f(n_1 + n_2) = m(n_1 + n_2) = mn_1 + mn_2 = f(n_1) + f(n_2)$.
- (6) Si $H \leqslant G$, $i : H \rightarrow G$, $i(x) = x$ est un homomorphisme.
Ce n'est pas l'identité, car $H \neq G$ en général.

Proposition.

Si $f : G \rightarrow H$ est un homomorphisme, alors

- (1) $f(e_G) = e_H$
- (2) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Démonstration.

(1)

$$\begin{aligned} f(e_G) &= f(e_G e_G) \\ &= f(e_G) f(e_G) \\ f(e_G)^{-1} f(e_G) &= f(e_G)^{-1} f(e_G) f(e_G) \\ &= e_H f(e_G) \\ &= f(e_G) \end{aligned}$$

(2) $f(a^{-1}) f(a) = f(a^{-1} a) = f(e_G) = e_H$, donc $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

□

Proposition.

La composition de deux homomorphismes est un homomorphisme.

Démonstration.

Soient $f : G \rightarrow H$ et $g : H \rightarrow K$ deux homomorphismes, et $a, b \in G$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(ab) &= g(f(ab)) \\ &= g(f(a)f(b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(f(a))g(f(b)) \\
&= (g \circ f)(a)(g \circ f)(b)
\end{aligned}$$

□

Proposition. Soit $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme. Alors,

- (1) $\text{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in G\}$ est un sous-groupe de H ;
- (2) le noyau $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$ est un sous-groupe de G .

Exemple.

$$(a) \text{ Im}(\det) = \mathbb{R}_*, \det \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = x$$

$$\ker(\det) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\} = SL(n, \mathbb{R}).$$

$$(b) f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = mn.$$

$$\text{Im}(f) = m\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$$

$$\ker(f) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.

$$(1) f(e_G) \in \text{Im}(f), \text{ donc } \text{Im}(f) \neq \emptyset.$$

Si $a, b \in \text{Im}(f)$, alors $a = f(c)$ et $b = f(d)$.

On a alors

$$\begin{aligned}
ab^{-1} &= f(c)f(d)^{-1} \\
&= f(c)f(d^{-1}) \\
&= f(cd^{-1}) \in \text{Im}(f)
\end{aligned}$$

$$(2) f(e_G) = e_H \Rightarrow f(e_G) \in \ker(f) \Rightarrow \ker(f) \neq \emptyset.$$

Soient $a, b \in \ker(f)$. Alors, $f(a) = e_H$ et $f(b) = e_H$.

$$\begin{aligned}
f(ab^{-1}) &= f(a)f(b^{-1}) \\
&= f(a)f(b)^{-1} \\
&= e_H e_H^{-1} \\
&= e_H
\end{aligned}$$

donc $ab^{-1} \in \ker(f)$.

□

Exemple.

$$\text{Im}(\text{sgn}) = C_2 = \{-1, 1\}, \text{ si } n \geqslant 1.$$

$$\ker(\text{sgn}) = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\} \text{ est un sous-groupe de } S_n.$$

Notation. On note ce sous-groupe A_n et on l'appelle le *groupe alterné*.

Exemple. $n = 3$.

$$A_3 = \{e, (123), (132)\}.$$

Proposition.

Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme.

$\ker(f) = \{e\}$ si, et seulement si, f est injective.

Démonstration.

(\Leftarrow) Supposons que f est injective.

On sait que $e_G \in \ker(f)$.

Supposons que $\exists a \in \ker(f)$. On a

$$\begin{aligned} f(a) &= e_H && \text{par définition de } \ker \\ &= f(e_G) \\ a &= e_G && \text{car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

Donc, $\ker(f) = \{e_G\}$.

(\Rightarrow) Supposons que $\ker(f) = \{e_G\}$.

Soient $a, b \in G$ t.q. $f(a) = f(b)$.

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ f(a)f(b)^{-1} &= e_H \\ f(a)f(b^{-1}) &= e_H \\ f(ab^{-1}) &= e_H \\ ab^{-1} &= e_G \\ a &= b \end{aligned}$$

□

Remarque. $\text{Im}(f) = H$ si, et seulement si, f est surjective.

Cours 14

Rappel.

- homomorphisme : $f : G \rightarrow H$ t.q. $f(ab) = f(a)f(b)$
- Si f est un homomorphisme, alors
 - $f(e_G) = e_H$
 - $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
 - $f(a^n) = f(a)^n$
- $\text{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in G\} \leqslant H$
- $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e_H\} \leqslant G$
- $\ker(f) = \{e_G\} \Leftrightarrow f$ est injective

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}_m \\ n & \mapsto & \overline{n} \end{array} \text{ est un homomorphisme.}$$

En effet,

$$\begin{aligned} f(n_1 + n_2) &= \overline{n_1 + n_2} \\ &= \overline{n_1} + \overline{n_2} \\ &= f(n_1) + f(n_2) \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{Z}_m.$$

$$\ker(f) = m\mathbb{Z}.$$

Équivalence modulo H et théorème de Lagrange

G un groupe quelconque et $H \leqslant G$ un sous-groupe.

On définit une relation sur G par $a \sim b$ si, et seulement si, $ab^{-1} \in H$.

Cette relation est appelée *équivalence modulo H* .

Proposition.

\sim est une relation d'équivalence.

Démonstration.

(refl) Soit $a \in G$.

$$aa^{-1} = e_G \in H, \text{ puisque } H \leqslant G.$$

Alors, $a \sim a$.

(sym) Soient $a, b \in G$.

Supposons que $a \sim b$.

$$\text{Alors, } ab^{-1} \in H.$$

Comme H est un groupe, H est fermé pour la prise d'inverses, donc $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$.

Ainsi, $b \sim a$.

(trans) Soient $a, b, c \in G$.

Supposons que $a \sim b$ et $b \sim c$.

$$\text{Alors, } ab^{-1} \in H \text{ et } bc^{-1} \in H.$$

Comme H est un groupe, H est fermé pour son opération, donc $(ab^{-1})(bc^{-1}) = a(bb^{-1})c^{-1} = ac^{-1} \in H$.

Ainsi, $a \sim c$.

□

Le groupe G se partitionne en classes d'équivalence modulo H : $G = \overline{a_1} \cup \overline{a_2} \cup \dots$

Exemple.

$$G = \mathbb{Z}_8, H = \{\bar{0}, \bar{4}\}.$$

La classe de $\bar{0} \in G$ mod H est l'ensemble des $\bar{n} \in \mathbb{Z}_8$ t.q. $\bar{0} - \bar{n} \in H$.

Alors, $-\bar{n} \in \{\bar{0}, \bar{4}\}$, donc $\bar{n} = \bar{0}$ ou $\bar{n} = \bar{4}$.

$$C(\bar{0}) = \{\bar{0}, \bar{4}\}, C(\bar{1}) = \{\bar{1}, \bar{5}\}, C(\bar{2}) = \{\bar{2}, \bar{6}\}, C(\bar{3}) = \{\bar{3}, \bar{7}\}.$$

Lemme.

La classe modulo H de $a \in G$ est $\{ha \mid h \in H\}$.

Notation.

$\{ha \mid h \in H\}$ est noté Ha .

Démonstration.

Soient $a, b \in G$.

(\subseteq) Supposons que $b \sim a$ mod H , c'est-à-dire $b \in \bar{a}$.

Alors, $ba^{-1} \in H$, disons $ba^{-1} = h$ avec $h \in H$, donc $b = ha$.

$$\therefore \bar{a} \subseteq Ha.$$

(\supseteq) Supposons que $b \in Ha$.

Alors, $b = ha$ avec $h \in H$, donc $ba^{-1} = h \in H$. Ainsi, $b \sim a$, donc $b \in \bar{a}$.

$$\therefore Ha \subseteq \bar{a}.$$

Ainsi, $Ha = \bar{a}$.

□

Corollaire.

Toutes les classes d'équivalence modulo H ont le même nombre d'éléments.

Plus précisément, $|Ha| = |H|$.

Démonstration.

$$\begin{array}{ccc} f : H & \rightarrow & Ha \\ h & \mapsto & ha \end{array} \text{ est bijective, car elle est inversible d'inverse } \begin{array}{ccc} f^{-1} : Ha & \rightarrow & H \\ b & \mapsto & ba^{-1} \end{array} .$$

□

Cours 15

Rappel. Pour déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ d'un homomorphisme f .

Exemple. $f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_6$.
 $\bar{n} \mapsto \bar{n}$.

$$\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}.$$

Supposons que $\bar{n} \in \ker(f)$. Alors,

$$\begin{aligned} f(\bar{n}) &= \bar{0} \\ \bar{n} &= \bar{0} \\ n &= 6k \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc, $\ker(f) \subseteq 6\mathbb{Z}_{12}$.

Pour avoir $\ker(f) = 6\mathbb{Z}_{12}$, il faut aussi montrer $6\mathbb{Z}_{12} \subseteq \ker(f)$.

Supposons que $n = 6k \Rightarrow \bar{n} = \bar{6k} \Rightarrow f(\bar{n}) = f(\bar{6k}) = \bar{6k} = \bar{0}$, donc $\bar{n} \in \ker(f)$.

Rappel.

G groupe, $H \leqslant G$ sous-groupe.

- Équivalence mod H :
- $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$;
- Les classes d'équivalence mod H sont $\bar{a} = Ha = \{ha \mid h \in H\}$;
- Toutes les classes ont la même taille, $|Ha| = |H|$.

Exemple.

$G = S_3 = \{e, (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$, $H = \{e, (1 \ 2)\}$.
Calculons les classes mod H .

- $He = \{e \circ e, (1 \ 2) \circ e\} = H$;
- $H(1 \ 3) = \{e \circ (1 \ 3), (1 \ 2) \circ (1 \ 3)\} = \{(1 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$;
- $H(2 \ 3) = \{e \circ (2 \ 3), (1 \ 2) \circ (2 \ 3)\} = \{(2 \ 3), (1 \ 2 \ 3)\}$.

Théorème (Lagrange).

Soit G un groupe fini.

Si $H \leqslant G$, alors $|H| \mid |G|$.

Démonstration.

Les classes modulo H partitionnent G est sous-ensembles (classes) de taille $|H|$ chacun, donc

$$\begin{aligned} G &= Ha_1 \cup Ha_2 \cup \cdots \cup Ha_n \\ |G| &= |H| + |H| + \cdots + |H| \\ &= n|H| \end{aligned}$$

□

Corollaire. $a \in G$, $o(a) \mid |G|$.

Démonstration.

$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, le sous-groupe engendré par a , est un sous-groupe car

- $a^0 = e \in \langle a \rangle$, donc $\langle a \rangle \neq \emptyset$;
- Si $a^n, a^m \in \langle a \rangle$, alors $a^n(a^m)^{-1} = a^{n-m} \in \langle a \rangle$, donc $\langle a \rangle \leqslant G$.

Par le théorème de Lagrange, $|\langle a \rangle| \mid |G|$.

De plus, $|\langle a \rangle| = o(a)$, qu'on démontrera plus tard, donc $o(a) \mid |G|$. □

Corollaire. Si $|G| = m$ et $a \in G$, alors $a^m = e$.

Démonstration.

On sait que $a^{o(a)} = e$.

Par le corollaire précédent, $m = ko(a)$, car $o(a) \mid m$, donc $a^m = a^{ko(a)} = (a^{o(a)})^k = e^k = e$. □

Corollaire (petit théorème de Fermat). *Si $a \in \mathbb{Z}$ et p est un nombre premier t.q. $p \nmid a$, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Lemme. \mathbb{Z}_{p_*} est un groupe pour la multiplication.

Démonstration.

\mathbb{Z}_{p_*} est un groupe avec $|\mathbb{Z}_{p_*}| = p - 1$.

Par le corollaire précédent, si $a \in \mathbb{Z}_{p_*}$, alors $\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$, donc $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. \square

Notation. $|G|$ s'appelle aussi l'*ordre* de G .

Définition. $H \leq G$.

On appelle *indice* de H dans G le nombre de classes modulo H et on le note $[G : H]$.

Le théorème de Lagrange implique que si G est fini, $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$.

L'indice peut être fini même si G et H sont infinis.

Exemple. $[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m$.

Exemple. Les seuls sous-groupes de \mathbb{Z}_p avec p premier sont $\{\bar{0}\}$ et \mathbb{Z}_p , car si $H \leq \mathbb{Z}_p$. Par Lagrange, $|H| \in \{1, p\}$.

Exemple. $H \leq \mathbb{Z}_8$ qui contient au moins 5 éléments distincts, alors $H = \mathbb{Z}_8$, car les diviseurs de 8 sont $\{1, 2, 4, 8\}$.

Section 8.6 Groupes quotients

On veut définir une opération sur les classes d'équivalence mod H pour en faire un groupe.

Tentative

On voudrait définir $Ha * Hb = H(a * b)$. Est-ce défini sans ambiguïté?

Supposons que $Ha = Ha'$ et $Hb = Hb'$, c'est-à-dire $a(a')^{-1} \in H$ et $b(b')^{-1} \in H$. Alors, on voudrait montrer que $H(ab) = H(a'b') \Leftrightarrow (ab)(a'b') \in H \Leftrightarrow ab(b')^{-1}(a')^{-1} \in H$. Cependant, ce n'est pas vrai en général.

Définition.

Un sous-groupe $H \leq G$ est *distingué*, ou *normal*, si $\forall a \in G$, $Ha = aH$, c'est-à-dire, $\{ha \mid h \in H\} = \{ah \mid h \in H\}$.

Remarque.

$Ha = aH$ ne veut pas dire $ha = ah$ pour tout $h \in H$.

Plutôt, $Ha = aH$ signifie $ha = ah'$ pour un certain $h' \in H$.

Exemple.

Pour $G = S_3 = \{e, (1 2), (1 3), (2 3), (1 2 3), (1 3 2)\}$.

- Le sous-groupe $H = \{e, (1 2)\}$ n'est pas distingué. En effet, regardons la classe de $(1 3)$.

$$H(1 3) = \{(1 3), (1 3 2)\}$$

$$(1 3)H = \{(1 3) \circ e, (1 3) \circ (1 2)\} = \{(1 3), (1 2 3)\}$$

- Le sous-groupe $N = \{e, (1 2 3), (1 3 2)\}$ est distingué. En effet

$$Ne = \{e \circ e, (1 2 3) \circ e, (1 3 2) \circ e\} = \{e, (1 2 3), (1 3 2)\} = N$$

$$eN = \{e \circ e, e \circ (1 2 3), e \circ (1 3 2)\} = \{e, (1 2 3), (1 3 2)\} = N$$

$$N(1 2) = \{e \circ (1 2), (1 2 3) \circ (1 2), (1 3 2) \circ (1 2)\} = \{(1 2), (1 3), (2 3)\}$$

$$(1 2)N = \{(1 2) \circ e, (1 2) \circ (1 2 3), (1 2) \circ (1 3 2)\} = \{(1 2), (2 3), (1 3)\}$$

Proposition. Si $f : G \rightarrow H$ est un homomorphisme, $\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G .

Démonstration. $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$.

Soit $b \in G$. On veut montrer que $b \ker(f) = \ker(f)b$.

(\subseteq) Soit $ba \in b \ker(f)$.

$$ba = bab^{-1}b$$

posons $a' = bab^{-1}$

$$\begin{aligned} f(a') &= f(bab^{-1}) \\ &= f(b)f(a)f(b^{-1}) \\ &= f(b)ef(b^{-1}) \\ &= e \end{aligned}$$

donc $a' \in \ker(f) \Rightarrow ba = a'b \in \ker(f)b \Rightarrow b \ker(f) \subseteq \ker(f)b$.

(\supseteq) Soit $ab \in \ker(f)b$.

$$ab = bb^{-1}ab$$

posons $a' = b^{-1}ab$

$$\begin{aligned} f(a') &= f(b^{-1}ab) \\ &= f(b^{-1})f(a)f(b) \\ &= f(b^{-1})ef(b) \\ &= e \end{aligned}$$

donc $a' \in \ker(f) \Rightarrow ab = ba' \in b \ker(f) \Rightarrow \ker(f)b \subseteq b \ker(f)$.

□

Cours 16

Rappel.

- Classes d'équivalence à droite modulo H de $a \in G : Ha$
- Théorème de Lagrange : $|H| \mid |G|$
- Indice de H dans $G : [G : H]$ représente le nombre de classes
- Corollaires de Lagrange :
 - $o(a) \mid |G|$
 - $a^{|G|} = e$
 - petit théorème de Fermat : si $p \nmid a$, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, avec p un nombre premier
- Sous-groupe *normal* ou *distingué* : $Ha = aH$
- $\ker(f)$ est toujours distingué

Proposition.

$H \leqslant G$ est distingué si, et seulement si, pour tous $h \in H$ et $g \in G$, $ghg^{-1} \in H$.

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons que H est distingué.

Soient $h \in H$ et $g \in G$. On a $gh \in gH$. Mais alors, $gh \in Hg$, donc $gh = h'g$ avec $h' \in H$.

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= h'gg^{-1} \\ &= h' \in H \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Supposons que $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, \forall h \in H$.

On veut montrer que $gH = Hg, \forall g \in G$.

(\subseteq) Soit $gh \in gH$. On a

$$\begin{aligned} gh &= ghg^{-1}g \\ &= h'g \in Hg \end{aligned}$$

(\supseteq) Soit $hg \in Hg$. Alors

$$\begin{aligned} hg &= gg^{-1}hg \\ &= gh' \in gH \end{aligned}$$

□

Nouvelle tentative

Soit G un groupe. Soit N un sous-groupe normal de G .

On a G/N l'ensemble des classes mod N :

$$G/N = \{Na \mid a \in G\}$$

Proposition.

G/N est un groupe par l'opération $(Na)(Nb) = N(ab)$.

Démonstration.

Montrons que l'opération est définie sans ambiguïté.

Supposons que $Na = Na'$ et $Nb = Nb'$. Alors, $a(a')^{-1} \in N$ et $b(b')^{-1} \in N$.

$$\begin{aligned} ab(a'b')^{-1} &= ab(b')^{-1}(a')^{-1} \\ &= ab(b')^{-1}(a')^{-1}aa^{-1} \end{aligned}$$

On sait que $b(b')^{-1} \in N$.

De plus, $(a')^{-1}a \in N$, car $a(a')^{-1} \in N$ et N est normal, donc $a^{-1}(a(a')^{-1})a \in N$.

Comme N est fermé pour la multiplication, $b(b')^{-1}(a')^{-1}a \in N$ que nous noterons n .

On a donc

$$ab(a'b')^{-1} = ana^{-1} \in N$$

Ainsi, $N(ab) = N(a'b')$, donc l'opération est définie sans ambiguïté.

Maintenant, montrons que G/N est un groupe.

(A) Soient $Na, Nb, Nc \in G/N$.

$$\begin{aligned} (NaNb)Nc &= N(ab)Nc \\ &= N((ab)c) \\ &= N(a(bc)) \\ &= NaN(bc) \\ &= Na(NbNc) \end{aligned}$$

(N) On vérifie que $Ne = N$ est neutre.

$$\begin{aligned} NeNa &= N(ea) \\ &= Na \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NaNe &= N(ae) \\ &= Na \end{aligned}$$

(I) L'inverse de Na est Na^{-1}

$$\begin{aligned} NaNa^{-1} &= N(aa^{-1}) \\ &= N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Na^{-1}Na &= N(a^{-1}a) \\ &= N \end{aligned}$$

□

Notation. $N \trianglelefteq G$ représente N est un sous-groupe normal de G .

Proposition.

$p : G \rightarrow G/N$ est un homomorphisme.
 $a \mapsto Na$

Démonstration.

$$\begin{aligned} p(ab) &= N(ab) \\ &= NaNb \\ &= p(a)p(b) \end{aligned}$$

□

Cours 17

Rappel.

- $N \trianglelefteq G$ sous-groupe normal (ou distingué)
 - $\forall g \in G, gN = Ng$
 - $\forall g \in G, \forall n \in N, gng^{-1} \in N$
- $f : G \rightarrow H$ homomorphisme $\Rightarrow \ker(f) \trianglelefteq G$
- Groupe quotient : $G/N = \{Ng \mid g \in G\}$
 - opération : $NaNb = Nab$
 - neutre : N
 - inverse : $(Na)^{-1} = Na^{-1}$
- $p : G \rightarrow G/N$ est un homomorphisme avec $p(a) = Na$.

Notation. Effectuer ghg^{-1} s'appelle la *conjugaison* de h par g .

Remarque. $H \leqslant G$ et $g \in G$, alors $gHg^{-1} \leqslant G$.

Dans le cas d'un sous-groupe normal, le sous-groupe obtenu par la conjugaison reste le même sous-groupe.

Exemple.

- Dans \mathbb{D}_3 ¹
 - $\{\varepsilon, \alpha\}$
 - $\{\varepsilon, \beta\}$
 - $\{\varepsilon, \gamma\}$
- ne sont pas normaux.
- $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$
- est normal.

- Soient $G = \mathbb{D}_3$ et $N = \{\varepsilon, \rho, \sigma\}$.

Les classes à droites sont

- $N = N\varepsilon = \{\varepsilon, \rho, \sigma\}$
- $N\alpha = N\beta = N\gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Alors, $G/N = \{N, N\alpha\}$.

o		N	$ $	$N\alpha$
N		N	$ $	$N\alpha$
$N\alpha$		$N\alpha$	$ $	N

- Soient $G = \mathbb{Z}_{10}$ et $N = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

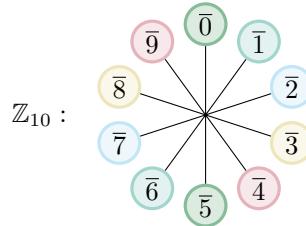
Les classes d'équivalence sont

- $N = N + \bar{0} = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

1. Pour la définition de \mathbb{D}_3 , voir p.10

- $N + \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{6}\}$
- $N + \bar{2} = \{\bar{2}, \bar{7}\}$
- $N + \bar{3} = \{\bar{3}, \bar{8}\}$
- $N + \bar{4} = \{\bar{4}, \bar{9}\}$

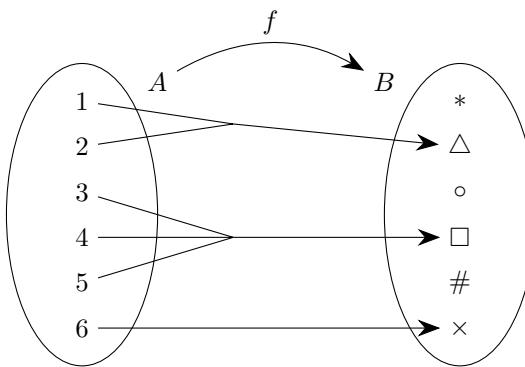
$$G/N = \{N, N + \bar{1}, N + \bar{2}, N + \bar{3}, N + \bar{4}\}.$$



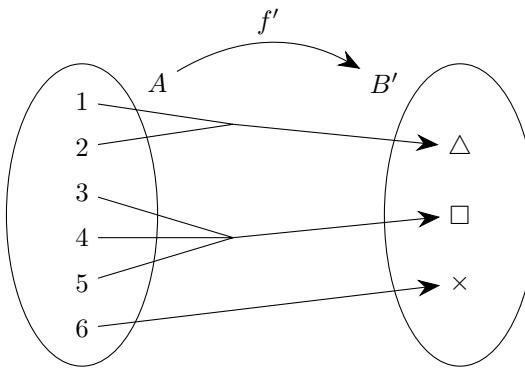
$$\mathbb{Z}_{10}/5\mathbb{Z}_{10} = \{\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare\}.$$

- Soient $G = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $N = \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$.
 $N \trianglelefteq G$.
 G/N est infini et l'opération sur G/N est : $(N + (x, y)) + (N + (x', y')) = N + (x + x', y + y')$.

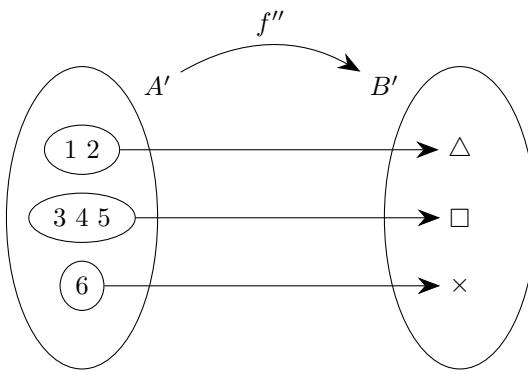
Motivation



f n'est ni injective ni surjective.



f' est surjective, mais elle n'est toujours pas injective.



f'' est injective et surjective, donc bijective.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ A' & \xrightarrow{f''} & B' \end{array}$$

où p représente une projection et i une inclusion. Donc, $f = i \circ f'' \circ p$, où i est injective, p est surjective et f'' est bijective.

Théorème (d'isomorphisme de Jordan).

Soit $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme de groupes. Posons $N = \ker(f) \trianglelefteq G$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ G/N & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im}(f) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} P : G & \rightarrow & g/N & i : \text{Im}(f) & \rightarrow & H \\ a & \mapsto & Na & h & \mapsto & h \end{array} \right).$$

Alors, il existe un unique homomorphisme $\bar{f} : G/N \rightarrow \text{Im}(f)$ t.q. $f = i \circ \bar{f} \circ p$. De plus, \bar{f} est un isomorphisme.

Exemple. $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_*$.

$N = \ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$ les matrices dont le déterminant vaut 1.

$\text{Im}(\det) = \mathbb{R}_*$.

Le théorème implique que $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}_*$.

Démonstration.

Unicité de \bar{f} .

Supposons que \bar{f} existe.

Soit \tilde{f} un autre homomorphisme t.q. $f = i \circ \tilde{f} \circ p$.

Alors, soit $Na \in G/N$. On a

$$\begin{aligned} f(a) &= (i \circ \tilde{f} \circ p)(a) \\ &= i(\tilde{f}(p(a))) \\ &= \tilde{f}(Na) \end{aligned}$$

De même, $f(a) = \bar{f}(a)$.

Donc, $\bar{f}(Na) = \tilde{f}(Na) = f(a)$, alors $\bar{f} = \tilde{f}$. ■

Existence de \bar{f} .

On veut définir $\bar{f}(Na) = f(a)$. Vérifions que cette définition est sans ambiguïté.

Supposons $Na = Nb$, c'est-à-dire, $ab^{-1} \in N = \ker(f)$.

Alors, $f(ab^{-1}) = e$, donc $f(a)f(b)^{-1} = e$, ainsi $f(a) = f(b)$, qui est équivalent à $\bar{f}(Na) = \bar{f}(Nb)$. ■

\bar{f} est un homomorphisme.

$$\bar{f}(NaNb) = \bar{f}(Nab) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(Na)\bar{f}(Nb).$$
■

\bar{f} est un isomorphisme.

surjectivité.

Soit $b \in \text{Im}(f)$. Alors, $b = f(a)$ pour un certain $a \in G$. Donc, $b = \bar{f}(Na)$. #

injectivité.

Supposons $Na \in \ker(\bar{f})$. Alors, $\bar{f}(Na) = e$, donc $f(a) = e$, ainsi $a \in \ker(f) = N$.

Comme $a \in N$, $Na = N$. Donc, $\ker(\bar{f}) \subseteq \{N\}$, alors $\ker(\bar{f}) = N$. #

Exemple.

- $\text{sgn} : S_n \rightarrow C_2$.

$$\ker(\text{sgn}) = A_n.$$

$$\text{Im}(\text{sgn}) = C_2.$$

$$\text{Alors, } S_n/A_n \cong C_2 \cong \mathbb{Z}_2.$$

- $f : \mathbb{Z}_{10} \xrightarrow{\quad \bar{n} \quad} \mathbb{Z}_5$. f est un homomorphisme.

$$\ker(f) = \{\bar{0}, \bar{5}\}.$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{Z}_5.$$

$$\text{Alors, } \mathbb{Z}_{10}/\{\bar{0}, \bar{5}\} \cong \mathbb{Z}_5.$$

- $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x, y)} \mathbb{R}$. f est un homomorphisme.

$$\ker(f) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} =: N.$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\text{Alors, } \mathbb{R}^2/N \cong \mathbb{R}.$$

Cours 18

Rappel.

- Théorème d'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ G/\ker(f) & \dashrightarrow \bar{f} & \text{Im}(f) \end{array}$$

$\exists!$ isomorphisme $\bar{f} : G/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ t.q. $f = i \circ \bar{f} \circ p$.

Notation. \hookrightarrow : fonction injective, \twoheadrightarrow : fonction surjective.

2 cas importants :

- (1) Si f est surjectif

$$\text{Im}(f) = H.$$

Le théorème dit que $\bar{f} : G/\ker(f) \rightarrow H$ $Na \mapsto f(a)$ est un isomorphisme.

(2) Si f est injectif

$$\ker(f) = \{e\}.$$

$G/\ker(f) = G/\{e\}$, les classes sont de la forme $\{e\}a = \{a\}$, donc chaque élément de G est seul dans sa classe d'équivalence.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\cong} & G/\{e\} \\ a & \mapsto & \{a\} \end{array}$$

Dans ce cas, $G \cong G/\{e\} \cong \text{Im}(f)$. On a que G est isomorphe au sous-groupe $\text{Im}(f)$ de H .

Corollaire.

$f : G \rightarrow H$ un homomorphisme entre groupes finis. Alors, $|G| = |\ker(f)| |\text{Im}(f)|$.

Démonstration.

\bar{f} est une bijection entre $G/\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$. Alors, $|G/\ker(f)| = |\text{Im}(f)|$. Donc, $\frac{|G|}{|\ker(f)|} = |\text{Im}(f)|$. \square

Groupes monogènes

$a \in G$, $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ le groupe engendré par a .

Théorème (Classification des groupes monogènes).

Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe monogène. Alors

(1) Si $o(a) = \infty$, alors $G \cong \mathbb{Z}$.

(2) Si $o(a) = m$, alors $G \cong \mathbb{Z}_m$.

Démonstration.

La fonction $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & G \\ n & \mapsto & a^n \end{array}$ est un homomorphisme. En effet

$$\begin{aligned} f(n_1 + n_2) &= a^{n_1 + n_2} \\ &= a^{n_1} a^{n_2} \\ &= f(n_1) f(n_2) \end{aligned}$$

f est surjectif, car tout élément de G s'écrit a^n par définition.

Le théorème d'isomorphisme nous dit que $\mathbb{Z}/\ker(f) \cong G$.

(1) Le seul n t.q. $a^n = e$ est $n = 0$, donc $\ker(f) = \{0\}$, alors $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\{0\} \cong G$.

(2) On veut montrer que $\ker(f) = m\mathbb{Z}$.

\subseteq :

Supposons $n \in \ker(f)$, alors $f(n) = a^n = e$, donc $o(a) \mid n$, c'est-à-dire, $n = ko(a) = km \in m\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\ker(f) \subseteq m\mathbb{Z}$. \blacksquare

\supseteq :

Supposons $n \in m\mathbb{Z}$, alors $n = km$, donc $f(n) = a^n = a^{mk} = (a^m)^k = e$.

Ainsi, $m\mathbb{Z} \subseteq \ker(f)$. \blacksquare

Ainsi, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \cong G$.

\square

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6 = (1 \ 3)(2 \ 6 \ 4 \ 5). o(\sigma) = \text{ppcm}(2, 4) = 4.$$

Par le théorème de classification, $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_4$.

Autrement dit, $\langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} = \{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$.

Section 8.3 Théorème de Cayley

G un groupe quelconque, $a \in G$.

On définit une fonction

$$\begin{aligned}\sigma_a : G &\rightarrow G \\ b &\mapsto ab\end{aligned}$$

Lemme. σ_a est bijective.

Démonstration.

$\sigma_{a^{-1}}$ est un inverse de σ_a . En effet

$$\begin{aligned}\sigma_{a^{-1}}(\sigma_a(b)) &= \sigma_{a^{-1}}(ab) & \sigma_a(\sigma_{a^{-1}}(b)) &= \sigma_a(a^{-1}b) \\ &= a^{-1}ab & &= aa^{-1}b \\ &= b & &= b\end{aligned}$$

□

Remarque. Ce lemme implique que $\sigma_a \in S(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ est bijective}\}$.

Définition. On définit $\Psi : G \rightarrow S(G)$ par

Proposition. Ψ est un homomorphisme de groupes.

Démonstration.

Soient $a, b, c \in G$.

$$\begin{aligned}\Psi(ab)(c) &= \sigma_{ab}(c) \\ &= (ab)c \\ &= a(bc) \\ &= a\sigma_b(c) \\ &= \sigma_a(\sigma_b(c)) \\ &= (\sigma_a \circ \sigma_b)(c)\end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$, c'est-à-dire, $\Psi(ab) = \Psi(a) \circ \Psi(b)$.

□

Cours 19

Rappel.

- *Théorème d'isomorphismes* : $f : G \rightarrow H$, $G/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$.
 - Si f surjective, $G/\ker(f) \cong H$;
 - Si f injective, $G \cong \text{Im}(f)$.
- $|G| = |\ker(f)| \cdot |\text{Im}(f)|$;
- Groupe monogène (ou cyclique) $G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
- Classification
 - $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ si $o(a) = \infty$;
 - $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_m$ si $o(a) = m$.
- $a \in G$
 - $\sigma_a : G \rightarrow G$ est une bijection;
 - $\Psi : G \rightarrow S(G)$, où $S(G)$ est le groupe des bijections de G .

Proposition. Ψ est injectif.

Démonstration. Montrons que $\ker(\Psi) = \{e\}$.

Supposons que $(a \in G) \in \ker(\Psi)$, alors $\Psi(a) = e$.

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= \mathbf{1}_G \\ \sigma_a &= \mathbf{1}_G \\ \sigma_a(e) &= \mathbf{1}_G(e) \\ ae &= e \\ a &= e\end{aligned}$$

Alors, $\ker(\Psi) \subseteq \{e\}$.

De plus, $\{e\} \subseteq \ker(\Psi)$ trivialement.

Ainsi, $\ker(\Psi) = \{e\}$, donc Ψ est injectif. \square

Théorème (Cayley). *Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique $S(E)$.*

Démonstration.

On prend $E = G$. $\Psi : G \rightarrow S(G)$ est un homomorphisme injectif.

Alors, $G \cong \text{Im}(\Psi) \leqslant S(G)$. \square

Exemple.

$$\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}.$$

Calculons Ψ .

$$\begin{aligned}\Psi(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \varepsilon\varepsilon & \varepsilon\alpha & \varepsilon\beta & \varepsilon\gamma & \varepsilon\rho & \varepsilon\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \alpha\varepsilon & \alpha\alpha & \alpha\beta & \alpha\gamma & \alpha\rho & \alpha\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \alpha & \varepsilon & \rho & \sigma & \beta & \gamma \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \alpha) (\beta \quad \rho) (\gamma \quad \sigma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\beta) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \beta\varepsilon & \beta\alpha & \beta\beta & \beta\gamma & \beta\rho & \beta\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \beta & \sigma & \varepsilon & \rho & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \beta) (\alpha \quad \sigma) (\gamma \quad \rho)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \gamma\varepsilon & \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma\gamma & \gamma\rho & \gamma\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \gamma & \rho & \sigma & \varepsilon & \alpha & \beta \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \gamma) (\alpha \quad \rho) (\beta \quad \sigma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\rho) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \rho\varepsilon & \rho\alpha & \rho\beta & \rho\gamma & \rho\rho & \rho\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \rho & \gamma & \alpha & \beta & \sigma & \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \rho \quad \sigma) (\alpha \quad \gamma \quad \beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \sigma\varepsilon & \sigma\alpha & \sigma\beta & \sigma\gamma & \sigma\rho & \sigma\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \sigma & \beta & \gamma & \alpha & \varepsilon & \rho \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \sigma \quad \rho) (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\end{aligned}$$

Remarque. Le groupe $S(G)$ est toujours plus grand que G .

Exemple. Si on prend $G = S_n$, $\Psi : S_n \rightarrow S(S_n)$, où $|S_n| = n!$ et $|S(S_n)| = (n!)!$.

Exemple. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$.

$$\Psi : G \rightarrow S(G) \cong S_4$$

Numérotions les éléments de G comme $\{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{aligned}\Psi(\bar{0}, \bar{0}) &= \mathbf{1} & \Psi(\bar{0}, \bar{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \Psi(\bar{1}, \bar{0}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \Psi(\bar{1}, \bar{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & & &= (1 \quad 2) (3 \quad 4) & &= (1 \quad 3) (2 \quad 4) & &= (1 \quad 4) (2 \quad 3)\end{aligned}$$

Cayley nous dit que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \{1, (1 \quad 2)(3 \quad 4), (1 \quad 3)(2 \quad 4), (1 \quad 4)(2 \quad 3)\}$.

Actions de groupes

Soient G un groupe et E un ensemble.

Définition. Une *action* de G sur E est une fonction $\bullet : G \times E \rightarrow E$, satisfaisant à

- (1) $\forall x \in E, e \bullet x = x;$
 - (2) $\forall a, b \in G, \forall x \in e, a \bullet (b \bullet x) = (ab) \bullet x.$

Exemple.

- (1) $G = GL(n, \mathbb{R})$, $E = \mathbb{R}^n$.

$$\bullet : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(M, \vec{v}) \mapsto M\vec{v}$$

est une action.

- (2) $G = S_n$, $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\bullet : S_n \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{s, 2, \dots, n\}$$

$$(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$$

est une action.

- (3) $G = \mathbb{Z}_2$, $E = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \subseteq \mathbb{R}^2$.
 \mathbb{Z}_2 agit sur E par

$$\bar{0} \bullet (x, y) = (x, y)$$

- $$(4) \quad G = \mathbb{Z}_2, \quad E = \text{recycle symbol} \subset \mathbb{R}^2$$

G agit sur E où $\bar{1}$ est une rotation de 120° et $\bar{2}$ est une rotation de 240°

- (5) \mathbb{D}_3 agit sur un triangle équilatéral

- (6) G agit sur lui-même par

$$\bullet : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto ab$$

- (7) G agit sur lui-même aussi par

$$\bullet : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto aba^{-1}$$

En. effet.

- (a) Soit $b \in G$, alors

$$e \bullet b = ebe^{-1} \\ = b$$

- (b) Soient $a, b, c \in G$

$$\begin{aligned}
 (ab) \bullet c &= (ab)c(ab)^{-1} \\
 &= abcb^{-1}a^{-1} \\
 &= a(b \bullet c)a^{-1} \\
 &= a \bullet (b \bullet c)
 \end{aligned}$$

■

Définition. Une *action* de G sur E est un homomorphisme $\Psi : G \rightarrow S(E)$.

Pour passer de la première définition à la deuxième, on pose $\Psi(a) = \sigma_a$, où $\sigma_a(x) = a \bullet x$.

Pour passer de la deuxième définition à la première, on pose $a \bullet x = (\Psi(a))(x)$.

Définition. G un groupe qui agit sur un ensemble E .

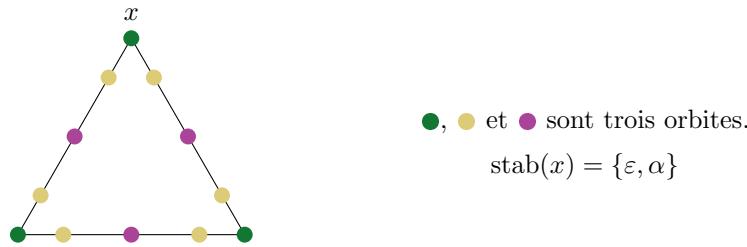
Soit $x \in E$.

L'*orbite* de x est l'ensemble $G \bullet x = \{a \bullet x \mid a \in G\} \subseteq E$.

Définition. Soit $x \in E$.

Le *stabilisateur* de x est $\text{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leqslant G$.

Exemple. avec \mathbb{D}_3 ²



Cours 20

Rappel.

- Théorème de Cayley
 - $\Psi : G \rightarrow S(G)$, où $\sigma_a(b) = ab$ est un homomorphisme injectif;
 - $G \cong \text{Im}(\Psi) \leqslant S(G)$.
- Action de G sur E
 - $a \bullet x \in E$
 - (1) $e \bullet x = x$
 - (2) $(ab) \bullet x = a \bullet (b \bullet x)$
 - homomorphisme $\Psi : G \rightarrow S(E)$
 - $a \mapsto (x \mapsto a \bullet x)$
- Orbite de $x \in E$: $G \bullet x = \{a \bullet x \in E \mid a \in G\} \subseteq E$
- Stabilisateur de $x \in E$: $\text{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leqslant G$

Remarque. $x \bullet a$ n'est pas défini.

Proposition. $\text{stab}(x) \neq \emptyset$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} e \bullet x &= x \\ \Rightarrow e &\in \text{stab}(x) \\ \Rightarrow \text{stab}(x) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Soient $a, b \in \text{stab}(x)$. On veut vérifier que $ab^{-1} \in \text{stab}(x)$, c'est-à-dire $(ab^{-1}) \bullet x = x$.

Remarquons que $b \bullet x = x$, alors $b^{-1} \bullet (b \bullet x) = b^{-1} \bullet x$, donc $(b^{-1}b) \bullet x = b^{-1} \bullet x$, donc $e \bullet x = b^{-1} \bullet x$, ainsi $x = b^{-1} \bullet x$.

2. voir p.10

On a donc

$$\begin{aligned}(ab^{-1}) \bullet x &= a \bullet (b^{-1} \bullet x) \\ &= a \bullet x \\ \text{car } a \in \text{stab}(x) &= x\end{aligned}$$

Ainsi, $ab^{-1} \in \text{stab}(x)$. □

Proposition. La relation $x \sim y$ si, et seulement si, $\exists a \in G$ t.q. $y = a \bullet x$ est une équivalence donc les classes d'équivalence sont les orbites, c'est-à-dire, $\bar{x} = G \bullet x$.

En particulier, les orbites forment une partition de E .

Démonstration.

Équivalence.

(Refl) Soit $x \in E$.

Or, $x = e \bullet x$, donc $x \sim x$.

(Sym) Soient $x, y \in E$ t.q. $x \sim y$.

Ainsi, $\exists a \in G$ t.q. $y = a \bullet x$.

Or, $a^{-1} \in G$, donc $a^{-1} \bullet y = a^{-1} \bullet (a \bullet x) = (a^{-1}a) \bullet x = x$.

Ainsi, $y \sim x$.

(Trans) Soient $x, y, z \in E$ t.q. $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors, $\exists a, b \in G$ t.q. $y = a \bullet x$ et $z = b \bullet y$.

Or, $z = b \bullet y = b \bullet (a \bullet x) = (ba) \bullet x$, où $ba \in G$.

Ainsi, $x \sim z$. ■

Les classes d'équivalence sont les orbites.

La classe d'équivalence de $x \in E$, par définition, est

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \{y \in E \mid x \sim y\} \\ &= \{y \in E \mid \exists a \in G, y = a \bullet x\} \\ &= \{a \bullet x \mid a \in G\} \\ &= G \bullet x\end{aligned}$$

■

□

Exemple.

(1) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, $E = \mathbb{R}^2$ avec l'action $M \bullet \vec{v} = M\vec{v}$ la multiplication matricielle usuelle.

Calculons l'orbite d'un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}G \bullet \vec{v} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Si $y = 0$, $G \bullet \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Si $y \neq 0$, $\{x + ay \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, donc $G \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(2) $G = S_3$, $E = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

S_3 agit sur un sous-ensemble en agissant sur chaque élément du sous-ensemble, c'est-à-dire, par exemple, $\sigma \bullet \{i, j\} = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$.

Les orbites de l'action sont

$$\{\emptyset\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}; \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}; \{\{1, 2, 3\}\}$$

Cours 21

Rappel.

- Orbite d'un élément $x \in E$
 - $G \bullet x = \{a \bullet x \mid a \in G\}$
- Stabilisateur de $x \in E$
 - $\text{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leqslant G$
- Les orbites forment une *partition* de E
 - la même que la relation $x \sim y \Leftrightarrow y = a \bullet x$

Lemme.

Si $y = a \bullet x$, alors $a^{-1} \bullet y = x$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} y &= a \bullet x \\ a^{-1} \bullet y &= (a^{-1}a) \bullet x \\ &= x \end{aligned}$$

□

Proposition.

Si $y = a \bullet x$, alors $\text{stab}(y) = a \text{stab}(x)a^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in \text{stab}(x)\}$.

En particulier, si x et y sont dans la même orbite, alors $\text{stab}(x) \cong \text{stab}(y)$.

Démonstration.

\subseteq :

Supposons $b \in \text{stab}(y)$. Alors, $b \bullet y = y$.

Écrivons $b = a(a^{-1}ba)b^{-1}$.

De plus

$$\begin{aligned} (a^{-1}ba) \bullet x &= a^{-1} \bullet (b \bullet (a \bullet x)) \\ &= a^{-1} \bullet (b \bullet y) \\ &= a^{-1} \bullet y \\ &= x \end{aligned}$$

Donc, $a^{-1}ba \in \text{stab}(x)$, alors $b \in a \text{stab}(y)a^{-1}$.

■

\supseteq :

Supposons $b \in \text{stab}(x)$, alors $aba^{-1} \in a \text{stab}(x)a^{-1}$.

$$\begin{aligned} (aba^{-1}) \bullet y &= a \bullet (b \bullet (a^{-1} \bullet y)) \\ &= a \bullet (b \bullet x) \\ &= a \bullet x \\ &= y \end{aligned}$$

Alors, $aba^{-1} \in \text{stab}(y)$.

■

Ainsi, $\text{stab}(y) = a \text{stab}(x)a^{-1}$.

□

De plus,

$$\begin{array}{ccc} \text{On définit } f : \text{stab}(x) & \rightarrow & \text{stab}(y) \\ h & \mapsto & aha^{-1} \end{array} .$$

$$\begin{array}{ccc} f \text{ est bijective, car son inverse est } g : \text{stab}(y) & \rightarrow & \text{stab}(x) \\ b & \mapsto & a^{-1}ba \end{array} .$$

En effet,

$$\begin{array}{ll} f(g(i)) = f(a^{-1}ia) & g(f(i)) = g(aia^{-1}) \\ = aa^{-1}iaaa^{-1} & = a^{-1}aia^{-1}a \\ = i & = i \end{array}$$

f est un homomorphisme, car

$$\begin{aligned} f(h_1h_2) &= a(h_1h_2)a^{-1} \\ &= ah_1a^{-1}ah_2a^{-1} \\ &= f(h_1)f(h_2) \end{aligned}$$

Ainsi, f est un isomorphisme entre $\text{stab}(x)$ et $\text{stab}(y)$. ■

Exemple.

- $G = \mathbb{D}_6$, les isométries d'un hexagone régulier, et $E = \{\text{diagonales de l'hexagone}\}$.

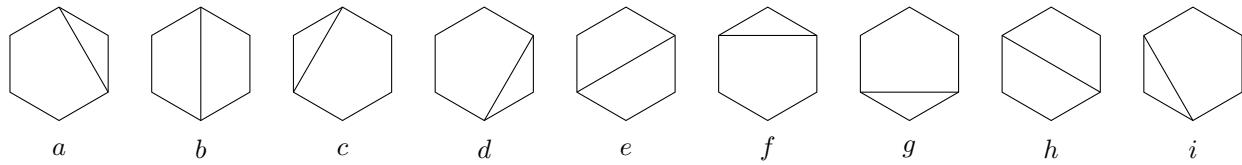


FIGURE 8.1 – Représentation des diagonales d'un hexagone régulier

Calculons les orbites :

$$o_1 = \{a, c, d, f, g, i\}$$

$$o_2 = \{b, e, h\}$$

Calculons les stabilisateurs :

$$\text{stab}(a) = \{\varepsilon, \mu\}$$

$$\text{stab}(b) = \{\varepsilon, \phi, \eta, \lambda\}$$

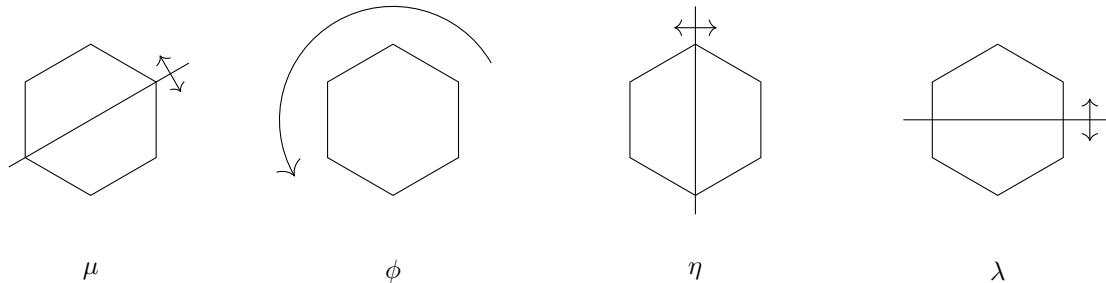
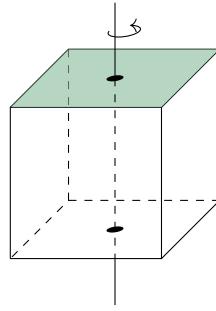


FIGURE 8.2 – Représentation des isométries présentes dans les stabilisateurs

- Combien un cube a-t-il de rotations ?



- Combien de rotations préservent la face du haut ?
4, en incluant l'identité.
- Il y a 6 faces et 4 façons d'envoyer la face du haut à une face quelconque, donc il y a $4 \times 6 = 24$ rotations au total.

Théorème (orbite-stabilisateur).

Soit G un groupe fini qui agit sur E un ensemble fini. Soit $x \in E$.

Alors, $|G| = |G \bullet x| \cdot |\text{stab}(x)|$.

Démonstration.

Posons $H := \text{stab}(x)$. Notons $G/H := \{aH \mid a \in G\}$ l'ensemble des classes d'équivalence à gauche modulo H .

On définit $\begin{array}{rcl} f : G/H & \rightarrow & G \bullet x \\ aH & \mapsto & a \bullet x \end{array}$.

On veut montrer que f est bijective.

f est définie sans ambiguïté.

Supposons que $aH = bH$, avec $a, b \in G$. Alors, $a^{-1}b \in H$. Donc,

$$\begin{aligned} (a^{-1}b) \bullet x &= x \\ a^{-1} \bullet (b \bullet x) &= x \\ b \bullet x &= a \bullet x \\ f(bH) &= f(aH) \end{aligned}$$

■

f est bijective.

f est injective.

Soient $aH, bH \in G/H$ t.q. $f(aH) = f(bH)$. Alors

$$\begin{aligned} a \bullet x &= b \bullet x \\ x &= a^{-1} \bullet (b \bullet x) \\ &= (a^{-1}b) \bullet x \\ \Rightarrow a^{-1}b &\in \text{stab}(x) = H \\ \Rightarrow aH &= bH \end{aligned}$$

Ainsi, f est injective.

#

f est surjective.

Soit $y \in G \bullet x$, alors, $\exists a \in G$ t.q. $a \bullet x = y$, donc $f(aH) = y$.

Ainsi, f est surjective.

#

Comme f est injective et surjective, f est bijective.

■

Ainsi, $|G/H| = |G \bullet x|$, c'est-à-dire $\frac{|G|}{|H|} = |G \bullet x|$, donc $|G| = |G \bullet x| \cdot |H|$.

□

Exemple (revenons au cube).

$$E_1 = \{\text{faces du cube}\}, E_2 = \{\text{sommets du cube}\}.$$

G agit sur E_2 . Il n'a qu'une seule orbite et $|E_2| = 8$.

$$\text{stab}(a) = \{\varepsilon, \theta, \phi\}.$$

$$24 = |G| = |E_2| \cdot |\text{stab}(a)| = 8 \times 3.$$

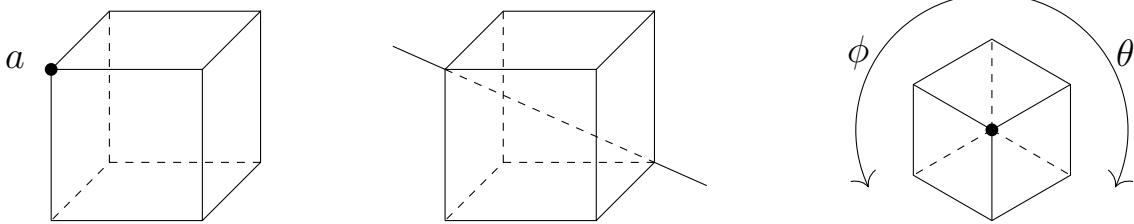


FIGURE 8.3 – Représentation du sommet a et des rotations θ et ϕ

G agit aussi sur $A = \{\text{arêtes du cube}\}$.

Il y a encore une seule orbite, A et $|A| = 12$.

$$\text{stab}(\overline{\alpha\beta}) = \{\varepsilon, \rho\}.$$

$$24 = |G| = |A| \cdot |\text{stab}(\overline{\alpha\beta})| = 12 \times 2.$$

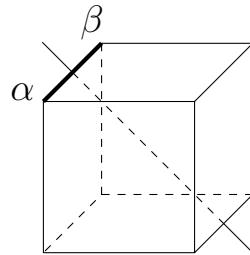


FIGURE 8.4 – Représentation de l'arête $\overline{\alpha\beta}$ et de l'axe de la rotation ρ

Notation. Nous noterons le groupe des rotation d'un cube comme $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube})$.

Proposition.

$$\overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube}) \text{ est isomorphe à } S_4.$$

Idée de la démonstration.

On regarde l'action de $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube})$ sur $E = \{\text{paires de sommets opposés}\}$.

$$\text{Cette action définit un homomorphisme } \overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube}) \rightarrow S_4.$$

Exemple.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3 \ 2)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 3 \ 4)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 4)$

Cet homomorphisme est surjectif et injectif, donc bijectif. #

Proposition.

$$\overset{+}{\text{Isom}}(\text{tétraèdre}) \text{ est isomorphe à } A_4, \text{ le sous-groupe de } S_4 \text{ contenant seulement les permutations de signe positif.}$$

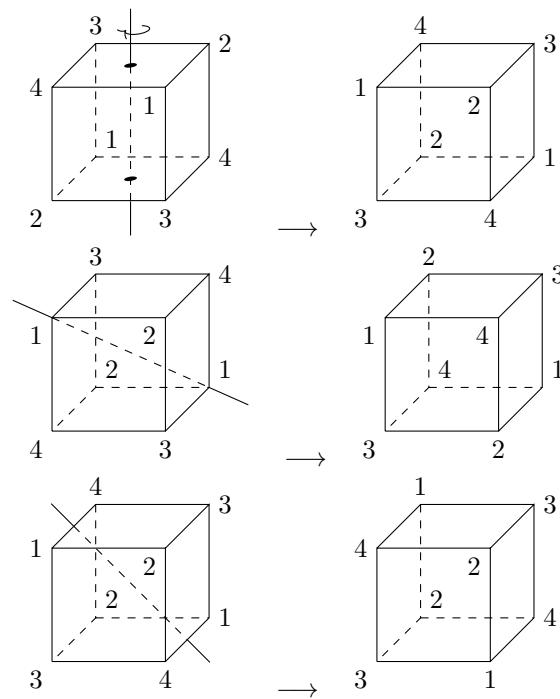


FIGURE 8.5 – Représentation des rotations de l'exemple précédent

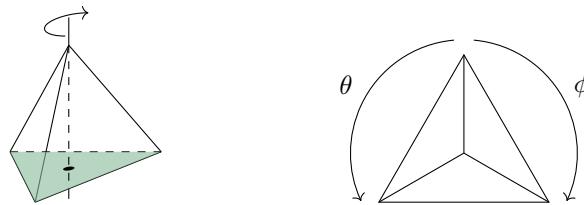
Cours 22

Rappel.

- Orbite-stabilisateur
 - $|G| = |\text{stab}(x)| \cdot |G \bullet x|$
 - idée : $\begin{array}{ccc} G/\text{stab}(x) & \rightarrow & G \bullet x \\ a(\text{stab}(x)) & \mapsto & a \bullet x \end{array}$ est une bijection.
- $\text{Isom}^+(\text{cube}) \cong S_4$, paires de sommets opposés
- $\text{Isom}^+(\text{tétraèdre}) \cong A_4$

Exemple.

$G = \text{Isom}^+(\text{tétraèdre})$ agit sur les 4 faces, avec $F = \{\text{faces}\}$. Il y a une seule orbite de taille 4. $\text{stab}(f_1) = \{\varepsilon, \theta, \phi\}$.
 $|\text{stab}(f_1)| = 3$, $|G| = |F| \cdot |\text{stab}(f_1)| = 4 \times 3 = 12$.

FIGURE 8.6 – Représentation du tétraèdre, de l'axe de rotation et des rotations θ et ϕ

Exemple.

Les cinq solides platoniques :

- cube
- tétraèdre
- octahèdre
- dodécahèdre
- icosaèdre

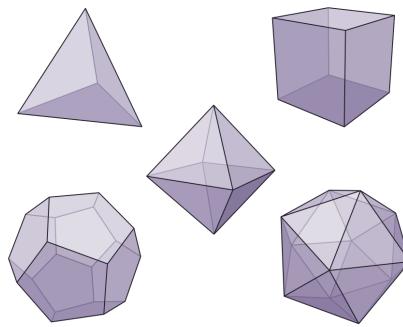


FIGURE 8.7 – Solides platoniques. Image tirée de Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

Définition (Dualité).

On met un sommet au milieu de chaque face et on relie les sommets à ceux associés aux faces adjacentes.

On associe les faces à des sommets, les arêtes à des arêtes, et les sommets à des faces.

Le cube et l'octaèdre sont duaux.

Le tétraèdre est dual à lui-même.

Le dodécahèdre et l'icosaèdre sont duaux.

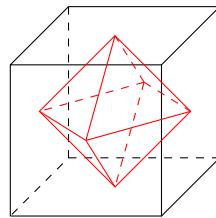


FIGURE 8.8 – Représentation de la dualité du cube et de l'octaèdre

Proposition.

$\text{Isom}(\text{dodécahèdre}) \cong^+ \text{Isom}(\text{icosaèdre}) \cong^+ A_5$, qui contient 60 éléments.

Les sommets d'un icosaèdre sont les mêmes que 5 cubes, donc chaque rotation permute ces 5 cubes.

Exemple (Combinaisons). Le nombre de manières de choisir k éléments parmi n sans remise.

On veut compter les sous-ensembles de taille k dans un ensemble de taille n .

Prenons $\{1, 2, 3, 4\}$, $n = 4$, $k = 2$. On a

$$\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{3, 4\} \Rightarrow \binom{4}{2} = 6$$

Le groupe S_n agit sur $E_{n,k}$ des sous-ensembles de taille k dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

Par exemple

$$(1 \ 2 \ 3) \bullet \{1, 4\} = \{(1 \ 2 \ 3) 1, (1 \ 2 \ 3) 4\} = \{2, 4\}$$

Tout ensemble de k éléments peut être envoyé à tout autre par une permutation. En effet,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

avec n'importe quelle combinaison des autres éléments pour compléter σ .

$\sigma \bullet \{1, 2, \dots, k\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, donc l'orbite de $\{1, 2, \dots, k\}$ est $E_{n,k}$. Il n'y a qu'une seule orbite.

De plus, $\text{stab}(\{1, 2, \dots, k\}) \cong S_k \times S_{n-k}$ en permutant les k premiers éléments, puis les $n-k$ derniers éléments. Donc, orbite-stabilisateur nous dit $|S_n| = |E_{n,k}| \cdot |\text{stab}(\{1, 2, \dots, k\})|$, c'est-à-dire, $n! = |E_{n,k}| \cdot (k!)(n-k)!$, d'où $|E_{n,k}| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exemple (motivation du prochain théorème).

Combien y a-t-il de façons de colorer les faces d'un cube avec deux couleurs, à symétrie près ?

- (1) Toutes les faces de la même couleur,
2 possibilités ;
- (2) Une face d'une couleur et cinq de l'autre,
2 possibilités ;
- (3) Deux faces d'une couleur et quatre de l'autre
4 possibilités ;
- (4) Trois faces de chaque couleur
2 possibilités.

Donc, au total, $2 + 2 + 4 + 2 = 10$ coloriages possibles.

Exemple (autre motivation).

Combien y a-t-il de façons de colorer les sommets d'un hexagone avec un certain nombre de couleurs, à symétrie près ?

Cours 23

Rappel.

- $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube}) \cong \overset{+}{\text{Isom}}(\text{octahèdre}) \cong S_4$, ordre 24 ;
- $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{tétraèdre}) \cong A_4$, ordre 12 ;
- $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{icosahèdre}) \cong \overset{+}{\text{Isom}}(\text{dodécaèdre}) \cong A_5$, ordre 60.

Notation. $E/G = \{G \bullet x \mid x \in E\}$ est l'ensemble des orbites.

Exemple. Combien de façons de colorer les faces d'un cube avec k couleurs.

$G = \overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube})$, $E = \{\text{cubes colorés}\}$.

On veut compter $|E/G|$.

Notation. $E^g = \{x \in E \mid g \bullet x = x\}$ est l'ensemble des éléments de E *invariants* par $g \in G$.

Exemple. Avec g une rotation de 90° autour d'un axe passant par le centre de deux faces opposées.

Dans E^g , les quatre faces des côtés sont de la même couleur et les deux autres faces sont libres.

Exemple. $G = \mathbb{D}_3$ qui agit sur $E = \{\text{les sommets d'un triangle}\}$.

$$\begin{aligned} E^\rho &= \emptyset \\ E^\varepsilon &= E \\ E^\alpha &= \{1\} \end{aligned}$$

Lemme de Burnside

Théorème (Lemme de Burnside).

$$|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g|$$

Démonstration.

Considérons $X = \{(g, x) \in G \times E \mid g \bullet x = x\}$.

Comptons le nombre d'éléments de X de deux manières différentes.

(1) On fixe $g \in G$. On a $|E^g|$ éléments $x \in E$ t.q. $g \bullet x = x$. Donc

$$|X| = \sum_{g \in G} |E^g|$$

(2) On fixe $x \in E$. Les éléments $g \in G$ t.q. $g \bullet x = x$ sont exactement ceux de $\text{stab}(x)$. Donc

$$|X| = \sum_{x \in E} |\text{stab}(x)| \quad (*)$$

Si deux $x, y \in E$ sont dans une même orbite, $|\text{stab}(x)| = |\text{stab}(y)|$.

Soit x_1, x_2, \dots, x_m un ensemble de représentants des orbites, avec $m = |E/G|$.

On a donc

$$|X| = \sum_{i=1}^m |\text{stab}(x_i)| |G \bullet x_i|$$

du théorème orbite-stabilisateur

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m |G| \\ &= m \cdot |G| \end{aligned} \quad (**)$$

Comme $(*) = (**)$, on a

$$\begin{aligned} m |G| &= \sum_{g \in G} |E^g| \\ |E/G| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g| \end{aligned}$$

□

Exemple. Combien peut-on faire de colliers à six billes avec k sortes de billes ?

$G = \mathbb{D}_6$, $E = \{\text{colliers à six billes fixes}\}$.

$|G| = 12$.

$$\begin{aligned} |E/G| &= \frac{1}{12} \left(\underbrace{k^6}_{\varepsilon} + \underbrace{2k}_{\pm\rho} + \underbrace{2k^2}_{\pm\rho^2} + \underbrace{k^3}_{\rho^3} + \underbrace{3k^3}_{\alpha} + \underbrace{3k^4}_{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{12} (k^6 + 2k + 2k^2 + 4k^3 + 3k^4) \end{aligned}$$

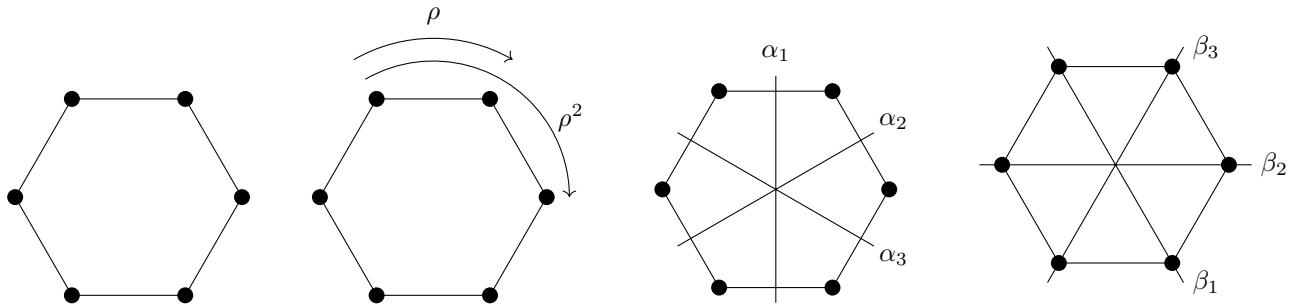


FIGURE 8.9 – Représentation du collier et de ses symétries

Exemple. Combien de colorages possibles pour les faces d'un cube avec k couleurs ?

$$G = \text{Isom}(\text{cube}) \cong S_4, E = \{\text{coloriages d'un cube fixe}\}.$$

$$\begin{aligned}|E/G| &= \frac{1}{24} \left(\underbrace{k^6}_e + \underbrace{6k^3}_\alpha + \underbrace{3k^4}_\beta + \underbrace{8k^2}_\gamma + \underbrace{6k^3}_\delta \right) \\ &= \frac{1}{24} (k^6 + 8k^2 + 12k^3 + 3k^4)\end{aligned}$$

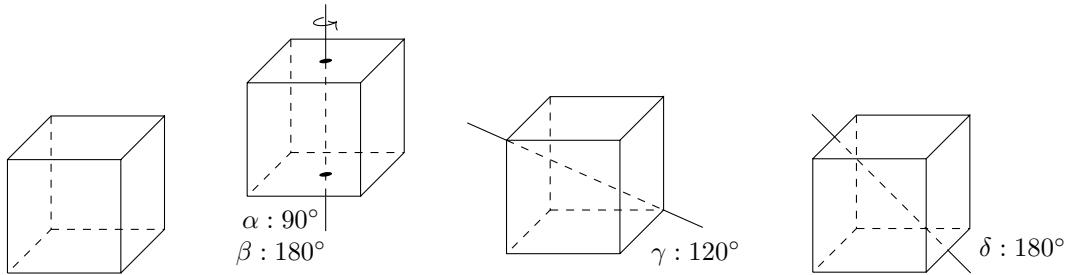


FIGURE 8.10 – Représentation du cube et de ses rotations

Exemple. Combien de manières y a-t-il de colorer les quatre sommets d'un tétraèdre avec k couleurs ?

$$G = \text{Isom}(\text{tétraèdre}) \cong A_4, E = \{\text{coloriages d'un tétraèdre fixe}\}.$$

$$\begin{aligned}|E/G| &= \frac{1}{12} \left(\underbrace{k^4}_e + \underbrace{8k^2}_\alpha + \underbrace{3k^2}_\beta \right) \\ &= \frac{1}{12} (k^4 + 11k^2)\end{aligned}$$

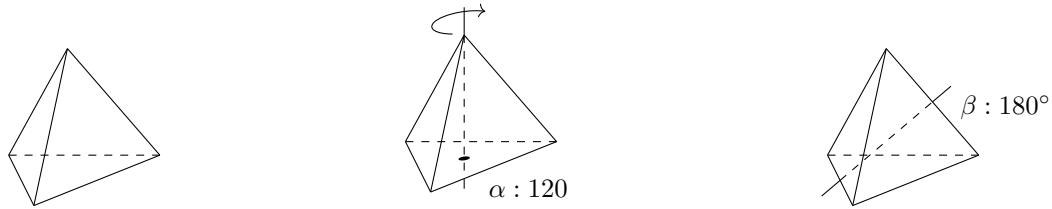


FIGURE 8.11 – Représentation du tétraèdre et de ses rotations