Notes MAT346

Julien Houle

Automne 2025

Table des matières

Chapitre 1 Intégration

Section 1.1 Intégrales de Riemann

Notation.

$\mathcal{B}\,[c,d] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}$.
$\mathcal{R}\,[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}$.
$\mathcal{C}\,[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}$.

On suppose nos fonctions bornées.

Définition.

a) Une partition de $[a,b]$ est un ensemble fini de points $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$ t.q. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

b) L'ensemble des partitions de $[a,b]$ est $\Omega\,[a,b]$.

c) On dit Δ' est *plus fine* que Δ, noté $\Delta' \geq \Delta$, si $\Delta' \supseteq \Delta$.

d) *Raffinement commun* de Δ_1 et Δ_2, noté $\Delta_1 \vee \Delta_2$, est la partition de $[a,b]$ formée de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ordonnés.

e) La *norme* de Δ, notée $\|\Delta\|$, est $\|\Delta\| = \max\limits_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|$.

f)

$$\overline{M}(f,[x_{i-1},x_1]) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_1]} f(x)$$
$$\underline{M}(f,[x_{i-1},x_1]) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_1]} f(x)$$

Remarque.

$$\|x\| \geq 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$$
$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

Définition.

a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de f pour la partition Δ est

$$\overline{S}(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de f pour la partition Δ est

$$\underline{S}(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Proposition.

a)

$$\underline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)\leq \underline{S}(f,\Delta),\forall\Delta\in\Omega\,[a,b]$$

b)

$$\underline{S}(f,\Delta)\leq \overline{S}(f,\Delta)$$

c)

$$\overline{S}(f,\Delta)\leq \overline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)$$

Proposition. *Si* $\Delta'\geq\Delta$*, alors* $\overline{S}(f,\Delta')\leq\overline{S}(f,\Delta)$*.*

démonstration.

Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$$

$$\Delta': a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<\bar{x}<x_i<\ldots<x_n=b$$

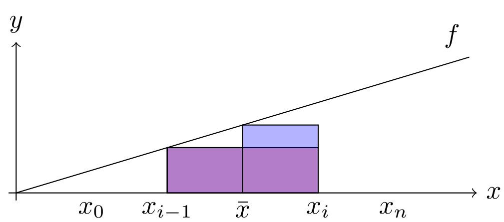
On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta)-\overline{S}(f,\Delta') &= \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\cdot(x_1-x_{i-1})\right]\\ &\quad-\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\cdot(\bar{x}-x_{i-1})+\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\cdot(x_i-\bar{x})\right]\\ &=(x_i-\bar{x})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\right]\\ &\quad+(\bar{x}-x_{i-1})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\right]\\ &\geq 0\end{aligned}$$

□

Proposition. *Si* $\Delta'\geq\Delta$*, alors* $\underline{S}(f,\Delta')\geq\underline{S}(f,\Delta)$

démonstration.



□

Remarque. $\underline{S}(f,\Delta)=-\overline{S}(-f,\Delta)$.

Corollaire. $\forall\Delta_1,\Delta_2\in\Omega\,[a,b]\,,\underline{S}(f,\Delta_1)\leq\overline{S}(f,\Delta_2)$

démonstration.

On a $\Delta_1\vee\Delta_2\geq\Delta_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\Delta_1)&\leq\underline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leq\overline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leq\overline{S}(f,\Delta_2)\end{aligned}$$

□

Définition.

a) La somme par défaut de f est $\underline{S}(f) = \sup\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$.

b) La somme par excès de f est $\overline{S}(f) = \inf\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$.

Théorème. $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$

démonstration.
Soit $\Delta_1 \in \Omega\,[a, b]$
$\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ est le plus petit majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega\,[a, b]$.
Du corollaire précédant, on a que $\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.
Donc, $\overline{S}(f, \Delta_1)$ est un majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$.
Ainsi, $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.
De même, $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ est le plus grand minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega\,[a, b]$.
Comme $\underline{S}(f)$ est un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$. □

Définition.
Soit $f \in \mathcal{B}\,[a, b]$. On dit que f est *intégrable au sens de Riemann sur* $[a, b]$ si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et on note $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$. La valeur commune de $\underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f)$ est notée $\int_a^b f(x)\, dx$

Théorème (Critère d'intégrabilité)**.**
Soit $f \in \mathcal{B}\,[a, b]$. Alors $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$ si, et seulement si, $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega\,[a, b])$ *t.q.* $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
On a $\displaystyle\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$.
Comme $\overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut minorer $\overline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_1 \in \Omega\,[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$.
Comme $\underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut majorer $\underline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_2 \in \Omega\,[a, b]$ t.q. $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \Big(\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}\Big) \\
&= \big(\overline{S}(f) - \underline{S}(f)\big) + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $\exists \Delta$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$.

Mais alors,

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta)\\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f)\\ &\geq 0\end{aligned}$$

Du théorème du sandwich, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$, car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Donc, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

□

Corollaire. *S'il existe $\Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) = \underline{S}(f,\Delta)$, alors $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Théorème. *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.*

démonstration.

Soit $f \in \mathcal{C}[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par la proposition d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n\varepsilon > b-a$.

Rappel.

f est uniformément continue sur $[a,b]$ si $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)$ t.q. pour $x,y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Rappel.

Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Comme $f \in \mathcal{C}[a,b]$, elle est uniformément continue sur $[a,b]$.
Alors, $\exists \delta > 0$ t.q. pour $x,y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{1}{n}$.
Soit donc $\Delta \in \Omega[a,b] : a = x_0 < x_1, \ldots < x_n = b$ avec $\|\Delta\| < \delta$.
Alors, $\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) < \frac{1}{n}$.

Remarque. $\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])$ peut être noté $\mathrm{osc}_f([x_{i-1},x_i])$.

On obtient

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i - x_{i-1})\\ &< \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\\ &= \frac{b-a}{n}\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

Théorème. *Toute $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

démonstration.

(1) Si f est constante, alors $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) = 0 < \varepsilon$.

(2) Si f est croissante,

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon > (b-a)(f(b)-f(a))$

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}, i \in [0..n]$

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

(3) Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.
Donc, $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

□

Théorème.
Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}\,[a,b]$, alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}\,[a,b]$ et $\int (f_1+f_2) = \int f_1 + \int f_2$.

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $f_i \in \mathcal{R}\,[a,b]$, $\exists \Delta_i \in \Omega\,[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f_i,\Delta_i) - \underline{S}(f_i,\Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
Alors, $\overline{S}(f_i,\Delta) - \underline{S}(f_i,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Supposons $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1+f_2,\Delta) &\leq \overline{S}(f_1,\Delta) + \overline{S}(f_2,\Delta) \\
\underline{S}(f_1+f_2,\Delta) &\geq \underline{S}(f_1,\Delta) + \underline{S}(f_2,\Delta)
\end{aligned}$$

Car $\sup(f_1+f_2) \leq \sup f_1 + \sup f_2$ et $\inf(f_1+f_2) \geq \inf f_1 + \inf f_2$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1+f_2,\Delta) - \underline{S}(f_1+f_2,\Delta) &\leq \overline{S}(f_1,\Delta) + \overline{S}(f_2,\Delta) - \underline{S}(f_1,\Delta) - \underline{S}(f_2,\Delta) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}\,[a,b]$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_1 + f_2 &\leq \overline{S}(f_1+f_2,\Delta) \\
&\leq \overline{S}(f_1,\Delta) + \overline{S}(f_2,\Delta) \\
&< \underline{S}(f_1,\Delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f_2,\Delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_a^b f_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f_2 + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b f_1 + f_2 < \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.
Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.
De même, on peut montrer que $\int_a^b f_1 + f_2 \geq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.
Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$. □

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\int \lambda f = \lambda \int f$.

démonstration.
Laissé en exercice.
Utiliser $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ et $\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$. □

Corollaire.
Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, *alors* $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

démonstration.
$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0$. □

Théorème (Inégalité du triangle)**.**
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *alors* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
Alors, $\exists \Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
Enfin,

$$\begin{aligned}
-|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\
&\Rightarrow \int f \leq \int |f|
\end{aligned}$$

□

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $a \leq c < d \leq b$, *alors* $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[a,b]$.

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\exists \Delta_1 \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$.
Soit Δ_2 le raffinement de Δ_1 en ajoutant les points c et d.
Alors, $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) \leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$
Donc, $f \in \mathcal{R}[c,d]$. □

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $a < c < b$, *alors* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a,c]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\exists \Delta_2 \in \Omega[c,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$. Alors, $\Delta \in \Omega\,[a,b]$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &\leq \overline{S}(f,\Delta) \\
&= \overline{S}(f,\Delta_1) + \overline{S}(f,\Delta_2) \\
&< \underline{S}(f,\Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f,\Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \underline{S}(f,\Delta_1) + \underline{S}(f,\Delta_2) + \varepsilon \\
&\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$.
De même, $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Théorème.
Soit $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.
Si f *possède* n *discontinuités dans* $[a,b]$, *alors* $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

démonstration.
Pour $n = 0$, $f \in \mathcal{C}\,[a,b]$, donc $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$ est un résultat connnu.
Supposons l'énoncé vrai pour n.
Supposons que $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$ admet $n+1$ discontinuités.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$
Il y a deux cas à considérer

1. a ou b est une discontinuité

   SPDG, supposons que a est la discontinuité.

   Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. a est l'unique discontinuité de $[a, a+\eta]$ et $\eta < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

   Alors, $[a+\eta, b]$ contient n discontinuités.

   De l'hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{R}\,[a+\eta, b]$.

   Il existe donc $\Delta \in \Omega\,[a+\eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$.

   On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f,\Delta_\varepsilon) &= \left(\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta)\right) + \left(\overline{M}(f,[a,a+\eta]) - \underline{M}(f,[a,a+\eta])\right)\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

2.

□