MAT346 - Analyse II
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

Table des matières

Chapitre 1 Intégration

Section 1.1 Intégrales de Riemann

Notation.
$\mathcal{B}[c,d] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}$.
$\mathcal{R}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}$.
$\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}$.

On suppose nos fonctions bornées.

Définition.

a) Une partition de $[a,b]$ est un ensemble fini de points $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$ t.q. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

b) L'ensemble des partitions de $[a,b]$ est $\Omega[a,b]$.

c) On dit Δ' est *plus fine* que Δ, noté $\Delta' \geq \Delta$, si $\Delta' \supseteq \Delta$.

d) *Raffinement commun* de Δ_1 et Δ_2, noté $\Delta_1 \vee \Delta_2$, est la partition de $[a,b]$ formée de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ordonnés.

e) La *norme* de Δ, notée $\|\Delta\|$, est $\|\Delta\| = \max_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|$.

f)

$$\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$
$$\underline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$

Remarque.

$$\|x\| \geq 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$
$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

Définition.

a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de f pour la partition Δ est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de f pour la partition Δ est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Proposition.

a)
$$\underline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)\leq\underline{S}(f,\Delta),\forall\Delta\in\Omega[a,b]$$

b)
$$\underline{S}(f,\Delta)\leq\overline{S}(f,\Delta)$$

c)
$$\overline{S}(f,\Delta)\leq\overline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)$$

Proposition. *Si* $\Delta'\geq\Delta$*, alors* $\overline{S}(f,\Delta')\leq\overline{S}(f,\Delta)$.

démonstration.
Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$$

$$\Delta' : a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<\bar{x}<x_i<\ldots<x_n=b$$

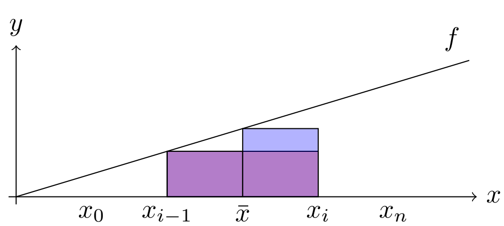
On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta)-\overline{S}(f,\Delta') &= \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\cdot(x_1-x_{i-1})\right]\\ &\quad-\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\cdot(\bar{x}-x_{i-1})+\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\cdot(x_i-\bar{x})\right]\\ &=(x_i-\bar{x})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\right]\\ &\quad+(\bar{x}-x_{i-1})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\right]\\ &\geq 0\end{aligned}$$

□

Proposition. *Si* $\Delta'\geq\Delta$*, alors* $\underline{S}(f,\Delta')\geq\underline{S}(f,\Delta)$

démonstration.



□

Remarque. $\underline{S}(f,\Delta)=-\overline{S}(-f,\Delta)$.

Corollaire. $\forall\Delta_1,\Delta_2\in\Omega[a,b],\underline{S}(f,\Delta_1)\leq\overline{S}(f,\Delta_2)$

démonstration.
On a $\Delta_1\vee\Delta_2\geq\Delta_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\Delta_1)&\leq\underline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leq\overline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leq\overline{S}(f,\Delta_2)\end{aligned}$$

□

Définition.

a) La somme par défaut de f est $\underline{S}(f) = \sup\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}\,(f, \Delta)$.

b) La somme par excès de f est $\overline{S}(f) = \inf\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}\,(f, \Delta)$.

Théorème. $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$

démonstration.
Soit $\Delta_1 \in \Omega\,[a,b]$
$\underline{S}(f) = \sup \underline{S}\,(f, \Delta)$ est le plus petit majorant des $\underline{S}\,(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega\,[a,b]$.
Du corollaire précédant, on a que $\underline{S}\,(f, \Delta) \leq \overline{S}\,(f, \Delta_1)$.
Donc, $\overline{S}\,(f, \Delta_1)$ est un majorant des $\underline{S}\,(f, \Delta)$.
Ainsi, $\underline{S}(f) \leq \overline{S}\,(f, \Delta_1)$.
De même, $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}\,(f, \Delta)$ est le plus grand minorant des $\overline{S}\,(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega\,[a,b]$.
Comme $\underline{S}(f)$ est un minorant des $\overline{S}\,(f, \Delta)$, on a que $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$. □

Définition.
Soit $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$. On dit que f est *intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et on note $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$. La valeur commune de $\underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f)$ est notée $\int_a^b f(x)\,dx$

Critère d'intégrabilité

Théorème (Critère d'intégrabilité)**.**
Soit $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$*. Alors* $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$ *si, et seulement si,* $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega\,[a,b])$ *t.q.* $\overline{S}\,(f, \Delta) - \underline{S}\,(f, \Delta) < \varepsilon$.

démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

On a $\displaystyle\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}\,(f, \Delta)$.

Comme $\overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut minorer $\overline{S}\,(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_1 \in \Omega\,[a,b]$ t.q. $\overline{S}\,(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

De même, $\displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}\,(f, \Delta)$.

Comme $\underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut majorer $\underline{S}\,(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_2 \in \Omega\,[a,b]$ t.q. $\underline{S}\,(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}\,(f, \Delta) - \underline{S}\,(f, \Delta) &\leq \overline{S}\,(f, \Delta_1) - \underline{S}\,(f, \Delta_2) \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \left(\overline{S}(f) - \underline{S}(f)\right) + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $\exists \Delta$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

Mais alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Du théorème du sandwich, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$, car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

$\square$

Corollaire. *S'il existe $\Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) = \underline{S}(f, \Delta)$, alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Théorème. *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

démonstration.

Soit $f \in \mathcal{C}[a, b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par la proposition d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n\varepsilon > b - a$.

Rappel.

f est uniformément continue sur $[a, b]$ si $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Rappel.

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Comme $f \in \mathcal{C}[a, b]$, elle est uniformément continue sur $[a, b]$.
Alors, $\exists \delta > 0$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$.
Soit donc $\Delta \in \Omega[a, b] : a = x_0 < x_1, \ldots < x_n = b$ avec $\|\Delta\| < \delta$.
Alors, $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{1}{n}$.

Remarque. $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])$ peut être noté $\operatorname{osc}_f([x_{i-1}, x_i])$.

On obtient

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b - a}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{R}[a, b]$. $\square$

Théorème. *Toute $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

démonstration.

(1) Si f est constante, alors $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) = 0 < \varepsilon$.

(2) Si f est croissante,

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon > (b - a)(f(b) - f(a))$

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}, i \in [0..n]$

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}\,(f,\Delta)-\underline{S}\,(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{M}\,(f,[x_{i-1},x_i])-\underline{M}\,(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i-x_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\left(\frac{b-a}{n}\right)\\
&= \frac{b-a}{n}\,[f(b)-f(a)]\\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f\in\mathcal{R}\,[a,b]$.

(3) Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f\in\mathcal{R}\,[a,b]$.
Donc, $f\in\mathcal{R}\,[a,b]$.

□

Théorème.
Si $f_1,f_2\in\mathcal{R}\,[a,b]$, alors $f_1+f_2\in\mathcal{R}\,[a,b]$ et $\int(f_1+f_2)=\int f_1+\int f_2$.

démonstration.
Soit $\varepsilon>0$.
Comme $f_i\in\mathcal{R}\,[a,b]$, $\exists\Delta_i\in\Omega\,[a,b]$ t.q. $\overline{S}\,(f_i,\Delta_i)-\underline{S}\,(f_i,\Delta_i)<\frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $\Delta=\Delta_1\vee\Delta_2$.
Alors, $\overline{S}\,(f_i,\Delta)-\underline{S}\,(f_i,\Delta)<\frac{\varepsilon}{2}$.
Supposons $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}\,(f_1+f_2,\Delta)&\le\overline{S}\,(f_1,\Delta)+\overline{S}\,(f_2,\Delta)\\
\underline{S}\,(f_1+f_2,\Delta)&\ge\underline{S}\,(f_1,\Delta)+\underline{S}\,(f_2,\Delta)
\end{aligned}$$

Car $\sup(f_1+f_2)\le\sup f_1+\sup f_2$ et $\inf(f_1+f_2)\ge\inf f_1+\inf f_2$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{S}\,(f_1+f_2,\Delta)-\underline{S}\,(f_1+f_2,\Delta) &\le \overline{S}\,(f_1,\Delta)+\overline{S}\,(f_2,\Delta)-\underline{S}\,(f_1,\Delta)-\underline{S}\,(f_2,\Delta)\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f_1+f_2\in\mathcal{R}\,[a,b]$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_1+f_2 &\le \overline{S}\,(f_1+f_2,\Delta)\\
&\le \overline{S}\,(f_1,\Delta)+\overline{S}\,(f_2,\Delta)\\
&< \underline{S}\,(f_1,\Delta)+\frac{\varepsilon}{2}+\underline{S}\,(f_2,\Delta)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&\le \int_a^b f_1+\frac{\varepsilon}{2}+\int_a^b f_2+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b f_1+f_2<\int_a^b f_1+\int_a^b f_2+\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$.
Donc, $\int_a^b f_1+f_2\le\int_a^b f_1+\int_a^b f_2$.
De même, on peut montrer que $\int_a^b f_1+f_2\ge\int_a^b f_1+\int_a^b f_2$.
Donc, $\int_a^b f_1+f_2=\int_a^b f_1+\int_a^b f_2$. □

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors* $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\int \lambda f = \lambda \int f$*.*

démonstration.
Laissé en exercice.
Utiliser $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ et $\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$. □

Corollaire.
Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$*, alors* $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$*.*

démonstration.
$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0$. □

Inégalité du triangle

Théorème (Inégalité du triangle)**.**
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$*, alors* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\left|\int f\right| \leq \int |f|$*.*

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
Alors, $\exists \Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
Enfin,

$$\begin{aligned}
-|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\
&\Rightarrow \int f \leq \int |f|
\end{aligned}$$

□

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $a \leq c < d \leq b$*, alors* $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[a,b]$*.*

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\exists \Delta_1 \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$.
Soit Δ_2 le raffinement de Δ_1 en ajoutant les points c et d.
Alors, $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) \leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$
Donc, $f \in \mathcal{R}[c,d]$. □

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $a < c < b$*, alors* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$*.*

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a,c]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\exists \Delta_2 \in \Omega[c,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$. Alors, $\Delta \in \Omega\,[a,b]$ et

$$\begin{aligned}\int_a^b f &\leq \overline{S}\,(f,\Delta)\\ &= \overline{S}\,(f,\Delta_1) + \overline{S}\,(f,\Delta_2)\\ &< \underline{S}\,(f,\Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}\,(f,\Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2}\\ &= \underline{S}\,(f,\Delta_1) + \underline{S}\,(f,\Delta_2) + \varepsilon\\ &\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$.
De même, $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Théorème. *Soit* $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.
Si f *possède* n *discontinuités dans* $[a,b]$*, alors* $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

démonstration.
Pour $n = 0$, $f \in \mathcal{C}\,[a,b]$, donc $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$ est un résultat connu.
Supposons l'énoncé vrai pour n.
Supposons que $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$ admet $n+1$ discontinuités.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$
Il y a deux cas à considérer

1. a ou b est une discontinuité

   SPDG, supposons que a est la discontinuité.

   Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. a est l'unique discontinuité de $[a, a+\eta]$ et $\eta < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

   Alors, $[a+\eta, b]$ contient n discontinuités.

   De l'hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{R}\,[a+\eta, b]$.

   Il existe donc $\Delta \in \Omega\,[a+\eta, b]$ t.q. $\overline{S}\,(f,\Delta) - \underline{S}\,(f,\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$.

   On a donc

$$\begin{aligned}\overline{S}\,(f,\Delta_\varepsilon) - \underline{S}\,(f,\Delta_\varepsilon) &= \big(\overline{S}\,(f,\Delta) - \underline{S}\,(f,\Delta)\big) + \big(\overline{M}\,(f,[a,a+\eta]) - \underline{M}\,(f,[a,a+\eta])\big)\,\eta\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

2. ni a ni b ne sont des discontinuités

   Soit $c \in]a,b[$ qui est une discontinuité de f.

   Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. c est l'unique discontinuité de $[c-\eta, c+\eta] \subset [a,b]$ et $\eta < \dfrac{\varepsilon}{8M}$.

   Alors, $[a, c-\eta]$ et $[c+\eta, b]$ contiennent au plus n discontinuités, par l'hypothèse de récurrence

   $\exists \Delta_1 \in \Omega\,[a, c-\eta]$ t.q. $\overline{S}\,(f,\Delta_1) - \underline{S}\,(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{4}$.

   $\exists \Delta_2 \in \Omega\,[c+\eta, b]$ t.q. $\overline{S}\,(f,\Delta_2) - \underline{S}\,(f,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{4}$.

   Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}\left(f, \Delta_{\varepsilon}\right)-\underline{S}\left(f, \Delta_{\varepsilon}\right) &= \left[\overline{S}\left(f, \Delta_1\right)-\underline{S}\left(f, \Delta_1\right)\right]+\left[\overline{S}\left(f, \Delta_2\right)-\underline{S}\left(f, \Delta_2\right)\right] \\
&\quad +\left[\overline{M}\left(f,[c-\eta, c+\eta]\right)-\underline{M}\left(f,[c-\eta, c+\eta]\right)\right](2\eta) \\
&< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+4M\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Théorème. *Soient* $f:[a,b] \rightarrow [c,d] \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $g:[c,d] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c,d]$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Remarque. L'hypothèse que $g \in \mathcal{C}[c,d]$ est nécessaire.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{n} & \text{si} & x=\frac{m}{n} \text{ et } \texttt{pgcd}(m,n)=1 \\ 0 & \text{sinon} & \end{array}\right. \end{array}$$

Fonction de Dirichlet modifiée.

$$\begin{array}{rcl} g:[0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x>0 \\ 0 & \text{sinon} & \end{array}\right. \end{array}$$

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$.

$$g \circ f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} & \end{array}\right.$$

$g \circ f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

Fonction de Dirichlet.

Lemme. *Si* $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a,b]$ *et* Δ' *s'obtient de* Δ *en ajoutant un unique point, alors* $\overline{S}(f,\Delta)-\overline{S}(f,\Delta') \leq 2\overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \|\Delta\|$.

démonstration.

Soient $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$.

$\Delta': a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<\bar{x}<x_i<\ldots<x_n=b$.

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta)-\overline{S}(f,\Delta') &= \overline{M}\left(f,[x_{i-1},x_i]\right)\cdot(x_i-x_{i-1})-\overline{M}\left(f,[x_{i-1},\bar{x}]\right)\cdot(\bar{x}-x_{i-1})-\overline{M}\left(f,[\bar{x},x_i]\right)\cdot(x_i-\bar{x}) \\
&= (\bar{x}-x_{i-1})\left(\overline{M}\left(f,[x_{i-1},x_i]\right)-\overline{M}\left(f,[x_{i-1},\bar{x}]\right)\right)+(x_i-\bar{x})\left(\overline{M}\left(f,[x_{i-1},x_-i]\right)-\overline{M}\left(f,[\bar{x},x_i]\right)\right) \\
&\leq 2\overline{M}\left(|f|,[x_{i-1}x_i]\right)\left((\bar{x}-x_{i-1})-(x_i-\bar{x})\right) \\
&\leq 2\overline{M}\left(|f|,[a,b]\right)\|\Delta\|
\end{aligned}$$

□

Corollaire. *Si* $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a,b]$ *et* Δ' *s'obtient de* Δ *en ajoutant* p *points, au plus un point par sous-intervalle de* Δ, *alors* $\overline{S}(f,\Delta)-\overline{S}(f,\Delta') \leq 2p\overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \|\Delta\|$.

Théorème de Darboux

Théorème (Darboux, 1875)**.**

Si $f \in \mathcal{B}[a,b]$, *alors*

$$\overline{S}(f)=\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f,\Delta) \qquad \underline{S}(f)=\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f,\Delta)$$

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$.

Ainsi, $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_0) < \overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\delta > 0$ t.q. $\delta < \min\limits_{i \in [1..n]} |x_i - x_{i-1}|$ et $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|, [a,b])}$.

Soit $\Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\|\Delta\| < \delta$.

Alors, $\|\Delta\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Considérons $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$.

Comme $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$, aucun sous-intervalle ouvert de Δ ne contient plus d'un point de Δ_0.

Comme Δ' s'obtient de Δ en ajoutant au plus $n-1$ points $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &\leq 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a,b]) \|\Delta\| \\
&< 2(n-1)\overline{M}(f, [a,b]) \delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f, \Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \overline{S}(f) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}(f, \Delta) &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} -\overline{S}(-f, \Delta) \\
&= -\lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}(-f, \Delta) \\
&= -\overline{S}(-f) \\
&= \underline{S}(f)
\end{aligned}$$

□

Définition. Soit $f \in \mathcal{B}[a,b]$.

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \in \Omega[a,b]$.

Soient $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pour $i \in [1..n]$.

Le nombre réel

$$S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

est appelé *somme de Riemann* de la fonction f correspondant à la partition Δ et aux points $\{\bar{x}_i\}_{i\in[1..n]}$.

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Alors, $(\forall \varepsilon > 0)$, $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$ t.q. pour toute partition Δ de $[a,b]$ avec $\|\Delta\| < \delta$ et pour tout choix de points $\{\bar{x}_i\}$, on a

$$\left| \int_a^b f - S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire.

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$$

démonstration.

On a $\underline{S}\,(f,\Delta) \leq S(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) \leq \overline{S}\,(f,\Delta)$.

Donc,

$$\underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}\,(f,\Delta) \leq \lim_{\|\Delta\|\to 0} S\,(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) \leq \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}\,(f,\Delta) = \overline{S}(f)$$

Comme $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$, on a $\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \displaystyle\int_a^b f$.

Par le théorème du sandwich, $S\,(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) = \displaystyle\int_a^b f$. □

Loi de la moyenne

Théorème (Loi de la moyenne)**.**

Soit $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

Alors, $\exists \mu \in \left[\underline{M}\,(f,[a,b])\,,\overline{M}\,(f,[a,b])\right]$ t.q. $\displaystyle\int_a^b f = (b-a)\cdot\mu$.

démonstration.

Soit ϕ la fonction donnée par $\phi(x) = (b-a)x$.

On a $\underline{M}\,(f,[a,b]) \leq f \leq \overline{M}\,(f,[a,b])$.

Donc

$$\phi(\underline{M}\,(f,[a,b])) = (b-a)\underline{M}\,(f,[a,b]) = \int_a^b \underline{M}\,(f,[a,b]) \leq \int_a^b f \leq \overline{M}\,(f,[a,b]) = (b-a)\overline{M}\,(f,[a,b]) = \phi(\overline{M}\,(f,[a,b]))$$

Rappel.

Théorème (Théorème de valeur intermédiaire).

f continue sur $[a,b]$, $f(a) < c < f(b)$ implique $\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $f(x_0) = c$.

Comme ϕ est continue sur $[\underline{M}\,(f,[a,b])\,,\overline{M}\,(f,[a,b])]$, du TVI, $\exists \mu \in [\underline{M}\,(f,[a,b])\,,\overline{M}\,(f,[a,b])]$ t.q. $\phi(\mu) = c$ pour tout $c \in [\phi(\underline{M}\,(f,[a,b])),\phi(\overline{M}\,(f,[a,b]))]$.

En particulier, si $c = \displaystyle\int_a^b f$, $\exists \mu$ t.q. $\phi(\mu) = \displaystyle\int_a^b c$, c'est-à-dire t.q. $(b-a)\mu = \displaystyle\int_a^b f$. □

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

Soit $\begin{array}{rcl} F : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^x f(f)dt \end{array}$

Alors,

a) $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \overline{M}\,(|f|\,,[a,b])\,(b-a)\cdot|x_1 - x_2|$ pour tous $x_1, x_2 \in [a,b]$;

b) F est uniformément continue sur $[a,b]$;

c) Si f est continue, alors F est différentiable et $F' = f$.

démonstration.

a) Supp $x_1 > x_2$

On a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left|\int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f\right| \\ &= \left|\int_{x_2}^{x_1} f\right| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} |f| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} \overline{M}\,(|f|\,,[a,b]) \\ &= \overline{M}\,(|f|\,,[a,b])\cdot|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$.

Prenons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\overline{M}\left(|f|, [a,b]\right)}$.

Soient $x, y \in [a,b]$ avec $|x-y| < \delta$.

Alors,

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| &\leq \overline{M}\left(|f|, [a,b]\right) \cdot |x-y| \\ &< \overline{M}\left(|f|, [a,b]\right) \cdot \delta \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

c) Soit $x_0 \in [a,b]$.

On a

$$\begin{aligned}F'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \\ &\overset{\text{Loi de la moyenne}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)f(x_0 + \theta(x-x_0))}{x - x_0} && \theta \in [0,1] \\ &= \lim_{x\to x_0} f(x_0 + \theta(x - x_0)) \\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

□

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Notation. F est une primitive de f.

Corollaire. *Si f est continue, alors f admet au moins une primitive.*

Corollaire. *Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors $F_1 - F_2 = C$ pour une constante C.*

Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral)**.**
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et F est une primitive de f, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

démonstration.
Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \in \Omega[a,b]$.

Comme F est continue et différentiable sur $[a,b]$ et a fortiori sur $[x_{i-1}, x_i]$, le théorème de la moyenne donne $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ t.q. $\dfrac{F(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$.

On a

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i)\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{array}{rrcccc} & \underline{M}\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right) & \leq & f(t_i) & \leq & \overline{M}\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right) \\ \Rightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\underline{M}\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right) & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\overline{M}\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right) \\ \Rightarrow & \underline{S}\left(f, \Delta\right) & \leq & F(b) - F(a) & \leq & \overline{S}\left(f, \Delta\right) \\ \Rightarrow & \displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}\left(f, \Delta\right) & \leq & F(b) - F(a) & \leq & \displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}\left(f, \Delta\right) = \overline{S}(f) = \int_a^b f \end{array}$$

Donc, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. □

Proposition. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors,*

a) $f \in \mathcal{R}[a, b]$*;*

b) $\int_a^b f = 0$.

démonstration.

a) déjà fait

b) Soit p le nombre de points où $f \neq 0$.
   Pour $p = 0$, c'est trivial.
   Supposons que la propriété est vraie pour p.
   Supposons que $f \neq 0$ en $p + 1$ points.
   Il y a deux cas à considérer

   1) $\exists c \in [a, b]$ avec $f(c) \neq 0$.
      Soit $\varepsilon > 0$.
      Soit $\eta > 0$ t.q.
      i) $a < c - \eta < c + \eta < b$;
      ii) c est le seul point de $[c - \eta, c + \eta]$ où $f \neq 0$;
      iii) $\eta < \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4\overline{M}(f, [a, b])}, \dfrac{-\varepsilon}{4\underline{M}(f, [a, b])}\right\}$.
      Par l'hypothèse de récurrence,
$$\int_a^{c-\eta} f \quad = \quad 0 \quad \int_{c+\eta}^b f$$
      Du critère d'intégrabilité, $\exists \Delta_1 : a < x_0 < x_1, \ldots < x_n = c - \eta$, $\exists \Delta_2 : c + \eta = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_i) \leq \overline{S}(f, \Delta_i) - \underline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.
      Prenons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
      On a
$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \Delta) &= \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta\overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \overline{S}(f, \Delta_2)\\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta\overline{M}(f, [a, b]) + \overline{S}(f, \Delta_2)\\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$
      De même, $\underline{S}(f, \Delta_i) > \overline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.
      et
$$\begin{aligned}\underline{S}(f, \Delta) &= \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta\underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \underline{S}(f, \Delta_2)\\ &\leq \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta\underline{M}(f, [a, b]) + \underline{S}(f, \Delta_2)\\ &< -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\\ &= -\varepsilon\end{aligned}$$
      Donc, $\varepsilon < \underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.
      Comme $\varepsilon > 0$ est arbirtaire, on en déduit que $\int_a^b f = 0$.

   2) $f(c) \neq 0$ en a ou en b.
      On procède de la même manière avec un sous-intervalle de largeur η autour de a et de b t.q. a et b sont les seules discontinuités dans ces intervalles.

□

Corollaire. *Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.q. $f = g$ sauf peut-être en nu nombre fini de points, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Section 1.2 Techniques d'intégration

Théorème (Intégration par parties)**.**
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables t.q. $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b fg' = fg \,|_a^b - \int_a^b gf'$$

démonstration.
Posons $h = fg$.
Alors,

$$\begin{aligned} h' &= f'g + fg' \\ \int_a^b h' &= \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \\ \int_a^b fg' &= \int_a^b h - \int_a^b f'g \\ &= h \,|_a^b - \int_a^b f'g \\ &= fg \,|_a^b - \int_a^b f'g \end{aligned}$$

□

Théorème (Changement de variable/Substitution)**.**
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\phi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ de classe C^1, c'est-à-dire ϕ est dérivable et ϕ' est continue. Si $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

démonstration.
Posons $h(x) = \int_a^x f(t)dt$.
Du théorème fondamental, h est uniformément continue, différentiable et $h' = f$.
Soit $g(t) = (h \circ \phi)(t) = h(\phi(t)) = \int_a^{\phi(t)} f(t)dt$.
On a h, ϕ différentiables, donc g l'est aussi et

$$\begin{aligned} g'(t) &= h'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ &= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta g'(t)dt \\ &= g(\beta) - g(\alpha) \\ &= h(\phi(\beta)) - h(\phi(\alpha)) \\ &= h(b) - h(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

Fractions partielles

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Avec $b^2-4ac<0$.
On ramène sur dénominateurs communs.
On ramène en une fraction.
On résoud le système d'équations avec $P(x)$.
On intègre chaque fraction.

Quelques substitutions

1. $f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \cdots\right)$, ou f est une fonction rationnelle $f=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

   On pose $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ où n est un multiple commun de $n_1, n_2, \cdots$.

   Exemple.

   $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \int x^2(x-1)^{-1/2}$.

   Posons $x-1=t^2$.

   Alors, $dx = 2tdt$.

   On obtient $\int x^2(x-1)^{-1/2} = \int (t^2-1)^2(t^2)^{-1/2} 2tdt = 2\int (t^2+1)^2 dt$.