MAT141 - Éléments d'algèbre
Donné par Jean-Philippe Burelle

Julien Houle

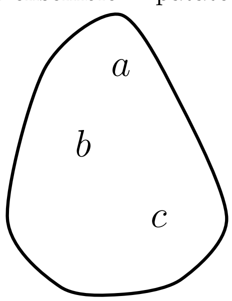
Automne 2025

Table des matières

Chapitre 1 Ensembles

Cours 1

Idée : ensemble = patate.

$E =$ 

$= \{a, b, c\}$

Notation. $E \subseteq F \Leftarrow \forall x \in E, x \in F$.

Remarque. $E \subseteq E$.

Notation. La cardinalité d'un ensemble, $|E|$, est le nombre d'éléments d'un ensemble.

Définition. Définition d'un ensemble par *compréhension*

Exemple. $E = \{n \in \mathbb{Z} | 1 \leqslant n \leqslant 20\}$.

Notation. $E = F \Leftrightarrow E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

Définition. Produit cartésien : $E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}$.

Définition. Fonction/Application
$f : A \to B$, A et B des ensembles, associe à *chaque* $x \in A$ un *unique* élément $f(x) \in B$.

Cours 2

Rappel.

• Ensemble	collection d'objets
• $\in$	"élément" d'un ensemble
• *sous-ensemble* ($\subseteq$)	$E \subseteq F$ si $x \in E$ *implique* $x \in F$
• $E = F$	si, et seulement si, $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$
• $\cup$	union
$\cap$	intersection
• $E \times F$	produit cartésien (paires (x, y))
• $f : E \to F$	*fonction* ou *application*, associe à $\underline{\text{chaque } x \in E}$ un unique $\underline{f(x) \in F}$, image de x par f
• $\mathbb{1}$	$\mathbb{1}_E : E \to E$ est définie comme $\mathbb{1}_E(x) = x$

Manières de définir une fonction

- énumérer $f(x)$ pour chaque $x \in E$
- donner une formule
  une formule ne définit pas toujours une fonction, elle doit être valide pour chaque x de l'ensemble de départ.
- en mots (décrire la valeur pour chaque $x \in E$)

- mélange de formule et mots

Définition. Une fonction $f : E \to F$ est *inversible* s'il existe une fonction $\underbrace{g : F \to E}_{*}$ telle que $\underbrace{g(f(x)) = x}_{**}$ pour tout $x \in E$ et $\underbrace{f(g(y)) = y}_{***}$ pour tout $y \in F$.

Exemple. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$ est inversible d'inverse $g(y) = y - 1$

Démonstration.
On vérifie que

$$g(f(x)) = x \qquad \begin{aligned} g(f(x)) &= g(x+1) \\ &= (x+1) - 1 \\ &= x \end{aligned}$$

$$f(g(y)) = y \qquad \begin{aligned} f(g(y)) &= f(y-1) \\ &= (y-1) + 1 \\ &= y \end{aligned}$$

□

Proposition. *Si f admet un inverse, celui-ci est unique.*

Démonstration.
Supposons que g_1 et g_2 sont tous deux inverses de f et montrons qu'elles sont gales.
(Pour démontrer que deux fonctions sont égales, il suffit de montrer que $g_1(y) = g_2(y)$ pour tout $y \in F$)
Soit $y \in F$.
On a

$$\begin{aligned} g_1(y) &\overbrace{=}^{***} g_1(f(\underbrace{g_2(y)}_{*})) \\ &\overbrace{=}^{**} g_2(y) \end{aligned}$$

□

Définition. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors la *composée* de f et g est la fonction $g \circ f : E \to G$ définie par la formule $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Définition (Redéfinition de l'inverse)**.**
$g \circ f = \mathbb{1}_E$
$f \circ g = \mathbb{1}_F$

Exemple.
$A = \{a, b, c\}$
$B = \{d, e, f\}$
$f : A \to B,\ a \mapsto d, b \mapsto e, c \mapsto f$
$g : B \to A,\ d \mapsto a, e \mapsto b, f \mapsto c$
$g \circ f : A \to A,\ g \circ f(x) = x,\ g \circ f = \mathbb{1}_A$.
De la même manière, $f \circ g = \mathbb{1}_B$.

Ainsi, g est l'inverse de f.

Notation. On note $g = f^{-1}$ l'inverse de f.

Rappel. Pour trouver l'inverse d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par une formule $f(x) = y$, on isole x en fonction de y.

Exemple.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x - 8 \\
y &= 3x - 8 \\
y + 8 &= 3x \\
\frac{y+8}{3} &= x \\
g(y) &= \frac{y+8}{3}
\end{aligned}
$$

Dans un devoir, on commence par la formule de l'inverse et on vérifie $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *injective* si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *surjective* si pour tout $y \in F$, $\exists\ x \in E$ t.q. $f(x) = y$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *bijective* si elle est injective **et** surjective.

Exemple.

- $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, f(x) = |x|$$
  f n'est pas injective, car $f(1) = |1| = 1$ et $f(-1) = |-1| = 1$, mais $1 \neq -1$.
  f est surjective, car soit $y \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, alors pour $x = y$, on a $f(x) = f(y) = |y| = y$.
- $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}$$
  f est injective :
  Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$.
  On suppose $f(x_1) = f(x_2)$.
  $$\begin{aligned} x_1 + 1 &= x_2 + 1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$
  f n'est pas surjective
  $y = 0 \in \mathbb{N}$ n'est pas égal à $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$. Si il existait x avec $f(x) = 0$, $x + 1 = 0$, $x = -1$, $x \notin \mathbb{N}$.
- $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$$
  f est injective :
  Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
  supposons $f(x_1) = f(x_2)$, $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$, $2x_1 = 2x_2$, $x_1 = x_2$.
  f est surjective :
  Soit $y \in \mathbb{R}$.
  On cherche x t.q. $f(x) = y$.
  Posons $x = \dfrac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$.
  Alors, $f(x) = f\left(\dfrac{y-3}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{y-3}{2} + 3 = y - 3 + 3 = y$.
  Ainsi, f est bijective.
- $$f : A \to B; A = \{1, 48, 57\}, B = \{a, b, c\}$$
  $$1 \mapsto a, 48 \mapsto a, 57 \mapsto b$$
  f n'est pas injective, car $1 \mapsto a$ et $48 \mapsto a$ avec $1 \neq 48$.
  f n'est pas surjective, car aucun élément de $x \in A \mapsto c$.

Remarque. La fonction $f' : A \to B'$ avec $B' = \{a, b\}$ est surjective.

Cours 3

Rappel. A, B deux ensembles

- $f : A \to B$ une fonction, associe à chaque $x \in A$ un unique $f(x) \in B$. $x \mapsto f(x)$.
- f est *inversible* s'il existe $g : B \to A$ t.q. $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$ et $f(g(b)) = b$ pour tout $b \in B$.
- l'inverse est *unique*.
- La composition de $f : A \to B$ avec $g : B \to C$ est $g \circ f : A \to C$ avec $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- f est injective si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f est surjective si pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ t.q. $f(a) = b$.
- f est bijective si elle est injective et surjective.

Proposition. $f : A \to B$ *est bijective* si, et seulement si, *elle est inversible.*

Démonstration.

$\Leftarrow$:

Supposons que f est inversible.
Alors, il existe un inverse $g : B \to A$.

(inj) :

Soient $x_1, x_2 \in A$.
On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$.
Alors, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
Donc, $x_1 = x_2$.

(surj) :

Soit $y \in B$.
Posons $x = g(y) \in A$.
Alors, $f(x) = f(g(y)) = y$.

Ainsi, f est bijective.

$\Rightarrow$:

Supposons f est injective et surjective.

Lemme. *Pour* chaque $y \in B$, *il existe un* unique $x \in A$ *t.q.* $f(x) = y$.

Démonstration.
<u>Existance</u> : Comme f est surjective, x existe.
<u>Unicité</u> : Supposons $x_1, x_2 \in A$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$ puisque f est injective. ■

On définit $g : B \to A$ par $g(y) = x$ où x est l'unique élément du lemme.
On vérifie :
Soit $x \in A$, alors $g(\underbrace{f(x)}_{y}) = x$, par définition de g.
Soit $y \in B$, alors $f(\underbrace{g(y)}_{\text{l'unique } x \text{ t.q. } f(x) = y}) = y$.

□

Définition. Une *opération* (interne, binaire) sur un ensemble E est un fonction $m : E \times E \to E$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (n,m) & \longmapsto & n+m \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (n,m) & \longmapsto & n \cdot m \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

n'est pas une opération, car $(1,0) \mapsto \frac{1}{0}$ qui n'est pas défini. (d n'est pas une fonction.)
Cependant,

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{Q}_* \times \mathbb{Q}_* & \longrightarrow & \mathbb{Q}_* \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

est une opération.

A un ensemble
$E = \{f : A \to A\}$, où f est une fonction.

$$\begin{array}{rccc} c : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (f,g) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

La composition est une opération.

Notation. On note la plupart du temps une opération par un symbole entre les entrées.

Exemple. $m(x,y) \coloneqq x * y$, ou $x + y$, ou $x \circ y$, ou xy.

Définition.
Un *élément neutre* pour une opération $*$ est un élément $e \in E$ t.q. pour tout $x \in E$, $e * x = x$ et $x * e = x$.

Cours 4

Rappel.

- $f : E \to F$ est bijective $\Leftrightarrow$ f est inversible.
- L'inverse est unique ($g = f^{-1}$)
- Opération : $m : E \times E \to E$, ou $\begin{array}{rccc} * : & E \times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & z \end{array}$
- Élément neutre : $e \in E$ t.q. $e * x = x$ et $x * e = x$.
- f est injective si tout $y \in F$ a au plus un antécédent
- f est surjective si tout $y \in F$ a au moins un antécédent
- f est bijective si tout $y \in F$ a exactement un antécédent
- x est antécédent de y si $f(x) = y$

Exemple.
Sur $\mathbb{N}$,

- 0 est neutre pour $+$.

$$0 + n = n$$
$$n + 0 = n$$

- 1 est neutre pour $\times$.

$$1 \times n = n$$
$$n \times 1 = n$$

Sur $\mathbb{Z}$, $-$ est une opération mais elle n'a pas délément neutre.

En effet,
Supposons que $e \in \mathbb{Z}$ est neutre, alors $e - n = n$ pour tout n.
Pour $n = 0$, $e - 0 = 0$, donc $e = 0$.
Pour $n = 1$, $e - 1 = 1$, donc $-1 = 1$. $\lightning$

- Sur l'ensemble $E = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, la multiplication matricielle $\times$ est une opération.

  La matrice $I = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ est neutre pour $\times$.
- Sur $E = \{f : A \to A\}$, la fonction $\mathbb{1}_A$ est neutre pour la composition de fonctions.

  Démonstration.
  On doit montrer $\mathbb{1}_A \circ f = f$ et $f \circ \mathbb{1}_A = f$ pour tout $f \in E$.
  (1) Soit $x \in A$, alors

  $$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A \circ f)(x) &= \mathbb{1}_A(f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Donc, $\mathbb{1}_A \circ f = f$.
  (2) Soit $x \in A$, alors

  $$\begin{aligned} (f \circ \mathbb{1}_A)(x) &= f(\mathbb{1}_A(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Donc,$f \circ \mathbb{1}_A = f$.

  □

On peut décrire une opération sur un ensemble fini avec sa table "de multiplication".

Exemple. $A = \{0, 1\}$

$f_1 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}, f_2 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}, f_3 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}, f_4 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$ On a $f_2 = \mathbb{1}_A$.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_4	f_3	f_2	f_1
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

Définition.
Une opération $*$ sur E est *associative* si pour tout $x, y, z \in E$, on a $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Proposition.
Si $*$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.

Démonstration.
Supposons que e et e' sont neutres pour $*$.
On a

$$\begin{array}{rcll} e * e' & = & e' & \text{car } e \text{ est neutre} \\ e * e' & = & e & \text{car } e' \text{ est neutre} \end{array}$$

Donc, $e = e'$. □

Définition.
Soit E un ensemble, $*$ une opération sur E et $e \in E$ un neutre pour $*$. On dit que $a, b \in E$ sont *inverses* si $a * b = e$ et $b * a = e$.
Dans ce cas, on dit que a et b sont inversibles.

Exemple.
Dans $\mathbb{Z}$ avec $+$, 3 et -3 sont inverses. En effet, on a $3 + (-3) = 0$ et $(-3) + 3 = 0$ avec 0 l'élément neutre de $+$.

Exemple.
Dans $\mathbb{Z}$ avec $\times$, le neutre est 1, mais seuls 1 et -1 sont inversibles. En effet, on a $1 \times 1 = 1$ et $(-1) \times (-1) = 1$.

Remarque.
L'élément neutre est son propre inverse. En effet, $e * e = e$, pour tout $*$ qui admet e comme élément neutre.

Proposition.

Si $*$ est associative et admet un élément neutre e, alors les inverses sont uniques s'ils existent.

Démonstration.

Soit $a \in E$.
Supposons b, b' sont inverses de a.
Alors,

$$\begin{aligned} b &= b * e \\ \text{car } b' \text{ est inverse de } a &= b * (a * b') \\ \text{associativité} &= (b * a) * b' \\ \text{car } b \text{ est inverse de } a &= e * b' \\ &= b' \end{aligned}$$

□

Notation.

Comme l'inverse de a est unique, on le note a^{-1}.

Exemple.

Dans $E = \{f : A \to A\}$, avec l'opération $\circ$, les fonctions bijectives sont exactement celles qui sont inversibles pour $\circ$.

Proposition.

La composition de fonctions est associative.

Démonstration.

Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$.
Soit $a \in A$.

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= h((g \circ f)(a)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(a) \\ \Rightarrow (h \circ g) \circ f &= h \circ (g \circ f) \end{aligned}$$

□

Chapitre 6 Groupes

Définition.

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération $*$ t.q.

(A) $*$ est associative

(N) $*$ admet un neutre

(I) tout $g \in G$ admet un inverse

Exemple.

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
Neutre : 0
Inverse de n : $-n$

(2) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes.

(3) $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe, car, par exemple, 2 n'est pas inversible.

(4) $(\mathbb{Q}, \times)$ n'est pas un groupe, car 0 n'est pas inversible.

(5) $(\mathbb{Q}_*, \times)$ et $(\mathbb{R}_*, \times)$ sont des groupes.
Neutre : 1
Inverse de x : $\frac{1}{x}$

Remarque. (1), (2) et (5) sont *commutatifs.*

Remarque. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.

Définition. Si l'opération d'un groupe est commutative, on note le groupe comme *abélien* (ou commutatif).

(6) $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.
$GL(n, \mathbb{R}) = \{M | M$ est une matrice $n \times n$ réelle inversible$\}$.
GL : général linéaire
Neutre : $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
M^{-1} la matrice inverse est l'inverse.
Pour $n \geqslant 2$, $GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas abélien.

(7) A un ensemble quelconque
$S(A) = \{f : A \to A | f$ est bijective$\}$ est un groupe pour $\circ$.
Neutre : $\mathbb{1}_A$
Inverse de f : f^{-1}

Remarque.

Pour $A = \{0, 1\}$

$f_1 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_2 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, f_3 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_4 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, S(A) = \{f_2, f_3\}$.

Cours 5

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$
  - G ensemble
  - $*$ opération sur G
  - (A) $*$ est associative
    $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$
  - (N) $*$ admet un élément neutre dans G
    $\exists e \in G$ t.q. $\forall a \in G, e * a = a = a * e$
  - (I) tout élément de G est inversible
    $\forall a \in G, \exists b \in G$ t.q. $a * b = e = b * a$
- Le neutre et l'inverse sont uniques

Remarque.
"Le groupe $\mathbb{R}$" implique l'opération $+$ et "le groupe $\mathbb{R}_*$" implique l'opération $\times$.

Propriétés élémentaires des groupes

(1) $\forall a, b \in G$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.
(2) $\forall a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$
(3) Si $a * b = a * c$, alors $b = c$
(4) Si $b * a = c * a$, alors $b = c$

Démonstration.

(1) On calcule

$$\begin{aligned}(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * (b^{-1} * a^{-1})) \\ &= a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) \\ &= a * (e * a^{-1}) \\ &= a * a^{-1} \\ &= e\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * (a^{-1} * (a * b)) \\ &= b^{-1} * ((a^{-1} * a) * b) \\ &= b^{-1} * (e * b) \\ &= b^{-1} * b \\ &= e\end{aligned}$$

Donc, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(2) Comme $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$, a est l'inverse de a^{-1}, donc $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

(3) Supposons $a * b = a * c$. Alors

$$\begin{aligned}a^{-1} * (a * b) &= a^{-1} * (a * c) \\ (a^{-1} * a) * b &= (a^{-1} * a) * c \\ e * b &= e * c \\ b &= c\end{aligned}$$

(4) Supposons $b * a = c * a$. Alors

$$\begin{aligned}(b * a) * a^{-1} &= (c * a) * a^{-1} \\ b * (a * a^{-1}) &= c * (a * a^{-1}) \\ b * e &= c * e \\ b &= c\end{aligned}$$

□

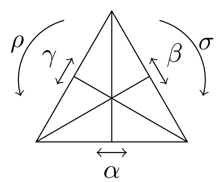
Exemple.
$(\mathbb{Z}_3, +)$.
$\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$+$ est associative.
$\overline{0}$ est l'élément neutre.
$(\overline{1})^{-1} = \overline{2}$.
$(\overline{2})^{-1} = \overline{1}$.
$(\mathbb{Z}_3, +)$ est un groupe abélien.

Remarque. La symétrie de la table par rapport à la diagonale implique la commutativité.

Exemple.
$(\mathbb{D}_3, \circ)$ - groupe dihédral d'ordre 3.
Groupe des symétries d'un triangle équilatéral.
$\mathbb{D}_3 = \Big\{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{identité}}, \underbrace{\alpha, \beta, \gamma}_{\text{réflexion}}, \underbrace{\rho, \sigma}_{\text{rotation}} \Big\}$.



$\circ$	ε	α	β	γ	ρ	σ
ε	ε	α	β	γ	ρ	σ
α	α	ε	ρ	σ	β	γ
β	β	σ	ε	ρ	γ	α
γ	γ	ρ	σ	ε	α	β
ρ	ρ	γ	α	β	σ	ε
σ	σ	β	γ	α	ε	ρ

$(\mathbb{D}_3, \circ)$ n'est pas un groupe abélien.

Cours 6

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$ avec A, N, I.
  Abélien : C.
- $$\begin{aligned} a * b &= a * c & \Rightarrow\quad b &= c \\ b * a &= c * a & \Rightarrow\quad b &= c \\ (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$
- *Exemple.*
  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}_*, \times), (\mathbb{R}_*, \times)$ sont des groupes abéliens ; $\mathbb{Z}_3, \mathbb{D}_3, GL(n, \mathbb{R})$ sont des groupes non abéliens.
  $S(E) = \{f : E \to E \mid f \text{ est bijective}\}$.

  Remarque. E n'est pas l'ensemble utilisé dans la définition du groupe.

Produit cartésien de groupes

$(G, *)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes.

Proposition.
$G \times H$ est un groupe lorsque muni de l'opération $(a, b) \bullet (a', b') = (a * a', b \diamond b')$, avec $a, a' \in G$ et $b, b' \in H$.

Démonstration.

(N) $e \in G$ le neutre et $e' \in H$ le neutre, alors $(e, e') \in G \times H$

$$\begin{aligned}(a,b) \bullet (e,e') &= (a * e, b \diamond e') \\ &= (a,b) \\ (e,e') \bullet (a,b) &= (e * a, e' \diamond b) \\ &= (a,b)\end{aligned}$$

(e, e') est bien neutre.

(I) $(a,b) \in G \times H$, alors (a^{-1}, b^{-1}) est inverse de (a,b).
En effet,

$$\begin{aligned}(a,b) \bullet (a^{-1},b^{-1}) &= (a * a^{-1}, b \diamond b^{-1}) \\ &= (e,e') \\ (a^{-1},b^{-1}) \bullet (a,b) &= (a^{-1} * a, b^{-1} \diamond b) \\ &= (e,e')\end{aligned}$$

(A) Soient $(a,b), (c,d), (e,f) \in G \times H$. On a

$$\begin{aligned}((a,b) \bullet (c,d)) \bullet (e,f) &= (a * c, b \diamond d) \bullet (e,f) \\ &= ((a * c) * e, (b \diamond d) \diamond f) \\ &= (a * (c * e), b \diamond (d \diamond f)) \\ &= (a,b) \bullet (c * e, d \diamond f) \\ &= (a,b) \bullet ((c,d) \bullet (e,f))\end{aligned}$$

□

Exemple.

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
  $(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$.
- $(\mathbb{Z}_2, +)$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$+$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$
$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$
$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$

Isomorphismes de groupes

Définition. $(G, *)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes.
Un *isomorphisme* de G vers H est une application $f : G \to H$ t.q.

(1) $\forall a, b \in G,\ f(a * b) = f(a) \diamond f(b)$.
Préservation des opérations

(2) f est bijective.

Exemple.

- $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_*^+, \times)$

  $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

  (1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= e^{x+y} \\ &= e^x \times e^y \\ &= f(x) \times f(y) \end{aligned}$$

  (2) $\ln : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ est inverse de f : $\ln e^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln x} = x, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(e_G) = e_H$, où e_G est l'élément neutre de G et e_H est l'élément neutre de H.*

Démonstration. Stratégie : montrer que $f(e_G)$ est neutre pour H et utiliser l'unicité.

Soit $b \in H$.

Comme f est bijective, $\exists a \in G$ t.q. $f(a) = b$

$$\begin{aligned} f(e_G) \diamond b &= f(e_G) \diamond f(a) \\ &= f(e_G * a) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b \diamond f(e_G) &= f(a) \diamond f(e_G) \\ &= f(a * e_G) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned}$$

On a donc que $f(e_G) \in H$ est neutre pour $\diamond$, mais comme l'élément neutre est unique, $f(e_G) = e_H$. □

Exemple. Pour $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$, $f(0) = e^0 = 1$.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, pour tout $a \in G$.*

Démonstration. Stratégie : montrer que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$ et utiliser l'unicité.

$$\begin{aligned} f(a^{-1}) \diamond f(a) &= f(a^{-1} * a) \\ &= f(e_G) \\ &= e_H \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(a) \diamond f(a^{-1}) &= f(a * a^{-1}) \\ &= f(e_G) \\ &= e_H \end{aligned}$$

On a donc que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$, mais comme l'inverse est unique, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. □

Exemple. Pour $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$, $f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} = f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$, où $-x$ est l'inverse de x pour $+$ et $\frac{1}{f(x)}$ est l'inverse de $f(x)$ pour $\times$.

Remarque. Si G, H sont des groupes finis et f est un isomorphisme, alors f "envoie la table de G à celle de H".

$$G : \begin{array}{c||c|c|c|c} * & e_G & a_1 & a_2 & \cdots \\ \hline e_G & & & & \\ \hline a_1 & & & a_1 * a_2 & \\ \hline a_2 & & & & \\ \hline \vdots & & & & \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c||c|c|c|c} \diamond & e_H & f(a_1) & f(a_2) & \cdots \\ \hline f(e_G) & & & & \\ \hline f(a_1) & & & f(a_1) \diamond f(a_2) & \\ \hline f(a_2) & & & & \\ \hline \vdots & & & & \end{array} : H$$

Avec $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \diamond f(a_2)$.

Exemple.

$\mathbb{Z}_2$:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

H :

$\circ$	ε	α
ε	ε	α
α	α	ε

C_2 :

$\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$\mathbb{Z}_2$, H et C_2 sont isomorphes.
Il existe un isomorphisme entre chaque paire.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : H \to G$ est un isomorphisme.*

Démonstration.

(1) Soient $b_1, b_2 \in H$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1 \diamond b_2) &= f^{-1}\left(f\left[f^{-1}(b_1)\right] \diamond f\left[f^{-1}(b_2)\right]\right) \\ &= f^{-1}\left(f\left[f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2)\right]\right) \\ &= f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2) \end{aligned}$$

(2) f^{-1} est bijective, car elle est inversible d'inverse f.

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \mathbb{1}_H \\ f^{-1} \circ f &= \mathbb{1}_G \end{aligned}$$

□

Proposition (Transitivité)**.**
Si $f : G \to H$ et $g : H \to K$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : G \to K$ est un isomorphisme.

Démonstration.

(1) Soient $a, b \in G$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a * b) &= g(f(a * b)) \\ &= g(f(a) \diamond f(b)) \\ &= g(f(a)) \oplus g(f(b)) \\ &= (g \circ f)(a) \oplus (g \circ f)(b) \end{aligned}$$

(2) $g \circ f$ est inversible d'inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Puissances d'éléments de groupes

Définition (par récurrence)**.**
$a \in G$, $n \in \mathbb{N}$

(1) $a^0 \coloneqq e_G$

(2) $a^n = a * a^{n-1}$, $\forall n \geqslant 1$

Exemple.

•

$$\begin{aligned} a^4 &= a * a^3 \\ &= a * a * a^2 \\ &= a * a * a * a^1 \\ &= a * a * a * a * a^0 \\ &= a * a * a * a * e \\ &= a * a * a * a \end{aligned}$$

- Dans $(\mathbb{Z}, +)$, $2^3 = 3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. par récurrence sur n.

(1) $n = 0$:

$$\begin{aligned} a^{0+m} &= a^m \\ &= e * a^m \\ &= a^0 * a^m \end{aligned}$$

(2) supposons que $a^{n+m} = a^n * a^m$ pour un $n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} a^{(n+1)+m} &= a^{n+m+1} \\ &= a * a^{n+m} \\ \text{hyp rec} &= a * (a^n * a^m) \\ &= (a * a^n) * a^m \\ &= a^{n+1} * a^m \end{aligned}$$

□

Définition. Pour $n \in \mathbb{Z}$.
Si $n \geqslant 0$, on a déjà défini a^n.
Si $n < 0$, on définit $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

Exemple. $a^{-3} = (a^{-1})^3 = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1}$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Proposition. $(a^n)^m = a^{nm}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. *Vraie aussi pour $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. par récurrence sur m.

(1) $m = 0$:

$$\begin{aligned} (a^n)^0 &= e \\ a^{n \cdot 0} &= a^0 = e \end{aligned}$$

(2) supposons que $(a^n)^m = a^{nm}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (a^n)^{m+1} &= (a^n)(a^n)^m \\ \text{hyp rec} &= (a^n)a^{nm} \\ &= a^{n+nm} \\ &= a^{n(m+1)} \end{aligned}$$

□

Cours 7

Rappel.

- Isomorphisme : $f : G \to H$ t.q.
  (1) $f(ab) = f(a)f(b)$
  avec $a * b$ et $f(a) \diamond f(b)$ implicitement.
  (2) f est bijective

  "même table"

- f, g isomorphismes $\Rightarrow f^{-1}, g \circ f$ isomorphismes.
  $\mathbb{1}_G : G \to G$ est trivialement un isomorphisme.
- G est isomorphe à H s'il existe un isomorphisme $f : G \to H$.
- Puissances :
  Soit $a \in G$ avec G un groupe.
  — $a^0 = e$
  — $a^{n+1} = aa^n$
  — $a^{-n} = (a^{-1})^n$
  — $a^{n+m} = a^n a^m$
  — $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- f isomorphisme
  — $f(e_G) = e_H$
  — $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Proposition. *f isomorphisme $f : G \to H$.*
$a \in G$. Alors, $f(a^n) = f(a)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. par récurrence sur n.

$n \geqslant 0$ (1) $n = 0$

$$\begin{aligned} f(a^0) &= f(e_G) \\ &= e_H \\ &= f(a)^0 \end{aligned}$$

(2) supposons que $f(a^n) = f(a)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(a^{n+1}) &= f(a \cdot a^n) \\ &= f(a)f(a^n) \\ \text{hyp rec} &= f(a)f(a)^n \\ &= f(a)^{n+1} \end{aligned}$$

$n < 0$ alors, $-n > 0$ et

$$\begin{aligned} f(a^n) &= f((a^{-1})^{-n}) \\ &= f(a^{-1})^{-n} \\ &= (f(a)^{-1})^{-n} \\ &= f(a)^n \end{aligned}$$

□

Exemple. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, avec la multiplication de matrices.

Soient $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

(A) : associatif, car la multiplication de matrices est associative.

(N) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ est neutre

(I) : l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, H est un groupe pour la multiplication matricielle.

On définit $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to H \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $f(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y)$

(2) *montrons que.* f est bijective.

- f est injective
  Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
  Supposons $f(x) = f(y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$x = y$$

- f est surjective
  Soit $Y = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, avec $y \in \mathbb{R}$.
  $Y = f(y)$.

$\square$

Sous-groupes

Définition. $H \subseteq G$ est un *sous-groupe* de G si H est un groupe pour la même opération que G.

Exemple.

- $\{e\} \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $G \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = 2\mathbb{Z} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$
- Dans $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, $\{\overline{0}, \overline{2}\}$ est un sous-groupe.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$

  Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$ et à $C_2 = (\{-1, 1\}, \times)$.
- $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +) \subseteq (\mathbb{R}, +)$.
- $C_2 \subseteq \mathbb{Q}_* \subseteq \mathbb{R}_*$.
- $\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$.
  $\{\varepsilon, \alpha\}$ et $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{D}_3$.

Notation. On note l'ensemble $m\mathbb{Z} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Cours 8

Rappel.

- $a \in G$.
  — $a^n = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n \text{ fois}}$
  — $a^n = a * a^{n-1}$
  — $a^0 = e$
  — $a^{-n} = (a^{-1})^n$
- Sous-groupe de $(G, *)$: $H \subseteq G$ qui est un groupe pour $*$.
  Exemple. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ pour $+$.

Exemple.

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

Proposition. *$H \subseteq G$ un sous-groupe.*

(1) Si G est abélien, alors H est abélien ;

(2) Le neutre de H est le neutre de G ;

(3) Si $a \in H$, son inverse $a^{-1} \in H$ est l'inverse de a dans G.

Démonstration.

(1) G est abélien, alors $\forall a, b \in G$, $ab = ba$.
En particulier, $\forall a, b \in H$, $ab = ba$.

(2) Le neutre de G e_G a la propriété que $\forall a \in G$, $e_G a = a = ae_G$.
Comme $H \subseteq G$, cette propriété est vraie pour H aussi.
Donc, $ae_G = a = e_G a$.
Ainsi, e_G est le neutre de H, par l'unicité de l'élément neutre.

(3) $a \in H$, il existe un inverse $b \in G$ pour a t.q. $ab = ba = e$.
Comme H est un groupe, $\exists! a^{-1} \in H$.
De $ab = e$, on a $a^{-1}ab = a^{-1}e$, donc $b = a^{-1}$.

□

Théorème.
Un sous-ensemble non-vide $H \subseteq G$ est un sous-groupe si, et seulement si, pour tous $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que H est un sous-groupe, donc $a, b \in H$, alors $b^{-1} \in H$.
De plus, H est fermé pour la multiplication, donc $ab^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) (N) H est non-vide, donc $\exists a \in H$.
Par hypothèse, $aa^{-1} = e \in H$.
(I) On vient de montrer que $e \in H$.
Soit $b \in H$ quelconque. Par hypothèse, $eb^{-1} = b^{-1} \in H$.
(A) On sait que $\forall a, b, c \in G$, $(ab)c = a(bc)$.
En particulier, $\forall a, b, c \in H$, $(ab)c = a(bc)$.
Finalement, H est fermé pour l'opération de G, car $\forall a, b \in H$, $b^{-1} \in H$.
Donc, par hypothèse, $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$.

□

Exemple.
Soit $m \in \mathbb{Z}$.
Posons $H = m\mathbb{Z} = \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -2m, -m, 0, m, 2m, \cdots\}$, muni de l'addition.

montrons que. H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
H est non-vide, car $m0 = 0 \in H$.
Soient $a, b \in H$.
Par définition de H, $\exists a', b' \in \mathbb{Z}$ t.q. $a = ma'$ et $b = mb'$.
Dans $\mathbb{Z}$, $b^{-1} = -mb'$.
On a $a + (-b) = ma' + (-mb') = m(a' - b') \in H$.
Donc, H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. □

Réciproquement, soit $H \subseteq \mathbb{Z}$ un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ quelconque. Alors $\exists m \in \mathbb{Z}$ t.q. $H = m\mathbb{Z}$.

Démonstration.
On sait que $0 \in H$.
Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$ et l'énoncé est vrai.
Sinon, H contient un autre élément $a \in H$, donc $-a \in H$.
En particulier, H contient au moins un entier positif.
Soit m le *plus petit* élément positif de H.
Soit $h \in H$ quelconque. On divise h par m, donc $h = qm + r$, où $q, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant r < m$.
Si $r = 0$, $h = qm \in m\mathbb{Z}$.
Sinon, comme $h \in H$ et $m \in H$, $h - qm \in H$, mais $h - qm = r$, donc $r \in H$.
Comme $0 < r < m$, il y a une contradiction à la définition de m.

↯

Ainsi, $H \subseteq m\mathbb{Z}$. Mais clairement, $m\mathbb{Z} \subseteq H$, car $m \in H$ et $mn \in H$, donc $H = m\mathbb{Z}$. □

Proposition.
Soit $f : G \to H$ un isomorphisme. Alors, $K \subseteq G$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $f(K)$ est un sous-groupe de H.

Notation. $f(K) = \{f(k) \mid k \in K\}$.

($\Rightarrow$) *Supposons que K est un sous-groupe de G.*
On sait que $e \in K$, alors $f(e) = e \in f(K)$, donc $f(K)$ est non-vide.
Soient $a, b \in f(K)$. On veut montrer que $ab^{-1} \in f(K)$.
Alors, $a = f(k)$ et $b = f(k')$, avec $k, k' \in K$.
Donc, $ab^{-1} = f(k)f(k')^{-1} = f(k)f(k'^{-1}) = f(kk'^{-1})$.
Comme $kk'^{-1} \in K$, $ab^{-1} \in f(K)$.

($\Leftarrow$) *On effectue la même preuve avec f^{-1} qui est un isomorphisme en remarquant que $f^{-1}(f(k)) = k$.*

Notation.
$G \xrightarrow{f} H$ avec f un isomorphisme est équivalent à $G \xrightarrow{\sim} H$.

Notation.
$H \subseteq G$ un sous-groupe est équivalent à $H \leqslant G$.

Proposition.
Soit $\{H_i\}_{i \in I}$ une collection de sous-groupes de G. Alors $\bigcap_{i \in I} H_i \leqslant G$.

Démonstration.
$H_i \leqslant G, \forall i \in I$.
Alors, $e \in H_i, \forall i$. Donc, $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$. En particulier, $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$.
Soient $a, b \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Alors, $a, b \in H_i, \forall i$.
Comme $H_i \leqslant G$, $ab^{-1} \in H_i, \forall i$, donc $ab^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$. □

Remarque. Si $H_1, H_2 \leqslant G$, $H_1 \cup H_2$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de G.

Exemple. $2\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
Plus précisément, $2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, mais $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

Exemple. $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$.

Chapitre 2 Applications et équivalences

Section 2.4 Relations d'équivalence

Définition. Une *relation déquivalence* sur un ensemble E est un sous-ensemble $R \subseteq E \times E$ satisfaisant

(1) réflexivité
$x \sim x, \forall x \in E$.

(2) symétrie
$x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

(3) transitivité
$x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$.

Notation. On note $x \sim y$ si, et seulement si, $(x, y) \in R$.

Exemple.

(1) $E = \mathbb{R}$
$x \sim y$ si, et seulement si, $|x| = |y|$
(refl) $|x| = |x|$, donc $x \sim x$.
(sym) Supposons $x \sim y$. Alors, $|x| = |y|$. Donc, $y \sim x$.
(trans) Supposons $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors, $|x| = |y|$ et $|y| = |z|$. Donc $|x| = |z|$. Ainsi, $x \sim z$.

(2) C est l'ensemble des élèves dans la classe.
$x \sim y$ si, et seulement si, x et y ont le même âge est une relation d'équivalence.

Définition. Si E est un ensemble et $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, la *classe d'éuivalence* de $x \in E$ est $\overline{x} = \{y \in E \mid y \sim x\} \subseteq E$.

Lemme. *$\overline{x} = \overline{y}$ si, et seulement si, $x \sim y$.*

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $\overline{x} = \overline{y}$.
Par (refl), $x \sim x$, donc $x \in \overline{x}$. Alors, $x \in \overline{y}$. Ainsi, $x \sim y$.

($\Leftarrow$) Supposons $x \sim y$.
($\subseteq$) Soit $z \in \overline{x}$. Alors $z \sim x$. Comme $x \sim y$, par (trans), $z \sim y$. Donc, $z \in \overline{y}$.
($\supseteq$) Soit $z \in \overline{y}$. Alors, $z \sim y$ et, par (sym), $y \sim z$. Comme $x \sim y$, par (trans), $x \sim z$ et, par (sym), $z \sim x$. Donc, $z \in \overline{x}$.
Ainsi, $\overline{x} = \overline{y}$.

□

Cours 9

Rappel.

- $H \leqslant G$, H un sous-groupe de G, si, et seulement si,
  — $H \neq \emptyset$;
  — $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$.

- Si $H \leqslant G$, H a le même neutre que G, mêmes inverses.
- G abélien $\Rightarrow H \leqslant G$ abélien.
- Si $f : G \to H$ isomorphisme, alors $K \leqslant G \Leftrightarrow f(K) \leqslant H$.
- Relations d'équivalence $\sim$ sur E :

(Refl) $a \sim a, \forall a \in E$;

(Sym) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$;

(Trans) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

- Classe d'équivalence : $\overline{a} = \{b \in E \mid b \sim a\}$.
- $a \sim b \Longleftrightarrow \overline{a} = \overline{b}$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$.
Équivalence modulo m :
$a \sim b$ si, et seulement si, $a - b = km$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Notation. $m \mid a - b$, m divise $a - b$: $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = km$.

$a \sim b \Longleftrightarrow m \mid a - b$.

Démonstration. que c'est bel et bien une équivalence

(Refl) Soit $a \in \mathbb{Z}$.
$a - a = 0m \Rightarrow a \sim a$.

(Sym) Supposons que $a \sim b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
Alors, $a - b = km$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Or, $-(a - b) = -km \Rightarrow b - a = (-k)m$, donc $b \sim a$.

(Trans) Supposons que $a \sim b$ et $b \sim c$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Alors, $a - b = k_1 m$ et $b - c = k_2 m$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
En additionant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} a - c &= k_1 m + k_2 m \\ &= (k_1 + k_2)m \end{aligned}$$

Donc, $a \sim c$.

□

Si $m = 2$, les classes d'équivalence sont

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 0\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 0 = 2k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k\} \\ &= 2\mathbb{Z} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{1} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 1\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 1 = 2k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k + 1\} \\ &= \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Remarque.

$$\overline{0} = \overline{2} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots \qquad \overline{1} = \overline{3} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots$$

Plus généralement, pour $m\mathbb{Z}$, on a m classes d'équivalence.

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}$$

Notation. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}\}$ pour la relation de congruence modulo m.

Définition. Une *partition* d'un ensemble E est une collection $\mathcal{P} = \{E_i\}$, avec $i \in I$ de sous-ensembles de E t.q.

(1) $\bigcup_{i \in I} E_i = E$;

(2) $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

Remarque. Chaque $x \in E$ est élément d'exactement un E_i.

Proposition. *Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, alors $\mathcal{P} = \{\overline{a} \mid a \in E\}$ est une partition de E.*

Exemple. $E = \mathbb{Z}$, $\sim$ équivalence modulo 3.
$\mathcal{P} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ est une partition de $\mathbb{Z}$.

Démonstration.

(1) Clairement, $\bigcup_{a \in E} \overline{a} \subseteq E$.
On veut montrer que $E \subseteq \bigcup_{a \in E} \overline{a}$.
Soit $x \in E$, alors $x \sim x$ par réflexivité, donc $x \in \overline{x}$ et $x \in \bigcup_{a \in E} \overline{a}$.

(2) Supposons que $x \in \overline{a}$ et $x \in \overline{b}$, avec $\overline{a} \neq \overline{b}$.
Alors, $x \sim a$ et $x \sim b$. Donc, par symétrie, $a \sim x$ et $x \sim b$. Donc, par transitivité, $a \sim b$. Donc $\overline{a} = \overline{b}$. Ceci est une contradiction, donc $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset, \forall \overline{a} \neq \overline{b} \in \mathcal{P}$.

□

On définit une opération sur $\mathbb{Z}_m$ pour la congruence modulo m.

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m & \to & \mathbb{Z}_m \\ (\overline{a}, \overline{b}) & \mapsto & \overline{a+b} \end{array}$$

Autrement dit, $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.

Remarque. L'écriture d'un élément $\overline{a}$ n'est pas unique ($\overline{a} = \overline{a'}$ si $a \sim a'$).

Il faut vérifier que l'opération $+$ est correctement définie (définie sans abiguïté).
Autrement dit, si $\overline{a} = \overline{a'}$ et $\overline{b} = \overline{b'}$, on veut montrer que $\overline{a+b} = \overline{a'+b'}$.

Cours 10

Rappel.

- Relation d'équivalence ($\sim$) $\to$ partition en classes d'équivalence ($\overline{a} = \{b \mid b \sim a\}$).
- Équivalence (congruence) $\mod m$ (sur $\mathbb{Z}$) :

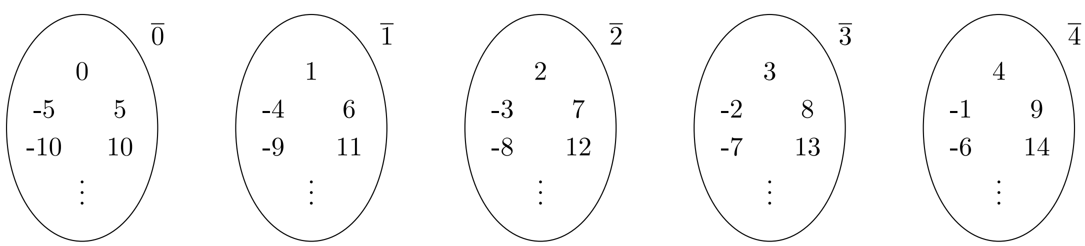
$$\begin{aligned} a \sim b &\Leftrightarrow m \mid a - b \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } a - b = km \end{aligned}$$

On note l'ensemble des classes d'équivalence $\mod m$ par $\mathbb{Z}_m = \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$.
On veut définir une opération $+$ sur $\mathbb{Z}_m$ par $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.
On doit vérifier que cette définition n'est pas ambiguë (ne dépend pas des représentants).
Supposons $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ et $\overline{b_1} = \overline{b_2}$. On doit vérifier que $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$, c'est-à-dire que $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.
Les hypothèses donnent : $a_1 - a_2 = k_a m$ et $b_1 - b_2 = k_b m$. En additionnant ces deux équations, on obtient $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = k_a m + k_b m$. Alors, $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (k_a + k_b)m$. Donc, $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.

□

Remarque. On doit faire ce genre de preuve pour chaque définition de fonction/opération qui ont comme domaine des classes d'équivalence.

Exemple. $m = 5$.



Pour faire $\overline{2}+\overline{1}$, on peut prendre $\overline{2+1}=\overline{2}$, ou bien $\overline{17+(-4)}=\overline{13}$.

Proposition. $(\mathbb{Z}_m,+)$ *est un groupe abélien.*

Démonstration.

(A) Soient $a,b,c\in\mathbb{Z}_m$.

$$\begin{aligned}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}&=\overline{a+b}+\overline{c}\\&=\overline{(a+b)+c}\\&=\overline{a+(b+c)}\\&=\overline{a}+\overline{b+c}\\&=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)\end{aligned}$$

(C) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}=\overline{b+a}=\overline{b}+\overline{a}$.

(N) $\overline{0}+\overline{a}=\overline{0+a}=\overline{a}$, donc $\overline{0}$ est neutre. Par commutativité, la propriété est satisfaite.

(I) $\overline{a}+\overline{-a}=\overline{a-a}=\overline{0}$, donc $\overline{-a}$ est l'inverse de $\overline{a}$. Par commutativité, la propriété est satisfaite.
On peut donc écrire $-\overline{a}=\overline{-a}$.

□

Ordre et groupes cycliques

Définition. Soient G un groupe et $a\in G$.
L'*ordre* de a, noté $o(a)$ est la plus petite quantité positive $k\in\mathbb{N}_*$ t.q. $a^k=e$, si elle existe. Sinon, on note $o(a)=\infty$.

Exemple.

- $o(e)=1$
- Dans $\mathbb{D}_3$
  - $o(\alpha)=2$
  - $o(\rho)=3$
- Dans $\mathbb{Z}$
  - $o(0)=1$
  - $o(n)=\infty,\ \forall n\neq 0$
- Dans $\mathbb{Z}_6$
  - $o(\overline{2})=3$

Proposition. *Soit* $m\in\mathbb{Z}$. $a^m=e$*, si, et seulement si,* $o(a)\mid m$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $a^m=e$.
On divise m par $o(a)$: $m=q\cdot o(a)+r$, avec $0\leqslant r<o(a)$.
Si $r=0$, $o(a)\mid m$ et on a terminé.
Supposons que $0<r<o(a)$, alors

$$\begin{aligned}r&=m-q\cdot o(a)\\a^r&=a^{m-q\cdot o(a)}\\&=a^m\cdot a^{-q\cdot o(a)}\\&=e\cdot(a^{o(a)})^{-q}\\&=e\cdot e^{-q}\\&=e\end{aligned}$$

mais $0<r<o(a)$ contredit la minimalité de $o(a)$.

□

Cours 11

Rappel.

- $a \sim b \Leftrightarrow m \mid a - b$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$ sont les classes d'équivalence.
- $(\mathbb{Z}_m, +)$ est un groupe, où $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.
- $o(a) = \min\{k \in \mathbb{N}_* \mid a^k = e\}$ ordre de a. Si $a^k \neq e$, $\forall k > 0$, $o(a) = \infty$.
- Si $a^k = e$, $o(a) \mid k$.

Exemple.

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ M^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^4 &= -M \\ M^5 &= -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ M^6 &= \left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $o(M) = 6$, puisque $M^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Chapitre 6 Groupes (suite)

Section 6.13 Groupes symétriques S_n

Rappel. $S(E) = \{f : E \to E \mid f \text{ est bijective}\}$.
$S(E)$ est un groupe lorsque muni de l'opération $\circ$.
$\mathbb{1}_E$ est l'élément neutre.
f^{-1} est l'élément inverse de f.
$S(E)$ s'appelle le *groupe symétrique* de l'ensemble E.

Remarque.
$E = \{\text{rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo, violet}\}$.

$$S(E) \ni f : \begin{cases} \text{rouge} & \mapsto & \text{jaune} \\ \text{jaune} & \mapsto & \text{rouge} \\ \text{autres} & \mapsto & \text{elles-mêmes} \end{cases}.$$

Le groupe $S(E)$ est isomorphe au groupe $S(\{1,2,3,4,5,6,7\})$, en numérotant les éléments.

Définition. $S_n = S(\{1, 2, \cdots, n\})$ le groupe symétrique de n éléments.
Les éléments de S_n sont des bijections, aussi appelées permutations.

Notation. On note une permutation σ de la manière suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 4 \\ 4 & \mapsto & 3 \end{array}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

L'élément neutre est $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_2$.

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{D}_3$.

Remarque. Tous les élément de S_3 donnent des isométries du triangle, mais pas tous les éléments de S_4 donnent des isométries du carré.

Proposition. *S_n contient $n!$ éléments.*

idée.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ n \text{ choix} & n-1 \text{ choix} & n-2 \text{ choix} & & 1 \text{ choix} \end{array}$$

Ainsi, $n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$. #

Définition. Un *cycle* est une permutation de la forme $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_l \to a_1$, où $a_i \neq a_j$ quand $i \neq j$.

$$\begin{tikzcd} & a_1 \arrow[dr, bend left] & \\ a_l \arrow[ur, bend left] & & a_2 \arrow[dl, bend left] \\ & \cdots \arrow[ul, bend left] & \end{tikzcd}$$

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur $l = 3$. $\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, bend left] & \\ 3 \arrow[ur, bend left] & & 2 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur $l = 3$. $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop below] & 3 \arrow[loop below] \end{tikzcd}$ $\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, bend left] & \\ 5 \arrow[ur, bend left] & & 4 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$

Notation. Écriture raccourcie pour un cycle : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$.

Proposition. *L'ordre d'un cycle est égal à sa longueur.*

Démonstration.
Si le cycle σ permute les éléments a_i comme $\sigma = a_1 \xrightarrow{\sigma} a_2 \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} a_l \xrightarrow{\sigma} a_1$.
Alors, calculons σ^l

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_l \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_l & a_1 & a_2 & \cdots & a_{l-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\sigma^l = e$. □

Exemple. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas un cycle.
Cependant, σ se décompose en cycles $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$, où $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition. *Toute permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit de manière unique comme une composition de* cycles disjoints. *(les cycles sont uniques, mais pas l'ordre de l'écriture).*

Notation. Des cycles disjoints sont des cycles de *supports* disjoints, où le support d'un cycle est $\text{supp}(\sigma)\{i \mid \sigma(i) \neq i\}$.

Lemme. *Les cycles disjoints commutent entre eux.*

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Soient $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$ et $\eta = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$ deux cycles disjoints.
Soit $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
Il y a trois cas :

(1) $i \in \text{supp}(\sigma)$, $i \notin \text{supp}(\eta)$.

$$\sigma \circ \eta(i) = \sigma(i)$$
$$\eta \circ \sigma(i) = \sigma(i)$$

(2) $i \notin \text{supp}(\sigma)$, $i \in \text{supp}(\eta)$.

$$\sigma \circ \eta(i) = \eta(i)$$
$$\eta \circ \sigma(i) = \eta(i)$$

(3) $i \notin \text{supp}(\sigma)$, $i \notin \text{supp}(\eta)$.

$$\sigma \circ \eta(i) = i$$
$$\eta \circ \sigma(i) = i$$

□

idée de la démonstration. Par récurrence.
$n = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Si vrai pour toutes les permutations de longueur $\leqslant n$.
σ permutation de $n+1$ éléments.
On prend $i \in \text{supp}(\sigma)$.

$$\underbrace{i \to \sigma(i) \to \sigma^2(i) \to \sigma^3(i) \to \cdots \to \sigma^n(i)}_{n+1 \text{ éléments de } \{1,2,\cdots,n\}}$$

ces éléments ne peuvent pas tous être distincts.
$\exists m_1 > m_2$ t.q. $\sigma^{m_1}(i) = \sigma^{m_2}(i)$, donc $\sigma^{m_1-m_2}(i) = i$.
Alors, $i \to \sigma(i) \to \sigma^2(i) \to \cdots \to \sigma^{m_1-m_2-1}(i) \to i$ est un cycle.
Les éléments restants $\{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \cdots, \sigma^{m_1-m_2-1}(i)\}$ sont permutés entre eux par σ.
Utiliser l'hypothèse de récurrence. #

Exemple.

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 8 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition. *L'ordre d'une permutation σ est le* `ppcm` *des longueurs des cycles dans sa décomposition.*

Démonstration. $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_k$, où σ_i sont des cycles de longueur l_i.
Puisque les cycles disjoints commutent, $\sigma^m = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k)^m = \sigma_1^m\sigma_2^m\cdots\sigma_k^m$.
$\sigma_1^m\sigma_2^m\cdots\sigma_k^m = e$, si, et seulement si, $\sigma_1^m = e$, $\sigma_2^m = e$, $\cdots$, $\sigma_k^m = e$.
Alors, $o(\sigma_1) \mid m$, $o(\sigma_2) \mid m$, $\cdots$, $o(\sigma_k) \mid m$.
Donc, $l_i \mid m$, $\forall i$.
L'ordre de σ m est le plus petit multiple des l_i. □

Cours 12

Rappel.

- $S_n = S(\{1, 2, \ldots, n\}) = \{\sigma \mid \sigma$ est une bijection de {1,2,...,n}} est un groupe pour $\circ$.
- Notations : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

  Cycle : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$
- $o\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{pmatrix} = l$
- Toute permutation de S_n s'écrit comme un produit (composition) de cycles disjoints uniques

- Les cycles disjoints commutent
- Si $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ est la décomposition, $o(\sigma) = \texttt{ppcm}(l_1, \ldots, l_k)$, où l_k est la longueur de σ_k

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$o(\sigma) = \texttt{ppcm}(2, 2, 3) = 6$.

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \circ \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^2 \circ \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Définition. Le *signe* d'une permutation $\sigma \in S_n$ est le nombre

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma) &= \left(\frac{\cancel{3-4}}{\cancel{1-2}}\right)\left(\frac{\cancelto{-1}{3-1}}{\cancel{1-3}}\right)\left(\frac{\cancelto{-1}{3-2}}{\cancel{1-4}}\right)\left(\frac{\cancelto{-1}{4-1}}{\cancel{2-3}}\right)\left(\frac{\cancelto{-1}{4-2}}{\cancel{2-4}}\right)\left(\frac{\cancel{1-2}}{\cancel{3-4}}\right) \\ &= (-1)^4 = 1 \end{aligned}$$

Remarque. Chaque terme $(i - j)$ apparaît au dénominateur et au numérateur, à signe près, donc $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Proposition. *Soient* $\alpha, \beta \in S_n$, *alors* $\operatorname{sgn}(\alpha \circ \beta) = \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \operatorname{sgn}(\beta)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\alpha \circ \beta) &= \prod_{i<j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j} \\ &= \prod_{i<j} \left(\frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j}\right)\left(\frac{\beta(i) - \beta(j)}{\beta(i) - \beta(j)}\right) \\ &= \prod_{i<j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\beta(i) - \beta(j)}{i - j} \\ &= \left(\prod_{i<j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)}\right) \cdot \operatorname{sgn}(\beta) \\ &= \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \operatorname{sgn}(\beta) \end{aligned}$$

□

Définition. Un cycle longueur 2 s'appelle une *transposition*.

Remarque. On peut décomposer un cycle en un produit de transposition :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_l \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_{l-1} \end{pmatrix} \circ \cdots \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(2) = 3 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(3) &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}(2) \\ &= 5\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(5) &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}(5) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}(2) \\ &= 6\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(6) &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}(6) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}(6) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix}(2) \\ &= 8\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(8) &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}(8) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}(8) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix}(8) \\ &= 2\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}$$

Alors, $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\right) = (-1)^4 = 1.$

Proposition. *Le signe d'une transposition est -1.*

Démonstration. par exemple
$\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix} \in S_4$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\sigma) &= \left(\frac{\cancel{1-4}}{\cancel{1-2}}\right)\left(\frac{\cancel{1-3}}{\cancel{1-3}}\right)\left(\frac{\cancel{1-2}}{\cancel{1-4}}\right)\left(\frac{\cancel{4-3}^{-1}}{\cancel{2-3}}\right)\left(\frac{\cancel{4-2}^{-1}}{\cancel{2-4}}\right)\left(\frac{\cancel{3-2}^{-1}}{\cancel{3-4}}\right) \\ &= (-1)^3 = -1\end{aligned}$$

#

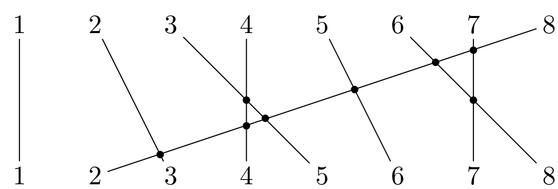
Proposition. *Le signe d'un cycle de longueur l est*

- 1 *si l est impair*
- -1 *si l est pair*

Plus généralement, le signe d'une permutation σ est $(-1)^\gamma$, où γ est le nombre de transpositions dans une *décomposition de σ en transpositions.*

Remarque. Une autre façon de calculer le signe d'une permutation.

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 2\end{pmatrix}$$



Connecter chaque élément, compter les intersections des segments, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^\gamma$, où γ est le nombre d'intersections. Ici, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^8 = 1$.

Chapitre 8 Homomorphismes

Cours 13

Définition. Soient G, H deux groupes et $f : G \to H$.
On dit que f est un *homomorphisme* (ou morphisme de groupes) si $f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in G$.

Exemple.

(1) Tous les isomorphismes sont des morphismes.

(2) $f : G \to H$, $a \mapsto e_H$ est toujours un homomorphisme.
En effet, $f(ab) = e_H = e_H e_H = f(a)f(b)$.
f n'est pas un isomorphisme, sauf si $G = H = \{e\}$.

(3) $\mathrm{sgn} : S_n \to \{-1, 1\} = C_2$.
$\mathrm{sgn}(\alpha \circ \beta) = \mathrm{sgn}(\alpha) \cdot \mathrm{sgn}(\beta)$, donc sgn est un homomorphisme.

(4) $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_*$ est un homomorphisme, car $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(5) Pour un $m \in \mathbb{Z}$ fixé, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = m \cdot n$ est un homomorphisme.
En effet, $f(n_1 + n_2) = m(n_1 + n_2) = mn_1 + mn_2 = f(n_1) + f(n_2)$.

(6) Si $H \leqslant G$, $i : H \to G$, $i(x) = x$ est un homomorphisme.
Ce n'est pas $\mathbb{1}$, car $H \neq G$ en général.

Proposition.
Si $f : G \to H$ est un homomorphisme, alors

(1) $f(e_G) = e_H$

(2) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Démonstration.

(1)

$$\begin{aligned} f(e_G) &= f(e_G e_G) \\ &= f(e_G)f(e_G) \\ f(e_G)^{-1}f(e_G) &= f(e_G)^{-1}f(e_G)f(e_G) \\ e_H &= e_H f(e_G) \\ &= f(e_G) \end{aligned}$$

(2) $f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e_G) = e_H$, donc $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

□

Proposition.
La composition de deux homomorphismes est un homomorphisme.

Démonstration.

Soient $f : G \to H$ et $g : H \to K$ deux homomorphismes, et $a, b \in G$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(ab) &= g(f(ab)) \\ &= g(f(a)f(b)) \\ &= g(f(a))g(f(b)) \\ &= (g \circ f)(a)(g \circ f)(b)\end{aligned}$$

□

Proposition. *Soit $f : G \to H$ un homomorphisme. Alors,*

(1) $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in G\}$ *est un sous-groupe de H ;*

(2) le noyau $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$ *est un sous-groupe de G.*

Exemple.

(a) $\mathrm{Im}(\det) = \mathbb{R}_*$, $\det \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = x$

$\ker(\det) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\} = SL(n, \mathbb{R})$.

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = mn$.

$\mathrm{Im}(f) = m\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$

$\ker(f) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$

Démonstration.

(1) $f(e_G) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$.

Si $a, b \in \mathrm{Im}(f)$, alors $a = f(c)$ et $b = f(d)$.

On a alors

$$\begin{aligned}ab^{-1} &= f(c)f(d)^{-1} \\ &= f(c)f(d^{-1}) \\ &= f(cd^{-1}) \in \mathrm{Im}(f)\end{aligned}$$

(2) $f(e_G) = e_H \Rightarrow f(e_G) \in \ker(f) \Rightarrow \ker(f) \neq \emptyset$.

Soient $a, b \in \ker(f)$. Alors, $f(a) = e_H$ et $f(b) = e_H$.

$$\begin{aligned}f(ab^{-1}) &= f(a)f(b^{-1}) \\ &= f(a)f(b)^{-1} \\ &= e_H e_H^{-1} \\ &= e_H\end{aligned}$$

donc $ab^{-1} \in \ker(f)$.

□

Exemple.

$\mathrm{Im}(\mathrm{sgn}) = C_2 = \{-1, 1\}$, si $n \geqslant 1$.

$\ker(\mathrm{sgn}) = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe de S_n.

Notation. On note ce sous-groupe A_n et on l'appelle le *groupe alterné*.

Exemple. $n = 3$.

$A_3 = \{e, (123), (132)\}$.

Proposition.

Soit $f : G \to H$ un morphisme.

$\ker(f) = \{e\}$ *si, et seulement si, f est injective.*

Démonstration.

($\Leftarrow$) Supposons que f est injective.
On sait que $e_G \in \ker(f)$.
Supposons que $\exists a \in \ker(f)$. On a

$$\begin{aligned} f(a) &= e_H && \text{par définition de } \ker \\ &= f(e_G) \\ a &= e_G && \text{car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

Donc, $\ker(f) = \{e_G\}$.

($\Rightarrow$) Supposons que $\ker(f) = \{e_G\}$.
Soient $a, b \in G$ t.q. $f(a) = f(b)$.

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ f(a)f(b)^{-1} &= e_H \\ f(a)f(b^{-1}) &= e_H \\ f(ab^{-1}) &= e_H \\ ab^{-1} &= e_G \\ a &= b \end{aligned}$$

□

Remarque. $\mathrm{Im}(f) = H$ si, et seulement si, f est surjective.

Cours 14

Rappel.

- homomorphisme : $f : G \to H$ t.q. $f(ab) = f(a)f(b)$
- Si f est un homomorphisme, alors
  - $f(e_G) = e_H$
  - $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
  - $f(a^n) = f(a)^n$
- $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in G\} \leqslant H$
- $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e_H\} \leqslant G$
- $\ker(f) = \{e_G\} \Leftrightarrow f$ est injective

Exemple.
$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_m \\ n &\mapsto \overline{n} \end{aligned}$ est un homomorphisme.
En effet,

$$\begin{aligned} f(n_1 + n_2) &= \overline{n_1 + n_2} \\ &= \overline{n_1} + \overline{n_2} \\ &= f(n_1) + f(n_2) \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}_m$.
$\ker(f) = m\mathbb{Z}$.

Équivalence modulo H et théorème de Lagrange

G un groupe quelconque et $H \leqslant G$ un sous-groupe.
On définit une relation sur G par $a \sim b$ si, et seulement si, $ab^{-1} \in H$.
Cette relation est appelée *équivalence modulo* H.

Proposition.
$\sim$ *est une relation d'équivalence.*

Démonstration.

(refl) Soit $a \in G$.
$aa^{-1} = e_G \in H$, puisque $H \leqslant G$.
Alors, $a \sim a$.

(sym) Soient $a, b \in G$.
Supposons que $a \sim b$.
Alors, $ab^{-1} \in H$.
Comme H est un groupe, H est fermé pour la prise d'inverses, donc $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$.
Ainsi, $b \sim a$.

(trans) Soient $a, b, c \in G$.
Supposons que $a \sim b$ et $b \sim c$.
Alors, $ab^{-1} \in H$ et $bc^{-1} \in H$.
Comme H est un groupe, H est fermé pour son opération, donc $\left(ab^{-1}\right)\left(bc^{-1}\right) = a\left(bb^{-1}\right)c^{-1} = ac^{-1} \in H$.
Ainsi, $a \sim c$.

□

Le groupe G se partitionne en classes d'équivalence modulo H : $G = \overline{a_1} \cup \overline{a_2} \cup \ldots$

Exemple.
$G = \mathbb{Z}_8$, $H = \{\overline{0}, \overline{4}\}$.
La classe de $\overline{0} \in G \mod H$ est l'ensemble des $\overline{n} \in \mathbb{Z}_8$ t.q. $\overline{0} - \overline{n} \in H$.
Alors, $-\overline{n} \in \{\overline{0}, \overline{4}\}$, donc $\overline{n} = \overline{0}$ ou $\overline{n} = \overline{4}$.
$C(\overline{0}) = \{\overline{0}, \overline{4}\}$, $C(\overline{1}) = \{\overline{1}, \overline{5}\}$, $C(\overline{2}) = \{\overline{2}, \overline{6}\}$, $C(\overline{3}) = \{\overline{3}, \overline{7}\}$.

Lemme.
La classe modulo H de $a \in G$ est $\{ha \mid h \in H\}$.

Notation.
$\{ha \mid h \in H\}$ est noté Ha.

Démonstration.
Soient $a, b \in G$.

($\subseteq$) Supposons que $b \sim a \mod H$, c'est-à-dire $b \in \overline{a}$.
Alors, $ba^{-1} \in H$, disons $ba^{-1} = h$ avec $h \in H$, donc $b = ha$.
$\therefore \overline{a} \subseteq Ha$.

($\supseteq$) Supposons que $b \in Ha$.
Alors, $b = ha$ avec $h \in H$, donc $ba^{-1} = h \in H$. Ainsi, $b \sim a$, donc $b \in \overline{a}$.
$\therefore Ha \subseteq \overline{a}$.

Ainsi, $Ha = \overline{a}$. □

Corollaire.
Toutes les classes d'équivalence modulo H ont le même nombre d'éléments.
Plus précisément, $|Ha| = |H|$.

Démonstration.
$\begin{array}{rcl} f : H & \to & Ha \\ h & \mapsto & ha \end{array}$ est bijective, car elle est inversible d'inverse $\begin{array}{rcl} f^{-1} : Ha & \to & H \\ b & \mapsto & ba^{-1} \end{array}$. □

Cours 15

Rappel. Pour déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ d'un homomorphisme f.

Exemple. $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z}_{12} & \to & \mathbb{Z}_6 \\ \overline{n} & \mapsto & \overline{n} \end{array}$.

$\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$.

Supposons que $\overline{n} \in \ker(f)$. Alors,

$$\begin{aligned} f(\overline{n}) &= \overline{0} \\ \overline{n} &= \overline{0} \\ n &= 6k \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc, $\ker(f) \subseteq 6\mathbb{Z}_{12}$.

Pour avoir $\ker(f) = 6\mathbb{Z}_{12}$, il faut aussi montrer $6\mathbb{Z}_{12} \subseteq \ker(f)$.

Supposons que $n = 6k \Rightarrow \overline{n} = \overline{6k} \Rightarrow f(\overline{n}) = f(\overline{6k}) = \overline{6k} = \overline{0}$, donc $\overline{n} \in \ker(f)$.

Rappel.

G groupe, $H \leqslant G$ sous-groupe.

- Équivalence $\mod H$:
  $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$;
- Les classes d'équivalence $\mod H$ sont $\overline{a} = Ha = \{ha \mid h \in H\}$;
- Toutes les classes ont la même taille, $|Ha| = |H|$.

Exemple.

$G = S_3 = \{e, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\}, H = \{e, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\}$.

Calculons les classes $\mod H$.

- $He = \{e \circ e, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ e\} = H$;
- $H\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} = \{e \circ \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\}$;
- $H\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} = \{e \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\}$.

Théorème (Lagrange)**.**

Soit G un groupe fini.

Si $H \leqslant G$, alors $|H| \,\big|\, |G|$.

Démonstration.

Les classes modulo H partitionnent G est sous-ensembles (classes) de taille $|H|$ chacun, donc

$$\begin{aligned} G &= Ha_1 \cup Ha_2 \cup \cdots \cup Ha_n \\ |G| &= |H| + |H| + \cdots + |H| \\ &= n\,|H| \end{aligned}$$

□

Corollaire. *$a \in G$, $o(a) \big| |G|$.*

Démonstration.

$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, le sous-groupe engendré par a, est un sous-groupe car

- $a^0 = e \in \langle a \rangle$, donc $\langle a \rangle \neq \emptyset$;
- Si $a^n, a^m \in \langle a \rangle$, alors $a^n(a^m)^{-1} = a^{n-m} \in \langle a \rangle$, donc $\langle a \rangle \leqslant G$.

Par le théorème de Lagrange, $|\langle a \rangle| \,\big|\, |G|$.

De plus, $|\langle a \rangle| = o(a)$, qu'on démontrera plus tard, donc $o(a) \big| |G|$. □

Corollaire. *Si $|G| = m$ et $a \in G$, alors $a^m = e$.*

Démonstration.

On sait que $a^{o(a)} = e$.

Par le corollaire précédent, $m = ko(a)$, car $o(a) \big| m$, donc $a^m = a^{ko(a)} = \left(a^{o(a)}\right)^k = e^k = e$. □

Corollaire (petit théorème de Fermat). *Si $a \in \mathbb{Z}$ et p est un nombre premier t.q. $p \nmid a$, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Lemme. *$\mathbb{Z}_{p_*}$ est un groupe pour la multiplication.*

Démonstration.
$\mathbb{Z}_{p_*}$ est un groupe avec $\left|\mathbb{Z}_{p_*}\right| = p - 1$.
Par le corollaire précédent, si $a \in \mathbb{Z}_{p_*}$, alors $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$, donc $a^{p-1} \equiv \pmod{p}$. □

Notation. $|G|$ s'appelle aussi l'*ordre* de G.

Définition. $H \leqslant G$.
On appelle *indice* de H dans G le nombre de classes modulo H et on le note $[G : H]$.
Le théorème de Lagrange implique que si G est fini, $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$.
L'indice peut être fini même si G et H sont infinis.

Exemple. $[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m$.

Exemple. Les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}_p$ avec p premier sont $\{\overline{0}\}$ et $\mathbb{Z}_p$, car si $H \leqslant \mathbb{Z}_p$. Par Lagrange, $|H| \in \{1, p\}$.

Exemple. $H \leqslant \mathbb{Z}_8$ qui contient au moins 5 éléments distincts, alors $H = \mathbb{Z}_8$, car les diviseurs de 8 sont $\{1, 2, 4, 8\}$.

Section 8.6 Groupes quotients

On veut définir une opération sur les classes d'équivalence $\bmod H$ pour en faire un groupe.

Tentative

On voudrait définir $Ha * Hb = H(a * b)$. Est-ce défini sans ambiguïté ?
Supposons que $Ha = Ha'$ et $Hb = Hb'$, c'est-à-dire $a(a')^{-1} \in H$ et $b(b')^{-1} \in H$. Alors, on voudrait montrer que $H(ab) = H(a'b') \Leftrightarrow (ab)(a'b') \in H \Leftrightarrow ab(b')^{-1}(a')^{-1} \in H$. Cependant, ce n'est pas vrai en général.

Définition.
Un sous-groupe $H \leqslant G$ est *distingué*, ou *normal*, si $\forall a \in G$, $Ha = aH$, c'est-à-dire, $\{ha \mid h \in H\} = \{ah \mid h \in H\}$.

Remarque.
$Ha = aH$ ne veut pas dire $ha = ah$ pour tout $h \in H$.
Plutôt, $Ha = aH$ signifie $ha = ah'$ pour un certain $h' \in H$.

Exemple.
Pour $G = S_3 = \{e, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\}$.

- Le sous-groupe $H = \{e, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\}$ n'est pas distingué. En effet, regardons la classe de $\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} H\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} &= \{\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\} \\ \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} H &= \{\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} \circ e, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

- Le sous-groupe $N = \{e, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\}$ est distingué. En effet

$$\begin{aligned} Ne &= \{e \circ e, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \circ e, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} \circ e\} = \{e, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\} = N \\ eN &= \{e \circ e, e \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, e \circ \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\} = \{e, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\} = N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} &= \{e \circ \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\} \\ \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} N &= \{\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ e, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un homomorphisme, $\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G.*

Démonstration. $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$.
Soit $b \in G$. On veut montrer que $b\ker(f) = \ker(f)b$.

($\subseteq$) Soit $ba \in b\ker(f)$.

$$ba = bab^{-1}b$$

posons $a' = bab^{-1}$

$$\begin{aligned} f(a') &= f(bab^{-1}) \\ &= f(b)f(a)f(b^{-1}) \\ &= f(b)ef(b^{-1}) \\ &= e \end{aligned}$$

donc $a' \in \ker(f) \Rightarrow ba = a'b \in \ker(f)b \Rightarrow b\ker(f) \subseteq \ker(f)b$.

($\supseteq$) Soit $ab \in \ker(f)b$.

$$ab = bb^{-1}ab$$

posons $a' = b^{-1}ab$

$$\begin{aligned} f(a') &= f(b^{-1}ab) \\ &= f(b^{-1})f(a)f(b) \\ &= f(b^{-1})ef(b) \\ &= e \end{aligned}$$

donc $a' \in \ker(f) \Rightarrow ab = ba' \in b\ker(f) \Rightarrow \ker(f)b \subseteq b\ker(f)$.

$\square$

Cours 16

Rappel.

- Classes d'équivalence à droite modulo H de $a \in G$: Ha
- Théorème de Lagrange : $|H| \bigm| |G|$
- Indice de H dans G : $[G : H]$ représente le nombre de classes
- Corollaires de Lagrange :
  - $o(a) \bigm| |G|$
  - $a^{|G|} = e$
  - petit théorème de Fermat : si $p \nmid a$, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, avec p un nombre premier
- Sous-groupe *normal* ou *distingué* : $Ha = aH$
- $\ker(f)$ est toujours distingué

Proposition.
$H \leqslant G$ est distingué si, et seulement si, pour tous $h \in H$ et $g \in G$, $ghg^{-1} \in H$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que H est distingué.
Soient $h \in H$ et $g \in G$. On a $gh \in gH$. Mais alors, $gh \in Hg$, donc $gh = h'g$ avec $h' \in H$.

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= h'gg^{-1} \\ &= h' \in H \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $ghg^{-1} \in H$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.
On veut montrer que $gH = Hg$, $\forall g \in G$.

($\subseteq$) Soit $gh \in gH$. On a

$$\begin{aligned} gh &= ghg^{-1}g \\ &= h'g \in Hg \end{aligned}$$

($\supseteq$) Soit $hg \in Hg$. Alors

$$\begin{aligned} hg &= gg^{-1}hg \\ &= gh' \in gH \end{aligned}$$

$\square$

Nouvelle tentative

Soit G un groupe. Soit N un sous-groupe normal de G.
On a $^G/_N$ l'ensemble des classes $\mod N$:

$$^G/_N = \{Na \mid a \in G\}$$

Proposition.
$^G/_N$ est un groupe par l'opération $(Na)(Nb) = N(ab)$.

Démonstration.
Montrons que l'opération est définie sans ambiguïté.
Supposons que $Na = Na'$ et $Nb = Nb'$. Alors, $a(a')^{-1} \in N$ et $b(b')^{-1} \in N$.

$$\begin{aligned} ab(a'b')^{-1} &= ab(b')^{-1}(a')^{-1} \\ &= ab(b')^{-1}(a')^{-1}aa^{-1} \end{aligned}$$

On sait que $b(b')^{-1} \in N$.
De plus, $(a')^{-1}a \in N$, car $a(a')^{-1} \in N$ et N est normal, donc $a^{-1}\left(a(a')^{-1}\right)a \in N$.
Comme N est fermé pour la multiplication, $b(b')^{-1}(a')^{-1}a \in N$ que nous noterons n.
On a donc

$$ab(a'b')^{-1} = ana^{-1} \in N$$

Ainsi, $N(ab) = N(a'b')$, donc l'opération est définie sans ambiguïté.
Maintenant, montrons que $^G/_N$ est un groupe.

(A) Soient $Na, Nb, Nc \in {}^G/_N$.

$$\begin{aligned} (NaNb)Nc &= N(ab)Nc \\ &= N((ab)c) \\ &= N(a(bc)) \\ &= NaN(bc) \\ &= Na(NbNc) \end{aligned}$$

(N) On vérifie que $Ne = N$ est neutre.

$$\begin{aligned} NeNa &= N(ea) \\ &= Na \end{aligned} \qquad \begin{aligned} NaNe &= N(ae) \\ &= Na \end{aligned}$$

(I) L'inverse de Na est Na^{-1}

$$\begin{aligned} NaNa^{-1} &= N(aa^{-1}) \\ &= N \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Na^{-1}Na &= N(a^{-1}a) \\ &= N \end{aligned}$$

$\square$

Notation. $N \trianglelefteq G$ représente N est un sous-groupe normal de G.

Proposition. $\begin{array}{rcl} p : G & \to & {}^{G}/_{N} \\ a & \mapsto & Na \end{array}$ *est un homomorphisme.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} p(ab) &= N(ab) \\ &= NaNb \\ &= p(a)p(b) \end{aligned}$$

□

Cours 17

Rappel.

- $N \trianglelefteq G$ sous-groupe normal (ou distingué)
  - $\forall g \in G$, $gN = Ng$
  - $\forall g \in G, \forall n \in N$, $gng^{-1} \in N$
- $f : G \to H$ homomorphisme $\Rightarrow \ker(f) \trianglelefteq G$
- Groupe quotient : ${}^{G}/_{N} = \{Ng \mid g \in G\}$
  - opération : $NaNb = Nab$
  - neutre : N
  - inverse : $(Na)^{-1} = Na^{-1}$
- $p : G \to {}^{G}/_{N}$ est un homomorphisme avec $p(a) = Na$.

Notation. Effectuer ghg^{-1} s'appelle la *conjugaison* de h par g.

Remarque. $H \leqslant G$ et $g \in G$, alors $gHg^{-1} \leqslant G$.

Dans le cas d'un sous-groupe normal, le sous-groupe obtenu par la conjugaison reste le même sous-groupe.

Exemple.

- Dans $\mathbb{D}_3$ [1]
  - $\{\varepsilon, \alpha\}$
  - $\{\varepsilon, \beta\}$
  - $\{\varepsilon, \gamma\}$

  ne sont pas normaux.
  - $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$

  est normal.
- Soient $G = \mathbb{D}_3$ et $N = \{\varepsilon, \rho, \sigma\}$.
  Les classes à droites sont
  - $N = N\varepsilon = \{\varepsilon, \rho, \sigma\}$
  - $N\alpha = N\beta = N\gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

  Alors, ${}^{G}/_{N} = \{N, N\alpha\}$.

$\circ$	N	$N\alpha$
N	N	$N\alpha$
$N\alpha$	$N\alpha$	N

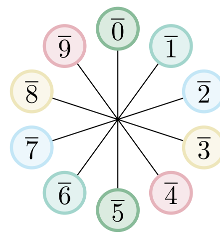
- Soient $G = \mathbb{Z}_{10}$ et $N = \{\overline{0}, \overline{5}\}$
  Les classes d'éuivalence sont
  - $N = N + \overline{0} = \{\overline{0}, \overline{5}\}$

1. Pour la définition de $\mathbb{D}_3$, voir p.10

- $N + \overline{1} = \{\overline{1}, \overline{6}\}$
- $N + \overline{2} = \{\overline{2}, \overline{7}\}$
- $N + \overline{3} = \{\overline{3}, \overline{8}\}$
- $N + \overline{4} = \{\overline{4}, \overline{9}\}$

$^{G}/_{N} = \{N, N + \overline{1}, N + \overline{2}, N + \overline{3}, N + \overline{4}\}$.

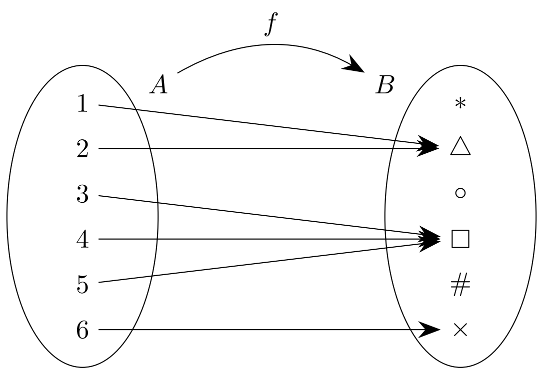
$\mathbb{Z}_{10}$:



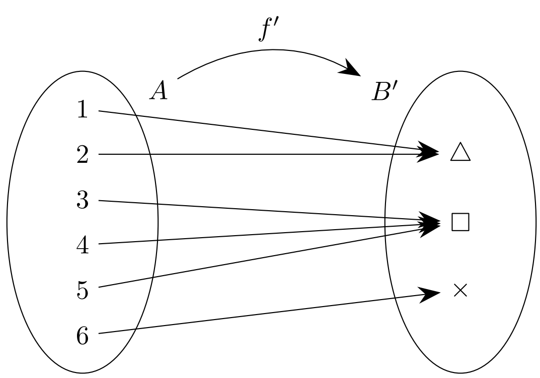
$^{\mathbb{Z}_{10}}/_{5\mathbb{Z}_{10}} = \{$■, ■, ■, ■, ■$\}$.

- Soient $G = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $N = \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$.
  $N \trianglelefteq G$.
  $^{G}/_{N}$ est infini et l'opération sur $^{G}/_{N}$ est : $(N + (x, y)) + (N + (x', y')) = N + (x + x', y + y')$.

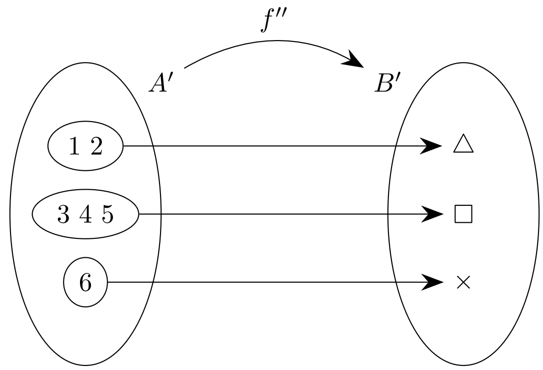
Motivation



f n'est ni injective ni surjective.



f' est surjective, mais elle n'est toujours pas injective.



f'' est injective et surjective, donc bijective.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \\ A' \arrow[r, "f''"'] & B' \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

où p représente une projection et i une inclusion. Donc, $f = i \circ f'' \circ p$, où i est injective, p est surjective et f'' est bijective.

Théorème (d'isomorphisme de Jordan)**.**
Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes. Posons $N = \ker(f) \trianglelefteq G$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & H \\ {}^{G}/_{N} \arrow[r, dashed, "\bar{f}"'] & \operatorname{Im}(f) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$$\left(\begin{array}{rcl|rcl} P : G & \to & {}^{g}/_{N} & i : \operatorname{Im}(f) & \to & H \\ a & \mapsto & Na & h & \mapsto & h \end{array} \right).$$

Alors, il existe un unique homomorphisme $\bar{f} : {}^{G}/_{N} \to \operatorname{Im}(f)$ t.q. $f = i \circ \bar{f} \circ p$. De plus, $\bar{f}$ est un isomorphisme.

Exemple. $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_*$.
$N = \ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$ les matrices dont le détrerminant vaut 1.
$\operatorname{Im}(\det) = \mathbb{R}_*$.
Le théorème implique que ${}^{GL(n,\mathbb{R})}/_{SL(n,\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}_*$.

Démonstration.

Unicité de $\bar{f}$.
Supposons que $\bar{f}$ existe.
Soit $\tilde{f}$ un autre homomorphisme t.q. $f = i \circ \tilde{f} \circ p$.
Alors, soit $Na \in {}^{G}/_{N}$. On a

$$\begin{aligned} f(a) &= \left(i \circ \tilde{f} \circ p\right)(a) \\ &= i(\tilde{f}(p(a))) \\ &= \tilde{f}(Na) \end{aligned}$$

De même, $f(a) = \bar{f}(a)$.
Donc, $\bar{f}(Na) = \tilde{f}(Na) = f(a)$, alors $\bar{f} = \tilde{f}$. ■

Existence de $\bar{f}$.

On veut définir $\bar{f}(Na) = f(a)$. Vérifions que cette définition est sans abiguïté.
Supposons $Na = Nb$, c'est-à-dire, $ab^{-1} \in N = \ker(f)$.
Alors, $f(ab^{-1}) = e$, donc $f(a)f(b)^{-1} = e$, ainsi $f(a) = f(b)$, qui est équivalent à $\bar{f}(Na) = \bar{f}(Nb)$. ■

$\bar{f}$ est un homomorphisme.

$\bar{f}(NaNb) = \bar{f}(Nab) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(Na)\bar{f}(Nb)$. ■

$\bar{f}$ est un isomorphisme.

surjectivité.

Soit $b \in \mathrm{Im}(f)$. Alors, $b = f(a)$ pour un certain $a \in G$. Donc, $b = \bar{f}(Na)$. #

injectivité.

Supposons $Na \in \ker(\bar{f})$. Alors, $\bar{f}(Na) = e$, donc $f(a) = e$, ainsi $a \in \ker(f) = N$.
Comme $a \in N$, $Na = N$. Donc, $\ker(\bar{f}) \subseteq \{N\}$, alors $\ker(\bar{f}) = N$. #

■

□

Exemple.

- $\mathrm{sgn} : S_n \to C_2$.
  $\ker(\mathrm{sgn}) = A_n$.
  $\mathrm{Im}(\mathrm{sgn}) = C_2$.
  Alors, ${}^{S_n}/_{A_n} \cong C_2 \cong \mathbb{Z}_2$.
- $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z}_{10} & \to & \mathbb{Z}_5 \\ \overline{n} & \mapsto & \overline{n} \end{array}$. f est un homomorphisme.
  $\ker(f) = \{\overline{0}, \overline{5}\}$.
  $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}_5$.
  Alors, ${}^{\mathbb{Z}_{10}}/_{\{\overline{0},\overline{5}\}} \cong \mathbb{Z}_5$.
- $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x - y \end{array}$. f est un homomorphisme.
  $\ker(f) = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\} =: N$.
  $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
  Alors, ${}^{\mathbb{R}^2}/_{N} \cong \mathbb{R}$.

Cours 18

Rappel.

- Théorème d'isomorphisme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "p"'] & H \\ {}^{G}/_{\ker(f)} \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

$\exists!$ isomorphisme $\bar{f} : {}^{G}/_{\ker(f)} \to \mathrm{Im}(f)$ t.q. $f = i \circ \bar{f} \circ p$.

Notation. $\hookrightarrow$: fonction injective, $\twoheadrightarrow$: fonction surjective.

2 cas importants :

(1) Si f est surjectif
$\mathrm{Im}(f) = H$.
Le théorème dit que $\begin{array}{rcl} \bar{f} : {}^{G}/_{\ker(f)} & \to & H \\ Na & \mapsto & f(a) \end{array}$ est un isomorphisme.

(2) Si f est injectif
$\ker(f) = \{e\}$.
${}^{G}/_{\ker(f)} = {}^{G}/_{\{e\}}$, les classes sont de la forme $\{e\}a = \{a\}$, donc chaque élément de G est seul dans sa classe d'équivalence.
$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\cong} & {}^{G}/_{\{e\}} \\ a & \mapsto & \{a\} \end{array}$ est un isomorphisme.
Dans ce cas, $G \cong {}^{G}/_{\{e\}} \cong \mathrm{Im}(f)$. On a que G est isomorphe au sous-groupe $\mathrm{Im}(f)$ de H.

Corollaire.
$f : G \to H$ un homomorphisme entre groupes finis. Alors, $|G| = |\ker(f)|\,|\mathrm{Im}(f)|$.

Démonstration.
$\bar{f}$ est une bijection entre ${}^{G}/_{\ker(f)}$ et $\mathrm{Im}(f)$. Alors, $|{}^{G}/_{\ker(f)}| = |\mathrm{Im}(f)|$. Donc, $\dfrac{|G|}{|\ker(f)|} = |\mathrm{Im}(f)|$. □

Groupes monogènes

$a \in G$, $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ le groupe *engendré par a*.

Théorème (Classification des groupes monogènes)**.**
Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe monogène. Alors
(1) Si $o(a) = \infty$, alors $G \cong \mathbb{Z}$.
(2) Si $o(a) = m$, alors $G \cong \mathbb{Z}_m$.

Démonstration.
La fonction $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \to & G \\ n & \mapsto & a^n \end{array}$ est un homomorphisme. En effet

$$\begin{aligned} f(n_1 + n_2) &= a^{n_1+n_2} \\ &= a^{n_1}a^{n_2} \\ &= f(n_1)f(n_2) \end{aligned}$$

f est surjectif, car tout élément de G s'écrit a^n par définition.
Le théorème d'isomorphisme nous dit que ${}^{\mathbb{Z}}/_{\ker(f)} \cong G$.
(1) Le seul n t.q. $a^n = e$ est $n = 0$, donc $\ker(f) = \{0\}$, alors $\mathbb{Z} \cong {}^{\mathbb{Z}}/_{\{0\}} \cong G$.
(2) On veut montrer que $\ker(f) = m\mathbb{Z}$.

$\subseteq$:
Supposons $n \in \ker(f)$, alors $f(n) = a^n = e$, donc $o(a) \mid n$, c'est-à-dire, $n = ko(a) = km \in m\mathbb{Z}$.
Ainsi, $\ker(f) \subseteq m\mathbb{Z}$. ■

$\supseteq$:
Supposons $n \in m\mathbb{Z}$, alors $n = km$, donc $f(n) = a^n = a^{mk} = (a^m)^k = e$.
Ainsi, $m\mathbb{Z} \subseteq \ker(f)$. ■

Ainsi, ${}^{\mathbb{Z}}/_{m\mathbb{Z}} = m\mathbb{Z} \cong G$.

□

Exemple.
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. $o(\sigma) = \mathtt{ppcm}(2,4) = 4$.
Par le théorème de classification, $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_4$.
Autrement dit, $\langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} = \{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$.

Section 8.3 Théorème de Cayley

G un groupe quelconque, $a \in G$.
On définit une fonction

$$\begin{array}{rcl} \sigma_a : G & \to & G \\ b & \mapsto & ab \end{array}$$

Lemme. *σ_a est bijective.*

Démonstration.
$\sigma_{a^{-1}}$ est un inverse de σ_a. En effet

$$\begin{aligned} \sigma_{a^{-1}}(\sigma_a(b)) &= \sigma_{a^{-1}}(ab) \\ &= a^{-1}ab \\ &= b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sigma_a(\sigma_{a^{-1}}(b)) &= \sigma_a(a^{-1}b) \\ &= aa^{-1}b \\ &= b \end{aligned}$$

□

Remarque. Ce lemme implique que $\sigma_a \in S(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ est bijective}\}$.

Définition. On définit $\begin{array}{rcl} \Psi : G & \to & S(G) \\ a & \mapsto & \sigma_a \end{array}$.

Proposition. *Ψ est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration.
Soient $a, b, c \in G$.

$$\begin{aligned} \Psi(ab)(c) &= \sigma_{ab}(c) \\ &= (ab)c \\ &= a(bc) \\ &= a\sigma_b(c) \\ &= \sigma_a(\sigma_b(c)) \\ &= (\sigma_a \circ \sigma_b)(c) \end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$, c'est-à-dire, $\Psi(ab) = \Psi(a) \circ \Psi(b)$. □

Cours 19

Rappel.

- *Théorème d'isomorphismes* : $f : G \to H$, $G/_{\ker(f)} \cong \mathrm{Im}(f)$.
  - — Si f *surjective*, $G/_{\ker(f)} \cong H$;
  - — Si f *injective*, $G \cong \mathrm{Im}(f)$.
- $|G| = |\ker(f)| \cdot |\mathrm{Im}(f)|$;
- Groupe *monogène* (ou cyclique) $G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
- Classification
  - — $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ si $o(a) = \infty$;
  - — $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_m$ si $o(a) = m$.
- $a \in G$
  - — $\begin{array}{rcl} \sigma_a : G & \to & G \\ b & \mapsto & ab \end{array}$ est une bijection ;
  - — $\begin{array}{rcl} \Psi : G & \to & S(G) \\ a & \mapsto & \sigma_a \end{array}$, où $S(G)$ est le groupe des bijections de G.

Proposition. *Ψ est injectif.*

Démonstration. Montrons que $\ker(\Psi) = \{e\}$.
Supposons que $(a \in G) \in \ker(\Psi)$, alors $\Psi(a) = e$.

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \mathbb{1}_G \\ \sigma_a &= \mathbb{1}_G \\ \sigma_a(e) &= \mathbb{1}_G(e) \\ ae &= e \\ a &= e \end{aligned}$$

Alors, $\ker(\Psi) \subseteq \{e\}$.
De plus, $\{e\} \subseteq \ker(\Psi)$ trivialement.
Ainsi, $\ker(\Psi) = \{e\}$, donc Ψ est injectif. □

Théorème (Cayley)**.** *Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique $S(E)$.*

Démonstration.
On prend $E = G$. $\Psi : G \to S(G)$ est un homomorphisme injectif.
Alors, $G \cong \operatorname{Im}(\Psi) \leqslant S(G)$. □

Exemple.
$\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$.
Calculons Ψ.

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \varepsilon\varepsilon & \varepsilon\alpha & \varepsilon\beta & \varepsilon\gamma & \varepsilon\rho & \varepsilon\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \alpha\varepsilon & \alpha\alpha & \alpha\beta & \alpha\gamma & \alpha\rho & \alpha\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \alpha & \varepsilon & \rho & \sigma & \beta & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\beta) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \beta\varepsilon & \beta\alpha & \beta\beta & \beta\gamma & \beta\rho & \beta\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \beta & \sigma & \varepsilon & \rho & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \rho \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \gamma\varepsilon & \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma\gamma & \gamma\rho & \gamma\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \gamma & \rho & \sigma & \varepsilon & \alpha & \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\rho) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \rho\varepsilon & \rho\alpha & \rho\beta & \rho\gamma & \rho\rho & \rho\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \rho & \gamma & \alpha & \beta & \sigma & \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \rho & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \sigma\varepsilon & \sigma\alpha & \sigma\beta & \sigma\gamma & \sigma\rho & \sigma\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \sigma & \beta & \gamma & \alpha & \varepsilon & \rho \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \sigma & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque. Le groupe $S(G)$ est toujours plus grand que G.

Exemple. Si on prend $G = S_n$, $\Psi : S_n \to S(S_n)$, où $|S_n| = n!$ et $|S(S_n)| = (n!)!$.

Exemple. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1})\}$.

$$\Psi : G \to S(G) \cong S_4$$

Numérotons les éléments de G comme $\{1, 2, 3, 4\}$.

$$\Psi(\overline{0}, \overline{0}) = \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\overline{0}, \overline{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\overline{1}, \overline{0}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\overline{1}, \overline{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cayley nous dit que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \{\mathbb{1}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\}$.

Actions de groupes

Soient G un groupe et E un ensemble.

Définition. Une *action* de G sur E est une fonction $\begin{array}{rcl} \bullet : G \times E & \to & E \\ (a,x) & \mapsto & a \bullet x \end{array}$, satisfaisant à

(1) $\forall x \in E$, $e \bullet x = x$;
(2) $\forall a, b \in G$, $\forall x \in e$, $a \bullet (b \bullet x) = (ab) \bullet x$.

Exemple.

(1) $G = GL(n, \mathbb{R})$, $E = \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rcl} \bullet : GL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (M, \vec{v}) & \mapsto & M\vec{v} \end{array}$$

est une action.

(2) $G = S_n$, $E = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\begin{array}{rcl} \bullet : S_n \times \{1,2,\ldots,n\} & \to & \{s, 2, \ldots, n\} \\ (\sigma, i) & \mapsto & \sigma(i) \end{array}$$

est une action.

(3) $G = \mathbb{Z}_2$, $E =$  $\subseteq \mathbb{R}^2$.
$\mathbb{Z}_2$ agit sur E par

$$\begin{aligned} \overline{0} \bullet (x,y) &= (x,y) \\ \overline{1} \bullet (x,y) &= (-x,y) \end{aligned}$$

(4) $G = \mathbb{Z}_3$, $E =$  $\subseteq \mathbb{R}^2$.
G agit sur E où $\overline{1}$ est une rotation de 120°et $\overline{2}$ est une rotation de 240°.

(5) $\mathbb{D}_3$ agit sur un triangle équilatéral.

(6) G agit sur lui-même par

$$\begin{array}{rcl} \bullet : G \times G & \to & G \\ (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

(7) G agit sur lui-même aussi par

$$\begin{array}{rcl} \bullet : G \times G & \to & G \\ (a,b) & \mapsto & aba^{-1} \end{array}$$

En effet.

(a) Soit $b \in G$, alors

$$\begin{aligned} e \bullet b &= ebe^{-1} \\ &= b \end{aligned}$$

(b) Soient $a, b, c \in G$

$$\begin{aligned} (ab) \bullet c &= (ab)c(ab)^{-1} \\ &= abcb^{-1}a^{-1} \\ &= a(b \bullet c)a^{-1} \\ &= a \bullet (b \bullet c) \end{aligned}$$

■

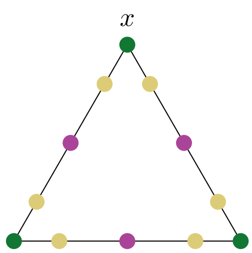
Définition. Une *action* de G sur E est un homomorphisme $\Psi : G \to E$.

Pour passer de la première définition à la deuxième, on pose $\Psi(a) = \sigma_a$, où $\sigma_a(x) = a \bullet x$.
Pour passer de la deuxième définition à la première, on pose $a \bullet x = (\Psi(a))(x)$.

Définition. G un groupe qui agit sur un ensemble E.
Soit $x \in E$.
L'*orbite* de x est l'ensemble $G \bullet x = \{a \bullet x \mid a \in G\} \subseteq E$.

Définition. Soit $x \in E$.
Le *stabilisateur* de x est $\mathrm{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leqslant G$.

Exemple.



●, ● et ● sont trois orbites.

$\mathrm{stab}(x) = \{\varepsilon, \alpha\}$

Cours 20

Rappel.

- Théorème de Cayley
  - $\begin{array}{rcl} \Psi : G & \to & S(G) \\ a & \mapsto & \sigma_a \end{array}$, où $\sigma_a(b) = ab$ est un homomorphisme injectif ;
  - $G \cong \mathrm{Im}(\Psi) \leqslant S(G)$.
- Action de G sur E
  - $a \bullet x \in E$
    (1) $e \bullet x = x$
    (2) $(ab) \bullet x = a \bullet (b \bullet x)$
  - homomorphisme $\begin{array}{rcl} \Psi : G & \to & S(E) \\ a & \mapsto & (x \mapsto a \bullet x) \end{array}$
- Orbite de $x \in E$: $G \bullet x = \{a \bullet x \in e \mid a \in G\} \subseteq E$
- Stabilisateur de $x \in E$: $\mathrm{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leqslant G$

Remarque. $x \bullet a$ n'est pas défini.

Proposition. $\mathrm{stab}(x) \leqslant G$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} e \bullet x &= x \\ &\Rightarrow e \in \mathrm{stab}(x) \\ &\Rightarrow \mathrm{stab}(x) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Soient $a, b \in \mathrm{stab}(x)$. On veut vérifier que $ab^{-1} \in \mathrm{stab}(x)$, c'est-à-dire $(ab^{-1}) \bullet x = x$.
Remarquons que $b \bullet x = x$, alors $b^{-1} \bullet (b \bullet x) = b^{-1} \bullet x$, donc $(b^{-1}b) \bullet x = b^{-1} \bullet x$, donc $e \bullet x = b^{-1} \bullet x$, ainsi $x = b^{-1} \bullet x$.

On a donc

$$\begin{aligned}(ab^{-1}) \bullet x &= a \bullet (b^{-1} \bullet x)\\ &= a \bullet x\\ \text{car } a \in \operatorname{stab}(x) &= x\end{aligned}$$

Ainsi, $ab^{-1} \in \operatorname{stab}(x)$. □

Proposition. *La relation $x \sim y$ si, et seulement si, $\exists a \in G$ t.q. $y = a \bullet x$ est une équivalence donc les classes d'équivalence sont les orbites, c'est-à-dire, $\overline{x} = G \bullet x$.*

En particulier, les orbites forment une partition *de E.*

Démonstration.

Équivalence.

(Refl) Soit $x \in E$.
Or, $x = e \bullet x$, donc $x \sim x$.

(Sym) Soient $x, y \in E$ t.q. $x \sim y$.
Ainsi, $\exists a \in G$ t.q. $y = a \bullet x$.
Or, $a^{-1} \in G$, donc $a^{-1} \bullet y = a^{-1} \bullet (a \bullet x) = (a^{-1}a) \bullet x = x$.
Ainsi, $y \sim x$.

(Trans) Soient $x, y, z \in E$ t.q. $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors, $\exists a, b \in G$ t.q. $y = a \bullet x$ et $z = b \bullet y$.
Or, $z = b \bullet y = b \bullet (a \bullet x) = (ba) \bullet x$, où $ba \in G$.
Ainsi, $x \sim z$.

■

Les classes d'équivalence sont les orbites.

La classe d'équivalence de $x \in E$, par définition, est

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \{y \in E \mid x \sim y\}\\ &= \{y \in E \mid \exists a \in G, y = a \bullet x\}\\ &= \{a \bullet x \mid a \in G\}\\ &= G \bullet x\end{aligned}$$

■

□

Exemple.

(1) $G = \{\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R}\}$, $E = \mathbb{R}^2$ avec l'action $M \bullet \vec{v} = M\vec{v}$ la multiplication matricielle usuelle.
Calculons l'orbite d'un vecteur $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}G \bullet \vec{v} &= \left\{ \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{ \begin{pmatrix}x + ay\\ y\end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Si $y = 0$, $G \bullet \left(\begin{smallmatrix}x\\ 0\end{smallmatrix}\right) = \{\left(\begin{smallmatrix}x\\ 0\end{smallmatrix}\right)\}$.
Si $y \neq 0$, $\{x + ay, a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, donc $G \bullet \left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right) = \{\left(\begin{smallmatrix}a\\ y\end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(2) $G = S_3$, $E = \mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
S_3 agit sur un sous-ensemble en agissant sur chaque élément du sous-ensemble, c'est-à-dire, par exemple, $\sigma \bullet \{i, j\} = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$.
Les orbites de l'action sont

$$\{\emptyset\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}; \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}; \{\{1,2,3\}\}$$