MAT141 - Éléments d'algèbre
Donné par Jean-Philippe Burelle

Julien Houle

Automne 2025

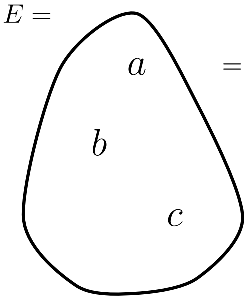
Table des matières

Chapitre 1 Ensembles

Cours 1

Idée : ensemble=patate

$E =$



$= \{a, b, c\}$

Notation. $E \subseteq F \Leftarrow \forall x \in E, x \in F$.

Remarque. $E \subseteq E$.

Notation. La cardinalité d'un ensemble, $|E|$, est le nombre d'éléments d'un ensemble.

Définition. Définition d'un ensemble par *compréhension* : $E = \{n \in \mathbb{Z} | 1 \leq n \leq 20\}$.

Notation. $E = F \Leftrightarrow E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

Définition. Produit cartésien : $E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}$.

Définition. Fonction/Application
$f : A \to B$, A et B des ensembles, associe à *chaque* $x \in A$ un *unique* élément $f(x) \in B$.

Cours 2

Rappel.

•	Ensemble	collection d'objets
•	$\in$	"élément" d'un ensemble
•	*sous-ensemble* ($\subseteq$)	$E \subseteq F$ si $x \in E$ *implique* $x \in F$
•	$E = F$	ssi $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$
•	$\cup$	union
	$\cap$	intersection
•	$E \times F$	produit cartésien (paires (x, y))
•	$f : E \to F$	*fonction* ou *application*, associe à $\underline{\text{chaque } x \in E}$ un unique $\underline{f(x)} \in F$, image de x par f
•	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}_E : E \to E$ est définie comme $\mathbb{1}_E(x) = x$

Manières de définir une fonction

- énumérer $f(x)$ pour chaque $x \in E$
- donner une formule
  une formule ne définit pas tjrs une fonction, elle doit être valide pour chaque x de l'ensemble de départ.
- en mots (décrire la valeur pour chaque $x \in E$)
- mélange de formule et mots

Définition. Une fonction $f : E \to F$ est *inversible* s'il existe une fonction $\underbrace{g : F \to E}_{*}$ telle que $\underbrace{g(f(x)) = x}_{**}$ pour tout $x \in E$ et $\underbrace{f(g(y)) = y}_{***}$ pour tout $y \in F$.

Exemple. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$ est inversible d'inverse $g(y) = y - 1$

démo.
On vérifie que

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= x & \qquad g(f(x)) &= g(x+1) \\
& & &= (x+1) - 1 \\
& & &= x \\
f(g(y)) &= y & \qquad f(g(y)) &= f(y-1) \\
& & &= (y-1) + 1 \\
& & &= y
\end{aligned}
$$

□

Proposition. *Si f admet un inverse, celui-ci est unique.*

démo.
Supposons que g_1 et g_2 sont tous deux inverses de f et montrons qu'elles sont ǵales.
(Pour démontrer que deux fonctions sont égales, il suffit de montrer que $g_1(y) = g_2(y)$ pour tout $y \in F$)
Soit $y \in F$.
On a

$$
\begin{aligned}
g_1(y) &\overbrace{=}^{***} g_1(\underbrace{f(g_2(y))}_{*}) \\
&\overbrace{=}^{**} g_2(y)
\end{aligned}
$$

□

Définition. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors la composée de f et g est la fonction $g \circ f : E \to G$ définie par la formule $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Définition (Redéfinition de l'inverse)**.** $g \circ f = \mathbb{1}_E$
$f \circ g = \mathbb{1}_F$

Exemple. $A = \{a, b, c\}$
$B = \{d, e, f\}$
$f : A \to B$, $a \mapsto d, b \mapsto e, c \mapsto f$
$g : B \to A$, $d \mapsto a, e \mapsto b, f \mapsto c$
$g \circ f : A \to A$, $g \circ f(x) = x$, $g \circ f = \mathbb{1}_A$.
De la m̂ manière, $f \circ g = \mathbb{1}_B$.

Ainsi, g est l'inverse de f.

Notation. On note $g = f^{-1}$ l'inverse de f.

Rappel. Pour trouver l'inverse d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par une formule $f(x) = y$, on isole x en fonction de y.

Exemple.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x - 8 \\
y &= 3x - 8 \\
y + 8 &= 3x \\
\frac{y+8}{3} &= x \\
g(y) &= \frac{y+8}{3}
\end{aligned}
$$

Dans un devoir, on commence par la formule de l'inverse et on vérifie $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *injective* si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *surjective* si pour tout $y \in F$, $\exists\ x \in E$ t.q. $f(x) = y$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *bijective* si elle est injective **et** surjective.

Exemple. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = |x|$
f n'est pas injective, car $f(1) = |1| = 1$ et $f(-1) = |-1| = 1$, mais $1 \neq -1$.
f est surjective, car soit $y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, alors pour $x = y$, on a $f(x) = f(y) = |y| = y$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

f est injective :
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$.
On suppose $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &= x_2 + 1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

f n'est pas surjective
$y = 0 \in \mathbb{N}$ n'est pas égal à $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$. Si il existait x avec $f(x) = 0$, $x + 1 = 0$, $x = -1$, $x \notin \mathbb{N}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 3$.
f est injective :
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
supposons $f(x_1) = f(x_2)$, $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$, $2x_1 = 2x_2$, $x_1 = x_2$.
f est surjective :
Soit $y \in \mathbb{R}$.
On cherche x t.q. $f(x) = y$.
Posons $x = \dfrac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$.
Alors, $f(x) = f\left(\dfrac{y-3}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{y-3}{2} + 3 = y - 3 + 3 = y$.
Ainsi, f est bijective.

$f : A \to B$, avec $A = \{1, 48, 57\}$ et $B = \{a, b, c\}$.
$1 \mapsto a$, $48 \mapsto a$, $57 \mapsto b$.
f n'est pas injective, car $1 \mapsto a$ et $48 \mapsto a$ avec $1 \neq 48$.
f n'est pas surjective, car aucun élément de $x \in A \mapsto c$.

Remarque. La fonction $f' : A \to B'$ avec $B' = \{a, b\}$ est surjective.

Cours 3

Rappel. A, B deux ensembles

- $f : A \to B$ une fonction, associe à chaque $x \in A$ un unique $f(x) \in B$. $x \mapsto f(x)$.
- f est *inversible* s'il existe $g : B \to A$ t.q. $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$ et $f(g(b)) = b$ pour tout $b \in B$.
- l'inverse est *unique.*
- La composition de $f : A \to B$ avec $g : B \to C$ est $g \circ f : A \to C$ avec $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- f est injective si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f est surjective si pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ t.q. $f(a) = b$.
- f est bijective si elle est injective et surjective.

Proposition. $f : A \to B$ *est bijective* ssi *elle est inversible.*

démo.
$\Leftarrow$:
Supposons que f est inversible.
Alors, il existe un inverse $g : B \to A$.
(inj) : Soient $x_1, x_2 \in A$.
On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$.
Alors, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
Donc, $x_1 = x_2$
(surj) : Soit $y \in B$.
Posons $x = g(y) \in A$.
Alors, $f(x) = f(g(y)) = y$.
$\Rightarrow$:
Supposons f est injective et surjective.

Lemme. *Pour* chaque $y \in B$, *il existe un* unique $x \in A$ *t.q.* $f(x) = y$.

démo.
<u>Existance</u> : Comme f est surjective, x existe.
<u>Unicité</u> : Supposons $x_1, x_2 \in A$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$. ■

On définit $g : B \to A$ par $g(y) = x$ où x est l'unique élément du lemme.
On vérifie :
Soit $x \in A$, alors $g(\underbrace{f(x)}_{y}) = x$, par définition de g.
Soit $y \in B$, alors $f(\underbrace{g(y)}_{\text{l'unique } x \text{ t.q. } f(x) = y}) = y$. □

Définition. Une *opération* (interne, binaire) sur un ensemble E est un fonction $m : E \times E \to E$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$,
$$m : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (n, m) & \longmapsto & n + m \end{array}$$
$$m : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (n, m) & \longmapsto & n \cdot m \end{array}$$
$$d : \begin{array}{rcl} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$
n'est pas une opération, car $(1, 0) \mapsto \frac{1}{0}$ qui n'est pas défini. (d n'est pas une fonction.)
Cependant,
$$d : \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_* \times \mathbb{Q}_* & \longrightarrow & \mathbb{Q}_* \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$
est une opération.

A un ensemble
$E = \{f : A \to A\}$, où f est une fonction.
$$c : \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (f, g) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$
La composition est une opération.

Notation. On note la plupart du temps une opération par un symbole entre les entrées.

Exemple. $m(x, y) \coloneqq x * y$, ou $x + y$, ou $x \circ y$, ou xy

Définition.
Un *élément neutre* pour une opération $*$ est un élément $e \in E$ t.q. pour tout $x \in E$, $e * x = x$ et $x * e = x$.

Cours 4

Rappel.

- $f : E \to F$ est bijective $\Leftrightarrow f$ est inversible.
- L'inverse est unique ($g = f^{-1}$)
- Opération : $m : E \times E \to E$, ou $\begin{array}{cccc} * : & E \times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & z \end{array}$
- Élément neutre : $e \in E$ t.q. $e * x = x$ et $x * e = x$.
- f est injective si tout $y \in F$ a au plus un antécédent
- f est surjective si tout $y \in F$ a au moins un antécédent
- f est bijective si tout $y \in F$ a exactement un antécédent
- x est antécédent de y si $f(x) = y$

Exemple. Sur $\mathbb{N}$,

- 0 est neutre pour $+$.

$$0 + n = n$$
$$n + 0 = n$$

- 1 est neutre pour $\times$.

$$1 \times n = n$$
$$n \times 1 = n$$

Sur $\mathbb{Z}$, $-$ est une opération mais elle n'a pas délément neutre.

En effet,
Supposons que $e \in \mathbb{Z}$ est neutre, alors $e - n = n$ pour tout n.
Pour $n = 0$, $e - 0 = 0$, donc $e = 0$.
Pour $n = 1$, $e - 1 = 1$, donc $-1 = 1$. $\lightning$

- Sur l'ensemble $E = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, la multiplication matricielle $\times$ est une opération.

  La matrice $I = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ est neutre pour $\times$.
- Sur $E = \{f : A \to A\}$, la fonction $\mathbb{1}_A$ est neutre pour la composition de fonctions.

  démonstration.
  On doit montrer $\mathbb{1}_A \circ f = f$ et $f \circ \mathbb{1}_A = f$ pour tout $f \in E$.
  (1) Soit $x \in A$, alors

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A \circ f)(x) &= \mathbb{1}_A(f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Donc, $\mathbb{1}_A \circ f = f$.
  (2) Soit $x \in A$, alors

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbb{1}_A)(x) &= f(\mathbb{1}_A(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Donc,$f \circ \mathbb{1}_A = f$.

  $\square$

On peut décrire une opération sur un ensemble fini avec sa table "de multiplication".

Exemple. $A = \{0, 1\}$

$f_1 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}, f_2 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}, f_3 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}, f_4 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$ On a $f_2 = \mathbb{1}_A$.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_4	f_3	f_2	f_1
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

Définition.
Une opération $*$ sur E est *associative* si pour tout $x, y, z \in E$, on a $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Proposition.
Si $*$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.

démonstration.
Supposons que e et e' sont neutres pour $*$.
On a

$$\begin{aligned} e * e' &= e' && \text{car } e \text{ est neutre} \\ e * e' &= e && \text{car } e' \text{ est neutre} \end{aligned}$$

Donc, $e = e'$. □

Définition.
Soit E un ensemble, $*$ une opération sur E et $e \in E$ un neutre pour $*$. On dit que $a, b \in E$ sont *inverses* si $a * b = e$ et $b * a = e$.
Dans ce cas, on dit que a et b sont inversibles.

Exemple.
Dans $\mathbb{Z}$ avec $+$, 3 et -3 sont inverses. En effet, on a $3 + (-3) = 0$ et $(-3) = 3 = 0$ avec 0 l'élément neutre de $+$.

Exemple.
Dans $\mathbb{Z}$ avec $\times$, le neutre est 1, mais seuls 1 et -1 sont inversibles. En effet, on a $1 \times 1 = 1$ et $(-1) \times (-1) = 1$.

Remarque.
L'élément neutre est son propre inverse. En effet, $e * e = e$, pour tout $*$ qui admet e comme élément neutre.

Proposition.
Si $*$ est associative et admet un élément neutre e, alors les inverses sont uniques s'ils existent.

démonstration.
Soit $a \in E$.
Supposons b, b' sont inverses de a.
Alors,

$$\begin{aligned} b &= b * e \\ &= b * (a * b') && \text{car } b' \text{ est inverse de } a \\ &= (b * a) * b' && \text{associativité} \\ &= e * b' && \text{car } b \text{ est inverse de } a \\ &= b' \end{aligned}$$

□

Notation.
Comme l'inverse de a est unique, on le note a^{-1}.

Exemple.
Dans $E = \{f : A \to A\}$, avec l'opération $\circ$, les fonctions bijectives sont exactement celles qui sont inversibles pour $\circ$.

Proposition.
La composition de fonctions est associative.

démonstration.
Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$.
Soit $a \in A$.

$$\begin{aligned}
((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\
&= h(g(f(a))) \\
&= h((g \circ f)(a)) \\
&= (h \circ (g \circ f))(a) \\
(h \circ g) \circ f &= h \circ (g \circ f)
\end{aligned}$$

□

Chapitre 6 Groupes

Définition.

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération $*$ t.q.

(A) $*$ est associative

(N) $*$ admet un neutre

(I) tout $g \in G$ admet un inverse

Exemple.

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
Neutre : 0
Inverse de n : $-n$

(2) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes.

(3) $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe, car, par exemple, 2 n'est pas inversible.

(4) $(\mathbb{Q}, \times)$ n'est pas un groupe, car 0 n'est pas inversible.

(5) $(\mathbb{Q}_*, \times)$ et $(\mathbb{R}, \times)$ sont des groupes.
Neutre : 1
Inverse de x : $\frac{1}{x}$

Remarque.

(1), (2) et (5) sont *commutatifs*.

Remarque.

$(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.

Définition.

Si l'opération d'un groupe est commutative, on note le groupe comme *abélien* (ou commutatif).

1. $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.
   $GL(n, \mathbb{R}) = \{M | M$ est une matrice $n \times n$ réelle inversible$\}$.
   GL : général linéaire
   Neutre : $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
   M^{-1} la matrice inverse est l'inverse.
   Pour $n \geq 2$, $GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas abélien.
2. A un ensemble quelconque
   $S(A) = \{f : A \to A | f$ est bijective$\}$ est un groupe pour $\circ$.
   Neutre : $\mathbb{1}_A$
   Inverse de f : f^{-1}

Remarque.

Pour $A = \{0, 1\}$

$f_1 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}$, $f_2 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$, $f_3 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}$, $f_4 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$, $S(A) = \{f_2, f_3\}$.

Cours 5

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$

  G ensemble

  $*$ opération sur G

  (A) $*$ est associative
  $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$

  (N) $*$ admet un élément neutre dans G
  $\exists e \in G$ t.q. $\forall a \in G, e * a = a = a * e$

  (I) tout élément de G est inversible
  $\forall a \in G, \exists b \in G$ t.q. $a * b = e = b * a$

- Le neutre et l'inverse sont uniques

Remarque.
"Le groupe $\mathbb{R}$" implique l'opération $+$ et "le groupe $\mathbb{R}_*$" implique l'opération $\times$.

Propriétés élémentaires des groupes

(a) $\forall a, b \in G$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(b) $\forall a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$

(c) Si $a * b = a * c$, alors $b = c$

(d) Si $b * a = c * a$, alors $b = c$

démonstration.

(a) On calcule

$$\begin{aligned}(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * (b^{-1} * a^{-1})) \\ &= a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) \\ &= a * (e * a^{-1}) \\ &= a * a^{-1} \\ &= e\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * (a^{-1} * (a * b)) \\ &= b^{-1} * ((a^{-1} * a) * b) \\ &= b^{-1} * (e * b) \\ &= b^{-1} * b \\ &= e\end{aligned}$$

Donc, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(b) Comme $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$, a est l'inverse de a^{-1}, donc $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

(c) Supposons $a * b = a * c$. Alors

$$\begin{aligned}a^{-1} * (a * b) &= a^{-1} * (a * c) \\ (a^{-1} * a) * b &= (a^{-1} * a) * c \\ e * b &= e * c \\ b &= c\end{aligned}$$

(d) Supposons $b * a = c * a$. Alors

$$\begin{aligned}(b * a) * a^{-1} &= (c * a) * a^{-1} \\ b * (a * a^{-1}) &= c * (a * a^{-1}) \\ b * e &= c * e \\ b &= c\end{aligned}$$

$\square$

Exemple.

$(\mathbb{Z}_3, +)$.

$\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$+$ est associative.

$\overline{0}$ est l'élément neutre.

$(\overline{1})^{-1} = \overline{2}$.

$(\overline{2})^{-1} = \overline{1}$.

$(\mathbb{Z}_3, +)$ est un groupe abélien.

Remarque. La symétrie de la table par rapport à la diagonale implique la commutativité.

Exemple.

$(\mathbb{D}_3, \circ)$ - groupe dihédral d'ordre 3.

Groupe des symétries d'un triangle équilatéral.

$$\mathbb{D}_3 = \left\{ \underset{\text{identité}}{\varepsilon}, \underset{\text{réflexion par rapport à la verticale}}{\alpha}, \underset{\text{réflexion par rapport à /}}{\beta}, \underset{\text{réflexion par rapport à \textbackslash}}{\gamma}, \underset{\text{rotation de 120°}}{\rho}, \underset{\text{rotation de -120°}}{\sigma} \right\}.$$

$\circ$	ε	α	β	γ	ρ	σ
ε	ε	α	β	γ	ρ	σ
α	α	ε	ρ	σ	β	γ
β	β	σ	ε	ρ	γ	α
γ	γ	ρ	σ	ε	α	β
ρ	ρ	γ	α	β	σ	ε
σ	σ	β	γ	α	ε	ρ

$(\mathbb{D}_3, \circ)$ n'est pas un groupe abélien.

Cours 6

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$ avec A, N, I.
  Abélien : C.
-
$$\begin{aligned} a * b &= a * c && \Rightarrow b = c \\ b * a &= c * a && \Rightarrow b = c \\ (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$
-
  Exemple.
  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}_*, \times), (\mathbb{R}_*, \times)$ abéliens, $\mathbb{Z}_3, \mathbb{D}_3, GL(n, \mathbb{R})$.
  $S(E) = \{f : E \to E \mid f \text{ est bijective}\}$.

  Remarque. E n'est pas l'ensemble utilisé dans la définition du groupe.

Produit cartésien de groupes

$(G, *)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes.

Proposition.
$G \times H$ est un groupe lorsque muni de l'opération $(a, b) \bullet (a', b') = (a * a', b \diamond b')$, avec $a, a' \in G$ et $b, b' \in H$.

démonstration.
(N) $e \in G$ le neutre et $e' \in H$ le neutre, alors $(e, e') \in G \times H$

$$\begin{aligned}(a, b) \bullet (e, e') &= (a * e, b \diamond e') \\ &= (a, b) \\ (e, e') \bullet (a, b) &= (e * a, e' \diamond b) \\ &= (a, b)\end{aligned}$$

(e, e') est bien neutre.
(I) $(a, b) \in G \times H$, alors (a^{-1}, b^{-1}) est inverse de (a, b).
exercice
(A) exercice

□

Exemple. — $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
— $(\mathbb{Z}_2, +)$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$+$	$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{1})$
$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{1})$
$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{0})$
$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{1})$	$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{1})$
$(\overline{1}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{0}, \overline{0})$

Isomorphismes de groupes

Définition. $(G, *)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes.
Un *isomorphisme* de G vers H est une application $f : G \to H$ t.q.

1. $\forall a, b \in G,\ f(a * b) = f(a) \diamond f(b)$.
   Préservation des opérations
2. f est bijective.

Exemple.
— $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_*^+, \times)$
$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.
(1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(x + y) &= e^{x+y} \\ &= e^x \times e^y \\ &= f(x) \times f(y)\end{aligned}$$

(2) $\ln : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ est inverse de f : $\ln e^x = x \forall x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln x} = x \forall x \in \mathbb{R}_*^+$.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(e_G) = e_H$, où e_G est l'élément neutre de G et e_H est l'élément neutre de H.*

démonstration. Stratégie : montrer que $f(e_G)$ est neutre pour H et utiliser l'unicité.

Soit $b \in H$.

Comme f est bijective, $\exists a \in G$ t.q. $f(a) = b$

$$\begin{aligned} f(e_G) \diamond b &= f(e_G) \diamond f(a) \\ &= f(e_G * a) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} b \diamond f(e_G) &= f(a) \diamond f(e_G) \\ &= f(a * e_G) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned}$$

On a donc que $f(e_G) \in H$ est neutre pour $\diamond$, mais comme l'élément neutre est unique, $f(e_G) = e_H$. $\square$

Exemple. Pour $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$, $f(0) = e^0 = 1$.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, pour tout $a \in G$.*

démonstration. Stratégie : montrer que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$ et utiliser l'unicité.

$$\begin{aligned} f(a^{-1}) \diamond f(a) &= f(a^{-1} * a) \\ &= f(e_G) \\ &= e_H \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f(a) \diamond f(a^{-1}) &= f(a * a^{-1}) \\ &= f(e_G) \\ &= e_H \end{aligned}$$

On a donc que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$, mais comme l'inverse est unique, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. $\square$

Exemple. Pour $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$, $f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} = f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$, où $-x$ est l'inverse de x pour $+$ et $\frac{1}{f(x)}$ est l'inverse de $f(x)$ pour $\times$.

Remarque. Si G, H sont des groupes finis et f est un isomorphisme, alors f "envoie la table de G à celle de H".

$$G : \begin{array}{c||c|c|c|c} * & e_G & a_1 & a_2 & \cdots \\ \hline\hline e_G & & & & \\ \hline a_1 & & & a_1 * a_2 & \\ \hline a_2 & & & & \\ \hline \vdots & & & & \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c||c|c|c|c} * & e_H & f(a_1) & f(a_2) & \cdots \\ \hline\hline f(e_G) & & & & \\ \hline f(a_1) & & & f(a_1) \diamond f(a_2) & \\ \hline f(a_2) & & & & \\ \hline \vdots & & & & \end{array} : H$$

Avec $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \diamond f(a_2)$.

Exemple.

$$\mathbb{Z}_2 : \begin{array}{c||c|c} + & \bar{0} & \bar{1} \\ \hline\hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \hline \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \qquad H : \begin{array}{c||c|c} \circ & \varepsilon & \alpha \\ \hline\hline \varepsilon & \varepsilon & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \varepsilon \end{array} \qquad C_2 : \begin{array}{c||c|c} \times & 1 & -1 \\ \hline\hline 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$\mathbb{Z}_2$, H et C_2 sont isomorphes.

Il existe un isomorphisme entre chaque paire.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : H \to G$ est un isomorphisme.*

démonstration.

(1) Soient $b_1, b_2 \in H$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1 \diamond b_2) &= f^{-1}(f(f^{-1}(b_1)) \diamond f(f^{-1}(b_2))) \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2))) \\ &= f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2) \end{aligned}$$

(2) f^{-1} est bijective, car elle est inversible d'inverse f.

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \mathbb{1}_H \\ f^{-1} \circ f &= \mathbb{1}_G \end{aligned}$$

□

Proposition (Transitivité)**.**
Si $f : G \to H$ et $g : H \to K$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : G \to K$ est un isomorphisme.

démonstration.

(1) Soient $a, b \in G$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a * b) &= g(f(a * b)) \\ &= g(f(a) \diamond f(b)) \\ &= g(f(a)) \oplus g(f(b)) \\ &= (g \circ f)(a) \oplus (g \circ f)(b) \end{aligned}$$

(2) $g \circ f$ est inversible d'inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Puissances d'éléments de groupes

Définition (par récurrence)**.**
$a \in G$, $n \in \mathbb{N}$

1. $a^0 \coloneqq e_G$
2. $a^n = a * a^{n-1}$, $\forall n \geq 1$

Exemple.

—

$$\begin{aligned} a^4 &= a * a^3 \\ &= a * a * a * 2 \\ &= a * a * a * a^1 \\ &= a * a * a * a * a^0 \\ &= a * a * a * a * e \\ &= a * a * a * a \end{aligned}$$

— Dans $(\mathbb{Z}, +)$, $2^3 = 3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

démonstration par récurrence sur n.

1. $n = 0$:

$$\begin{aligned} a^{0+m} &= a^m \\ &= e * a^m \\ &= a^0 * a^m \end{aligned}$$

2. supposons que $a^{n+m} = a^n * a^m$ pour un $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} a^{(n+1)+m} &= a^{n+m+1} \\ &= a * a^{n+m} \\ \text{hyp rec} &= a * (a^n * a^m) \\ &= (a * a^n) * a^m \\ &= a^{n+1} * a^m \end{aligned}$$

□

Définition. Pour $n \in \mathbb{Z}$.
Si $n \geq 0$, on a déjà défini a^n.
Si $n < 0$, on définit $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

Exemple. $a^{-3} = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1}$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Proposition. $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. *Vraie aussi pour* $m, n \in \mathbb{Z}$.

démonstration par récurrence sur m.

1. $m = 0$:

$$\begin{aligned} (a^n)^0 &= e \\ a^{n \cdot 0} &= a^0 = e \end{aligned}$$

2. supposons que $(a^n)^m = a^{nm}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (a^n)^{m+1} &= (a^n)(a^n)^m \\ \text{hyp rec} &= (a^n)a^{nm} \\ &= a^{n+nm} \\ &= a^{n(m+1)} \end{aligned}$$

□

Cours 7

Rappel.

— Isomorphisme : $f : G \to H$ t.q.
  (1) $f(ab) = f(a)f(b)$
  avec $a * b$ et $f(a) \diamond f(b)$ implicitement.
  (2) f est bijective
  "même table"
— f, g isomorphismes $\Rightarrow f^{-1}, g \circ f$ isomorphismes.
  $\mathbb{1}_G : G \to G$ est trivialement un isomorphisme.
— G est isomorphe à H s'il existe un isomorphisme $f : G \to H$.
— Puissances :
  Soit $a \in G$ avec G un groupe.
  — $a^0 = e$
  — $a^{n+1} = aa^n$
  — $a^{-n} = (a^{-1})^n$
  — $a^{n+m} = a^n a^m$
  — $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
— f isomorphisme
  — $f(e_G) = e_H$
  — $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Proposition. *f isomorphisme $f : G \to H$.
$a \in G$. Alors, $f(a^n) = f(a)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

démonstration par récurrence sur n.

$n \geq 0$ 1. $n = 0$

$$\begin{aligned} f(a^0) &= f(e_G) \\ &= e_H \\ &= f(a)^0 \end{aligned}$$

2. supposons que $f(a^n) = f(a)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(a^{n+1}) &= f(a \cdot a^n) \\ &= f(a)f(a^n) \\ \text{hyp rec} &= f(a)f(a)^n \\ &= f(a)^{n+1} \end{aligned}$$

$n < 0$ alors, $-n > 0$ et

$$\begin{aligned} f(a^n) &= f((a^{-1})^{-n}) \\ &= f(a^{-1})^{-n} \\ &= (f(a)^{-1})^{-n} \\ &= f(a)^n \end{aligned}$$

□

Exemple. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, avec la multiplication de matrices.

Soient $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

(A) : associatif, car la multiplication de matrices est associative.

(N) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ est neutre

(I) : l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, H est un groupe pour la multiplication matricielle.

On définit $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to H \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $f(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y)$

(2) *montrons que.* f est bijective.

— f est injective
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
Supposons $f(x) = f(y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$x = y$$

— f est surjective
Soit $Y = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, avec $y \in \mathbb{R}$.
$Y = f(y)$.

□

Sous-groupes

Définition. $H \subseteq (G, *)$ est un *sous-groupe* de G si H est un groupe pour la même opération que G.

Exemple.

— $\{e\} \subseteq G$ est un sous-groupe.

— $G \subseteq G$ est un sous-groupe.

— $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = 2\mathbb{Z} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$

— Dans $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, $\{\overline{0}, \overline{2}\}$ est un sous-groupe.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$

Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$ et à $C_2 = (\{-1, 1\}, \times)$.

— $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +) \subseteq (\mathbb{R}, +)$.

— $C_2 \subseteq \mathbb{Q}_* \subseteq \mathbb{R}_*$.

— $\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$.
$\{\varepsilon, \alpha\}$ et $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{D}_3$.

Notation. On note l'ensemble $m\mathbb{Z} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Cours 8

Rappel.

— $a \in G$.

  — $a^n = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n \text{ fois}}$

  — $a^n = a * a^{n-1}$

  — $a^0 = e$

  — $a^{-n} = (a^{-1})^n$

— Sous-groupe de $(G, *)$: $H \subseteq G$ qui est un groupe pour $*$.

Exemple. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ pour $+$.

Exemple.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

Proposition. *$H \subseteq G$ un sous-groupe.*

(a) Si G est abélien, alors H est abélien ;

(b) Le neutre de H est le neutre de G ;

(c) Si $a \in H$, son inverse $a^{-1} \in H$ est l'inverse de a dans G.

démonstration.

(a) G est abélien, alors $\forall a, b \in G$, $ab = ba$.
En particulier, $\forall a, b \in H$, $ab = ba$.

(b) Le neutre de G e_G a la propriété que $\forall a \in G$, $e_G a = a = a e_G$.
Comme $H \subseteq G$, cette propriété est vraie pour H aussi.
Donc, $a e_G = a = e_G a$.
Ainsi, e_G est le neutre de H, par l'unicité de l'élément neutre.

(c) $a \in H$, il existe un inverse $b \in G$ pour a t.q. $ab = ba = e$.
Comme H est un groupe, $\exists! a^{-1} \in H$.
De $ab = e$, on a $a^{-1}ab = a^{-1}e$, donc $b = a^{-1}$.

□

Théorème.
Un sous-ensemble non-vide $H \subseteq G$ est un sous-groupe ssi pour tous $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.

démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que H est un sous-groupe, donc $a, b \in H$, alors $b^{-1} \in H$.
De plus, H est fermé pour la multiplication, donc $ab^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) (N) H est non-vide, donc $\exists a \in H$.
Par hypothèse, $aa^{-1} = e \in H$.
(I) On vient de montrer que $e \in H$.
Soit $b \in H$ quelconque. Par hypothèse, $eb^{-1} = b^{-1} \in H$.
(A) On sait que $\forall a, b, c \in G$, $(ab)c = a(bc)$.
En particulier, $\forall a, b, c \in H$, $(ab)c = a(bc)$.
Finalement, H est fermé pour l'opération de G, car $\forall a, b \in H$, $b^{-1} \in H$.
Donc, par hypothèse, $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$.

□

Exemple.
Soit $m \in \mathbb{Z}$.
Posons $H = m\mathbb{Z} = \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -2m, -m, 0, m, 2m, \cdots\}$, muni de l'addition.

m.q. H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
H est non-vide, car $m0 = 0 \in H$.
Soient $a, b \in H$.
Par définition de H, $\exists a', b' \in \mathbb{Z}$ t.q. $a = ma'$ et $b = mb'$.
Dans $\mathbb{Z}$, $b^{-1} = -mb'$.
On a $a + (-b) = ma' + (-mb') = m(a' - b') \in H$.
Donc, H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. □

Réciproquement, soit $H \subseteq H$ un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ quelconque. Alors $\exists m \in \mathbb{Z}$ t.q. $H = m\mathbb{Z}$.

démonstration.
On sait que $0\ inH$.
Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$ et l'énoncé est vrai.
Sinon, H contient un autre élément $a \in H$, donc $-a \in H$.
En particulier, H contient au moins un entier positif.
Soit m le *plus petit* élément positif de H.
Soit $h \in H$ quelconque. On divise h par m, donc $h = qm + r$, où $q, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < m$.
Si $r = o$, $h = qm \in m\mathbb{Z}$.
Sinon, comme $h \in H$ et $m \in H$, $h - qm \in H$, mais $h - qm = r$, donc $r \in H$.
Comme $0 < r < m$, il y a une contradiction à la définition de m.

ϟ

Ainsi, $H \subseteq m\mathbb{Z}$. Mais clairement, $m\mathbb{Z} \subseteq H$, car $m \in H$ et $mn \in H$, donc $H = m\mathbb{Z}$. □

Proposition.
Soit $f : G \to H$ un isomorphisme. Alors, $K \subseteq G$ est un sous-groupe de G ssi $f(K)$ est un sous-groupe de H.

Notation. $f(K) = \{f(k) \mid k \in K\}$.

($\Rightarrow$) *Supposons que K est un sous-groupe de G.*
On sait que $e \in K$, alors $f(e) = e \in f(K)$, donc $f(K)$ est non-vide.
Soient $a, b \in f(K)$. On veut montrer que $ab^{-1} \in f(K)$.
Alors, $a = f(k)$ et $b = f(k')$, avec $k, k' \in K$.
Donc, $ab^{-1} = f(k)f(k')^{-1} = f(k)f(k'^{-1}) = f(kk'^{-1})$.
Comme $kk'^{-1} \in K$, $ab^{-1} \in f(K)$.

($\Leftarrow$) *On effectue la même preuve avec f^{-1} qui est un isomorphisme en remarquant que $f^{-1}(f(k)) = k$.*

Notation.
$G \xrightarrow{f} H$ avec f un isomorphisme est équivalent à $G \xrightarrow{\sim} H$.

Notation.
$H \subseteq G$ un sous-groupe est équivalent à $H \leq G$.

Proposition.
Soit $\{H_i\}_{i \in I}$ une collection de sous-groupes de G. Alors $\bigcap\limits_{i \in I} H_i \leq G$.

démonstration.
$H_i \leq G, \forall i \in I$.
Alors, $e \in H_i, \forall i$. Donc, $e \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$. En particulier, $\bigcap\limits_{i \in I} H_i \neq \emptyset$.
Soient $a, b \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$. Alors, $a, b \in H_i, \forall i$.
Comme $H_i \leq G$, $ab^{-1} \in H_i, \forall i$, donc $ab^{-1} \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$. □

Remarque. Si $H_1, H_2 \leq G$, $H_1 \cup H_2$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de G.

Exemple. $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
Plus précisément, $2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, mais $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

Exemple. $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

Chapitre 2

Section 2.4 Relations d'équivalence

Définition. Une *relation déquivalence* sur un ensemble E est un sous-ensemble $R \subseteq E \times E$ satisfaisant

1. réflexivité
   $x \sim x, \forall x \in E$.
2. symétrie
   $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
3. transitivité
   $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$.

Notation. On note $x \sim y$ ssi $(x, y) \in R$.

Exemple.

(a) $E = \mathbb{R}$
  $x \sim y$ ssi $|x| = |y|$
  (refl) $|x| = |x|$, donc $x \sim x$.
  (sym) Supposons $x \sim y$. Alors, $|x| = |y|$. Donc, $y \sim x$.
  (trans) Supposons $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors, $|x| = |y|$ et $|y| = |z|$. Donc $|x| = |z|$. Ainsi, $x \sim z$.

(b) C est l'ensemble des élèves dans la classe.
  $x \sim y$ ssi x et y ont le même âge est une relation d'équivalence.

Définition. Si E est un ensemble et $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, la *classe d'éuivalence* de $x \in E$ est $\overline{x} = \{y \in E \mid y \sim x\} \subseteq E$.

Lemme. *$\overline{x} = \overline{y}$ ssi $x \sim y$.*

démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $\overline{x} = \overline{y}$.
  Par (refl), $x \sim x$, donc $x \in \overline{x}$. Alors, $x \in \overline{y}$. Ainsi, $x \sim y$.

($\Leftarrow$) Supposons $x \sim y$.
  ($\subseteq$) Soit $z \in \overline{x}$. Alors $z \sim x$. Comme $x \sim y$, par (trans), $z \sim y$. Donc, $z \in \overline{y}$.
  ($\supseteq$) idem
  Ainsi, $\overline{x} = \overline{y}$.

□

Cours 9

Rappel.

- $H \leq G$, H un sous-groupe de G, ssi
  — $H \neq \emptyset$;
  — $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$.
- Si $H \leq G$, H a le même neutre que G, mêmes inverses.

- G abélien $\Rightarrow H \leq G$ abélien.
- Si $f : G \to H$ isomorphisme, alors $K \leq G \Leftrightarrow f(K) \leq H$.
- Relations d'équivalence $\sim$ sur E :

(Refl) $a \sim a, \forall a \in E$;
(Sym) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$;
(Trans) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

- Classe d'équivalence : $\overline{a} = \{b \in E \mid b \sim a\}$.
- $a \sim b \iff \overline{a} = \overline{b}$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$.
Équivalence modulo m :
$a \sim b$ ssi $a - b = km$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Notation. $m \mid a - b$, m divise $a - b$: $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = km$.

$a \sim b \iff m \mid a - b$.

démonstration. que c'est bel et bien une équivalence

(Refl) Soit $a \in \mathbb{Z}$.
$a - a = 0m \Rightarrow a \sim a$.

(Sym) Supposons que $a \sim b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
Alors, $a - b = km$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Or, $-(a - b) = -km \Rightarrow b - a = (-k)m$, donc $b \sim a$.

(Trans) Supposons que $a \sim b$ et $b \sim c$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Alors, $a - b = k_1 m$ et $b - c = k_2 m$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
En additionnant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} a - c &= k_1 m + k_2 m \\ &= (k_1 + k_2)m \end{aligned}$$

Donc, $a \sim c$.

□

Si $m = 2$, les classes d'équivalence sont

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 0\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 0 = 2k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k\} \\ &= 2\mathbb{Z} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{1} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 1\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 1 = 2k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k + 1\} \\ &= \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Remarque.

$$\overline{0} = \overline{2} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots \qquad \overline{1} = \overline{3} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots$$

Plus généralement, pour m, on a m classes d'équivalence.

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}$$

Notation. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}\}$ pour la relation de congruence modulo m.

Définition. Une *partition* d'un ensemble E est une collection $\mathcal{P} = \{E_i\}$, avec $i \in I$ de sous-ensembles de E t.q.

(1) $\bigcup_{i \in I} E_i = E$;

(2) $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

Remarque. Chaque $x \in E$ est élément d'exactement un E_i.

Proposition. *Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, alors $\mathcal{P} = \{\overline{a} \mid a \in E\}$ est une partition de E.*

Exemple. $E = \mathbb{Z}$, $\sim$ equivalence modulo 3.
$\mathcal{P} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ est une partition de $\mathbb{Z}$.

démonstration.

(1) Clairement, $\bigcup\limits_{a \in E} \overline{a} \subseteq E$.
On veut montrer que $E \subseteq \bigcup\limits_{a \in E} \overline{a}$.
Soit $x \in E$, alors $x \sim x$ par réflexivité, donc$x \in \overline{x}$ et $x \in \bigcup\limits_{a \in E} \overline{a}$.

(2) Supposons que $x \in \overline{a}$ et $x \in \overline{b}$, avec $\overline{a} \neq \overline{b}$.
Alors, $x \sim a$ et $x \sim b$. Donc, par symétrie, $a \sim x$ et $x \sim b$. Donc, par transitivité, $a \sim b$. Donc $\overline{a} = \overline{b}$. Ceci est une contradiction, donc $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset, \forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{P}$.

□

On définit une opération sur $\mathbb{Z}_m$ pour la congruence modulo m.

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m & \to & \mathbb{Z}_m \\ (\overline{a}, \overline{b}) & \mapsto & \overline{a+b} \end{array}$$

Autrement dit, $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.

Remarque. L'écriture d'un élément $\overline{a}$ n'est pas unique ($\overline{a} = \overline{a'}$ si $a \sim a'$).
Il faut vérifier que l'opération $+$ est correctement définie (définie sans abiguïté).
Autrement dit, si $\overline{a} = \overline{a'}$ et $\overline{b} = \overline{b'}$, on veut montrer que $\overline{a+b} = \overline{a'+b'}$.

Cours 10

Rappel.

- Relation d'équivalence ($\sim$) $\to$ partition en classes d'équivalence ($\overline{a}\{b \mid b \sim a\}$).
- Équivalence (congruence) $\mod m$ (sur $\mathbb{Z}$) :

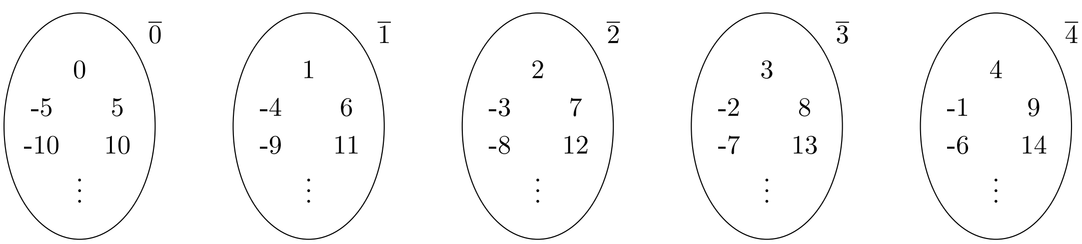
$$\begin{aligned} a \sim b &\Leftrightarrow m \mid a - b \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } a - b = km \end{aligned}$$

On note l'ensemble des classes d'équivalence $\mod m$ par $\mathbb{Z}_m = \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$.
On veut définir une opération $+$ sur $\mathbb{Z}_m$ par $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.
On doit vérifier que cette définition n'est pas ambiguë (ne dépend pas des représentants).
Supposons $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ et $\overline{b_1} = \overline{b_2}$. On doit vérifier que $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$, c'est-à-dire que $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.
Les hypothèses donnent : $a_1 - a_2 = k_a m$ et $b_1 - b_2 = k_b m$. En additionnant ces deux équations, on obtient $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = k_a m + k_b m$. Alors, $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (k_a + k_b)m$. Donc, $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.

□

Remarque. On doit faire ce genre de preuve pour chaque définition de fonction/opération qui ont comme domaine des classes d'équivalence.

Exemple. $m = 5$.



Pour faire $\overline{2} + \overline{1}$, on peut prendre $\overline{2+1} = \overline{2}$, ou bien $\overline{17 + (-4)} = \overline{13}$.

Proposition. $(\mathbb{Z}_m, +)$ *est un groupe abélien.*

démonstration.

(A) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$.

$$\begin{aligned}
\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} &= \overline{a+b} + \overline{c} \\
&= \overline{(a+b)+c} \\
&= \overline{a+(b+c)} \\
&= \overline{a} + \overline{b+c} \\
&= \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)
\end{aligned}$$

(C) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b} + \overline{a}$.

(N) $\overline{0} + \overline{a} = \overline{0+a} = \overline{a}$, donc $\overline{0}$ est neutre. Par commutativité, la propriété est satisfaite.

(I) $\overline{a} + \overline{-a} = \overline{a-a} = \overline{0}$, donc $\overline{-a}$ est l'inverse de $\overline{a}$. Par commutativité, la propriété est satisfaite.
On peut donc écrire $-\overline{a} = \overline{-a}$.

□

Ordre et groupes cycliques

Définition. Soient G un groupe et $a \in G$.
L'*ordre* de a, noté $o(a)$ est la plus petite positive k t.q. $a^k = e$, si elle existe. Sinon, on note $o(a) = \infty$.

Exemple.

- $o(e) = 1$
- Dans $\mathbb{D}_3$
  - $o(\alpha) = 2$
  - $o(\rho) = 3$
- Dans $\mathbb{Z}$
  - $o(0) = 1$
  - $o(n) = \infty, \forall n \neq 0$
- Dans $\mathbb{Z}_6$
  - $o(\overline{2}) = 3$

Proposition. *Soit $m \in \mathbb{Z}$. $a^m = e$, ssi $o(a) \mid m$.*

démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $a^m = e$.
On divise m par $o(a)$: $m = q \cdot o(a) + r$, avec $0 \leq r < o(a)$.
Si $r = 0$, $o(a) \mid m$ et on a terminé.
Supposons que $0 < r < o(a)$, alors

$$\begin{aligned}
r &= m - q \cdot o(a) \\
a^r &= a^{m - q \cdot o(a)} \\
&= a^m \cdot a^{-q \cdot o(a)} \\
&= e \cdot (a^{o(a)})^{-q} \\
&= e \cdot e^{-q} \\
&= e
\end{aligned}$$

mais $0 < r < o(a)$ contredit la minimalité de $o(a)$.

□