MAT346 - Analyse II
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

Table des matières

Chapitre 1 Intégration

Section 1.1 Intégrales de Riemann

Notation.
$\mathcal{B}[c,d] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}$.
$\mathcal{R}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}$.
$\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}$.

On suppose nos fonctions bornées.

Définition.

a) Une partition de $[a,b]$ est un ensemble fini de points $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$ t.q. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

b) L'ensemble des partitions de $[a,b]$ est $\Omega[a,b]$.

c) On dit Δ' est *plus fine* que Δ, noté $\Delta' \geq \Delta$, si $\Delta' \supseteq \Delta$.

d) *Raffinement commun* de Δ_1 et Δ_2, noté $\Delta_1 \vee \Delta_2$, est la partition de $[a,b]$ formée de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ordonnés.

e) La *norme* de Δ, notée $\|\Delta\|$, est $\|\Delta\| = \max_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|$.

f)

$$\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$
$$\underline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$

Remarque.

$$\|x\| \geq 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$
$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

Définition.

a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de f pour la partition Δ est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de f pour la partition Δ est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Proposition.

a)
$$\underline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)\leq\underline{S}(f,\Delta),\forall\Delta\in\Omega[a,b]$$

b)
$$\underline{S}(f,\Delta)\leq\overline{S}(f,\Delta)$$

c)
$$\overline{S}(f,\Delta)\leq\overline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)$$

Proposition. *Si $\Delta'\geq\Delta$, alors $\overline{S}(f,\Delta')\leq\overline{S}(f,\Delta)$.*

démonstration.

Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$$

$$\Delta' : a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<\bar{x}<x_i<\ldots<x_n=b$$

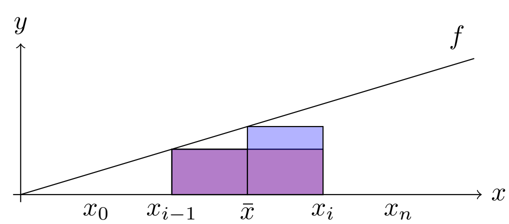
On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta)-\overline{S}(f,\Delta') &= \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\cdot(x_1-x_{i-1})\right]\\ &\quad-\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\cdot(\bar{x}-x_{i-1})+\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\cdot(x_i-\bar{x})\right]\\ &=(x_i-\bar{x})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\right]\\ &\quad+(\bar{x}-x_{i-1})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\right]\\ &\geq 0\end{aligned}$$

□

Proposition. *Si $\Delta'\geq\Delta$, alors $\underline{S}(f,\Delta')\geq\underline{S}(f,\Delta)$*

démonstration.



□

Remarque. $\underline{S}(f,\Delta)=-\overline{S}(-f,\Delta)$.

Corollaire. $\forall\Delta_1,\Delta_2\in\Omega[a,b],\underline{S}(f,\Delta_1)\leq\overline{S}(f,\Delta_2)$

démonstration.

On a $\Delta_1\vee\Delta_2\geq\Delta_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\Delta_1)&\leq\underline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leq\overline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leq\overline{S}(f,\Delta_2)\end{aligned}$$

□

Définition.

a) La somme par défaut de f est $\underline{S}(f) = \sup_{\Delta\in\Omega[a,b]} \underline{S}\,(f,\Delta)$.

b) La somme par excès de f est $\overline{S}(f) = \inf_{\Delta\in\Omega[a,b]} \overline{S}\,(f,\Delta)$.

Théorème. $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$

démonstration.
Soit $\Delta_1 \in \Omega\,[a,b]$
$\underline{S}(f) = \sup \underline{S}\,(f,\Delta)$ est le plus petit majorant des $\underline{S}\,(f,\Delta)$ avec $\Delta \in \Omega\,[a,b]$.
Du corollaire précédant, on a que $\underline{S}\,(f,\Delta) \leq \overline{S}\,(f,\Delta_1)$.
Donc, $\overline{S}\,(f,\Delta_1)$ est un majorant des $\underline{S}\,(f,\Delta)$.
Ainsi, $\underline{S}(f) \leq \overline{S}\,(f,\Delta_1)$.
De même, $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}\,(f,\Delta)$ est le plus grand minorant des $\overline{S}\,(f,\Delta)$ avec $\Delta \in \Omega\,[a,b]$.
Comme $\underline{S}(f)$ est un minorant des $\overline{S}\,(f,\Delta)$, on a que $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$. □

Définition.
Soit $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$. On dit que f est *intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et on note $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$. La valeur commune de $\underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f)$ est notée $\int_a^b f(x)\;dx$

Critère d'intégrabilité

Théorème (Critère d'intégrabilité)**.**
Soit $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$*. Alors* $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$ *si, et seulement si,* $(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega\,[a,b])$ *t.q.* $\overline{S}\,(f,\Delta) - \underline{S}\,(f,\Delta) < \varepsilon$.

démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
On a $\displaystyle\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}\,(f,\Delta)$.
Comme $\overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut minorer $\overline{S}\,(f,\Delta)$, alors $\exists\Delta_1 \in \Omega\,[a,b]$ t.q. $\overline{S}\,(f,\Delta_1) < \overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}\,(f,\Delta)$.
Comme $\underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut majorer $\underline{S}\,(f,\Delta)$, alors $\exists\Delta_2 \in \Omega\,[a,b]$ t.q. $\underline{S}\,(f,\Delta_2) > \underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}\,(f,\Delta) - \underline{S}\,(f,\Delta) &\leq \overline{S}\,(f,\Delta_1) - \underline{S}\,(f,\Delta_2) \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \left(\overline{S}(f) - \underline{S}(f)\right) + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$.
Alors $\exists\Delta$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$.
Mais alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) \\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Du théorème du sandwich, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$, car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.
Donc, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

$\square$

Corollaire. *S'il existe $\Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) = \underline{S}(f,\Delta)$, alors $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Théorème. *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.*

démonstration.
Soit $f \in \mathcal{C}[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par la proposition d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n\varepsilon > b - a$.

Rappel.
f est uniformément continue sur $[a,b]$ si $(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)$ t.q. pour $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Rappel.
Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Comme $f \in \mathcal{C}[a,b]$, elle est uniformément continue sur $[a,b]$.
Alors, $\exists\delta > 0$ t.q. pour $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$.
Soit donc $\Delta \in \Omega[a,b] : a = x_0 < x_1, \ldots < x_n = b$ avec $\|\Delta\| < \delta$.
Alors, $\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) < \frac{1}{n}$.

Remarque. $\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])$ peut être noté $\operatorname{osc}_f([x_{i-1},x_i])$.

On obtient

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{R}[a,b]$. $\square$

Théorème. *Toute $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

démonstration.

(1) Si f est constante, alors $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) = 0 < \varepsilon$.

(2) Si f est croissante,
Soit $\varepsilon > 0$
Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon > (b-a)(f(b) - f(a))$
Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}, i \in [0..n]$

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)] \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

(3) Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f \in \mathcal{R}[a,b]$.
Donc, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

□

Théorème.
Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, alors $f_1+f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\int(f_1+f_2)=\int f_1+\int f_2$.

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $f_i \in \mathcal{R}[a,b]$, $\exists \Delta_i \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f_i,\Delta_i)-\underline{S}(f_i,\Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
Alors, $\overline{S}(f_i,\Delta)-\underline{S}(f_i,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Supposons $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1+f_2,\Delta) &\leq \overline{S}(f_1,\Delta)+\overline{S}(f_2,\Delta) \\
\underline{S}(f_1+f_2,\Delta) &\geq \underline{S}(f_1,\Delta)+\underline{S}(f_2,\Delta)
\end{aligned}$$

Car $\sup(f_1+f_2) \leq \sup f_1 + \sup f_2$ et $\inf(f_1+f_2) \geq \inf f_1 + \inf f_2$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1+f_2,\Delta)-\underline{S}(f_1+f_2,\Delta) &\leq \overline{S}(f_1,\Delta)+\overline{S}(f_2,\Delta)-\underline{S}(f_1,\Delta)-\underline{S}(f_2,\Delta) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f_1+f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_1+f_2 &\leq \overline{S}(f_1+f_2,\Delta) \\
&\leq \overline{S}(f_1,\Delta)+\overline{S}(f_2,\Delta) \\
&< \underline{S}(f_1,\Delta)+\frac{\varepsilon}{2}+\underline{S}(f_2,\Delta)+\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_a^b f_1+\frac{\varepsilon}{2}+\int_a^b f_2+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b f_1+f_2 < \int_a^b f_1+\int_a^b f_2+\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.
Donc, $\int_a^b f_1+f_2 \leq \int_a^b f_1+\int_a^b f_2$.
De même, on peut montrer que $\int_a^b f_1+f_2 \geq \int_a^b f_1+\int_a^b f_2$.
Donc, $\int_a^b f_1+f_2 = \int_a^b f_1+\int_a^b f_2$. □

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\int \lambda f = \lambda \int f$.

démonstration.
Laissé en exercice.
Utiliser $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ et $\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$. □

Corollaire.
Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, *alors* $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

démonstration.
$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0$. □

Inégalité du triangle

Théorème (Inégalité du triangle)**.**
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *alors* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
Alors, $\exists \Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
Enfin,

$$\begin{aligned}
-|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\
&\Rightarrow \int f \leq \int |f|
\end{aligned}$$

□

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $a \leq c < d \leq b$, *alors* $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[a,b]$.

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\exists \Delta_1 \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1) < \varepsilon$.
Soit Δ_2 le raffinement de Δ_1 en ajoutant les points c et d.
Alors, $\overline{S}(f,\Delta_2) - \underline{S}(f,\Delta_2) \leq \overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1) < \varepsilon$
Donc, $f \in \mathcal{R}[c,d]$. □

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $a < c < b$, *alors* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a,c]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\exists \Delta_2 \in \Omega[c,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_2) - \underline{S}(f,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$. Alors, $\Delta \in \Omega\,[a,b]$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &\leq \overline{S}\,(f,\Delta) \\
&= \overline{S}\,(f,\Delta_1) + \overline{S}\,(f,\Delta_2) \\
&< \underline{S}\,(f,\Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}\,(f,\Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \underline{S}\,(f,\Delta_1) + \underline{S}\,(f,\Delta_2) + \varepsilon \\
&\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$.
De même, $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.*
Si f possède n discontinuités dans $[a,b]$, alors $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

démonstration.
Pour $n = 0$, $f \in \mathcal{C}\,[a,b]$, donc $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$ est un résultat connu.
Supposons l'énoncé vrai pour n.
Supposons que $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$ admet $n+1$ discontinuités.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$
Il y a deux cas à considérer

1. a ou b est une discontinuité
   SPDG, supposons que a est la discontinuité.
   Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. a est l'unique discontinuité de $[a, a+\eta]$ et $\eta < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.
   Alors, $[a+\eta, b]$ contient n discontinuités.
   De l'hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{R}\,[a+\eta, b]$.
   Il existe donc $\Delta \in \Omega\,[a+\eta, b]$ t.q. $\overline{S}\,(f,\Delta) - \underline{S}\,(f,\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$.
   On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}\,(f,\Delta_\varepsilon) - \underline{S}\,(f,\Delta_\varepsilon) &= \big(\overline{S}\,(f,\Delta) - \underline{S}\,(f,\Delta)\big) + \big(\overline{M}\,(f,[a,a+\eta]) - \underline{M}\,(f,[a,a+\eta])\big)\,\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

2. ni a ni b ne sont des discontinuités
   Soit $c \in]a,b[$ qui est une discontinuité de f.
   Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. c est l'unique discontinuité de $[c-\eta, c+\eta] \subset [a,b]$ et $\eta < \dfrac{\varepsilon}{8M}$.
   Alors, $[a, c-\eta]$ et $[c+\eta, b]$ contiennent au plus n discontinuités, par l'hypothèse de récurrence
   $\exists \Delta_1 \in \Omega\,[a, c-\eta]$ t.q. $\overline{S}\,(f,\Delta_1) - \underline{S}\,(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{4}$.
   $\exists \Delta_2 \in \Omega\,[c+\eta, b]$ t.q. $\overline{S}\,(f,\Delta_2) - \underline{S}\,(f,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{4}$.
   Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f,\Delta_\varepsilon) &= \left[\overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1)\right] + \left[\overline{S}(f,\Delta_2) - \underline{S}(f,\Delta_2)\right] \\
&+ \left[\overline{M}(f,[c-\eta,c+\eta]) - \underline{M}(f,[c-\eta,c+\eta])\right](2\eta) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4M\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Théorème. *Soient* $f : [a,b] \to [c,d] \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $g : [c,d] \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c,d]$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Remarque. L'hypothèse que $g \in \mathcal{C}[c,d]$ est nécessaire.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad x = \frac{m}{n} \text{ et } \mathtt{pgcd}(m,n) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Fonction de Dirichlet modifiée.

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$.

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \circ f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

Fonction de Dirichlet.

Lemme. *Si* $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a,b]$ *et* Δ' *s'obtient de* Δ *en ajoutant un unique point, alors* $\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') \leq 2\overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \|\Delta\|$.

démonstration.

Soient $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$.

$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \ldots < x_n = b$.

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') &= \overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) - \overline{M}(f,[\bar{x},x_i]) \cdot (x_i - \bar{x}) \\
&= (\bar{x} - x_{i-1})\left(\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\right) + (x_i - \bar{x})\left(\overline{M}(f,[x_{i-1},x_{-}i]) - \overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\right) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|,[x_{i-1}x_i])\left((\bar{x} - x_{i-1}) - (x_i - \bar{x})\right) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|,[a,b])\,\|\Delta\|
\end{aligned}$$

□

Corollaire. *Si* $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a,b]$ *et* Δ' *s'obtient de* Δ *en ajoutant* p *points, au plus un point par sous-intervalle de* Δ*, alors* $\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') \leq 2p\overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \|\Delta\|$.

Théorème de Darboux

Théorème (Darboux, 1875)**.**
Si $f \in \mathcal{B}[a,b]$*, alors*

$$\overline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \overline{S}(f,\Delta) \qquad\qquad \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \underline{S}(f,\Delta)$$

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$.

Ainsi, $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_0) < \overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\delta > 0$ t.q. $\delta < \min\limits_{i \in [1..n]} |x_i - x_{i-1}|$ et $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|, [a,b])}$.

Soit $\Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\|\Delta\| < \delta$.

Alors, $\|\Delta\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Considérons $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$.

Comme $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$, aucun sous-intervalle ouvert de Δ ne contient plus d'un point de Δ_0.

Comme Δ' s'obtient de Δ en ajoutant au plus $n-1$ points $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &\leq 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a,b]) \|\Delta\| \\
&< 2(n-1)\overline{M}(f, [a,b]) \delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f, \Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \overline{S}(f) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\lim_{\|\Delta\| \to 0} \underline{S}(f, \Delta) &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} -\overline{S}(-f, \Delta) \\
&= -\lim_{\|\Delta\| \to 0} \overline{S}(-f, \Delta) \\
&= -\overline{S}(-f) \\
&= \underline{S}(f)
\end{aligned}$$

□

Définition. Soit $f \in \mathcal{B}[a,b]$.

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \in \Omega[a,b]$.

Soient $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pour $i \in [1..n]$.

Le nombre réel

$$S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

est appelé *somme de Riemann* de la fonction f correspondant à la partition Δ et aux points $\{\bar{x}_i\}_{i \in [1..n]}$.

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Alors, $(\forall \varepsilon > 0)$, $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$ t.q. pour toute partition Δ de $[a,b]$ avec $\|\Delta\| < \delta$ et pour tout choix de points $\{\bar{x}_i\}$, on a

$$\left| \int_a^b f - S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire.

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$$

démonstration.

On a $\underline{S}(f,\Delta) \leq S(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) \leq \overline{S}(f,\Delta)$.

Donc,

$$\underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}(f,\Delta) \leq \lim_{\|\Delta\|\to 0} S(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) \leq \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}(f,\Delta) = \overline{S}(f)$$

Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$, on a $\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \displaystyle\int_a^b f$.

Par le théorème du sandwich, $S(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) = \displaystyle\int_a^b f$. □

Loi de la moyenne

Théorème (Loi de la moyenne)**.**

Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Alors, $\exists \mu \in \left[\underline{M}(f,[a,b]), \overline{M}(f,[a,b])\right]$ t.q. $\displaystyle\int_a^b f = (b-a)\cdot\mu$.

démonstration.

Soit ϕ la fonction donnée par $\phi(x) = (b-a)x$.

On a $\underline{M}(f,[a,b]) \leq f \leq \overline{M}(f,[a,b])$.

Donc

$$\phi(\underline{M}(f,[a,b])) = (b-a)\underline{M}(f,[a,b]) = \int_a^b \underline{M}(f,[a,b]) \leq \int_a^b f \leq \overline{M}(f,[a,b]) = (b-a)\overline{M}(f,[a,b]) = \phi(\overline{M}(f,[a,b]))$$

Rappel.

Théorème (Théorème de valeur intermédiaire)*.*

f continue sur $[a,b]$, $f(a) < c < f(b)$ implique $\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $f(x_0) = c$.

Comme ϕ est continue sur $[\underline{M}(f,[a,b]), \overline{M}(f,[a,b])]$, du TVI, $\exists \mu \in [\underline{M}(f,[a,b]), \overline{M}(f,[a,b])]$ t.q. $\phi(\mu) = c$ pour tout $c \in [\phi(\underline{M}(f,[a,b])), \phi(\overline{M}(f,[a,b]))]$.

En particulier, si $c = \displaystyle\int_a^b f$, $\exists \mu$ t.q. $\phi(\mu) = \displaystyle\int_a^b c$, c'est-à-dire t.q. $(b-a)\mu = \displaystyle\int_a^b f$. □

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Soit $\begin{array}{rcl} F:[a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^x f(f)dt \end{array}$

Alors,

a) $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \overline{M}(|f|,[a,b])(b-a)\cdot|x_1 - x_2|$ pour tous $x_1, x_2 \in [a,b]$;

b) F est uniformément continue sur $[a,b]$;

c) Si f est continue, alors F est différentiable et $F' = f$.

démonstration.

a) Supp $x_1 > x_2$

On a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left|\int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f\right| \\ &= \left|\int_{x_2}^{x_1} f\right| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} |f| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} \overline{M}(|f|,[a,b]) \\ &= \overline{M}(|f|,[a,b])\cdot|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$.
Prenons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\overline{M}(|f|, [a,b])}$.
Soient $x, y \in [a,b]$ avec $|x-y| < \delta$.
Alors,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \overline{M}(|f|, [a,b]) \cdot |x-y| \\ &< \overline{M}(|f|, [a,b]) \cdot \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

c) Soit $x_0 \in [a,b]$.
On a

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \\ &\overset{\text{Loi de la moyenne}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0) f(x_0 + \theta(x - x_0))}{x - x_0} && \theta \in [0,1] \\ &= \lim_{x \to x_0} f(x_0 + \theta(x - x_0)) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

□

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Notation. F est une primitive de f.

Corollaire. *Si f est continue, alors f admet au moins une primitive.*

Corollaire. *Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors $F_1 - F_2 = C$ pour une constante C.*

Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral)**.**
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et F est une primitive de f, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

démonstration.
Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \in \Omega[a,b]$.
Comme F est continue et différentiable sur $[a,b]$ et a fortiori sur $[x_{i-1}, x_i]$, le théorème de la moyenne donne $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ t.q. $\dfrac{F(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$.
On a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{array}{rrcccc} & \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) & \leq & f(t_i) & \leq & \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\ \Rightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\ \Rightarrow & \underline{S}(f, \Delta) & \leq & F(b) - F(a) & \leq & \overline{S}(f, \Delta) \\ \Rightarrow & \displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \underline{S}(f, \Delta) & \leq & F(b) - F(a) & \leq & \displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f) = \int_a^b f \end{array}$$

Donc, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. □

Proposition. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors,*

a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *;*

b) $\int_a^b f = 0$.

démonstration.

a) déjà fait

b) Soit p le nombre de points où $f \neq 0$.
Pour $p = 0$, c'est trivial.
Supposons que la propriété est vraie pour p.
Supposons que $f \neq 0$ en $p+1$ points.
Il y a deux cas à considérer

1) $\exists c \in [a,b]$ avec $f(c) \neq 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $\eta > 0$ t.q.

i) $a < c-\eta < c+\eta < b$;

ii) c est le seul point de $[c-\eta, c+\eta]$ où $f \neq 0$;

iii) $\eta < \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4\overline{M}(f,[a,b])}, \dfrac{-\varepsilon}{4\underline{M}(f,[a,b])}\right\}$.

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\int_a^{c-\eta} f \quad = \quad 0 \quad \int_{c+\eta}^b f$$

Du critère d'intégrabilité, $\exists \Delta_1 : a < x_0 < x_1, \ldots < x_n = c-\eta$, $\exists \Delta_2 : c+\eta = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_i) \leq \overline{S}(f,\Delta_i) - \underline{S}(f,\Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1,2\}$.
Prenons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta) &= \overline{S}(f,\Delta_1) + 2\eta\overline{M}(f,[c-\eta,c+\eta]) + \overline{S}(f,\Delta_2) \\
&\leq \overline{S}(f,\Delta_1) + 2\eta\overline{M}(f,[a,b]) + \overline{S}(f,\Delta_2) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

De même, $\underline{S}(f,\Delta_i) > \overline{S}(f,\Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1,2\}$.
et

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,\Delta) &= \underline{S}(f,\Delta_1) + 2\eta\underline{M}(f,[c-\eta,c+\eta]) + \underline{S}(f,\Delta_2) \\
&\leq \underline{S}(f,\Delta_1) + 2\eta\underline{M}(f,[a,b]) + \underline{S}(f,\Delta_2) \\
&< -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \\
&= -\varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $\varepsilon < \underline{S}(f,\Delta) \leq \overline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$.
Comme $\varepsilon > 0$ est arbirtaire, on en déduit que $\int_a^b f = 0$.

2) $f(c) \neq 0$ en a ou en b.
On procède de la même manière avec un sous-intervalle de largeur η autour de a et de b t.q. a et b sont les seules discontinuités dans ces intervalles.

□

Corollaire. *Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q. $f = g$ sauf peut-être en nu nombre fini de points, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Section 1.2 Techniques d'intégration

Théorème (Intégration par parties)**.**
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables t.q. $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b fg' = fg \,|_a^b - \int_a^b gf'$$

démonstration.
Posons $h = fg$.
Alors,

$$\begin{aligned}
h' &= f'g + fg' \\
\int_a^b h' &= \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \\
\int_a^b fg' &= \int_a^b h - \int_a^b f'g \\
&= h \,|_a^b - \int_a^b f'g \\
&= fg \,|_a^b - \int_a^b f'g
\end{aligned}$$

□

Théorème (Changement de variable/Substitution)**.**
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\phi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ de classe C^1, c'est-à-dire ϕ est dérivable et ϕ' est continue. Si $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

démonstration.
Posons $h(x) = \int_a^x f(t)dt$.
Du théorème fondamental, h est uniformément continue, différentiable et $h' = f$.
Soit $g(t) = (h \circ \phi)(t) = h(\phi(t)) = \int_a^{\phi(t)} f(t)dt$.
On a h, ϕ différentiables, donc g l'est aussi et

$$\begin{aligned}
g'(t) &= h'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\
&= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta g'(t)dt \\
&= g(\beta) - g(\alpha) \\
&= h(\phi(\beta)) - h(\phi(\alpha)) \\
&= h(b) - h(a) \\
&= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

□

Fractions partielles

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Avec $b^2-4ac<0$.
On ramène sur dénominateurs communs.
On ramène en une fraction.
On résoud le système d'équations avec $P(x)$.
On intègre chaque fraction.

Quelques substitutions

1. $f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \cdots\right)$, ou f est une fonction rationnelle $f = \frac{P(x)}{Q(x)}$.
   On pose $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ où n est un multiple commun de $n_1, n_2, \cdots$.
   Exemple.
   $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \int x^2(x-1)^{-1/2}$.
   Posons $x-1=t^2$.
   Alors, $dx = 2tdt$.
   On obtient $\displaystyle\int x^2(x-1)^{-1/2} = \int (t^2-1)^2(t^2)^{-1/2}2tdt = 2\int (t^2+1)^2dt$.
2. $\displaystyle\int x^\alpha(a+bx^\beta)^\gamma dx$ avec $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}$.
   On pose $t = x^\beta$.
   Alors, $dt = \beta x^{\beta-1}dx$.
   Donc, $dx = \dfrac{dt}{\beta x^{\beta-1}} = \dfrac{dt}{\beta t^{\beta - 1/\beta}}$.
   Exemple.
   $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx$.
   Posons $t = x^2$.
   On a $dt = 2xdx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2x} = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.
   On obtient

$$\begin{aligned}\int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx &= \int t^{-2}(1+t)^{-1/2}\frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2}\int t^{-5/2}(1+t)^{-1/2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int t^{-3}(\frac{1+t}{t})^{-1/2}dt\end{aligned}$$

   Posons $u^2 = \dfrac{1+t}{t} = 1 + \dfrac{1}{t}$. On a $u^2 - 1 = \dfrac{1}{t} \Rightarrow t = \dfrac{1}{u^2-1}$.
   Alors, $dt = (-1)(u^2-1)^{-2}(2u)du$.
   Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int t^{-3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2}dt &= -\frac{1}{2}\int (u^2-1)^3u^{-1}(u^2-1)^{-1}2udu \\ &= -\int (u^2-1)du\end{aligned}$$

3. $f(\sin x, \cos x)$.
   On pose $t = \tan\frac{x}{2}$. On a $x = 2\arctan t$.
   Alors, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$.
   Exemple.
   $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$.
   On a

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}} - \frac{\dfrac{1}{\cos^2}(\sin^2)}{\dfrac{1}{\cos^2}(\cos^2+\sin^2)} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

   Alors,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2+\cos x} &= \int \frac{2dt}{1+t^2}\frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2dt}{3+t^2} \\
&= 2\int \frac{dt}{t^2+\sqrt{3}^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

4. $f\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$.
   On pose $x = a\sin t$. On a $dx = a\cos t dt$.
   Exemple.

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx &= \int a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}a\cos t dt \\
&= \int a^4\sin^2 t\cos^2 t dt \\
&= \int a^4\frac{1}{4}\sin^2 2t dt \\
&= \int \frac{a^4}{4}\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}dt \\
&= \frac{a^4}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]
\end{aligned}$$

5.

Rappel.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\cosh x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \sinh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cosh^2 x + \sinh^2 x &= -\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc, $\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$.
Alors, $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \Rightarrow \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$.
Formellement,

$$\sinh x = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

avec $z \in \mathbb{C}$.
$f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$.
On pose $x = a\cosh t$. On a $dx = a\sinh t dt$.

Exemple.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{\sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2}} a \sinh t dt \\ &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{a \sinh t} a \sinh t dt \\ &= \int a^2 \cosh^2 t dt \\ &= \int a^2 \frac{a + \cosh 2t}{2} dt \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2} \frac{\sinh 2t}{2} \end{aligned}$$

Remarque. $\operatorname{arccosh} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)$, $\operatorname{arcsinh} t = \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)$.

6. $f\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)$.
On pose $x = a\sinh t$. On a $dx = a\cosh t dt$.

Exemple.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx &= \int \frac{a^3\sinh^3 t}{(a^2\sinh^2 t + a^2)^{3/2}} a\cosh t dt \\
&= \int \frac{a^3\sinh^3 t}{a^3\cosh^3 t} a\cosh t dt \\
&= a\int \frac{\sinh^3 t}{\cosh^2 t} dt \\
&= a\int \frac{\sinh t \sinh^2 t}{\cosh^2 t} dt \\
&= a\int \frac{\sinh t(\cosh^2 t - 1)}{\cosh^2 t} dt \\
&= a\int \left(\sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) dt \\
&\text{posons } u = \cosh t, du = \sinh t dt \\
&= a\cosh t + \frac{a}{\cosh t} \\
&= a\sqrt{\cosh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{\cosh^2 t}} \\
&= a\sqrt{1+\sinh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \\
&= a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}
\end{aligned}$$

7. $f\left(\sqrt{x^2+2bx+c}\right)$, avec $x^2+2bx+c$ irréductible dans $\mathbb{R}$.
   On a $x^2+2bx+c = (x+b)^2 + (c-b^2)$.
   On pose $t = x+b$. On a $dt = dx$.
   Exemple.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx &= \int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^2+1}}dx \\
&\text{posons } t = x+2, dt = dx \\
&= \int \frac{t-2}{\sqrt{t^2+1}}dt \\
&= \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt - 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\
&\text{posons } u = t^2+1, du = 2tdt \\
&\text{posons } t = \sinh v, dt = \cosh v dv \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - 2\int \frac{\cosh v dv}{\sqrt{\sinh^2 v + 1}} \\
&= \sqrt{u} - 2\int dv \\
&= \sqrt{u} - 2v \\
&= \sqrt{t^2+1} - 2\mathrm{arcsinh} t \\
&= \sqrt{t^2+1} - 2\ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\
&= \sqrt{(x+2)^2+1} - 2\ln\left(x+2+\sqrt{1+(x+2)^2}\right)
\end{aligned}$$

Section 1.3 Intégrales impropres

Définition. $f : [a, \infty[$ continue par morceaux.

L'intégrale impropre (de 1$^{\text{ère}}$ espèce) de f est $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx$.
Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{y\to\infty}\int_1^y \frac{dx}{x}\\ &= \lim_{y\to\infty}(\ln y - \ln 1)\\ &= \infty\end{aligned}$$
diverge

2.
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y\to\infty}\int_1^y x^{-p}dx\\ &= \lim_{y\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^y\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)\end{aligned}$$
Si $p>1$, alors $1-p<0$ et $y^{1-p}\xrightarrow[y\to\infty]{} 0$.
On a alors $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.
Si $p<1$, alors $1-p>0$ et $y^{1-p}\xrightarrow[y\to\infty]{}\infty$.
On a alors que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ diverge.
Si $p=1$, c'est le cas 1, qui diverge.

3.
$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sx}dx &= \lim_{y\to\infty}\int_0^y e^{-sx}\\ &= \lim_{y\to\infty}\left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right|_0^y\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{e^{-sy}}{-s}+\frac{1}{s}\right)\end{aligned}$$
Si $s<0$, alors $-sy>0$ et l'intégrale diverge.
Si $s>0$, alors $-sy<0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{s}$.
Si $s=0$, alors $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}dx = \int_0^\infty dx$ diverge.

4.
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{y\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}\\ &= \lim_{y\to\infty}(\arctan y - \arctan 0)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Définition. $f :]a,b]$ continue, mais t.q. $\lim_{x\to a^+} f(x)$ n'existe pas.
L'intégrale impropre (de 2$^{\text{ème}}$ espèce) de f est $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b f(x)dx$.
Si le limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^b \frac{dx}{x}\\ &= \lim_{y\to 0^+}(\ln 1 - \ln y)\\ &= \infty\end{aligned}$$

   diverge

2.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{dx}{x^p}\\ &= \lim_{y\to 0^+}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_y^1\\ &= \frac{1}{1-p} - \lim_{y\to 0^+}\frac{y^{1-p}}{1-p}\end{aligned}$$

   Si $p > 1$, alors $1-p < 0$ et l'intégrale diverge.
   Si $p < 1$, alors $1-p > 0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{1-p}$.
   Si $p = 1$, alors c'est le cas 1, qui diverge.

3.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{y\to 1^-}\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \lim_{y\to 1^-}(\arcsin y - \arcsin 0)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Remarque.

1.
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x} &= \overbrace{\int_0^b \frac{dx}{x}}^{2^{\text{ème}}\text{ esp}} + \overbrace{\int_b^\infty \frac{dx}{x}}^{1^{\text{ère}}\text{ esp}}\\ &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^b \frac{dx}{x} + \lim_{y\to\infty}\int_b^y \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

   $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ converge ssi les deux limites existent.

2.
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \sin x dx &= \lim_{y\to\infty}\int_{-y}^y \sin x dx\\ &= \lim_{y\to\infty}\cos x\Big|_{-y}^y\\ &= \lim_{y\to\infty}(\cos y - \cos(-y)) = \lim_{y\to\infty} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx &= \int_{-\infty}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{\infty} \sin x dx \\
&= \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{0} \sin x dx + \lim_{y\to\infty} \int_{0}^{y} \sin x dx \\
&= \lim_{y\to\infty} (\cos(-y) - \cos y) + \lim_{y\to\infty} (\cos 0 - \cos y)
\end{aligned}$$

diverge

Ainsi, l'intégrale diverge.

Théorème (Critère de Cauchy)**.**

$\int_a^\infty f(x)dx$ *converge ssi* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$ *t.q.* $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} \right| < \varepsilon.$

démonstration.

Posons $F(y) = \int_a^y f(x)dx$.

($\Rightarrow$) Supposons que $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

Soit $L = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)dx$.

Alors, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$ t.q. $y \leq M \Rightarrow |F(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient y_1, y_2 avec $M \leq y_1 \leq y_2$.

On a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| &= |F(y_2) - F(y_1)| \\
&= |F(y_2) - L + L - F(y_1)| \\
&\leq |F(y_2) - L| + |F(y_1) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$, $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

En particulier, on a $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$, $M \leq n \leq y \Rightarrow |F(y) - F(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Considérons la suite $\{F(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Rappel. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)$, $m > n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$.

La suite $\{F(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et elle est convergente. Soit $L = \lim_{n\to\infty} F(n)$.

Alors, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)$, $n > N \Rightarrow |F(n) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Il reste à montrer que $\{F(y)\}_{y\in\mathbb{R}}$ converge aussi vers L.

À partir d'un certain rang approprié, on a

$$\begin{aligned}
|F(y) - L| &= |F(y) - F(n) + F(n) - L| \\
&\leq |F(y) - F(n)| + |F(n) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque. Si $f \geq 0$, alors F est croissante, donc $\lim F(y)$ converge ou tend vers ∞.

Ainsi, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge ssi $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$.

Proposition (Test de comparaison)**.**
Supposons que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $(\forall x \geq a)$.
Alors, $\int_a^\infty g(x)dx$ *converge implique* $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*

démonstration.
$\int_a^\infty g(x)dx$ converge, alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$, $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left|\int_{y_1}^{y_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$.
On a

$$0 \leq \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \leq \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx = \left|\int_{y_1}^{y_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$$

Donc, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. $\square$

Exemple.
Déterminer si $\int_1^\infty e^{-x^2}$ converge.
Pour $x \geq 1$, on a $x^2 \geq x$, donc $-x^2 \leq -x$ et $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.
Or, $\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^y = \lim_{y\to\infty} (e^{-1} - e^{-y}) = e^{-1}$.
Comme $e^{-x^2} \geq 0$, on a que $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ converge.

Proposition (Test de comparaison limite)**.**
Supposons $a \leq b \leq x$ *et* $f(x), g(x) \geq 0$, $(\forall x \geq b)$.
Si $C = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe, alors* $\int_a^\infty g(x)dx$ *converge implique* $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*
De plus, si $C \neq 0$, $\int_a^\infty g(x)dx$ *converge ssi* $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*

Proposition (Convergence absolue)**.**

a) $\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$, *alors* $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$.

b) $\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx$.

démonstration.

a) Si $\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$, alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$ t.q. $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left|\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$.

Or, $\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)dx\right| \leq \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx = \left|\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$.

Du critère de Cauchy, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

b)

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| &= \left|\lim_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx\right| \\
&= \lim_{y\to\infty}\left|\int_a^y f(x)dx\right| \\
&\leq \lim_{y\to\infty}\int_a^y |f(x)|\,dx \\
&= \int_a^\infty |f(x)|\,dx
\end{aligned}$$

$\square$