MAT141 - Éléments d'algèbre
Donné par Jean-Philippe Burelle

Julien Houle

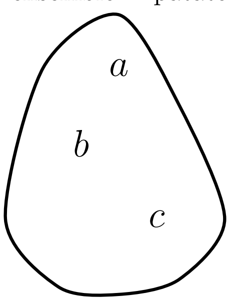
Automne 2025

Table des matières

Chapitre 1 Ensembles

Cours 1

Idée : ensemble = patate.

$E =$ 

$= \{a, b, c\}$

Notation. $E \subseteq F \Leftarrow \forall x \in E, x \in F$.

Remarque. $E \subseteq E$.

Notation. La cardinalité d'un ensemble, $|E|$, est le nombre d'éléments d'un ensemble.

Définition. Définition d'un ensemble par *compréhension*

Exemple. $E = \{n \in \mathbb{Z} | 1 \leqslant n \leqslant 20\}$.

Notation. $E = F \Leftrightarrow E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

Définition. Produit cartésien : $E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}$.

Définition. Fonction/Application
$f : A \to B$, A et B des ensembles, associe à *chaque* $x \in A$ un *unique* élément $f(x) \in B$.

Cours 2

Rappel.

•	Ensemble	collection d'objets
•	$\in$	"élément" d'un ensemble
•	*sous-ensemble* ($\subseteq$)	$E \subseteq F$ si $x \in E$ *implique* $x \in F$
•	$E = F$	si, et seulement si, $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$
•	$\cup$	union
	$\cap$	intersection
•	$E \times F$	produit cartésien (paires (x, y))
•	$f : E \to F$	*fonction* ou *application*, associe à $\underline{\text{chaque } x \in E}$ un unique $\underline{f(x) \in F}$, image de x par f
•	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}_E : E \to E$ est définie comme $\mathbb{1}_E(x) = x$

Manières de définir une fonction

- énumérer $f(x)$ pour chaque $x \in E$
- donner une formule
  une formule ne définit pas toujours une fonction, elle doit être valide pour chaque x de l'ensemble de départ.
- en mots (décrire la valeur pour chaque $x \in E$)

- mélange de formule et mots

Définition. Une fonction $f : E \to F$ est *inversible* s'il existe une fonction $\underbrace{g : F \to E}_{*}$ telle que $\underbrace{g(f(x)) = x}_{**}$ pour tout $x \in E$ et $\underbrace{f(g(y)) = y}_{***}$ pour tout $y \in F$.

Exemple. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$ est inversible d'inverse $g(y) = y - 1$

Démonstration.
On vérifie que

$$g(f(x)) = x \qquad \begin{aligned} g(f(x)) &= g(x+1) \\ &= (x+1) - 1 \\ &= x \end{aligned}$$

$$f(g(y)) = y \qquad \begin{aligned} f(g(y)) &= f(y-1) \\ &= (y-1) + 1 \\ &= y \end{aligned}$$

□

Proposition. *Si f admet un inverse, celui-ci est unique.*

Démonstration.
Supposons que g_1 et g_2 sont tous deux inverses de f et montrons qu'elles sont ǵales.
(Pour démontrer que deux fonctions sont égales, il suffit de montrer que $g_1(y) = g_2(y)$ pour tout $y \in F$)
Soit $y \in F$.
On a

$$\begin{aligned} g_1(y) &\overbrace{=}^{***} g_1(f(\underbrace{g_2(y)}_{*})) \\ &\overbrace{=}^{**} g_2(y) \end{aligned}$$

□

Définition. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors la *composée* de f et g est la fonction $g \circ f : E \to G$ définie par la formule $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Définition (Redéfinition de l'inverse)**.**
$g \circ f = \mathbb{1}_E$
$f \circ g = \mathbb{1}_F$

Exemple.
$A = \{a, b, c\}$
$B = \{d, e, f\}$
$f : A \to B$, $a \mapsto d, b \mapsto e, c \mapsto f$
$g : B \to A$, $d \mapsto a, e \mapsto b, f \mapsto c$
$g \circ f : A \to A$, $g \circ f(x) = x$, $g \circ f = \mathbb{1}_A$.
De la même manière, $f \circ g = \mathbb{1}_B$.

Ainsi, g est l'inverse de f.

Notation. On note $g = f^{-1}$ l'inverse de f.

Rappel. Pour trouver l'inverse d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par une formule $f(x) = y$, on isole x en fonction de y.

Exemple.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 8 \\ y &= 3x - 8 \\ y + 8 &= 3x \\ \frac{y+8}{3} &= x \\ g(y) &= \frac{y+8}{3} \end{aligned}$$

Dans un devoir, on commence par la formule de l'inverse et on vérifie $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *injective* si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *surjective* si pour tout $y \in F$, $\exists\, x \in E$ t.q. $f(x) = y$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *bijective* si elle est injective **et** surjective.

Exemple.

- $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, f(x) = |x|$$

  f n'est pas injective, car $f(1) = |1| = 1$ et $f(-1) = |-1| = 1$, mais $1 \neq -1$.
  f est surjective, car soit $y \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, alors pour $x = y$, on a $f(x) = f(y) = |y| = y$.

- $$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

  f est injective :
  Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$.
  On suppose $f(x_1) = f(x_2)$.

  $$\begin{aligned} x_1 + 1 &= x_2 + 1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

  f n'est pas surjective
  $y = 0 \in \mathbb{N}$ n'est pas égal à $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$. Si il existait x avec $f(x) = 0$, $x + 1 = 0$, $x = -1$, $x \notin \mathbb{N}$.

- $$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$$

  f est injective :
  Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
  supposons $f(x_1) = f(x_2)$, $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$, $2x_1 = 2x_2$, $x_1 = x_2$.
  f est surjective :
  Soit $y \in \mathbb{R}$.
  On cherche x t.q. $f(x) = y$.
  Posons $x = \dfrac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$.
  Alors, $f(x) = f\left(\dfrac{y-3}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{y-3}{2} + 3 = y - 3 + 3 = y$.
  Ainsi, f est bijective.

- $$f : A \to B; A = \{1, 48, 57\}, B = \{a, b, c\}$$

  $$1 \mapsto a, 48 \mapsto a, 57 \mapsto b$$

  f n'est pas injective, car $1 \mapsto a$ et $48 \mapsto a$ avec $1 \neq 48$.
  f n'est pas surjective, car aucun élément de $x \in A \mapsto c$.

Remarque. La fonction $f' : A \to B'$ avec $B' = \{a, b\}$ est surjective.

Cours 3

Rappel. A, B deux ensembles

- $f : A \to B$ une fonction, associe à chaque $x \in A$ un unique $f(x) \in B$. $x \mapsto f(x)$.
- f est *inversible* s'il existe $g : B \to A$ t.q. $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$ et $f(g(b)) = b$ pour tout $b \in B$.
- l'inverse est *unique.*
- La composition de $f : A \to B$ avec $g : B \to C$ est $g \circ f : A \to C$ avec $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- f est injective si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f est surjective si pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ t.q. $f(a) = b$.
- f est bijective si elle est injective et surjective.

Proposition. $f : A \to B$ *est bijective* si, et seulement si, *elle est inversible.*

Démonstration.

$\Leftarrow$:

Supposons que f est inversible.
Alors, il existe un inverse $g : B \to A$.

(inj) :

Soient $x_1, x_2 \in A$.
On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$.
Alors, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
Donc, $x_1 = x_2$.

(surj) :

Soit $y \in B$.
Posons $x = g(y) \in A$.
Alors, $f(x) = f(g(y)) = y$.

Ainsi, f est bijective.

$\Rightarrow$:

Supposons f est injective et surjective.

Lemme. *Pour* chaque $y \in B$, *il existe un* unique $x \in A$ *t.q.* $f(x) = y$.

Démonstration.
Existance : Comme f est surjective, x existe.
Unicité : Supposons $x_1, x_2 \in A$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$ puisque f est injective. ■

On définit $g : B \to A$ par $g(y) = x$ où x est l'unique élément du lemme.
On vérifie :
Soit $x \in A$, alors $g(\underbrace{f(x)}_{y}) = x$, par définition de g.

Soit $y \in B$, alors $f(\underbrace{g(y)}_{\text{l'unique } x \text{ t.q. } f(x) = y}) = y$.

□

Définition. Une *opération* (interne, binaire) sur un ensemble E est un fonction $m : E \times E \to E$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (n,m) & \longmapsto & n+m \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (n,m) & \longmapsto & n \cdot m \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

n'est pas une opération, car $(1,0) \mapsto \frac{1}{0}$ qui n'est pas défini. (d n'est pas une fonction.)
Cependant,

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{Q}_* \times \mathbb{Q}_* & \longrightarrow & \mathbb{Q}_* \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

est une opération.

A un ensemble
$E = \{f : A \to A\}$, où f est une fonction.

$$\begin{array}{rccc} c : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (f,g) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

La composition est une opération.

Notation. On note la plupart du temps une opération par un symbole entre les entrées.

Exemple. $m(x,y) \coloneqq x * y$, ou $x + y$, ou $x \circ y$, ou xy.

Définition.
Un *élément neutre* pour une opération $*$ est un élément $e \in E$ t.q. pour tout $x \in E$, $e * x = x$ et $x * e = x$.

Cours 4

Rappel.

- $f : E \to F$ est bijective $\Leftrightarrow$ f est inversible.
- L'inverse est unique ($g = f^{-1}$)
- Opération : $m : E \times E \to E$, ou $\begin{array}{rccc} * : & E \times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & z \end{array}$
- Élément neutre : $e \in E$ t.q. $e * x = x$ et $x * e = x$.
- f est injective si tout $y \in F$ a au plus un antécédent
- f est surjective si tout $y \in F$ a au moins un antécédent
- f est bijective si tout $y \in F$ a exactement un antécédent
- x est antécédent de y si $f(x) = y$

Exemple.
Sur $\mathbb{N}$,

- 0 est neutre pour $+$.

$$0 + n = n$$
$$n + 0 = n$$

- 1 est neutre pour $\times$.

$$1 \times n = n$$
$$n \times 1 = n$$

Sur $\mathbb{Z}$, $-$ est une opération mais elle n'a pas délément neutre.

En effet,
Supposons que $e \in \mathbb{Z}$ est neutre, alors $e - n = n$ pour tout n.
Pour $n = 0$, $e - 0 = 0$, donc $e = 0$.
Pour $n = 1$, $e - 1 = 1$, donc $-1 = 1$. ϟ

- Sur l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, la multiplication matricielle $\times$ est une opération.

  La matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est neutre pour $\times$.
- Sur $E = \{f : A \to A\}$, la fonction $\mathbb{1}_A$ est neutre pour la composition de fonctions.

  Démonstration.
  On doit montrer $\mathbb{1}_A \circ f = f$ et $f \circ \mathbb{1}_A = f$ pour tout $f \in E$.
  (1) Soit $x \in A$, alors

  $$\begin{aligned}(\mathbb{1}_A \circ f)(x) &= \mathbb{1}_A(f(x)) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

  Donc, $\mathbb{1}_A \circ f = f$.
  (2) Soit $x \in A$, alors

  $$\begin{aligned}(f \circ \mathbb{1}_A)(x) &= f(\mathbb{1}_A(x)) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

  Donc,$f \circ \mathbb{1}_A = f$.

  □

On peut décrire une opération sur un ensemble fini avec sa table "de multiplication".

Exemple. $A = \{0, 1\}$
$f_1 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}$, $f_2 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}$, $f_3 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}$, $f_4 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}$ On a $f_2 = \mathbb{1}_A$.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_4	f_3	f_2	f_1
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

Définition.
Une opération $*$ sur E est *associative* si pour tout $x, y, z \in E$, on a $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Proposition.
Si $*$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.

Démonstration.
Supposons que e et e' sont neutres pour $*$.
On a

$$\begin{aligned} e * e' &= e' && \text{car } e \text{ est neutre} \\ e * e' &= e && \text{car } e' \text{ est neutre} \end{aligned}$$

Donc, $e = e'$. □

Définition.
Soit E un ensemble, $*$ une opération sur E et $e \in E$ un neutre pour $*$. On dit que $a, b \in E$ sont *inverses* si $a * b = e$ et $b * a = e$.
Dans ce cas, on dit que a et b sont inversibles.

Exemple.
Dans $\mathbb{Z}$ avec $+$, 3 et -3 sont inverses. En effet, on a $3 + (-3) = 0$ et $(-3) + 3 = 0$ avec 0 l'élément neutre de $+$.

Exemple.
Dans $\mathbb{Z}$ avec $\times$, le neutre est 1, mais seuls 1 et -1 sont inversibles. En effet, on a $1 \times 1 = 1$ et $(-1) \times (-1) = 1$.

Remarque.
L'élément neutre est son propre inverse. En effet, $e * e = e$, pour tout $*$ qui admet e comme élément neutre.

Proposition.
Si $*$ est associative et admet un élément neutre e, alors les inverses sont uniques s'ils existent.

Démonstration.
Soit $a \in E$.
Supposons b, b' sont inverses de a.
Alors,

$$\begin{aligned}
b &= b * e \\
&= b * (a * b') && \text{car } b' \text{ est inverse de } a \\
&= (b * a) * b' && \text{associativité} \\
&= e * b' && \text{car } b \text{ est inverse de } a \\
&= b'
\end{aligned}$$

□

Notation.
Comme l'inverse de a est unique, on le note a^{-1}.

Exemple.
Dans $E = \{f : A \to A\}$, avec l'opération $\circ$, les fonctions bijectives sont exactement celles qui sont inversibles pour $\circ$.

Proposition.
La composition de fonctions est associative.

Démonstration.
Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$.
Soit $a \in A$.

$$\begin{aligned}
((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\
&= h(g(f(a))) \\
&= h((g \circ f)(a)) \\
&= (h \circ (g \circ f))(a) \\
\Rightarrow (h \circ g) \circ f &= h \circ (g \circ f)
\end{aligned}$$

□

Chapitre 6 Groupes

Définition.

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération $*$ t.q.

(A) $*$ est associative

(N) $*$ admet un neutre

(I) tout $g \in G$ admet un inverse

Exemple.

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
Neutre : 0
Inverse de n : $-n$

(2) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes.

(3) $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe, car, par exemple, 2 n'est pas inversible.

(4) $(\mathbb{Q}, \times)$ n'est pas un groupe, car 0 n'est pas inversible.

(5) $(\mathbb{Q}_*, \times)$ et $(\mathbb{R}_*, \times)$ sont des groupes.
Neutre : 1
Inverse de x : $\frac{1}{x}$

Remarque. (1), (2) et (5) sont *commutatifs.*

Remarque. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.

Définition. Si l'opération d'un groupe est commutative, on note le groupe comme *abélien* (ou commutatif).

(6) $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.
$GL(n, \mathbb{R}) = \{M | M$ est une matrice $n \times n$ réelle inversible$\}$.
GL : général linéaire
Neutre : $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
M^{-1} la matrice inverse est l'inverse.
Pour $n \geqslant 2$, $GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas abélien.

(7) A un ensemble quelconque
$S(A) = \{f : A \to A | f$ est bijective$\}$ est un groupe pour $\circ$.
Neutre : $\mathbb{1}_A$
Inverse de f : f^{-1}

Remarque.

Pour $A = \{0, 1\}$

$f_1 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}$, $f_2 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$, $f_3 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}$, $f_4 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$, $S(A) = \{f_2, f_3\}$.

Cours 5

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$
  - G ensemble
  - $*$ opération sur G
  - (A) $*$ est associative
    $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$
  - (N) $*$ admet un élément neutre dans G
    $\exists e \in G$ t.q. $\forall a \in G, e * a = a = a * e$
  - (I) tout élément de G est inversible
    $\forall a \in G, \exists b \in G$ t.q. $a * b = e = b * a$
- Le neutre et l'inverse sont uniques

Remarque.
"Le groupe $\mathbb{R}$" implique l'opération $+$ et "le groupe $\mathbb{R}_*$" implique l'opération $\times$.

Propriétés élémentaires des groupes

(1) $\forall a, b \in G$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.
(2) $\forall a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$
(3) Si $a * b = a * c$, alors $b = c$
(4) Si $b * a = c * a$, alors $b = c$

Démonstration.

(1) On calcule

$$\begin{aligned}(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * (b^{-1} * a^{-1})) \\ &= a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) \\ &= a * (e * a^{-1}) \\ &= a * a^{-1} \\ &= e\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * (a^{-1} * (a * b)) \\ &= b^{-1} * ((a^{-1} * a) * b) \\ &= b^{-1} * (e * b) \\ &= b^{-1} * b \\ &= e\end{aligned}$$

Donc, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(2) Comme $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$, a est l'inverse de a^{-1}, donc $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

(3) Supposons $a * b = a * c$. Alors

$$\begin{aligned}a^{-1} * (a * b) &= a^{-1} * (a * c) \\ (a^{-1} * a) * b &= (a^{-1} * a) * c \\ e * b &= e * c \\ b &= c\end{aligned}$$

(4) Supposons $b * a = c * a$. Alors

$$\begin{aligned}(b * a) * a^{-1} &= (c * a) * a^{-1} \\ b * (a * a^{-1}) &= c * (a * a^{-1}) \\ b * e &= c * e \\ b &= c\end{aligned}$$

$\square$

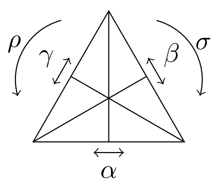
Exemple.
$(\mathbb{Z}_3, +)$.
$\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$+$ est associative.
$\overline{0}$ est l'élément neutre.
$(\overline{1})^{-1} = \overline{2}$.
$(\overline{2})^{-1} = \overline{1}$.
$(\mathbb{Z}_3, +)$ est un groupe abélien.

Remarque. La symétrie de la table par rapport à la diagonale implique la commutativité.

Exemple.
$(\mathbb{D}_3, \circ)$ - groupe dihédral d'ordre 3.
Groupe des symétries d'un triangle équilatéral.
$\mathbb{D}_3 = \left\{ \underset{\text{identité}}{\varepsilon}, \underset{\text{réflexion}}{\alpha, \beta, \gamma}, \underset{\text{rotation}}{\rho, \sigma} \right\}$.



$\circ$	ε	α	β	γ	ρ	σ
ε	ε	α	β	γ	ρ	σ
α	α	ε	ρ	σ	β	γ
β	β	σ	ε	ρ	γ	α
γ	γ	ρ	σ	ε	α	β
ρ	ρ	γ	α	β	σ	ε
σ	σ	β	γ	α	ε	ρ

$(\mathbb{D}_3, \circ)$ n'est pas un groupe abélien.

Cours 6

Rappel.

- Groupe : $(G, *)$ avec A, N, I.
  Abélien : C.
- $$\begin{aligned} a * b &= a * c & \Rightarrow\ b &= c \\ b * a &= c * a & \Rightarrow\ b &= c \\ (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$
- *Exemple.*
  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}_*, \times), (\mathbb{R}_*, \times)$ sont des groupes abéliens ; $\mathbb{Z}_3, \mathbb{D}_3, GL(n, \mathbb{R})$ sont des groupes non abéliens.
  $S(E) = \{f : E \to E \mid f \text{ est bijective}\}$.

  Remarque. E n'est pas l'ensemble utilisé dans la définition du groupe.

Produit cartésien de groupes

$(G, *)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes.

Proposition.
$G \times H$ est un groupe lorsque muni de l'opération $(a, b) \bullet (a', b') = (a * a', b \diamond b')$, avec $a, a' \in G$ et $b, b' \in H$.

Démonstration.

(N) $e \in G$ le neutre et $e' \in H$ le neutre, alors $(e, e') \in G \times H$

$$\begin{aligned}(a,b) \bullet (e,e') &= (a * e, b \diamond e') \\ &= (a,b) \\ (e,e') \bullet (a,b) &= (e * a, e' \diamond b) \\ &= (a,b)\end{aligned}$$

(e, e') est bien neutre.

(I) $(a, b) \in G \times H$, alors (a^{-1}, b^{-1}) est inverse de (a, b).
En effet,

$$\begin{aligned}(a,b) \bullet (a^{-1},b^{-1}) &= (a * a^{-1}, b \diamond b^{-1}) \\ &= (e,e') \\ (a^{-1},b^{-1}) \bullet (a,b) &= (a^{-1} * a, b^{-1} \diamond b) \\ &= (e,e')\end{aligned}$$

(A) Soient $(a, b), (c, d), (e, f) \in G \times H$. On a

$$\begin{aligned}((a,b) \bullet (c,d)) \bullet (e,f) &= (a * c, b \diamond d) \bullet (e,f) \\ &= ((a * c) * e, (b \diamond d) \diamond f) \\ &= (a * (c * e), b \diamond (d \diamond f)) \\ &= (a,b) \bullet (c * e, d \diamond f) \\ &= (a,b) \bullet ((c,d) \bullet (e,f))\end{aligned}$$

□

Exemple.

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- $(\mathbb{Z}_2, +)$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$+$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$
$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$
$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$

Isomorphismes de groupes

Définition. $(G, *)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes.
Un *isomorphisme* de G vers H est une application $f : G \to H$ t.q.

(1) $\forall a, b \in G,\ f(a * b) = f(a) \diamond f(b)$.
Préservation des opérations

(2) f est bijective.

Exemple.

- $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_*^+, \times)$

  $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$ est un isomorphisme de groupes.

  (1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

  $$\begin{aligned} f(x+y) &= e^{x+y} \\ &= e^x \times e^y \\ &= f(x) \times f(y) \end{aligned}$$

  (2) $\ln : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ est inverse de f : $\ln e^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln x} = x, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(e_G) = e_H$, où e_G est l'élément neutre de G et e_H est l'élément neutre de H.*

Démonstration. Stratégie : montrer que $f(e_G)$ est neutre pour H et utiliser l'unicité.

Soit $b \in H$.

Comme f est bijective, $\exists a \in G$ t.q. $f(a) = b$

$$\begin{aligned} f(e_G) \diamond b &= f(e_G) \diamond f(a) \\ &= f(e_G * a) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} b \diamond f(e_G) &= f(a) \diamond f(e_G) \\ &= f(a * e_G) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned}$$

On a donc que $f(e_G) \in H$ est neutre pour $\diamond$, mais comme l'élément neutre est unique, $f(e_G) = e_H$. □

Exemple. Pour $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$, $f(0) = e^0 = 1$.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, pour tout $a \in G$.*

Démonstration. Stratégie : montrer que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$ et utiliser l'unicité.

$$\begin{aligned} f(a^{-1}) \diamond f(a) &= f(a^{-1} * a) \\ &= f(e_G) \\ &= e_H \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f(a) \diamond f(a^{-1}) &= f(a * a^{-1}) \\ &= f(e_G) \\ &= e_H \end{aligned}$$

On a donc que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$, mais comme l'inverse est unique, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. □

Exemple. Pour $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$, $f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} = f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$, où $-x$ est l'inverse de x pour $+$ et $\frac{1}{f(x)}$ est l'inverse de $f(x)$ pour $\times$.

Remarque. Si G, H sont des groupes finis et f est un isomorphisme, alors f "envoie la table de G à celle de H".

$$G : \begin{array}{c||c|c|c|c} * & e_G & a_1 & a_2 & \cdots \\ \hline\hline e_G & & & & \\ \hline a_1 & & & a_1 * a_2 & \\ \hline a_2 & & & & \\ \hline \vdots & & & & \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c||c|c|c|c} \diamond & e_H & f(a_1) & f(a_2) & \cdots \\ \hline\hline f(e_G) & & & & \\ \hline f(a_1) & & & f(a_1) \diamond f(a_2) & \\ \hline f(a_2) & & & & \\ \hline \vdots & & & & \end{array} : H$$

Avec $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \diamond f(a_2)$.

Exemple.

$$\mathbb{Z}_2 : \begin{array}{c||c|c} + & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline\hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array} \qquad H : \begin{array}{c||c|c} \circ & \varepsilon & \alpha \\ \hline\hline \varepsilon & \varepsilon & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \varepsilon \end{array} \qquad C_2 : \begin{array}{c||c|c} \times & 1 & -1 \\ \hline\hline 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$\mathbb{Z}_2$, H et C_2 sont isomorphes.
Il existe un isomorphisme entre chaque paire.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : H \to G$ est un isomorphisme.*

Démonstration.

(1) Soient $b_1, b_2 \in H$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1 \diamond b_2) &= f^{-1}\left(f\left[f^{-1}(b_1)\right] \diamond f\left[f^{-1}(b_2)\right]\right) \\ &= f^{-1}\left(f\left[f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2)\right]\right) \\ &= f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2) \end{aligned}$$

(2) f^{-1} est bijective, car elle est inversible d'inverse f.

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \mathbb{1}_H \\ f^{-1} \circ f &= \mathbb{1}_G \end{aligned}$$

□

Proposition (Transitivité)**.**
Si $f : G \to H$ et $g : H \to K$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : G \to K$ est un isomorphisme.

Démonstration.

(1) Soient $a, b \in G$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a * b) &= g(f(a * b)) \\ &= g(f(a) \diamond f(b)) \\ &= g(f(a)) \oplus g(f(b)) \\ &= (g \circ f)(a) \oplus (g \circ f)(b) \end{aligned}$$

(2) $g \circ f$ est inversible d'inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Puissances d'éléments de groupes

Définition (par récurrence)**.**
$a \in G$, $n \in \mathbb{N}$

(1) $a^0 := e_G$

(2) $a^n = a * a^{n-1}$, $\forall n \geqslant 1$

Exemple.

- $$\begin{aligned} a^4 &= a * a^3 \\ &= a * a * a^2 \\ &= a * a * a * a^1 \\ &= a * a * a * a * a^0 \\ &= a * a * a * a * e \\ &= a * a * a * a \end{aligned}$$

- Dans $(\mathbb{Z},+)$, $2^3 = 3 \cdot 2 = 2+2+2$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. par récurrence sur n.

(1) $n = 0$:

$$\begin{aligned} a^{0+m} &= a^m \\ &= e * a^m \\ &= a^0 * a^m \end{aligned}$$

(2) supposons que $a^{n+m} = a^n * a^m$ pour un $n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} a^{(n+1)+m} &= a^{n+m+1} \\ &= a * a^{n+m} \\ \text{hyp rec} &= a * (a^n * a^m) \\ &= (a * a^n) * a^m \\ &= a^{n+1} * a^m \end{aligned}$$

□

Définition. Pour $n \in \mathbb{Z}$.
Si $n \geqslant 0$, on a déjà défini a^n.
Si $n < 0$, on définit $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

Exemple. $a^{-3} = (a^{-1})^3 = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1}$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Proposition. $(a^n)^m = a^{nm}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. *Vraie aussi pour $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. par récurrence sur m.

(1) $m = 0$:

$$\begin{aligned} (a^n)^0 &= e \\ a^{n \cdot 0} &= a^0 = e \end{aligned}$$

(2) supposons que $(a^n)^m = a^{nm}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (a^n)^{m+1} &= (a^n)(a^n)^m \\ \text{hyp rec} &= (a^n)a^{nm} \\ &= a^{n+nm} \\ &= a^{n(m+1)} \end{aligned}$$

□

Cours 7

Rappel.

- Isomorphisme : $f : G \to H$ t.q.
  (1) $f(ab) = f(a)f(b)$
  avec $a * b$ et $f(a) \diamond f(b)$ implicitement.
  (2) f est bijective
  "même table"

- f, g isomorphismes $\Rightarrow f^{-1}, g \circ f$ isomorphismes.
  $\mathbb{1}_G : G \to G$ est trivialement un isomorphisme.
- G est isomorphe à H s'il existe un isomorphisme $f : G \to H$.
- Puissances :
  Soit $a \in G$ avec G un groupe.
  - $a^0 = e$
  - $a^{n+1} = aa^n$
  - $a^{-n} = (a^{-1})^n$
  - $a^{n+m} = a^n a^m$
  - $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- f isomorphisme
  - $f(e_G) = e_H$
  - $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Proposition. *f isomorphisme $f : G \to H$.*
$a \in G$. Alors, $f(a^n) = f(a)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. par récurrence sur n.

$n \geqslant 0$ (1) $n = 0$

$$\begin{aligned} f(a^0) &= f(e_G) \\ &= e_H \\ &= f(a)^0 \end{aligned}$$

(2) supposons que $f(a^n) = f(a)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(a^{n+1}) &= f(a \cdot a^n) \\ &= f(a)f(a^n) \\ \text{hyp rec} &= f(a)f(a)^n \\ &= f(a)^{n+1} \end{aligned}$$

$n < 0$ alors, $-n > 0$ et

$$\begin{aligned} f(a^n) &= f((a^{-1})^{-n}) \\ &= f(a^{-1})^{-n} \\ &= (f(a)^{-1})^{-n} \\ &= f(a)^n \end{aligned}$$

□

Exemple. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, avec la multiplication de matrices.

Soient $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

(A) : associatif, car la multiplication de matrices est associative.

(N) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ est neutre

(I) : l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, H est un groupe pour la multiplication matricielle.

On définit $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to H \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $f(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y)$

(2) *montrons que.* f est bijective.

- f est injective
  Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
  Supposons $f(x) = f(y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$x = y$$

- f est surjective
  Soit $Y = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, avec $y \in \mathbb{R}$.
  $Y = f(y)$.

□

Sous-groupes

Définition. $H \subseteq G$ est un *sous-groupe* de G si H est un groupe pour la même opération que G.

Exemple.

- $\{e\} \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $G \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = 2\mathbb{Z} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$
- Dans $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, $\{\overline{0}, \overline{2}\}$ est un sous-groupe.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$

  Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$ et à $C_2 = (\{-1, 1\}, \times)$.
- $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +) \subseteq (\mathbb{R}, +)$.
- $C_2 \subseteq \mathbb{Q}_* \subseteq \mathbb{R}_*$.
- $\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$.
  $\{\varepsilon, \alpha\}$ et $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{D}_3$.

Notation. On note l'ensemble $m\mathbb{Z} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Cours 8

Rappel.

- $a \in G$.
  — $a^n = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n \text{ fois}}$
  — $a^n = a * a^{n-1}$
  — $a^0 = e$
  — $a^{-n} = (a^{-1})^n$
- Sous-groupe de $(G, *)$: $H \subseteq G$ qui est un groupe pour $*$.
  Exemple. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ pour $+$.

Exemple.

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

est un sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$.

Proposition. *$H \subseteq G$ un sous-groupe.*

(1) Si G est abélien, alors H est abélien ;

(2) Le neutre de H est le neutre de G ;

(3) Si $a \in H$, son inverse $a^{-1} \in H$ est l'inverse de a dans G.

Démonstration.

(1) G est abélien, alors $\forall a, b \in G$, $ab = ba$.
En particulier, $\forall a, b \in H$, $ab = ba$.

(2) Le neutre de G e_G a la propriété que $\forall a \in G$, $e_G a = a = a e_G$.
Comme $H \subseteq G$, cette propriété est vraie pour H aussi.
Donc, $a e_G = a = e_G a$.
Ainsi, e_G est le neutre de H, par l'unicité de l'élément neutre.

(3) $a \in H$, il existe un inverse $b \in G$ pour a t.q. $ab = ba = e$.
Comme H est un groupe, $\exists! a^{-1} \in H$.
De $ab = e$, on a $a^{-1}ab = a^{-1}e$, donc $b = a^{-1}$.

□

Théorème.
Un sous-ensemble non-vide $H \subseteq G$ est un sous-groupe si, et seulement si, pour tous $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que H est un sous-groupe, donc $a, b \in H$, alors $b^{-1} \in H$.
De plus, H est fermé pour la multiplication, donc $ab^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) (N) H est non-vide, donc $\exists a \in H$.
Par hypothèse, $aa^{-1} = e \in H$.
(I) On vient de montrer que $e \in H$.
Soit $b \in H$ quelconque. Par hypothèse, $eb^{-1} = b^{-1} \in H$.
(A) On sait que $\forall a, b, c \in G$, $(ab)c = a(bc)$.
En particulier, $\forall a, b, c \in H$, $(ab)c = a(bc)$.
Finalement, H est fermé pour l'opération de G, car $\forall a, b \in H$, $b^{-1} \in H$.
Donc, par hypothèse, $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$.

□

Exemple.
Soit $m \in \mathbb{Z}$.
Posons $H = m\mathbb{Z} = \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -2m, -m, 0, m, 2m, \cdots\}$, muni de l'addition.

montrons que. H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
H est non-vide, car $m0 = 0 \in H$.
Soient $a, b \in H$.
Par définition de H, $\exists a', b' \in \mathbb{Z}$ t.q. $a = ma'$ et $b = mb'$.
Dans $\mathbb{Z}$, $b^{-1} = -mb'$.
On a $a + (-b) = ma' + (-mb') = m(a' - b') \in H$.
Donc, H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. □

Réciproquement, soit $H \subseteq \mathbb{Z}$ un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ quelconque. Alors $\exists m \in \mathbb{Z}$ t.q. $H = m\mathbb{Z}$.

Démonstration.
On sait que $0 \in H$.
Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$ et l'énoncé est vrai.
Sinon, H contient un autre élément $a \in H$, donc $-a \in H$.
En particulier, H contient au moins un entier positif.
Soit m le *plus petit* élément positif de H.
Soit $h \in H$ quelconque. On divise h par m, donc $h = qm + r$, où $q, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant r < m$.
Si $r = 0$, $h = qm \in m\mathbb{Z}$.
Sinon, comme $h \in H$ et $m \in H$, $h - qm \in H$, mais $h - qm = r$, donc $r \in H$.
Comme $0 < r < m$, il y a une contradiction à la définition de m.

$\lightning$

Ainsi, $H \subseteq m\mathbb{Z}$. Mais clairement, $m\mathbb{Z} \subseteq H$, car $m \in H$ et $mn \in H$, donc $H = m\mathbb{Z}$. $\square$

Proposition.
Soit $f : G \to H$ un isomorphisme. Alors, $K \subseteq G$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $f(K)$ est un sous-groupe de H.

Notation. $f(K) = \{f(k) \mid k \in K\}$.

($\Rightarrow$) *Supposons que K est un sous-groupe de G.*
On sait que $e \in K$, alors $f(e) = e \in f(K)$, donc $f(K)$ est non-vide.
Soient $a, b \in f(K)$. On veut montrer que $ab^{-1} \in f(K)$.
Alors, $a = f(k)$ et $b = f(k')$, avec $k, k' \in K$.
Donc, $ab^{-1} = f(k)f(k')^{-1} = f(k)f(k'^{-1}) = f(kk'^{-1})$.
Comme $kk'^{-1} \in K$, $ab^{-1} \in f(K)$.

($\Leftarrow$) *On effectue la même preuve avec f^{-1} qui est un isomorphisme en remarquant que $f^{-1}(f(k)) = k$.*

Notation.
$G \xrightarrow{f} H$ avec f un isomorphisme est équivalent à $G \xrightarrow{\sim} H$.

Notation.
$H \subseteq G$ un sous-groupe est équivalent à $H \leqslant G$.

Proposition.
Soit $\{H_i\}_{i \in I}$ une collection de sous-groupes de G. Alors $\bigcap\limits_{i \in I} H_i \leqslant G$.

Démonstration.
$H_i \leqslant G, \forall i \in I$.
Alors, $e \in H_i, \forall i$. Donc, $e \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$. En particulier, $\bigcap\limits_{i \in I} H_i \neq \emptyset$.
Soient $a, b \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$. Alors, $a, b \in H_i, \forall i$.
Comme $H_i \leqslant G$, $ab^{-1} \in H_i, \forall i$, donc $ab^{-1} \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$. $\square$

Remarque. Si $H_1, H_2 \leqslant G$, $H_1 \cup H_2$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de G.

Exemple. $2\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
Plus précisément, $2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, mais $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

Exemple. $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$.

Chapitre 2 Applications et équivalences

Section 2.4 Relations d'équivalence

Définition. Une *relation déquivalence* sur un ensemble E est un sous-ensemble $R \subseteq E \times E$ satisfaisant

(1) réflexivité
$x \sim x, \forall x \in E$.

(2) symétrie
$x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

(3) transitivité
$x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$.

Notation. On note $x \sim y$ si, et seulement si, $(x, y) \in R$.

Exemple.

(1) $E = \mathbb{R}$
$x \sim y$ si, et seulement si, $|x| = |y|$
(refl) $|x| = |x|$, donc $x \sim x$.
(sym) Supposons $x \sim y$. Alors, $|x| = |y|$. Donc, $y \sim x$.
(trans) Supposons $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors, $|x| = |y|$ et $|y| = |z|$. Donc $|x| = |z|$. Ainsi, $x \sim z$.

(2) C est l'ensemble des élèves dans la classe.
$x \sim y$ si, et seulement si, x et y ont le même âge est une relation d'équivalence.

Définition. Si E est un ensemble et $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, la *classe d'éuivalence* de $x \in E$ est $\overline{x} = \{y \in E \mid y \sim x\} \subseteq E$.

Lemme. *$\overline{x} = \overline{y}$ si, et seulement si, $x \sim y$.*

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $\overline{x} = \overline{y}$.
Par (refl), $x \sim x$, donc $x \in \overline{x}$. Alors, $x \in \overline{y}$. Ainsi, $x \sim y$.

($\Leftarrow$) Supposons $x \sim y$.
($\subseteq$) Soit $z \in \overline{x}$. Alors $z \sim x$. Comme $x \sim y$, par (trans), $z \sim y$. Donc, $z \in \overline{y}$.
($\supseteq$) Soit $z \in \overline{y}$. Alors, $z \sim y$ et, par (sym), $y \sim z$. Comme $x \sim y$, par (trans), $x \sim z$ et, par (sym), $z \sim x$. Donc, $z \in \overline{x}$.
Ainsi, $\overline{x} = \overline{y}$.

□

Cours 9

Rappel.

- $H \leqslant G$, H un sous-groupe de G, si, et seulement si,
  — $H \neq \emptyset$;
  — $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$.

- Si $H \leqslant G$, H a le même neutre que G, mêmes inverses.
- G abélien $\Rightarrow H \leqslant G$ abélien.
- Si $f : G \to H$ isomorphisme, alors $K \leqslant G \Leftrightarrow f(K) \leqslant H$.
- Relations d'équivalence $\sim$ sur E :

(Refl) $a \sim a, \forall a \in E$;

(Sym) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$;

(Trans) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

- Classe d'équivalence : $\overline{a} = \{b \in E \mid b \sim a\}$.
- $a \sim b \iff \overline{a} = \overline{b}$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$.
Équivalence modulo m :
$a \sim b$ si, et seulement si, $a - b = km$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Notation. $m \mid a - b$, m divise $a - b$: $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = km$.

$a \sim b \iff m \mid a - b$.

Démonstration. que c'est bel et bien une équivalence

(Refl) Soit $a \in \mathbb{Z}$.
$a - a = 0m \Rightarrow a \sim a$.

(Sym) Supposons que $a \sim b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
Alors, $a - b = km$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Or, $-(a - b) = -km \Rightarrow b - a = (-k)m$, donc $b \sim a$.

(Trans) Supposons que $a \sim b$ et $b \sim c$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Alors, $a - b = k_1 m$ et $b - c = k_2 m$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
En additionant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} a - c &= k_1 m + k_2 m \\ &= (k_1 + k_2)m \end{aligned}$$

Donc, $a \sim c$.

□

Si $m = 2$, les classes d'équivalence sont

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 0\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 0 = 2k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k\} \\ &= 2\mathbb{Z} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{1} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 1\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 1 = 2k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k + 1\} \\ &= \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Remarque.

$$\overline{0} = \overline{2} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots \qquad \overline{1} = \overline{3} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots$$

Plus généralement, pour $m\mathbb{Z}$, on a m classes d'équivalence.

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}$$

Notation. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}\}$ pour la relation de congruence modulo m.

Définition. Une *partition* d'un ensemble E est une collection $\mathcal{P} = \{E_i\}$, avec $i \in I$ de sous-ensembles de E t.q.

(1) $\bigcup\limits_{i \in I} E_i = E$;

(2) $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

Remarque. Chaque $x \in E$ est élément d'exactement un E_i.

Proposition. *Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, alors $\mathcal{P} = \{\overline{a} \mid a \in E\}$ est une partition de E.*

Exemple. $E = \mathbb{Z}$, $\sim$ équivalence modulo 3.
$\mathcal{P} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ est une partition de $\mathbb{Z}$.

Démonstration.

(1) Clairement, $\bigcup\limits_{a \in E} \overline{a} \subseteq E$.
On veut montrer que $E \subseteq \bigcup\limits_{a \in E} \overline{a}$.
Soit $x \in E$, alors $x \sim x$ par réflexivité, donc $x \in \overline{x}$ et $x \in \bigcup\limits_{a \in E} \overline{a}$.

(2) Supposons que $x \in \overline{a}$ et $x \in \overline{b}$, avec $\overline{a} \neq \overline{b}$.
Alors, $x \sim a$ et $x \sim b$. Donc, par symétrie, $a \sim x$ et $x \sim b$. Donc, par transitivité, $a \sim b$. Donc $\overline{a} = \overline{b}$. Ceci est une contradiction, donc $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset, \forall \overline{a} \neq \overline{b} \in \mathcal{P}$.

$\square$

On définit une opération sur $\mathbb{Z}_m$ pour la congruence modulo m.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m &\to \mathbb{Z}_m \\ (\overline{a}, \overline{b}) &\mapsto \overline{a+b} \end{aligned}$$

Autrement dit, $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.

Remarque. L'écriture d'un élément $\overline{a}$ n'est pas unique ($\overline{a} = \overline{a'}$ si $a \sim a'$).

Il faut vérifier que l'opération $+$ est correctement définie (définie sans abiguïté).
Autrement dit, si $\overline{a} = \overline{a'}$ et $\overline{b} = \overline{b'}$, on veut montrer que $\overline{a+b} = \overline{a'+b'}$.

Cours 10

Rappel.

- Relation d'équivalence ($\sim$) $\to$ partition en classes d'équivalence ($\overline{a} = \{b \mid b \sim a\}$).
- Équivalence (congruence) $\bmod m$ (sur $\mathbb{Z}$) :

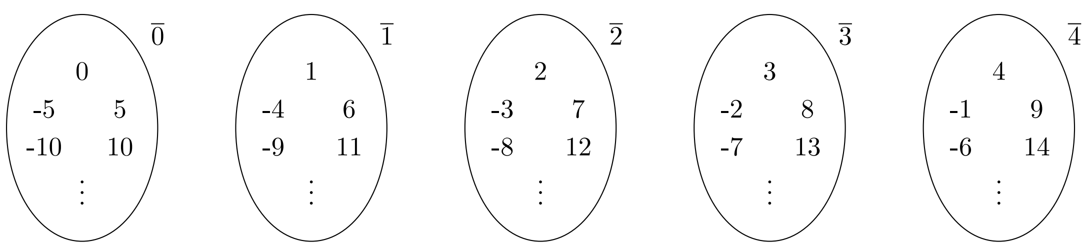
$$\begin{aligned} a \sim b &\Leftrightarrow m \mid a - b \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } a - b = km \end{aligned}$$

On note l'ensemble des classes d'équivalence $\bmod m$ par $\mathbb{Z}_m = \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$.
On veut définir une opération $+$ sur $\mathbb{Z}_m$ par $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.
On doit vérifier que cette définition n'est pas ambiguë (ne dépend pas des représentants).
Supposons $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ et $\overline{b_1} = \overline{b_2}$. On doit vérifier que $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$, c'est-à-dire que $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.
Les hypothèses donnent : $a_1 - a_2 = k_a m$ et $b_1 - b_2 = k_b m$. En additionnant ces deux équations, on obtient $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = k_a m + k_b m$. Alors, $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (k_a + k_b)m$. Donc, $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$.

$\square$

Remarque. On doit faire ce genre de preuve pour chaque définition de fonction/opération qui ont comme domaine des classes d'équivalence.

Exemple. $m = 5$.



Pour faire $\overline{2} + \overline{1}$, on peut prendre $\overline{2+1} = \overline{2}$, ou bien $\overline{17+(-4)} = \overline{13}$.

Proposition. $(\mathbb{Z}_m, +)$ *est un groupe abélien.*

Démonstration.

(A) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$.

$$\begin{aligned}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c} &= \overline{a+b}+\overline{c}\\ &= \overline{(a+b)+c}\\ &= \overline{a+(b+c)}\\ &= \overline{a}+\overline{b+c}\\ &= \overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)\end{aligned}$$

(C) $\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b}+\overline{a}$.

(N) $\overline{0}+\overline{a} = \overline{0+a} = \overline{a}$, donc $\overline{0}$ est neutre. Par commutativité, la propriété est satisfaite.

(I) $\overline{a}+\overline{-a} = \overline{a-a} = \overline{0}$, donc $\overline{-a}$ est l'inverse de $\overline{a}$. Par commutativité, la propriété est satisfaite.
On peut donc écrire $-\overline{a} = \overline{-a}$.

□

Ordre et groupes cycliques

Définition. Soient G un groupe et $a \in G$.
L'*ordre* de a, noté $o(a)$ est la plus petite quantité positive $k \in \mathbb{N}_*$ t.q. $a^k = e$, si elle existe. Sinon, on note $o(a) = \infty$.

Exemple.

- $o(e) = 1$
- Dans $\mathbb{D}_3$
  - $o(\alpha) = 2$
  - $o(\rho) = 3$
- Dans $\mathbb{Z}$
  - $o(0) = 1$
  - $o(n) = \infty$, $\forall n \neq 0$
- Dans $\mathbb{Z}_6$
  - $o(\overline{2}) = 3$

Proposition. *Soit* $m \in \mathbb{Z}$. $a^m = e$*, si, et seulement si,* $o(a) \mid m$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $a^m = e$.
On divise m par $o(a)$: $m = q \cdot o(a) + r$, avec $0 \leqslant r < o(a)$.
Si $r = 0$, $o(a) \mid m$ et on a terminé.
Supposons que $0 < r < o(a)$, alors

$$\begin{aligned} r &= m - q\cdot o(a)\\ a^r &= a^{m-q\cdot o(a)}\\ &= a^m \cdot a^{-q\cdot o(a)}\\ &= e\cdot (a^{o(a)})^{-q}\\ &= e\cdot e^{-q}\\ &= e\end{aligned}$$

mais $0 < r < o(a)$ contredit la minimalité de $o(a)$.

□

Cours 11

Rappel.

- $a \sim b \Leftrightarrow m \mid a - b$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$ sont les classes d'équivalence.
- $(\mathbb{Z}_m, +)$ est un groupe, où $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.
- $o(a) = \min\{k \in \mathbb{N}_* \mid a^k = e\}$ ordre de a. Si $a^k \neq e$, $\forall k > 0$, $o(a) = \infty$.
- Si $a^k = e$, $o(a) \mid k$.

Exemple.

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ M^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^4 &= -M \\ M^5 &= -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ M^6 &= \left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $o(M) = 6$, puisque $M^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Chapitre 6 Groupes (suite)

Section 6.13 Groupes symétriques S_n

Rappel. $S(E) = \{f : E \to E \mid f \text{ est bijective}\}$.
$S(E)$ est un groupe lorsque muni de l'opération $\circ$.
$\mathbb{1}_E$ est l'élément neutre.
f^{-1} est l'élément inverse de f.
$S(E)$ s'appelle le *groupe symétrique* de l'ensemble E.

Remarque.
$E = \{\text{rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo, violet}\}$.

$$S(E) \ni f : \begin{cases} \text{rouge} & \mapsto & \text{jaune} \\ \text{jaune} & \mapsto & \text{rouge} \\ \text{autres} & \mapsto & \text{elles-mêmes} \end{cases}.$$

Le groupe $S(E)$ est isomorphe au groupe $S(\{1,2,3,4,5,6,7\})$, en numérotant les éléments.

Définition. $S_n = S(\{1,2,\cdots,n\})$ le groupe symétrique de n éléments.
Les éléments de S_n sont des bijections, aussi appelées permutations.

Notation. On note une permutation σ de la manière suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 4 \\ 4 & \mapsto & 3 \end{matrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

L'élément neutre est $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_2$.

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{D}_3$.

Remarque. Tous les élément de S_3 donnent des isométries du triangle, mais pas tous les éléments de S_4 donnent des isométries du carré.

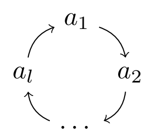
Proposition. *S_n contient $n!$ éléments.*

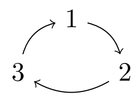
idée.

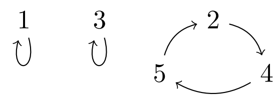
$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ n \text{ choix} & n-1 \text{ choix} & n-2 \text{ choix} & & 1 \text{ choix} \end{array}$$

Ainsi, $n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$. #

Définition. Un *cycle* est une permutation de la forme $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_l \to a_1$, où $a_i \neq a_j$ quand $i \neq j$.



Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur $l = 3$. 

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur $l = 3$. 

Notation. Écriture raccourcie pour un cycle : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$.

Proposition. *L'ordre d'un cycle est égal à sa longueur.*

Démonstration.
Si le cycle σ permute les éléments a_i comme $\sigma = a_1 \xrightarrow{\sigma} a_2 \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} a_l \xrightarrow{\sigma} a_1$.
Alors, calculons σ^l

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_l \\ \cancel{a_2} & \cancel{a_3} & \cancel{a_4} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_1} \\ \cancel{a_3} & \cancel{a_4} & \cancel{a_5} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cancel{a_l} & \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{l-1}} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\sigma^l = e$. □

Exemple. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas un cycle.
Cependant, σ se décompose en cycles $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$, où $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition. *Toute permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit de manière unique comme une composition de* cycles disjoints. *(les cycles sont uniques, mais pas l'ordre de l'écriture).*

Notation. Des cycles disjoints sont des cycles de *supports* disjoints, où le support d'un cycle est $\operatorname{supp}(\sigma)\{i \mid \sigma(i) \neq i\}$.

Lemme. *Les cycles disjoints commutent entre eux.*

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad = \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{1} \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Soient $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$ et $\eta = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$ deux cycles disjoints.
Soit $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
Il y a trois cas :

(1) $i \in \text{supp}(\sigma)$, $i \notin \text{supp}(\eta)$.

$$\sigma \circ \eta(i) = \sigma(i)$$
$$\eta \circ \sigma(i) = \sigma(i)$$

(2) $i \notin \text{supp}(\sigma)$, $i \in \text{supp}(\eta)$.

$$\sigma \circ \eta(i) = \eta(i)$$
$$\eta \circ \sigma(i) = \eta(i)$$

(3) $i \notin \text{supp}(\sigma)$, $i \notin \text{supp}(\eta)$.

$$\sigma \circ \eta(i) = i$$
$$\eta \circ \sigma(i) = i$$

□

idée de la démonstration. Par récurrence.
$n = 2$, $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$.
Si vrai pour toutes les permutations de longueur $\leqslant n$.
σ permutation de $n+1$ éléments.
On prend $i \in \text{supp}(\sigma)$.

$$\underbrace{i \to \sigma(i) \to \sigma^2(i) \to \sigma^3(i) \to \cdots \to \sigma^n(i)}_{n+1 \text{ éléments de } \{1,2,\cdots,n\}}$$

ces éléments ne peuvent pas tous être distincts.
$\exists m_1 > m_2$ t.q. $\sigma^{m_1}(i) = \sigma^{m_2}(i)$, donc $\sigma^{m_1 - m_2}(i) = i$.
Alors, $i \to \sigma(i) \to \sigma^2(i) \to \cdots \to \sigma^{m_1-m_2-1}(i) \to i$ est un cycle.
Les éléments restants $\{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \cdots, \sigma^{m_1-m_2-1}(i)\}$ sont permutés entre eux par σ.
Utiliser l'hypothèse de récurrence. #

Exemple.

- $$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 6 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & 7\end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 4 & 7 & 2 & 8 & 3 & 1 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4 & 8 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

Proposition. *L'ordre d'une permutation σ est le* `ppcm` *des longueurs des cycles dans sa décomposition.*

Démonstration. $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_k$, où σ_i sont des cycles de longueur l_i.
Puisque les cycles disjoints commutent, $\sigma^m = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k)^m = \sigma_1^m\sigma_2^m\cdots\sigma_k^m$.
$\sigma_1^m\sigma_2^m\cdots\sigma_k^m = e$, si, et seulement si, $\sigma_1^m = e$, $\sigma_2^m = e$, $\cdots$, $\sigma_k^m = e$.
Alors, $o(\sigma_1) \mid m$, $o(\sigma_2) \mid m$, $\cdots$, $o(\sigma_k) \mid m$.
Donc, $l_i \mid m$, $\forall i$.
L'ordre de σ m est le plus petit multiple des l_i. □

Cours 12

Rappel.

- $S_n = S(\{1, 2, \ldots, n\}) = \{\sigma \mid \sigma$ est une bijection de $\{1,2,\ldots,n\}\}$ est un groupe pour $\circ$.
- Notations : $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$
  Cycle : $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_l\end{pmatrix}$
- $o\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_l\end{pmatrix} = l$
- Toute permutation de S_n s'écrit comme un produit (composition) de cycles disjoints uniques

- Les cycles disjoints commutent
- Si $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ est la décomposition, $o(\sigma) = \texttt{ppcm}(l_1, \ldots, l_k)$, où l_k est la longueur de σ_k

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$o(\sigma) = \texttt{ppcm}(2, 2, 3) = 6.$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \circ \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^2 \circ \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Définition. Le *signe* d'une permutation $\sigma \in S_n$ est le nombre

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma) &= \left(\frac{3-4}{1-2}\right) \left(\frac{3-1}{1-3}\right)^{-1} \left(\frac{3-2}{1-4}\right)^{-1} \left(\frac{4-1}{2-3}\right)^{-1} \left(\frac{4-2}{2-4}\right)^{-1} \left(\frac{1-2}{3-4}\right) \\ &= (-1)^4 = 1 \end{aligned}$$

Remarque. Chaque terme $(i - j)$ apparaît au dénominateur et au numérateur, à signe près, donc $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Proposition. *Soient $\alpha, \beta \in S_n$, alors* $\operatorname{sgn}(\alpha \circ \beta) = \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \operatorname{sgn}(\beta)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\alpha \circ \beta) &= \prod_{i<j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j} \\ &= \prod_{i<j} \left(\frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j}\right) \left(\frac{\beta(i) - \beta(j)}{\beta(i) - \beta(j)}\right) \\ &= \prod_{i<j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\beta(i) - \beta(j)}{i - j} \\ &= \left(\prod_{i<j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)}\right) \cdot \operatorname{sgn}(\beta) \\ &= \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \operatorname{sgn}(\beta) \end{aligned}$$

□

Définition. Un cycle longueur 2 s'appelle une *transposition*.

Remarque. On peut décomposer un cycle en un produit de transposition :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_l \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_{l-1} \end{pmatrix} \circ \cdots \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(2) = 3 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(3) &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}(2) \\ &= 5\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(5) &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}(5) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}(2) \\ &= 6\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(6) &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}(6) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}(6) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix}(2) \\ &= 8\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}(8) &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}(8) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}(8) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix}(8) \\ &= 2\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}$$

Alors, $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\right) = (-1)^4 = 1$.

Proposition. *Le signe d'une transposition est -1.*

Démonstration. par exemple
$\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix} \in S_4$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix} &= \left(\frac{\cancel{1-4}}{\cancel{1-2}}\right)\left(\frac{\cancel{1-3}}{\cancel{1-3}}\right)\left(\frac{\cancel{1-2}}{\cancel{1-4}}\right)\left(\frac{\cancel{4-3}^{\,-1}}{\cancel{2-3}}\right)\left(\frac{\cancel{4-2}^{\,-1}}{\cancel{2-4}}\right)\left(\frac{\cancel{3-2}^{\,-1}}{\cancel{3-4}}\right) \\ &= (-1)^3 \\ &= -1\end{aligned}$$

#

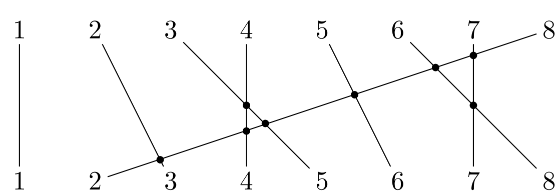
Proposition. *Le signe d'un cycle de longueur l est*

- 1 *si l est impair*
- -1 *si l est pair*

Plus généralement, le signe d'une permutation σ est $(-1)^\gamma$, où γ est le nombre de transpositions dans une *décomposition de σ en transpositions.*

Remarque. Une autre façon de calculer le signe d'une permutation.

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 2\end{pmatrix}$$



Connecter chaque élément, compter les intersections des segments, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^\gamma$, où γ est le nombre d'intersections.