MAT346 - Analyse II
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

Table des matières

Chapitre 1 Intégration

Section 1.1 Intégrales de Riemann

Notation.

$\mathcal{B}[c,d] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}$.
$\mathcal{R}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}$.
$\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}$.

On suppose nos fonctions bornées.

Définition.

a) Une partition de $[a,b]$ est un ensemble fini de points $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$ t.q. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

b) L'ensemble des partitions de $[a,b]$ est $\Omega[a,b]$.

c) On dit Δ' est *plus fine* que Δ, noté $\Delta' \geqslant \Delta$, si $\Delta' \supseteq \Delta$.

d) *Raffinement commun* de Δ_1 et Δ_2, noté $\Delta_1 \vee \Delta_2$, est la partition de $[a,b]$ formée de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ordonnés.

e) La *norme* de Δ, notée $\|\Delta\|$, est $\|\Delta\| = \max_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|$.

f)

$$\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$
$$\underline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$

Remarque.

$$\|x\| \geqslant 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$
$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

Définition.

a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de f pour la partition Δ est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de f pour la partition Δ est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Proposition.

a)
$$\underline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)\leqslant \underline{S}(f,\Delta),\forall\Delta\in\Omega[a,b]$$

b)
$$\underline{S}(f,\Delta)\leqslant \overline{S}(f,\Delta)$$

c)
$$\overline{S}(f,\Delta)\leqslant \overline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)$$

Proposition. *Si $\Delta'\geqslant\Delta$, alors $\overline{S}(f,\Delta')\leqslant\overline{S}(f,\Delta)$.*

Démonstration.
Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$$

$$\Delta' : a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<\bar{x}<x_i<\ldots<x_n=b$$

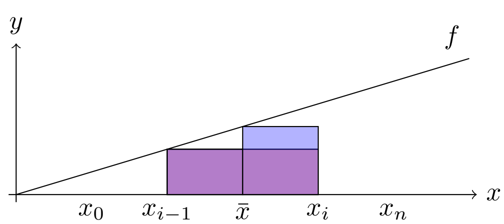
On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta)-\overline{S}(f,\Delta') &= \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1})\right]\\ &\quad-\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\cdot(\bar{x}-x_{i-1})+\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\cdot(x_i-\bar{x})\right]\\ &=(x_i-\bar{x})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\right]\\ &\quad+(\bar{x}-x_{i-1})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\right]\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

□

Proposition. *Si $\Delta'\geqslant\Delta$, alors $\underline{S}(f,\Delta')\geqslant\underline{S}(f,\Delta)$*

Démonstration.



□

Remarque. $\underline{S}(f,\Delta)=-\overline{S}(-f,\Delta)$.

Corollaire. $\forall\Delta_1,\Delta_2\in\Omega[a,b],\underline{S}(f,\Delta_1)\leqslant\overline{S}(f,\Delta_2)$

Démonstration.
On a $\Delta_1\vee\Delta_2\geqslant\Delta_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\Delta_1)&\leqslant\underline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leqslant\overline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leqslant\overline{S}(f,\Delta_2)\end{aligned}$$

□

Définition.

a) La somme par défaut de f est $\underline{S}(f) = \sup\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$.

b) La somme par excès de f est $\overline{S}(f) = \inf\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$.

Théorème. $\underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f)$

Démonstration.
Soit $\Delta_1 \in \Omega[a,b]$
$\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ est le plus petit majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a,b]$.
Du corollaire précédant, on a que $\underline{S}(f, \Delta) \leqslant \overline{S}(f, \Delta_1)$.
Donc, $\overline{S}(f, \Delta_1)$ est un majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$.
Ainsi, $\underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f, \Delta_1)$.
De même, $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ est le plus grand minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a,b]$.
Comme $\underline{S}(f)$ est un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f)$. □

Définition.
Soit $f \in \mathcal{B}[a,b]$. On dit que f est *intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et on note $f \in \mathcal{R}[a,b]$. La valeur commune de $\underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f)$ est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Critère d'intégrabilité

Théorème (Critère d'intégrabilité)**.**
Soit $f \in \mathcal{B}[a,b]$. *Alors* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *si, et seulement si,* $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega[a,b])$ *t.q.* $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $f \in \mathcal{R}[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
On a $\displaystyle\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$.
Comme $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ ne peut minorer $\overline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_1 \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$.
Comme $\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ ne peut majorer $\underline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_2 \in \Omega[a,b]$ t.q. $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leqslant \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \left(\overline{S}(f) - \underline{S}(f)\right) + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$.
Alors $\exists \Delta$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$.
Mais alors,

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) \\ &\geqslant \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

Du théorème du sandwich, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$, car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.
Donc, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

□

Corollaire. *S'il existe $\Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) = \underline{S}(f,\Delta)$, alors $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Théorème. *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration.
Soit $f \in \mathcal{C}[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par la proposition d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n\varepsilon > b - a$.

Rappel.
f est uniformément continue sur $[a,b]$ si $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)$ t.q. pour $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Rappel.
Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Comme $f \in \mathcal{C}[a,b]$, elle est uniformément continue sur $[a,b]$.
Alors, $\exists \delta > 0$ t.q. pour $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$.
Soit donc $\Delta \in \Omega[a,b] : a = x_0 < x_1, \ldots < x_n = b$ avec $\|\Delta\| < \delta$.
Alors, $\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) < \frac{1}{n}$.

Remarque. $\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])$ peut être noté $\operatorname{osc}_f([x_{i-1},x_i])$.

On obtient

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

Théorème. *Toute $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

Démonstration.

(1) Si f est constante, alors $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) = 0 < \varepsilon$.

(2) Si f est croissante,
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon > (b-a)(f(b) - f(a))$.
Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

(3) Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f \in \mathcal{R}[a,b]$.
Donc, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

□

Théorème.
Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\int (f_1+f_2) = \int f_1 + \int f_2$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $f_i \in \mathcal{R}[a,b]$, $\exists \Delta_i \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f_i,\Delta_i) - \underline{S}(f_i,\Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
Alors, $\overline{S}(f_i,\Delta) - \underline{S}(f_i,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Supposons $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1+f_2,\Delta) &\leqslant \overline{S}(f_1,\Delta) + \overline{S}(f_2,\Delta) \\
\underline{S}(f_1+f_2,\Delta) &\geqslant \underline{S}(f_1,\Delta) + \underline{S}(f_2,\Delta)
\end{aligned}$$

Car $\sup(f_1+f_2) \leqslant \sup f_1 + \sup f_2$ et $\inf(f_1+f_2) \geqslant \inf f_1 + \inf f_2$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1+f_2,\Delta) - \underline{S}(f_1+f_2,\Delta) &\leqslant \overline{S}(f_1,\Delta) + \overline{S}(f_2,\Delta) - \underline{S}(f_1,\Delta) - \underline{S}(f_2,\Delta) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_1 + f_2 &\leqslant \overline{S}(f_1+f_2,\Delta) \\
&\leqslant \overline{S}(f_1,\Delta) + \overline{S}(f_2,\Delta) \\
&< \underline{S}(f_1,\Delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f_2,\Delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \int_a^b f_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f_2 + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b f_1 + f_2 < \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.
Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 \leqslant \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.
De même, on peut montrer que $\int_a^b f_1 + f_2 \geqslant \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.
Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$. □

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors* $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\displaystyle\int \lambda f = \lambda \int f$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\exists \Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$.

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(\lambda f,\Delta) &= \lambda \overline{S}(f,\Delta) \\ \underline{S}(\lambda f,\Delta) &= \lambda \underline{S}(f,\Delta) \end{aligned}$$

Car $\sup(\lambda f) = \lambda \sup f$ et $\inf(\lambda f) = \lambda \inf f$.

Alors,

$$\begin{aligned} \overline{S}(\lambda f,\Delta) - \underline{S}(\lambda f,\Delta) &= \lambda \overline{S}(f,\Delta) - \lambda \underline{S}(f,\Delta) \\ &= \lambda \left(\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta)\right) \\ &< \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$.

De plus,

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f &\leqslant \overline{S}(\lambda f,\Delta) \\ &= \lambda \overline{S}(f,\Delta) \\ &< \lambda \left(\underline{S}(f,\Delta) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ &= \lambda \underline{S}(f,\Delta) + \varepsilon \\ &\leqslant \lambda \int_a^b f + \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b \lambda f < \lambda \int_a^b f + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Donc, $\displaystyle\int_a^b \lambda f \leqslant \lambda \int_a^b f$.

De même, on peut montrer que $\displaystyle\int_a^b \lambda f \geqslant \lambda \int_a^b f$.

Donc, $\displaystyle\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. □

Corollaire.

Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$*, alors* $f \leqslant g \Rightarrow \displaystyle\int f \leqslant \int g$.

Démonstration.

$g - f \geqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\int g - f \geqslant 0 \Rightarrow \int g - \int f \geqslant 0$. □

Inégalité du triangle

Théorème (Inégalité du triangle)**.**

Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$*, alors* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $\displaystyle\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
Alors, $\exists \Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(|f|,\Delta) - \underline{S}(|f|,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(|f|,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(|f|,[x_{i-1},x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i - x_{i-1}) \\
&= \overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
Enfin,

$$\begin{aligned}
-|f| \leqslant f \leqslant |f| &\Rightarrow -\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f| \\
&\Rightarrow \int f \leqslant \int |f|
\end{aligned}$$

□

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $a \leqslant c < d \leqslant b$, alors $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[a,b]$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\exists \Delta_1 \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1) < \varepsilon$.
Soit Δ_2 le raffinement de Δ_1 en ajoutant les points c et d.
Alors, $\overline{S}(f,\Delta_2) - \underline{S}(f,\Delta_2) \leqslant \overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1) < \varepsilon$
Donc, $f \in \mathcal{R}[c,d]$. □

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $a < c < b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$
$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a,c]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\exists \Delta_2 \in \Omega[c,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_2) - \underline{S}(f,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$. Alors, $\Delta \in \Omega[a,b]$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &\leqslant \overline{S}(f,\Delta) \\
&= \overline{S}(f,\Delta_1) + \overline{S}(f,\Delta_2) \\
&< \underline{S}(f,\Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f,\Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \underline{S}(f,\Delta_1) + \underline{S}(f,\Delta_2) + \varepsilon \\
&\leqslant \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\int_a^b f \leqslant \int_a^c f + \int_c^b f$.
De même, $\int_a^b f \geqslant \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.*
Si f possède n discontinuités dans $[a,b]$, alors $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Démonstration.
Pour $n = 0$, $f \in \mathcal{C}[a,b]$, donc $f \in \mathcal{R}[a,b]$ est un résultat connu.
Supposons l'énoncé vrai pour n.
Supposons que $f \in \mathcal{B}[a,b]$ admet $n+1$ discontinuités.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$
Il y a deux cas à considérer

1. a ou b est une discontinuité
   Sans perte de généralité, supposons que a est la discontinuité.
   Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. a est l'unique discontinuité de $[a, a+\eta]$ et $\eta < \frac{\varepsilon}{4M}$.
   Alors, $[a+\eta, b]$ contient n discontinuités.
   De l'hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{R}[a+\eta, b]$.
   Il existe donc $\Delta \in \Omega[a+\eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$.
   On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f,\Delta_\varepsilon) &= \big(\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta)\big) + \big(\overline{M}(f,[a,a+\eta]) - \underline{M}(f,[a,a+\eta])\big)\,\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

2. ni a ni b ne sont des discontinuités
   Soit $c \in]a,b[$ qui est une discontinuité de f.
   Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. c est l'unique discontinuité de $[c-\eta, c+\eta] \subset [a,b]$ et $\eta < \frac{\varepsilon}{8M}$.
   Alors, $[a, c-\eta]$ et $[c+\eta, b]$ contiennent au plus n discontinuités, donc par l'hypothèse de récurrence :
   $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, c-\eta]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{4}$ et $\exists \Delta_2 \in \Omega[c+\eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_2) - \underline{S}(f,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{4}$.
   Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
   On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f,\Delta_\varepsilon) &= \big[\overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1)\big] + \big[\overline{S}(f,\Delta_2) - \underline{S}(f,\Delta_2)\big] \\
&\quad + \big[\overline{M}(f,[c-\eta,c+\eta]) - \underline{M}(f,[c-\eta,c+\eta])\big](2\eta) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4M\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Théorème. *Soient $f : [a,b] \to [c,d] \in \mathcal{R}[a,b]$ et $g : [c,d] \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c,d]$.*
Alors $g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Remarque. L'hypothèse que $g \in \mathcal{C}[c,d]$ est nécessaire.

Exemple.

$$\begin{aligned}
f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad x = \frac{m}{n} \text{ et } \mathtt{pgcd}(m,n) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Fonction de Dirichlet modifiée.

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$.

$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$g \circ f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

Fonction de Dirichlet.

Lemme. *Si $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a,b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant un unique point, alors $\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') \leqslant 2\overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \|\Delta\|$.*

Démonstration.

Soient $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ et
$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \ldots < x_n = b$.

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') &= \overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) - \overline{M}(f,[\bar{x},x_i]) \cdot (x_i - \bar{x}) \\ &= (\bar{x} - x_{i-1}) \left(\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\right) + (x_i - \bar{x}) \left(\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\right) \\ &\leqslant 2\overline{M}(|f|,[x_{i-1},x_i]) \left((\bar{x} - x_{i-1}) - (x_i - \bar{x})\right) \\ &\leqslant 2\overline{M}(|f|,[a,b]) \|\Delta\| \end{aligned}$$

□

Corollaire. *Si $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a,b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant p points, au plus un point par sous-intervalle de Δ, alors $\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') \leqslant 2p\overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \|\Delta\|$.*

Théorème de Darboux

Théorème (Darboux, 1875)**.**

Si $f \in \mathcal{B}[a,b]$, alors

$$\overline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \overline{S}(f,\Delta) \qquad \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \underline{S}(f,\Delta)$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f,\Delta)$, on a que $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant des $\overline{S}(f,\Delta)$.

Ainsi, $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_0) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\delta > 0$ t.q. $\delta < \min\limits_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} |x_i - x_{i-1}|$ et $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|,[a,b])}$.

Soit $\Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\|\Delta\| < \delta$.

Alors, $\|\Delta\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Considérons $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$.

Comme $\|\Delta'\| \leqslant \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$, aucun sous-intervalle ouvert de Δ ne contient plus d'un point de Δ_0.

Comme Δ' s'obtient de Δ en ajoutant au plus $n-1$ points $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$,

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') &\leqslant 2(n-1)\overline{M}(|f|,[a,b]) \|\Delta\| \\ &< 2(n-1)\overline{M}(f,[a,b]) \delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,\Delta) &\leqslant \overline{S}(f,\Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f,\Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \overline{S}(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}\,(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}\,(f, \Delta) &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} -\overline{S}\,(-f, \Delta) \\ &= -\lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}\,(-f, \Delta) \\ &= -\overline{S}(-f) \\ &= \underline{S}(f)\end{aligned}$$

□

Définition. Soit $f \in \mathcal{B}\,[a, b]$.
Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \in \Omega\,[a, b]$.
Soient $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Le nombre réel

$$S\,(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

est appelé *somme de Riemann* de la fonction f correspondant à la partition Δ et aux points $\{\bar{x}_i\}_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$.

Théorème.
Soit $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$.
Alors, $(\forall\varepsilon > 0)$, $(\exists\delta = \delta(\varepsilon))$ t.q. pour toute partition Δ de $[a, b]$ avec $\|\Delta\| < \delta$ et pour tout choix de points $\{\bar{x}_i\}$, on a

$$\left| \int_a^b f - S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire.

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S\,(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$$

Démonstration.
On a $\underline{S}\,(f, \Delta) \leqslant S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leqslant \overline{S}\,(f, \Delta)$.
Donc,

$$\underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}\,(f, \Delta) \leqslant \lim_{\|\Delta\|\to 0} S\,(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leqslant \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}\,(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Comme $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$, on a $\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \displaystyle\int_a^b f$.

Par le théorème du sandwich, $S\,(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \displaystyle\int_a^b f$. □

Loi de la moyenne

Théorème (Loi de la moyenne)**.**
Soit $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$.
Alors, $\exists\mu \in \left[\underline{M}\,(f, [a, b])\,, \overline{M}\,(f, [a, b])\right]$ t.q. $\displaystyle\int_a^b f = (b - a) \cdot \mu$.

Démonstration.
Soit ϕ la fonction donnée par $\phi(x) = (b - a)x$.
On a $\underline{M}\,(f, [a, b]) \leqslant f \leqslant \overline{M}\,(f, [a, b])$.
Donc

$$\phi(\underline{M}\,(f, [a, b])) = (b-a)\underline{M}\,(f, [a, b]) = \int_a^b \underline{M}\,(f, [a, b]) \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b \overline{M}\,(f, [a, b]) = (b-a)\overline{M}\,(f, [a, b]) = \phi(\overline{M}\,(f, [a, b]))$$

Rappel.

Théorème (Théorème de valeur intermédiaire).
f continue sur $[a,b]$, $f(a) < c < f(b)$ implique $\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $f(x_0) = c$.

Comme ϕ est continue sur $[\underline{M}(f,[a,b]), \overline{M}(f,[a,b])]$, du TVI, $\exists \mu \in [\underline{M}(f,[a,b]), \overline{M}(f,[a,b])]$ t.q. $\phi(\mu) = c$ pour tout $c \in [\phi(\underline{M}(f,[a,b])), \phi(\overline{M}(f,[a,b]))]$.

En particulier, si $c = \int_a^b f$, $\exists \mu$ t.q. $\phi(\mu) = \int_a^b c$, c'est-à-dire t.q. $(b-a)\mu = \int_a^b f$. □

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Théorème.
Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Soit $\begin{array}{rcl} F : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{array}$

Alors,

a) $|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant \overline{M}(|f|,[a,b])(b-a) \cdot |x_1 - x_2|$ *pour tous* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *;*
b) *F est uniformément continue sur $[a,b]$;*
c) *Si f est continue, alors F est différentiable et $F' = f$.*

Démonstration.

a) Supposons que $x_1 > x_2$
On a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f \right| \\ &= \left| \int_{x_2}^{x_1} f \right| \\ &\leqslant \int_{x_2}^{x_1} |f| \\ &\leqslant \int_{x_2}^{x_1} \overline{M}(|f|,[a,b]) \\ &= \overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$.
Prenons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\overline{M}(|f|,[a,b])}$.
Soient $x, y \in [a,b]$ avec $|x - y| < \delta$.
Alors,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leqslant \overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot |x - y| \\ &< \overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

c) Soit $x_0 \in [a,b]$.

On a

$$\begin{aligned}
F'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\displaystyle\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\displaystyle\int_{x_0}^x f}{x-x_0} \\
&\overset{\text{Loi de la moyenne}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)f(x_0+\theta(x-x_0))}{x-x_0} \qquad \theta\in[0,1] \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x_0+\theta(x-x_0)) \\
&= f(x_0)
\end{aligned}$$

□

Notation. F est une primitive de f.

Corollaire. *Si f est continue, alors f admet au moins une primitive.*

Corollaire. *Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors $F_1 - F_2 = C$ pour une constante C.*

Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral)**.**
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et F est une primitive de f, alors $\displaystyle\int_a^b f = F(b)-F(a)$.

Démonstration.
Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \in \Omega[a,b]$.
Comme F est continue et différentiable sur $[a,b]$ et a fortiori sur $[x_{i-1},x_i]$, le théorème de la moyenne donne $t_i \in [x_{i-1},x_i]$ t.q. $\dfrac{F(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$.
On a

$$\begin{aligned}
F(b)-F(a) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i)-F(x_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})\cdot f(t_i)
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{array}{rclcl}
& \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) & \leqslant & f(t_i) & \leqslant & \overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) \\
\Rightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})\underline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) & \leqslant & \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})f(t_i) & \leqslant & \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) \\
\Rightarrow & \underline{S}(f,\Delta) & \leqslant & F(b)-F(a) & \leqslant & \overline{S}(f,\Delta) \\
\Rightarrow & \displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}(f,\Delta) & \leqslant & F(b)-F(a) & \leqslant & \displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}(f,\Delta) = \overline{S}(f) = \int_a^b f
\end{array}$$

Donc, $\displaystyle\int_a^b f = F(b)-F(a)$. □

Proposition. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors,*
a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;
b) $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Démonstration.

a) déjà fait, car f est continue sauf en un nombre fini de points.

b) Soit p le nombre de points où $f \neq 0$.
Pour $p = 0$, c'est trivial.
Supposons que la propriété est vraie pour p.
Supposons que $f \neq 0$ en $p+1$ points.
Il y a deux cas à considérer

1) $\exists c \in]a, b[$ avec $f(c) \neq 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $\eta > 0$ t.q.
i) $a < c - \eta < c + \eta < b$;
ii) c est le seul point de $[c-\eta, c+\eta]$ où $f \neq 0$;
iii) $\eta < \min \left\{ \dfrac{\varepsilon}{4\overline{M}\,(f, [a,b])}, \dfrac{-\varepsilon}{4\underline{M}\,(f, [a,b])} \right\}$.
Par l'hypothèse de récurrence,
$$\int_a^{c-\eta} f \quad = \quad 0 \quad = \quad \int_{c+\eta}^b f$$
Du critère d'intégrabilité, $\exists \Delta_1 : a < x_0 < x_1, \ldots < x_n = c - \eta$, $\exists \Delta_2 : c + \eta = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$ t.q. $\overline{S}\,(f, \Delta_i) \leqslant \overline{S}\,(f, \Delta_i) - \underline{S}\,(f, \Delta_i) < \dfrac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.
Prenons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
On a
$$\begin{aligned} \overline{S}\,(f, \Delta) &= \overline{S}\,(f, \Delta_1) + 2\eta\overline{M}\,(f, [c-\eta, c+\eta]) + \overline{S}\,(f, \Delta_2) \\ &\leqslant \overline{S}\,(f, \Delta_1) + 2\eta\overline{M}\,(f, [a,b]) + \overline{S}\,(f, \Delta_2) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$
De même, $\underline{S}\,(f, \Delta_i) \leqslant \overline{S}\,(f, \Delta_i) < \dfrac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.
et
$$\begin{aligned} \underline{S}\,(f, \Delta) &= \underline{S}\,(f, \Delta_1) + 2\eta\underline{M}\,(f, [c-\eta, c+\eta]) + \underline{S}\,(f, \Delta_2) \\ &\geqslant \underline{S}\,(f, \Delta_1) + 2\eta\underline{M}\,(f, [a,b]) + \underline{S}\,(f, \Delta_2) \\ &> -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \\ &= -\varepsilon \end{aligned}$$
Donc, $-\varepsilon < \underline{S}\,(f, \Delta) \leqslant \overline{S}\,(f, \Delta) < \varepsilon$.
Comme $\varepsilon > 0$ est arbirtaire, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

2) $f(c) \neq 0$ en a ou en b.
On procède de la même manière avec un sous-intervalle de largeur η autour de a et de b t.q. a et b sont les seules discontinuités dans ces intervalles.

□

Corollaire. *Si $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q. $f = g$ sauf peut-être en un nombre fini de points, alors* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Section 1.2 Techniques d'intégration

Théorème (Intégration par parties)**.**
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables t.q. $f', g' \in \mathcal{R}\,[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b gf'$$

Démonstration.
Posons $h = fg$.
Alors,

$$\begin{aligned}
h' &= f'g + fg' \\
\int_a^b h' &= \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \\
\int_a^b fg' &= \int_a^b h - \int_a^b f'g \\
&= h|_a^b - \int_a^b f'g \\
&= fg|_a^b - \int_a^b f'g
\end{aligned}$$

□

Théorème (Changement de variable/Substitution)**.**
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\phi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ de classe C^1, c'est-à-dire ϕ est dérivable et ϕ' est continue. Si $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Démonstration.
Posons $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
Du théorème fondamental, h est uniformément continue, différentiable et $h' = f$.
Soit $g(t) = (h \circ \phi)(t) = h(\phi(t)) = \displaystyle\int_a^{\phi(t)} f(x)dx$.
On a h, ϕ différentiables, donc g l'est aussi et

$$\begin{aligned}
g'(t) &= h'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\
&= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta g'(t)dt \\
&= g(\beta) - g(\alpha) \\
&= h(\phi(\beta)) - h(\phi(\alpha)) \\
&= h(b) - h(a) \\
&= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

□

Fractions partielles

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Avec $b^2-4ac<0$.
On ramène sur dénominateurs communs.
On ramène en une fraction.
On résoud le système d'équations avec $P(x)$.
On intègre chaque fraction.

Quelques substitutions

1. $f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \cdots\right)$, ou f est une fonction rationnelle $f = \frac{P(x)}{Q(x)}$.
   On pose $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ où n est un multiple commun de $n_1, n_2, \cdots$.
   Exemple.
   $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \int x^2(x-1)^{-1/2}$.
   Posons $x-1=t^2$.
   Alors, $dx = 2tdt$.
   On obtient $\displaystyle\int x^2(x-1)^{-1/2} = \int (t^2-1)^2(t^2)^{-1/2}2tdt = 2\int (t^2+1)^2dt$.

2. $\displaystyle\int x^\alpha(a+bx^\beta)^\gamma dx$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.
   On pose $t = x^\beta$.
   Alors, $dt = \beta x^{\beta-1}dx$.
   Donc, $dx = \dfrac{dt}{\beta x^{\beta-1}} = \dfrac{dt}{\beta t^{(\beta-1)/\beta}}$.
   Exemple.
   $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx$.
   Posons $t = x^2$.
   On a $dt = 2xdx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2x} = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.
   On obtient

$$\begin{aligned}\int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx &= \int t^{-2}(1+t)^{-1/2}\frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2}\int t^{-5/2}(1+t)^{-1/2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int t^{-3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2}dt\end{aligned}$$

   Posons $u^2 = \dfrac{1+t}{t} = 1 + \dfrac{1}{t}$. On a $u^2 - 1 = \dfrac{1}{t} \Rightarrow t = \dfrac{1}{u^2-1}$.
   Alors, $dt = (-1)(u^2-1)^{-2}(2u)du$.
   Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int t^{-3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2}dt &= -\frac{1}{2}\int (u^2-1)^3u^{-1}(u^2-1)^{-2}2udu \\ &= -\int (u^2-1)du\end{aligned}$$

3. $f(\sin x, \cos x)$.
   On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. On a $x = 2 \arctan t$.
   Alors, $dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt$.
   Exemple.
   $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$.
   On a

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\
&= \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} - \frac{\dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

   Alors,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2+\cos x} &= \int \frac{2dt}{1+t^2} \frac{1}{2 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2dt}{3+t^2} \\
&= 2 \int \frac{dt}{t^2 + \sqrt{3}^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

4. $f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$.
   On pose $x = a \sin t$. On a $dx = a \cos t dt$.
   Exemple.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\
&= \int a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt \\
&= \int a^4 \frac{1}{4} \sin^2 2t dt \\
&= \int \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\
&= \frac{a^4}{8} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right]
\end{aligned}$$

5.

Rappel.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \begin{aligned}\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sinh x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(\cosh x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \sinh x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\cosh^2 x + \sinh^2 x &= -\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} \\ &= -1\end{aligned}$$

Donc, $\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$.
Alors, $1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x \Rightarrow \text{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$.
Formellement,

$$\sinh x = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

avec $z \in \mathbb{C}$.
$f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$.
On pose $x = a \cosh t$. On a $dx = a \sinh t dt$.

Exemple.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{\sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2}} a \sinh t dt \\ &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{a \sinh t} a \sinh t dt \\ &= \int a^2 \cosh^2 t dt \\ &= \int a^2 \frac{a + \cosh 2t}{2} dt \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2} \frac{\sinh 2t}{2}\end{aligned}$$

Remarque. $\text{arccosh} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)$, $\text{arcsinh} t = \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)$.

6. $f\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)$.
   On pose $x = a\sinh t$. On a $dx = a\cosh t dt$.
   Exemple.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{a^3\sinh^3 t}{(a^2\sinh^2 t + a^2)^{3/2}} a\cosh t dt \\
&= \int \frac{a^3\sinh^3 t}{a^3\cosh^3 t} a\cosh t dt \\
&= a\int \frac{\sinh^3 t}{\cosh^2 t} dt \\
&= a\int \frac{\sinh t \sinh^2 t}{\cosh^2 t} dt \\
&= a\int \frac{\sinh t(\cosh^2 t - 1)}{\cosh^2 t} dt \\
&= a\int \left(\sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) dt \\
&\text{posons } u = \cosh t, du = \sinh t dt \\
&= a\cosh t + \frac{a}{\cosh t} \\
&= a\sqrt{\cosh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{\cosh^2 t}} \\
&= a\sqrt{1+\sinh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \\
&= a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}
\end{aligned}$$

7. $f\left(x, \sqrt{x^2+2bx+c}\right)$, avec $x^2+2bx+c$ irréductible dans $\mathbb{R}$.
   On a $x^2+2bx+c = (x+b)^2 + (c-b^2)$.
   On pose $t = x+b$. On a $dt = dx$.
   Exemple.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^2+1}} dx \\
&\text{posons } t = x+2, dt = dx \\
&= \int \frac{t-2}{\sqrt{t^2+1}} dt \\
&= \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt - 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\
&\text{posons } u = t^2+1, du = 2t dt \\
&\text{posons } t = \sinh v, dt = \cosh v dv \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - 2\int \frac{\cosh v dv}{\sqrt{\sinh^2 v + 1}} \\
&= \sqrt{u} - 2\int dv \\
&= \sqrt{u} - 2v \\
&= \sqrt{t^2+1} - 2\text{arcsinh} t \\
&= \sqrt{t^2+1} - 2\ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\
&= \sqrt{(x+2)^2+1} - 2\ln\left(x+2+\sqrt{1+(x+2)^2}\right)
\end{aligned}$$

Section 1.3 Intégrales impropres

Définition. $f : [a, \infty[$ continue par morceaux.

L'intégrale impropre (de $1^{\text{ère}}$ espèce) de f est $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx$.

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{y\to\infty}\int_1^y dfracdxx \\ &= \lim_{y\to\infty}(\ln y - \ln 1) \\ &= \infty\end{aligned}$$

diverge

2.
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y\to\infty}\int_1^y x^{-p}dx \\ &= \lim_{y\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^y \\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)\end{aligned}$$

Si $p > 1$, alors $1 - p < 0$ et $y^{1-p} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$.

On a alors $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

Si $p < 1$, alors $1 - p > 0$ et $y^{1-p} \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$.

On a alors que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ diverge.

Si $p = 1$, c'est le cas 1, qui diverge.

3.
$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sx}dx &= \lim_{y\to\infty}\int_0^y e^{-sx} \\ &= \lim_{y\to\infty}\left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right|_0^y \\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{e^{-sy}}{-s} + \frac{1}{s}\right)\end{aligned}$$

Si $s < 0$, alors $-sy > 0$ et l'intégrale diverge.

Si $s > 0$, alors $-sy < 0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{s}$.

Si $s = 0$, alors $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}dx = \int_0^\infty dx$ diverge.

4.
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{y\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{y\to\infty}(\arctan y - \arctan 0) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Définition. $f :]a, b]$ continue, mais t.q. $\lim_{x\to a^+} f(x)$ n'existe pas.

L'intégrale impropre (de $2^{\text{ème}}$ espèce) de f est $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b f(x)dx$.

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^b \frac{dx}{x}\\ &= \lim_{y\to 0^+}(\ln 1 - \ln y)\\ &= \infty\end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{dx}{x^p}\\ &= \lim_{y\to 0^+}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_y^1\\ &= \frac{1}{1-p} - \lim_{y\to 0^+}\frac{y^{1-p}}{1-p}\end{aligned}$$

Si $p > 1$, alors $1 - p < 0$ et l'intégrale diverge.
Si $p < 1$, alors $1 - p > 0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{1-p}$.
Si $p = 1$, alors c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{y\to 1^-}\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \lim_{y\to 1^-}(\arcsin y - \arcsin 0)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Remarque.

1.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x} &= \overbrace{\int_0^b \frac{dx}{x}}^{2^{\text{ème}}\text{ esp}} + \overbrace{\int_b^\infty \frac{dx}{x}}^{1^{\text{ère}}\text{ esp}}\\ &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^b \frac{dx}{x} + \lim_{y\to\infty}\int_b^y \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ converge si, et seulement si, les deux limites existent.

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \sin x dx &= \lim_{y\to\infty}\int_{-y}^y \sin x dx\\ &= \lim_{y\to\infty}\cos x\Big|_{-y}^y\\ &= \lim_{y\to\infty}(\cos y - \cos(-y)) = \lim_{y\to\infty} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx &= \int_{-\infty}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{\infty} \sin x dx \\
&= \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{0} \sin x dx + \lim_{y\to\infty} \int_{0}^{y} \sin x dx \\
&= \lim_{y\to\infty} (\cos 0 - \cos(-y)) + \lim_{y\to\infty} (\cos 0 - \cos y)
\end{aligned}$$

diverge
Ainsi, l'intégrale diverge.

Théorème (Critère de Cauchy)**.**
$\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ converge si, et seulement si, $(\forall\varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$ t.q. $M \leqslant y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \left|\displaystyle\int_{y_1}^{y_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Démonstration.
Posons $F(y) = \displaystyle\int_{a}^{y} f(x)dx$.

($\Rightarrow$) Supposons que $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ converge.

Soit $L = \displaystyle\lim_{y\to\infty} \int_{a}^{y} f(x)dx$.

Alors, $(\forall\varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$ t.q. $y \leqslant M \Rightarrow |F(y) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soient y_1, y_2 avec $M \leqslant y_1 \leqslant y_2$.

On a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)dx\right| &= |F(y_2) - F(y_1)| \\
&= |F(y_2) - L + L - F(y_1)| \\
&\leqslant |F(y_2) - L| + |F(y_1) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $(\forall\varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$, $M \leqslant y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \left|\displaystyle\int_{y_1}^{y_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

En particulier, on a $(\forall\varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$, $M \leqslant n \leqslant y \Rightarrow |F(y) - F(n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Considérons la suite $\{F(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Rappel. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N > 0)$, $m > n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$.

La suite $\{F(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et elle est convergente. Soit $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} F(n)$.

Alors, $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N > 0)$, $n > N \Rightarrow |F(n) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Il reste à montrer que $\{F(y)\}_{y\in\mathbb{R}}$ converge aussi vers L.

À partir d'un certain rang approprié, on a

$$\begin{aligned}
|F(y) - L| &= |F(y) - F(n) + F(n) - L| \\
&\leqslant |F(y) - F(n)| + |F(n) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque. Si $f \geqslant 0$, alors F est croissante, donc $\lim F(y)$ converge ou tend vers ∞.

Ainsi, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx < \infty$.

Proposition (Test de comparaison)**.**

Supposons que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall x \geqslant a)$.

Alors, $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ *converge implique* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*

Démonstration.

$\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge, alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$, $M \leqslant y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \left|\int_{y_1}^{y_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$.

On a

$$0 \leqslant \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \leqslant \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx = \left|\int_{y_1}^{y_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$$

Donc, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge. □

Exemple.

Déterminer si $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}$ converge.

Pour $x \geqslant 1$, on a $x^2 \geqslant x$, donc $-x^2 \leqslant -x$ et $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$.

Or, $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^y = \lim_{y\to\infty}(e^{-1} - e^{-y}) = e^{-1}$.

Comme $e^y \geqslant 0, \forall y \in \mathbb{R}$, on a que $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ converge.

Proposition (Test de comparaison limite)**.**

Supposons $a \leqslant b \leqslant x$ *et* $f(x), g(x) \geqslant 0$, $(\forall x \geqslant b)$.

Si $C = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe, alors* $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ *converge implique* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*

De plus, si $C \neq 0$, $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ *converge si, et seulement si,* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*

Proposition (Convergence absolue)**.**

a) $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$, *alors* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx < \infty$.

b) $\displaystyle\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leqslant \int_a^\infty |f(x)|\,dx$.

Démonstration.

a) Si $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$, alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$ t.q. $M \leqslant y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \left|\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$.

Or, $\displaystyle\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)dx\right| \leqslant \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx = \left|\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$.

Du critère de Cauchy, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

b)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| &= \left|\lim_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx\right| \\ &= \lim_{y\to\infty}\left|\int_a^y f(x)dx\right| \\ &\leqslant \lim_{y\to\infty}\int_a^y |f(x)|\,dx \\ &= \int_a^\infty |f(x)|\,dx\end{aligned}$$

□

Remarque. $\displaystyle\int_a^\infty f < \infty \not\Rightarrow \int_a^\infty |f| < \infty$.

Exemple (En effet).

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \lim_{y\to\infty}\int_a^y \frac{\sin x}{x}dx \\ u = \frac{1}{x} &\Rightarrow du = \frac{-dx}{x^2} \\ dv = \sin x &\Rightarrow v = -\cos x \\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\left.\frac{-\cos x}{x}\right|_{\pi/2}^{y} - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2}dx\right) \\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{\cos \pi/2}{\pi/2} - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2}dx\right) \\ &= \lim_{y\to\infty} -\int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2}dx\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx < \int_{\pi/2}^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{y\to\infty}\int_{\pi/2}^y \frac{dx}{x^2}dx = \lim_{y\to\infty} \left.\frac{-1}{x}\right|_{\pi/2}^{y} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{y}\right) = \frac{2}{\pi}$.

Donc, $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx < \infty$. Alors, $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx < \infty$.

Montrons que. $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge.

Considérons les intervalles $I_k = \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Sur I_k, $\sin x$ croît de 0 à 1.

En particulier, $\exists x_k \in I_k$ t.q. $\sin x_k \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, $\left|\frac{\sin x_k}{x_k}\right| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2x_k}$.

Or, $x_k \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leqslant 8k + \frac{\pi}{2} \leqslant 8k + 2k = 10k$.

Alors, $\frac{1}{x_k} \geqslant \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{k} = c\cdot\frac{1}{k}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{I_k}\left|\frac{\sin x_k}{x_k}\right| dx > \int_{I_k}\frac{c}{k}dx = \frac{c}{k}\cdot\frac{\pi}{2}$.

Enfin, $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \sum_{k=1}^\infty \int_{I_k}\left|\frac{\sin x_k}{x_k}\right| dx > \sum_{k=1}^\infty \frac{c}{k}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{c\pi}{2}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$, la série harmonique qui diverge. □

Théorème (Test de l'intégrale)**.**

Soit $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ *monotone décroissante.*

Alors, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx < \infty$ *si, et seulement si,* $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty f(k) < \infty$.

Démonstration.

Soit $\Delta : 1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, avec $x_i = i + 1$, pour $i \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned} S\left(f, \Delta, \{x_i\}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f(i+1) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} f(j) \end{aligned}$$

De même, $S\left(f, \Delta, \{x_{i-1}\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$.

On a donc

$$\sum_{j=2}^{\infty} f(j) \leqslant \int_1^{\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

($\Rightarrow$) Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, alors $\sum_{j=2}^{\infty} f(j)$ converge. Donc, $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ converge.

($\Leftarrow$) Si $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ converge, alors $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

□

Exemple.

m.q. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\forall p > 1$.

D'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim_{n\to\infty} n^{-p/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{-p/n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-p\frac{\ln n}{n}} = e^{-p \lim_{n\to\infty} \ln n/n} = e^{-p \lim_{n\to\infty} 1/n} = 1$$

Test de l'intégrale :

Posons $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

On a $f'(x) = -px^{-p-1} < 0$, donc f est monotone décroissante.

De plus, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si, et seulement si, $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

Or, $\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$.

Donc, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$. □

Chapitre 2 Suites de fonctions

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx \stackrel{?}{=} \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Exemple.

1. Posons $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

   On a $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 1} x^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.

   Cependant, $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\lim\limits_{n\to\infty} x^n\right) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, avec $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$.

2. Sur $[0,1]$, posons $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad x \leqslant \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{2}{n} \end{cases}$.

   Posons $f(x) = 0$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

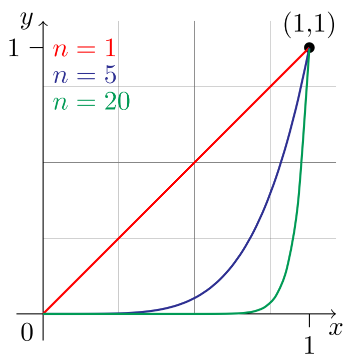
   Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$.

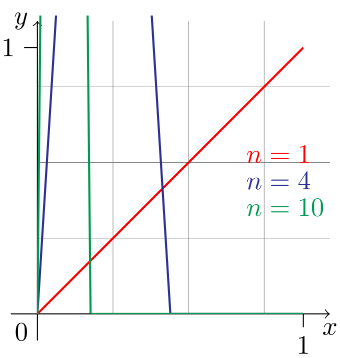
   Cependant, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{bh}{2} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

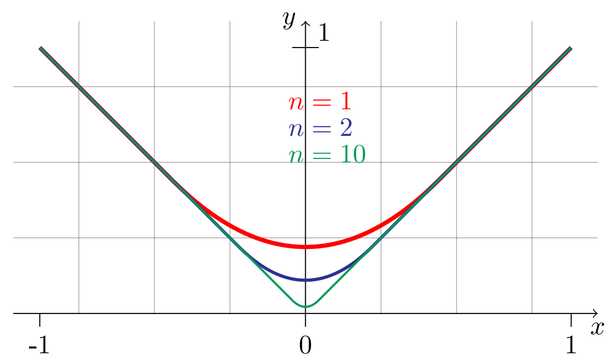
3. Sur $\mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 + \frac{1}{4n} & \text{si} \quad \frac{-1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ |x| & \text{sinon} \end{cases}$. On a $f_n'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leqslant \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si} \quad \frac{-1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{1}{2n} \end{cases}$.

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leqslant \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si} \quad \frac{-1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{1}{2n} \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

   Cependant, $\displaystyle\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{d}{dx}|x|$, qui n'existe pas en $x = 0$.







Rappel.
$(f_n) \to f$ (convergence ponctuelle)
$(\forall x \in \mathcal{D}), (f_n(x)) \to f(x)$ ou encore, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, c'est-à-dire $(\forall \varepsilon > 0), (\exists N > 0)$ t.q. $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Définition.

1. La *norme supremum* de f, notée $\|f\|$, est $\|f\| = \sup_{x\in\mathcal{D}} |f(x)|$, où $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.
2. La *distance* entre $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est $\operatorname{dist}(f, g) = \|f - g\|$.
3. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* vers f si $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) = 0$.

Exemple.

1. Sur $[0, \frac{1}{2}]$, prenons $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1/2]} |f_n(x)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Sur $[0, 1]$, prenons $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| && \text{car } f_n(1) - f(1) = 0 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1[} |x^n| \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc, $f_n \not\rightrightarrows f$ sur $[0, 1]$.

Notation. On note la convergence uniforme et la convergence ponctuelle d'une suite de fonction vers une fonction $f_n \rightrightarrows f$ et $f_n \to f$ respectivement.

Proposition. $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \to f$.

Démonstration.
$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| = 0$.
Alors, $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$, $\forall x \in \mathcal{D}$.
Ainsi, $f_n \to f$. □

Proposition. *Si $f_n \to f$ et $f_n \rightrightarrows g$, alors $f = g$.*

Démonstration.
$f_n \to f \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$.
$f_n \rightrightarrows g \Rightarrow f_n \to g \Rightarrow f_n(x) \to g(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$.
Ainsi, $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$. □

Théorème.
Supposons que (f_n) sont continues sur $\mathcal{D}$.
Si $f_n \rightrightarrows f$, alors f est continue sur $\mathcal{D}$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $x_0 \in \mathcal{D}$.

On veut montrer que f est continue en x_0, c'est-à-dire $\exists \delta > 0$ t.q. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Comme $(f_n) \rightrightarrows f$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) = 0$.

Ainsi, $\exists M > 0$ t.q. $n \geqslant M \Rightarrow \operatorname{dist}(f_n, f) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

En particulier, $\operatorname{dist}(f_M, f) < \dfrac{\varepsilon}{3}$, c'est-à-dire $\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} |f_M(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et donc, $|f_M(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

De plus, f_n continue sur $\mathcal{D} \Rightarrow f_M$ continue en x_0.

Ainsi, $(\exists \delta > 0)$ t.q. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_M(x) - f_M(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Supposons donc que $|x - x_0| < \delta$. On a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_M(x) + f_M(x) - f_M(x_0) + f_M(x_0) - f(x_0)| \\
&\leqslant |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(x_0)| + |f_M(x_0) - f(x_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Corollaire.

Si f_n continues et $f_n \rightrightarrows f$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Comme f_n est continue en x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Comme f est continue en x_0, $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Théorème.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $[a, b]$.

Si $f_n \rightrightarrows f$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f} dx$$

Démonstration.

f_n continues et $f_n \rightrightarrows f$, alors $f \in \mathcal{C}[a, b]$, donc $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b (f_n - f)(x)dx \right| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \\
&= (b-a) \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) \\
&= 0 && \text{car } f_n \rightrightarrows f
\end{aligned}$$

□

Théorème.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable à dérivée continue).

Supposons

i) $f_n' \rightrightarrows g$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ *existe pour au moins un a.*

Alors,

a) f_n *converge ponctuellement vers* f *;*

b) $f \in C^1$ *;*

c) $f' = g$*, c'est-à-dire* $\dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x)$.

Démonstration.

Supposons $L = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ pour un certain a.
On a $f_n \in C^1$, alors f_n' est continue.
De plus, $f_n' \rightrightarrows g$, donc g est continue.
Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \int_a^x g(t)dt$, pour tout x.
Du théorème fondamental du calcul, $\displaystyle\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a)$.
On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^x f_n'(t)dt + f_n(a)\right] \\
&= L + \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt \\
&= L + \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt \\
&= L + \int_a^x g(t)dt
\end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(L + \displaystyle\int_a^x g(t)dt\right) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x g(t)dt = g(x)$.
D'où b) et c), $f \in C^1$ avec $f' = g$. □

Chapitre 3 Séries de fonctions

Section 3.1 Convergence uniforme de série

Définition.

Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des fonctions $f_k : A \to \mathbb{R}$.

La *série* des f_k est la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Si la suite $(s_n(x))$ converge ponctuellement vers une fonction $s(x)$, alors $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ est appelée la *somme* de la série, c'est-à-dire, $s = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

Exemple.

$f_k(x) = x^k$, pour $x \in \mathbb{R}$.

On cherche $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

D'Alembert : $L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| = |x|$. On a convergence si $L < 1$, c'est-à-dire $-1 < x < 1$.

Si $x = -1$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ oscille.

Si $x = 1$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k$ diverge.

Donc, la série converge sur $]-1,1[$.

On a, sur $]-1,1[$, $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$.

Définition.

La série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *converge uniformément* sur A vers une fonction $s : A \to \mathbb{R}$ si $\left(s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightrightarrows s$, c'est-à-dire si $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |s_n(x) - s(x)| = 0$.

Exemple.

a) $f_k(x) = x^k$ sur $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| - \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| x^k \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0
\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k \rightrightarrows \frac{1}{1-x}$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b) $f_k(x) = x^k$ sur $A =]-1, 1[$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} 1^k \right| \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Théorème (Critère de Weierstrass)**.**
Soient $(f_k : A \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ t.q.
i) $(\forall k)(\exists M = M_k)(\forall x \in A), |f_k(x)| \leqslant M_k$ *;*
ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ *converge.*
Alors, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *converge uniformément.*

Démonstration.
Soit $x \in A$.
On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} M_k$, par *i)*, qui converge, par *ii)*.
Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge absolument et donc converge.
De plus, sur A,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |s(x) - s_n(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k
\end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme. $\square$

Exemple.

Étudions la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$.

On a

i) $\left|\dfrac{\cos kx}{k^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^2}$;

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ converge.

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ converge uniformément.

Théorème.

$(f_k : A \to \mathbb{R})$, f_k continue, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k \rightrightarrows s$, alors s est continue sur A.

Démonstration.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k \rightrightarrows s \Rightarrow (s_n) \rightrightarrows s.$

Or, $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$ est continue.

Alors, s est continue. □

Théorème.

f_k continue et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)dx \\
\text{puisque la somme est finie} &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx
\end{aligned}$$

Or, f_k continue $\Rightarrow s_n$ continue et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément $\Leftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx \\
&= \int_a^b \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx \\
&= \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx
\end{aligned}$$

□

Théorème.

$f_k \in C^1$ sur A, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f'_k \rightrightarrows u$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(a)$ converge pour au moins un $a \in A$, alors

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *converge uniformément vers s ;*

b) $s \in C^1$ *sur A ;*

c) $s' = u$*, c'est-à-dire* $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$.

Démonstration.
Comme au chapitre précédent. □

Exemple.
$f_k(x) = \dfrac{\sin kx}{k^3}$, $k \in \mathbb{N}_*$.
On a

i) $f_k \in C^1$ sur $\mathbb{R}$;

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ converge uniformément (Weierstrass) ;

iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin 0k}{k^3} = 0$ converge.

Alors, $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{x^3}$

Section 3.2 Séries de puissances

Définition.
Si $f_k(x) = a_k \cdot (x - x_0)^k$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ est une *série de puissance.*

Exemple.
$f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot (x - 0)^i$, où $a_i = \frac{1}{i!}$ et $x_0 = 0$.

Théorème.
Soit $R = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$*. Alors,*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *converge sur* $]x_0 - R, x_0 + R[$ *;*

b) Si $R > 0$ *et* $0 < r < R$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *converge uniformément sur* $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Démonstration.

a) Fixons x.
Posons $b_k = a_k(x - x_0)^k$.
Considérons la série réelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.
De d'Alembert, la série converge si, et seulement si, $L < 1$, avec $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n}\right| = |x - x_0| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x - x_0|}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \frac{|x - x_0|}{R}$.
Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge si, et seulement si, $L < 1$, c'est-à-dire $\dfrac{|x - x_0|}{R} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < R \Leftrightarrow x \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

b) Supposons que $R > 0$ et soit $0 < r < R$.
Pour $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, on a

i) $|f_k(x)| = \left|a_k(x-x_0)^k\right| = |a_k|\,|x-x_0|^k \leqslant |a_k|\,r^k$

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,r^k$ converge.

En effet, $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_n r^n}\right| = r\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{r}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \frac{r}{R}$.

Ainsi, $L < 1 \Leftrightarrow \dfrac{r}{R} < 1 \Leftrightarrow r < R$.

De Weierstrass, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ converge uniformément sur $[x_0 - r, x_0 + r]$.

□

Définition.
$R = \displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ est le *rayon de convergence* de la série.

Exemple.

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(x-0)^i$

$R = \displaystyle\lim_{i\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{i!}}{\frac{1}{(i+1)!}}\right| = \lim_{i\to\infty}(i+1) = \infty.$

Donc, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$ converge sur tout $\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(x-0)^k$

$R\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1/k}{1/(k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k}\right| = 1.$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ converge sur $]-1,1[$ converge unifirmément sur $[-r,r]$ avec $0 < r < 1$.

Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1/2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{1/2} x^{k-1}dx.$

Puisque $\frac{x^k}{k}$ est continue pour tout k et $\sum\frac{x^k}{k}$ converge uniformément, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{1/2} x^{k-1}dx = \int_0^{1/2}\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}dx =$
$\displaystyle\int_0^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty} x_k dx = \int_0^{1/2}\frac{1}{1-x}dx = -\ln|1-x|\,\Big|_0^{1/2} = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2.$

Corollaire.
Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *converge vers* f *sur* $]x_0 - R, x_0 + R[$. *Alors,*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k)$ *est une série de puissance qui converge sur* $]x_0 - R, x_0 + R[$;

b) $f \in C^{\infty}$ *sur* $]x_0 - R, x_0 + R[$;

c) $\displaystyle\frac{d^n}{dx^n}f = \frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^n}{dx^n}(a_k(x-x_0)^k).$

Démonstration.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k$ qui est effectivement une série de puissance.
$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)a_{k+1}}{(k+2)a_{k+2}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k+2}\right| \cdot \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right| = 1 \cdot \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = R.$

b),c) Soit $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$. Alors, $\exists 0 < r < R$ t.q. $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k)$ converge uniformément sur $[x_0 - r, x_0 + r]$.
De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ converge pour au moins un $a \in [x_0 - r, x_0 + r]$.
Du théorème, $\displaystyle f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$.
Donc, f' est continue et $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k)$.
Par récurrence, on obtient les résultats.

□

Corollaire.

Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = f$, *sur* $]x_0 - R, x_0 + R[$. *Alors,* $a_k = \dfrac{\left(\dfrac{d^k}{dx^k}f\right)(x_0)}{k!}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\infty} a_K(x-x_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^n}{dx^n}(a_k(x-x_0)^k) \\
&= \frac{d^n}{dx^n}(a_0) + \frac{d^n}{dx^n}(a_1(x-x_0)) + \cdots + \frac{d^n}{dx^n}(a_n(x-x_0)^n) + \frac{d^n}{dx^n}(a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}) + \cdots \\
&= 0 + 0 + \cdots + a_n(n)(n-1)\cdots(2)(1) + a^{n+1}(n+1)(n)(n-1)\ldots(3)(2)(x-x_0) + \cdots
\end{aligned}$$

Ainsi, $f^{(n)}(x_0) = 0 + \cdots + 0 + a_n \cdot n! + 0 + \cdots = a_n \cdot n!$, donc $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. □

Section 3.3 Séries de Taylor

Théorème.
Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *de classe* C^{n+1} *sur* A *et* $x_0 \in A$.
Alors, $(\forall x \in A)$, $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x_0, x)$, *où* $\displaystyle R_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt$.

Démonstration.
Base : Pour $n = 0$, la formule devient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + R_0(x_0, x) \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt
\end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0)$$

qui est le théorème fondamental du calcul.

Hyp : Supposons vrai pour n.

Pas : On a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x_0,x)$.

Or,

$$R_n(x_0,x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

posons $u = f^{(n+1)}(t)$, donc $du = f^{(n+2)}(t)dt$ et $dv = \frac{(x-t)^n}{n!}dt$, donc $v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\begin{aligned}
&= \left.\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + R_{n+1}(x_0,x)
\end{aligned}$$

Donc, $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x_0,x)$.

□

Théorème.

S'il existe $M > 0$ t.q. $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M^{n+1}$ pour tout $t \in [x_0,x]$, alors

$$R_n(x_0,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
|R_n(x_0,x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt\right| \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{n!}(x-t)^n dt \\
&\leqslant \frac{M^{n+1}}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt \\
&= \frac{M^{n+1}}{n!}\cdot \left.\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right|_{x_0}^{x} \\
&= \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\
&= \frac{(M(x-x_0))^{n+1}}{(n+1)!} \\
\text{Stirling : } n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad & \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

□

Corollaire.

Sous ces conditions, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, la série de Taylor de f autour de x_0.

Corollaire.

Si la série de puissance $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ a comme limite f, alors la série de puissance est la série de Taylor de f autour de x_0.

Exemple.

a) $\cos x$, avec $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{rcrcl} \cos x & : & \cos 0 & = & 0 \\ -\sin x & : & -\sin 0 & = & 0 \\ -\cos x & : & -\cos 0 & = & -1 \\ \sin x & : & \sin 0 & = & 0 \end{array}$$

Ainsi, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_n(0,x)$.

On a

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^k}{(2k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!}}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}|(2k+2)(2k+1)| \\ &= \infty \end{aligned}$$

On veut montrer que $R_n(0,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0, (\forall x \in \mathbb{R})$.

Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} R_n(0,x) &= \int_0^x \frac{\cos^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt \\ &\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt \\ &= \left.\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right|_0^x \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pour $x < 0$, $R_n(0,x) \geqslant \frac{-|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Donc, $|R_n(0,x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Donc, $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, avec $x_0 = 1$.

$$\begin{array}{rclcrcl} f(x) & = & \frac{1}{x} & : & f(1) & = & 1 \\ f'(x) & = & -x^{-2} & : & f'(1) & = & -1 \\ f''(x) & = & 2x^{-3} & : & f''(1) & = & 2 \\ f^{(3)}(x) & = & -6x^{-4} & : & f^{(3)}(1) & = & -6 \\ f^{(4)}(x) & = & 24x^{-5} & : & f^{(4)}(1) & = & 24 \\ f^{(n)}(x) & = & (-1)^n n! x^{-(n+1)} & & & & \end{array}$$

Donc, $f(x) = 1 - (x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^n(x-1)^n + \cdots + R_n(1,x)$.

On a

$$
\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Il y a donc convergence sur $]0,2[$.

$$
\begin{aligned}
|R_n(1,x)| &= \left|\int_1^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt\right| \\
&= \left|\int_1^x \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!t^{-(n+2)}}{n!}(x-t)^n dt\right| \\
&\leqslant \int_1^x \left|(n+1)t^{-(n+2)}\left|x-t\right|^n dt\right| \\
&\leqslant (n+1)\int_1^x |x-t|^n\, dt \\
&= |x-t|^{n+1}\Big|_1^x \\
&= |x-1|^{n+1} \\
\text{car } x\in]0,2[&\xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

Donc, $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k$.

Chapitre 4 Intégrales avec paramètres

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t^n\}(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \\
\mathscr{L}\{t^2\}(s) &= \frac{2}{s^3} \\
\mathscr{L}\{t^3\}(s) &= \frac{6}{s^4}
\end{aligned}$$

Section 4.1 Fonction Gamma

Définition.

$\Gamma(y) = \displaystyle\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt$, pour $y > 0$.

Proposition.

$\Gamma(y)$ *converge pour tout* $y > 0$.

Démonstration.

1. $y \geqslant 1$. On a donc $y - 1 \geqslant 0$ et c'est une intégrale impropre de première espèce.
   On utilise le test de comparaison limite.
   Posons $f(t) = t^{y-1}e^{-t}$ et $g(t) = e^{-\,t/2}$.
   On a

$$\begin{aligned}
C &= \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{y-1}e^{-t}}{e^{-\,t/2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{y-1}}{e^{t/2}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(y-1)t^{y-2}}{\frac{1}{2}e^{t/2}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(y-1)(y-2)t^{y-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{t/2}} \\
&\overset{H}{=} \cdots \\
&\overset{H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(y-1)(y-2)\cdots(y-k)}{\left(\frac{1}{2}^k e^{t/2}\right) t^{k-y}} && \text{avec } y-k<0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Or, $\displaystyle\int_0^\infty g(t)dt = \int_0^\infty e^{-t/2} dt = \cdots = 2$.
   Comme $\int g$ converge, on a $\int f$ converge.
   Donc, $\Gamma(y)$ converge si $y \geqslant 1$.

$\square$