MAT141 - Éléments d'algèbre
Donné par Jean-Philippe Burelle

Julien Houle

Automne 2025

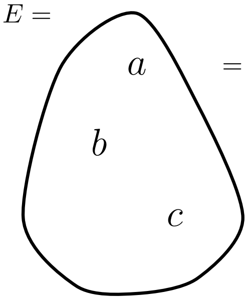
Table des matières

Chapitre 1 Ensembles

Cours 1

Idée: ensemble=patate

$E =$



$= \{a, b, c\}$

Notation. $E \subseteq F \Leftarrow \forall x \in E, x \in F$.

Remarque. $E \subseteq E$.

Notation. La cardinalité d'un ensemble, $|E|$, est le nombre d'éléments d'un ensemble.

Définition. Définition d'un ensemble par *compréhension*: $E = \{n \in \mathbb{Z} | 1 \leq n \leq 20\}$.

Notation. $E = F \Leftrightarrow E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

Définition. Produit cartésien: $E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}$.

Définition. Fonction/Application

$f : A \to B$, A et B des ensembles, associe à *chaque* $x \in A$ un *unique* élément $f(x) \in B$.

Cours 2

Rappel.

• Ensemble	collection d'objets
• $\in$	"élément" d'un ensemble
• *sous-ensemble* ($\subseteq$)	$E \subseteq F$ si $x \in E$ *implique* $x \in F$
• $E = F$	ssi $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$
• $\cup$	union
$\cap$	intersection
• $E \times F$	produit cartésien (paires (x, y))
• $f : E \to F$	*fonction* ou *application*, associe à $\underline{\text{chaque } x \in E}$ un unique $\underline{f(x)} \in F$, image de x par f
• $\mathbb{1}$	$\mathbb{1}_E : E \to E$ est définie comme $\mathbb{1}_E(x) = x$

Manières de définir une fonction

- énumérer $f(x)$ pour chaque $x \in E$
- donner une formule
  une formule ne définit pas tjrs une fonction, elle doit être valide pour chaque x de l'ensemble de départ.
- en mots (décrire la valeur pour chaque $x \in E$)
- mélange de formule et mots

Définition. Une fonction $f : E \to F$ est *inversible* s'il existe une fonction $\underbrace{g : F \to E}_{*}$ telle que $\underbrace{g(f(x)) = x}_{**}$ pour tout $x \in E$ et $\underbrace{f(g(y)) = y}_{***}$ pour tout $y \in F$.

Exemple. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$ est inversible d'inverse $g(y) = y - 1$

démo.
On vérifie que

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= x & \qquad g(f(x)) &= g(x+1) \\
& & &= (x+1) - 1 \\
& & &= x \\
f(g(y)) &= y & \qquad f(g(y)) &= f(y-1) \\
& & &= (y-1) + 1 \\
& & &= y
\end{aligned}
$$

□

Proposition. *Si f admet un inverse, celui-ci est unique.*

démo.
Supposons que g_1 et g_2 sont tous deux inverses de f et montrons qu'elles sont ĝales.
(Pour démontrer que deux fonctions sont égales, il suffit de montrer que $g_1(y) = g_2(y)$ pour tout $y \in F$)
Soit $y \in F$.
On a

$$
\begin{aligned}
g_1(y) &\overbrace{=}^{***} g_1(\underbrace{f(g_2(y))}_{*}) \\
&\overbrace{=}^{**} g_2(y)
\end{aligned}
$$

□

Définition. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors la composée de f et g est la fonction $g \circ f : E \to G$ définie par la formule $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Définition (Redéfinition de l'inverse)**.** $g \circ f = \mathbb{1}_E$
$f \circ g = \mathbb{1}_F$

Exemple. $A = \{a, b, c\}$
$B = \{d, e, f\}$
$f : A \to B$, $a \mapsto d, b \mapsto e, c \mapsto f$
$g : B \to A$, $d \mapsto a, e \mapsto b, f \mapsto c$
$g \circ f : A \to A$, $g \circ f(x) = x$, $g \circ f = \mathbb{1}_A$.
De la m̂ manière, $f \circ g = \mathbb{1}_B$.

Ainsi, g est l'inverse de f.

Notation. On note $g = f^{-1}$ l'inverse de f.

Rappel. Pour trouver l'inverse d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par une formule $f(x) = y$, on isole x en fonction de y.

Exemple.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x - 8 \\
y &= 3x - 8 \\
y + 8 &= 3x \\
\frac{y+8}{3} &= x \\
g(y) &= \frac{y+8}{3}
\end{aligned}
$$

Dans un devoir, on commence par la formule de l'inverse et on vérifie $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *injective* si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *surjective* si pour tout $y \in F$, $\exists\, x \in E$ t.q. $f(x) = y$.

Définition. On dit que $f : E \to F$ est une fonction *bijective* si elle est injective **et** surjective.

Exemple. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = |x|$
f n'est pas injective, car $f(1) = |1| = 1$ et $f(-1) = |-1| = 1$, mais $1 \neq -1$.
f est surjective, car soit $y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, alors pour $x = y$, on a $f(x) = f(y) = |y| = y$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

f est injective:
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$.
On suppose $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &= x_2 + 1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

f n'est pas surjective
$y = 0 \in \mathbb{N}$ n'est pas égal à $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$. Si il existait x avec $f(x) = 0$, $x + 1 = 0$, $x = -1$, $x \notin \mathbb{N}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 3$.
f est injective:
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
supposons $f(x_1) = f(x_2)$, $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$, $2x_1 = 2x_2$, $x_1 = x_2$.
f est surjective:
Soit $y \in \mathbb{R}$.
On cherche x t.q. $f(x) = y$.
Posons $x = \dfrac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$.
Alors, $f(x) = f\left(\dfrac{y-3}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{y-3}{2} + 3 = y - 3 + 3 = y$.
Ainsi, f est bijective.

$f : A \to B$, avec $A = \{1, 48, 57\}$ et $B = \{a, b, c\}$.
$1 \mapsto a$, $48 \mapsto a$, $57 \mapsto b$.
f n'est pas injective, car $1 \mapsto a$ et $48 \mapsto a$ avec $1 \neq 48$.
f n'est pas surjective, car aucun élément de $x \in A \mapsto c$.

Remarque. La fonction $f' : A \to B'$ avec $B' = \{a, b\}$ est surjective.

Cours 3

Rappel. A, B deux ensembles

- $f : A \to B$ une fonction, associe à chaque $x \in A$ un unique $f(x) \in B$. $x \mapsto f(x)$.
- f est *inversible* s'il existe $g : B \to A$ t.q. $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$ et $f(g(b)) = b$ pour tout $b \in B$.
- l'inverse est *unique*.
- La composition de $f : A \to B$ avec $g : B \to C$ est $g \circ f : A \to C$ avec $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- f est injective si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f est surjective si pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ t.q. $f(a) = b$.
- f est bijective si elle est injective et surjective.

Proposition. *$f : A \to B$ est bijective* ssi *elle est inversible.*

démo.

$\Leftarrow$:

Supposons que f est inversible.

Alors, il existe un inverse $g : B \to A$.

(inj): Soient $x_1, x_2 \in A$.

On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$.

Alors, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

Donc, $x_1 = x_2$

(surj): Soit $y \in B$.

Posons $x = g(y) \in A$.

Alors, $f(x) = f(g(y)) = y$.

$\Rightarrow$:

Supposons f est injective et surjective.

Lemme. *Pour* chaque $y \in B$, *il existe un* unique $x \in A$ *t.q.* $f(x) = y$.

démo.

Existance: Comme f est surjective, x existe.

Unicité: Supposons $x_1, x_2 \in A$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$. ■

On définit $g : B \to A$ par $g(y) = x$ où x est l'unique élément du lemme.

On vérifie:

Soit $x \in A$, alors $g(\underbrace{f(x)}_{y}) = x$, par définition de g.

Soit $y \in B$, alors $f(\underbrace{g(y)}_{\text{l'unique } x \text{ t.q. } f(x)=y}) = y$. □

Définition. Une *opération* (interne, binaire) sur un ensemble E est un fonction $m : E \times E \to E$.

Exemple. $E = \mathbb{Z}$,

$$m : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (n,m) & \longmapsto & n+m \end{array}$$

$$m : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (n,m) & \longmapsto & n \cdot m \end{array}$$

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

n'est pas une opération, car $(1,0) \mapsto \frac{1}{0}$ qui n'est pas défini. (d n'est pas une fonction.)

Cependant,

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_* \times \mathbb{Q}_* & \longrightarrow & \mathbb{Q}_* \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

est une opération.

A un ensemble

$E = \{f : A \to A\}$, où f est une fonction.

$$c : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (f,g) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

La composition est une opération.

Notation. On note la plupart du temps une opération par un symbole entre les entrées.

Exemple. $m(x,y) \coloneqq x * y$, ou $x + y$, ou $x \circ y$, ou xy

Définition.

Un *élément neutre* pour une opération $*$ est un élément $e \in E$ t.q. pour tout $x \in E$, $e * x = x$ et $x * e = x$.

Cours 4

Rappel.

- $f : E \to F$ est bijective $\Leftrightarrow$ f est inversible.
- L'inverse est unique ($g = f^{-1}$)
- Opération: $m : E \times E \to E$, ou $\begin{array}{rccc} * : & E \times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & z \end{array}$
- Élément neutre: $e \in E$ t.q. $e * x = x$ et $x * e = x$.
- f est injective si tout $y \in F$ a au plus un antécédent
- f est surjective si tout $y \in F$ a au moins un antécédent
- f est bijective si tout $y \in F$ a exactement un antécédent
- x est antécédent de y si $f(x) = y$

Exemple. Sur $\mathbb{N}$,

- 0 est neutre pour $+$.

$$0 + n = n$$
$$n + 0 = n$$

- 1 est neutre pour $\times$.

$$1 \times n = n$$
$$n \times 1 = n$$

Sur $\mathbb{Z}$, $-$ est une opération mais elle n'a pas délément neutre.

En effet,
Supposons que $e \in \mathbb{Z}$ est neutre, alors $e - n = n$ pour tout n.
Pour $n = 0$, $e - 0 = 0$, donc $e = 0$.
Pour $n = 1$, $e - 1 = 1$, donc $-1 = 1$. $\lightning$

- Sur l'ensemble $E = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, la multiplication matricielle $\times$ est une opération.

  La matrice $I = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ est neutre pour $\times$.

- Sur $E = \{f : A \to A\}$, la fonction $\mathbb{1}_A$ est neutre pour la composition de fonctions.

  démonstration.
  On doit montrer $\mathbb{1}_A \circ f = f$ et $f \circ \mathbb{1}_A = f$ pour tout $f \in E$.

  (1) Soit $x \in A$, alors

  $$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A \circ f)(x) &= \mathbb{1}_A(f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Donc, $\mathbb{1}_A \circ f = f$.

  (2) Soit $x \in A$, alors

  $$\begin{aligned} (f \circ \mathbb{1}_A)(x) &= f(\mathbb{1}_A(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Donc,$f \circ \mathbb{1}_A = f$.

$\square$

On peut décrire une opération sur un ensemble fini avec sa table “de multiplication”.

Exemple. $A = \{0, 1\}$

$f_1 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}, f_2 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}, f_3 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}, f_4 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$ On a $f_2 = \mathbb{1}_A$.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_4	f_3	f_2	f_1
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

Définition.

Une opération $*$ sur E est *associative* si pour tout $x, y, z \in E$, on a $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Proposition.

Si $*$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.

démonstration.

Supposons que e et e' sont neutres pour $*$.

On a

$$\begin{aligned} e * e' &= e' && \text{car } e \text{ est neutre} \\ e * e' &= e && \text{car } e' \text{ est neutre} \end{aligned}$$

Donc, $e = e'$. □

Définition.

Soit E un ensemble, $*$ une opération sur E et $e \in E$ un neutre pour $*$. On dit que $a, b \in E$ sont *inverses* si $a * b = e$ et $b * a = e$.

Dans ce cas, on dit que a et b sont inversibles.

Exemple.

Dans $\mathbb{Z}$ avec $+$, 3 et -3 sont inverses. En effet, on a $3 + (-3) = 0$ et $(-3) = 3 = 0$ avec 0 l'élément neutre de $+$.

Exemple.

Dans $\mathbb{Z}$ avec $\times$, le neutre est 1, mais seuls 1 et -1 sont inversibles. En effet, on a $1 \times 1 = 1$ et $(-1) \times (-1) = 1$.

Remarque.

L'élément neutre est son propre inverse. En effet, $e * e = e$, pour tout $*$ qui admet e comme élément neutre.

Proposition.

Si $*$ est associative et admet un élément neutre e, alors les inverses sont uniques s'ils existent.

démonstration.

Soit $a \in E$.

Supposons b, b' sont inverses de a.

Alors,

$$\begin{aligned} b &= b * e \\ &= b * (a * b') && \text{car } b' \text{ est inverse de } a \\ &= (b * a) * b' && \text{associativité} \\ &= e * b' && \text{car } b \text{ est inverse de } a \\ &= b' \end{aligned}$$

□

Notation.

Comme l'inverse de a est unique, on le note a^{-1}.

Exemple.

Dans $E = \{f : A \to A\}$, avec l'opération $\circ$, les fonctions bijectives sont exactement celles qui sont inversibles pour $\circ$.

Proposition.

La composition de fonctions est associative.

démonstration.

Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$.

Soit $a \in A$.

$$\begin{aligned}
((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\
&= h(g(f(a))) \\
&= h((g \circ f)(a)) \\
&= (h \circ (g \circ f))(a) \\
(h \circ g) \circ f &= h \circ (g \circ f)
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 6 Groupes

Définition.
Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération $*$ t.q.

(A) $*$ est associative

(N) $*$ admet un neutre

(I) tout $g \in G$ admet un inverse

Exemple.

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
Neutre: 0
Inverse de n: $-n$

(2) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes.

(3) $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe, car, par exemple, 2 n'est pas inversible.

(4) $(\mathbb{Q}, \times)$ n'est pas un groupe, car 0 n'est pas inversible.

(5) $(\mathbb{Q}_*, \times)$ et $(\mathbb{R}, \times)$ sont des groupes.
Neutre: 1
Inverse de x: $\frac{1}{x}$

Remarque.
(1), (2) et (5) sont *commutatifs.*

Remarque.
$(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.

Définition.
Si l'opération d'un groupe est commutative, on note le groupe comme *abélien* (ou commutatif).

1. $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.
   $GL(n, \mathbb{R}) = \{M | M$ est une matrice $n \times n$ réelle inversible$\}$.
   GL: général linéaire
   Neutre: $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
   M^{-1} la matrice inverse est l'inverse.
   Pour $n \geq 2$, $GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas abélien.

2. A un ensemble quelconque
   $S(A) = \{f : A \to A | f$ est bijective$\}$ est un groupe pour $\circ$.
   Neutre: $\mathbb{1}_A$
   Inverse de f: f^{-1}

Remarque.

Pour $A = \{0,1\}$

$f_1 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}, f_2 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}, f_3 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}, f_4 : \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}, S(A) = \{f_2, f_3\}.$

Cours 5

Rappel.

- Groupe: $(G, *)$

  G ensemble

  $*$ opération sur G

  (A) $*$ est associative
  $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$

  (N) $*$ admet un élément neutre dans G
  $\exists e \in G$ t.q. $\forall a \in G, e * a = a = a * e$

  (I) tout élément de G est inversible
  $\forall a \in G, \exists b \in G$ t.q. $a * b = e = b * a$

- Le neutre et l'inverse sont uniques

Remarque.

"Le groupe $\mathbb{R}$" implique l'opération $+$ et "le groupe $\mathbb{R}_*$" implique l'opération $\times$.

Propriétés élémentaires des groupes

(a) $\forall a, b \in G$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(b) $\forall a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$

(c) Si $a * b = a * c$, alors $b = c$

(d) Si $b * a = c * a$, alors $b = c$

démonstration.

(a) On calcule

$$\begin{aligned}(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * (b^{-1} * a^{-1})) \\ &= a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) \\ &= a * (e * a^{-1}) \\ &= a * a^{-1} \\ &= e\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * (a^{-1} * (a * b)) \\ &= b^{-1} * ((a^{-1} * a) * b) \\ &= b^{-1} * (e * b) \\ &= b^{-1} * b \\ &= e\end{aligned}$$

Donc, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(b) Comme $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$, a est l'inverse de a^{-1}, donc $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

(c) Supposons $a * b = a * c$. Alors

$$\begin{aligned}a^{-1} * (a * b) &= a^{-1} * (a * c) \\ (a^{-1} * a) * b &= (a^{-1} * a) * c \\ e * b &= e * c \\ b &= c\end{aligned}$$

(d) Supposons $b * a = c * a$. Alors

$$\begin{aligned}(b * a) * a^{-1} &= (c * a) * a^{-1} \\ b * (a * a^{-1}) &= c * (a * a^{-1}) \\ b * e &= c * e \\ b &= c\end{aligned}$$

$\square$

Exemple.
$(\mathbb{Z}_3, +)$.
$\mathbb{Z}_3 = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\right\}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$+$ est associative.
$\overline{0}$ est l'élément neutre.
$(\overline{1})^{-1} = \overline{2}$.
$(\overline{2})^{-1} = \overline{1}$.
$(\mathbb{Z}_3, +)$ est un groupe abélien.

Remarque. La symétrie de la table par rapport à la diagonale implique la commutativité.

Exemple.
$(\mathbb{D}_3, \circ)$ - groupe dihédral d'ordre 3.
Groupe des symétries d'un triangle équilatéral.
$\mathbb{D}_3 = \left\{ \underset{\text{identité}}{\varepsilon}, \underset{\text{réflexion par rapport à la verticale}}{\alpha}, \underset{\text{réflexion par rapport à /}}{\beta}, \underset{\text{réflexion par rapport à \textbackslash}}{\gamma}, \underset{\text{rotation de 120°}}{\rho}, \underset{\text{rotation de -120°}}{\sigma} \right\}$.

$\circ$	ε	α	β	γ	ρ	σ
ε	ε	α	β	γ	ρ	σ
α	α	ε	ρ	σ	β	γ
β	β	σ	ε	ρ	γ	α
γ	γ	ρ	σ	ε	α	β
ρ	ρ	γ	α	β	σ	ε
σ	σ	β	γ	α	ε	ρ

$(\mathbb{D}_3, \circ)$ n'est pas un groupe abélien.

Cours 6

Rappel.

- Groupe: $(G, *)$ avec A, N, I.
  Abélien: C.
- $$\begin{aligned}a * b &= a * c && \Rightarrow b = c \\ b * a &= c * a && \Rightarrow b = c \\ (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1}\end{aligned}$$

- *Exemple.*
  $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q}_*,\times),(\mathbb{R}_*,\times)$ abéliens, $\mathbb{Z}_3,\mathbb{D}_3,GL(n,\mathbb{R})$.
  $S(E)=\{f:E\to E \mid f \text{ est bijective}\}$.
  Remarque. E n'est pas l'ensemble utilisé dans la définition du groupe.

Produit cartésien de groupes

$(G,*)$ et $(H,\diamond)$ deux groupes.

Proposition.
$G\times H$ est un groupe lorsque muni de l'opération $(a,b)\bullet(a',b')=(a*a',b\diamond b')$, avec $a,a'\in G$ et $b,b'\in H$.

démonstration.

(N) $e\in G$ le neutre et $e'\in H$ le neutre, alors $(e,e')\in G\times H$

$$\begin{aligned}(a,b)\bullet(e,e')&=(a*e,b\diamond e')\\&=(a,b)\\(e,e')\bullet(a,b)&=(e*a,e'\diamond b)\\&=(a,b)\end{aligned}$$

(e,e') est bien neutre.

(I) $(a,b)\in G\times H$, alors (a^{-1},b^{-1}) est inverse de (a,b).
exercice

(A) exercice

□

Exemple. • $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$
$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$.

- $(\mathbb{Z}_2,+)$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

$+$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$
$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$
$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$

Isomorphismes de groupes

Définition. $(G,*)$ et $(H,\diamond)$ deux groupes.
Un *isomorphisme* de G vers H est une application $f : G \to H$ t.q.

1. $\forall a, b \in G,\ f(a*b) = f(a) \diamond f(b)$.
   Préservation des opérations
2. f est bijective.

Exemple.

- $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_*^+, \times)$
  $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

  (1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= e^{x+y} \\ &= e^x \times e^y \\ &= f(x) \times f(y) \end{aligned}$$

  (2) $\ln : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ est inverse de f: $\ln e^x = x \forall x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln x} = x \forall x \in \mathbb{R}_*^+$.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(e_G) = e_H$, où e_G est l'élément neutre de G et e_H est l'élément neutre de H.*

démonstration. Stratégie: montrer que $f(e_G)$ est neutre pour H et utiliser l'unicité.
Soit $b \in H$.
Comme f est bijective, $\exists a \in G$ t.q. $f(a) = b$

$$\begin{aligned} f(e_G) \diamond b &= f(e_G) \diamond f(a) \\ &= f(e_G * a) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} b \diamond f(e_G) &= f(a) \diamond f(e_G) \\ &= f(a * e_G) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned}$$

On a donc que $f(e_G) \in H$ est neutre pour $\diamond$, mais comme l'élément neutre est unique, $f(e_G) = e_H$. $\square$

Exemple. Pour $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$, $f(0) = e^0 = 1$.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme de groupes, alors $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, pour tout $a \in G$.*

démonstration. Stratégie: montrer que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$ et utiliser l'unicité.

$$\begin{aligned} f(a^{-1}) \diamond f(a) &= f(a^{-1} * a) \\ &= f(e_G) \\ &= e_H \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f(a) \diamond f(a^{-1}) &= f(a * a^{-1}) \\ &= f(e_G) \\ &= e_H \end{aligned}$$

On a donc que $f(a^{-1})$ est inverse de $f(a)$, mais comme l'inverse est unique, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. $\square$

Exemple. Pour $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$, $f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} = f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$, où $-x$ est l'inverse de x pour $+$ et $\frac{1}{f(x)}$ est l'inverse de $f(x)$ pour $\times$.

Remarque. Si G, H sont des groupes finis et f est un isomorphisme, alors f "envoie la table de G à celle de H".

$$G : \begin{array}{c||c|c|c|c}
* & e_G & a_1 & a_2 & \cdots \\ \hline\hline
e_G & & & & \\ \hline
a_1 & & & a_1 * a_2 & \\ \hline
a_2 & & & & \\ \hline
\vdots & & & &
\end{array}
\xrightarrow{f}
\begin{array}{c||c|c|c|c}
* & e_H & f(a_1) & f(a_2) & \cdots \\ \hline\hline
f(e_G) & & & & \\ \hline
f(a_1) & & & f(a_1) \diamond f(a_2) & \\ \hline
f(a_2) & & & & \\ \hline
\vdots & & & &
\end{array} : H$$

Avec $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \diamond f(a_2)$.

Exemple.

$$\mathbb{Z}_2 : \begin{array}{c||c|c}
+ & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline\hline
\overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline
\overline{1} & \overline{1} & \overline{0}
\end{array}
\qquad
H : \begin{array}{c||c|c}
\circ & \varepsilon & \alpha \\ \hline\hline
\varepsilon & \varepsilon & \alpha \\ \hline
\alpha & \alpha & \varepsilon
\end{array}
\qquad
C_2 : \begin{array}{c||c|c}
\times & 1 & -1 \\ \hline\hline
1 & 1 & -1 \\ \hline
-1 & -1 & 1
\end{array}$$

$\mathbb{Z}_2$, H et C_2 sont isomorphes.

Il existe un isomorphisme entre chaque paire.

Proposition. *Si $f : G \to H$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : H \to G$ est un isomorphisme.*

démonstration.

(1) Soient $b_1, b_2 \in H$.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(b_1 \diamond b_2) &= f^{-1}(f(f^{-1}(b_1)) \diamond f(f^{-1}(b_2))) \\
&= f^{-1}(f(f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2))) \\
&= f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2)
\end{aligned}$$

(2) f^{-1} est bijective, car elle est inversible d'inverse f.

$$\begin{aligned}
f \circ f^{-1} &= \mathbb{1}_H \\
f^{-1} \circ f &= \mathbb{1}_G
\end{aligned}$$

□

Proposition (Transitivité)**.**

Si $f : G \to H$ et $g : H \to K$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : G \to K$ est un isomorphisme.

démonstration.

(1) Soient $a, b \in G$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(a * b) &= g(f(a * b)) \\
&= g(f(a) \diamond f(b)) \\
&= g(f(a)) \oplus g(f(b)) \\
&= (g \circ f)(a) \oplus (g \circ f)(b)
\end{aligned}$$

(2) $g \circ f$ est inversible d'inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Puissances d'éléments de groupes

Définition (par récurrence)**.**
$a \in G$, $n \in \mathbb{N}$

1. $a^0 \coloneqq e_G$
2. $a^n = a * a^{n-1}$, $\forall n \geq 1$

Exemple.

- $$\begin{aligned} a^4 &= a * a^3 \\ &= a * a * a * 2 \\ &= a * a * a * a^1 \\ &= a * a * a * a * a^0 \\ &= a * a * a * a * e \\ &= a * a * a * a \end{aligned}$$
- Dans $(\mathbb{Z}, +)$, $2^3 = 3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

démonstration par récurrence sur n.

1. $n = 0$:
$$\begin{aligned} a^{0+m} &= a^m \\ &= e * a^m \\ &= a^0 * a^m \end{aligned}$$
2. supposons que $a^{n+m} = a^n * a^m$ pour un $n \geq 0$.
$$\begin{aligned} a^{(n+1)+m} &= a^{n+m+1} \\ &= a * a^{n+m} \\ \text{hyp rec} &= a * (a^n * a^m) \\ &= (a * a^n) * a^m \\ &= a^{n+1} * a^m \end{aligned}$$

□

Définition. Pour $n \in \mathbb{Z}$.
Si $n \geq 0$, on a déjà défini a^n.
Si $n < 0$, on définit $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

Exemple. $a^{-3} = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1}$.

Proposition. $a^{n+m} = a^n * a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Proposition. $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. *Vraie aussi pour* $m, n \in \mathbb{Z}$.

démonstration par récurrence sur m.

1. $m = 0$:
$$\begin{aligned} (a^n)^0 &= e \\ a^{n \cdot 0} &= a^0 = e \end{aligned}$$

2. supposons que $(a^n)^m = a^{nm}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (a^n)^{m+1} &= (a^n)(a^n)^m \\ \text{hyp rec} &= (a^n)a^{nm} \\ &= a^{n+nm} \\ &= a^{n(m+1)} \end{aligned}$$

$\square$

Cours 7

Rappel.

- Isomorphisme: $f : G \to H$ t.q.
  (1) $f(ab) = f(a)f(b)$
  avec $a * b$ et $f(a) \diamond f(b)$ implicitement.
  (2) f est bijective

  "même table"
- f, g isomorphismes $\Rightarrow f^{-1}, g \circ f$ isomorphismes.
  $\mathbb{1}_G : G \to G$ est trivialement un isomorphisme.
- G est isomorphe à H s'il existe un isomorphisme $f : G \to H$.
- Puissances:
  Soit $a \in G$ avec G un groupe.
  - $a^0 = e$
  - $a^{n+1} = aa^n$
  - $a^{-n} = (a^{-1})^n$
  - $a^{n+m} = a^n a^m$
  - $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- f isomorphisme
  - $f(e_G) = e_H$
  - $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Proposition. *f isomorphisme $f : G \to H$.*
$a \in G$. Alors, $f(a^n) = f(a)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

démonstration par récurrence sur n.

$n \geq 0$ 1. $n = 0$

$$\begin{aligned} f(a^0) &= f(e_G) \\ &= e_H \\ &= f(a)^0 \end{aligned}$$

2. supposons que $f(a^n) = f(a)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(a^{n+1}) &= f(a \cdot a^n) \\ &= f(a)f(a^n) \\ \text{hyp rec} &= f(a)f(a)^n \\ &= f(a)^{n+1} \end{aligned}$$

$n < 0$ alors, $-n > 0$ et

$$\begin{aligned} f(a^n) &= f((a^{-1})^{-n}) \\ &= f(a^{-1})^{-n} \\ &= (f(a)^{-1})^{-n} \\ &= f(a)^n \end{aligned}$$

□

Exemple. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, avec la multiplication de matrices.

Soient $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

(A): associatif, car la multiplication de matrices est associative.

(N): $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ est neutre

(I): l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, H est un groupe pour la multiplication matricielle.

On définit $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to H \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $f(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y)$

(2) *montrons que.* f est bijective.

- f est injective
  Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
  Supposons $f(x) = f(y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$x = y$$

- f est surjective
  Soit $Y = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, avec $y \in \mathbb{R}$.
  $Y = f(y)$.

□

Sous-groupes

Définition. $H \subseteq (G, *)$ est un *sous-groupe* de G si H est un groupe pour la même opération que G.

Exemple.

- $\{e\} \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $G \subseteq G$ est un sous-groupe.
- $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} = 2\mathbb{Z} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$

- Dans $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, $\{\overline{0}, \overline{2}\}$ est un sous-groupe.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$

  Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$ et à $C_2 = (\{-1, 1\}, \times)$.

- $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +) \subseteq (\mathbb{R}, +)$.
- $C_2 \subseteq \mathbb{Q}_* \subseteq \mathbb{R}_*$.
- $\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$.
  $\{\varepsilon, \alpha\}$ et $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{D}_3$.

Notation. On note l'ensemble $m\mathbb{Z} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.