

MAT141 - Éléments d'algèbre  
Donné par Jean-Philippe Burelle

Julien Houle

Automne 2025

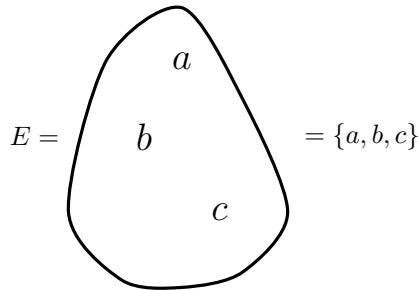
# Table des matières

<b>1</b>	<b>Ensembles</b>	<b>1</b>
	Manières de définir une fonction . . . . .	1
<b>6</b>	<b>Groupes</b>	<b>8</b>
	Propriétés élémentaires des groupes . . . . .	9
	Produit cartésien de groupes . . . . .	10
	Isomorphismes de groupes . . . . .	11
	Puissances d'éléments de groupes . . . . .	13
	Sous-groupes . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Applications et équivalences</b>	<b>19</b>
	2.4 Relations d'équivalence . . . . .	19
	Ordre et groupes cycliques . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Groupes (suite)</b>	<b>24</b>
	6.13 Groupes symétriques $S_n$ . . . . .	24
<b>8</b>	<b>Homomorphismes</b>	<b>29</b>
	Équivalence modulo $H$ et théorème de Lagrange . . . . .	31
	8.6 Groupes quotients . . . . .	34
	Groupes monogènes . . . . .	41
	8.3 Théorème de Cayley . . . . .	42
	<b>Actions de groupes</b>	<b>44</b>
	Lemme de Burnside . . . . .	53
	<b>Compléments/rappels</b>	<b>57</b>

# Chapitre 1 Ensembles

## Cours 1

Idée : ensemble = patate.



Notation.  $E \subseteq F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F$ .

Remarque.  $E \subseteq E$ .

Notation. La cardinalité d'un ensemble,  $|E|$ , est le nombre d'éléments d'un ensemble.

**Définition.** Définition d'un ensemble par *compréhension*

Exemple.  $E = \{n \in \mathbb{Z} | 1 \leq n \leq 20\}$ .

Notation.  $E = F \Leftrightarrow E \subseteq F$  et  $F \subseteq E$ .

**Définition.** Produit cartésien :  $E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}$ .

**Définition.** Fonction/Application

$f : A \rightarrow B$ ,  $A$  et  $B$  des ensembles, associe à *chaque*  $x \in A$  un *unique* élément  $f(x) \in B$ .

## Cours 2

Rappel.

- Ensemble collection d'objets
- $\in$  “élément” d'un ensemble
- sous-ensemble ( $\subseteq$ )  $E \subseteq F$  si  $x \in E$  implique  $x \in F$
- $E = F$  si, et seulement si,  $E \subseteq F$  et  $F \subseteq E$
- $\cup$  union
- $\cap$  intersection
- $E \times F$  produit cartésien (paires  $(x, y)$ )
- $f : E \rightarrow F$  fonction ou application, associe à chaque  $x \in E$  un unique  $f(x) \in F$ , image de  $x$  par  $f$
- $\mathbf{1}_E$  :  $E \rightarrow E$  est définie comme  $\mathbf{1}_E(x) = x$

## Manières de définir une fonction

- énumérer  $f(x)$  pour chaque  $x \in E$
- donner une formule  
une formule ne définit pas toujours une fonction, elle doit être valide pour chaque  $x$  de l'ensemble de départ.
- en mots (décrire la valeur pour chaque  $x \in E$ )

- mélange de formule et mots

**Définition.** Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est *inversible* s'il existe une fonction  $\underbrace{g : F \rightarrow E}_{*}$  telle que  $\underbrace{g(f(x)) = x}_{**}$  pour tout  $x \in E$  et  $\underbrace{f(g(y)) = y}_{***}$  pour tout  $y \in F$ .

*Exemple.*  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = x + 1$  est inversible d'inverse  $g(y) = y - 1$

*Démonstration.*

On vérifie que

$$\begin{array}{ll} g(f(x)) = x & g(f(x)) = g(x + 1) \\ &= (x + 1) - 1 \\ &= x \\ f(g(y)) = y & f(g(y)) = f(y - 1) \\ &= (y - 1) + 1 \\ &= y \end{array}$$

□

**Proposition.** Si  $f$  admet un inverse, celui-ci est unique.

*Démonstration.*

Supposons que  $g_1$  et  $g_2$  sont tous deux inverses de  $f$  et montrons qu'elles sont égales.

(Pour démontrer que deux fonctions sont égales, il suffit de montrer que  $g_1(y) = g_2(y)$  pour tout  $y \in F$ )

Soit  $y \in F$ .

On a

$$\begin{aligned} g_1(y) &\stackrel{***}{=} g_1(\underbrace{f(g_2(y))}_{*}) \\ &\stackrel{**}{=} g_2(y) \end{aligned}$$

□

**Définition.** Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ , alors la *composée* de  $f$  et  $g$  est la fonction  $g \circ f : E \rightarrow G$  définie par la formule  $g \circ f(x) = g(f(x))$ .

**Définition** (Redéfinition de l'inverse).

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathbf{1}_E \\ f \circ g &= \mathbf{1}_F \end{aligned}$$

*Exemple.*

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{d, e, f\}$$

$$f : A \rightarrow B, a \mapsto d, b \mapsto e, c \mapsto f$$

$$g : B \rightarrow A, d \mapsto a, e \mapsto b, f \mapsto c$$

$$g \circ f : A \rightarrow A, g \circ f(x) = x, g \circ f = \mathbf{1}_A.$$

De la même manière,  $f \circ g = \mathbf{1}_B$ .

Ainsi,  $g$  est l'inverse de  $f$ .

*Notation.* On note  $g = f^{-1}$  l'inverse de  $f$ .

*Rappel.* Pour trouver l'inverse d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par une formule  $f(x) = y$ , on isole  $x$  en fonction de  $y$ .

*Exemple.*

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 8 \\ y &= 3x - 8 \\ y + 8 &= 3x \\ \frac{y + 8}{3} &= x \\ g(y) &= \frac{y + 8}{3} \end{aligned}$$

Dans un devoir, on commence par la formule de l'inverse et on vérifie  $g(f(x)) = x$  et  $f(g(y)) = y$ .

**Définition.** On dit que  $f : E \rightarrow F$  est une fonction *injective* si  $f(x_1) = f(x_2)$  implique  $x_1 = x_2$ .

**Définition.** On dit que  $f : E \rightarrow F$  est une fonction *surjective* si pour tout  $y \in F$ ,  $\exists x \in E$  t.q.  $f(x) = y$ .

**Définition.** On dit que  $f : E \rightarrow F$  est une fonction *bijective* si elle est injective **et** surjective.

*Exemple.*

•

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, f(x) = |x|$$

$f$  n'est pas injective, car  $f(1) = |1| = 1$  et  $f(-1) = |-1| = 1$ , mais  $1 \neq -1$ .

$f$  est surjective, car soit  $y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ , alors pour  $x = y$ , on a  $f(x) = f(y) = |y| = y$ .

•

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ & x & \mapsto x + 1 \end{array}$$

$f$  est injective :

Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ .

On suppose  $f(x_1) = f(x_2)$ .

$$x_1 + 1 = x_2 + 1$$

$$x_1 = x_2$$

$f$  n'est pas surjective

$y = 0 \in \mathbb{N}$  n'est pas égal à  $f(x)$  pour  $x \in \mathbb{N}$ . Si il existait  $x$  avec  $f(x) = 0$ ,  $x + 1 = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x \notin \mathbb{N}$ .

•

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto 2x + 3 \end{array}$$

$f$  est injective :

Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

supposons  $f(x_1) = f(x_2)$ ,  $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$ ,  $2x_1 = 2x_2$ ,  $x_1 = x_2$ .

$f$  est surjective :

Soit  $y \in \mathbb{R}$ .

On cherche  $x$  t.q.  $f(x) = y$ .

Posons  $x = \frac{y - 3}{2} \in \mathbb{R}$ .

Alors,  $f(x) = f\left(\frac{y - 3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y - 3}{2} + 3 = y - 3 + 3 = y$ .

Ainsi,  $f$  est bijective.

•

$$f : A \rightarrow B; A = \{1, 48, 57\}, B = \{a, b, c\}$$

$$1 \mapsto a, 48 \mapsto a, 57 \mapsto b$$

$f$  n'est pas injective, car  $1 \mapsto a$  et  $48 \mapsto a$  avec  $1 \neq 48$ .

$f$  n'est pas surjective, car aucun élément de  $x \in A$  mappe  $c$ .

*Remarque.* La fonction  $f' : A \rightarrow B'$  avec  $B' = \{a, b\}$  est surjective.

## Cours 3

*Rappel.*  $A, B$  deux ensembles

- $f : A \rightarrow B$  une fonction, associe à chaque  $x \in A$  un unique  $f(x) \in B$ .  $x \mapsto f(x)$ .
- $f$  est *inversible* s'il existe  $g : B \rightarrow A$  t.q.  $g(f(a)) = a$  pour tout  $a \in A$  et  $f(g(b)) = b$  pour tout  $b \in B$ .
- l'inverse est *unique*.
- La composition de  $f : A \rightarrow B$  avec  $g : B \rightarrow C$  est  $g \circ f : A \rightarrow C$  avec  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ .
- $f$  est injective si  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .
- $f$  est surjective si pour tout  $b \in B$  il existe  $a \in A$  t.q.  $f(a) = b$ .
- $f$  est bijective si elle est injective et surjective.

**Proposition.**  $f : A \rightarrow B$  est bijective si, et seulement si, elle est inversible.

*Démonstration.*

$\Leftarrow :$

Supposons que  $f$  est inversible.

Alors, il existe un inverse  $g : B \rightarrow A$ .

(inj) :

Soient  $x_1, x_2 \in A$ .

On suppose que  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Alors,  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ .

Donc,  $x_1 = x_2$ .

(surj) :

Soit  $y \in B$ .

Posons  $x = g(y) \in A$ .

Alors,  $f(x) = f(g(y)) = y$ .

Ainsi,  $f$  est bijective.

$\Rightarrow :$

Supposons  $f$  est injective et surjective.

**Lemme.** Pour chaque  $y \in B$ , il existe un unique  $x \in A$  t.q.  $f(x) = y$ .

*Démonstration.*

Existance : Comme  $f$  est surjective,  $x$  existe.

Unicité : Supposons  $x_1, x_2 \in A$  t.q.  $f(x_1) = f(x_2)$ , alors  $x_1 = x_2$  puisque  $f$  est injective. ■

On définit  $g : B \rightarrow A$  par  $g(y) = x$  où  $x$  est l'unique élément du lemme.

On vérifie :

Soit  $x \in A$ , alors  $\underbrace{g(f(x))}_y = x$ , par définition de  $g$ .

Soit  $y \in B$ , alors  $f(\underbrace{g(y)}_{\text{l'unique } x \text{ t.q. } f(x) = y}) = y$ .

□

□

**Définition.** Une *opération* (interne, binaire) sur un ensemble  $E$  est un fonction  $m : E \times E \rightarrow E$ .

*Exemple.*  $E = \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (n, m) &\longmapsto n + m \\ \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (n, m) &\longmapsto n \cdot m \\ d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

n'est pas une opération, car  $(1, 0) \mapsto \frac{1}{0}$  qui n'est pas défini. ( $d$  n'est pas une fonction.)

Cependant,

$$\begin{aligned} d : \mathbb{Q}_* \times \mathbb{Q}_* &\longrightarrow \mathbb{Q}_* \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

est une opération.

$A$  un ensemble

$E = \{f : A \rightarrow A\}$ , où  $f$  est une fonction.

$$\begin{aligned} c : E \times E &\longrightarrow E \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

La composition est une opération.

*Notation.* On note la plupart du temps une opération par un symbole entre les entrées.

*Exemple.*  $m(x, y) := x * y$ , ou  $x + y$ , ou  $x \circ y$ , ou  $xy$ .

### Définition.

Un élément neutre pour une opération  $*$  est un élément  $e \in E$  t.q. pour tout  $x \in E$ ,  $e * x = x$  et  $x * e = x$ .

## Cours 4

*Rappel.*

- $f : E \rightarrow F$  est bijective  $\Leftrightarrow f$  est inversible.
- L'inverse est unique ( $g = f^{-1}$ )
- Opération :  $m : E \times E \rightarrow E$ , ou  $* : E \times E \rightarrow E$   

$$(x, y) \mapsto z$$
- Élément neutre :  $e \in E$  t.q.  $e * x = x$  et  $x * e = x$ .
- $f$  est injective si tout  $y \in F$  a au plus un antécédent
- $f$  est surjective si tout  $y \in F$  a au moins un antécédent
- $f$  est bijective si tout  $y \in F$  a exactement un antécédent
- $x$  est antécédent de  $y$  si  $f(x) = y$

*Exemple.*

Sur  $\mathbb{N}$ ,

- 0 est neutre pour  $+$ .

$$\begin{aligned} 0 + n &= n \\ n + 0 &= n \end{aligned}$$

- 1 est neutre pour  $\times$ .

$$\begin{aligned} 1 \times n &= n \\ n \times 1 &= n \end{aligned}$$

Sur  $\mathbb{Z}$ ,  $-$  est une opération mais elle n'a pas d'élément neutre.

*En effet,*

Supposons que  $e \in \mathbb{Z}$  est neutre, alors  $e - n = n$  pour tout  $n$ .

Pour  $n = 0$ ,  $e - 0 = 0$ , donc  $e = 0$ .

Pour  $n = 1$ ,  $e - 1 = 1$ , donc  $-1 = 1$ .

- Sur l'ensemble  $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ , la multiplication matricielle  $\times$  est une opération.  
La matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est neutre pour  $\times$ .
- Sur  $E = \{f : A \rightarrow A\}$ , la fonction  $\mathbb{1}_A$  est neutre pour la composition de fonctions.

*Démonstration.*

On doit montrer  $\mathbb{1}_A \circ f = f$  et  $f \circ \mathbb{1}_A = f$  pour tout  $f \in E$ .

(1) Soit  $x \in A$ , alors

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A \circ f)(x) &= \mathbb{1}_A(f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc,  $\mathbb{1}_A \circ f = f$ .

(2) Soit  $x \in A$ , alors

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbb{1}_A)(x) &= f(\mathbb{1}_A(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc,  $f \circ \mathbb{1}_A = f$ .

□

On peut décrire une opération sur un ensemble fini avec sa table “de multiplication”.

*Exemple.*  $A = \{0, 1\}$

$f_1 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_2 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, f_3 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_4 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}$  On a  $f_2 = \mathbb{1}_A$ .

○	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_1$	$f_1$	$f_1$	$f_1$	$f_1$
$f_2$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_3$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$
$f_4$	$f_4$	$f_4$	$f_4$	$f_4$

**Définition.**

Une opération  $*$  sur  $E$  est *associative* si pour tout  $x, y, z \in E$ , on a  $(x * y) * z = x * (y * z)$ .

**Proposition.**

*Si  $*$  admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.*

*Démonstration.*

Supposons que  $e$  et  $e'$  sont neutres pour  $*$ .

On a

$$\begin{aligned} e * e' &= e' && \text{car } e \text{ est neutre} \\ e * e' &= e && \text{car } e' \text{ est neutre} \end{aligned}$$

Donc,  $e = e'$ .

□

**Définition.**

Soit  $E$  un ensemble,  $*$  une opération sur  $E$  et  $e \in E$  un neutre pour  $*$ . On dit que  $a, b \in E$  sont *inverses* si  $a * b = e$  et  $b * a = e$ .

Dans ce cas, on dit que  $a$  et  $b$  sont inversibles.

*Exemple.*

Dans  $\mathbb{Z}$  avec  $+$ , 3 et  $-3$  sont inverses. En effet, on a  $3 + (-3) = 0$  et  $(-3) + 3 = 0$  avec 0 l'élément neutre de  $+$ .

*Exemple.*

Dans  $\mathbb{Z}$  avec  $\times$ , le neutre est 1, mais seuls 1 et  $-1$  sont inversibles. En effet, on a  $1 \times 1 = 1$  et  $(-1) \times (-1) = 1$ .

*Remarque.*

L'élément neutre est son propre inverse. En effet,  $e * e = e$ , pour tout  $*$  qui admet  $e$  comme élément neutre.

**Proposition.**

*Si  $*$  est associative et admet un élément neutre  $e$ , alors les inverses sont uniques s'ils existent.*

*Démonstration.*

Soit  $a \in E$ .

Supposons  $b, b'$  sont inverses de  $a$ .

Alors,

$$\begin{aligned} b &= b * e \\ \text{car } b' \text{ est inverse de } a &= b * (a * b') \\ \text{associativité} &= (b * a) * b' \\ \text{car } b \text{ est inverse de } a &= e * b' \\ &= b' \end{aligned}$$

□

*Notation.*

Comme l'inverse de  $a$  est unique, on le note  $a^{-1}$ .

*Exemple.*

Dans  $E = \{f : A \rightarrow A\}$ , avec l'opération  $\circ$ , les fonctions bijectives sont exactement celles qui sont inversibles pour  $\circ$ .

**Proposition.**

*La composition de fonctions est associative.*

*Démonstration.*

Soient  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  et  $h : C \rightarrow D$ .

Soit  $a \in A$ .

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= h((g \circ f)(a)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(a) \\ \Rightarrow (h \circ g) \circ f &= h \circ (g \circ f) \end{aligned}$$

□

# Chapitre 6 Groupes

## Définition.

Un *groupe* est un ensemble  $G$  muni d'une opération  $*$  t.q.

- (A)  $*$  est associative
- (N)  $*$  admet un neutre
- (I) tout  $g \in G$  admet un inverse

*Exemple.*

- (1)  $(\mathbb{Z}, +)$  est un groupe.

Neutre : 0

Inverse de  $n$  :  $-n$

- (2)  $(\mathbb{Q}, +)$  et  $(\mathbb{R}, +)$  sont des groupes.

- (3)  $(\mathbb{Z}, \times)$  n'est pas un groupe, car, par exemple, 2 n'est pas inversible.

- (4)  $(\mathbb{Q}, \times)$  n'est pas un groupe, car 0 n'est pas inversible.

- (5)  $(\mathbb{Q}_*, \times)$  et  $(\mathbb{R}_*, \times)$  sont des groupes.

Neutre : 1

Inverse de  $x$  :  $\frac{1}{x}$

*Remarque.* (1), (2) et (5) sont *commutatifs*.

*Remarque.*  $(\mathbb{N}, +)$  n'est pas un groupe.

*Définition.* Si l'opération d'un groupe est commutative, on note le groupe comme *abélien* (ou commutatif).

- (6)  $GL(n, \mathbb{R})$  est un groupe pour la multiplication matricielle.

$GL(n, \mathbb{R}) = \{M \mid M \text{ est une matrice } n \times n \text{ réelle inversible}\}$ .

$GL$  : général linéaire

$$\text{Neutre : } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

$M^{-1}$  la matrice inverse est l'inverse.

Pour  $n \geq 2$ ,  $GL(n, \mathbb{R})$  n'est pas abélien.

- (7)  $A$  un ensemble quelconque

$S(A) = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ est bijective}\}$  est un groupe pour  $\circ$ .

Neutre :  $\mathbb{1}_A$

Inverse de  $f$  :  $f^{-1}$

*Remarque.*

Pour  $A = \{0, 1\}$

$$f_1 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_2 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, f_3 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{matrix}, f_4 : \begin{matrix} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{matrix}, S(A) = \{f_2, f_3\}.$$

## Cours 5

*Rappel.*

- Groupe :  $(G, *)$

$G$  ensemble

\* opération sur  $G$

- (A) \* est associative

$$\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$$

- (N) \* admet un élément neutre dans  $G$

$$\exists e \in G \text{ t.q. } \forall a \in G, e * a = a = a * e$$

- (I) tout élément de  $G$  est inversible

$$\forall a \in G, \exists b \in G \text{ t.q. } a * b = e = b * a$$

- Le neutre et l'inverse sont uniques

*Remarque.*

“Le groupe  $\mathbb{R}$ ” implique l’opération + et “le groupe  $\mathbb{R}_*$ ” implique l’opération  $\times$ .

### Propriétés élémentaires des groupes

- (1)  $\forall a, b \in G, (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ .
- (2)  $\forall a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$
- (3) Si  $a * b = a * c$ , alors  $b = c$
- (4) Si  $b * a = c * a$ , alors  $b = c$

*Démonstration.*

- (1) On calcule

$$\begin{aligned} (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * (b^{-1} * a^{-1})) & (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * (a^{-1} * (a * b)) \\ &= a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) & &= b^{-1} * ((a^{-1} * a) * b) \\ &= a * (e * a^{-1}) & &= b^{-1} * (e * b) \\ &= a * a^{-1} & &= b^{-1} * b \\ &= e & &= e \end{aligned}$$

Donc,  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ .

- (2) Comme  $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$ ,  $a$  est l'inverse de  $a^{-1}$ , donc  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

- (3) Supposons  $a * b = a * c$ . Alors

$$\begin{aligned} a^{-1} * (a * b) &= a^{-1} * (a * c) \\ (a^{-1} * a) * b &= (a^{-1} * a) * c \\ e * b &= e * c \\ b &= c \end{aligned}$$

- (4) Supposons  $b * a = c * a$ . Alors

$$\begin{aligned} (b * a) * a^{-1} &= (c * a) * a^{-1} \\ b * (a * a^{-1}) &= c * (a * a^{-1}) \\ b * e &= c * e \\ b &= c \end{aligned}$$

□

*Exemple.*

$(\mathbb{Z}_3, +)$ .

$$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$+$  est associative.

$\bar{0}$  est l'élément neutre.

$$(\bar{1})^{-1} = \bar{2}.$$

$$(\bar{2})^{-1} = \bar{1}.$$

$(\mathbb{Z}_3, +)$  est un groupe abélien.

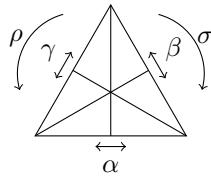
*Remarque.* La symétrie de la table par rapport à la diagonale implique la commutativité.

*Exemple.*

$(\mathbb{D}_3, \circ)$  - groupe diédral d'ordre 3.

Groupe des symétries d'un triangle équilatéral.

$$\mathbb{D}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \text{identité} \\ \beta \\ \gamma \\ \alpha \\ \text{réflexion} \\ \sigma \\ \text{rotation} \end{array} \right\}.$$



$\circ$	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\rho$	$\sigma$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\rho$	$\sigma$
$\alpha$	$\alpha$	$\varepsilon$	$\rho$	$\sigma$	$\beta$	$\gamma$
$\beta$	$\beta$	$\sigma$	$\varepsilon$	$\rho$	$\gamma$	$\alpha$
$\gamma$	$\gamma$	$\rho$	$\sigma$	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$
$\rho$	$\rho$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\varepsilon$
$\sigma$	$\sigma$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	$\varepsilon$	$\rho$

$(\mathbb{D}_3, \circ)$  n'est pas un groupe abélien.

## Cours 6

*Rappel.*

- Groupe :  $(G, *)$  avec  $A, N, I$ .

Abélien :  $C$ .

- 

$$\begin{aligned} a * b &= a * c & \Rightarrow b &= c \\ b * a &= c * a & \Rightarrow b &= c \\ (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$

- 

*Exemple.*

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}_*, \times), (\mathbb{R}_*, \times)$  sont des groupes abéliens ;  $\mathbb{Z}_3, \mathbb{D}_3, GL(n, \mathbb{R})$  sont des groupes non abéliens.  
 $S(E) = \{f : E \rightarrow E \mid f \text{ est bijective}\}$ .

*Remarque.*  $E$  n'est pas l'ensemble utilisé dans la définition du groupe.

## Produit cartésien de groupes

$(G, *)$  et  $(H, \diamond)$  deux groupes.

### Proposition.

$G \times H$  est un groupe lorsque muni de l'opération  $(a, b) \bullet (a', b') = (a * a', b \diamond b')$ , avec  $a, a' \in G$  et  $b, b' \in H$ .

*Démonstration.*

(N)  $e \in G$  le neutre et  $e' \in H$  le neutre, alors  $(e, e') \in G \times H$

$$\begin{aligned}(a, b) \bullet (e, e') &= (a * e, b \diamond e') \\ &= (a, b) \\ (e, e') \bullet (a, b) &= (e * a, e' \diamond b) \\ &= (a, b)\end{aligned}$$

$(e, e')$  est bien neutre.

(I)  $(a, b) \in G \times H$ , alors  $(a^{-1}, b^{-1})$  est inverse de  $(a, b)$ .

En effet,

$$\begin{aligned}(a, b) \bullet (a^{-1}, b^{-1}) &= (a * a^{-1}, b \diamond b^{-1}) \\ &= (e, e') \\ (a^{-1}, b^{-1}) \bullet (a, b) &= (a^{-1} * a, b^{-1} \diamond b) \\ &= (e, e')\end{aligned}$$

(A) Soient  $(a, b), (c, d), (e, f) \in G \times H$ . On a

$$\begin{aligned}((a, b) \bullet (c, d)) \bullet (e, f) &= (a * c, b \diamond d) \bullet (e, f) \\ &= ((a * c) * e, (b \diamond d) \diamond f) \\ &= (a * (c * e), b \diamond (d \diamond f)) \\ &= (a, b) \bullet (c * e, d \diamond f) \\ &= (a, b) \bullet ((c, d) \bullet (e, f))\end{aligned}$$

□

*Exemple.*

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ .
- $(\mathbb{Z}_2, +)$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

+	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$
$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$

### Isomorphismes de groupes

**Définition.**  $(G, *)$  et  $(H, \diamond)$  deux groupes.

Un *isomorphisme* de  $G$  vers  $H$  est une application  $f : G \rightarrow H$  t.q.

- (1)  $\forall a, b \in G, f(a * b) = f(a) \diamond f(b)$ .

Préservation des opérations

(2)  $f$  est bijective.

*Exemple.*

- $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\mathbb{R}_*^+, \times)$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$      $x \mapsto e^x$  est un isomorphisme de groupes.

(1) Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f(x+y) &= e^{x+y} \\ &= e^x \times e^y \\ &= f(x) \times f(y) \end{aligned}$$

(2)  $\ln : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est inverse de  $f : \ln e^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$  et  $e^{\ln x} = x, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$ .

**Proposition.** Si  $f : G \rightarrow H$  est un isomorphisme de groupes, alors  $f(e_G) = e_H$ , où  $e_G$  est l'élément neutre de  $G$  et  $e_H$  est l'élément neutre de  $H$ .

*Démonstration.* Stratégie : montrer que  $f(e_G)$  est neutre pour  $H$  et utiliser l'unicité.

Soit  $b \in H$ .

Comme  $f$  est bijective,  $\exists a \in G$  t.q.  $f(a) = b$

$$\begin{array}{ll} f(e_G) \diamond b = f(e_G) \diamond f(a) & b \diamond f(e_G) = f(a) \diamond f(e_G) \\ = f(e_G * a) & = f(a * e_G) \\ = f(a) & = f(a) \\ = b & = b \end{array}$$

On a donc que  $f(e_G) \in H$  est neutre pour  $\diamond$ , mais comme l'élément neutre est unique,  $f(e_G) = e_H$ .  $\square$

*Exemple.* Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$      $x \mapsto e^x$ ,  $f(0) = e^0 = 1$ .

**Proposition.** Si  $f : G \rightarrow H$  est un isomorphisme de groupes, alors  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ , pour tout  $a \in G$ .

*Démonstration.* Stratégie : montrer que  $f(a^{-1})$  est inverse de  $f(a)$  et utiliser l'unicité.

$$\begin{array}{ll} f(a^{-1}) \diamond f(a) = f(a^{-1} * a) & f(a) \diamond f(a^{-1}) = f(a * a^{-1}) \\ = f(e_G) & = f(e_G) \\ = e_H & = e_H \end{array}$$

On a donc que  $f(a^{-1})$  est inverse de  $f(a)$ , mais comme l'inverse est unique,  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ .  $\square$

*Exemple.* Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$      $x \mapsto e^x$ ,  $f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} = f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ , où  $-x$  est l'inverse de  $x$  pour  $+$  et  $\frac{1}{f(x)}$  est l'inverse de  $f(x)$  pour  $\times$ .

*Remarque.* Si  $G, H$  sont des groupes finis et  $f$  est un isomorphisme, alors  $f$  “envoie la table de  $G$  à celle de  $H$ ”.

*	$e_G$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$\diamond$	$e_H$	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$\dots$
$e_G$					$f(e_G)$				
$a_1$			$a_1 * a_2$		$f(a_1)$			$f(a_1) \diamond f(a_2)$	
$a_2$					$f(a_2)$				
$\vdots$					$\vdots$				

$G : \xrightarrow{f} H$

Avec  $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \diamond f(a_2)$ .

*Exemple.*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c} + & \bar{0} & \bar{1} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \hline \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \quad H : \begin{array}{c|c|c} \circ & \varepsilon & \alpha \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \varepsilon \end{array} \quad C_2 : \begin{array}{c|c|c} \times & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array} \end{array}$$

$\mathbb{Z}_2$ ,  $H$  et  $C_2$  sont isomorphes.

Il existe un isomorphisme entre chaque paire.

**Proposition.** Si  $f : G \rightarrow H$  est un isomorphisme, alors  $f^{-1} : H \rightarrow G$  est un isomorphisme.

*Démonstration.*

(1) Soient  $b_1, b_2 \in H$ .

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1 \diamond b_2) &= f^{-1}(f[f^{-1}(b_1)] \diamond f[f^{-1}(b_2)]) \\ &= f^{-1}(f[f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2)]) \\ &= f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2) \end{aligned}$$

(2)  $f^{-1}$  est bijective, car elle est inversible d'inverse  $f$ .

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= 1_H \\ f^{-1} \circ f &= 1_G \end{aligned}$$

□

**Proposition** (Transitivité).

Si  $f : G \rightarrow H$  et  $g : H \rightarrow K$  sont des isomorphismes, alors  $g \circ f : G \rightarrow K$  est un isomorphisme.

*Démonstration.*

(1) Soient  $a, b \in G$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a * b) &= g(f(a * b)) \\ &= g(f(a) \diamond f(b)) \\ &= g(f(a)) \oplus g(f(b)) \\ &= (g \circ f)(a) \oplus (g \circ f)(b) \end{aligned}$$

(2)  $g \circ f$  est inversible d'inverse  $f^{-1} \circ g^{-1}$ .

□

## Puissances d'éléments de groupes

**Définition** (par récurrence).

$a \in G, n \in \mathbb{N}$

- (1)  $a^0 := e_G$
- (2)  $a^n = a * a^{n-1}, \forall n \geq 1$

*Exemple.*

•

$$\begin{aligned} a^4 &= a * a^3 \\ &= a * a * a^2 \\ &= a * a * a * a^1 \\ &= a * a * a * a * a^0 \\ &= a * a * a * a * e \\ &= a * a * a * a \end{aligned}$$

- Dans  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $2^3 = 3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$ .

**Proposition.**  $a^{n+m} = a^n * a^m$ ,  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* par récurrence sur  $n$ .

(1)  $n = 0$  :

$$\begin{aligned} a^{0+m} &= a^m \\ &= e * a^m \\ &= a^0 * a^m \end{aligned}$$

(2) supposons que  $a^{n+m} = a^n * a^m$  pour un  $n \geq 0$ .

$$\begin{aligned} a^{(n+1)+m} &= a^{n+m+1} \\ &= a * a^{n+m} \\ \text{hyp rec} &= a * (a^n * a^m) \\ &= (a * a^n) * a^m \\ &= a^{n+1} * a^m \end{aligned}$$

□

**Définition.** Pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

Si  $n \geq 0$ , on a déjà défini  $a^n$ .

Si  $n < 0$ , on définit  $a^n = (a^{-1})^{-n}$ .

*Exemple.*  $a^{-3} = (a^{-1})^3 = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1}$ .

**Proposition.**  $a^{n+m} = a^n * a^m$ ,  $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition.**  $(a^n)^m = a^{nm}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ . Vraie aussi pour  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* par récurrence sur  $m$ .

(1)  $m = 0$  :

$$\begin{aligned} (a^n)^0 &= e \\ a^{n \cdot 0} &= a^0 = e \end{aligned}$$

(2) supposons que  $(a^n)^m = a^{nm}$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} (a^n)^{m+1} &= (a^n)(a^n)^m \\ \text{hyp rec} &= (a^n)a^{nm} \\ &= a^{n+nm} \\ &= a^{n(m+1)} \end{aligned}$$

□

## Cours 7

*Rappel.*

- Isomorphisme :  $f : G \rightarrow H$  t.q.

- (1)  $f(ab) = f(a)f(b)$   
avec  $a * b$  et  $f(a) \diamond f(b)$  implicitement.
- (2)  $f$  est bijective  
“même table”

- $f, g$  isomorphismes  $\Rightarrow f^{-1}, g \circ f$  isomorphismes.  
 $1_G : G \rightarrow G$  est trivialement un isomorphisme.
- $G$  est isomorphe à  $H$  s'il existe un isomorphisme  $f : G \rightarrow H$ .
- Puissances :  
Soit  $a \in G$  avec  $G$  un groupe.

- $a^0 = e$
- $a^{n+1} = aa^n$
- $a^{-n} = (a^{-1})^n$
- $a^{n+m} = a^n a^m$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

- $f$  isomorphisme
  - $f(e_G) = e_H$
  - $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

**Proposition.**  $f$  isomorphisme  $f : G \rightarrow H$ .

$a \in G$ . Alors,  $f(a^n) = f(a)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* par récurrence sur  $n$ .

$n \geq 0$  (1)  $n = 0$

$$\begin{aligned} f(a^0) &= f(e_G) \\ &= e_H \\ &= f(a)^0 \end{aligned}$$

(2) supposons que  $f(a^n) = f(a)^n$  pour un certain  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} f(a^{n+1}) &= f(a \cdot a^n) \\ &= f(a)f(a^n) \\ &\stackrel{\text{hyp rec}}{=} f(a)f(a)^n \\ &= f(a)^{n+1} \end{aligned}$$

$n < 0$  alors,  $-n > 0$  et

$$\begin{aligned} f(a^n) &= f((a^{-1})^{-n}) \\ &= f(a^{-1})^{-n} \\ &= (f(a)^{-1})^{-n} \\ &= f(a)^n \end{aligned}$$

□

*Exemple.*  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ , avec la multiplication de matrices.

Soient  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

(A) : associatif, car la multiplication de matrices est associative.

(N) :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$  est neutre

(I) : l'inverse de  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est  $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi,  $H$  est un groupe pour la multiplication matricielle.

$f : \mathbb{R} \rightarrow H$   
On définit  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$(1) \quad f(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y)$$

(2) montrons que.  $f$  est bijective.

- $f$  est injective

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Supposons  $f(x) = f(y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = y$$

- $f$  est surjective

Soit  $Y = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ , avec  $y \in \mathbb{R}$ .

$Y = f(y)$ .

□

### Sous-groupes

**Définition.**  $H \subseteq G$  est un *sous-groupe* de  $G$  si  $H$  est un groupe pour la même opération que  $G$ .

*Exemple.*

- $\{e\} \subseteq G$  est un sous-groupe.
- $G \subseteq G$  est un sous-groupe.
- $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = 2\mathbb{Z} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$
- Dans  $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ ,  $\{\bar{0}, \bar{2}\}$  est un sous-groupe.

+	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Ce groupe est isomorphe à  $\mathbb{Z}_2$  et à  $C_2 = (\{-1, 1\}, \times)$ .

- $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +) \subseteq (\mathbb{R}, +)$ .
- $C_2 \subseteq \mathbb{Q}_* \subseteq \mathbb{R}_*$ .
- $\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$ .
- $\{\varepsilon, \alpha\}$  et  $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$  sont des sous-groupes de  $\mathbb{D}_3$ .

*Notation.* On note l'ensemble  $m\mathbb{Z} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

### Cours 8

*Rappel.*

- $a \in G$ .
  - $a^n = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}$
  - $a^n = a * a^{n-1}$
  - $a^0 = e$
  - $a^{-n} = (a^{-1})^n$

- Sous-groupe de  $(G, *) : H \subseteq G$  qui est un groupe pour  $*$ .

*Exemple.*  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  pour  $+$ .

*Exemple.*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est un sous-groupe de  $GL(2, \mathbb{R})$ .

**Proposition.**  $H \subseteq G$  un sous-groupe.

- (1) Si  $G$  est abélien, alors  $H$  est abélien ;
- (2) Le neutre de  $H$  est le neutre de  $G$  ;
- (3) Si  $a \in H$ , son inverse  $a^{-1} \in H$  est l'inverse de  $a$  dans  $G$ .

*Démonstration.*

- (1)  $G$  est abélien, alors  $\forall a, b \in G, ab = ba$ .

En particulier,  $\forall a, b \in H, ab = ba$ .

- (2) Le neutre de  $G$   $e_G$  a la propriété que  $\forall a \in G, e_G a = a = a e_G$ .

Comme  $H \subseteq G$ , cette propriété est vraie pour  $H$  aussi.

Donc,  $a e_G = a = e_G a$ .

Ainsi,  $e_G$  est le neutre de  $H$ , par l'unicité de l'élément neutre.

- (3)  $a \in H$ , il existe un inverse  $b \in G$  pour  $a$  t.q.  $ab = ba = e$ .

Comme  $H$  est un groupe,  $\exists! a^{-1} \in H$ .

De  $ab = e$ , on a  $a^{-1}ab = a^{-1}e$ , donc  $b = a^{-1}$ .

□

### Théorème.

Un sous-ensemble non-vide  $H \subseteq G$  est un sous-groupe si, et seulement si, pour tous  $a, b \in H$ ,  $ab^{-1} \in H$ .

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $H$  est un sous-groupe, donc  $a, b \in H$ , alors  $b^{-1} \in H$ .

De plus,  $H$  est fermé pour la multiplication, donc  $ab^{-1} \in H$ .

( $\Leftarrow$ ) ( $N$ )  $H$  est non-vide, donc  $\exists a \in H$ .

Par hypothèse,  $aa^{-1} = e \in H$ .

(I) On vient de montrer que  $e \in H$ .

Soit  $b \in H$  quelconque. Par hypothèse,  $eb^{-1} = b^{-1} \in H$ .

(A) On sait que  $\forall a, b, c \in G, (ab)c = a(bc)$ .

En particulier,  $\forall a, b, c \in H, (ab)c = a(bc)$ .

Finalement,  $H$  est fermé pour l'opération de  $G$ , car  $\forall a, b \in H, b^{-1} \in H$ .

Donc, par hypothèse,  $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$ .

□

*Exemple.*

Soit  $m \in \mathbb{Z}$ .

Posons  $H = m\mathbb{Z} = \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$ , muni de l'addition.

montrons que.  $H$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$ .

$H$  est non-vide, car  $m0 = 0 \in H$ .

Soient  $a, b \in H$ .

Par définition de  $H$ ,  $\exists a', b' \in \mathbb{Z}$  t.q.  $a = ma'$  et  $b = mb'$ .

Dans  $\mathbb{Z}$ ,  $b^{-1} = -mb'$ .

On a  $a + (-b) = ma' + (-mb') = m(a' - b') \in H$ .

Donc,  $H$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$ .

□

Réciproquement, soit  $H \subseteq \mathbb{Z}$  un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  quelconque. Alors  $\exists m \in \mathbb{Z}$  t.q.  $H = m\mathbb{Z}$ .

*Démonstration.*

On sait que  $0 \in H$ .

Si  $H = \{0\}$ , alors  $H = 0\mathbb{Z}$  et l'énoncé est vrai.

Sinon,  $H$  contient un autre élément  $a \in H$ , donc  $-a \in H$ .

En particulier,  $H$  contient au moins un entier positif.

Soit  $m$  le plus petit élément positif de  $H$ .

Soit  $h \in H$  quelconque. On divise  $h$  par  $m$ , donc  $h = qm + r$ , où  $q, r \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq r < m$ .

Si  $r = 0$ ,  $h = qm \in m\mathbb{Z}$ .

Sinon, comme  $h \in H$  et  $m \in H$ ,  $h - qm \in H$ , mais  $h - qm = r$ , donc  $r \in H$ .

Comme  $0 < r < m$ , il y a une contradiction à la définition de  $m$ .

↳

Ainsi,  $H \subseteq m\mathbb{Z}$ . Mais clairement,  $m\mathbb{Z} \subseteq H$ , car  $m \in H$  et  $mn \in H$ , donc  $H = m\mathbb{Z}$ .

□

### Proposition.

Soit  $f : G \rightarrow H$  un isomorphisme. Alors,  $K \subseteq G$  est un sous-groupe de  $G$  si, et seulement si,  $f(K)$  est un sous-groupe de  $H$ .

Notation.  $f(K) = \{f(k) \mid k \in K\}$ .

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $K$  est un sous-groupe de  $G$ .

On sait que  $e \in K$ , alors  $f(e) = e \in f(K)$ , donc  $f(K)$  est non-vide.

Soient  $a, b \in f(K)$ . On veut montrer que  $ab^{-1} \in f(K)$ .

Alors,  $a = f(k)$  et  $b = f(k')$ , avec  $k, k' \in K$ .

Donc,  $ab^{-1} = f(k)f(k')^{-1} = f(k)f(k'^{-1}) = f(kk'^{-1})$ .

Comme  $kk'^{-1} \in K$ ,  $ab^{-1} \in f(K)$ .

( $\Leftarrow$ ) On effectue la même preuve avec  $f^{-1}$  qui est un isomorphisme en remarquant que  $f^{-1}(f(k)) = k$ .

Notation.

$G \xrightarrow{f} H$  avec  $f$  un isomorphisme est équivalent à  $G \xrightarrow{\sim} H$ .

Notation.

$H \subseteq G$  un sous-groupe est équivalent à  $H \leqslant G$ .

### Proposition.

Soit  $\{H_i\}_{i \in I}$  une collection de sous-groupes de  $G$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} H_i \leqslant G$ .

*Démonstration.*

$H_i \leqslant G, \forall i \in I$ .

Alors,  $e \in H_i, \forall i$ . Donc,  $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$ . En particulier,  $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$ .

Soient  $a, b \in \bigcap_{i \in I} H_i$ . Alors,  $a, b \in H_i, \forall i$ .

Comme  $H_i \leqslant G$ ,  $ab^{-1} \in H_i, \forall i$ , donc  $ab^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$ .

□

Remarque. Si  $H_1, H_2 \leqslant G$ ,  $H_1 \cup H_2$  n'est pas nécessairement un sous-groupe de  $G$ .

Exemple.  $2\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$  et  $3\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$ .  $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$  n'est pas un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .

Plus précisément,  $2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ , mais  $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ .

Exemple.  $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$ .

# Chapitre 2 Applications et équivalences

## Section 2.4 Relations d'équivalence

**Définition.** Une *relation d'équivalence* sur un ensemble  $E$  est un sous-ensemble  $R \subseteq E \times E$  satisfaisant

(1) réflexivité

$$x \sim x, \forall x \in E.$$

(2) symétrie

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x.$$

(3) transitivité

$$x \sim y \text{ et } y \sim z, \text{ alors } x \sim z.$$

*Notation.* On note  $x \sim y$  si, et seulement si,  $(x, y) \in R$ .

*Exemple.*

(1)  $E = \mathbb{R}$

$$x \sim y \text{ si, et seulement si, } |x| = |y|$$

$$(\text{refl}) \quad |x| = |x|, \text{ donc } x \sim x.$$

$$(\text{sym}) \quad \text{Supposons } x \sim y. \text{ Alors, } |x| = |y|. \text{ Donc, } y \sim x.$$

$$(\text{trans}) \quad \text{Supposons } x \sim y \text{ et } y \sim z. \text{ Alors, } |x| = |y| \text{ et } |y| = |z|. \text{ Donc } |x| = |z|. \text{ Ainsi, } x \sim z.$$

(2)  $C$  est l'ensemble des élèves dans la classe.

$$x \sim y \text{ si, et seulement si, } x \text{ et } y \text{ ont le même âge est une relation d'équivalence.}$$

**Définition.** Si  $E$  est un ensemble et  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $E$ , la *classe d'équivalence* de  $x \in E$  est  $\bar{x} = \{y \in E \mid y \sim x\} \subseteq E$ .

**Lemme.**  $\bar{x} = \bar{y}$  si, et seulement si,  $x \sim y$ .

*Démonstration.*

$(\Rightarrow)$  Supposons  $\bar{x} = \bar{y}$ .

Par (refl),  $x \sim x$ , donc  $x \in \bar{x}$ . Alors,  $x \in \bar{y}$ . Ainsi,  $x \sim y$ .

$(\Leftarrow)$  Supposons  $x \sim y$ .

$(\subseteq)$  Soit  $z \in \bar{x}$ . Alors  $z \sim x$ . Comme  $x \sim y$ , par (trans),  $z \sim y$ . Donc,  $z \in \bar{y}$ .

$(\supseteq)$  Soit  $z \in \bar{y}$ . Alors,  $z \sim y$  et, par (sym),  $y \sim z$ . Comme  $x \sim y$ , par (trans),  $x \sim z$  et, par (sym),  $z \sim x$ . Donc,  $z \in \bar{x}$ .

Ainsi,  $\bar{x} = \bar{y}$ .

□

## Cours 9

*Rappel.*

- $H \leqslant G$ ,  $H$  un sous-groupe de  $G$ , si, et seulement si,
  - $H \neq \emptyset$ ;
  - $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$ .

- Si  $H \leq G$ ,  $H$  a le même neutre que  $G$ , mêmes inverses.
- $G$  abélien  $\Rightarrow H \leq G$  abélien.
- Si  $f : G \rightarrow H$  isomorphisme, alors  $K \leq G \Leftrightarrow f(K) \leq H$ .
- Relations d'équivalence  $\sim$  sur  $E$  :
  - (Refl)  $a \sim a, \forall a \in E$  ;
  - (Sym)  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$  ;
  - (Trans)  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ .
- Classe d'équivalence :  $\bar{a} = \{b \in E \mid b \sim a\}$ .
- $a \sim b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$ .

*Exemple.*  $E = \mathbb{Z}$ .

Équivalence modulo  $m$  :

$a \sim b$  si, et seulement si,  $a - b = km$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Notation.*  $m \mid a - b$ ,  $m$  divise  $a - b$  :  $\exists k \in \mathbb{Z}$  t.q.  $a - b = km$ .

$$a \sim b \Leftrightarrow m \mid a - b.$$

*Démonstration.* que c'est bel et bien une équivalence

(Refl) Soit  $a \in \mathbb{Z}$ .

$$a - a = 0m \Rightarrow a \sim a.$$

(Sym) Supposons que  $a \sim b$ , avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Alors, } a - b = km, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Or, } -(a - b) = -km \Rightarrow b - a = (-k)m, \text{ donc } b \sim a.$$

(Trans) Supposons que  $a \sim b$  et  $b \sim c$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Alors, } a - b = k_1m \text{ et } b - c = k_2m, \text{ avec } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

En additionnant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} a - c &= k_1m + k_2m \\ &= (k_1 + k_2)m \end{aligned}$$

Donc,  $a \sim c$ .

□

Si  $m = 2$ , les classes d'équivalence sont

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 0\} & \bar{1} &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 1\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 0 = 2k\} & &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 1 = 2k\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k\} & &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 2k + 1\} \\ &= 2\mathbb{Z} & &= \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

*Remarque.*

$$\bar{0} = \bar{2} = \bar{4} = \bar{-2} = \dots$$

$$\bar{1} = \bar{3} = \bar{5} = \bar{-1} = \dots$$

Plus généralement, pour  $m\mathbb{Z}$ , on a  $m$  classes d'équivalence.

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m-1}$$

*Notation.* L'ensemble des classes d'équivalence est noté  $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m-1}\}$  pour la relation de congruence modulo  $m$ .

**Définition.** Une *partition* d'un ensemble  $E$  est une collection  $\mathcal{P} = \{E_i\}$ , avec  $i \in I$  de sous-ensembles de  $E$  t.q.

$$(1) \bigcup_{i \in I} E_i = E;$$

$$(2) E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j.$$

*Remarque.* Chaque  $x \in E$  est élément d'exactement un  $E_i$ .

**Proposition.** Si  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $E$ , alors  $\mathcal{P} = \{\bar{a} \mid a \in E\}$  est une partition de  $E$ .

*Exemple.*  $E = \mathbb{Z}$ ,  $\sim$  équivalence modulo 3.

$\mathcal{P} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$  est une partition de  $\mathbb{Z}$ .

*Démonstration.*

(1) Clairement,  $\bigcup_{a \in E} \bar{a} \subseteq E$ .

On veut montrer que  $E \subseteq \bigcup_{a \in E} \bar{a}$ .

Soit  $x \in E$ , alors  $x \sim x$  par réflexivité, donc  $x \in \bar{x}$  et  $x \in \bigcup_{a \in E} \bar{a}$ .

(2) Supposons que  $x \in \bar{a}$  et  $x \in \bar{b}$ , avec  $\bar{a} \neq \bar{b}$ .

Alors,  $x \sim a$  et  $x \sim b$ . Donc, par symétrie,  $a \sim x$  et  $x \sim b$ . Donc, par transitivité,  $a \sim b$ . Donc  $\bar{a} = \bar{b}$ . Ceci est une contradiction, donc  $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset, \forall \bar{a} \neq \bar{b} \in \mathcal{P}$ .

□

On définit une opération sur  $\mathbb{Z}_m$  pour la congruence modulo  $m$ .

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m &\rightarrow \mathbb{Z}_m \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\mapsto \bar{a+b} \end{aligned}$$

Autrement dit,  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ .

*Remarque.* L'écriture d'un élément  $\bar{a}$  n'est pas unique ( $\bar{a} = \bar{a'}$  si  $a \sim a'$ ).

Il faut vérifier que l'opération  $+$  est correctement définie (définie sans ambiguïté).

Autrement dit, si  $\bar{a} = \bar{a'}$  et  $\bar{b} = \bar{b'}$ , on veut montrer que  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{a'} + \bar{b'}$ .

## Cours 10

*Rappel.*

- Relation d'équivalence ( $\sim$ )  $\rightarrow$  partition en classes d'équivalence ( $\bar{a} = \{b \mid b \sim a\}$ ).
- Équivalence (congruence) mod  $m$  (sur  $\mathbb{Z}$ ) :

$$\begin{aligned} a \sim b &\Leftrightarrow m \mid a - b \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } a - b = km \end{aligned}$$

On note l'ensemble des classes d'équivalence mod  $m$  par  $\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{m-1}\}$ .

On veut définir une opération  $+$  sur  $\mathbb{Z}_m$  par  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ .

On doit vérifier que cette définition n'est pas ambiguë (ne dépend pas des représentants).

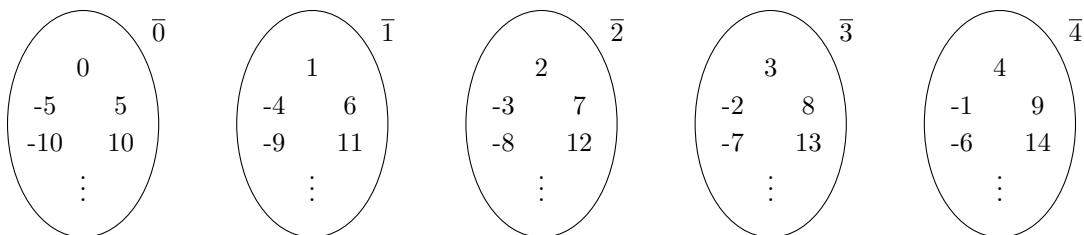
Supposons  $\bar{a} = \bar{a'}$  et  $\bar{b} = \bar{b'}$ . On doit vérifier que  $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$ , c'est-à-dire que  $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$ .

Les hypothèses donnent :  $a_1 - a_2 = k_a m$  et  $b_1 - b_2 = k_b m$ . En additionnant ces deux équations, on obtient  $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = k_a m + k_b m$ . Alors,  $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (k_a + k_b)m$ . Donc,  $a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2$ .

□

*Remarque.* On doit faire ce genre de preuve pour chaque définition de fonction/opération qui ont comme domaine des classes d'équivalence.

*Exemple.*  $m = 5$ .



Pour faire  $\bar{2} + \bar{1}$ , on peut prendre  $\overline{2+1} = \bar{2}$ , ou bien  $\overline{17 + (-4)} = \bar{13}$ .

**Proposition.**  $(\mathbb{Z}_m, +)$  est un groupe abélien.

*Démonstration.*

(A) Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$ .

$$\begin{aligned} (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \overline{\bar{a} + \bar{b}} + \bar{c} \\ &= \overline{(\bar{a} + \bar{b}) + c} \\ &= \overline{\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})} \\ &= \overline{\bar{a}} + \overline{\bar{b} + \bar{c}} \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \end{aligned}$$

(C)  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{\bar{a} + \bar{b}} = \overline{\bar{b} + \bar{a}} = \bar{b} + \bar{a}$ .

(N)  $\bar{0} + \bar{a} = \overline{\bar{0} + \bar{a}} = \bar{a}$ , donc  $\bar{0}$  est neutre. Par commutativité, la propriété est satisfaite.

(I)  $\bar{a} + \overline{-\bar{a}} = \overline{\bar{a} - \bar{a}} = \bar{0}$ , donc  $\overline{-\bar{a}}$  est l'inverse de  $\bar{a}$ . Par commutativité, la propriété est satisfaite.

On peut donc écrire  $-\bar{a} = \overline{-a}$ .

□

## Ordre et groupes cycliques

**Définition.** Soient  $G$  un groupe et  $a \in G$ .

L'*ordre* de  $a$ , noté  $o(a)$  est la plus petite quantité positive  $k \in \mathbb{N}_*$  t.q.  $a^k = e$ , si elle existe. Sinon, on note  $o(a) = \infty$ .

*Exemple.*

- $o(e) = 1$
- Dans  $\mathbb{D}_3$ 
  - $o(\alpha) = 2$
  - $o(\rho) = 3$
- Dans  $\mathbb{Z}$ 
  - $o(0) = 1$
  - $o(n) = \infty, \forall n \neq 0$
- Dans  $\mathbb{Z}_6$ 
  - $o(\bar{2}) = 3$

**Proposition.** Soit  $m \in \mathbb{Z}$ .  $a^m = e$ , si, et seulement si,  $o(a) \mid m$ .

*Démonstration.*

$(\Rightarrow)$  Supposons  $a^m = e$ .

On divise  $m$  par  $o(a)$  :  $m = q \cdot o(a) + r$ , avec  $0 \leq r < o(a)$ .

Si  $r = 0$ ,  $o(a) \mid m$  et on a terminé.

Supposons que  $0 < r < o(a)$ , alors

$$\begin{aligned} r &= m - q \cdot o(a) \\ a^r &= a^{m-q \cdot o(a)} \\ &= a^m \cdot a^{-q \cdot o(a)} \\ &= e \cdot (a^{o(a)})^{-q} \\ &= e \cdot e^{-q} \\ &= e \end{aligned}$$

mais  $0 < r < o(a)$  contredit la minimalité de  $o(a)$ .

□

## Cours 11

*Rappel.*

- $a \sim b \Leftrightarrow m \mid a - b$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .
- $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$  sont les classes d'équivalence.
- $(\mathbb{Z}_m, +)$  est un groupe, où  $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ .
- $o(a) = \min\{k \in \mathbb{N}_* \mid a^k = e\}$  ordre de  $a$ . Si  $a^k \neq e$ ,  $\forall k > 0$ ,  $o(a) = \infty$ .
- Si  $a^k = e$ ,  $o(a) \mid k$ .

*Exemple.*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & M^4 &= -M \\ M^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & M^5 &= - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & M^6 &= \left( - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left( - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ & & &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,  $o(M) = 6$ , puisque  $M^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

# Chapitre 6 Groupes (suite)

## Section 6.13 Groupes symétriques $S_n$

Rappel.  $S(E) = \{f : E \rightarrow E \mid f \text{ est bijective}\}$ .

$S(E)$  est un groupe lorsque muni de l'opération  $\circ$ .

$1_E$  est l'élément neutre.

$f^{-1}$  est l'élément inverse de  $f$ .

$S(E)$  s'appelle le *groupe symétrique* de l'ensemble  $E$ .

Remarque.

$E = \{\text{rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo, violet}\}$ .

$$S(E) \ni f : \begin{cases} \text{rouge} & \mapsto \text{jaune} \\ \text{jaune} & \mapsto \text{rouge} \\ \text{autres} & \mapsto \text{elles-mêmes} \end{cases}.$$

Le groupe  $S(E)$  est isomorphe au groupe  $S(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\})$ , en numérotant les éléments.

Définition.  $S_n = S(\{1, 2, \dots, n\})$  le groupe symétrique de  $n$  éléments.

Les éléments de  $S_n$  sont des bijections, aussi appelées permutations.

Notation. On note une permutation  $\sigma$  de la manière suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 3 \end{array}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

L'élément neutre est  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ .

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{D}_3.$$

Remarque. Tous les élément de  $S_3$  donnent des isométries du triangle, mais pas tous les éléments de  $S_4$  donnent des isométries du carré.

Proposition.  $S_n$  contient  $n!$  éléments.

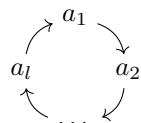
idée.

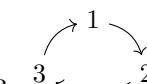
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n \text{ choix} & n-1 \text{ choix} & n-2 \text{ choix} & \cdots & 1 \text{ choix} & & \end{array}$$

Ainsi,  $n(n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$ .

#

**Définition.** Un *cycle* est une permutation de la forme  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_l \rightarrow a_1$ , où  $a_i \neq a_j$  quand  $i \neq j$ .



*Exemple.*  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  est un cycle de longueur  $l = 3$ . 

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  est un cycle de longueur  $l = 3$ .

*Notation.* Écriture raccourcie pour un cycle :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 4 \ 5) \in S_5$ .

**Proposition.** L'ordre d'un cycle est égal à sa longueur.

*Démonstration.*

Si le cycle  $\sigma$  permute les éléments  $a_i$  comme  $\sigma = a_1 \xrightarrow{\sigma} a_2 \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} a_l \xrightarrow{\sigma} a_1$ .  
Alors, calculons  $\sigma^l$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_l \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_l & a_1 & a_2 & \cdots & a_{l-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$$

Ainsi,  $\sigma^l = e$ .

□

*Exemple.*  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  n'est pas un cycle.

Cependant,  $\sigma$  se décompose en cycles  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ , où  $\sigma_1 = (1 \ 2)$ ,  $\sigma_2 = (3 \ 4)$ .

**Proposition.** Toute permutation  $\sigma \in S_n$  s'écrit de manière unique comme une composition de cycles disjoints. (les cycles sont uniques, mais pas l'ordre de l'écriture).

*Notation.* Des cycles disjoints sont des cycles de supports disjoints, où le support d'un cycle est  $\text{supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$ .

**Lemme.** Les cycles disjoints commutent entre eux.

*Exemple.*

$$(1 \ 4 \ 5) \circ (2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ 3) \circ (1 \ 4 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.*

Soient  $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l)$  et  $\eta = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_k)$  deux cycles disjoints.

Soit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Il y a trois cas :

(1)  $i \in \text{supp}(\sigma), i \notin \text{supp}(\eta)$ .

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta(i) &= \sigma(i) \\ \eta \circ \sigma(i) &= \sigma(i)\end{aligned}$$

(2)  $i \notin \text{supp}(\sigma), i \in \text{supp}(\eta)$ .

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta(i) &= \eta(i) \\ \eta \circ \sigma(i) &= \eta(i)\end{aligned}$$

(3)  $i \notin \text{supp}(\sigma), i \notin \text{supp}(\eta)$ .

$$\begin{aligned}\sigma \circ \eta(i) &= i \\ \eta \circ \sigma(i) &= i\end{aligned}$$

□

*idée de la démonstration.* Par récurrence.

$n = 2, (1 \ 2)$ .

Si vrai pour toutes les permutations de longueur  $\leq n$ .

$\sigma$  permutation de  $n + 1$  éléments.

On prend  $i \in \text{supp}(\sigma)$ .

$$\underbrace{i \rightarrow \sigma(i) \rightarrow \sigma^2(i) \rightarrow \sigma^3(i) \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma^n(i)}_{n+1 \text{ éléments de } \{1, 2, \dots, n\}}$$

ces éléments ne peuvent pas tous être distincts.

$\exists m_1 > m_2$  t.q.  $\sigma^{m_1}(i) = \sigma^{m_2}(i)$ , donc  $\sigma^{m_1-m_2}(i) = i$ .

Alors,  $i \rightarrow \sigma(i) \rightarrow \sigma^2(i) \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma^{m_1-m_2-1}(i) \rightarrow i$  est un cycle.

Les éléments restants  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{m_1-m_2-1}(i)\}$  sont permutés entre eux par  $\sigma$ .

Utiliser l'hypothèse de récurrence.

#

*Exemple.*

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 6) (3 \ 4 \ 5 \ 7)$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 8 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 8 \ 6) (2 \ 7 \ 5 \ 3)$$

**Proposition.** L'ordre d'une permutation  $\sigma$  est le ppcm des longueurs des cycles dans sa décomposition.

*Démonstration.*  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_k$ , où  $\sigma_i$  sont des cycles de longueur  $l_i$ .

Puisque les cycles disjoints commutent,  $\sigma^m = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k)^m = \sigma_1^m \sigma_2^m \cdots \sigma_k^m$ .

$\sigma_1^m \sigma_2^m \cdots \sigma_k^m = e$ , si, et seulement si,  $\sigma_1^m = e, \sigma_2^m = e, \dots, \sigma_k^m = e$ .

Alors,  $o(\sigma_1) \mid m, o(\sigma_2) \mid m, \dots, o(\sigma_k) \mid m$ .

Donc,  $l_i \mid m, \forall i$ .

L'ordre de  $\sigma$   $m$  est le plus petit multiple des  $l_i$ .

□

## Cours 12

*Rappel.*

- $S_n = S(\{1, 2, \dots, n\}) = \{\sigma \mid \sigma \text{ est une bijection de } \{1, 2, \dots, n\}\}$  est un groupe pour  $\circ$ .

- Notations :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Cycle :  $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l)$

- $o(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l) = l$

- Toute permutation de  $S_n$  s'écrit comme un produit (composition) de cycles disjoints uniques

- Les cycles disjoints commutent
- Si  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$  est la décomposition,  $o(\sigma) = \text{ppcm}(l_1, \dots, l_k)$ , où  $l_k$  est la longueur de  $\sigma_k$

*Exemple.*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1 \ 2) \circ (3 \ 5) \circ (6 \ 7 \ 8)$$

$$o(\sigma) = \text{ppcm}(2, 2, 3) = 6.$$

$$\sigma^2 = (1 \ 2)^2 \circ (3 \ 5)^2 \circ (6 \ 7 \ 8)^2 = (6 \ 7 \ 8)^2 = (6 \ 8 \ 7)$$

**Définition.** Le *signe* d'une permutation  $\sigma \in S_n$  est le nombre

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

*Exemple.*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma) &= \left( \frac{3 \rightarrow 4}{1 \rightarrow 2} \right) \left( \frac{3 \rightarrow 1^{-1}}{1 \rightarrow 3} \right) \left( \frac{3 \rightarrow 2^{-1}}{1 \rightarrow 4} \right) \left( \frac{4 \rightarrow 1^{-1}}{2 \rightarrow 3} \right) \left( \frac{4 \rightarrow 2^{-1}}{2 \rightarrow 4} \right) \left( \frac{1 \rightarrow 2}{3 \rightarrow 4} \right) \\ &= (-1)^4 = 1 \end{aligned}$$

*Remarque.* Chaque terme  $(i - j)$  apparaît au dénominateur et au numérateur, à signe près, donc  $\text{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$ .

**Proposition.** Soient  $\alpha, \beta \in S_n$ , alors  $\text{sgn}(\alpha \circ \beta) = \text{sgn}(\alpha) \cdot \text{sgn}(\beta)$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\alpha \circ \beta) &= \prod_{i < j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j} \\ &= \prod_{i < j} \left( \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{i - j} \right) \left( \frac{\beta(i) - \beta(j)}{\beta(i) - \beta(j)} \right) \\ &= \prod_{i < j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\beta(i) - \beta(j)}{i - j} \\ &= \left( \prod_{i < j} \frac{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))}{\beta(i) - \beta(j)} \right) \cdot \text{sgn}(\beta) \\ &= \text{sgn}(\alpha) \cdot \text{sgn}(\beta) \end{aligned}$$

□

**Définition.** Un cycle longueur 2 s'appelle une *transposition*.

*Remarque.* On peut décomposer un cycle en un produit de transposition :

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_l) = (a_1 \ a_l) \circ (a_1 \ a_{l-1}) \circ \cdots \circ (a_1 \ a_2)$$

*Exemple.*

$$\sigma = (2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8)$$

$$(2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) (2) = 3 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (2 \ 3) (3) &= (2 \ 8) \circ (2 \ 6) \circ (2 \ 5) (2) \\ &= 5 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3)(5) = (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5)(5) \\
 &= (2 & 8) \circ (2 & 6)(2) \\
 &= 6
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3)(6) = (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5)(6) \\
 &= (2 & 8) \circ (2 & 6)(6) \\
 &= (2 & 8)(2) \\
 &= 8
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3)(8) = (2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5)(8) \\
 &= (2 & 8) \circ (2 & 6)(8) \\
 &= (2 & 8)(8) \\
 &= 2
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$(2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3) = (2 & 3 & 5 & 6 & 8)$$

Alors,  $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}((2 & 8) \circ (2 & 6) \circ (2 & 5) \circ (2 & 3)) = (-1)^4 = 1$ .

**Proposition.** Le signe d'une transposition est  $-1$ .

Démonstration. par exemple

$$(2 & 4) \in S_4.$$

$$\begin{aligned}
 \text{sgn}(\sigma) &= \left( \frac{1 \cancel{<} 4}{\cancel{1} \cancel{<} 2} \right) \left( \frac{\cancel{1} \cancel{<} 3}{\cancel{1} \cancel{<} 3} \right) \left( \frac{\cancel{1} \cancel{<} 2}{\cancel{1} \cancel{<} 4} \right) \left( \frac{\cancel{4} \cancel{<} 3^{-1}}{\cancel{2} \cancel{<} 3} \right) \left( \frac{\cancel{4} \cancel{<} 2^{-1}}{\cancel{2} \cancel{<} 4} \right) \left( \frac{\cancel{3} \cancel{<} 2^{-1}}{\cancel{3} \cancel{<} 4} \right) \\
 &= (-1)^3 = -1
 \end{aligned}$$

#

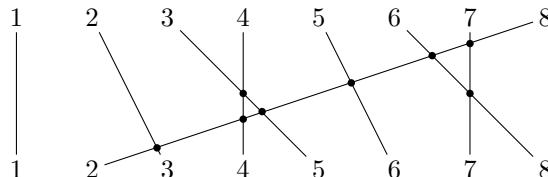
**Proposition.** Le signe d'un cycle de longueur  $l$  est

- 1 si  $l$  est impair
- $-1$  si  $l$  est pair

Plus généralement, le signe d'une permutation  $\sigma$  est  $(-1)^\gamma$ , où  $\gamma$  est le nombre de transpositions dans une décomposition de  $\sigma$  en transpositions.

Remarque. Une autre façon de calculer le signe d'une permutation.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$



Connecter chaque élément, compter les intersections des segments,  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^\gamma$ , où  $\gamma$  est le nombre d'intersections. Ici,  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^8 = 1$ .

# Chapitre 8 Homomorphismes

## Cours 13

**Définition.** Soient  $G, H$  deux groupes et  $f : G \rightarrow H$ .

On dit que  $f$  est un *homomorphisme* (ou morphisme de groupes) si  $f(ab) = f(a)f(b)$ ,  $\forall a, b \in G$ .

*Exemple.*

- (1) Tous les isomorphismes sont des morphismes.
- (2)  $f : G \rightarrow H$ ,  $a \mapsto e_H$  est toujours un homomorphisme.  
En effet,  $f(ab) = e_H = e_H e_H = f(a)f(b)$ .  
 $f$  n'est pas un isomorphisme, sauf si  $G = H = \{e\}$ .
- (3)  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\} = C_2$ .  
 $\text{sgn}(\alpha \circ \beta) = \text{sgn}(\alpha) \cdot \text{sgn}(\beta)$ , donc  $\text{sgn}$  est un homomorphisme.
- (4)  $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_*$  est un homomorphisme, car  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .
- (5) Pour un  $m \in \mathbb{Z}$  fixé,  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = m \cdot n$  est un homomorphisme.  
En effet,  $f(n_1 + n_2) = m(n_1 + n_2) = mn_1 + mn_2 = f(n_1) + f(n_2)$ .
- (6) Si  $H \leqslant G$ ,  $i : H \rightarrow G$ ,  $i(x) = x$  est un homomorphisme.  
Ce n'est pas l'identité, car  $H \neq G$  en général.

**Proposition.**

*Si  $f : G \rightarrow H$  est un homomorphisme, alors*

- (1)  $f(e_G) = e_H$
- (2)  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

*Démonstration.*

(1)

$$\begin{aligned} f(e_G) &= f(e_G e_G) \\ &= f(e_G) f(e_G) \\ f(e_G)^{-1} f(e_G) &= f(e_G)^{-1} f(e_G) f(e_G) \\ e_H &= e_H f(e_G) \\ &= f(e_G) \end{aligned}$$

(2)  $f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e_G) = e_H$ , donc  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ .

□

**Proposition.**

*La composition de deux homomorphismes est un homomorphisme.*

*Démonstration.*

Soient  $f : G \rightarrow H$  et  $g : H \rightarrow K$  deux homomorphismes, et  $a, b \in G$ .

$$\begin{aligned} (g \circ f)(ab) &= g(f(ab)) \\ &= g(f(a)f(b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(f(a))g(f(b)) \\
&= (g \circ f)(a)(g \circ f)(b)
\end{aligned}$$

□

**Proposition.** Soit  $f : G \rightarrow H$  un homomorphisme. Alors,

- (1)  $\text{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in G\}$  est un sous-groupe de  $H$  ;
- (2) le noyau  $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$  est un sous-groupe de  $G$ .

*Exemple.*

$$(a) \text{ Im}(\det) = \mathbb{R}_*, \det \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = x$$

$$\ker(\det) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\} = SL(n, \mathbb{R}).$$

$$(b) f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = mn.$$

$$\text{Im}(f) = m\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$$

$$\ker(f) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.*

$$(1) f(e_G) \in \text{Im}(f), \text{ donc } \text{Im}(f) \neq \emptyset.$$

Si  $a, b \in \text{Im}(f)$ , alors  $a = f(c)$  et  $b = f(d)$ .

On a alors

$$\begin{aligned}
ab^{-1} &= f(c)f(d)^{-1} \\
&= f(c)f(d^{-1}) \\
&= f(cd^{-1}) \in \text{Im}(f)
\end{aligned}$$

$$(2) f(e_G) = e_H \Rightarrow f(e_G) \in \ker(f) \Rightarrow \ker(f) \neq \emptyset.$$

Soient  $a, b \in \ker(f)$ . Alors,  $f(a) = e_H$  et  $f(b) = e_H$ .

$$\begin{aligned}
f(ab^{-1}) &= f(a)f(b^{-1}) \\
&= f(a)f(b)^{-1} \\
&= e_H e_H^{-1} \\
&= e_H
\end{aligned}$$

donc  $ab^{-1} \in \ker(f)$ .

□

*Exemple.*

$$\text{Im}(\text{sgn}) = C_2 = \{-1, 1\}, \text{ si } n \geqslant 1.$$

$$\ker(\text{sgn}) = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\} \text{ est un sous-groupe de } S_n.$$

*Notation.* On note ce sous-groupe  $A_n$  et on l'appelle le *groupe alterné*.

*Exemple.*  $n = 3$ .

$$A_3 = \{e, (123), (132)\}.$$

**Proposition.**

Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme.

$\ker(f) = \{e\}$  si, et seulement si,  $f$  est injective.

*Démonstration.*

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $f$  est injective.

On sait que  $e_G \in \ker(f)$ .

Supposons que  $\exists a \in \ker(f)$ . On a

$$\begin{aligned} f(a) &= e_H && \text{par définition de } \ker \\ &= f(e_G) \\ a &= e_G && \text{car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

Donc,  $\ker(f) = \{e_G\}$ .

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $\ker(f) = \{e_G\}$ .

Soient  $a, b \in G$  t.q.  $f(a) = f(b)$ .

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ f(a)f(b)^{-1} &= e_H \\ f(a)f(b^{-1}) &= e_H \\ f(ab^{-1}) &= e_H \\ ab^{-1} &= e_G \\ a &= b \end{aligned}$$

□

*Remarque.*  $\text{Im}(f) = H$  si, et seulement si,  $f$  est surjective.

## Cours 14

*Rappel.*

- homomorphisme :  $f : G \rightarrow H$  t.q.  $f(ab) = f(a)f(b)$
- Si  $f$  est un homomorphisme, alors
  - $f(e_G) = e_H$
  - $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
  - $f(a^n) = f(a)^n$
- $\text{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in G\} \leqslant H$
- $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e_H\} \leqslant G$
- $\ker(f) = \{e_G\} \Leftrightarrow f$  est injective

*Exemple.*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}_m \\ n & \mapsto & \overline{n} \end{array} \text{ est un homomorphisme.}$$

En effet,

$$\begin{aligned} f(n_1 + n_2) &= \overline{n_1 + n_2} \\ &= \overline{n_1} + \overline{n_2} \\ &= f(n_1) + f(n_2) \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{Z}_m.$$

$$\ker(f) = m\mathbb{Z}.$$

## Équivalence modulo $H$ et théorème de Lagrange

$G$  un groupe quelconque et  $H \leqslant G$  un sous-groupe.

On définit une relation sur  $G$  par  $a \sim b$  si, et seulement si,  $ab^{-1} \in H$ .

Cette relation est appelée *équivalence modulo  $H$* .

**Proposition.**

$\sim$  est une relation d'équivalence.

Démonstration.

(refl) Soit  $a \in G$ .

$$aa^{-1} = e_G \in H, \text{ puisque } H \leqslant G.$$

Alors,  $a \sim a$ .

(sym) Soient  $a, b \in G$ .

Supposons que  $a \sim b$ .

$$\text{Alors, } ab^{-1} \in H.$$

Comme  $H$  est un groupe,  $H$  est fermé pour la prise d'inverses, donc  $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$ .

Ainsi,  $b \sim a$ .

(trans) Soient  $a, b, c \in G$ .

Supposons que  $a \sim b$  et  $b \sim c$ .

$$\text{Alors, } ab^{-1} \in H \text{ et } bc^{-1} \in H.$$

Comme  $H$  est un groupe,  $H$  est fermé pour son opération, donc  $(ab^{-1})(bc^{-1}) = a(bb^{-1})c^{-1} = ac^{-1} \in H$ .

Ainsi,  $a \sim c$ .

□

Le groupe  $G$  se partitionne en classes d'équivalence modulo  $H$  :  $G = \overline{a_1} \cup \overline{a_2} \cup \dots$

Exemple.

$$G = \mathbb{Z}_8, H = \{\bar{0}, \bar{4}\}.$$

La classe de  $\bar{0} \in G$  mod  $H$  est l'ensemble des  $\bar{n} \in \mathbb{Z}_8$  t.q.  $\bar{0} - \bar{n} \in H$ .

Alors,  $-\bar{n} \in \{\bar{0}, \bar{4}\}$ , donc  $\bar{n} = \bar{0}$  ou  $\bar{n} = \bar{4}$ .

$$C(\bar{0}) = \{\bar{0}, \bar{4}\}, C(\bar{1}) = \{\bar{1}, \bar{5}\}, C(\bar{2}) = \{\bar{2}, \bar{6}\}, C(\bar{3}) = \{\bar{3}, \bar{7}\}.$$

Lemme.

La classe modulo  $H$  de  $a \in G$  est  $\{ha \mid h \in H\}$ .

Notation.

$\{ha \mid h \in H\}$  est noté  $Ha$ .

Démonstration.

Soient  $a, b \in G$ .

( $\subseteq$ ) Supposons que  $b \sim a$  mod  $H$ , c'est-à-dire  $b \in \bar{a}$ .

Alors,  $ba^{-1} \in H$ , disons  $ba^{-1} = h$  avec  $h \in H$ , donc  $b = ha$ .

$$\therefore \bar{a} \subseteq Ha.$$

( $\supseteq$ ) Supposons que  $b \in Ha$ .

Alors,  $b = ha$  avec  $h \in H$ , donc  $ba^{-1} = h \in H$ . Ainsi,  $b \sim a$ , donc  $b \in \bar{a}$ .

$$\therefore Ha \subseteq \bar{a}.$$

Ainsi,  $Ha = \bar{a}$ .

□

Corollaire.

Toutes les classes d'équivalence modulo  $H$  ont le même nombre d'éléments.

Plus précisément,  $|Ha| = |H|$ .

Démonstration.

$$\begin{array}{ccc} f : H & \rightarrow & Ha \\ h & \mapsto & ha \end{array} \text{ est bijective, car elle est inversible d'inverse } \begin{array}{ccc} f^{-1} : Ha & \rightarrow & H \\ b & \mapsto & ba^{-1} \end{array} .$$

□

## Cours 15

*Rappel.* Pour déterminer  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  d'un homomorphisme  $f$ .

*Exemple.*  $f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_6$  .  
 $\bar{n} \mapsto \bar{n}$  .

$$\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}.$$

Supposons que  $\bar{n} \in \ker(f)$ . Alors,

$$\begin{aligned} f(\bar{n}) &= \bar{0} \\ \bar{n} &= \bar{0} \\ n &= 6k \end{aligned}$$

avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Donc,  $\ker(f) \subseteq 6\mathbb{Z}_{12}$ .

Pour avoir  $\ker(f) = 6\mathbb{Z}_{12}$ , il faut aussi montrer  $6\mathbb{Z}_{12} \subseteq \ker(f)$ .

Supposons que  $n = 6k \Rightarrow \bar{n} = \bar{6k} \Rightarrow f(\bar{n}) = f(\bar{6k}) = \bar{6k} = \bar{0}$ , donc  $\bar{n} \in \ker(f)$ .

*Rappel.*

$G$  groupe,  $H \leqslant G$  sous-groupe.

- Équivalence mod  $H$  :
- $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$  ;
- Les classes d'équivalence mod  $H$  sont  $\bar{a} = Ha = \{ha \mid h \in H\}$  ;
- Toutes les classes ont la même taille,  $|Ha| = |H|$ .

*Exemple.*

$G = S_3 = \{e, (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$ ,  $H = \{e, (1 \ 2)\}$ .  
Calculons les classes mod  $H$ .

- $He = \{e \circ e, (1 \ 2) \circ e\} = H$  ;
- $H(1 \ 3) = \{e \circ (1 \ 3), (1 \ 2) \circ (1 \ 3)\} = \{(1 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\}$  ;
- $H(2 \ 3) = \{e \circ (2 \ 3), (1 \ 2) \circ (2 \ 3)\} = \{(2 \ 3), (1 \ 2 \ 3)\}$ .

**Théorème** (Lagrange).

Soit  $G$  un groupe fini.

Si  $H \leqslant G$ , alors  $|H| \mid |G|$ .

*Démonstration.*

Les classes modulo  $H$  partitionnent  $G$  est sous-ensembles (classes) de taille  $|H|$  chacun, donc

$$\begin{aligned} G &= Ha_1 \cup Ha_2 \cup \cdots \cup Ha_n \\ |G| &= |H| + |H| + \cdots + |H| \\ &= n|H| \end{aligned}$$

□

**Corollaire.**  $a \in G$ ,  $o(a) \mid |G|$ .

*Démonstration.*

$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , le sous-groupe engendré par  $a$ , est un sous-groupe car

- $a^0 = e \in \langle a \rangle$ , donc  $\langle a \rangle \neq \emptyset$  ;
- Si  $a^n, a^m \in \langle a \rangle$ , alors  $a^n(a^m)^{-1} = a^{n-m} \in \langle a \rangle$ , donc  $\langle a \rangle \leqslant G$ .

Par le théorème de Lagrange,  $|\langle a \rangle| \mid |G|$ .

De plus,  $|\langle a \rangle| = o(a)$ , qu'on démontrera plus tard, donc  $o(a) \mid |G|$ . □

**Corollaire.** Si  $|G| = m$  et  $a \in G$ , alors  $a^m = e$ .

*Démonstration.*

On sait que  $a^{o(a)} = e$ .

Par le corollaire précédent,  $m = ko(a)$ , car  $o(a) \mid m$ , donc  $a^m = a^{ko(a)} = (a^{o(a)})^k = e^k = e$ . □

**Corollaire** (petit théorème de Fermat). *Si  $a \in \mathbb{Z}$  et  $p$  est un nombre premier t.q.  $p \nmid a$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .*

**Lemme.**  $\mathbb{Z}_{p_*}$  est un groupe pour la multiplication.

*Démonstration.*

$\mathbb{Z}_{p_*}$  est un groupe avec  $|\mathbb{Z}_{p_*}| = p - 1$ .

Par le corollaire précédent, si  $a \in \mathbb{Z}_{p_*}$ , alors  $\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$ , donc  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .  $\square$

*Notation.*  $|G|$  s'appelle aussi l'*ordre* de  $G$ .

**Définition.**  $H \leq G$ .

On appelle *indice* de  $H$  dans  $G$  le nombre de classes modulo  $H$  et on le note  $[G : H]$ .

Le théorème de Lagrange implique que si  $G$  est fini,  $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$ .

L'indice peut être fini même si  $G$  et  $H$  sont infinis.

*Exemple.*  $[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m$ .

*Exemple.* Les seuls sous-groupes de  $\mathbb{Z}_p$  avec  $p$  premier sont  $\{\bar{0}\}$  et  $\mathbb{Z}_p$ , car si  $H \leq \mathbb{Z}_p$ . Par Lagrange,  $|H| \in \{1, p\}$ .

*Exemple.*  $H \leq \mathbb{Z}_8$  qui contient au moins 5 éléments distincts, alors  $H = \mathbb{Z}_8$ , car les diviseurs de 8 sont  $\{1, 2, 4, 8\}$ .

## Section 8.6 Groupes quotients

On veut définir une opération sur les classes d'équivalence mod  $H$  pour en faire un groupe.

### Tentative

On voudrait définir  $Ha * Hb = H(a * b)$ . Est-ce défini sans ambiguïté?

Supposons que  $Ha = Ha'$  et  $Hb = Hb'$ , c'est-à-dire  $a(a')^{-1} \in H$  et  $b(b')^{-1} \in H$ . Alors, on voudrait montrer que  $H(ab) = H(a'b') \Leftrightarrow (ab)(a'b') \in H \Leftrightarrow ab(b')^{-1}(a')^{-1} \in H$ . Cependant, ce n'est pas vrai en général.

### Définition.

Un sous-groupe  $H \leq G$  est *distingué*, ou *normal*, si  $\forall a \in G$ ,  $Ha = aH$ , c'est-à-dire,  $\{ha \mid h \in H\} = \{ah \mid h \in H\}$ .

*Remarque.*

$Ha = aH$  ne veut pas dire  $ha = ah$  pour tout  $h \in H$ .

Plutôt,  $Ha = aH$  signifie  $ha = ah'$  pour un certain  $h' \in H$ .

*Exemple.*

Pour  $G = S_3 = \{e, (1 2), (1 3), (2 3), (1 2 3), (1 3 2)\}$ .

- Le sous-groupe  $H = \{e, (1 2)\}$  n'est pas distingué. En effet, regardons la classe de  $(1 3)$ .

$$H(1 3) = \{(1 3), (1 3 2)\}$$

$$(1 3)H = \{(1 3) \circ e, (1 3) \circ (1 2)\} = \{(1 3), (1 2 3)\}$$

- Le sous-groupe  $N = \{e, (1 2 3), (1 3 2)\}$  est distingué. En effet

$$Ne = \{e \circ e, (1 2 3) \circ e, (1 3 2) \circ e\} = \{e, (1 2 3), (1 3 2)\} = N$$

$$eN = \{e \circ e, e \circ (1 2 3), e \circ (1 3 2)\} = \{e, (1 2 3), (1 3 2)\} = N$$

$$N(1 2) = \{e \circ (1 2), (1 2 3) \circ (1 2), (1 3 2) \circ (1 2)\} = \{(1 2), (1 3), (2 3)\}$$

$$(1 2)N = \{(1 2) \circ e, (1 2) \circ (1 2 3), (1 2) \circ (1 3 2)\} = \{(1 2), (2 3), (1 3)\}$$

**Proposition.** Si  $f : G \rightarrow H$  est un homomorphisme,  $\ker(f)$  est un sous-groupe distingué de  $G$ .

*Démonstration.*  $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$ .

Soit  $b \in G$ . On veut montrer que  $b \ker(f) = \ker(f)b$ .

( $\subseteq$ ) Soit  $ba \in b \ker(f)$ .

$$ba = bab^{-1}b$$

posons  $a' = bab^{-1}$

$$\begin{aligned} f(a') &= f(bab^{-1}) \\ &= f(b)f(a)f(b^{-1}) \\ &= f(b)ef(b^{-1}) \\ &= e \end{aligned}$$

donc  $a' \in \ker(f) \Rightarrow ba = a'b \in \ker(f)b \Rightarrow b \ker(f) \subseteq \ker(f)b$ .

( $\supseteq$ ) Soit  $ab \in \ker(f)b$ .

$$ab = bb^{-1}ab$$

posons  $a' = b^{-1}ab$

$$\begin{aligned} f(a') &= f(b^{-1}ab) \\ &= f(b^{-1})f(a)f(b) \\ &= f(b^{-1})ef(b) \\ &= e \end{aligned}$$

donc  $a' \in \ker(f) \Rightarrow ab = ba' \in b \ker(f) \Rightarrow \ker(f)b \subseteq b \ker(f)$ .

□

## Cours 16

*Rappel.*

- Classes d'équivalence à droite modulo  $H$  de  $a \in G : Ha$
- Théorème de Lagrange :  $|H| \mid |G|$
- Indice de  $H$  dans  $G : [G : H]$  représente le nombre de classes
- Corollaires de Lagrange :
  - $o(a) \mid |G|$
  - $a^{|G|} = e$
  - petit théorème de Fermat : si  $p \nmid a$ ,  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , avec  $p$  un nombre premier
- Sous-groupe *normal* ou *distingué* :  $Ha = aH$
- $\ker(f)$  est toujours distingué

### Proposition.

$H \leqslant G$  est distingué si, et seulement si, pour tous  $h \in H$  et  $g \in G$ ,  $ghg^{-1} \in H$ .

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $H$  est distingué.

Soient  $h \in H$  et  $g \in G$ . On a  $gh \in gH$ . Mais alors,  $gh \in Hg$ , donc  $gh = h'g$  avec  $h' \in H$ .

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= h'gg^{-1} \\ &= h' \in H \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, \forall h \in H$ .

On veut montrer que  $gH = Hg, \forall g \in G$ .

( $\subseteq$ ) Soit  $gh \in gH$ . On a

$$\begin{aligned} gh &= ghg^{-1}g \\ &= h'g \in Hg \end{aligned}$$

( $\supseteq$ ) Soit  $hg \in Hg$ . Alors

$$\begin{aligned} hg &= gg^{-1}hg \\ &= gh' \in gH \end{aligned}$$

□

### Nouvelle tentative

Soit  $G$  un groupe. Soit  $N$  un sous-groupe normal de  $G$ .

On a  $G/N$  l'ensemble des classes mod  $N$  :

$$G/N = \{Na \mid a \in G\}$$

### Proposition.

$G/N$  est un groupe par l'opération  $(Na)(Nb) = N(ab)$ .

Démonstration.

Montrons que l'opération est définie sans ambiguïté.

Supposons que  $Na = Na'$  et  $Nb = Nb'$ . Alors,  $a(a')^{-1} \in N$  et  $b(b')^{-1} \in N$ .

$$\begin{aligned} ab(a'b')^{-1} &= ab(b')^{-1}(a')^{-1} \\ &= ab(b')^{-1}(a')^{-1}aa^{-1} \end{aligned}$$

On sait que  $b(b')^{-1} \in N$ .

De plus,  $(a')^{-1}a \in N$ , car  $a(a')^{-1} \in N$  et  $N$  est normal, donc  $a^{-1}(a(a')^{-1})a \in N$ .

Comme  $N$  est fermé pour la multiplication,  $b(b')^{-1}(a')^{-1}a \in N$  que nous noterons  $n$ .

On a donc

$$ab(a'b')^{-1} = ana^{-1} \in N$$

Ainsi,  $N(ab) = N(a'b')$ , donc l'opération est définie sans ambiguïté.

Maintenant, montrons que  $G/N$  est un groupe.

(A) Soient  $Na, Nb, Nc \in G/N$ .

$$\begin{aligned} (NaNb)Nc &= N(ab)Nc \\ &= N((ab)c) \\ &= N(a(bc)) \\ &= NaN(bc) \\ &= Na(NbNc) \end{aligned}$$

(N) On vérifie que  $Ne = N$  est neutre.

$$\begin{aligned} NeNa &= N(ea) \\ &= Na \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NaNe &= N(ae) \\ &= Na \end{aligned}$$

(I) L'inverse de  $Na$  est  $Na^{-1}$

$$\begin{aligned} NaNa^{-1} &= N(aa^{-1}) \\ &= N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Na^{-1}Na &= N(a^{-1}a) \\ &= N \end{aligned}$$

□

Notation.  $N \trianglelefteq G$  représente  $N$  est un sous-groupe normal de  $G$ .

**Proposition.**

$p : G \rightarrow G/N$  est un homomorphisme.  
 $a \mapsto Na$

Démonstration.

$$\begin{aligned} p(ab) &= N(ab) \\ &= NaNb \\ &= p(a)p(b) \end{aligned}$$

□

**Cours 17**

Rappel.

- $N \trianglelefteq G$  sous-groupe normal (ou distingué)
  - $\forall g \in G, gN = Ng$
  - $\forall g \in G, \forall n \in N, gng^{-1} \in N$
- $f : G \rightarrow H$  homomorphisme  $\Rightarrow \ker(f) \trianglelefteq G$
- Groupe quotient :  $G/N = \{Ng \mid g \in G\}$ 
  - opération :  $NaNb = Nab$
  - neutre :  $N$
  - inverse :  $(Na)^{-1} = Na^{-1}$
- $p : G \rightarrow G/N$  est un homomorphisme avec  $p(a) = Na$ .

Notation. Effectuer  $ghg^{-1}$  s'appelle la *conjugaison* de  $h$  par  $g$ .

Remarque.  $H \leqslant G$  et  $g \in G$ , alors  $gHg^{-1} \leqslant G$ .

Dans le cas d'un sous-groupe normal, le sous-groupe obtenu par la conjugaison reste le même sous-groupe.

Exemple.

- Dans  $\mathbb{D}_3$ <sup>1</sup>
  - $\{\varepsilon, \alpha\}$
  - $\{\varepsilon, \beta\}$
  - $\{\varepsilon, \gamma\}$

ne sont pas normaux.

- $\{\varepsilon, \rho, \sigma\}$

est normal.

- Soient  $G = \mathbb{D}_3$  et  $N = \{\varepsilon, \rho, \sigma\}$ .

Les classes à droites sont

- $N = N\varepsilon = \{\varepsilon, \rho, \sigma\}$

- $N\alpha = N\beta = N\gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Alors,  $G/N = \{N, N\alpha\}$ .

o		$N$	$ $	$N\alpha$
$N$		$N$	$ $	$N\alpha$
$N\alpha$		$N\alpha$	$ $	$N$

- Soient  $G = \mathbb{Z}_{10}$  et  $N = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

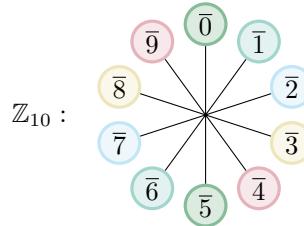
Les classes d'équivalence sont

- $N = N + \bar{0} = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

1. Pour la définition de  $\mathbb{D}_3$ , voir p.10

- $N + \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{6}\}$
- $N + \bar{2} = \{\bar{2}, \bar{7}\}$
- $N + \bar{3} = \{\bar{3}, \bar{8}\}$
- $N + \bar{4} = \{\bar{4}, \bar{9}\}$

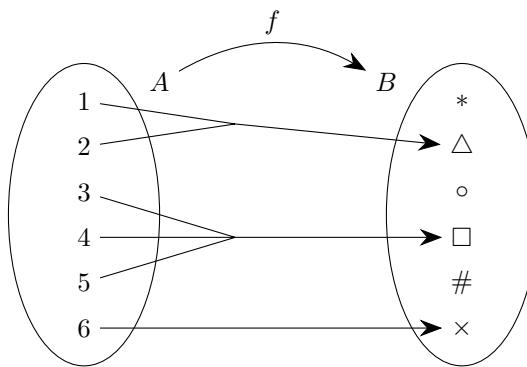
$$G/N = \{N, N + \bar{1}, N + \bar{2}, N + \bar{3}, N + \bar{4}\}.$$



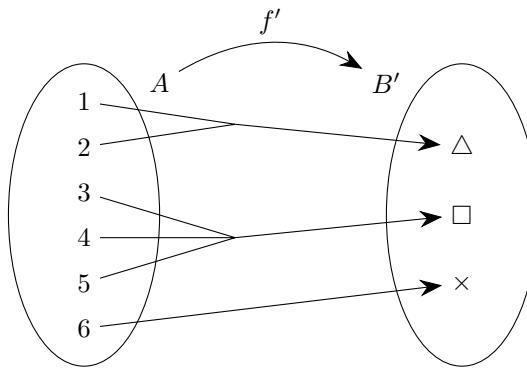
$$\mathbb{Z}_{10}/5\mathbb{Z}_{10} = \{\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare\}.$$

- Soient  $G = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  et  $N = \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ .  
 $N \trianglelefteq G$ .  
 $G/N$  est infini et l'opération sur  $G/N$  est :  $(N + (x, y)) + (N + (x', y')) = N + (x + x', y + y')$ .

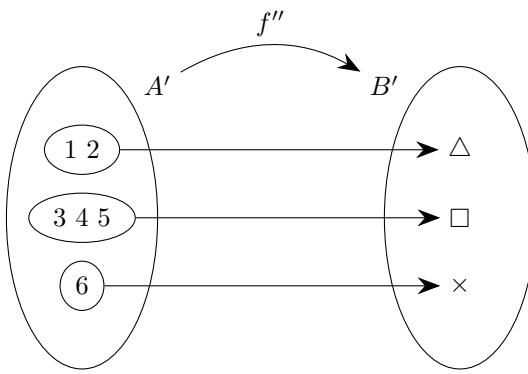
### Motivation



$f$  n'est ni injective ni surjective.



$f'$  est surjective, mais elle n'est toujours pas injective.



$f''$  est injective et surjective, donc bijective.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ A' & \xrightarrow{f''} & B' \end{array}$$

où  $p$  représente une projection et  $i$  une inclusion. Donc,  $f = i \circ f'' \circ p$ , où  $i$  est injective,  $p$  est surjective et  $f''$  est bijective.

**Théorème** (d'isomorphisme de Jordan).

Soit  $f : G \rightarrow H$  un homomorphisme de groupes. Posons  $N = \ker(f) \trianglelefteq G$ .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ G/N & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im}(f) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} P : G & \rightarrow & g/N & i : \text{Im}(f) & \rightarrow & H \\ a & \mapsto & Na & h & \mapsto & h \end{array} \right).$$

Alors, il existe un unique homomorphisme  $\bar{f} : G/N \rightarrow \text{Im}(f)$  t.q.  $f = i \circ \bar{f} \circ p$ . De plus,  $\bar{f}$  est un isomorphisme.

Exemple.  $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_*$ .

$N = \ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$  les matrices dont le déterminant vaut 1.

$\text{Im}(\det) = \mathbb{R}_*$ .

Le théorème implique que  $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}_*$ .

Démonstration.

Unicité de  $\bar{f}$ .

Supposons que  $\bar{f}$  existe.

Soit  $\tilde{f}$  un autre homomorphisme t.q.  $f = i \circ \tilde{f} \circ p$ .

Alors, soit  $Na \in G/N$ . On a

$$\begin{aligned} f(a) &= (i \circ \tilde{f} \circ p)(a) \\ &= i(\tilde{f}(p(a))) \\ &= \tilde{f}(Na) \end{aligned}$$

De même,  $f(a) = \bar{f}(a)$ .

Donc,  $\bar{f}(Na) = \tilde{f}(Na) = f(a)$ , alors  $\bar{f} = \tilde{f}$ . ■

*Existence de  $\bar{f}$ .*

On veut définir  $\bar{f}(Na) = f(a)$ . Vérifions que cette définition est sans ambiguïté.

Supposons  $Na = Nb$ , c'est-à-dire,  $ab^{-1} \in N = \ker(f)$ .

Alors,  $f(ab^{-1}) = e$ , donc  $f(a)f(b)^{-1} = e$ , ainsi  $f(a) = f(b)$ , qui est équivalent à  $\bar{f}(Na) = \bar{f}(Nb)$ . ■

*$\bar{f}$  est un homomorphisme.*

$$\bar{f}(NaNb) = \bar{f}(Nab) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(Na)\bar{f}(Nb).$$
■

*$\bar{f}$  est un isomorphisme.*

*surjectivité.*

Soit  $b \in \text{Im}(f)$ . Alors,  $b = f(a)$  pour un certain  $a \in G$ . Donc,  $b = \bar{f}(Na)$ . #

*injectivité.*

Supposons  $Na \in \ker(\bar{f})$ . Alors,  $\bar{f}(Na) = e$ , donc  $f(a) = e$ , ainsi  $a \in \ker(f) = N$ .

Comme  $a \in N$ ,  $Na = N$ . Donc,  $\ker(\bar{f}) \subseteq \{N\}$ , alors  $\ker(\bar{f}) = N$ . #

*Exemple.*

- $\text{sgn} : S_n \rightarrow C_2$ .

$$\ker(\text{sgn}) = A_n.$$

$$\text{Im}(\text{sgn}) = C_2.$$

$$\text{Alors, } S_n/A_n \cong C_2 \cong \mathbb{Z}_2.$$

- $f : \mathbb{Z}_{10} \xrightarrow{\quad \bar{n} \quad} \mathbb{Z}_5$  .  $f$  est un homomorphisme.

$$\ker(f) = \{\bar{0}, \bar{5}\}.$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{Z}_5.$$

$$\text{Alors, } \mathbb{Z}_{10}/\{\bar{0}, \bar{5}\} \cong \mathbb{Z}_5.$$

- $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x, y)} \mathbb{R}$  .  $f$  est un homomorphisme.

$$\ker(f) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} =: N.$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\text{Alors, } \mathbb{R}^2/N \cong \mathbb{R}.$$

## Cours 18

*Rappel.*

- Théorème d'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ G/\ker(f) & \dashrightarrow \bar{f} & \text{Im}(f) \end{array}$$

$\exists!$  isomorphisme  $\bar{f} : G/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$  t.q.  $f = i \circ \bar{f} \circ p$ .

*Notation.*  $\hookrightarrow$  : fonction injective,  $\twoheadrightarrow$  : fonction surjective.

2 cas importants :

- (1) Si  $f$  est surjectif

$$\text{Im}(f) = H.$$

Le théorème dit que  $\bar{f} : G/\ker(f) \rightarrow H$   $Na \mapsto f(a)$  est un isomorphisme.

(2) Si  $f$  est injectif

$$\ker(f) = \{e\}.$$

$G/\ker(f) = G/\{e\}$ , les classes sont de la forme  $\{e\}a = \{a\}$ , donc chaque élément de  $G$  est seul dans sa classe d'équivalence.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\cong} & G/\{e\} \\ a & \mapsto & \{a\} \end{array}$$

Dans ce cas,  $G \cong G/\{e\} \cong \text{Im}(f)$ . On a que  $G$  est isomorphe au sous-groupe  $\text{Im}(f)$  de  $H$ .

### Corollaire.

$f : G \rightarrow H$  un homomorphisme entre groupes finis. Alors,  $|G| = |\ker(f)| |\text{Im}(f)|$ .

Démonstration.

$\bar{f}$  est une bijection entre  $G/\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ . Alors,  $|G/\ker(f)| = |\text{Im}(f)|$ . Donc,  $\frac{|G|}{|\ker(f)|} = |\text{Im}(f)|$ .  $\square$

### Groupes monogènes

$a \in G$ ,  $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  le groupe engendré par  $a$ .

**Théorème** (Classification des groupes monogènes).

Soit  $G = \langle a \rangle$  un groupe monogène. Alors

(1) Si  $o(a) = \infty$ , alors  $G \cong \mathbb{Z}$ .

(2) Si  $o(a) = m$ , alors  $G \cong \mathbb{Z}_m$ .

Démonstration.

La fonction  $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & G \\ n & \mapsto & a^n \end{array}$  est un homomorphisme. En effet

$$\begin{aligned} f(n_1 + n_2) &= a^{n_1 + n_2} \\ &= a^{n_1} a^{n_2} \\ &= f(n_1) f(n_2) \end{aligned}$$

$f$  est surjectif, car tout élément de  $G$  s'écrit  $a^n$  par définition.

Le théorème d'isomorphisme nous dit que  $\mathbb{Z}/\ker(f) \cong G$ .

(1) Le seul  $n$  t.q.  $a^n = e$  est  $n = 0$ , donc  $\ker(f) = \{0\}$ , alors  $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\{0\} \cong G$ .

(2) On veut montrer que  $\ker(f) = m\mathbb{Z}$ .

$\subseteq$ :

Supposons  $n \in \ker(f)$ , alors  $f(n) = a^n = e$ , donc  $o(a) \mid n$ , c'est-à-dire,  $n = ko(a) = km \in m\mathbb{Z}$ .

Ainsi,  $\ker(f) \subseteq m\mathbb{Z}$ .  $\blacksquare$

$\supseteq$ :

Supposons  $n \in m\mathbb{Z}$ , alors  $n = km$ , donc  $f(n) = a^n = a^{mk} = (a^m)^k = e$ .

Ainsi,  $m\mathbb{Z} \subseteq \ker(f)$ .  $\blacksquare$

Ainsi,  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \cong G$ .

$\square$

Exemple.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6 = (1 \ 3)(2 \ 6 \ 4 \ 5). o(\sigma) = \text{ppcm}(2, 4) = 4.$$

Par le théorème de classification,  $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ .

Autrement dit,  $\langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} = \{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$ .

### Section 8.3 Théorème de Cayley

$G$  un groupe quelconque,  $a \in G$ .

On définit une fonction

$$\begin{aligned}\sigma_a : G &\rightarrow G \\ b &\mapsto ab\end{aligned}$$

**Lemme.**  $\sigma_a$  est bijective.

*Démonstration.*

$\sigma_{a^{-1}}$  est un inverse de  $\sigma_a$ . En effet

$$\begin{aligned}\sigma_{a^{-1}}(\sigma_a(b)) &= \sigma_{a^{-1}}(ab) & \sigma_a(\sigma_{a^{-1}}(b)) &= \sigma_a(a^{-1}b) \\ &= a^{-1}ab & &= aa^{-1}b \\ &= b & &= b\end{aligned}$$

□

*Remarque.* Ce lemme implique que  $\sigma_a \in S(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ est bijective}\}$ .

**Définition.** On définit  $\Psi : G \rightarrow S(G)$  .

**Proposition.**  $\Psi$  est un homomorphisme de groupes.

*Démonstration.*

Soient  $a, b, c \in G$ .

$$\begin{aligned}\Psi(ab)(c) &= \sigma_{ab}(c) \\ &= (ab)c \\ &= a(bc) \\ &= a\sigma_b(c) \\ &= \sigma_a(\sigma_b(c)) \\ &= (\sigma_a \circ \sigma_b)(c)\end{aligned}$$

Ainsi,  $\sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$ , c'est-à-dire,  $\Psi(ab) = \Psi(a) \circ \Psi(b)$ .

□

## Cours 19

*Rappel.*

- *Théorème d'isomorphismes* :  $f : G \rightarrow H$ ,  $G/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$ .
  - Si  $f$  surjective,  $G/\ker(f) \cong H$ ;
  - Si  $f$  injective,  $G \cong \text{Im}(f)$ .
- $|G| = |\ker(f)| \cdot |\text{Im}(f)|$ ;
- Groupe monogène (ou cyclique)  $G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ;
- Classification
  - $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$  si  $o(a) = \infty$ ;
  - $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_m$  si  $o(a) = m$ .
- $a \in G$ 
  - $\sigma_a : G \rightarrow G$  est une bijection;
  - $\Psi : G \rightarrow S(G)$ , où  $S(G)$  est le groupe des bijections de  $G$ .

**Proposition.**  $\Psi$  est injectif.

*Démonstration.* Montrons que  $\ker(\Psi) = \{e\}$ .

Supposons que  $(a \in G) \in \ker(\Psi)$ , alors  $\Psi(a) = e$ .

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= \mathbf{1}_G \\ \sigma_a &= \mathbf{1}_G \\ \sigma_a(e) &= \mathbf{1}_G(e) \\ ae &= e \\ a &= e\end{aligned}$$

Alors,  $\ker(\Psi) \subseteq \{e\}$ .

De plus,  $\{e\} \subseteq \ker(\Psi)$  trivialement.

Ainsi,  $\ker(\Psi) = \{e\}$ , donc  $\Psi$  est injectif.  $\square$

**Théorème** (Cayley). *Tout groupe  $G$  est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique  $S(E)$ .*

*Démonstration.*

On prend  $E = G$ .  $\Psi : G \rightarrow S(G)$  est un homomorphisme injectif.

Alors,  $G \cong \text{Im}(\Psi) \leqslant S(G)$ .  $\square$

*Exemple.*

$$\mathbb{D}_3 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}.$$

Calculons  $\Psi$ .

$$\begin{aligned}\Psi(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \varepsilon\varepsilon & \varepsilon\alpha & \varepsilon\beta & \varepsilon\gamma & \varepsilon\rho & \varepsilon\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \alpha\varepsilon & \alpha\alpha & \alpha\beta & \alpha\gamma & \alpha\rho & \alpha\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \alpha & \varepsilon & \rho & \sigma & \beta & \gamma \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \alpha) (\beta \quad \rho) (\gamma \quad \sigma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\beta) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \beta\varepsilon & \beta\alpha & \beta\beta & \beta\gamma & \beta\rho & \beta\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \beta & \sigma & \varepsilon & \rho & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \beta) (\alpha \quad \sigma) (\gamma \quad \rho)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \gamma\varepsilon & \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma\gamma & \gamma\rho & \gamma\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \gamma & \rho & \sigma & \varepsilon & \alpha & \beta \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \gamma) (\alpha \quad \rho) (\beta \quad \sigma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\rho) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \rho\varepsilon & \rho\alpha & \rho\beta & \rho\gamma & \rho\rho & \rho\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \rho & \gamma & \alpha & \beta & \sigma & \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \rho \quad \sigma) (\alpha \quad \gamma \quad \beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \sigma\varepsilon & \sigma\alpha & \sigma\beta & \sigma\gamma & \sigma\rho & \sigma\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \rho & \sigma \\ \sigma & \beta & \gamma & \alpha & \varepsilon & \rho \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon \quad \sigma \quad \rho) (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\end{aligned}$$

*Remarque.* Le groupe  $S(G)$  est toujours plus grand que  $G$ .

*Exemple.* Si on prend  $G = S_n$ ,  $\Psi : S_n \rightarrow S(S_n)$ , où  $|S_n| = n!$  et  $|S(S_n)| = (n!)!$ .

*Exemple.*  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$ .

$$\Psi : G \rightarrow S(G) \cong S_4$$

Numérotions les éléments de  $G$  comme  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

$$\begin{aligned}\Psi(\bar{0}, \bar{0}) &= \mathbf{1} & \Psi(\bar{0}, \bar{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \Psi(\bar{1}, \bar{0}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \Psi(\bar{1}, \bar{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & & &= (1 \quad 2) (3 \quad 4) & &= (1 \quad 3) (2 \quad 4) & &= (1 \quad 4) (2 \quad 3)\end{aligned}$$

Cayley nous dit que  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \{1, (1 \quad 2)(3 \quad 4), (1 \quad 3)(2 \quad 4), (1 \quad 4)(2 \quad 3)\}$ .

## Actions de groupes

Soient  $G$  un groupe et  $E$  un ensemble.

**Définition.** Une *action* de  $G$  sur  $E$  est une fonction  $\bullet : G \times E \rightarrow E$ , satisfaisant à

- (1)  $\forall x \in E, e \bullet x = x;$
  - (2)  $\forall a, b \in G, \forall x \in e, a \bullet (b \bullet x) = (ab) \bullet x.$

*Exemple.*

- (1)  $G = GL(n, \mathbb{R})$ ,  $E = \mathbb{R}^n$ .

$$\bullet : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(M, \vec{v}) \mapsto M\vec{v}$$

est une action.

- (2)  $G = S_n$ ,  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ .

$$\bullet : S_n \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{s, 2, \dots, n\}$$

$$(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$$

est une action.

- (3)  $G = \mathbb{Z}_2$ ,  $E = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \subseteq \mathbb{R}^2$ .  
 $\mathbb{Z}_2$  agit sur  $E$  par

$$\bar{0} \bullet (x, y) = (x, y)$$

- $$(4) \quad G = \mathbb{Z}_2, \quad E = \text{recycle symbol} \subset \mathbb{R}^2$$

$G$  agit sur  $E$  où  $\bar{1}$  est une rotation de  $120^\circ$  et  $\bar{2}$  est une rotation de  $240^\circ$

- (5)  $\mathbb{D}_3$  agit sur un triangle équilatéral

- (6)  $G$  agit sur lui-même par

$$\bullet : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto ab$$

- (7)  $G$  agit sur lui-même aussi par

$$\bullet : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto aba^{-1}$$

En. effet.

- (a) Soit  $b \in G$ , alors

$$e \bullet b = ebe^{-1} \\ = b$$

- (b) Soient  $a, b, c \in G$

$$\begin{aligned}
 (ab) \bullet c &= (ab)c(ab)^{-1} \\
 &= abcb^{-1}a^{-1} \\
 &= a(b \bullet c)a^{-1} \\
 &= a \bullet (b \bullet c)
 \end{aligned}$$

■

**Définition.** Une *action* de  $G$  sur  $E$  est un homomorphisme  $\Psi : G \rightarrow S(E)$ .

Pour passer de la première définition à la deuxième, on pose  $\Psi(a) = \sigma_a$ , où  $\sigma_a(x) = a \bullet x$ .

Pour passer de la deuxième définition à la première, on pose  $a \bullet x = (\Psi(a))(x)$ .

**Définition.**  $G$  un groupe qui agit sur un ensemble  $E$ .

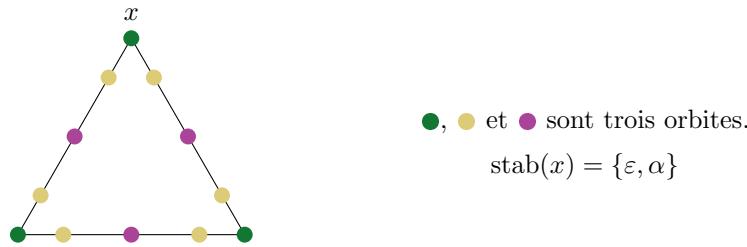
Soit  $x \in E$ .

L'*orbite* de  $x$  est l'ensemble  $G \bullet x = \{a \bullet x \mid a \in G\} \subseteq E$ .

**Définition.** Soit  $x \in E$ .

Le *stabilisateur* de  $x$  est  $\text{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leqslant G$ .

*Exemple.* avec  $\mathbb{D}_3$ <sup>2</sup>



## Cours 20

*Rappel.*

- Théorème de Cayley
  - $\Psi : G \rightarrow S(G)$ , où  $\sigma_a(b) = ab$  est un homomorphisme injectif;
  - $G \cong \text{Im}(\Psi) \leqslant S(G)$ .
- Action de  $G$  sur  $E$ 
  - $a \bullet x \in E$ 
    - (1)  $e \bullet x = x$
    - (2)  $(ab) \bullet x = a \bullet (b \bullet x)$
  - homomorphisme  $\Psi : G \rightarrow S(E)$ 
    - $a \mapsto (x \mapsto a \bullet x)$
- Orbite de  $x \in E$  :  $G \bullet x = \{a \bullet x \in E \mid a \in G\} \subseteq E$
- Stabilisateur de  $x \in E$  :  $\text{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leqslant G$

*Remarque.*  $x \bullet a$  n'est pas défini.

**Proposition.**  $\text{stab}(x) \leqslant G$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} e \bullet x &= x \\ \Rightarrow e &\in \text{stab}(x) \\ \Rightarrow \text{stab}(x) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Soient  $a, b \in \text{stab}(x)$ . On veut vérifier que  $ab^{-1} \in \text{stab}(x)$ , c'est-à-dire  $(ab^{-1}) \bullet x = x$ .

Remarquons que  $b \bullet x = x$ , alors  $b^{-1} \bullet (b \bullet x) = b^{-1} \bullet x$ , donc  $(b^{-1}b) \bullet x = b^{-1} \bullet x$ , donc  $e \bullet x = b^{-1} \bullet x$ , ainsi  $x = b^{-1} \bullet x$ .

---

2. voir p.10

On a donc

$$\begin{aligned}(ab^{-1}) \bullet x &= a \bullet (b^{-1} \bullet x) \\ &= a \bullet x \\ \text{car } a \in \text{stab}(x) &= x\end{aligned}$$

Ainsi,  $ab^{-1} \in \text{stab}(x)$ . □

**Proposition.** La relation  $x \sim y$  si, et seulement si,  $\exists a \in G$  t.q.  $y = a \bullet x$  est une équivalence donc les classes d'équivalence sont les orbites, c'est-à-dire,  $\bar{x} = G \bullet x$ .

En particulier, les orbites forment une partition de  $E$ .

Démonstration.

Équivalence.

(Refl) Soit  $x \in E$ .

Or,  $x = e \bullet x$ , donc  $x \sim x$ .

(Sym) Soient  $x, y \in E$  t.q.  $x \sim y$ .

Ainsi,  $\exists a \in G$  t.q.  $y = a \bullet x$ .

Or,  $a^{-1} \in G$ , donc  $a^{-1} \bullet y = a^{-1} \bullet (a \bullet x) = (a^{-1}a) \bullet x = x$ .

Ainsi,  $y \sim x$ .

(Trans) Soient  $x, y, z \in E$  t.q.  $x \sim y$  et  $y \sim z$ . Alors,  $\exists a, b \in G$  t.q.  $y = a \bullet x$  et  $z = b \bullet y$ .

Or,  $z = b \bullet y = b \bullet (a \bullet x) = (ba) \bullet x$ , où  $ba \in G$ .

Ainsi,  $x \sim z$ . ■

Les classes d'équivalence sont les orbites.

La classe d'équivalence de  $x \in E$ , par définition, est

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \{y \in E \mid x \sim y\} \\ &= \{y \in E \mid \exists a \in G, y = a \bullet x\} \\ &= \{a \bullet x \mid a \in G\} \\ &= G \bullet x\end{aligned}$$

■

□

Exemple.

(1)  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ ,  $E = \mathbb{R}^2$  avec l'action  $M \bullet \vec{v} = M\vec{v}$  la multiplication matricielle usuelle.

Calculons l'orbite d'un vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned}G \bullet \vec{v} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Si  $y = 0$ ,  $G \bullet \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\}$ .

Si  $y \neq 0$ ,  $\{x + ay \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ , donc  $G \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$ .

(2)  $G = S_3$ ,  $E = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ .

$S_3$  agit sur un sous-ensemble en agissant sur chaque élément du sous-ensemble, c'est-à-dire, par exemple,  $\sigma \bullet \{i, j\} = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ .

Les orbites de l'action sont

$$\{\emptyset\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}; \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}; \{\{1, 2, 3\}\}$$

## Cours 21

Rappel.

- Orbite d'un élément  $x \in E$ 
  - $G \bullet x = \{a \bullet x \mid a \in G\}$
- Stabilisateur de  $x \in E$ 
  - $\text{stab}(x) = \{a \in G \mid a \bullet x = x\} \leqslant G$
- Les orbites forment une *partition* de  $E$ 
  - la même que la relation  $x \sim y \Leftrightarrow y = a \bullet x$

**Lemme.**

Si  $y = a \bullet x$ , alors  $a^{-1} \bullet y = x$ .

Démonstration.

$$\begin{aligned} y &= a \bullet x \\ a^{-1} \bullet y &= (a^{-1}a) \bullet x \\ &= x \end{aligned}$$

□

**Proposition.**

Si  $y = a \bullet x$ , alors  $\text{stab}(y) = a \text{stab}(x)a^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in \text{stab}(x)\}$ .

En particulier, si  $x$  et  $y$  sont dans la même orbite, alors  $\text{stab}(x) \cong \text{stab}(y)$ .

Démonstration.

$\subseteq$  :

Supposons  $b \in \text{stab}(y)$ . Alors,  $b \bullet y = y$ .

Écrivons  $b = a(a^{-1}ba)b^{-1}$ .

De plus

$$\begin{aligned} (a^{-1}ba) \bullet x &= a^{-1} \bullet (b \bullet (a \bullet x)) \\ &= a^{-1} \bullet (b \bullet y) \\ &= a^{-1} \bullet y \\ &= x \end{aligned}$$

Donc,  $a^{-1}ba \in \text{stab}(x)$ , alors  $b \in a \text{stab}(y)a^{-1}$ .

■

$\supseteq$  :

Supposons  $b \in \text{stab}(x)$ , alors  $aba^{-1} \in a \text{stab}(x)a^{-1}$ .

$$\begin{aligned} (aba^{-1}) \bullet y &= a \bullet (b \bullet (a^{-1} \bullet y)) \\ &= a \bullet (b \bullet x) \\ &= a \bullet x \\ &= y \end{aligned}$$

Alors,  $aba^{-1} \in \text{stab}(y)$ .

■

Ainsi,  $\text{stab}(y) = a \text{stab}(x)a^{-1}$ .

□

De plus,

$$\begin{array}{ccc} \text{On définit } f : \text{stab}(x) & \rightarrow & \text{stab}(y) \\ h & \mapsto & aha^{-1} \end{array} .$$

$$\begin{array}{ccc} f \text{ est bijective, car son inverse est } g : \text{stab}(y) & \rightarrow & \text{stab}(x) \\ b & \mapsto & a^{-1}ba \end{array} .$$

En effet,

$$\begin{array}{ll} f(g(i)) = f(a^{-1}ia) & g(f(i)) = g(aia^{-1}) \\ = aa^{-1}iaaa^{-1} & = a^{-1}aia^{-1}a \\ = i & = i \end{array}$$

$f$  est un homomorphisme, car

$$\begin{aligned} f(h_1h_2) &= a(h_1h_2)a^{-1} \\ &= ah_1a^{-1}ah_2a^{-1} \\ &= f(h_1)f(h_2) \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  est un isomorphisme entre  $\text{stab}(x)$  et  $\text{stab}(y)$ . ■

Exemple.

- $G = \mathbb{D}_6$ , les isométries d'un hexagone régulier, et  $E = \{\text{diagonales de l'hexagone}\}$ .

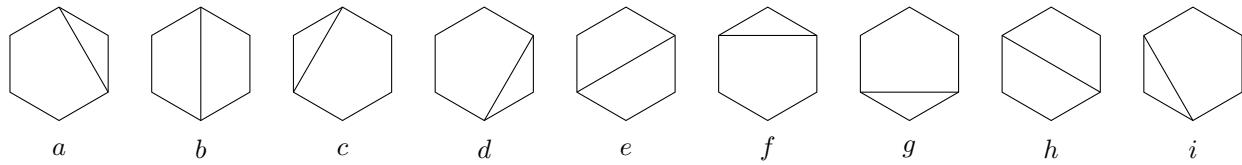


FIGURE 8.1 – Représentation des diagonales d'un hexagone régulier

Calculons les orbites :

$$o_1 = \{a, c, d, f, g, i\}$$

$$o_2 = \{b, e, h\}$$

Calculons les stabilisateurs :

$$\text{stab}(a) = \{\varepsilon, \mu\}$$

$$\text{stab}(b) = \{\varepsilon, \phi, \eta, \lambda\}$$

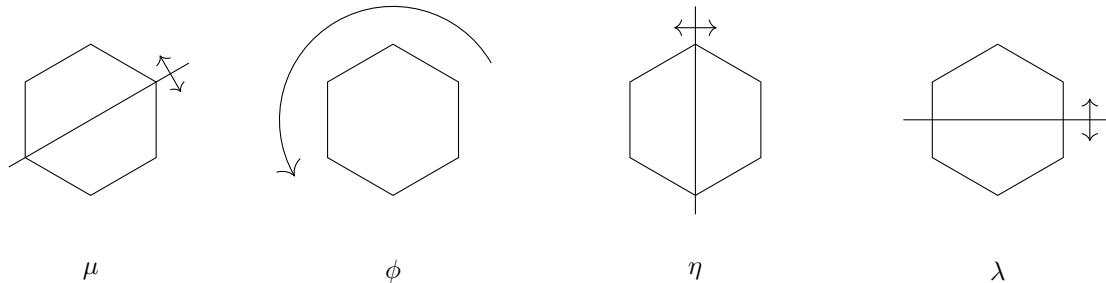
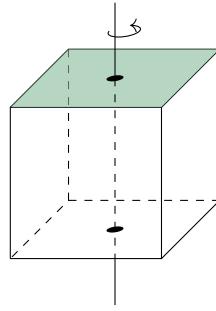


FIGURE 8.2 – Représentation des isométries présentes dans les stabilisateurs

- Combien un cube a-t-il de rotations ?



- Combien de rotations préservent la face du haut ?  
4, en incluant l'identité.
- Il y a 6 faces et 4 façons d'envoyer la face du haut à une face quelconque, donc il y a  $4 \times 6 = 24$  rotations au total.

**Théorème** (orbite-stabilisateur).

Soit  $G$  un groupe fini qui agit sur  $E$  un ensemble fini. Soit  $x \in E$ .

Alors,  $|G| = |G \bullet x| \cdot |\text{stab}(x)|$ .

*Démonstration.*

Posons  $H := \text{stab}(x)$ . Notons  $G/H := \{aH \mid a \in G\}$  l'ensemble des classes d'équivalence à gauche modulo  $H$ .

On définit  $\begin{array}{rcl} f : G/H & \rightarrow & G \bullet x \\ aH & \mapsto & a \bullet x \end{array}$ .

On veut montrer que  $f$  est bijective.

$f$  est définie sans ambiguïté.

Supposons que  $aH = bH$ , avec  $a, b \in G$ . Alors,  $a^{-1}b \in H$ . Donc,

$$\begin{aligned} (a^{-1}b) \bullet x &= x \\ a^{-1} \bullet (b \bullet x) &= x \\ b \bullet x &= a \bullet x \\ f(bH) &= f(aH) \end{aligned}$$

■

$f$  est bijective.

$f$  est injective.

Soient  $aH, bH \in G/H$  t.q.  $f(aH) = f(bH)$ . Alors

$$\begin{aligned} a \bullet x &= b \bullet x \\ x &= a^{-1} \bullet (b \bullet x) \\ &= (a^{-1}b) \bullet x \\ \Rightarrow a^{-1}b &\in \text{stab}(x) = H \\ \Rightarrow aH &= bH \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  est injective.

#

$f$  est surjective.

Soit  $y \in G \bullet x$ , alors,  $\exists a \in G$  t.q.  $a \bullet x = y$ , donc  $f(aH) = y$ .

Ainsi,  $f$  est surjective.

#

Comme  $f$  est injective et surjective,  $f$  est bijective.

■

Ainsi,  $|G/H| = |G \bullet x|$ , c'est-à-dire  $\frac{|G|}{|H|} = |G \bullet x|$ , donc  $|G| = |G \bullet x| \cdot |H|$ .

□

*Exemple* (revenons au cube).

$$E_1 = \{\text{faces du cube}\}, E_2 = \{\text{sommets du cube}\}.$$

$G$  agit sur  $E_2$ . Il n'a qu'une seule orbite et  $|E_2| = 8$ .

$$\text{stab}(a) = \{\varepsilon, \theta, \phi\}.$$

$$24 = |G| = |E_2| \cdot |\text{stab}(a)| = 8 \times 3.$$

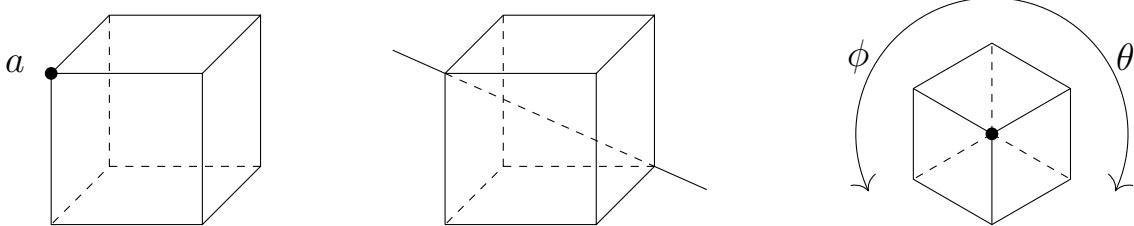


FIGURE 8.3 – Représentation du sommet  $a$  et des rotations  $\theta$  et  $\phi$

$G$  agit aussi sur  $A = \{\text{arêtes du cube}\}$ .

Il y a encore une seule orbite,  $A$  et  $|A| = 12$ .

$$\text{stab}(\overline{\alpha\beta}) = \{\varepsilon, \rho\}.$$

$$24 = |G| = |A| \cdot |\text{stab}(\overline{\alpha\beta})| = 12 \times 2.$$

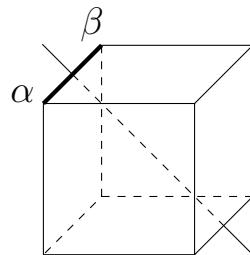


FIGURE 8.4 – Représentation de l'arête  $\overline{\alpha\beta}$  et de l'axe de la rotation  $\rho$

*Notation.* Nous noterons le groupe des rotation d'un cube comme  $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube})$ .

**Proposition.**

$$\overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube}) \text{ est isomorphe à } S_4.$$

*Idée de la démonstration.*

On regarde l'action de  $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube})$  sur  $E = \{\text{paires de sommets opposés}\}$ .

$$\text{Cette action définit un homomorphisme } \overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube}) \rightarrow S_4.$$

*Exemple.*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3 \ 2)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 3 \ 4)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 4)$

Cet homomorphisme est surjectif et injectif, donc bijectif. #

**Proposition.**

$$\overset{+}{\text{Isom}}(\text{tétraèdre}) \text{ est isomorphe à } A_4, \text{ le sous-groupe de } S_4 \text{ contenant seulement les permutations de signe positif.}$$

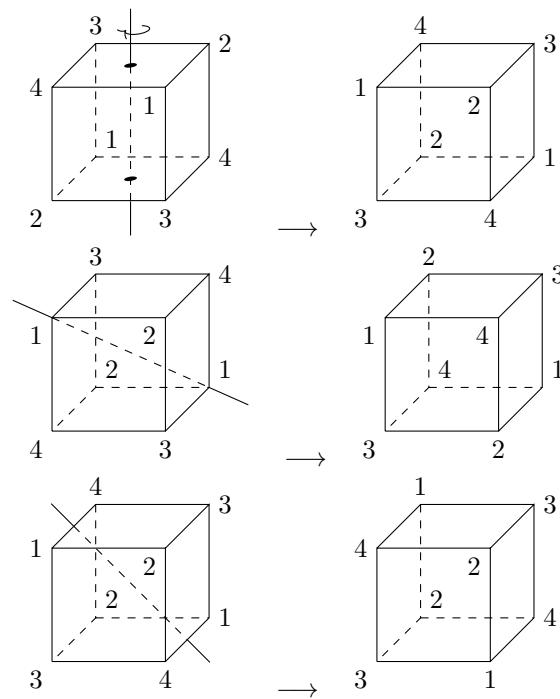


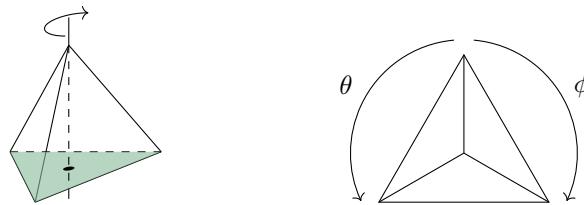
FIGURE 8.5 – Représentation des rotations de l'exemple précédent

**Cours 22***Rappel.*

- Orbite-stabilisateur
  - $|G| = |\text{stab}(x)| \cdot |G \bullet x|$
  - idée :  $\begin{array}{ccc} G/\text{stab}(x) & \rightarrow & G \bullet x \\ a(\text{stab}(x)) & \mapsto & a \bullet x \end{array}$  est une bijection.
- $\text{Isom}^+(\text{cube}) \cong S_4$ , paires de sommets opposés
- $\text{Isom}^+(\text{tétraèdre}) \cong A_4$

*Exemple.*

$G = \text{Isom}^+(\text{tétraèdre})$  agit sur les 4 faces, avec  $F = \{\text{faces}\}$ . Il y a une seule orbite de taille 4.  $\text{stab}(f_1) = \{\varepsilon, \theta, \phi\}$ .  
 $|\text{stab}(f_1)| = 3$ ,  $|G| = |F| \cdot |\text{stab}(f_1)| = 4 \times 3 = 12$ .

FIGURE 8.6 – Représentation du tétraèdre, de l'axe de rotation et des rotations  $\theta$  et  $\phi$ *Exemple.*

Les cinq solides platoniques :

- cube
- tétraèdre
- octahèdre
- dodécahèdre
- icosaèdre

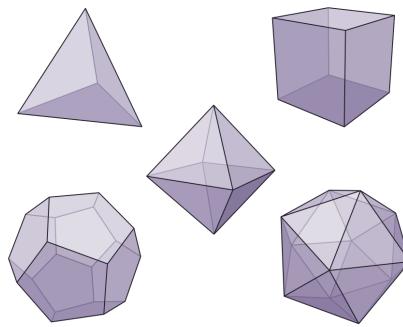


FIGURE 8.7 – Solides platoniques. Image tirée de Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic\\_solid](https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid)

#### Définition (Dualité).

On met un sommet au milieu de chaque face et on relie les sommets à ceux associés aux faces adjacentes.

On associe les faces à des sommets, les arêtes à des arêtes, et les sommets à des faces.

Le cube et l'octaèdre sont duaux.

Le tétraèdre est dual à lui-même.

Le dodécahèdre et l'icosaèdre sont duaux.

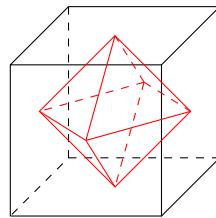


FIGURE 8.8 – Représentation de la dualité du cube et de l'octaèdre

#### Proposition.

$\text{Isom}(\text{dodécahèdre}) \cong^+ \text{Isom}(\text{icosaèdre}) \cong^+ A_5$ , qui contient 60 éléments.

Les sommets d'un icosaèdre sont les mêmes que 5 cubes, donc chaque rotation permute ces 5 cubes.

*Exemple (Combinaisons).* Le nombre de manières de choisir  $k$  éléments parmi  $n$  sans remise.

On veut compter les sous-ensembles de taille  $k$  dans un ensemble de taille  $n$ .

Prenons  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $n = 4$ ,  $k = 2$ . On a

$$\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{3, 4\} \Rightarrow \binom{4}{2} = 6$$

Le groupe  $S_n$  agit sur  $E_{n,k}$  des sous-ensembles de taille  $k$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Par exemple

$$(1 \ 2 \ 3) \bullet \{1, 4\} = \{(1 \ 2 \ 3) 1, (1 \ 2 \ 3) 4\} = \{2, 4\}$$

Tout ensemble de  $k$  éléments peut être envoyé à tout autre par une permutation. En effet,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

avec n'importe quelle combinaison des autres éléments pour compléter  $\sigma$ .

$\sigma \bullet \{1, 2, \dots, k\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , donc l'orbite de  $\{1, 2, \dots, k\}$  est  $E_{n,k}$ . Il n'y a qu'une seule orbite.

De plus,  $\text{stab}(\{1, 2, \dots, k\}) \cong S_k \times S_{n-k}$  en permutant les  $k$  premiers éléments, puis les  $n-k$  derniers éléments. Donc, orbite-stabilisateur nous dit  $|S_n| = |E_{n,k}| \cdot |\text{stab}(\{1, 2, \dots, k\})|$ , c'est-à-dire,  $n! = |E_{n,k}| \cdot (k!)(n-k)!$ , d'où  $|E_{n,k}| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

*Exemple* (motivation du prochain théorème).

Combien y a-t-il de façons de colorer les faces d'un cube avec deux couleurs, à symétrie près ?

- (1) Toutes les faces de la même couleur,  
2 possibilités ;
- (2) Une face d'une couleur et cinq de l'autre,  
2 possibilités ;
- (3) Deux faces d'une couleur et quatre de l'autre  
4 possibilités ;
- (4) Trois faces de chaque couleur  
2 possibilités.

Donc, au total,  $2 + 2 + 4 + 2 = 10$  coloriages possibles.

*Exemple* (autre motivation).

Combien y a-t-il de façons de colorer les sommets d'un hexagone avec un certain nombre de couleurs, à symétrie près ?

## Cours 23

*Rappel.*

- $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube}) \cong \overset{+}{\text{Isom}}(\text{octahèdre}) \cong S_4$ , ordre 24 ;
- $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{tétraèdre}) \cong A_4$ , ordre 12 ;
- $\overset{+}{\text{Isom}}(\text{icosahèdre}) \cong \overset{+}{\text{Isom}}(\text{dodécaèdre}) \cong A_5$ , ordre 60.

*Notation.*  $E/G = \{G \bullet x \mid x \in E\}$  est l'ensemble des orbites.

*Exemple.* Combien de façons de colorer les faces d'un cube avec  $k$  couleurs.

$G = \overset{+}{\text{Isom}}(\text{cube})$ ,  $E = \{\text{cubes colorés}\}$ .

On veut compter  $|E/G|$ .

*Notation.*  $E^g = \{x \in E \mid g \bullet x = x\}$  est l'ensemble des éléments de  $E$  *invariants* par  $g \in G$ .

*Exemple.* Avec  $g$  une rotation de  $90^\circ$  autour d'un axe passant par le centre de deux faces opposées.

Dans  $E^g$ , les quatre faces des côtés sont de la même couleur et les deux autres faces sont libres.

*Exemple.*  $G = \mathbb{D}_3$  qui agit sur  $E = \{\text{les sommets d'un triangle}\}$ .

$$\begin{aligned} E^\rho &= \emptyset \\ E^\varepsilon &= E \\ E^\alpha &= \{1\} \end{aligned}$$

## Lemme de Burnside

**Théorème** (Lemme de Burnside).

$$|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g|$$

*Démonstration.*

Considérons  $X = \{(g, x) \in G \times E \mid g \bullet x = x\}$ .

Comptons le nombre d'éléments de  $X$  de deux manières différentes.

(1) On fixe  $g \in G$ . On a  $|E^g|$  éléments  $x \in E$  t.q.  $g \bullet x = x$ . Donc

$$|X| = \sum_{g \in G} |E^g|$$

(2) On fixe  $x \in E$ . Les éléments  $g \in G$  t.q.  $g \bullet x = x$  sont exactement ceux de  $\text{stab}(x)$ . Donc

$$|X| = \sum_{x \in E} |\text{stab}(x)| \quad (*)$$

Si deux  $x, y \in E$  sont dans une même orbite,  $|\text{stab}(x)| = |\text{stab}(y)|$ .

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_m$  un ensemble de représentants des orbites, avec  $m = |E/G|$ .

On a donc

$$|X| = \sum_{i=1}^m |\text{stab}(x_i)| |G \bullet x_i|$$

du théorème orbite-stabilisateur

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m |G| \\ &= m \cdot |G| \end{aligned} \quad (**)$$

Comme  $(*) = (**)$ , on a

$$\begin{aligned} m |G| &= \sum_{g \in G} |E^g| \\ |E/G| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g| \end{aligned}$$

□

*Exemple.* Combien peut-on faire de colliers à six billes avec  $k$  sortes de billes ?

$G = \mathbb{D}_6$ ,  $E = \{\text{colliers à six billes fixes}\}$ .

$|G| = 12$ .

$$\begin{aligned} |E/G| &= \frac{1}{12} \left( \underbrace{k^6}_{\varepsilon} + \underbrace{2k}_{\pm\rho} + \underbrace{2k^2}_{\pm\rho^2} + \underbrace{k^3}_{\rho^3} + \underbrace{3k^3}_{\alpha} + \underbrace{3k^4}_{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{12} (k^6 + 2k + 2k^2 + 4k^3 + 3k^4) \end{aligned}$$

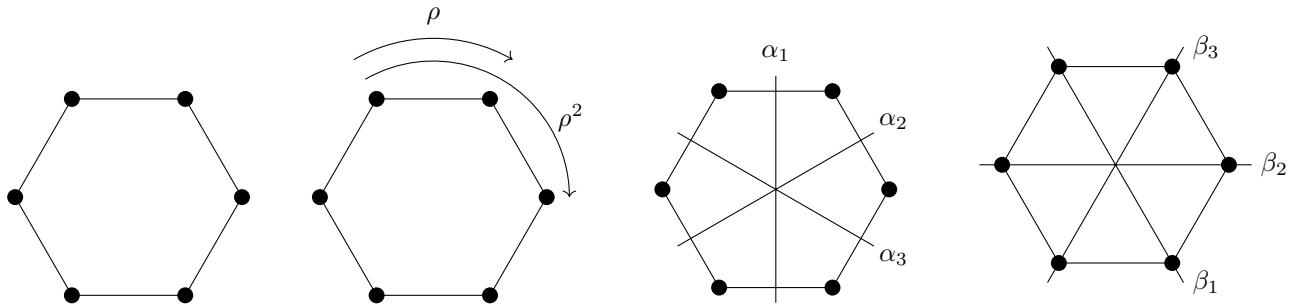


FIGURE 8.9 – Représentation du collier et de ses symétries

*Exemple.* Combien de colorages possibles pour les faces d'un cube avec  $k$  couleurs ?

$$G = \text{Isom}(\text{cube}) \cong S_4, E = \{\text{coloriages d'un cube fixe}\}.$$

$$\begin{aligned} |E/G| &= \frac{1}{24} \left( \underbrace{k^6}_e + \underbrace{6k^3}_\alpha + \underbrace{3k^4}_\beta + \underbrace{8k^2}_\gamma + \underbrace{6k^3}_\delta \right) \\ &= \frac{1}{24} (k^6 + 8k^2 + 12k^3 + 3k^4) \end{aligned}$$

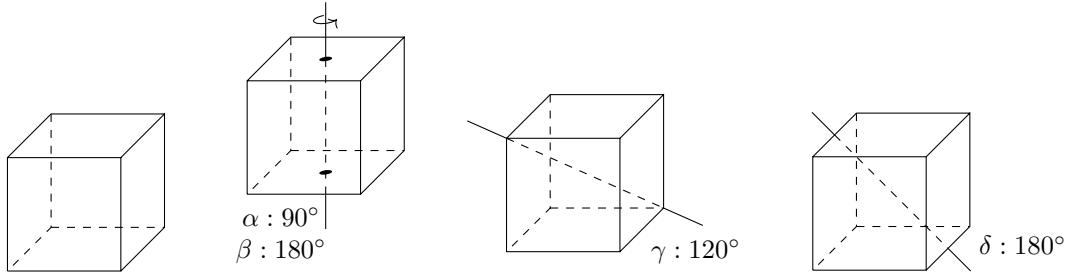


FIGURE 8.10 – Représentation du cube et de ses rotations

*Exemple.* Combien de manières y a-t-il de colorer les quatre sommets d'un tétraèdre avec  $k$  couleurs ?

$$G = \text{Isom}(\text{tétraèdre}) \cong A_4, E = \{\text{coloriages d'un tétraèdre fixe}\}.$$

$$\begin{aligned} |E/G| &= \frac{1}{12} \left( \underbrace{k^4}_e + \underbrace{8k^2}_\alpha + \underbrace{3k^2}_\beta \right) \\ &= \frac{1}{12} (k^4 + 11k^2) \end{aligned}$$

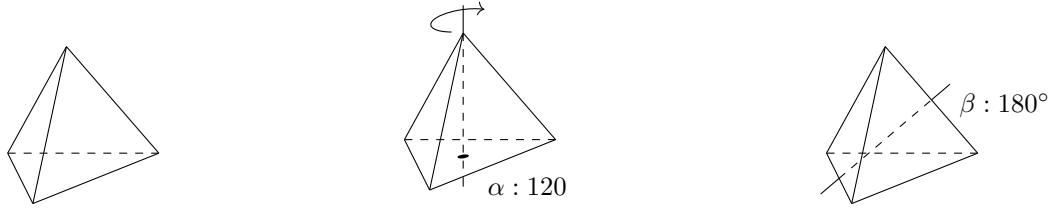


FIGURE 8.11 – Représentation du tétraèdre et de ses rotations

## Cours 24

*Rappel.*

- $E^g = \{x \in E \mid g \bullet x = x\}$ , éléments  $g$ -invariants
- Burnside

—  $|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g|$

—  $E/G = \{\text{orbites de } G \text{ sur } E\} = \{G \bullet x \mid x \in E\}$

*Exemple.*  $E = \{\text{graphes étiquetés à trois sommets}\} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $G = S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ .  $G$  agit sur  $E$  par permutation des sommets.

$E^e = E$ ,  $|E^e| = |E| = 2^3 = 8$ .

$E^{(1\ 2)} = \{a, b, g, h\}$ .

$$E^{(1 \ 2 \ 3)} = \{a, h\}.$$

$E/G = \{\text{graphes non-étiquetés à trois sommets}\} = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e, f, g\}, \{h\}\}.$

$$|E/G| = 4.$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g| = \frac{1}{6} \left( \underbrace{8}_e + \underbrace{3 \times 4}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} + \underbrace{2 \times 2}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \right) = \frac{24}{6} = 4.$$

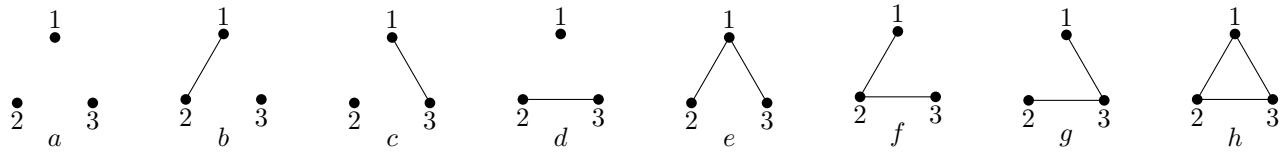


FIGURE 8.12 – Représentation de  $E$

# Compléments/rappels

Le signe d'une permutation  $\sigma$  :

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\} = C_2$  est un homomorphisme, donc  $\text{sgn}(\sigma\eta) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\eta)$ .

**Proposition.** *Toute permutation se décompose en un produit de cycles disjoints.*

**Proposition.** *Tout cycle se décompose en produit de transpositions.*

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_l) = (a_1 \ a_l) (a_1 \ a_{l-1}) (a_1 \ a_{l-2}) \cdots (a_1 \ a_2)$$

Ainsi, tout  $\sigma \in S_n$  se décompose en produit de transpositions.

**Proposition.**  $\text{sgn}((1 \ 2)) = -1$ , avec  $(1 \ 2) \in S_n$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \text{sgn}((1 \ 2)) &= \prod_{i < j} \frac{((1 \ 2))(i) - ((1 \ 2))(j)}{i - j} \\ &= \frac{(12)(1) - (12)(2)}{1 - 2} \frac{(12)(1) - (12)(3)}{1 - 3} \frac{(12)(1) - (12)(4)}{1 - 4} \cdots \frac{(12)(2) - (12)(3)}{2 - 3} \cdots \frac{(12)(n-1) - (12)(n)}{(n-1) - n} \\ &= \frac{2-1}{1-2} \cdot \prod \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \end{aligned}$$

avec  $i < j$  et  $\sigma(i) < \sigma(j)$ , donc le produit vaut 1

$$= -1$$

□

De plus,  $\text{sgn}(\eta\sigma\eta^{-1}) = \text{sgn}(\eta)\text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\eta)^{-1} = \text{sgn}(\sigma)$ .

$\text{sgn}((1 \ j)) = \text{sgn}((2 \ j)(1 \ 2)(2 \ j)) = \text{sgn}((1 \ 2)) = -1$ .

$\text{sgn}((i \ j)) = \text{sgn}((1 \ i)(1 \ j)(1 \ i)) = -1$ .

Ainsi, si  $\sigma$  se décompose en  $k$  transpositions, alors  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ .

*Exemple.*

Un jouet composé de deux roulettes avec les chiffres de 1 à 9. Les deux roulettes peuvent tourner dans n'importe quel sens. Il y a toujours un chiffre affecté par les deux roulettes en même temps.

Est-il possible de jouer à ce jeu et d'obtenir l'état suivant ?

On peut modéliser ce jouet à l'aide de permutations. Soit

$$\left\langle \underbrace{(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)}_{\alpha}, \underbrace{(2 \ 6 \ 7 \ 9 \ 8)}_{\beta} \right\rangle \leq S_9$$

le plus petit sous-groupe de  $S_9$  qui contient  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\{\varepsilon, \alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \alpha^2, \beta^2, \dots\}$ .

On a  $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\beta) = 1$ . Alors, toutes les positions du jeu sont obtenues en appliquant une permutation paire à  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , mais  $(8 \ 9)$  est impaire.

Ainsi, l'état désiré ne peut pas être obtenu.

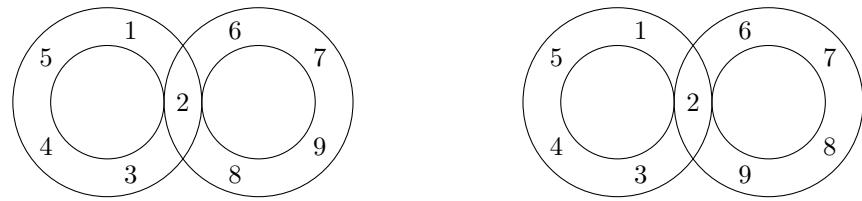


FIGURE 8.13 – Représentation du jouet dans l'état initial et l'état final désiré