

MAT346 - Analyse II
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

Table des matières

1	Intégration	2
1	Intégrales de Riemann	2
	Critère d'intégrabilité	4
	Inégalité du triangle	7
	Théorème de Darboux	9

Chapitre 1 Intégration

Section 1.1 Intégrales de Riemann

Notation.

$\mathcal{B}[c, d] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}.$

$\mathcal{R}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}.$

$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}.$

On suppose nos fonctions bornées.

Définition.

- a) Une partition de $[a, b]$ est un ensemble fini de points $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$ t.q. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.
- b) L'ensemble des partitions de $[a, b]$ est $\Omega[a, b]$.
- c) On dit Δ' est *plus fine* que Δ , noté $\Delta' \geq \Delta$, si $\Delta' \supseteq \Delta$.
- d) *Raffinement commun* de Δ_1 et Δ_2 , noté $\Delta_1 \vee \Delta_2$, est la partition de $[a, b]$ formée de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ordonnés.
- e) La *norme* de Δ , notée $\|\Delta\|$, est $\|\Delta\| = \max_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$.
- f)

$$\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$
$$\underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Remarque.

$$\|x\| \geq 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$
$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

Définition.

- a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de f pour la partition Δ est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de f pour la partition Δ est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Proposition.

a)

$$\underline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, \Delta), \forall \Delta \in \Omega[a, b]$$

b)

$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta)$$

c)

$$\overline{S}(f, \Delta) \leq \overline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a)$$

Proposition. Si $\Delta' \geq \Delta$, alors $\overline{S}(f, \Delta') \leq \overline{S}(f, \Delta)$.

démonstration.

Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$$

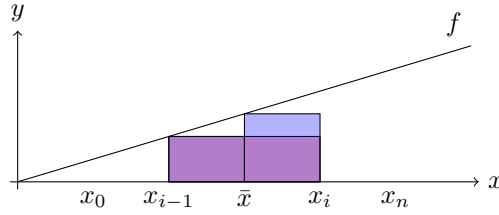
On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})] \\ &\quad - [\overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) + \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x})] \\ &= (x_i - \bar{x}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])] \\ &\quad + (\bar{x} - x_{i-1}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Proposition. Si $\Delta' \geq \Delta$, alors $\underline{S}(f, \Delta') \geq \underline{S}(f, \Delta)$

démonstration.



□

Remarque. $\underline{S}(f, \Delta) = -\overline{S}(-f, \Delta)$.

Corollaire. $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Omega[a, b], \underline{S}(f, \Delta_1) \leq \overline{S}(f, \Delta_2)$

démonstration.

On a $\Delta_1 \vee \Delta_2 \geq \Delta_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta_1) &\leq \underline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_2) \end{aligned}$$

□

Définition.

- a) La somme par défaut de f est $\underline{S}(f) = \sup_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$.
- b) La somme par excès de f est $\overline{S}(f) = \inf_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$.

Théorème. $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ *démonstration.*Soit $\Delta_1 \in \Omega[a, b]$ $\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ est le plus petit majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a, b]$.Du corollaire précédant, on a que $\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.Donc, $\overline{S}(f, \Delta_1)$ est un majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$.Ainsi, $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.De même, $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ est le plus grand minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a, b]$.Comme $\underline{S}(f)$ est un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$. □**Définition.**

Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. On dit que f est *intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$* si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et on note $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
La valeur commune de $\underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f)$ est notée $\int_a^b f(x) dx$

Critère d'intégrabilité**Théorème** (Critère d'intégrabilité).Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$ si, et seulement si, $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega[a, b])$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.*démonstration.* (\Rightarrow) Supposons $f \in \mathcal{R}[a, b]$.Soit $\varepsilon > 0$.On a $\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$.Comme $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ ne peut minorer $\overline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.De même, $\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$.Comme $\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ ne peut majorer $\underline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_2 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$.Posons $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
&= (\overline{S}(f) - \underline{S}(f)) + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

(\Leftarrow) Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $\exists \Delta$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

Mais alors,

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Du théorème du sandwich, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$, car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Corollaire. *S'il existe $\Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) = \underline{S}(f, \Delta)$, alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Théorème. *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

démonstration.

Soit $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par la proposition d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n\varepsilon > b - a$.

Rappel.

f est uniformément continue sur $[a, b]$ si $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Rappel.

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Comme $f \in \mathcal{C}[a, b]$, elle est uniformément continue sur $[a, b]$.

Alors, $\exists \delta > 0$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$.

Soit donc $\Delta \in \Omega[a, b] : a = x_0 < x_1, \dots < x_n = b$ avec $\|\Delta\| < \delta$.

Alors, $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{1}{n}$.

Remarque. $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])$ peut être noté $\text{osc}_f([x_{i-1}, x_i])$.

On obtient

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b - a}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Théorème. *Toute $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

démonstration.

(1) Si f est constante, alors $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) = 0 < \varepsilon$.

(2) Si f est croissante,

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon > (b - a)(f(b) - f(a))$

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ avec $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, $i \in [0..n]$

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \left(\frac{b-a}{n} \right) \\
&= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

(3) Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Théorème.

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$.

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $f_i \in \mathcal{R}[a, b]$, $\exists \Delta_i \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f_i, \Delta_i) - \underline{S}(f_i, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

Alors, $\overline{S}(f_i, \Delta) - \underline{S}(f_i, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
\underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\geq \underline{S}(f_1, \Delta) + \underline{S}(f_2, \Delta)
\end{aligned}$$

Car $\sup(f_1 + f_2) \leq \sup f_1 + \sup f_2$ et $\inf(f_1 + f_2) \geq \inf f_1 + \inf f_2$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1, \Delta) - \underline{S}(f_2, \Delta) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$.

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_1 + f_2 &\leq \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) \\
&\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
&< \underline{S}(f_1, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f_2, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_a^b f_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f_2 + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b f_1 + f_2 < \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.

De même, on peut montrer que $\int_a^b f_1 + f_2 \geq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.

Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.

□

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\int \lambda f = \lambda \int f$.

démonstration.

Laissé en exercice.

Utiliser $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ et $\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$. □

Corollaire.

Si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

démonstration.

$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0$. □

Inégalité du triangle**Théorème** (Inégalité du triangle).

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ et $|\int f| \leq \int |f|$.

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

Alors, $\exists \Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.

Enfin,

$$\begin{aligned} -|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\ &\Rightarrow \int f \leq \int |f| \end{aligned}$$

□

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $a \leq c < d \leq b$, alors $f|_{[c, d]} \in \mathcal{R}[a, b]$.

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

Comme $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$.

Soit Δ_2 le raffinement de Δ_1 en ajoutant les points c et d .

Alors, $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) \leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$

Donc, $f \in \mathcal{R}[c, d]$. □

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $a < c < b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a, c]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

De même, $\exists \Delta_2 \in \Omega[c, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$. Alors, $\Delta \in \Omega[a, b]$ et

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\leq \overline{S}(f, \Delta) \\ &= \overline{S}(f, \Delta_1) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \underline{S}(f, \Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f, \Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \underline{S}(f, \Delta_1) + \underline{S}(f, \Delta_2) + \varepsilon \\ &\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$.

De même, $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Théorème. Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si f possède n discontinuités dans $[a, b]$, alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

démonstration.

Pour $n = 0$, $f \in \mathcal{C}[a, b]$, donc $f \in \mathcal{R}[a, b]$ est un résultat connu.

Supposons l'énoncé vrai pour n .

Supposons que $f \in \mathcal{B}[a, b]$ admet $n + 1$ discontinuités.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Il y a deux cas à considérer

1. a ou b est une discontinuité

SPDG, supposons que a est la discontinuité.

Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. a est l'unique discontinuité de $[a, a + \eta]$ et $\eta < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Alors, $[a + \eta, b]$ contient n discontinuités.

De l'hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{R}[a + \eta, b]$.

Il existe donc $\Delta \in \Omega[a + \eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= (\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)) + (\overline{M}(f, [a, a + \eta]) - \underline{M}(f, [a, a + \eta])) \eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

2. ni a ni b ne sont des discontinuités

Soit $c \in]a, b[$ qui est une discontinuité de f .

Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. c est l'unique discontinuité de $[c - \eta, c + \eta] \subset [a, b]$ et $\eta < \frac{\varepsilon}{8M}$.

Alors, $[a, c - \eta]$ et $[c + \eta, b]$ contiennent au plus n discontinuités, par l'hypothèse de récurrence

$\exists \Delta_1 \in \Omega[a, c - \eta]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{4}$.

$\exists \Delta_2 \in \Omega[c + \eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= [\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1)] + [\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2)] \\
&\quad + [\overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) - \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta])] (2\eta) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4M\eta \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Théorème. Soient $f : [a, b] \rightarrow [c, d] \in \mathcal{R}[a, b]$ et $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c, d]$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Remarque. L'hypothèse que $g \in \mathcal{C}[c, d]$ est nécessaire.

Exemple.

$$\begin{aligned}
f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ et } \text{pgcd}(m, n) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Fonction de Dirichlet modifiée.

$$\begin{aligned}
g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

$f, g \in \mathcal{R}[a, b]$.

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \circ f \notin \mathcal{R}[a, b]$.

Fonction de Dirichlet.

Lemme. Si $f \in \mathcal{B}[a, b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant un unique point, alors $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$.

démonstration.

Soient $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.

$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$.

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x}) \\
&= (\bar{x} - x_{i-1}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])) + (x_i - \bar{x}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) ((\bar{x} - x_{i-1}) - (x_i - \bar{x})) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\|
\end{aligned}$$

□

Corollaire. Si $f \in \mathcal{B}[a, b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant p points, au plus un point par sous-intervalle de Δ , alors $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2p\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$.

Théorème de Darboux

Théorème (Darboux, 1875).

Si $f \in \mathcal{B}[a, b]$, alors

$$\overline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) \qquad \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta)$$

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$.

Ainsi, $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \dots < x_n = b$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_0) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\delta > 0$ t.q. $\delta < \|\Delta_0\|$ et $\delta < \frac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b])}$.

Soit $\Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\|\Delta\| < \delta$.

Alors, $\|\Delta\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Considérons $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$.

Comme $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$, aucun sous-intervalle ouvert de Δ ne contient plus d'un point de Δ_0 .

Comme Δ' s'obtient de Δ en ajoutant au plus $n-1$ points $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$,

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &\leq 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\| \\ &< 2(n-1)\overline{M}(f, [a, b]) \delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f, \Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \overline{S}(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} -\overline{S}(-f, \Delta) \\ &= - \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(-f, \Delta) \\ &= -\overline{S}(-f) \\ &= \underline{S}(f) \end{aligned}$$

□