MAT346 - Analyse II
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

Table des matières

Chapitre 1 Intégration

Section 1.1 Intégrales de Riemann

Notation.

$\mathcal{B}[c,d] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}$.

$\mathcal{R}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}$.

$\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}$.

On suppose nos fonctions bornées.

Définition.

a) Une partition de $[a,b]$ est un ensemble fini de points $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$ t.q. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

b) L'ensemble des partitions de $[a,b]$ est $\Omega[a,b]$.

c) On dit Δ' est *plus fine* que Δ, noté $\Delta' \geqslant \Delta$, si $\Delta' \supseteq \Delta$.

d) *Raffinement commun* de Δ_1 et Δ_2, noté $\Delta_1 \vee \Delta_2$, est la partition de $[a,b]$ formée de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ordonnés.

e) La *norme* de Δ, notée $\|\Delta\|$, est $\|\Delta\| = \max_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|$.

f)

$$\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$
$$\underline{M}(f, [x_{i-1}, x_1]) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$

Remarque.

$$\|x\| \geqslant 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$
$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

Définition.

a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de f pour la partition Δ est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de f pour la partition Δ est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Proposition.

a)
$$\underline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)\leqslant \underline{S}(f,\Delta),\forall\Delta\in\Omega[a,b]$$

b)
$$\underline{S}(f,\Delta)\leqslant \overline{S}(f,\Delta)$$

c)
$$\overline{S}(f,\Delta)\leqslant \overline{M}(f,[a,b])\cdot(b-a)$$

Proposition. *Si $\Delta'\geqslant\Delta$, alors $\overline{S}(f,\Delta')\leqslant\overline{S}(f,\Delta)$.*

Démonstration.
Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$$

$$\Delta' : a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<\bar{x}<x_i<\ldots<x_n=b$$

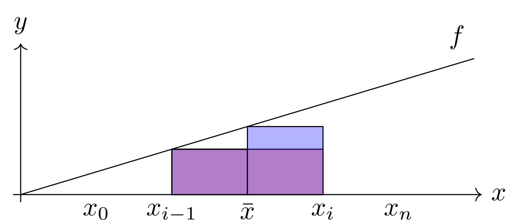
On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta)-\overline{S}(f,\Delta') &= \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1})\right]\\ &\quad-\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\cdot(\bar{x}-x_{i-1})+\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\cdot(x_i-\bar{x})\right]\\ &=(x_i-\bar{x})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\right]\\ &\quad+(\bar{x}-x_{i-1})\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\right]\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

□

Proposition. *Si $\Delta'\geqslant\Delta$, alors $\underline{S}(f,\Delta')\geqslant\underline{S}(f,\Delta)$*

Démonstration.



□

Remarque. $\underline{S}(f,\Delta)=-\overline{S}(-f,\Delta)$.

Corollaire. $\forall\Delta_1,\Delta_2\in\Omega[a,b],\underline{S}(f,\Delta_1)\leqslant\overline{S}(f,\Delta_2)$

Démonstration.
On a $\Delta_1\vee\Delta_2\geqslant\Delta_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\Delta_1)&\leqslant\underline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leqslant\overline{S}(f,\Delta_1\vee\Delta_2)\\ &\leqslant\overline{S}(f,\Delta_2)\end{aligned}$$

□

Définition.

a) La somme par défaut de f est $\underline{S}(f) = \sup\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$.

b) La somme par excès de f est $\overline{S}(f) = \inf\limits_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$.

Théorème. $\underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f)$

Démonstration.
Soit $\Delta_1 \in \Omega[a, b]$
$\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ est le plus petit majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a, b]$.
Du corollaire précédant, on a que $\underline{S}(f, \Delta) \leqslant \overline{S}(f, \Delta_1)$.
Donc, $\overline{S}(f, \Delta_1)$ est un majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$.
Ainsi, $\underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f, \Delta_1)$.
De même, $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ est le plus grand minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a, b]$.
Comme $\underline{S}(f)$ est un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f)$. □

Définition.
Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. On dit que f est *intégrable au sens de Riemann sur* $[a, b]$ si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et on note $f \in \mathcal{R}[a, b]$. La valeur commune de $\underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f)$ est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Critère d'intégrabilité

Théorème (Critère d'intégrabilité)**.**
Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$*. Alors* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *si, et seulement si,* $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega[a, b])$ *t.q.* $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
On a $\displaystyle\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$.
Comme $\overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut minorer $\overline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$.
Comme $\underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne peut majorer $\underline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_2 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
On a

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leqslant \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \Big(\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}\Big) \\
&= \big(\overline{S}(f) - \underline{S}(f)\big) + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$.
Alors $\exists \Delta$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$.
Mais alors,

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta)\\ &\geqslant \overline{S}(f) - \underline{S}(f)\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

Du théorème du sandwich, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$, car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.
Donc, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

□

Corollaire. *S'il existe $\Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) = \underline{S}(f,\Delta)$, alors $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Théorème. *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration.
Soit $f \in \mathcal{C}[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par la proposition d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n\varepsilon > b - a$.

Rappel.
f est uniformément continue sur $[a,b]$ si $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)$ t.q. pour $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Rappel.
Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Comme $f \in \mathcal{C}[a,b]$, elle est uniformément continue sur $[a,b]$.
Alors, $\exists \delta > 0$ t.q. pour $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$.
Soit donc $\Delta \in \Omega[a,b] : a = x_0 < x_1, \ldots < x_n = b$ avec $\|\Delta\| < \delta$.
Alors, $\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) < \frac{1}{n}$.

Remarque. $\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])$ peut être noté $\operatorname{osc}_f([x_{i-1},x_i])$.

On obtient

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i - x_{i-1})\\ &< \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\\ &= \frac{b-a}{n}\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

Théorème. *Toute $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

Démonstration.

(1) Si f est constante, alors $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) = 0 < \varepsilon$.

(2) Si f est croissante,
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon > (b-a)(f(b) - f(a))$.
Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
On a

$$\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i - x_{i-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right] \left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{b-a}{n} \left[f(b) - f(a)\right] \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Donc, $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

(3) Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.
Donc, $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.

□

Théorème.
Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}\,[a,b]$, alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}\,[a,b]$ et $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $f_i \in \mathcal{R}\,[a,b]$, $\exists \Delta_i \in \Omega\,[a,b]$ t.q. $\overline{S}\,(f_i, \Delta_i) - \underline{S}\,(f_i, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
Alors, $\overline{S}\,(f_i, \Delta) - \underline{S}\,(f_i, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Supposons $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
On a

$$
\begin{aligned}
\overline{S}\,(f_1 + f_2, \Delta) &\leqslant \overline{S}\,(f_1, \Delta) + \overline{S}\,(f_2, \Delta) \\
\underline{S}\,(f_1 + f_2, \Delta) &\geqslant \underline{S}\,(f_1, \Delta) + \underline{S}\,(f_2, \Delta)
\end{aligned}
$$

Car $\sup(f_1 + f_2) \leqslant \sup f_1 + \sup f_2$ et $\inf(f_1 + f_2) \geqslant \inf f_1 + \inf f_2$.
Alors,

$$
\begin{aligned}
\overline{S}\,(f_1 + f_2, \Delta) - \underline{S}\,(f_1 + f_2, \Delta) &\leqslant \overline{S}\,(f_1, \Delta) + \overline{S}\,(f_2, \Delta) - \underline{S}\,(f_1, \Delta) - \underline{S}\,(f_2, \Delta) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Donc, $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}\,[a,b]$.
De plus,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f_1 + f_2 &\leqslant \overline{S}\,(f_1 + f_2, \Delta) \\
&\leqslant \overline{S}\,(f_1, \Delta) + \overline{S}\,(f_2, \Delta) \\
&< \underline{S}\,(f_1, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}\,(f_2, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \int_a^b f_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f_2 + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\int_a^b f_1 + f_2 < \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.
Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 \leqslant \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.
De même, on peut montrer que $\int_a^b f_1 + f_2 \geqslant \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.
Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$. □

Théorème.
Si $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{R}\,[a,b]$ et $\int \lambda f = \lambda \int f$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\exists \Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$.

On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(\lambda f,\Delta) &= \lambda \overline{S}(f,\Delta)\\ \underline{S}(\lambda f,\Delta) &= \lambda \underline{S}(f,\Delta)\end{aligned}$$

Car $\sup(\lambda f) = \lambda \sup f$ et $\inf(\lambda f) = \lambda \inf f$.

Alors,

$$\begin{aligned}\overline{S}(\lambda f,\Delta) - \underline{S}(\lambda f,\Delta) &= \lambda \overline{S}(f,\Delta) - \lambda \underline{S}(f,\Delta)\\ &= \lambda\left(\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta)\right)\\ &< \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Donc, $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$.

De plus,

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f &\leqslant \overline{S}(\lambda f,\Delta)\\ &= \lambda \overline{S}(f,\Delta)\\ &< \lambda\left(\underline{S}(f,\Delta) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\\ &= \lambda \underline{S}(f,\Delta) + \varepsilon\\ &\leqslant \lambda \int_a^b f + \varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b \lambda f < \lambda \int_a^b f + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Donc, $\displaystyle\int_a^b \lambda f \leqslant \lambda \int_a^b f$.

De même, on peut montrer que $\displaystyle\int_a^b \lambda f \geqslant \lambda \int_a^b f$.

Donc, $\displaystyle\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. □

Corollaire.

Si $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$, alors $f \leqslant g \Rightarrow \displaystyle\int f \leqslant \int g$.

Démonstration.

$g - f \geqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\int g - f \geqslant 0 \Rightarrow \int g - \int f \geqslant 0$. □

Inégalité du triangle

Théorème (Inégalité du triangle)**.**

Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, alors $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\displaystyle\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

Alors, $\exists \Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$.

On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(|f|,\Delta)-\underline{S}(|f|,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{M}(|f|,[x_{i-1},x_i])-\underline{M}(|f|,[x_{i-1},x_i])\right](x_i-x_{i-1})\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i])-\underline{M}(f,[x_{i-1},x_i])\right](x_i-x_{i-1})\\ &= \overline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta)\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Donc, $|f|\in\mathcal{R}[a,b]$.
Enfin,

$$\begin{aligned}-|f|\leqslant f\leqslant |f| &\Rightarrow -\int |f|\leqslant\int f\leqslant\int |f|\\ &\Rightarrow \int f\leqslant\int |f|\end{aligned}$$

□

Théorème.
Si $f\in\mathcal{R}[a,b]$ et $a\leqslant c<d\leqslant b$, alors $f|_{[c,d]}\in\mathcal{R}[a,b]$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon>0$
Comme $f\in\mathcal{R}[a,b]$, $\exists\Delta_1\in\Omega[a,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_1)-\underline{S}(f,\Delta_1)<\varepsilon$.
Soit Δ_2 le raffinement de Δ_1 en ajoutant les points c et d.
Alors, $\overline{S}(f,\Delta_2)-\underline{S}(f,\Delta_2)\leqslant\overline{S}(f,\Delta_1)-\underline{S}(f,\Delta_1)<\varepsilon$
Donc, $f\in\mathcal{R}[c,d]$. □

Théorème.
Si $f\in\mathcal{R}[a,b]$ et $a<c<b$, alors $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon>0$
$f\in\mathcal{R}[a,b]\Rightarrow f\in\mathcal{R}[a,c]\Rightarrow\exists\Delta_1\in\Omega[a,c]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_1)-\underline{S}(f,\Delta_1)<\frac{\varepsilon}{2}$.
De même, $\exists\Delta_2\in\Omega[c,b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_2)-\underline{S}(f,\Delta_2)<\frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\Delta=\Delta_1\vee\Delta_2$. Alors, $\Delta\in\Omega[a,b]$ et

$$\begin{aligned}\int_a^b f &\leqslant \overline{S}(f,\Delta)\\ &= \overline{S}(f,\Delta_1)+\overline{S}(f,\Delta_2)\\ &< \underline{S}(f,\Delta_1)+\frac{\varepsilon}{2}+\underline{S}(f,\Delta_2)+\frac{\varepsilon}{2}\\ &= \underline{S}(f,\Delta_1)+\underline{S}(f,\Delta_2)+\varepsilon\\ &\leqslant \int_a^c f+\int_c^b f+\varepsilon\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on a $\int_a^b f\leqslant\int_a^c f+\int_c^b f$.
De même, $\int_a^b f\geqslant\int_a^c f+\int_c^b f$. □

Théorème. *Soit $f\in\mathcal{B}[a,b]$. Soit $n\in\mathbb{N}$.*
Si f possède n discontinuités dans $[a,b]$, alors $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

Démonstration.
Pour $n = 0$, $f \in \mathcal{C}[a,b]$, donc $f \in \mathcal{R}[a,b]$ est un résultat connu.
Supposons l'énoncé vrai pour n.
Supposons que $f \in \mathcal{B}[a,b]$ admet $n+1$ discontinuités.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$
Il y a deux cas à considérer

1. a ou b est une discontinuité
Sans perte de généralité, supposons que a est la discontinuité.
Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. a est l'unique discontinuité de $[a, a+\eta]$ et $\eta < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.
Alors, $[a+\eta, b]$ contient n discontinuités.
De l'hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{R}[a+\eta, b]$.
Il existe donc $\Delta \in \Omega[a+\eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$.
On a donc
$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f,\Delta_\varepsilon) &= \left(\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta)\right) + \left(\overline{M}(f,[a,a+\eta]) - \underline{M}(f,[a,a+\eta])\right)\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

2. ni a ni b ne sont des discontinuités
Soit $c \in]a,b[$ qui est une discontinuité de f.
Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. c est l'unique discontinuité de $[c-\eta, c+\eta] \subset [a,b]$ et $\eta < \dfrac{\varepsilon}{8M}$.
Alors, $[a, c-\eta]$ et $[c+\eta, b]$ contiennent au plus n discontinuités, donc par l'hypothèse de récurrence :
$\exists \Delta_1 \in \Omega[a, c-\eta]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1) < \dfrac{\varepsilon}{4}$ et $\exists \Delta_2 \in \Omega[c+\eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_2) - \underline{S}(f,\Delta_2) < \dfrac{\varepsilon}{4}$.
Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
On a donc
$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f,\Delta_\varepsilon) &= \left[\overline{S}(f,\Delta_1) - \underline{S}(f,\Delta_1)\right] + \left[\overline{S}(f,\Delta_2) - \underline{S}(f,\Delta_2)\right] \\ &\quad + \left[\overline{M}(f,[c-\eta,c+\eta]) - \underline{M}(f,[c-\eta,c+\eta])\right](2\eta) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4M\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

□

Théorème. *Soient $f : [a,b] \to [c,d] \in \mathcal{R}[a,b]$ et $g : [c,d] \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c,d]$.*
Alors $g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Remarque. L'hypothèse que $g \in \mathcal{C}[c,d]$ est nécessaire.

Exemple.
$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad x = \frac{m}{n} \text{ et } \texttt{pgcd}(m,n) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$
Fonction de Dirichlet modifiée.
$$\begin{aligned} g : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$.
$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$g \circ f \notin \mathcal{R}[a,b]$.
Fonction de Dirichlet.

Lemme. *Si $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a,b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant un unique point, alors $\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') \leqslant 2\overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \|\Delta\|$.*

Démonstration.
Soient $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ et
$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \ldots < x_n = b$.

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') &= \overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) - \overline{M}(f,[\bar{x},x_i]) \cdot (x_i - \bar{x}) \\
&= (\bar{x} - x_{i-1}) \left(\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \overline{M}(f,[x_{i-1},\bar{x}])\right) + (x_i - \bar{x}) \left(\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) - \overline{M}(f,[\bar{x},x_i])\right) \\
&\leqslant 2\overline{M}(|f|,[x_{i-1},x_i]) \left((\bar{x} - x_{i-1}) - (x_i - \bar{x})\right) \\
&\leqslant 2\overline{M}(|f|,[a,b]) \|\Delta\|
\end{aligned}$$

□

Corollaire. *Si $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a,b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant p points, au plus un point par sous-intervalle de Δ, alors $\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') \leqslant 2p\overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \|\Delta\|$.*

Théorème de Darboux

Théorème (Darboux, 1875)**.**
Si $f \in \mathcal{B}[a,b]$, alors

$$\overline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \overline{S}(f,\Delta) \qquad\qquad \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \underline{S}(f,\Delta)$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f,\Delta)$, on a que $\overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant des $\overline{S}(f,\Delta)$.
Ainsi, $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ t.q. $\overline{S}(f,\Delta_0) < \overline{S}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit $\delta > 0$ t.q. $\delta < \min\limits_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} |x_i - x_{i-1}|$ et $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|,[a,b])}$.
Soit $\Delta \in \Omega[a,b]$ t.q. $\|\Delta\| < \delta$.
Alors, $\|\Delta\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.
Considérons $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$.
Comme $\|\Delta'\| \leqslant \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$, aucun sous-intervalle ouvert de Δ ne contient plus d'un point de Δ_0.
Comme Δ' s'obtient de Δ en ajoutant au plus $n-1$ points $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') &\leqslant 2(n-1)\overline{M}(|f|,[a,b]) \|\Delta\| \\
&< 2(n-1)\overline{M}(f,[a,b]) \delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\Delta) &\leqslant \overline{S}(f,\Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f,\Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \overline{S}(f) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}\,(f,\Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}\,(f,\Delta) &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} -\overline{S}\,(-f,\Delta)\\ &= -\lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}\,(-f,\Delta)\\ &= -\overline{S}(-f)\\ &= \underline{S}(f)\end{aligned}$$

□

Définition. Soit $f \in \mathcal{B}\,[a,b]$.
Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \in \Omega\,[a,b]$.
Soient $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pour $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.
Le nombre réel

$$S\,(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

est appelé *somme de Riemann* de la fonction f correspondant à la partition Δ et aux points $\{\bar{x}_i\}_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$.

Théorème.
Soit $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.
Alors, $(\forall\varepsilon > 0)$, $(\exists\delta = \delta(\varepsilon))$ t.q. pour toute partition Δ de $[a,b]$ avec $\|\Delta\| < \delta$ et pour tout choix de points $\{\bar{x}_i\}$, on a

$$\left|\int_a^b f - S(f,\Delta,\{\bar{x}_i\})\right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire.

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S\,(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$$

Démonstration.
On a $\underline{S}\,(f,\Delta) \leqslant S(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) \leqslant \overline{S}\,(f,\Delta)$.
Donc,

$$\underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}\,(f,\Delta) \leqslant \lim_{\|\Delta\|\to 0} S\,(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) \leqslant \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}\,(f,\Delta) = \overline{S}(f)$$

Comme $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$, on a $\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \displaystyle\int_a^b f$.

Par le théorème du sandwich, $S\,(f,\Delta,\{\bar{x}_i\}) = \displaystyle\int_a^b f$. □

Loi de la moyenne

Théorème (Loi de la moyenne)**.**
Soit $f \in \mathcal{R}\,[a,b]$.
Alors, $\exists\mu \in \left[\underline{M}\,(f,[a,b])\,,\overline{M}\,(f,[a,b])\right]$ t.q. $\displaystyle\int_a^b f = (b-a)\cdot\mu$.

Démonstration.
Soit ϕ la fonction donnée par $\phi(x) = (b-a)x$.
On a $\underline{M}\,(f,[a,b]) \leqslant f \leqslant \overline{M}\,(f,[a,b])$.
Donc

$$\phi(\underline{M}\,(f,[a,b])) = (b-a)\underline{M}\,(f,[a,b]) = \int_a^b \underline{M}\,(f,[a,b]) \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b \overline{M}\,(f,[a,b]) = (b-a)\overline{M}\,(f,[a,b]) = \phi(\overline{M}\,(f,[a,b]))$$

Rappel.

Théorème (Théorème de valeur intermédiaire).

f *continue sur* $[a,b]$, $f(a) < c < f(b)$ *implique* $\exists x_0 \in [a,b]$ *t.q.* $f(x_0) = c$.

Comme ϕ est continue sur $[\underline{M}(f,[a,b]), \overline{M}(f,[a,b])]$, du TVI, $\exists \mu \in [\underline{M}(f,[a,b]), \overline{M}(f,[a,b])]$ t.q. $\phi(\mu) = c$ pour tout $c \in [\phi(\underline{M}(f,[a,b])), \phi(\overline{M}(f,[a,b]))]$.

En particulier, si $c = \int_a^b f$, $\exists \mu$ t.q. $\phi(\mu) = \int_a^b c$, c'est-à-dire t.q. $(b-a)\mu = \int_a^b f$. □

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Soit $\begin{aligned} F : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$

Alors,

a) $|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant \overline{M}(|f|,[a,b])(b-a) \cdot |x_1 - x_2|$ *pour tous* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *;*

b) F *est uniformément continue sur* $[a,b]$ *;*

c) Si f *est continue, alors* F *est différentiable et* $F' = f$.

Démonstration.

a) Supposons que $x_1 > x_2$

On a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f \right| \\ &= \left| \int_{x_2}^{x_1} f \right| \\ &\leqslant \int_{x_2}^{x_1} |f| \\ &\leqslant \int_{x_2}^{x_1} \overline{M}(|f|,[a,b]) \\ &= \overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$.

Prenons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\overline{M}(|f|,[a,b])}$.

Soient $x, y \in [a,b]$ avec $|x-y| < \delta$.

Alors,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leqslant \overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot |x-y| \\ &< \overline{M}(|f|,[a,b]) \cdot \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

c) Soit $x_0 \in [a,b]$.

On a

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} f}{x-x_0} \\
&\overset{\text{Loi de la moyenne}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)f(x_0+\theta(x-x_0))}{x-x_0} \qquad \theta\in[0,1] \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x_0+\theta(x-x_0)) \\
&= f(x_0)
\end{aligned}$$

□

Notation. F est une primitive de f.

Corollaire. *Si f est continue, alors f admet au moins une primitive.*

Corollaire. *Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors $F_1 - F_2 = C$ pour une constante C.*

Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral)**.**
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et F est une primitive de f, alors $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Démonstration.
Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \in \Omega[a,b]$.
Comme F est continue et différentiable sur $[a,b]$ et a fortiori sur $[x_{i-1}, x_i]$, le théorème de la moyenne donne $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ t.q. $\dfrac{F(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$.
On a

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i)
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{array}{rrcccc}
 & \underline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) & \leqslant & f(t_i) & \leqslant & \overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) \\
\Rightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\underline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) & \leqslant & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(t_i) & \leqslant & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\overline{M}(f,[x_{i-1},x_i]) \\
\Rightarrow & \underline{S}(f,\Delta) & \leqslant & F(b) - F(a) & \leqslant & \overline{S}(f,\Delta) \\
\Rightarrow & \displaystyle\int_a^b f = \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}(f,\Delta) & \leqslant & F(b) - F(a) & \leqslant & \displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}(f,\Delta) = \overline{S}(f) = \int_a^b f
\end{array}$$

Donc, $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$. □

Proposition. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors,*

a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *;*

b) $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Démonstration.

a) déjà fait, car f est continue sauf en un nombre fini de points.
b) Soit p le nombre de points où $f \neq 0$.
Pour $p = 0$, c'est trivial.
Supposons que la propriété est vraie pour p.
Supposons que $f \neq 0$ en $p + 1$ points.
Il y a deux cas à considérer

1) $\exists c \in]a, b[$ avec $f(c) \neq 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Soit $\eta > 0$ t.q.
   i) $a < c - \eta < c + \eta < b$;
   ii) c est le seul point de $[c - \eta, c + \eta]$ où $f \neq 0$;
   iii) $\eta < \min \left\{ \dfrac{\varepsilon}{4\overline{M}(f, [a, b])}, \dfrac{-\varepsilon}{4\underline{M}(f, [a, b])} \right\}$.

   Par l'hypothèse de récurrence,
   $$\int_a^{c-\eta} f \quad = \quad 0 \quad = \quad \int_{c+\eta}^b f$$
   Du critère d'intégrabilité, $\exists \Delta_1 : a < x_0 < x_1, \ldots < x_n = c - \eta$, $\exists \Delta_2 : c + \eta = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_i) \leqslant \overline{S}(f, \Delta_i) - \underline{S}(f, \Delta_i) < \dfrac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.
   Prenons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.
   On a
   $$\begin{aligned}\overline{S}(f, \Delta) &= \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta\overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \overline{S}(f, \Delta_2)\\ &\leqslant \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta\overline{M}(f, [a, b]) + \overline{S}(f, \Delta_2)\\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$
   De même, $\underline{S}(f, \Delta_i) \leqslant \overline{S}(f, \Delta_i) < \dfrac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.
   et
   $$\begin{aligned}\underline{S}(f, \Delta) &= \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta\underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \underline{S}(f, \Delta_2)\\ &\geqslant \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta\underline{M}(f, [a, b]) + \underline{S}(f, \Delta_2)\\ &> -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\\ &= -\varepsilon\end{aligned}$$
   Donc, $-\varepsilon < \underline{S}(f, \Delta) \leqslant \overline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.
   Comme $\varepsilon > 0$ est arbirtaire, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

2) $f(c) \neq 0$ en a ou en b.
   On procède de la même manière avec un sous-intervalle de largeur η autour de a et de b t.q. a et b sont les seules discontinuités dans ces intervalles.

$\square$

Corollaire. *Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.q. $f = g$ sauf peut-être en un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Section 1.2 Techniques d'intégration

Théorème (Intégration par parties)**.**
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables t.q. $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b fg' = fg\big|_a^b - \int_a^b gf'$$

Démonstration.
Posons $h = fg$.
Alors,

$$\begin{aligned} h' &= f'g + fg' \\ \int_a^b h' &= \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \\ \int_a^b fg' &= \int_a^b h - \int_a^b f'g \\ &= h\big|_a^b - \int_a^b f'g \\ &= fg\big|_a^b - \int_a^b f'g \end{aligned}$$

□

Théorème (Changement de variable/Substitution)**.**
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\phi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ de classe C^1, c'est-à-dire ϕ est dérivable et ϕ' est continue. Si $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Démonstration.
Posons $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
Du théorème fondamental, h est uniformément continue, différentiable et $h' = f$.
Soit $g(t) = (h \circ \phi)(t) = h(\phi(t)) = \displaystyle\int_a^{\phi(t)} f(x)dx$.
On a h, ϕ différentiables, donc g l'est aussi et

$$\begin{aligned} g'(t) &= h'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ &= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta g'(t)dt \\ &= g(\beta) - g(\alpha) \\ &= h(\phi(\beta)) - h(\phi(\alpha)) \\ &= h(b) - h(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

Fractions partielles

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Avec $b^2-4ac<0$.
On ramène sur dénominateurs communs.
On ramène en une fraction.
On résoud le système d'équations avec $P(x)$.
On intègre chaque fraction.

Quelques substitutions

1. $f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \cdots\right)$, ou f est une fonction rationnelle $f=\frac{P(x)}{Q(x)}$.
   On pose $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ où n est un multiple commun de $n_1, n_2, \cdots$.
   Exemple.
   $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \int x^2(x-1)^{-1/2}$.
   Posons $x-1=t^2$.
   Alors, $dx = 2tdt$.
   On obtient $\displaystyle\int x^2(x-1)^{-1/2} = \int (t^2-1)^2(t^2)^{-1/2}2tdt = 2\int (t^2+1)^2dt$.
2. $\displaystyle\int x^\alpha(a+bx^\beta)^\gamma dx$ avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$.
   On pose $t=x^\beta$.
   Alors, $dt = \beta x^{\beta-1}dx$.
   Donc, $\displaystyle dx = \frac{dt}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{dt}{\beta t^{(\beta-1)/\beta}}$.
   Exemple.
   $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx$.
   Posons $t=x^2$.
   On a $\displaystyle dt = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$.
   On obtient
   $$\begin{aligned}\int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx &= \int t^{-2}(1+t)^{-1/2}\frac{dt}{2\sqrt{t}}\\ &= \frac{1}{2}\int t^{-5/2}(1+t)^{-1/2}dt\\ &= \frac{1}{2}\int t^{-3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2}dt\end{aligned}$$
   Posons $\displaystyle u^2 = \frac{1+t}{t} = 1+\frac{1}{t}$. On a $\displaystyle u^2-1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u^2-1}$.
   Alors, $dt = (-1)(u^2-1)^{-2}(2u)du$.
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int t^{-3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2}dt &= -\frac{1}{2}\int (u^2-1)^3u^{-1}(u^2-1)^{-2}2udu\\ &= -\int (u^2-1)du\end{aligned}$$

3. $f(\sin x, \cos x)$.
   On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. On a $x = 2 \arctan t$.
   Alors, $dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt$.
   Exemple.
   $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$.
   On a

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\
&= \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} - \frac{\dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

   Alors,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2+\cos x} &= \int \frac{2dt}{1+t^2} \frac{1}{2 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2dt}{3+t^2} \\
&= 2 \int \frac{dt}{t^2 + \sqrt{3}^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

4. $f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$.
   On pose $x = a \sin t$. On a $dx = a \cos t dt$.
   Exemple.

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\
&= \int a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt \\
&= \int a^4 \frac{1}{4} \sin^2 2t dt \\
&= \int \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\
&= \frac{a^4}{8} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right]
\end{aligned}
$$

5.

Rappel.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \begin{aligned}\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}\\ &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sinh x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\ &= \cosh x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(\cosh x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\ &= \sinh x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\cosh^2 x + \sinh^2 x &= -\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\\ &= -\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4}\\ &= -1\end{aligned}$$

Donc, $\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$.
Alors, $1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x \Rightarrow \text{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$.
Formellement,

$$\sinh x = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

avec $z \in \mathbb{C}$.
$f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$.
On pose $x = a\cosh t$. On a $dx = a\sinh t dt$.

Exemple.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \int \frac{a^2\cosh^2 t}{\sqrt{a^2\cosh^2 t - a^2}} a\sinh t dt\\ &= \int \frac{a^2\cosh^2 t}{a\sinh t} a\sinh t dt\\ &= \int a^2\cosh^2 t dt\\ &= \int a^2 \frac{a + \cosh 2t}{2} dt\\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\frac{\sinh 2t}{2}\end{aligned}$$

Remarque. $\text{arccosh} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)$, $\text{arcsinh} t = \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)$.

6. $f\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)$.
   On pose $x = a\sinh t$. On a $dx = a\cosh t dt$.
   Exemple.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx &= \int \frac{a^3\sinh^3 t}{(a^2\sinh^2 t + a^2)^{3/2}} a\cosh t dt \\
&= \int \frac{a^3\sinh^3 t}{a^3\cosh^3 t} a\cosh t dt \\
&= a\int \frac{\sinh^3 t}{\cosh^2 t} dt \\
&= a\int \frac{\sinh t \sinh^2 t}{\cosh^2 t} dt \\
&= a\int \frac{\sinh t(\cosh^2 t - 1)}{\cosh^2 t} dt \\
&= a\int \left(\sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) dt \\
&\text{posons } u = \cosh t, du = \sinh t dt \\
&= a\cosh t + \frac{a}{\cosh t} \\
&= a\sqrt{\cosh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{\cosh^2 t}} \\
&= a\sqrt{1+\sinh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \\
&= a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}
\end{aligned}$$

7. $f\left(x, \sqrt{x^2+2bx+c}\right)$, avec $x^2+2bx+c$ irréductible dans $\mathbb{R}$.
   On a $x^2+2bx+c = (x+b)^2 + (c-b^2)$.
   On pose $t = x+b$. On a $dt = dx$.
   Exemple.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx &= \int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^2+1}}dx \\
&\text{posons } t = x+2, dt = dx \\
&= \int \frac{t-2}{\sqrt{t^2+1}}dt \\
&= \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt - 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\
&\text{posons } u = t^2+1, du = 2tdt \\
&\text{posons } t = \sinh v, dt = \cosh v dv \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - 2\int \frac{\cosh v dv}{\sqrt{\sinh^2 v + 1}} \\
&= \sqrt{u} - 2\int dv \\
&= \sqrt{u} - 2v \\
&= \sqrt{t^2+1} - 2\text{arcsinh} t \\
&= \sqrt{t^2+1} - 2\ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\
&= \sqrt{(x+2)^2+1} - 2\ln\left(x+2+\sqrt{1+(x+2)^2}\right)
\end{aligned}$$

Section 1.3 Intégrales impropres

Définition. $f : [a, \infty[$ continue par morceaux.

L'intégrale impropre (de 1ère espèce) de f est $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx$.

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{y\to\infty}\int_1^y dfracdxx\\ &= \lim_{y\to\infty}(\ln y - \ln 1)\\ &= \infty\end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y\to\infty}\int_1^y x^{-p}dx\\ &= \lim_{y\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^y\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)\end{aligned}$$

Si $p > 1$, alors $1 - p < 0$ et $y^{1-p} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$.

On a alors $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

Si $p < 1$, alors $1 - p > 0$ et $y^{1-p} \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$.

On a alors que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ diverge.

Si $p = 1$, c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sx}dx &= \lim_{y\to\infty}\int_0^y e^{-sx}\\ &= \lim_{y\to\infty}\left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right|_0^y\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{e^{-sy}}{-s} + \frac{1}{s}\right)\end{aligned}$$

Si $s < 0$, alors $-sy > 0$ et l'intégrale diverge.

Si $s > 0$, alors $-sy < 0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{s}$.

Si $s = 0$, alors $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}dx = \int_0^\infty dx$ diverge.

4.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{y\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}\\ &= \lim_{y\to\infty}(\arctan y - \arctan 0)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Définition. $f:]a,b]$ continue, mais t.q. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ n'existe pas.

L'intégrale impropre (de $2^{\text{ème}}$ espèce) de f est $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b f(x)dx$.

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^b \frac{dx}{x}\\ &= \lim_{y\to 0^+}(\ln 1 - \ln y)\\ &= \infty\end{aligned}$$

diverge

2.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{dx}{x^p}\\ &= \lim_{y\to 0^+} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_y^1\\ &= \frac{1}{1-p} - \lim_{y\to 0^+}\frac{y^{1-p}}{1-p}\end{aligned}$$

Si $p>1$, alors $1-p<0$ et l'intégrale diverge.
Si $p<1$, alors $1-p>0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{1-p}$.
Si $p=1$, alors c'est le cas 1, qui diverge.

3.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{y\to 1^-}\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \lim_{y\to 1^-}(\arcsin y - \arcsin 0)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Remarque.

1.
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x} &= \overbrace{\int_0^b \frac{dx}{x}}^{2^{\text{ème}}\text{ esp}} + \overbrace{\int_b^\infty \frac{dx}{x}}^{1^{\text{ère}}\text{ esp}}\\ &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^b \frac{dx}{x} + \lim_{y\to\infty}\int_b^y \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ converge si, et seulement si, les deux limites existent.

2.
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \sin x dx &= \lim_{y\to\infty}\int_{-y}^y \sin x dx\\ &= \lim_{y\to\infty} \cos x\Big|_{-y}^y\\ &= \lim_{y\to\infty}(\cos y - \cos(-y)) = \lim_{y\to\infty} 0\end{aligned}$$

$$= 0$$

Cependant,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx &= \int_{-\infty}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{\infty} \sin x dx \\
&= \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{0} \sin x dx + \lim_{y\to\infty} \int_{0}^{y} \sin x dx \\
&= \lim_{y\to\infty} (\cos 0 - \cos(-y)) + \lim_{y\to\infty} (\cos 0 - \cos y)
\end{aligned}$$

diverge
Ainsi, l'intégrale diverge.

Théorème (Critère de Cauchy)**.**
$\int_a^{\infty} f(x)dx$ *converge si, et seulement si,* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$ *t.q.* $M \leqslant y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$

Démonstration.
Posons $F(y) = \int_a^y f(x)dx.$

(⇒) Supposons que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.
Soit $L = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)dx.$
Alors, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$ t.q. $y \leqslant M \Rightarrow |F(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$
Soient y_1, y_2 avec $M \leqslant y_1 \leqslant y_2.$
On a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| &= |F(y_2) - F(y_1)| \\
&= |F(y_2) - L + L - F(y_1)| \\
&\leqslant |F(y_2) - L| + |F(y_1) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

(⇐) Supposons que $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$, $M \leqslant y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$
Soit $n \in \mathbb{N}.$
En particulier, on a $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$, $M \leqslant n \leqslant y \Rightarrow |F(y) - F(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$
Considérons la suite $\{F(n)\}_{n\in\mathbb{N}}.$
Rappel. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)$, $m > n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$
La suite $\{F(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et elle est convergente. Soit $L = \lim_{n\to\infty} F(n).$
Alors, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)$, $n > N \Rightarrow |F(n) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$
Il reste à montrer que $\{F(y)\}_{y\in\mathbb{R}}$ converge aussi vers $L.$
À partir d'un certain rang approprié, on a

$$\begin{aligned}
|F(y) - L| &= |F(y) - F(n) + F(n) - L| \\
&\leqslant |F(y) - F(n)| + |F(n) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Remarque. Si $f \geqslant 0$, alors F est croissante, donc $\lim F(y)$ converge ou tend vers ∞.

Ainsi, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si, et seulement si, $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$.

Proposition (Test de comparaison)**.**
Supposons que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall x \geqslant a)$.
Alors, $\int_a^\infty g(x)dx$ *converge implique* $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*

Démonstration.
$\int_a^\infty g(x)dx$ converge, alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$, $M \leqslant y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \left|\int_{y_1}^{y_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$.
On a

$$0 \leqslant \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \leqslant \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx = \left|\int_{y_1}^{y_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$$

Donc, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. □

Exemple.
Déterminer si $\int_1^\infty e^{-x^2}$ converge.
Pour $x \geqslant 1$, on a $x^2 \geqslant x$, donc $-x^2 \leqslant -x$ et $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$.
Or, $\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^y = \lim_{y\to\infty}(e^{-1} - e^{-y}) = e^{-1}$.
Comme $e^y \geqslant 0, \forall y \in \mathbb{R}$, on a que $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ converge.

Proposition (Test de comparaison limite)**.**
Supposons $a \leqslant b \leqslant x$ *et* $f(x), g(x) \geqslant 0$, $(\forall x \geqslant b)$.
Si $C = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe, alors* $\int_a^\infty g(x)dx$ *converge implique* $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*
De plus, si $C \neq 0$, $\int_a^\infty g(x)dx$ *converge si, et seulement si,* $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*

Proposition (Convergence absolue)**.**

a) $\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$, *alors* $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$.

b) $\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leqslant \int_a^\infty |f(x)|\,dx$.

Démonstration.

a) Si $\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$, alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geqslant a)$ t.q. $M \leqslant y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \left|\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$.

Or, $\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)dx\right| \leqslant \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx = \left|\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$.

Du critère de Cauchy, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

b)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{\infty} f(x)dx\right| &= \left|\lim_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx\right| \\ &= \lim_{y\to\infty}\left|\int_a^y f(x)dx\right| \\ &\leqslant \lim_{y\to\infty}\int_a^y |f(x)|\,dx \\ &= \int_a^{\infty}|f(x)|\,dx\end{aligned}$$

□

Remarque. $\displaystyle\int_a^{\infty} f < \infty \not\Rightarrow \int_a^{\infty}|f| < \infty$.

Exemple (En effet).

$$\begin{aligned}\int_a^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx &= \lim_{y\to\infty}\int_a^y \frac{\sin x}{x}dx \\ u = \frac{1}{x} &\Rightarrow du = \frac{-dx}{x^2} \\ dv = \sin x &\Rightarrow v = -\cos x \\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{-\cos x}{x}\bigg|_{\pi/2}^{y} - \int_{\pi/2}^{y}\frac{\cos x}{x^2}dx\right) \\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{\cos \pi/2}{\pi/2} - \int_{\pi/2}^{y}\frac{\cos x}{x^2}dx\right) \\ &= \lim_{y\to\infty} - \int_{\pi/2}^{y}\frac{\cos x}{x^2}dx\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx < \int_{\pi/2}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{y\to\infty}\int_{\pi/2}^{y}\frac{dx}{x^2}dx = \lim_{y\to\infty}\frac{-1}{x}\bigg|_{\pi/2}^{y} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{y}\right) = \frac{2}{\pi}$.

Donc, $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx < \infty$. Alors, $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx < \infty$.

Montrons que. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ diverge.

Considérons les intervalles $I_k = \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Sur I_k, $\sin x$ croît de 0 à 1.

En particulier, $\exists x_k \in I_k$ t.q. $\sin x_k \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, $\left|\frac{\sin x_k}{x_k}\right| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2x_k}$.

Or, $x_k \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leqslant 8k + \frac{\pi}{2} \leqslant 8k + 2k = 10k$.

Alors, $\frac{1}{x_k} \geqslant \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{k} = c\cdot\frac{1}{k}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{I_k}\left|\frac{\sin x_k}{x_k}\right|dx > \int_{I_k}\frac{c}{k}dx = \frac{c}{k}\cdot\frac{\pi}{2}$.

Enfin, $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}\left|\frac{\sin x_k}{x_k}\right|dx > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{k}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{c\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, la série harmonique qui diverge. □

Théorème (Test de l'intégrale)**.**

Soit $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ *monotone décroissante.*

Alors, $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$ *si, et seulement si,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$.

Démonstration.

Soit $\Delta : 1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, avec $x_i = i+1$, pour $i \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned} S(f, \Delta, \{x_i\}) &= \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f(i+1) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} f(j) \end{aligned}$$

De même, $S(f, \Delta, \{x_{i-1}\}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$.

On a donc

$$\sum_{j=2}^{\infty} f(j) \leqslant \int_1^{\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

$(\Rightarrow)$ Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, alors $\sum_{j=2}^{\infty} f(j)$ converge. Donc, $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ converge.

$(\Leftarrow)$ Si $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ converge, alors $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

□

Exemple.

m.q. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\forall p > 1$.

D'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim_{n\to\infty} n^{-p/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{-p/n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-p\frac{\ln n}{n}} = e^{-p \lim_{n\to\infty} \ln n/n} = e^{-p \lim_{n\to\infty} 1/n} = 1$$

Test de l'intégrale :

Posons $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

On a $f'(x) = -px^{-p-1} < 0$, donc f est monotone décroissante.

De plus, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si, et seulement si, $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

Or, $\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$.

Donc, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$. □

Chapitre 2 Suites de fonctions

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx \stackrel{?}{=} \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Exemple.

1. Posons $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

   On a $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 1} x^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.

   Cependant, $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\lim\limits_{n\to\infty} x^n\right) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, avec $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$.

2. Sur $[0,1]$, posons $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si} \quad x \leqslant \frac{1}{n} \\ -n^2x + 2n & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{2}{n} \end{cases}$.

   Posons $f(x) = 0$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

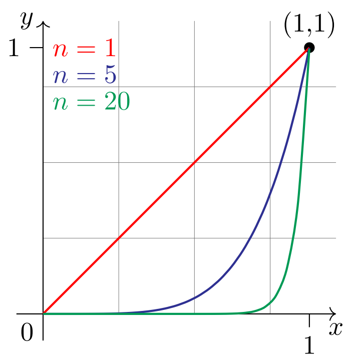
   Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$.

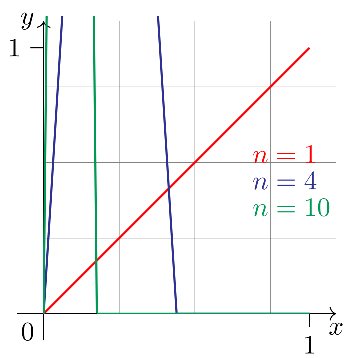
   Cependant, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{bh}{2} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

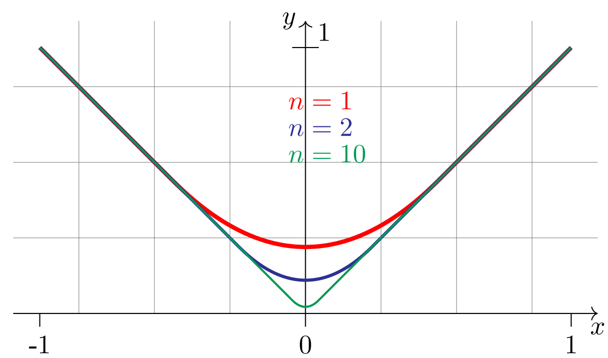
3. Sur $\mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 + \frac{1}{4n} & \text{si} \quad \frac{-1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ |x| & \text{sinon} \end{cases}$. On a $f_n'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leqslant \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si} \quad \frac{-1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{1}{2n} \end{cases}$.

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leqslant \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si} \quad \frac{-1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{1}{2n} \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

   Cependant, $\displaystyle\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{d}{dx}|x|$, qui n'existe pas en $x = 0$.







Rappel.
$(f_n) \to f$ (convergence ponctuelle)
$(\forall x \in \mathcal{D}), (f_n(x)) \to f(x)$ ou encore, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, c'est-à-dire $(\forall \varepsilon > 0), (\exists N > 0)$ t.q. $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Définition.

1. La *norme supremum* de f, notée $\|f\|$, est $\|f\| = \sup_{x\in\mathcal{D}} |f(x)|$, où $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.
2. La *distance* entre $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est $\text{dist}(f, g) = \|f - g\|$.
3. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* vers f si $\lim_{n\to\infty} \text{dist}(f_n, f) = 0$.

Exemple.

1. Sur $[0, \frac{1}{2}]$, prenons $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = 0$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \text{dist}(f_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1/2]} |f_n(x)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 0\end{aligned}$$

2. Sur $[0, 1]$, prenons $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \text{dist}(f_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| && \text{car } f_n(1) - f(1) = 0 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1[} |x^n| \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc, $f_n \not\rightrightarrows f$ sur $[0, 1]$.

Notation. On note la convergence uniforme et la convergence ponctuelle d'une suite de fonction vers une fonction $f_n \rightrightarrows f$ et $f_n \to f$ respectivement.

Proposition. $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \to f$.

Démonstration.
$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| = 0$.
Alors, $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$, $\forall x \in \mathcal{D}$.
Ainsi, $f_n \to f$. □

Proposition. *Si $f_n \to f$ et $f_n \rightrightarrows g$, alors $f = g$.*

Démonstration.
$f_n \to f \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$.
$f_n \rightrightarrows g \Rightarrow f_n \to g \Rightarrow f_n(x) \to g(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$.
Ainsi, $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$. □

Théorème.
Supposons que (f_n) sont continues sur $\mathcal{D}$.
Si $f_n \rightrightarrows f$, alors f est continue sur $\mathcal{D}$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $x_0 \in \mathcal{D}$.

On veut montrer que f est continue en x_0, c'est-à-dire $\exists \delta > 0$ t.q. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Comme $(f_n) \rightrightarrows f$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) = 0$.

Ainsi, $\exists M > 0$ t.q. $n \geqslant M \Rightarrow \operatorname{dist}(f_n, f) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

En particulier, $\operatorname{dist}(f_M, f) < \dfrac{\varepsilon}{3}$, c'est-à-dire $\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} |f_M(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et donc, $|f_M(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

De plus, f_n continue sur $\mathcal{D} \Rightarrow f_M$ continue en x_0.

Ainsi, $(\exists \delta > 0)$ t.q. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_M(x) - f_M(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Supposons donc que $|x - x_0| < \delta$. On a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_M(x) + f_M(x) - f_M(x_0) + f_M(x_0) - f(x_0)| \\
&\leqslant |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(x_0)| + |f_M(x_0) - f(x_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Corollaire.

Si f_n continues et $f_n \rightrightarrows f$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Comme f_n est continue en x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Comme f est continue en x_0, $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Théorème.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $[a, b]$.

Si $f_n \rightrightarrows f$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f} \, dx$$

Démonstration.

f_n continues et $f_n \rightrightarrows f$, alors $f \in \mathcal{C}\,[a, b]$, donc $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b (f_n - f)(x)dx \right| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} (b - a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \\
&= (b - a) \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) \\
&= 0 \qquad\qquad \text{car } f_n \rightrightarrows f
\end{aligned}$$

□

Théorème.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable à dérivée continue).

Supposons

i) $f_n' \rightrightarrows g$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ *existe pour au moins un a.*

Alors,

a) f_n *converge ponctuellement vers* f *;*

b) $f \in C^1$ *;*

c) $f' = g$, *c'est-à-dire* $\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$.

Démonstration.
Supposons $L = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$ pour un certain a.
On a $f_n \in C^1$, alors f_n' est continue.
De plus, $f_n' \rightrightarrows g$, donc g est continue.
Alors, $\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \int_a^x g(t)dt$, pour tout x.
Du théorème fondamental du calcul, $\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a)$.
On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^x f_n'(t)dt + f_n(a)\right] \\ &= L + \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt \\ &= L + \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt \\ &= L + \int_a^x g(t)dt \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(L + \int_a^x g(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt = g(x)$.
D'où b) et c), $f \in C^1$ avec $f' = g$. □

Chapitre 3 Séries de fonctions

Section 3.1 Convergence uniforme de série

Définition.

Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des fonctions $f_k : A \to \mathbb{R}$.

La *série* des f_k est la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Si la suite $(s_n(x))$ converge ponctuellement vers une fonction $s(x)$, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ est appelée la *somme* de la série, c'est-à-dire, $s = \displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

Exemple.

$f_k(x) = x^k$, pour $x \in \mathbb{R}$.

On cherche $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

D'Alembert : $L = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty} |x| = |x|$. On a convergence si $L < 1$, c'est-à-dire $-1 < x < 1$.

Si $x = -1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ oscille.

Si $x = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k$ diverge.

Donc, la série converge sur $]-1,1[$.

On a, sur $]-1,1[$, $s = \displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$.

Définition.

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *converge uniformément* sur A vers une fonction $s : A \to \mathbb{R}$ si $\left(s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \rightrightarrows s$, c'est-à-dire si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |s_n(x) - s(x)| = 0$.

Exemple.

a) $f_k(x) = x^k$ sur $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On a

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| -\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|x^k\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0
\end{aligned}
$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k \rightrightarrows \frac{1}{1-x}$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b) $f_k(x) = x^k$ sur $A =]-1, 1[$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} 1^k \right| \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

Théorème (Critère de Weierstrass)**.**

Soient $(f_k : A \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ *t.q.*

i) $(\forall k)(\exists M = M_k)(\forall x \in A), |f_k(x)| \leqslant M_k$ *;*

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ *converge.*

Alors, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *converge uniformément.*

Démonstration.

Soit $x \in A$.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} M_k$, par *i)*, qui converge, par *ii)*.

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge absolument et donc converge.

De plus, sur A,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |s(x) - s_n(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k
\end{aligned}
$$

d'où la convergence uniforme. □

Exemple.

Étudions la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$.

On a

i) $\displaystyle\left| \frac{\cos kx}{k^2} \right| \leqslant \frac{1}{k^2}$;

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ converge.

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ converge uniformément.

Théorème.

$(f_k : A \to \mathbb{R})$, f_k continue, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \rightrightarrows s$, alors s est continue sur A.

Démonstration.

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \rightrightarrows s \Rightarrow (s_n) \rightrightarrows s.$

Or, $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est continue.

Alors, s est continue. □

Théorème.

f_k continue et $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément, alors $\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)dx \\
\text{puisque la somme est finie} &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx
\end{aligned}$$

Or, f_k continue $\Rightarrow s_n$ continue et $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément $\Leftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx \\
&= \int_a^b \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx \\
&= \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx
\end{aligned}$$

□

Théorème.

$f_k \in C^1$ sur A, $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k \rightrightarrows u$ et $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(a)$ converge pour au moins un $a \in A$, alors

a) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément vers s ;

b) $s \in C^1$ sur A ;

c) $s' = u$, c'est-à-dire $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$.

Démonstration.

Comme au chapitre précédent. □

Exemple.

$f_k(x) = \frac{\sin kx}{k^3}$, $k \in \mathbb{N}_*$.

On a

i) $f_k \in C^1$ sur $\mathbb{R}$;

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ converge uniformément (Weierstrass) ;

iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin 0k}{k^3} = 0$ converge.

Alors, $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{x^3}$

Section 3.2 Séries de puissances

Définition.

Si $f_k(x) = a_k \cdot (x - x_0)^k$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ est une *série de puissance.*

Exemple.

$\displaystyle f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot (x-0)^i$, où $a_i = \frac{1}{i!}$ et $x_0 = 0$.

Théorème.

Soit $R = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$. *Alors,*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *converge sur* $]x_0 - R, x_0 + R[$ *;*

b) Si $R > 0$ *et* $0 < r < R$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *converge uniformément sur* $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Démonstration.

a) Fixons x.
Posons $b_k = a_k(x - x_0)^k$.
Considérons la série réelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.
De d'Alembert, la série converge si, et seulement si, $L < 1$, avec $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x - x_0| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-x_0|}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \frac{|x-x_0|}{R}$.
Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge si, et seulement si, $L < 1$, c'est-à-dire $\dfrac{|x-x_0|}{R} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < R \Leftrightarrow x \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

b) Supposons que $R > 0$ et soit $0 < r < R$.
Pour $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, on a

i) $|f_k(x)| = \left|a_k(x-x_0)^k\right| = |a_k|\,|x-x_0|^k \leqslant |a_k|\, r^k$

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, r^k$ converge.

En effet, $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_n r^n}\right| = r \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{r}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \frac{r}{R}$.

Ainsi, $L < 1 \Leftrightarrow \dfrac{r}{R} < 1 \Leftrightarrow r < R$.

De Weierstrass, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ converge uniformément sur $[x_0-r, x_0+r]$.

$\square$

Définition.

$R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ est le *rayon de convergence* de la série.

Exemple.

a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(x-0)^i$

$R = \lim_{i\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{i!}}{\frac{1}{(i+1)!}}\right| = \lim_{i\to\infty}(i+1) = \infty.$

Donc, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ converge sur tout $\mathbb{R}$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-0)^k$

$R \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1/k}{1/(k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k+1}{k}\right| = 1.$

Donc, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ converge sur $]-1,1[$ converge unifirmément sur $[-r,r]$ avec $0<r<1$.

Pour $x=\frac{1}{2}$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1/2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{1/2} x^{k-1}dx.$

Puisque $\frac{x^k}{k}$ est continue pour tout k et $\sum \frac{x^k}{k}$ converge uniformément, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{1/2} x^{k-1}dx = \int_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}dx =$ $\int_0^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} x_k dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}dx = -\ln|1-x|\,\Big|_0^{1/2} = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2.$

Corollaire.

Supposons que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *converge vers* f *sur* $]x_0-R, x_0+R[$. *Alors,*

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k)$ *est une série de puissance qui converge sur* $]x_0-R, x_0+R[$ *;*

b) $f\in C^\infty$ *sur* $]x_0-R, x_0+R[$ *;*

c) $\frac{d^n}{dx^n}f = \frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}(a_k(x-x_0)^k).$

Démonstration.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k$ qui est effectivement une série de puissance.

$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)a_{k+1}}{(k+2)a_{k+2}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k+2}\right| \cdot \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right| = 1\cdot \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = R.$

b),c) Soit $x\in]x_0-R, x_0+R[$. Alors, $\exists 0<r<R$ t.q. $x\in[x_0-r, x_0+r]$. On sait que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k)$ converge uniformément sur $[x_0-r, x_0+r]$.

De plus, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ converge pour au moins un $a\in[x_0-r, x_0+r]$.

Du théorème, $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$.

Donc, f' est continue et $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{d}{dx}(a_k(x-x_0)^k)$.

Par récurrence, on obtient les résultats.

□

Corollaire.

Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = f$, *sur* $]x_0-R, x_0+R[$. *Alors,* $a_k = \dfrac{\left(\dfrac{d^k}{dx^k} f\right)(x_0)}{k!}$.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\infty} a_K(x-x_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^n}{dx^n}(a_k(x-x_0)^k) \\
&= \frac{d^n}{dx^n}(a_0) + \frac{d^n}{dx^n}(a_1(x-x_0)) + \cdots + \frac{d^n}{dx^n}(a_n(x-x_0)^n) + \frac{d^n}{dx^n}(a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}) + \cdots \\
&= 0 + 0 + \cdots + a_n(n)(n-1)\cdots(2)(1) + a^{n+1}(n+1)(n)(n-1)\ldots(3)(2)(x-x_0) + \cdots
\end{aligned}
$$

Ainsi, $f^{(n)}(x_0) = 0 + \cdots + 0 + a_n \cdot n! + 0 + \cdots = a_n \cdot n!$, donc $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. □

Section 3.3 Séries de Taylor

Théorème.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *de classe* C^{n+1} *sur* A *et* $x_0 \in A$.

Alors, $(\forall x \in A)$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x_0, x)$, *où* $R_n(x_0,x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x}\dfrac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt$.

Démonstration.

Base : Pour $n = 0$, la formule devient

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + R_0(x_0,x) \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt
\end{aligned}
$$

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0)$$

qui est le théorème fondamental du calcul.

Hyp : Supposons vrai pour n.

Pas : On a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x_0,x)$.

Or,

$$R_n(x_0,x) = \int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

posons $u = f^{(n+1)}(t)$, donc $du = f^{(n+2)}(t)dt$ et $dv = \dfrac{(x-t)^n}{n!}dt$, donc $v = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\begin{aligned}
&= \left.\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + R_{n+1}(x_0,x)
\end{aligned}$$

Donc, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x_0,x)$.

□

Théorème.
S'il existe $M > 0$ t.q. $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M^{n+1}$ pour tout $t \in [x_0, x]$, alors

$$R_n(x_0,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
|R_n(x_0,x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt\right| \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{n!}(x-t)^n dt \\
&\leqslant \frac{M^{n+1}}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt \\
&= \frac{M^{n+1}}{n!} \cdot \left.\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right|_{x_0}^{x} \\
&= \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\
&= \frac{(M(x-x_0))^{n+1}}{(n+1)!} \\
\text{Stirling : } n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad & \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

□

Corollaire.
Sous ces conditions, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, la série de Taylor de f autour de x_0.

Corollaire.
Si la série de puissance $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ a comme limite f, alors la série de puissance est la série de Taylor de f autour de x_0.

Exemple.

a) $\cos x$, avec $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{rcrcr}
\cos x & : & \cos 0 & = & 0 \\
-\sin x & : & -\sin 0 & = & 0 \\
-\cos x & : & -\cos 0 & = & -1 \\
\sin x & : & \sin 0 & = & 0
\end{array}$$

Ainsi, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_n(0,x)$.
On a

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^k}{(2k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!}}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}|(2k+2)(2k+1)| \\ &= \infty \end{aligned}$$

On veut montrer que $R_n(0,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0, (\forall x \in \mathbb{R})$.
Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} R_n(0,x) &= \int_0^x \frac{\cos^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt \\ &\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt \\ &= \left.\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right|_0^x \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pour $x < 0$, $R_n(0,x) \geqslant \dfrac{-|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Donc, $|R_n(0,x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Donc, $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, avec $x_0 = 1$.

$$\begin{array}{rcl c rcl} f(x) & = & \frac{1}{x} & : & f(1) & = & 1 \\ f'(x) & = & -x^{-2} & : & f'(1) & = & -1 \\ f''(x) & = & 2x^{-3} & : & f''(1) & = & 2 \\ f^{(3)}(x) & = & -6x^{-4} & : & f^{(3)}(1) & = & -6 \\ f^{(4)}(x) & = & 24x^{-5} & : & f^{(4)}(1) & = & 24 \\ f^{(n)}(x) & = & (-1)^n n! x^{-(n+1)} & & & & \end{array}$$

Donc, $f(x) = 1 - (x-1) + \dfrac{2}{2!}(x-1)^2 - \dfrac{6}{3!}(x-1)^3 + \dfrac{24}{4!}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^n(x-1)^n + \cdots + R_n(1,x)$.
On a

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Il y a donc convergence sur $]0,2[$.

$$\begin{aligned}
|R_n(1,x)| &= \left|\int_1^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt\right| \\
&= \left|\int_1^x \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!t^{-(n+2)}}{n!}(x-t)^n dt\right| \\
&\leqslant \int_1^x \left|(n+1)t^{-(n+2)}\left|x-t\right|^n dt\right| \\
&\leqslant (n+1)\int_1^x \left|x-t\right|^n dt \\
&= \left|x-t\right|^{n+1}\Big|_1^x \\
&= \left|x-1\right|^{n+1} \\
\text{car } x \in]0,2[&\xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k$.

Chapitre 4 Intégrales avec paramètres

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t^n\}(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \\
\mathscr{L}\{t^2\}(s) &= \frac{2}{s^3} \\
\mathscr{L}\{t^3\}(s) &= \frac{6}{s^4}
\end{aligned}$$

Section 4.1 Fonction Gamma

Définition.
$\Gamma(y) = \displaystyle\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt$, pour $y > 0$.

Proposition.
$\Gamma(y)$ converge pour tout $y > 0$.

Démonstration.

1. $y \geqslant 1$.
   On a donc $y-1 \geqslant 0$ et c'est une intégrale impropre de première espèce.
   On utilise le test de comparaison limite.
   Posons $f(t) = t^{y-1}e^{-t}$ et $g(t) = e^{-\,t/2}$.
   On a

$$\begin{aligned}
C &= \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{y-1}e^{-t}}{e^{-\,t/2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{y-1}}{e^{t/2}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(y-1)t^{y-2}}{\frac{1}{2}e^{t/2}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(y-1)(y-2)t^{y-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{t/2}} \\
&\overset{H}{=} \cdots \\
&\overset{H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(y-1)(y-2)\cdots(y-k)}{\left(\frac{1}{2}^k e^{t/2}\right)t^{k-y}} && \text{avec } y-k<0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Or, $\displaystyle\int_0^\infty g(t)dt = \int_0^\infty e^{-t/2}dt = \cdots = 2$.
   Comme $\int g$ converge, on a $\int f$ converge.
   Donc, $\Gamma(y)$ converge si $y \geqslant 1$.

2. $0 < y < 1$.

   On a $\Gamma(y) = \underbrace{\int_0^1 t^{y-1}e^{-t}dt}_{2^{\text{ème}}\text{ esp}} + \underbrace{\int_1^\infty t^{y-1}e^{-t}dt}_{1^{\text{ère}}\text{ esp}}.$

   On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{y-1}e^{-t}dt &\leqslant \int_0^1 t^{y-1}dt \\ &= \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 t^{y-1}dt \\ &= \lim_{h\to 0^+} \left.\frac{t^y}{y}\right|_{t=h}^1 \\ &= \frac{1}{y}\end{aligned}$$

   La $2^{\text{ème}}$ intégrale s'obtient comme au 1^{er} cas.

□

Proposition.

a) $\Gamma(1) = 1$;

b) $\Gamma(y) = (y-1)\Gamma(y-1)$, *si* $y > 1$;

c) $\Gamma(y) = (y-1)(y-2)\cdots(y-k)\Gamma(y-k)$, *si* $y > k$;

d) $\Gamma(n+1) = n!$, *si* $n \in \mathbb{N}$;

e) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Démonstration.

a)

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt \\ &= -e^{-t}\Big|_{t=0}^\infty \\ &= 1\end{aligned}$$

b) Posons $u = t^{y-1}$, $du = (y-1)ty-2$, $dv = e^{-t}dt$, $v = -e^{-t}$.

$$\begin{aligned}\Gamma(y) &= -t^{y-1}e^{-t}\Big|_{t=0}^\infty + (y-1)\int_0^\infty t^{y-2}e^{-t}dt \\ &= -\lim_{t\to\infty}\frac{t^{y-1}}{e^t} + (y-1)\Gamma(y-1) \\ &= (y-1)\Gamma(y-1)\end{aligned}$$

c) récurrence du b)

d) suit de c) et a)

e)

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2) &= \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt \\ \left.\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{array}\right\} &= \int_0^\infty (x^2)^{-1/2}e^{-x^2}2xdx \\ &= 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ &f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}\right\} = 2\sqrt{\pi}\mathbb{P}(X > 0) \qquad \text{lorsque } X \sim N(0, 1/2)$$

$$= \sqrt{\pi}$$

□

Remarque (Utilité).

a) $\Gamma(\alpha, \lambda) : f(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $x \geqslant 0$;

b) $\chi^2_n : f(x) = \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \chi^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}$;

c) Transformée de Laplace : $\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \displaystyle\int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, $s > 0, n > -1$;

d) Une compagnie d'assurance a 240 000 clients.
Soit $N(t)$ le nombre de décès jusqu'au temps t.
Supposons que le taux de mortalité annuelle est $1/10\ 000$.
Supposons
  i) $N(0) = 0$;
  ii) $N(t+s) - N(s) \sim P(\lambda t)$, $(\forall s, t \geqslant 0)(\forall \lambda > 0)$;
  iii) $N(b_2) - N(a_2)$ est indépendant de $N(b_1) - N(a_1)$ lorsque $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \emptyset$.

On dit que $N(t)$ est un *processus de Poisson* d'intensité λ.
On a $N(t) - N(0) = N(t) \sim P(\lambda t)$ et $E[N(t)] = \lambda t$, d'où $E\left[\frac{N(t)}{t}\right] = \lambda$.
Donc λ est le nombre moyen d'événements sur une période donnée. Ainsi, $\lambda = \frac{240\ 000}{10\ 000} = 24$.
Soit T_1 le temps avant un 1^{er} décès.
On a

$$\begin{aligned} F_{T_1} &= \mathbb{P}(T_1 \leqslant t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_1 > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(N(t) = 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(P(\lambda t) = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

On en déduit que $f_{T_1} = \dfrac{d}{dt} F_{T_1} = \lambda e^{-\lambda t}$.
Ainsi, $T_1 \sim \exp(\lambda)$.
De même, si T_i désigne le temps entre le $(i-1)^{\text{ème}}$ décès et le $i^{\text{ème}}$ décès, on peut montrer que $\{T_i\}$ sont iid $\exp(\lambda)$.
On cherche à trouver le temps moyen pour avoir 4 décès à partir d'un moment donné.

$$\begin{aligned} E\left[T_{i_0} + T_{i_0+1} + T_{i_0+2} + T_{i_0+3}\right] &= E\left[\Gamma(4, 24)\right] \\ &= \frac{4}{24} = \frac{2}{12} \end{aligned}$$

Il faut donc en moyenne 2 mois pour avoir 4 décès.

e) $\displaystyle\int_0^\infty x^5 e^{-3x} dx$.
Posons $t = 3x$, $dt = 3dx$, alors

$$\int_0^\infty x^5 e^{-3x} dx = \int_0^\infty \left(\frac{t}{3}\right)^5 e^{-t} \frac{dt}{3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3^6}\int_0^\infty t^5 e^{-t}dt \\
&= \frac{\Gamma(6)}{3^6} \\
&= \frac{5!}{3^6}
\end{aligned}
$$

Section 4.2 Fonction Bêta

Définition.

$$
\begin{array}{rcl}
\beta : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R} \\
(m,n) & \mapsto & \beta(m,n) = \displaystyle\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt
\end{array}
$$

Proposition.
$\beta(m,n)$ converge ($\forall m,n>0$).

Démonstration.
Si $m,n \geqslant 1$, c'est une intégrale définie.
Si $0<m<1$ et $n\geqslant 1$, alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{t^{1-m}}dt \\
&= \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{t^{1-m}}dt \\
&\leqslant \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{1}{t^{1-m}}dt \\
&= \lim_{y\to 0^+} \left.\frac{t^m}{m}\right|_{t=y}^1 \\
&= \frac{1}{m} - \lim_{y\to 0^+}\frac{y^m}{m} \\
&= \frac{1}{m}
\end{aligned}
$$

Si $m\geqslant 1$ et $0<n<1$, alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt &= \int_0^1 \frac{t^{m-1}}{(1-t)^{1-n}}dt \\
&= \lim_{y\to 1^-}\int_0^y \frac{t^{m-1}}{(1-t)^{1-n}}dt \\
&\leqslant \lim_{y\to 1^-}\int_0^y \frac{1}{(1-t)^{1-n}}dt \\
&= \lim_{y\to 1^-} \left.\frac{-(1-t)^n}{n}\right|_{t=0}^y \\
&= \lim_{y\to 1^-}\frac{-(1-y)^n}{n} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Si $0<m,n<1$, alors

$$
\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt = \int_0^{1/2}\frac{(1-t)^{n-1}}{t^{1-m}}dt + \int_{1/2}^1 \frac{t^{m-1}}{(1-t)^{1-n}}dt
$$

On fait comme les deux cas précédents. $\square$

Proposition. $\beta(m,n) = \beta(n,m)$.

Idée de la démonstration. On effectue le changement de variables $s = 1-t$, donc $t = 1-s$ et $ds = dt$. On a donc que les rôles de m et n sont inversés. #

Proposition.

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= \left(\int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}dt\right)\left(\int_0^\infty s^{n-1}e^{-s}ds\right)\\
\left.\begin{array}{r}\text{posons } t = x^2, s = y^2\\ \text{donc } 2xdx, ds = 2ydy\end{array}\right\} &= \left(\int_0^\infty x^{2m-2}e^{-x^2}2xdx\right)\left(\int_0^\infty y^{2n-2}e^{-y^2}2ydy\right)\\
&= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\
\left.\begin{array}{r}\text{posons } x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\\ \text{donc } dxdy = rdrd\theta\end{array}\right\} &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty r^{2m-1}\cos^{2m-1}\theta r^{2n-1}\sin^{2n-1}\theta e^{-r^2}rdrd\theta\\
&= 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta d\theta\int_0^\infty r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}dr\\
&= 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-2}\theta\sin^{2n-2}\theta\frac{2\cos\theta\sin\theta d\theta}{2}\int_0^\infty r^{2(m+n-1)}e^{-r^2}\frac{2rdr}{2}\\
\left.\begin{array}{r}\text{posons } u = \sin^2\theta, v = r^2\\ \text{donc } du = 2\sin\theta\cos\theta d\theta, dv = 2rdr\end{array}\right\} &= \int_0^1(1-u)^{m-1}u^{n-1}du\int_0^\infty v^{m+n-1}e^{-v}dv\\
&= \beta(n,m)\Gamma(m+n)\\
&= \beta(m,n)\Gamma(m+n)
\end{aligned}$$

□

Exemple.

a)

$$\begin{aligned}
\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt\\
\left.\begin{array}{r}\text{posons } t = \sin^2\theta\\ \text{donc } dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta\end{array}\right\} &= \int_0^{\pi/2}\sin^{-1}\theta\cos^{-1}\theta 2\sin\theta\cos\theta d\theta\\
&= 2\int_0^{\pi/2}d\theta\\
&= \pi
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{0!}\\
&= \pi
\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^a x^m\sqrt[n]{a^n-x^n}dx = \frac{a^{m+2}}{n}\beta\left(\frac{m+1}{n},\frac{n+1}{n}\right)$.

On a

$$\frac{a^{m+2}}{n}\beta\left(\frac{m+1}{n},\frac{n+1}{n}\right) = \frac{a^{m+2}}{n}\int_0^1 t \qquad \frac{m+1}{n} - 1(1-t)^{\frac{n+1}{n}-1}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^{m+2}}{n}\int_0^1 t^{\frac{m-n+1}{n}}(1-t)^{1/n}dt \\
\left.\begin{array}{r}\text{posons } x^n = a^n t \\ \text{donc } nx^{n-1}dx = a^n dt\end{array}\right\} &= \frac{a^{m+2}}{n}\int_0^a \left(\left(\frac{x}{a}\right)^n\right)^{\frac{m-n+1}{n}}(1-\frac{x^n}{a^n})^{1/n}\frac{nx^{n-1}dx}{a^n} \\
&= \frac{a^{m+2}}{n}\int_0^a \frac{x^{m-n+1}}{a^{m-n+1}}\frac{\sqrt[n]{a^n-x^n}}{a}\frac{nx^{n-1}dx}{a_n} \\
&= \int_0^a x^m\sqrt[n]{a^n-x^n}dx
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\int_0^2 x^4\sqrt{2^2-x^2}dx$, on a $a=2, n=2, m=4$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 x^4\sqrt{2^2-x^2}dx &= \frac{2^6}{2}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) \\
&= 2^5\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{2^5\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{3!} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

Remarque (Utilité).

a) Loi $B(a,b)$ a comme densité $B_{a,b}(x) = \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)}$ si $0 < x < 1$.

b) On tire au hasard 10 nombres réels dans $[0,1]$.
On cherche à savoir la probabilité que le 2e plus petit soit inférieur à 0.2.
Soit $\mathcal{U}_{(2)}$ la valeur du 2e plus petit nombre tiré.
Alors, $\mathcal{U}_{(2)} \sim B(k, n+1-k)$, où n est le nombre de valeurs tirées.
Ici, $\mathcal{U}_{(2)} \sim B(2,9)$. On a

$$\mathbb{P}(\mathcal{U}_{(2)} < 0.2) = \int_0^{0.2}\frac{x^1(1-x)^8}{\beta(2,9)}dx$$

Or, $\beta(2,9) = \dfrac{\Gamma(2)\Gamma(9)}{\Gamma(11)} = \dfrac{1!8!}{10!} = \dfrac{1}{90}$.
La probabilité cherchée est

$$\int_0^{0.2} 90x(1-x)^8dx \approx 72.42\%$$

Chapitre 5 Séries de Fourier

Section 5.1 Définitions

Définition. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *périodique* de *période* T si $f(t+T) = f(t)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$.

Exemple.

$f(t) = \cos 5\pi t$ est périodique.

$$\cos 5\pi t = f(t) = f(t+T) = \cos 5\pi(t+T)$$

$$\cos(5\pi t + 2k\pi) = \cos(5\pi t + 5\pi T)$$

Si on prend $2k\pi = 5\pi T$, l'équation est vérifiée, c'est-à-dire $T = \frac{2k\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}k$.

Ainsi, $\cos 5\pi t$ est périodique de période $\frac{2}{5}$.

Proposition. *f, g périodiques de période T. Alors, $f+g$ est périodique de période T.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}(f+g)(t+T) &= f(t+T) + g(t+T)\\ &= f(t) + g(t)\\ &= (f+g)(t)\end{aligned}$$

□

Proposition. *$f(t) = a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos\omega_2 t$ est périodique de période T si, et seulement si, $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ t.q. $\omega_1 T = 2\pi m_1$ et $\omega_2 T = 2\pi m_2$. Alors, $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{m_1}{m_2} \in \mathbb{Q}$ et $\omega_1 = \dfrac{2\pi m_1}{T}, \omega_2 = \dfrac{2\pi m_2}{T}$.*

Démonstration.

$(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned}f(t+T) &= a_1\cos\omega_1(t+T) + a_2\cos\omega_2(t+T)\\ &= a_1\cos\omega_1 t\cos\omega_1 T - a_1\sin\omega_1 t\sin\omega_1 T + a_2\cos\omega_2 t\cos\omega_2 T - a_2\sin\omega_2 t\sin\omega_2 T\\ &= a_1\cos\omega_1 t + a_2\cos\omega_2 t\\ &= f(t)\end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$ Supposons $\omega_1 \neq \omega_2$.

On veut montrer que $\cos\omega_1 t$ et $\cos\omega_2 t$ sont linéairement indépendantes.

Soient c_1, c_2 t.q. $c_1\cos\omega_1 t + c_2\cos\omega_2 t = 0$, $(\forall t \in \mathbb{R})$.

On applique $\dfrac{d^2}{dt^2}$: $-c_1\omega_1^2\cos\omega_1 t - c_2\omega_2^2\cos\omega_2 t = 0$, $(\forall t \in \mathbb{R})$.

En $t = 0$, on a

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & 0\\ -c_1\omega_1^2 & - & c_2\omega_2^2 & = & 0\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ -\omega_1^2 & \omega_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Comme $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2\end{pmatrix} \neq 0$, la seule solution est $(c_1, c_2) = (0, 0)$.

Comme f est périodique de période T, on a

$$\begin{aligned} a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t &= f(t) \\ &= f(t+T) \\ a_1 \cos \omega_1 (t+T) + a_2 \cos \omega_2 (t+T) \end{aligned}$$

Alors,

$$a_1 \Bigg[\underbrace{\cos \omega_1 (t+T) - \cos \omega_1 t}_{g_1(t)} \Bigg] + a_2 \Bigg[\underbrace{\cos \omega_2 (t+T) - \cos \omega_2 t}_{g_2(t)} \Bigg] = 0$$

Or, par $\cos(x+\alpha) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}$, on a

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -2 \sin \left(\omega_1 t + \frac{\omega_1 T}{2} \right) \sin \frac{\omega_1 T}{2} \\ g_2(t) &= -2 \sin \left(\omega_2 t + \frac{\omega_2 T}{2} \right) \sin \frac{\omega_2 T}{2} \end{aligned}$$

Comme les sin sont indépendants, on en déduit que g_1 et g_2 le sont aussi.
Comme $a_1, a_2 \neq 0$, il faut donc que $g_1(t) = g_2(t) = 0$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 t + \omega_1 T &= \cos \omega_1 t \\ \cos \omega_2 t + \omega_2 T &= \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

Donc, $\omega_1 T = 2\pi m_1$ et $\omega_2 T = 2\pi m_2$, pour $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

□

Remarque. On obtient $\omega_i = \dfrac{2 m_i \pi}{T}$, pour $i \in \{1, 2\}$.

Proposition.
$c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t = B \cos(\omega t + \phi)$, *pour des constantes* B *et* ϕ.

Démonstration.
Prenons $\theta = \arctan \frac{c_2}{c_1}$.
On a $\tan \theta = \frac{c_2}{c_1}$ et

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 &\Rightarrow \tan^1 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &\Rightarrow \frac{c_2^2}{c_1^2} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &\Rightarrow \cos \theta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \end{aligned}$$

et

$$\sin \theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

Posons $B = -\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ et $\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$.
On obtient

$$\begin{aligned} B \cos(\omega t + \phi) &= B \cos \omega t \cos \phi - B \sin \omega t \sin \phi \\ &= B \cos \omega t (-\sin \theta) - B \sin \omega t \cos \theta \\ &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos \omega t \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin \omega t \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \\ &= c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \end{aligned}$$

□

Définition.

a) Un *polynôme trigonométrique* est une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} \left[a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right]$$

b) Lorsque $n = \infty$, c'est une *série trigonométrique.*

Proposition. *Tout polynôme trigonométrique est T-périodique.*

Proposition. *Si une série trigonométrique converge ($\forall x$), alors sa somme est T-périodique.*

Remarque. Si f n'est pas périodique, alors f ne pourra pas être la somme d'une série trigonométrique.

Définition. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = f(b)$ et $T = b - a$. L'*extension T-périodique de f* est

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ f(x - nT) & \text{si} \quad x \in [a + nT, b + nT] \quad \text{pour un } n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple.
$f(t) = |t|$, sur $[-3, 3]$.

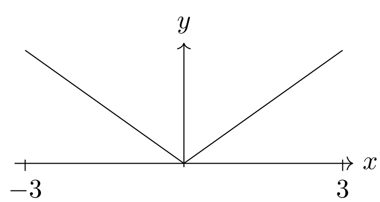


FIGURE 5.1 – f sur $[-3, 3]$

L'extension 6-périodique de f est

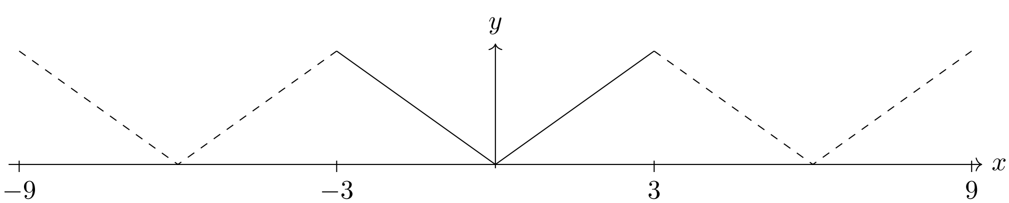


FIGURE 5.2 – $\tilde{f}$ sur $[-9, 9]$

Rappel.
Soit E un K-espace vectoriel.
Un *produit scalaire* sur E est une fonction

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\to K \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

t.q.

i) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$;
$\langle x, x \rangle = 0$ si, et seulement si, $x = \vec{0}$;

ii) $\langle a_1 x_1 + a_2 x_2, y \rangle = a_1 \langle x_1, y \rangle + a_2 \langle x_2, y \rangle$;

iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Proposition.
L'ensemble $E = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire sur E.

Définition. La norme de $x \in E$ est

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Remarque. Si on prend $T = 2\pi$, le polynôme trigonométrique s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} [a_k \cos kt + b_k \sin kt] = a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kt + b_k \sin kt]$$

Proposition. $\{1, \cos kt, \sin kt \mid k \geqslant 1\}$ *est une famille de fonctions orthogonales.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle \cos nt, \sin mt\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overbrace{(\cos nt)}^{\text{paire}}\overbrace{(\sin mt)}^{\text{impaire}}}_{\text{impaire}} dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \cos nt, \cos mt\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nt)(\cos mt)dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sin nt, \sin mt\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nt)(\sin mt)dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Corollaire.
$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; m, n \geqslant 1 \right\}$ *est un ensemble de fonctions orthonormales.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|1\| &= \sqrt{\langle 1, 1\rangle} \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dt} \\
&= \sqrt{2\pi}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\Rightarrow \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right| \|1\| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right| \sqrt{2\pi} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\cos nx\| &= \sqrt{\langle \cos nx, \cos nx\rangle} \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)(\cos nx)dx} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\|\sin mx\| &= \sqrt{\langle \sin mx, \sin mx\rangle} \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin mx)(\sin mx)dx} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

□

Corollaire.
$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; m, n \geqslant 1 \right\}$ *est un ensemble linéairement indépendant.*

Proposition.
Si $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$, *alors*

i) $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$;

ii) $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt$;

iii) $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt$.

Démonstration.

i)

$$\begin{aligned}
\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle &= \left\langle a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \\
&= \left\langle a_0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle + \sum_{k=1}^{n} a_k \left\langle \cos kx, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle + \sum_{k=1}^{n} b_k \left\langle \sin kx, \frac{1}{2\pi} \right\rangle \\
&= a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle 1, 1 \rangle \\
&= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} 2\pi \\
&= a_0 \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi, $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$

ii)

$$\begin{aligned}
\left\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \left\langle a_0 + \sum a_k \cos kx + \sum b_k \sin kx, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \\
&= \left\langle a_n \cos nx, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \\
&= \frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \langle \cos nx, \cos nx \rangle \\
&= \frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \pi \\
&= a_n \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi, $a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt.$

iii) idem

□

Définition. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Posons $T = b - a$. La *série de Fourier* T*-périodique* de f est

$$S(f) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t$$

où

i) $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^b f(t)dt\,;$

ii) $a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^b f(t)\cos\dfrac{2k\pi}{T}tdt\,;$

iii) $b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^b f(t)\sin\dfrac{2k\pi}{T}tdt.$

Exemple.

a) $f(x) = |x|$ sur $[-\pi,\pi]$. On a $T = 2\pi$.

$$T = 2\pi \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tdt \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos ktdt \\ &= \cdots \\ &= \frac{2}{k^2\pi}\left[\cos k\pi - 1\right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \dfrac{-4}{k^2\pi} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\sin ktdt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $S(f) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\cos t - \dfrac{4}{9\pi}\cos 3t - \dfrac{4}{25\pi}\cos 5t - \cdots = \frac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}.$

On a $\left|\dfrac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(2n+1)^2} =: M_n.$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{8}$ converge.

Du critère de Weierstrass, $S(f)$ converge uniformément.

b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 3 \\ f(t-3) & \text{sinon} \end{cases}$. On a $T = 3$ avec $a = 0$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \text{valeur moyenne de } f \text{ sur } [0,3[\\ &= \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\cos\frac{2k\pi}{T}tdt \\ &= \frac{2}{3}\int_0^3 t\cos\frac{2k\pi}{3}tdt \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\sin\frac{2k\pi}{T}tdt \\ &= \frac{2}{3}\int_0^3 t\sin\frac{2k\pi}{3}tdt \\ &= -\frac{3}{k\pi} \end{aligned}$$

Donc, $S(f) = \dfrac{3}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{-3}{k\pi}\sin\dfrac{2k\pi}{3}t.$

Section 5.2 Convergence

Théorème. *Supposons*

i) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux ;*

ii) f' *existe, sauf peut-être en un nombre fini de points ;*

iii) f' *continue par morceaux.*

Soit

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a,b[\text{ et } f \text{ continue en } x \\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & \text{si } x \in]a,b[\text{ et } f \text{ non continue en } x \\ \dfrac{f(a^+)+f(b^-)}{2} & \text{si } x = a \text{ ou } x = b \end{cases} \end{aligned}$$

où $f(x^-) = \lim_{t\to x^-} f(t)$ *et* $f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t)$.

Alors, la série de Fourier T*-périodique de* f *converge ponctuellement vers l'extension* T*-périodique de* g.

Exemple.

Soit $\begin{array}{rcl} f : [-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases} \end{array}$. On a $\begin{array}{rcl} g : [-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} -1 & \text{si} & -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si} & 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si} & x \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{array} \right\} \end{array}$.

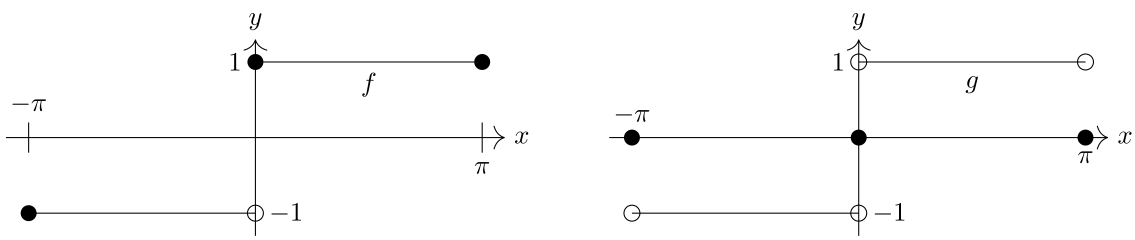


Figure 5.3 – f et g

Calculons $S(f)$. On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi} f(t)dt \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin kt dt \\ &= -\frac{2}{\pi}\left.\frac{\cos kt}{k}\right|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{k\pi}\underbrace{(\cos k\pi - 1)}_{\begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \text{ pair} \\ -2 & \text{si} \quad k \text{ impair} \end{cases}} \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} S(f) &= \underbrace{\frac{4}{\pi}\sin t}_{k=1} + \underbrace{\frac{4}{3\pi}\sin 3t}_{k=3} + \underbrace{\frac{4}{5\pi}\sin 5t}_{k=5} + \cdots \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} \end{aligned}$$

qui converge ponctuellement vers l'extension 2π-périodique de g.

Comme $\dfrac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$ est continue, si la convergence était uniforme, on aurait que l'extension 2π-périodique de g serait continue. Or, g n'est pas continue et la convergence n'est pas uniforme.

En $x = \pi/2$, on a $f(\pi/2) = 1$ et $S(f)(\pi/2) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Comme f est continue en $x = \pi/2$, on a $g(\pi/2) = 1$ et on obtient $1 = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Proposition.

Si une série trigonométrique

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2k\pi}{T}t + b_k \sin\frac{2k\pi}{T}t\right) \tag{$*$}$$

converge uniformément vers, disons, f*, alors la série de Fourier de* f *est* $(*)$*, c'est-à-dire,* $S(f) = (*)$.

Démonstration.

Supposons $f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + \beta_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right)$.

On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_a^b f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_a^b \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + \beta_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right) dt \end{aligned}$$

comme il y convergence uniforme

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \int_a^b \alpha_0 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int_a^b \alpha_k \cos \frac{2k\pi}{T} t dt}_{\langle 1,\cos \rangle} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int_a^b \beta_k \sin \frac{2k\pi}{T} t dt}_{\langle 1,\sin \rangle} \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 0 + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \\ &= \alpha_0 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \cos \frac{2k\pi}{T} t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_a^b \left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + \beta_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right) \right] \cos \frac{2k\pi}{T} t dt \end{aligned}$$

comme il y convergence uniforme

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{T} \underbrace{\int_a^b \alpha_0 \cos \frac{2k\pi}{T} t dt}_{\langle 1,\cos \rangle} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_a^b \alpha_k \cos \frac{2j\pi}{T} t \cos \frac{2k\pi}{T} t + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{T} \underbrace{\int_a^b \beta_k \sin \frac{2j\pi}{T} t \cos \frac{2k\pi}{T} t}_{\langle \sin,\cos \rangle} \\ &= \frac{2}{T} \int_a^b \alpha_k \left(\cos \frac{2k\pi}{T} t \right)^2 dt \\ &= \frac{2}{T} \int_a^b \alpha_k \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{4k\pi}{T} t \right) + \cos 0 \right] dt \\ &= \frac{\alpha_k}{T} \int_a^b \cos \frac{4k\pi}{T} t dt + \frac{\alpha_k}{T} \int_a^b dt \\ &= 0 + \frac{\alpha_k}{T} (b-a) \\ &= a_k \end{aligned}$$

De même, $b_k = \beta_k$. □

Corollaire.

Si deux séries trigonométriques convergent uniformément vers la même fonction, alors leurs coefficients sont les mêmes.

Corollaire.

Si $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues et $S(f_1) = S(f_2)$, alors $f_1 = f_2$.

Théorème.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $f(a) = f(b)$. Alors, la série de Fourier T-périodique de f converge uniformément vers l'extension T-périodique de f.

Démonstration.

Supposons $[a,b] = [\pi, \pi]$.

Soit $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ la série T-périodique de f.

On veut

i) borner $|a_k \cos kt + b_k \sin kt| \leqslant \frac{2M}{k^2}$;

ii) m.q. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2M}{k^2}$ converge.

Pour i), on veut m.q. $|a_k| \leqslant \frac{M}{k^2}$ et $|b_k| \leqslant \frac{M}{k^2}$. On a

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt$$

posons $u = f$, $du = f'(t)dt$, $dv = \cos ktdt$, $v = \frac{1}{k}\sin kt$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}f(t)\sin kt\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ktdt\right]$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ktdt$$

posons $u = f'$, $du = f''(t)dt$, $dv = \sin ktdt$, $v = -\frac{1}{k}\cos kt$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{k\pi}\left[\frac{-1}{k}f'(t)\cos kt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos ktdt\right] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[f'(\pi)\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} - f'(-\pi)\underbrace{\cos(-k\pi)}_{(-1)^k}\right] - \frac{1}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos ktdt \\
&= \frac{(-1)^k}{k^2\pi}(f'(\pi) - f'(-\pi)) - \frac{1}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos ktdt
\end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
|a_k| &=\leqslant \frac{1}{k^2\pi}\left|f'(\pi) - f'(-\pi)\right| + \frac{1}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(t)dt| \\
&\leqslant \frac{1}{k^2\pi}\left|f'(\pi) - f'(-\pi)\right| + \frac{1}{k^2\pi}\cdot 2\pi \cdot \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|f''(t)| \\
&= \frac{1}{k^2}\underbrace{\left[\frac{|f'(\pi) - f'(-\pi)|}{\pi} + 2\sup|f''(t)|\right]}_{:=M}
\end{aligned}$$

Donc, $|a_k| \leqslant \frac{M}{k^2}$.

De même, $|b_k| \leqslant \frac{M}{k^2}$.

Donc, $|a_k \cos kt + b_k \sin kt| \leqslant |a_k| + |b_k| = \frac{2M}{k^2}$.

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2M}{k^2} &= 2M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \\
&= 2M\frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

qui converge.

Du crtitère de Weierstrass, $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ converge uniformément.

Par unicité de la limite, la série converge vers l'extension T-périodique de f. □

Section 5.3 Égalité de Parseval

Rappel.

$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; a \leqslant k \leqslant n \right\}$ est un ensemble de fonctions orthonormales.

Écrivons $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}\}$.

Supposons $v \in < \mathcal{B} >$.

Alors, $v = \sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i v_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} \langle v, v_i \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{2n+2} \alpha_j v_j, v_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{2n+1} \alpha_j \langle v_j, v_i \rangle \\ &= \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle \\ &= \alpha_i \end{aligned}$$

Ainsi, $v = \sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{2n+1} \langle v, v_i \rangle v_i$.

On trouve

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \left\langle v, \sum_{i=1}^{2n+1} \langle v, v_i \rangle v_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \langle v, v_i \rangle \langle v, v_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \langle v, v_i \rangle^2 \end{aligned}$$

ainsi,

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_1$$

Proposition.

Soit $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right]$ *un polynôme trigonométrique de degré* n*. Alors,*

$$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) = \frac{1}{T} \int_a^b (f(t))^2 dt$$

Démonstration.

Supposons $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

On a $\langle f, f \rangle = \sum_{j=1}^{2n+1} \langle f, v_j \rangle^2$, avec v_j les vecteurs de la base énoncée dans le rappel

Or,

a)

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle^2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt \right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\right)^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}(2\pi a_0)^2 \\
&= 2\pi a_0^2
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\left\langle f, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle^2 &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}dt\right)^2 \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt\right)^2 \\
&= \frac{1}{\pi}(\pi a_k)^2 \\
&= \pi a_k^2
\end{aligned}
$$

c) De même, $\left\langle f, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \pi b_k^2$.

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f^2(t)dt &= \langle f, f\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{2n+1} \langle f, v_j\rangle \\
&= 2\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\pi a_k^2 + \pi b_k^2\right)
\end{aligned}
$$

donc,

$$
\frac{1}{T}\int_a^b f^2(t)dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)
$$

□

Définition.

Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
Soit $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ un polynôme trigonométrique de degré n.

a) L'*erreur ponctuelle* (de degré n) est $\varepsilon_n(g) = (f - g)(t)$;

b) L'*erreur quadratique moyenne* est $E_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_n^2(g)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\langle f-g, f-g\rangle = \frac{1}{2\pi}\|f-g\|^2$.

Dans le cas d'une fonction définie sur $[a, b]$, on a

$$
E_n(g) = \frac{1}{T}\int_a^b \varepsilon_n^2(g)dt = \frac{1}{T}\int_a^b (f-g)^2(t)dt = \frac{1}{T}\langle f-g, f-g\rangle = \frac{1}{T}\|f-g\|^2
$$

Théorème.

$E_n(g)$ est minimale quand $g = S_n(f)(t)$, où $S_n(f)(t)$ est la série de Fourier de f tronquée à l'ordre n, c'est-à-dire, $S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \cos\frac{2k\pi}{T}t + b_k \sin\frac{2k\pi}{T}t\right]$.

Démonstration.

Supposons $g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt]$. On a

$$\begin{aligned} E_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle f-g, f-g \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\langle f,f \rangle - 2\langle f,g \rangle + \langle g,g \rangle \right] \end{aligned}$$

De plus,

a)

$$\langle f,f \rangle = \|f\|^2$$

b)

$$\begin{aligned} \langle f,g \rangle &= \langle f, \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt] \rangle \\ &= \alpha_0 \langle f,1 \rangle + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \langle f, \cos kt \rangle + \beta_k \langle f, \sin kt \rangle] \\ &= \alpha_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt}_{2\pi a_0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt}_{\pi a_k} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt}_{\pi b_k} \\ &= 2\pi \alpha_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n} \pi \alpha_k a_k + \sum_{k=1}^{n} \pi \beta_k b_k \end{aligned}$$

c)

$$\langle g,g \rangle = 2\pi \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2 \right)$$

On obtient

$$\begin{aligned} E_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \left[\|f\|^2 - 2 \left(2\pi \alpha_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n} \pi \alpha_k a_k + \sum_{k=1}^{n} \pi \beta_k b_k \right) + 2\pi \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\|f\|^2 + 2\pi \left(\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0 \right) + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k \right) + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_k^2 - 2\beta_k b_k \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\|f\|^2 + 2\pi \left([a_0 - \alpha_0]^2 - a_0^2 \right) + \pi \sum_{k=1}^{n} \left([a_k - \alpha_k]^2 - a_k^2 \right) + \pi \sum_{k=1}^{n} \left([b_k - \beta_k]^2 - b_k^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\|f\|^2 - \pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k^2 + b_k^2 \right] \right) + 2\pi (a_0 - \alpha_0)^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k)^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (b_k - \beta_k)^2 \right] \end{aligned}$$

Donc, $E_n(g)$ est minimale si, et seulement si, $a_0 = \alpha_0$, $a_k = \alpha_k$ et $b_k = \beta_k$, pour $k \geqslant 1$. □

Corollaire. *La valeur minimale de $E_n(g)$ est*

$$\frac{1}{T} \|f\|^2 - \left(a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right)$$

Corollaire.

$$\frac{1}{T}\|f\|^2 \geqslant a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

Corollaire. *Soient f continue par morceaux et a_0, a_k, b_k les coefficients de la série de Fourier $S(f)$. Alors,*

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leqslant \frac{1}{T}\|f\|^2 < \infty$$

Démonstration.

Posons $s_n = 2a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$. On a $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 \geqslant s_n$.

Ainsi, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone croissante et bornée, donc convergente. □

Corollaire (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.**

Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors, $a_k, b_k \to 0$.

Démonstration.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ converge, donc $(a_k^2 + b_k^2) \to 0$, donc $a_k, b_k \to 0$. □

Théorème.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors, $(\forall\varepsilon > 0)(\exists g)$ un polynôme trigonométrique t.q. $\|f - g\| < \varepsilon$.

Corollaire (Inégalité de Parseval)**.**

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{T}\|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_a^b f^2(t)dt$$

Démonstration.

Posons $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$, où V_n est l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré au plus n.

Comme $V_n \subseteq V_{n+1}$, si $g_n \in V_n$, alors $\operatorname{dist}(f, g_n) \geqslant \operatorname{dist}(f, g_{n+1})$.

On obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f, g_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{T}\|f\|^2 - \left(a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{T}\|f\|^2 - a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)
\end{aligned}$$

□

Section 5.4 Séries en sinus et en cosinus

Définition.

Soit $f : [0, {}^T\!/2] \to \mathbb{R}$, avec $T \in \mathbb{R}_*^+$.

a) Si $f(0) = f({}^T\!/2)$, alors l'*extension périodique* de f est

$$f_{pér}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant {}^T\!/2 \\ f(t + {}^T\!/2) & \text{sinon} \end{cases}$$

b) L'*extension paire* de f est

$$f_p(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant {}^T\!/2 \\ f(-t) & \text{si} \quad -{}^T\!/2 \leqslant t \leqslant 0 \\ f_p(t+T) & \text{sinon} \end{cases}$$

c) L'*extension impaire* de f est

$$f_i(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad 0 < t \leqslant T/2 \\ -f(-t) & \text{si} \quad -T/2 \leqslant t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ f_i(t+T) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple.

a)

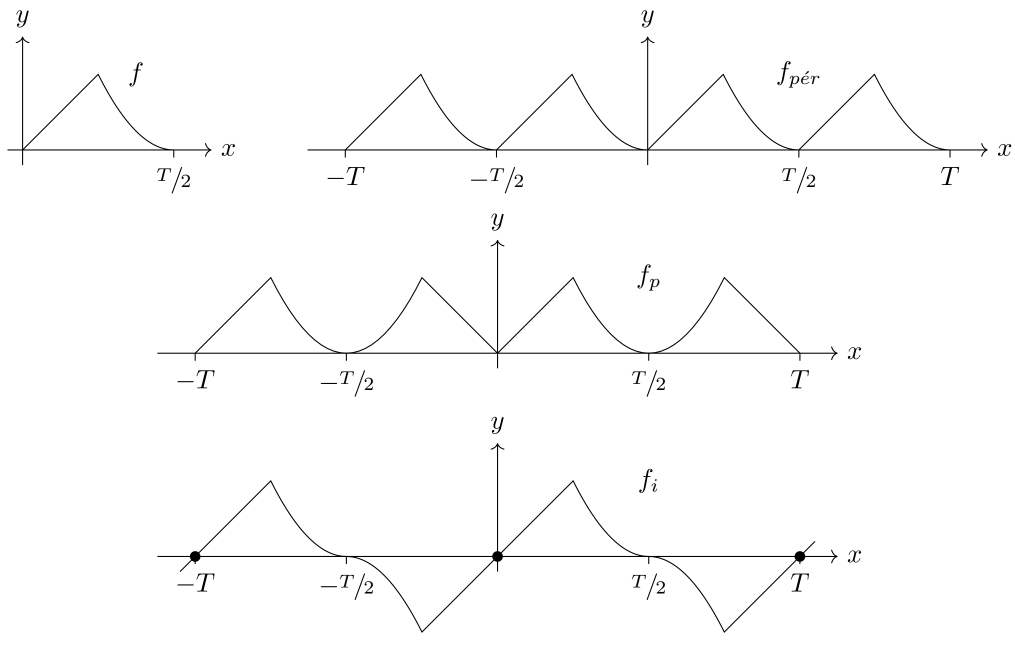


FIGURE 5.4 – Extensions périodique, paire et impaire de f

b) $\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1-t \end{array}$.

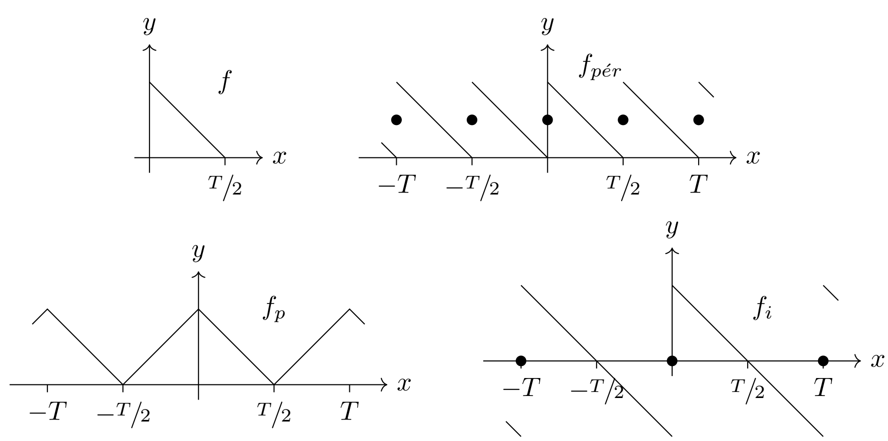


FIGURE 5.5 – Extensions périodique, paire et impaire de f

$S_{pér}(f)(t)$:

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_k = 0 \qquad b_k = \frac{1}{k\pi} \qquad S_{pér}(f)(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin 2k\pi t$$

$S_p(f)(t)$:

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \text{ pair} \\ \dfrac{4}{k^2\pi^2} & \text{si} \quad k \text{ impair} \end{cases} \qquad b_k = 0 \qquad S_p(f)(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)\pi t$$

$S_i(f)(t)$:

$$a_0 = 0 \qquad a_k = 0 \qquad b_k = \frac{2}{k\pi} \qquad S_i(f)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin k\pi t$$

Proposition.
Soit $f : [0, T/2] \to \mathbb{R}$. La série de Fourier de l'extension paire de f est

$$S_p(f)(t) = S(f_p)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t)dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)dt \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) \cos \frac{2k\pi}{T} tdt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \frac{2k\pi}{T} tdt \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) \sin \frac{2k\pi}{T} tdt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Définition. La *série de Fourier en cosinus* de $f : [0, T/2] \to \mathbb{R}$ est la série de Fourier de l'extension paire de f.

Proposition.
La série de Fourier en sinus *de $f : [0, T/2] \to \mathbb{R}$ est la série de Fourier de l'extension impaire de f et vaut*

$$S_i(f)(t) = S(f_i)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t$$

avec

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) \sin \frac{2k\pi}{T} tdt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \frac{2k\pi}{T} tdt \end{aligned}$$

Proposition.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
Posons $g_p = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $g_i = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
On a $f = g_p + g_i$, avec g_p paire et g_i impaire.
Alors, $S(f)(t) = S_p(f)(t) + S_i(f)(t) = S(g_p)(t) + S(g_i)(t)$.

Section 5.5 Forme complexe de la série de Fourier

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i \sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i \sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \cos\theta \\ \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \sin\theta \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2k\pi}{T}t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{2k\pi}{T}t \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{i\frac{2k\pi}{T}t} + e^{-i\frac{2k\pi}{T}t}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{e^{i\frac{2k\pi}{T}t} - e^{-i\frac{2k\pi}{T}t}}{2i} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) e^{i\frac{2k\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) e^{-i\frac{2k\pi}{T}t} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_k - ib_k}{2}}_{c_k} e^{i\frac{2k\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_k + ib_k}{2}}_{c_{-k}} e^{-i\frac{2k\pi}{T}t} \\
&= a_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2k\pi}{T}t} && \text{sans } k = 0 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2k\pi}{T}t} && \text{en posant } c_0 = a_0
\end{aligned}$$