

MAT346 - Analyse II
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

Table des matières

1	Intégration	1
1.1	Intégrales de Riemann	1
	Critère d'intégrabilité	3
	Inégalité du triangle	6
	Théorème de Darboux	8
	Loi de la moyenne	10
	Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral	11
1.2	Techniques d'intégration	13
	Fractions partielles	14
	Quelques substitutions	14
1.3	Intégrales impropres	17

Chapitre 1 Intégration

Section 1.1 Intégrales de Riemann

Notation.

$\mathcal{B}[c, d] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}.$

$\mathcal{R}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}.$

$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}.$

On suppose nos fonctions bornées.

Définition.

- a) Une partition de $[a, b]$ est un ensemble fini de points $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$ t.q. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.
- b) L'ensemble des partitions de $[a, b]$ est $\Omega[a, b]$.
- c) On dit Δ' est *plus fine* que Δ , noté $\Delta' \geq \Delta$, si $\Delta' \supseteq \Delta$.
- d) *Raffinement commun* de Δ_1 et Δ_2 , noté $\Delta_1 \vee \Delta_2$, est la partition de $[a, b]$ formée de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ordonnés.
- e) La *norme* de Δ , notée $\|\Delta\|$, est $\|\Delta\| = \max_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$.
- f)

$$\begin{aligned}\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\end{aligned}$$

Remarque.

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &= \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

Définition.

- a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de f pour la partition Δ est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de f pour la partition Δ est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Proposition.

a)

$$\underline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, \Delta), \forall \Delta \in \Omega[a, b]$$

b)

$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta)$$

c)

$$\overline{S}(f, \Delta) \leq \overline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a)$$

Proposition. Si $\Delta' \geq \Delta$, alors $\overline{S}(f, \Delta') \leq \overline{S}(f, \Delta)$.

démonstration.

Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$$

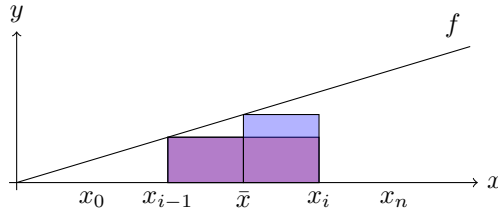
On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})] \\ &\quad - [\overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) + \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x})] \\ &= (x_i - \bar{x}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])] \\ &\quad + (\bar{x} - x_{i-1}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Proposition. Si $\Delta' \geq \Delta$, alors $\underline{S}(f, \Delta') \geq \underline{S}(f, \Delta)$

démonstration.



□

Remarque. $\underline{S}(f, \Delta) = -\overline{S}(-f, \Delta)$.

Corollaire. $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Omega[a, b], \underline{S}(f, \Delta_1) \leq \overline{S}(f, \Delta_2)$

démonstration.

On a $\Delta_1 \vee \Delta_2 \geq \Delta_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta_1) &\leq \underline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_2) \end{aligned}$$

□

Définition.

- a) La somme par défaut de f est $\underline{S}(f) = \sup_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$.
 b) La somme par excès de f est $\overline{S}(f) = \inf_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$.

Théorème. $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$

démonstration.

Soit $\Delta_1 \in \Omega[a, b]$

$\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ est le plus petit majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a, b]$.

Du corollaire précédant, on a que $\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.

Donc, $\overline{S}(f, \Delta_1)$ est un majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$.

Ainsi, $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.

De même, $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ est le plus grand minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a, b]$.

Comme $\underline{S}(f)$ est un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$. □

Définition.

Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. On dit que f est *intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$* si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et on note $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

La valeur commune de $\underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f)$ est notée $\int_a^b f(x) dx$

Critère d'intégrabilité

Théorème (Critère d'intégrabilité).

Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$ si, et seulement si, $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega[a, b])$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

démonstration.

(\Rightarrow) Supposons $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

On a $\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$.

Comme $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ ne peut minorer $\overline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

De même, $\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$.

Comme $\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ ne peut majorer $\underline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_2 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= (\overline{S}(f) - \underline{S}(f)) + \varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $\exists \Delta$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

Mais alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Du théorème du sandwich, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$, car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Corollaire. *S'il existe $\Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) = \underline{S}(f, \Delta)$, alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Théorème. *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

démonstration.

Soit $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par la proposition d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n\varepsilon > b - a$.

Rappel.

f est uniformément continue sur $[a, b]$ si $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Rappel.

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Comme $f \in \mathcal{C}[a, b]$, elle est uniformément continue sur $[a, b]$.

Alors, $\exists \delta > 0$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$.

Soit donc $\Delta \in \Omega[a, b] : a = x_0 < x_1, \dots < x_n = b$ avec $\|\Delta\| < \delta$.

Alors, $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{1}{n}$.

Remarque. $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])$ peut être noté $\text{osc}_f([x_{i-1}, x_i])$.

On obtient

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b - a}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Théorème. *Toute $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

démonstration.

(1) Si f est constante, alors $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) = 0 < \varepsilon$.

(2) Si f est croissante,

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon > (b - a)(f(b) - f(a))$

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ avec $x_i = a + i \frac{b-a}{n}, i \in [0..n]$

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \left(\frac{b-a}{n} \right) \\
 &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

(3) Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Théorème.

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$.

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $f_i \in \mathcal{R}[a, b]$, $\exists \Delta_i \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f_i, \Delta_i) - \underline{S}(f_i, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

Alors, $\overline{S}(f_i, \Delta) - \underline{S}(f_i, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
 \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\geq \underline{S}(f_1, \Delta) + \underline{S}(f_2, \Delta)
 \end{aligned}$$

Car $\sup(f_1 + f_2) \leq \sup f_1 + \sup f_2$ et $\inf(f_1 + f_2) \geq \inf f_1 + \inf f_2$.

Alors,

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1, \Delta) - \underline{S}(f_2, \Delta) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

Donc, $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$.

De plus,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f_1 + f_2 &\leq \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) \\
 &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
 &< \underline{S}(f_1, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f_2, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq \int_a^b f_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f_2 + \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b f_1 + f_2 < \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.

De même, on peut montrer que $\int_a^b f_1 + f_2 \geq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.

Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.

□

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\int \lambda f = \lambda \int f$.

démonstration.

Laissé en exercice.

Utiliser $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ et $\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$. □

Corollaire.

Si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

démonstration.

$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0$. □

Inégalité du triangle

Théorème (Inégalité du triangle).

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ et $|\int f| \leq \int |f|$.

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

Alors, $\exists \Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.

Enfin,

$$\begin{aligned} -|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\ &\Rightarrow \int f \leq \int |f| \end{aligned}$$

□

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $a \leq c < d \leq b$, alors $f|_{[c, d]} \in \mathcal{R}[a, b]$.

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

Comme $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$.

Soit Δ_2 le raffinement de Δ_1 en ajoutant les points c et d .

Alors, $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) \leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$

Donc, $f \in \mathcal{R}[c, d]$. □

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $a < c < b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a, c]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

De même, $\exists \Delta_2 \in \Omega[c, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$. Alors, $\Delta \in \Omega[a, b]$ et

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f &\leq \overline{S}(f, \Delta) \\
 &= \overline{S}(f, \Delta_1) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\
 &< \underline{S}(f, \Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f, \Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \underline{S}(f, \Delta_1) + \underline{S}(f, \Delta_2) + \varepsilon \\
 &\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon
 \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$.

De même, $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Théorème. Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si f possède n discontinuités dans $[a, b]$, alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

démonstration.

Pour $n = 0$, $f \in \mathcal{C}[a, b]$, donc $f \in \mathcal{R}[a, b]$ est un résultat connu.

Supposons l'énoncé vrai pour n .

Supposons que $f \in \mathcal{B}[a, b]$ admet $n + 1$ discontinuités.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Il y a deux cas à considérer

1. a ou b est une discontinuité

SPDG, supposons que a est la discontinuité.

Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. a est l'unique discontinuité de $[a, a + \eta]$ et $\eta < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Alors, $[a + \eta, b]$ contient n discontinuités.

De l'hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{R}[a + \eta, b]$.

Il existe donc $\Delta \in \Omega[a + \eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= (\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)) + (\overline{M}(f, [a, a + \eta]) - \underline{M}(f, [a, a + \eta])) \eta \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

2. ni a ni b ne sont des discontinuités

Soit $c \in]a, b[$ qui est une discontinuité de f .

Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. c est l'unique discontinuité de $[c - \eta, c + \eta] \subset [a, b]$ et $\eta < \frac{\varepsilon}{8M}$.

Alors, $[a, c - \eta]$ et $[c + \eta, b]$ contiennent au plus n discontinuités, par l'hypothèse de récurrence

$\exists \Delta_1 \in \Omega[a, c - \eta]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{4}$.

$\exists \Delta_2 \in \Omega[c + \eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a donc

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= [\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1)] + [\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2)] \\
 &\quad + [\overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) - \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta])] (2\eta) \\
 &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4M\eta \\
 &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

Théorème. Soient $f : [a, b] \rightarrow [c, d] \in \mathcal{R}[a, b]$ et $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c, d]$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Remarque. L'hypothèse que $g \in \mathcal{C}[c, d]$ est nécessaire.

Exemple.

$$\begin{aligned}
 f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ et } \text{pgcd}(m, n) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Fonction de Dirichlet modifiée.

$$\begin{aligned}
 g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$f, g \in \mathcal{R}[a, b]$.

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \circ f \notin \mathcal{R}[a, b]$.

Fonction de Dirichlet.

Lemme. Si $f \in \mathcal{B}[a, b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant un unique point, alors $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$.

démonstration.

Soient $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.

$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$.

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x}) \\
 &= (\bar{x} - x_{i-1}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])) + (x_i - \bar{x}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])) \\
 &\leq 2\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) ((\bar{x} - x_{i-1}) - (x_i - \bar{x})) \\
 &\leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\|
 \end{aligned}$$

□

Corollaire. Si $f \in \mathcal{B}[a, b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant p points, au plus un point par sous-intervalle de Δ , alors $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2p\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$.

Théorème de Darboux

Théorème (Darboux, 1875).

Si $f \in \mathcal{B}[a, b]$, alors

$$\overline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) \qquad \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta)$$

démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$.

Ainsi, $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \dots < x_n = b$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_0) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\delta > 0$ t.q. $\delta < \min_{i \in [1..n]} |x_i - x_{i-1}|$ et $\delta < \frac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b])}$.

Soit $\Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\|\Delta\| < \delta$.

Alors, $\|\Delta\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Considérons $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$.

Comme $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$, aucun sous-intervalle ouvert de Δ ne contient plus d'un point de Δ_0 .

Comme Δ' s'obtient de Δ en ajoutant au plus $n-1$ points $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$,

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &\leq 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\| \\ &< 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f, \Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \overline{S}(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} -\overline{S}(-f, \Delta) \\ &= - \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(-f, \Delta) \\ &= -\overline{S}(-f) \\ &= \underline{S}(f) \end{aligned}$$

□

Définition. Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$.

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \in \Omega[a, b]$.

Soient $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pour $i \in [1..n]$.

Le nombre réel

$$S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

est appelé *somme de Riemann* de la fonction f correspondant à la partition Δ et aux points $\{\bar{x}_i\}_{i \in [1..n]}$.

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Alors, $(\forall \varepsilon > 0)$, $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$ t.q. pour toute partition Δ de $[a, b]$ avec $\|\Delta\| < \delta$ et pour tout choix de points $\{\bar{x}_i\}$, on a

$$\left| \int_a^b f - S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire.

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$$

démonstration.

On a $\underline{S}(f, \Delta) \leq S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \overline{S}(f, \Delta)$.

Donc,

$$\underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Comme $f \in \mathcal{R}[a, b]$, on a $\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \int_a^b f$.

Par le théorème du sandwich, $S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$. □

Loi de la moyenne

Théorème (Loi de la moyenne).

Soit $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Alors, $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$ t.q. $\int_a^b f = (b - a) \cdot \mu$.

démonstration.

Soit ϕ la fonction donnée par $\phi(x) = (b - a)x$.

On a $\underline{M}(f, [a, b]) \leq f \leq \overline{M}(f, [a, b])$.

Donc

$$\phi(\underline{M}(f, [a, b])) = (b - a)\underline{M}(f, [a, b]) = \int_a^b \underline{M}(f, [a, b]) \leq \int_a^b f \leq \overline{M}(f, [a, b]) = (b - a)\overline{M}(f, [a, b]) = \phi(\overline{M}(f, [a, b]))$$

Rappel.

Théorème (Théorème de valeur intermédiaire).

f continue sur $[a, b]$, $f(a) < c < f(b)$ implique $\exists x_0 \in [a, b]$ t.q. $f(x_0) = c$.

Comme ϕ est continue sur $[\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$, du TVI, $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$ t.q. $\phi(\mu) = c$ pour tout $c \in [\phi(\underline{M}(f, [a, b])), \phi(\overline{M}(f, [a, b]))]$.

En particulier, si $c = \int_a^b f$, $\exists \mu$ t.q. $\phi(\mu) = \int_a^b f$, c'est-à-dire t.q. $(b - a)\mu = \int_a^b f$. □

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Alors,

a) $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \overline{M}(|f|, [a, b]) (b - a) \cdot |x_1 - x_2|$ pour tous $x_1, x_2 \in [a, b]$;

b) F est uniformément continue sur $[a, b]$;

c) Si f est continue, alors F est différentiable et $F' = f$.

démonstration.

a) Supp $x_1 > x_2$

On a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f \right| \\ &= \left| \int_{x_2}^{x_1} f \right| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} |f| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} \overline{M}(|f|, [a, b]) \\ &= \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$.

Prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{\overline{M}(|f|, [a, b])}$.

Soient $x, y \in [a, b]$ avec $|x - y| < \delta$.

Alors,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x - y| \\ &< \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

c) Soit $x_0 \in [a, b]$.

On a

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{Loi de la moyenne}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f(x_0 + \theta(x - x_0))}{x - x_0} \quad \theta \in [0, 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + \theta(x - x_0)) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

□

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Notation. F est une primitive de f .

Corollaire. Si f est continue, alors f admet au moins une primitive.

Corollaire. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f , alors $F_1 - F_2 = C$ pour une constante C .

Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral).

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et F est une primitive de f , alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

démonstration.

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \in \Omega[a, b]$.

Comme F est continue et différentiable sur $[a, b]$ et a fortiori sur $[x_{i-1}, x_i]$, le théorème de la moyenne donne

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ t.q. } \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i).$$

On a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &\leq f(t_i) \leq \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\ \Rightarrow \underline{S}(f, \Delta) &\leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}(f, \Delta) \\ \Rightarrow \int_a^b f = \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &\leq F(b) - F(a) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f) = \int_a^b f \end{aligned}$$

Donc, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

□

Proposition. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors,

- a) $f \in \mathcal{R}[a, b]$;
- b) $\int_a^b f = 0$.

démonstration.

- a) déjà fait
- b) Soit p le nombre de points où $f \neq 0$.

Pour $p = 0$, c'est trivial.

Supposons que la propriété est vraie pour p .

Supposons que $f \neq 0$ en $p + 1$ points.

Il y a deux cas à considérer

- 1) $\exists c \in [a, b]$ avec $f(c) \neq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $\eta > 0$ t.q.

- i) $a < c - \eta < c + \eta < b$;
- ii) c est le seul point de $[c - \eta, c + \eta]$ où $f \neq 0$;
- iii) $\eta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4\overline{M}(f, [a, b])}, \frac{-\varepsilon}{4\underline{M}(f, [a, b])} \right\}$.

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\int_a^{c-\eta} f = 0 \quad \int_{c+\eta}^b f$$

Du critère d'intégrabilité, $\exists \Delta_1 : a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = c - \eta$, $\exists \Delta_2 : c + \eta = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_i) \leq \overline{S}(f, \Delta_i) - \underline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.

Prenons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) &= \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \overline{M}(f, [a, b]) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

De même, $\underline{S}(f, \Delta_i) > \underline{S}(f, \Delta_i) - \overline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.

et

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta) &= \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &\leq \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \underline{M}(f, [a, b]) + \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &< -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \\ &= -\varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $\varepsilon < \underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\int_a^b f = 0$.

- 2) $f(c) \neq 0$ en a ou en b .

On procède de la même manière avec un sous-intervalle de largeur η autour de a et de b t.q. a et b sont les seules discontinuités dans ces intervalles.

□

Corollaire. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f = g$ sauf peut-être en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Section 1.2 Techniques d'intégration

Théorème (Intégration par parties).

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables t.q. $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b g f'$$

démonstration.

Posons $h = fg$.

Alors,

$$\begin{aligned} h' &= f'g + fg' \\ \int_a^b h' &= \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \\ \int_a^b fg' &= \int_a^b h - \int_a^b f'g \\ &= h \Big|_a^b - \int_a^b f'g \\ &= fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g \end{aligned}$$

□

Théorème (Changement de variable/Substitution).

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 , c'est-à-dire ϕ est dérivable et ϕ' est continue.

Si $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

démonstration.

Posons $h(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Du théorème fondamental, h est uniformément continue, différentiable et $h' = f$.

Soit $g(t) = (h \circ \phi)(t) = h(\phi(t)) = \int_a^{\phi(t)} f(t)dt$.

On a h, ϕ différentiables, donc g l'est aussi et

$$\begin{aligned} g'(t) &= h'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ &= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta g'(t)dt \\ &= g(\beta) - g(\alpha) \\ &= h(\phi(\beta)) - h(\phi(\alpha)) \\ &= h(b) - h(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

Fractions partielles

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Avec $b^2 - 4ac < 0$.

On ramène sur dénominateurs communs.

On ramène en une fraction.

On résout le système d'équations avec $P(x)$.

On intègre chaque fraction.

Quelques substitutions

1. $f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right)$, ou f est une fonction rationnelle $f = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

On pose $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ où n est un multiple commun de n_1, n_2, \dots .

Exemple.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \int x^2(x-1)^{-1/2}.$$

Posons $x-1 = t^2$.

Alors, $dx = 2tdt$.

On obtient $\int x^2(x-1)^{-1/2} = \int (t^2-1)^2(t^2)^{-1/2}2tdt = 2 \int (t^2+1)^2 dt$.

2. $\int x^\alpha(a+bx^\beta)^\gamma dx$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

On pose $t = x^\beta$.

Alors, $dt = \beta x^{\beta-1} dx$.

Donc, $dx = \frac{dt}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{dt}{\beta t^{\beta-1/\beta}}$.

Exemple.

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} dx.$$

Posons $t = x^2$.

On a $dt = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$.

On obtient

$$\begin{aligned} \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} dx &= \int t^{-2}(1+t)^{-1/2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-5/2}(1+t)^{-1/2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2} dt \end{aligned}$$

Posons $u^2 = \frac{1+t}{t} = 1 + \frac{1}{t}$. On a $u^2 - 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u^2 - 1}$.

Alors, $dt = (-1)(u^2 - 1)^{-2}(2u)du$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2} dt &= -\frac{1}{2} \int (u^2 - 1)^3 u^{-1} (u^2 - 1)^{-1} 2u du \\ &= - \int (u^2 - 1) du \end{aligned}$$

3. $f(\sin x, \cos x)$.

On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. On a $x = 2 \arctan t$.

Alors, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

Exemple.

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

On a

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}} - \frac{\frac{1}{\cos^2}(\sin^2)}{\frac{1}{\cos^2}(\cos^2 + \sin^2)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int \frac{2dt}{1+t^2} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{2dt}{3+t^2} \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

4. $f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$.

On pose $x = a \sin t$. On a $dx = a \cos t dt$.

Exemple.

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\ &= \int a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \int a^4 \frac{1}{4} \sin^2 2t dt \\ &= \int \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\ &= \frac{a^4}{8} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right] \end{aligned}$$

5.

Rappel.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x & (\cosh x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cosh^2 x + \sinh^2 x &= -\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Alors, $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \Rightarrow \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$.

Formellement,

$$\sinh x = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

avec $z \in \mathbb{C}$.

$f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$.

On pose $x = a \cosh t$. On a $dx = a \sinh t dt$.

Exemple.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{\sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2}} a \sinh t dt \\ &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{a \sinh t} a \sinh t dt \\ &= \int a^2 \cosh^2 t dt \\ &= \int a^2 \frac{a + \cosh 2t}{2} dt \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sinh 2t}{2} \end{aligned}$$

Remarque. $\operatorname{arccosht} = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$, $\operatorname{arcsinht} = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$.

6. $f(x, \sqrt{x^2 + a^2})$.

On pose $x = a \sinh t$. On a $dx = a \cosh t dt$.

Exemple.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{a^3 \sinh^3 t}{(a^2 \sinh^2 t + a^2)^{3/2}} a \cosh t dt \\
 &= \int \frac{a^3 \sinh^3 t}{a^3 \cosh^3 t} a \cosh t dt \\
 &= a \int \frac{\sinh^3 t}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \frac{\sinh t \sinh^2 t}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \frac{\sinh t (\cosh^2 t - 1)}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \left(\sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \right) dt \\
 &\text{posons } u = \cosh t, du = \sinh t dt \\
 &= a \cosh t + \frac{a}{\cosh t} \\
 &= a \sqrt{\cosh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{\cosh^2 t}} \\
 &= a \sqrt{1 + \sinh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{1 + \sinh^2 t}} \\
 &= a \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

7. $f(\sqrt{x^2 + 2bx + c})$, avec $x^2 + 2bx + c$ irréductible dans \mathbb{R} .

On a $x^2 + 2bx + c = (x + b)^2 + (c - b^2)$.

On pose $t = x + b$. On a $dt = dx$.

Exemple.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1}} dx \\
 &\text{posons } t = x + 2, dt = dx \\
 &= \int \frac{t - 2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \\
 &= \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \\
 &\text{posons } u = t^2 + 1, du = 2t dt \\
 &\text{posons } t = \sinh v, dt = \cosh v dv \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 2 \int \frac{\cosh v dv}{\sqrt{\sinh^2 v + 1}} \\
 &= \sqrt{u} - 2 \int dv \\
 &= \sqrt{u} - 2v \\
 &= \sqrt{t^2 + 1} - 2 \operatorname{arcsinh} t \\
 &= \sqrt{t^2 + 1} - 2 \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \\
 &= \sqrt{(x + 2)^2 + 1} - 2 \ln(x + 2 + \sqrt{1 + (x + 2)^2})
 \end{aligned}$$

Section 1.3 Intégrales impropres

Définition. $f : [a, \infty[$ continue par morceaux.

L'intégrale impropre (de 1^{ère} espèce) de f est $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x)dx$.

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\ln y - \ln 1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y x^{-p} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) \end{aligned}$$

Si $p > 1$, alors $1-p < 0$ et $y^{1-p} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$.

On a alors $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

Si $p < 1$, alors $1-p > 0$ et $y^{1-p} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$.

On a alors que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ diverge.

Si $p = 1$, c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-sx} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_0^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-sy}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Si $s < 0$, alors $-sy > 0$ et l'intégrale diverge.

Si $s > 0$, alors $-sy < 0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{s}$.

Si $s = 0$, alors $\int_0^\infty e^{-sx} dx = \int_0^\infty dx$ diverge.

4.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\arctan y - \arctan 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Définition. $f :]a, b]$ continue, mais t.q. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ n'existe pas.

L'intégrale impropre (de 2^{ème} espèce) de f est $\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b f(x)dx$.

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln y) \\ &= \infty\end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_y^1 \\ &= \frac{1}{1-p} - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{1-p}}{1-p}\end{aligned}$$

Si $p > 1$, alors $1 - p < 0$ et l'intégrale diverge.

Si $p < 1$, alors $1 - p > 0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{1-p}$.

Si $p = 1$, alors c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1^-} (\arcsin y - \arcsin 0) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Remarque.

1.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x} &= \overbrace{\int_0^b \frac{dx}{x}}^{2^{\text{ème}} \text{ esp}} + \overbrace{\int_b^\infty \frac{dx}{x}}^{1^{\text{ère}} \text{ esp}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^b \frac{dx}{x} + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_b^y \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

$\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ converge ssi les deux limites existent.

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \sin x dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^y \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \cos x \Big|_{-y}^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos y - \cos(-y)) = \lim_{y \rightarrow \infty} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx &= \int_{-\infty}^0 \sin x dx + \int_0^{\infty} \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^0 \sin x dx + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos(-y) - \cos y) + \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos 0 - \cos y)\end{aligned}$$

diverge

Ainsi, l'intégrale diverge.