

MAT346 - Analyse II  
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Intégration</b>	<b>1</b>
1.1	Intégrales de Riemann . . . . .	1
	Critère d'intégrabilité . . . . .	3
	Inégalité du triangle . . . . .	6
	Théorème de Darboux . . . . .	9
	Loi de la moyenne . . . . .	10
	Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral . . . . .	11
1.2	Techniques d'intégration . . . . .	14
	Fractions partielles . . . . .	15
	Quelques substitutions . . . . .	15
1.3	Intégrales impropres . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Suites de fonctions</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>Séries de fonctions</b>	<b>29</b>
3.1	Convergence uniforme de série . . . . .	29
3.2	Séries de puissances . . . . .	32
3.3	Séries de Taylor . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Intégrales avec paramètres</b>	<b>38</b>
4.1	Fonction Gamma . . . . .	38
4.2	Fonction Bêta . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>44</b>
5.1	Définitions . . . . .	44

# Chapitre 1 Intégration

## Section 1.1 Intégrales de Riemann

*Notation.*

$\mathcal{B}[c, d] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}.$

$\mathcal{R}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}.$

$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}.$

On suppose nos fonctions bornées.

**Définition.**

- a) Une partition de  $[a, b]$  est un ensemble fini de points  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$  t.q.  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .
- b) L'ensemble des partitions de  $[a, b]$  est  $\Omega[a, b]$ .
- c) On dit  $\Delta'$  est *plus fine* que  $\Delta$ , noté  $\Delta' \geq \Delta$ , si  $\Delta' \supseteq \Delta$ .
- d) *Raffinement commun* de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , noté  $\Delta_1 \vee \Delta_2$ , est la partition de  $[a, b]$  formée de  $\Delta_1 \cup \Delta_2$  ordonnés.
- e) La *norme* de  $\Delta$ , notée  $\|\Delta\|$ , est  $\|\Delta\| = \max_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$ .
- f)

$$\begin{aligned}\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\end{aligned}$$

*Remarque.*

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &= \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

**Définition.**

- a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de  $f$  pour la partition  $\Delta$  est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de  $f$  pour la partition  $\Delta$  est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

**Proposition.**

a)

$$\underline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, \Delta), \forall \Delta \in \Omega[a, b]$$

b)

$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta)$$

c)

$$\overline{S}(f, \Delta) \leq \overline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a)$$

**Proposition.** Si  $\Delta' \geq \Delta$ , alors  $\overline{S}(f, \Delta') \leq \overline{S}(f, \Delta)$ .

*Démonstration.*

Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$$

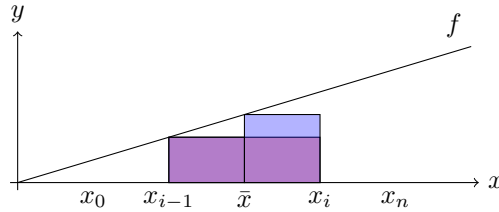
On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})] \\ &\quad - [\overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) + \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x})] \\ &= (x_i - \bar{x}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])] \\ &\quad + (\bar{x} - x_{i-1}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

**Proposition.** Si  $\Delta' \geq \Delta$ , alors  $\underline{S}(f, \Delta') \geq \underline{S}(f, \Delta)$

*Démonstration.*



□

*Remarque.*  $\underline{S}(f, \Delta) = -\overline{S}(-f, \Delta)$ .

**Corollaire.**  $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Omega[a, b], \underline{S}(f, \Delta_1) \leq \overline{S}(f, \Delta_2)$

*Démonstration.*

On a  $\Delta_1 \vee \Delta_2 \geq \Delta_1$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta_1) &\leq \underline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_2) \end{aligned}$$

□

**Définition.**

- a) La somme par défaut de  $f$  est  $\underline{S}(f) = \sup_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$ .
- b) La somme par excès de  $f$  est  $\overline{S}(f) = \inf_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$ .

**Théorème.**  $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ *Démonstration.*Soit  $\Delta_1 \in \Omega[a, b]$  $\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$  est le plus petit majorant des  $\underline{S}(f, \Delta)$  avec  $\Delta \in \Omega[a, b]$ .Du corollaire précédant, on a que  $\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$ .Donc,  $\overline{S}(f, \Delta_1)$  est un majorant des  $\underline{S}(f, \Delta)$ .Ainsi,  $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$ .De même,  $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$  est le plus grand minorant des  $\overline{S}(f, \Delta)$  avec  $\Delta \in \Omega[a, b]$ .Comme  $\underline{S}(f)$  est un minorant des  $\overline{S}(f, \Delta)$ , on a que  $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ . □**Définition.**Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ . On dit que  $f$  est *intégrable au sens de Riemann sur*  $[a, b]$  si  $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$  et on note  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .La valeur commune de  $\underline{S}(f)$  et  $\overline{S}(f)$  est notée  $\int_a^b f(x)dx$ .**Critère d'intégrabilité****Théorème** (Critère d'intégrabilité).Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ . Alors  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  si, et seulement si,  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega[a, b])$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .*Démonstration.* $(\Rightarrow)$  Supposons  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .Soit  $\varepsilon > 0$ .On a  $\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ .Comme  $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$  ne peut minorer  $\overline{S}(f, \Delta)$ , alors  $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ .De même,  $\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ .Comme  $\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$  ne peut majorer  $\underline{S}(f, \Delta)$ , alors  $\exists \Delta_2 \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ .Posons  $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\
 &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left( \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
 &= (\overline{S}(f) - \underline{S}(f)) + \varepsilon \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Soit  $\varepsilon > 0$ .

Alors  $\exists \Delta$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .

Mais alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Du théorème du sandwich,  $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ , car  $\varepsilon > 0$  est arbitraire.

Donc,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

□

**Corollaire.** *Si il existe  $\Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) = \underline{S}(f, \Delta)$ , alors  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .*

**Théorème.** *Toute fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .*

*Démonstration.*

Soit  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Par la proposition d'Archimède,  $\exists n \in \mathbb{Z}$  t.q.  $n\varepsilon > b - a$ .

*Rappel.*

$f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$  si  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$  t.q. pour  $x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

*Rappel.*

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

Comme  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , elle est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

Alors,  $\exists \delta > 0$  t.q. pour  $x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$ .

Soit donc  $\Delta \in \Omega[a, b] : a = x_0 < x_1, \dots < x_n = b$  avec  $\|\Delta\| < \delta$ .

Alors,  $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{1}{n}$ .

*Remarque.*  $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])$  peut être noté  $\text{osc}_f([x_{i-1}, x_i])$ .

On obtient

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b - a}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

□

**Théorème.** *Toute  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotone est intégrable.*

*Démonstration.*

(1) Si  $f$  est constante, alors  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) = 0 < \varepsilon$ .

(2) Si  $f$  est croissante,

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  t.q.  $n\varepsilon > (b - a)(f(b) - f(a))$ .

Soit  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  avec  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \left( \frac{b-a}{n} \right) \\
 &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

Donc,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

(3) Si  $f$  est décroissante, alors  $-f$  est croissante et  $-f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Donc,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

□

**Théorème.**

Si  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ , alors  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$ .

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $f_i \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\exists \Delta_i \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f_i, \Delta_i) - \underline{S}(f_i, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

Alors,  $\overline{S}(f_i, \Delta) - \underline{S}(f_i, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Supposons  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
 \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\geq \underline{S}(f_1, \Delta) + \underline{S}(f_2, \Delta)
 \end{aligned}$$

Car  $\sup(f_1 + f_2) \leq \sup f_1 + \sup f_2$  et  $\inf(f_1 + f_2) \geq \inf f_1 + \inf f_2$ .

Alors,

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1, \Delta) - \underline{S}(f_2, \Delta) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

Donc,  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ .

De plus,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f_1 + f_2 &\leq \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) \\
 &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
 &< \underline{S}(f_1, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f_2, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq \int_a^b f_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f_2 + \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\int_a^b f_1 + f_2 < \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ .

Donc,  $\int_a^b f_1 + f_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ .

De même, on peut montrer que  $\int_a^b f_1 + f_2 \geq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ .

Donc,  $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ .

□

**Théorème.**

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\int \lambda f = \lambda \int f$ .

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\exists \Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{\lambda}$ .

On a

$$\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$$

$$\underline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \underline{S}(f, \Delta)$$

Car  $\sup(\lambda f) = \lambda \sup f$  et  $\inf(\lambda f) = \lambda \inf f$ .

Alors,

$$\begin{aligned} \overline{S}(\lambda f, \Delta) - \underline{S}(\lambda f, \Delta) &= \lambda \overline{S}(f, \Delta) - \lambda \underline{S}(f, \Delta) \\ &= \lambda (\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)) \\ &< \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Donc,  $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f &\leq \overline{S}(\lambda f, \Delta) \\ &= \lambda \overline{S}(f, \Delta) \\ &< \lambda \left( \underline{S}(f, \Delta) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \\ &= \lambda \underline{S}(f, \Delta) + \varepsilon \\ &\leq \lambda \int_a^b f + \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi,  $\int_a^b \lambda f < \lambda \int_a^b f + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ .

Donc,  $\int_a^b \lambda f \leq \lambda \int_a^b f$ .

De même, on peut montrer que  $\int_a^b \lambda f \geq \lambda \int_a^b f$ .

Donc,  $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ . □

**Corollaire.**

Si  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ , alors  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ .

*Démonstration.*

$$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0. \quad \square$$

**Inégalité du triangle**

**Théorème** (Inégalité du triangle).

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , alors  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\left| \int f \right| \leq \int |f|$ .



*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$

Alors,  $\exists \Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc,  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Enfin,

$$\begin{aligned} -|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\ &\Rightarrow \int f \leq \int |f| \end{aligned}$$

□

**Théorème.**

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $a \leq c < d \leq b$ , alors  $f|_{[c, d]} \in \mathcal{R}[a, b]$ .

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$

Comme  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$ .

Soit  $\Delta_2$  le raffinement de  $\Delta_1$  en ajoutant les points  $c$  et  $d$ .

Alors,  $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) \leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$

Donc,  $f \in \mathcal{R}[c, d]$ .

□

**Théorème.**

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $a < c < b$ , alors  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$

$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a, c]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

De même,  $\exists \Delta_2 \in \Omega[c, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Posons  $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$ . Alors,  $\Delta \in \Omega[a, b]$  et

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\leq \overline{S}(f, \Delta) \\ &= \overline{S}(f, \Delta_1) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \underline{S}(f, \Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f, \Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \underline{S}(f, \Delta_1) + \underline{S}(f, \Delta_2) + \varepsilon \\ &\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a  $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$ .

De même,  $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$ .

□

**Théorème.** Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f$  possède  $n$  discontinuités dans  $[a, b]$ , alors  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

*Démonstration.*

Pour  $n = 0$ ,  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , donc  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  est un résultat connu.

Supposons l'énoncé vrai pour  $n$ .

Supposons que  $f \in \mathcal{B}[a, b]$  admet  $n + 1$  discontinuités.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Il y a deux cas à considérer

1.  $a$  ou  $b$  est une discontinuité

Sans perte de généralité, supposons que  $a$  est la discontinuité.

Soit  $\eta \in \mathbb{R}^+$  t.q.  $a$  est l'unique discontinuité de  $[a, a + \eta]$  et  $\eta < \frac{\varepsilon}{4M}$ .

Alors,  $[a + \eta, b]$  contient  $n$  discontinuités.

De l'hypothèse de récurrence,  $f \in \mathcal{R}[a + \eta, b]$ .

Il existe donc  $\Delta \in \Omega[a + \eta, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Posons  $\Delta_\varepsilon = \Delta \cup \{a\}$ .

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= (\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)) + (\overline{M}(f, [a, a + \eta]) - \underline{M}(f, [a, a + \eta])) \eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

2. ni  $a$  ni  $b$  ne sont des discontinuités

Soit  $c \in ]a, b[$  qui est une discontinuité de  $f$ .

Soit  $\eta \in \mathbb{R}^+$  t.q.  $c$  est l'unique discontinuité de  $[c - \eta, c + \eta] \subset [a, b]$  et  $\eta < \frac{\varepsilon}{8M}$ .

Alors,  $[a, c - \eta]$  et  $[c + \eta, b]$  contiennent au plus  $n$  discontinuités, donc par l'hypothèse de récurrence :

$\exists \Delta_1 \in \Omega[a, c - \eta]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{4}$  et  $\exists \Delta_2 \in \Omega[c + \eta, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{4}$ .

Posons  $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \cup \Delta_2$ .

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= [\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1)] + [\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2)] \\ &\quad + [\overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) - \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta])] (2\eta) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4M\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Théorème.** Soient  $f : [a, b] \rightarrow [c, d] \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c, d]$ .

Alors  $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

*Remarque.* L'hypothèse que  $g \in \mathcal{C}[c, d]$  est nécessaire.

*Exemple.*

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ et } \text{pgcd}(m, n) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Fonction de Dirichlet modifiée.

$$\begin{aligned}
g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
f, g &\in \mathcal{R}[a, b]. \\
g \circ f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
g \circ f &\notin \mathcal{R}[a, b]. \\
&\text{Fonction de Dirichlet.}
\end{aligned}$$

**Lemme.** Si  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ ,  $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$  et  $\Delta'$  s'obtient de  $\Delta$  en ajoutant un unique point, alors  $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$ .

*Démonstration.*

Soient  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  et  
 $\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$ .

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x}) \\
&= (\bar{x} - x_{i-1}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])) + (x_i - \bar{x}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) ((\bar{x} - x_{i-1}) - (x_i - \bar{x})) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\|
\end{aligned}$$

□

**Corollaire.** Si  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ ,  $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$  et  $\Delta'$  s'obtient de  $\Delta$  en ajoutant  $p$  points, au plus un point par sous-intervalle de  $\Delta$ , alors  $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2p\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$ .

### Théorème de Darboux

**Théorème** (Darboux, 1875).

Si  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ , alors

$$\overline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) \qquad \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta)$$

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ , on a que  $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$  n'est pas un minorant des  $\overline{S}(f, \Delta)$ .

Ainsi,  $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \dots < x_n = b$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_0) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $\delta > 0$  t.q.  $\delta < \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i - x_{i-1}|$  et  $\delta < \frac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b])}$ .

Soit  $\Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\|\Delta\| < \delta$ .

Alors,  $\|\Delta\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Considérons  $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$ .

Comme  $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$ , aucun sous-intervalle ouvert de  $\Delta$  ne contient plus d'un point de  $\Delta_0$ .

Comme  $\Delta'$  s'obtient de  $\Delta$  en ajoutant au plus  $n-1$  points  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ ,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &\leq 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\| \\
&< 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f, \Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \overline{S}(f) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} -\overline{S}(-f, \Delta) \\ &= - \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(-f, \Delta) \\ &= -\overline{S}(-f) \\ &= \underline{S}(f) \end{aligned}$$

□

**Définition.** Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ .

Soit  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \in \Omega[a, b]$ .

Soient  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Le nombre réel

$$S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

est appelé *somme de Riemann* de la fonction  $f$  correspondant à la partition  $\Delta$  et aux points  $\{\bar{x}_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ .

**Théorème.**

Soit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Alors,  $(\forall \varepsilon > 0)$ ,  $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$  t.q. pour toute partition  $\Delta$  de  $[a, b]$  avec  $\|\Delta\| < \delta$  et pour tout choix de points  $\{\bar{x}_i\}$ , on a

$$\left| \int_a^b f - S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire.

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$$

*Démonstration.*

On a  $\underline{S}(f, \Delta) \leq S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \overline{S}(f, \Delta)$ .

Donc,

$$\underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Comme  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , on a  $\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \int_a^b f$ .

Par le théorème du sandwich,  $S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$ .

□

## Loi de la moyenne

**Théorème** (Loi de la moyenne).

Soit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Alors,  $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$  t.q.  $\int_a^b f = (b - a) \cdot \mu$ .

*Démonstration.*

Soit  $\phi$  la fonction donnée par  $\phi(x) = (b - a)x$ .

On a  $\underline{M}(f, [a, b]) \leq f \leq \overline{M}(f, [a, b])$ .

Donc

$$\phi(\underline{M}(f, [a, b])) = (b - a)\underline{M}(f, [a, b]) = \int_a^b \underline{M}(f, [a, b]) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \overline{M}(f, [a, b]) = (b - a)\overline{M}(f, [a, b]) = \phi(\overline{M}(f, [a, b]))$$

*Rappel.*

*Théorème (Théorème de valeur intermédiaire).*

$f$  continue sur  $[a, b]$ ,  $f(a) < c < f(b)$  implique  $\exists x_0 \in [a, b]$  t.q.  $f(x_0) = c$ .

Comme  $\phi$  est continue sur  $[\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$ , du TVI,  $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$  t.q.  $\phi(\mu) = c$  pour tout  $c \in [\phi(\underline{M}(f, [a, b])), \phi(\overline{M}(f, [a, b]))]$ .

En particulier, si  $c = \int_a^b f$ ,  $\exists \mu$  t.q.  $\phi(\mu) = \int_a^b c$ , c'est-à-dire t.q.  $(b-a)\mu = \int_a^b f$ . □

### Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

**Théorème.**

Soit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Alors,

- a)  $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \overline{M}(|f|, [a, b]) (b-a) \cdot |x_1 - x_2|$  pour tous  $x_1, x_2 \in [a, b]$  ;
- b)  $F$  est uniformément continue sur  $[a, b]$  ;
- c) Si  $f$  est continue, alors  $F$  est différentiable et  $F' = f$ .

*Démonstration.*

- a) Supposons que  $x_1 > x_2$

On a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f \right| \\ &= \left| \int_{x_2}^{x_1} f \right| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} |f| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} \overline{M}(|f|, [a, b]) \\ &= \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

- b) Soit  $\varepsilon > 0$ .

$$\text{Prenons } \delta = \frac{\varepsilon}{\overline{M}(|f|, [a, b])}.$$

Soient  $x, y \in [a, b]$  avec  $|x - y| < \delta$ .

Alors,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x - y| \\ &< \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

- c) Soit  $x_0 \in [a, b]$ .

On a

$$\begin{aligned}
 F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \\
 &\stackrel{\text{Loi de la moyenne}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f(x_0 + \theta(x - x_0))}{x - x_0} \quad \theta \in [0, 1] \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + \theta(x - x_0)) \\
 &= f(x_0)
 \end{aligned}$$

□

*Notation.*  $F$  est une primitive de  $f$ .

**Corollaire.** Si  $f$  est continue, alors  $f$  admet au moins une primitive.

**Corollaire.** Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux primitives de  $f$ , alors  $F_1 - F_2 = C$  pour une constante  $C$ .

**Théorème** (Théorème fondamental du calcul intégral).

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ .

*Démonstration.*

Soit  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \in \Omega[a, b]$ .

Comme  $F$  est continue et différentiable sur  $[a, b]$  et a fortiori sur  $[x_{i-1}, x_i]$ , le théorème de la moyenne donne  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  t.q.  $\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$ .

On a

$$\begin{aligned}
 F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i)
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &\leq f(t_i) \leq \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\
 \Rightarrow \underline{S}(f, \Delta) &\leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}(f, \Delta) \\
 \Rightarrow \int_a^b f = \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &\leq F(b) - F(a) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f) = \int_a^b f
 \end{aligned}$$

Donc,  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ .

□

**Proposition.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $f(x) = 0$  sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors,

a)  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  ;

b)  $\int_a^b f = 0$ .

*Démonstration.*

- a) déjà fait, car  $f$  est continue sauf en un nombre fini de points.  
 b) Soit  $p$  le nombre de points où  $f \neq 0$ .

Pour  $p = 0$ , c'est trivial.

Supposons que la propriété est vraie pour  $p$ .

Supposons que  $f \neq 0$  en  $p + 1$  points.

Il y a deux cas à considérer

- 1)  $\exists c \in ]a, b[$  avec  $f(c) \neq 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $\eta > 0$  t.q.

- i)  $a < c - \eta < c + \eta < b$ ;  
 ii)  $c$  est le seul point de  $[c - \eta, c + \eta]$  où  $f \neq 0$ ;  
 iii)  $\eta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4\overline{M}(f, [a, b])}, \frac{-\varepsilon}{4\underline{M}(f, [a, b])} \right\}$ .

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\int_a^{c-\eta} f = 0 = \int_{c+\eta}^b f$$

Du critère d'intégrabilité,  $\exists \Delta_1 : a < x_0 < x_1, \dots < x_n = c - \eta$ ,  $\exists \Delta_2 : c + \eta = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_i) \leq \overline{S}(f, \Delta_i) - \underline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ .

Prenons  $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) &= \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \overline{M}(f, [a, b]) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

De même,  $\underline{S}(f, \Delta_i) \leq \overline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ .

et

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta) &= \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &\geq \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \underline{M}(f, [a, b]) + \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &> -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \\ &= -\varepsilon \end{aligned}$$

Donc,  $-\varepsilon < \underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on en déduit que  $\int_a^b f = 0$ .

- 2)  $f(c) \neq 0$  en  $a$  ou en  $b$ .

On procède de la même manière avec un sous-intervalle de largeur  $\eta$  autour de  $a$  et de  $b$  t.q.  $a$  et  $b$  sont les seules discontinuités dans ces intervalles.

□

**Corollaire.** Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $f = g$  sauf peut-être en un nombre fini de points, alors  $\int_a^b f = \int_a^b g$ .

## Section 1.2 Techniques d'intégration

**Théorème** (Intégration par parties).

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions différentiables t.q.  $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$ . Alors,

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b gf'$$

*Démonstration.*

Posons  $h = fg$ .

Alors,

$$\begin{aligned} h' &= f'g + fg' \\ \int_a^b h' &= \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \\ \int_a^b fg' &= \int_a^b h - \int_a^b f'g \\ &= h|_a^b - \int_a^b f'g \\ &= fg|_a^b - \int_a^b f'g \end{aligned}$$

□

**Théorème** (Changement de variable/Substitution).

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  de classe  $C^1$ , c'est-à-dire  $\phi$  est dérivable et  $\phi'$  est continue.

Si  $\phi(\alpha) = a$  et  $\phi(\beta) = b$ , alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

*Démonstration.*

Posons  $h(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

Du théorème fondamental,  $h$  est uniformément continue, différentiable et  $h' = f$ .

Soit  $g(t) = (h \circ \phi)(t) = h(\phi(t)) = \int_a^{\phi(t)} f(x)dx$ .

On a  $h, \phi$  différentiables, donc  $g$  l'est aussi et

$$\begin{aligned} g'(t) &= h'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ &= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta g'(t)dt \\ &= g(\beta) - g(\alpha) \\ &= h(\phi(\beta)) - h(\phi(\alpha)) \\ &= h(b) - h(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□



## Fractions partielles

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Avec  $b^2 - 4ac < 0$ .

On ramène sur dénominateurs communs.

On ramène en une fraction.

On résout le système d'équations avec  $P(x)$ .

On intègre chaque fraction.

## Quelques substitutions

1.  $f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right)$ , ou  $f$  est une fonction rationnelle  $f = \frac{P(x)}{Q(x)}$ .

On pose  $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$  où  $n$  est un multiple commun de  $n_1, n_2, \dots$ .

Exemple.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \int x^2(x-1)^{-1/2}.$$

Posons  $x-1 = t^2$ .

Alors,  $dx = 2tdt$ .

$$\text{On obtient } \int x^2(x-1)^{-1/2} = \int (t^2-1)^2(t^2)^{-1/2}2tdt = 2 \int (t^2+1)^2 dt.$$

2.  $\int x^\alpha(a+bx^\beta)^\gamma dx$  avec  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ .

On pose  $t = x^\beta$ .

Alors,  $dt = \beta x^{\beta-1} dx$ .

$$\text{Donc, } dx = \frac{dt}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{dt}{\beta t^{(\beta-1)/\beta}}.$$

Exemple.

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} dx.$$

Posons  $t = x^2$ .

$$\text{On a } dt = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} dx &= \int t^{-2}(1+t)^{-1/2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-5/2}(1+t)^{-1/2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2} dt \end{aligned}$$

$$\text{Posons } u^2 = \frac{1+t}{t} = 1 + \frac{1}{t}. \text{ On a } u^2 - 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u^2 - 1}.$$

$$\text{Alors, } dt = (-1)(u^2 - 1)^{-2}(2u)du.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2} dt &= -\frac{1}{2} \int (u^2 - 1)^3 u^{-1} (u^2 - 1)^{-2} 2u du \\ &= - \int (u^2 - 1) du \end{aligned}$$

3.  $f(\sin x, \cos x)$ .

On pose  $t = \tan \frac{x}{2}$ . On a  $x = 2 \arctan t$ .

Alors,  $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ .

*Exemple.*

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

On a

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} - \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} (\sin^2 \frac{x}{2})}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} (\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2})} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int \frac{2dt}{1+t^2} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{2dt}{3+t^2} \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

4.  $f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ .

On pose  $x = a \sin t$ . On a  $dx = a \cos t dt$ .

*Exemple.*

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\ &= \int a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \int a^4 \frac{1}{4} \sin^2 2t dt \\ &= \int \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\ &= \frac{a^4}{8} \left[ t - \frac{\sin 4t}{4} \right] \end{aligned}$$

5.

*Rappel.*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x & (\cosh x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cosh^2 x + \sinh^2 x &= -\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc,  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ .Alors,  $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \Rightarrow \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$ .

Formellement,

$$\sinh x = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

avec  $z \in \mathbb{C}$ . $f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ .On pose  $x = a \cosh t$ . On a  $dx = a \sinh t dt$ .*Exemple.*

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{\sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2}} a \sinh t dt \\ &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{a \sinh t} a \sinh t dt \\ &= \int a^2 \cosh^2 t dt \\ &= \int a^2 \frac{a + \cosh 2t}{2} dt \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sinh 2t}{2} \end{aligned}$$

*Remarque.*  $\operatorname{arccosht} = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$ ,  $\operatorname{arcsinht} = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$ .

6.  $f(x, \sqrt{x^2 + a^2})$ .

On pose  $x = a \sinh t$ . On a  $dx = a \cosh t dt$ .

*Exemple.*

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{a^3 \sinh^3 t}{(a^2 \sinh^2 t + a^2)^{3/2}} a \cosh t dt \\
 &= \int \frac{a^3 \sinh^3 t}{a^3 \cosh^3 t} a \cosh t dt \\
 &= a \int \frac{\sinh^3 t}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \frac{\sinh t \sinh^2 t}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \frac{\sinh t (\cosh^2 t - 1)}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \left( \sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \right) dt \\
 &\text{posons } u = \cosh t, du = \sinh t dt \\
 &= a \cosh t + \frac{a}{\cosh t} \\
 &= a \sqrt{\cosh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{\cosh^2 t}} \\
 &= a \sqrt{1 + \sinh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{1 + \sinh^2 t}} \\
 &= a \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

7.  $f(x, \sqrt{x^2 + 2bx + c})$ , avec  $x^2 + 2bx + c$  irréductible dans  $\mathbb{R}$ .

On a  $x^2 + 2bx + c = (x + b)^2 + (c - b^2)$ .

On pose  $t = x + b$ . On a  $dt = dx$ .

*Exemple.*

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1}} dx \\
 &\text{posons } t = x + 2, dt = dx \\
 &= \int \frac{t - 2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \\
 &= \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \\
 &\text{posons } u = t^2 + 1, du = 2t dt \\
 &\text{posons } t = \sinh v, dt = \cosh v dv \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 2 \int \frac{\cosh v dv}{\sqrt{\sinh^2 v + 1}} \\
 &= \sqrt{u} - 2 \int dv \\
 &= \sqrt{u} - 2v \\
 &= \sqrt{t^2 + 1} - 2 \operatorname{arcsinh} t \\
 &= \sqrt{t^2 + 1} - 2 \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \\
 &= \sqrt{(x + 2)^2 + 1} - 2 \ln\left(x + 2 + \sqrt{1 + (x + 2)^2}\right)
 \end{aligned}$$

### Section 1.3 Intégrales impropres

**Définition.**  $f : [a, \infty[$  continue par morceaux.

L'intégrale impropre (de 1<sup>ère</sup> espèce) de  $f$  est  $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x)dx$ .

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

*Exemple.*

1.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\ln y - \ln 1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y x^{-p} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{y^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) \end{aligned}$$

Si  $p > 1$ , alors  $1-p < 0$  et  $y^{1-p} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$ .

On a alors  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ .

Si  $p < 1$ , alors  $1-p > 0$  et  $y^{1-p} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$ .

On a alors que  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$  diverge.

Si  $p = 1$ , c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-sx} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-sx}}{-s} \right|_0^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-sy}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Si  $s < 0$ , alors  $-sy > 0$  et l'intégrale diverge.

Si  $s > 0$ , alors  $-sy < 0$  et l'intégrale converge vers  $\frac{1}{s}$ .

Si  $s = 0$ , alors  $\int_0^\infty e^{-sx} dx = \int_0^\infty dx$  diverge.

4.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\arctan y - \arctan 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**Définition.**  $f : ]a, b]$  continue, mais t.q.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  n'existe pas.

L'intégrale impropre (de 2<sup>ème</sup> espèce) de  $f$  est  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b f(x)dx$ .

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

*Exemple.*

1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln y) \\ &= \infty \end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_y^1 \\ &= \frac{1}{1-p} - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

Si  $p > 1$ , alors  $1-p < 0$  et l'intégrale diverge.

Si  $p < 1$ , alors  $1-p > 0$  et l'intégrale converge vers  $\frac{1}{1-p}$ .

Si  $p = 1$ , alors c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1^-} (\arcsin y - \arcsin 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

*Remarque.*

1.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x} &= \overbrace{\int_0^b \frac{dx}{x}}^{2^{\text{ème}} \text{ esp}} + \overbrace{\int_b^\infty \frac{dx}{x}}^{1^{\text{ère}} \text{ esp}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^b \frac{dx}{x} + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_b^y \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

$\int_0^\infty \frac{dx}{x}$  converge si, et seulement si, les deux limites existent.

2.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \sin x dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^y \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \cos x \Big|_{-y}^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos y - \cos(-y)) = \lim_{y \rightarrow \infty} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx &= \int_{-\infty}^0 \sin x dx + \int_0^{\infty} \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^0 \sin x dx + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos 0 - \cos(-y)) + \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos 0 - \cos y)\end{aligned}$$

diverge

Ainsi, l'intégrale diverge.

**Théorème** (Critère de Cauchy).

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ converge si, et seulement si, } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a) \text{ t.q. } M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

*Démonstration.*

$$\text{Posons } F(y) = \int_a^y f(x) dx.$$

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  converge.

$$\text{Soit } L = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) dx.$$

$$\text{Alors, } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a) \text{ t.q. } y \leq M \Rightarrow |F(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient  $y_1, y_2$  avec  $M \leq y_1 \leq y_2$ .

On a

$$\begin{aligned}\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| &= |F(y_2) - F(y_1)| \\ &= |F(y_2) - L + L - F(y_1)| \\ &\leq |F(y_2) - L| + |F(y_1) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

$$(\Leftarrow) \text{ Supposons que } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a), M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{En particulier, on a } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a), M \leq n \leq y \Rightarrow |F(y) - F(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons la suite  $\{F(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Rappel.*  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy si  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0), m > n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$ .

La suite  $\{F(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy et elle est convergente. Soit  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$ .

$$\text{Alors, } (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0), n > N \Rightarrow |F(n) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il reste à montrer que  $\{F(y)\}_{y \in \mathbb{R}}$  converge aussi vers  $L$ .

À partir d'un certain rang approprié, on a

$$\begin{aligned}|F(y) - L| &= |F(y) - F(n) + F(n) - L| \\ &\leq |F(y) - F(n)| + |F(n) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

□

*Remarque.* Si  $f \geq 0$ , alors  $F$  est croissante, donc  $\lim F(y)$  converge ou tend vers  $\infty$ .

Ainsi,  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge si, et seulement si,  $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$ .

**Proposition** (Test de comparaison).

Supposons que  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $(\forall x \geq a)$ .

Alors,  $\int_a^\infty g(x)dx$  converge implique  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge.

*Démonstration.*

$\int_a^\infty g(x)dx$  converge, alors  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$ ,  $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$ .

On a

$$0 \leq \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \leq \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx = \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$$

Donc,  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge. □

*Exemple.*

Déterminer si  $\int_1^\infty e^{-x^2}$  converge.

Pour  $x \geq 1$ , on a  $x^2 \geq x$ , donc  $-x^2 \leq -x$  et  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ .

Or,  $\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y e^{-x}dx = \lim_{y \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-y}) = e^{-1}$ .

Comme  $e^y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$ , on a que  $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$  converge.

**Proposition** (Test de comparaison limite).

Supposons  $a \leq b \leq x$  et  $f(x), g(x) \geq 0$ ,  $(\forall x \geq b)$ .

Si  $C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  existe, alors  $\int_a^\infty g(x)dx$  converge implique  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge.

De plus, si  $C \neq 0$ ,  $\int_a^\infty g(x)dx$  converge si, et seulement si,  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge.

**Proposition** (Convergence absolue).

a)  $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$ , alors  $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$ .

b)  $\left| \int_a^\infty f(x)dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx$ .

*Démonstration.*

a) Si  $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$ , alors  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$  t.q.  $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$ .

Or,  $\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx = \left| \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$ .

Du critère de Cauchy,  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge.



b)

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| &= \left| \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) dx \right| \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \left| \int_a^y f(x) dx \right| \\
&\leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y |f(x)| dx \\
&= \int_a^\infty |f(x)| dx
\end{aligned}$$

□

Remarque.  $\int_a^\infty f < \infty \not\Rightarrow \int_a^\infty |f| < \infty$ .

Exemple (En effet).

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y \frac{\sin x}{x} dx \\
u &= \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-dx}{x^2} \\
dv &= \sin x \Rightarrow v = -\cos x \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{-\cos x}{x} \Big|_{\pi/2}^y - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2} dx \right) \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos \pi/2}{\pi/2} - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2} dx \right) \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \int_{\pi/2}^\infty \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx < \int_{\pi/2}^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^y \frac{dx}{x^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} \Big|_{\pi/2}^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{y} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

$$\text{Donc, } \int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx < \infty. \text{ Alors, } \int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx < \infty.$$

Montrons que.  $\int_{\pi/2}^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$  diverge.

Considérons les intervalles  $I_k = \left[ 2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ .

Sur  $I_k$ ,  $\sin x$  croît de 0 à 1.

En particulier,  $\exists x_k \in I_k$  t.q.  $\sin x_k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Ainsi, } \left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2x_k}.$$

$$\text{Or, } x_k \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 8k + \frac{\pi}{2} \leq 8k + 2k = 10k.$$

$$\text{Alors, } \frac{1}{x_k} \geq \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{k} = c \cdot \frac{1}{k}.$$

$$\text{Ainsi, } \int_{I_k} \left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| dx > \int_{I_k} \frac{c}{k} dx = \frac{c}{k} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Enfin, } \int_{\pi/2}^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{I_k} \left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| dx > \sum_{k=1}^\infty \frac{c}{k} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{c\pi}{2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}, \text{ la série harmonique qui diverge.}$$

□

**Théorème** (Test de l'intégrale).

Soit  $f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monotone décroissante.

Alors,  $\int_1^\infty f(x) dx < \infty$  si, et seulement si,  $\sum_{k=1}^\infty f(k) < \infty$ .

*Démonstration.*

Soit  $\Delta : 1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ , avec  $x_i = i + 1$ , pour  $i \in \mathbb{N}$ .

On a

$$\begin{aligned} S(f, \Delta, \{x_i\}) &= \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f(i+1) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} f(j) \end{aligned}$$

De même,  $S(f, \Delta, \{x_{i-1}\}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ .

On a donc

$$\sum_{j=2}^{\infty} f(j) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

( $\Rightarrow$ ) Si  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  converge, alors  $\sum_{j=2}^{\infty} f(j)$  converge. Donc,  $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$  converge.

( $\Leftarrow$ ) Si  $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$  converge, alors  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  converge.

□

*Exemple.*

*m.q.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge  $\forall p > 1$ .

D'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$$

Cauchy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{-p/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-p \frac{\ln n}{n}} = e^{-p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{-p \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} = 1$$

Test de l'intégrale :

Posons  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ .

On a  $f'(x) = -px^{-p-1} < 0$ , donc  $f$  est monotone décroissante.

De plus,  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge si, et seulement si,  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  converge.

Or,  $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$  converge si  $p > 1$ .

Donc,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge si  $p > 1$ .

□

# Chapitre 2 Suites de fonctions

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx &\stackrel{?}{=} \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) &\stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\end{aligned}$$

*Exemple.*

1. Posons  $f_n(x) = x^n$  sur  $[0, 1]$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow 1} x^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ .

Cependant,  $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$  où  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ .

2. Sur  $[0, 1]$ , posons  $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$ .

Posons  $f(x) = 0$ . On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

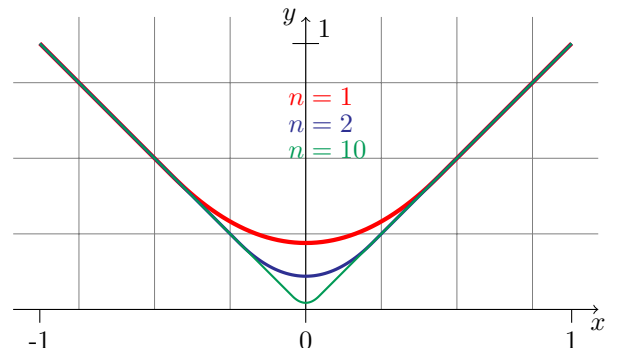
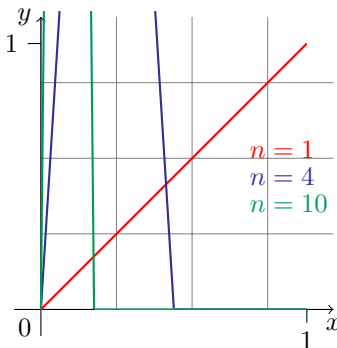
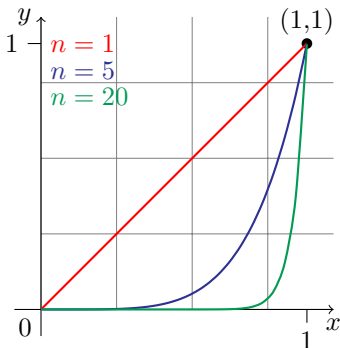
Ainsi,  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0$ .

Cependant,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bh}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ .

3. Sur  $\mathbb{R}$ , posons  $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 + \frac{1}{4n} & \text{si } \frac{-1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ |x| & \text{sinon} \end{cases}$ . On a  $f'_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si } \frac{-1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases}$ .

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si } \frac{-1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

Cependant,  $\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{d}{dx} |x|$ , qui n'existe pas en  $x = 0$ .



*Rappel.*

$(f_n) \rightarrow f$  (convergence ponctuelle)

$(\forall x \in \mathcal{D}), (f_n(x)) \rightarrow f(x)$  ou encore,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , c'est-à-dire  $(\forall \varepsilon > 0), (\exists N > 0)$  t.q.  $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

**Définition.**

1. La *norme supremum* de  $f$ , notée  $\|f\|$ , est  $\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)|$ , où  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. La *distance* entre  $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\text{dist}(f, g) = \|f - g\|$ .
3. On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *converge uniformément* vers  $f$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) = 0$ .

*Exemple.*

1. Sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , prenons  $f_n(x) = x^n$  et  $f(x) = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - 0\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1/2]} |f_n(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Sur  $[0, 1]$ , prenons  $f_n(x) = x^n$  et  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ . On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - f(x)| && \text{car } f_n(1) - f(1) = 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1[} |x^n| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc,  $f_n \not\rightarrow f$  sur  $[0, 1]$ .

*Notation.* On note la convergence uniforme et la convergence ponctuelle d'une suite de fonction vers une fonction  $f_n \rightrightarrows f$  et  $f_n \rightarrow f$  respectivement.

**Proposition.**  $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \rightarrow f$ .

*Démonstration.*

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$$\text{Alors, } \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \forall x \in \mathcal{D}.$$

Ainsi,  $f_n \rightarrow f$ . □

**Proposition.** Si  $f_n \rightarrow f$  et  $f_n \rightrightarrows g$ , alors  $f = g$ .

*Démonstration.*

$$f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

$$f_n \rightrightarrows g \Rightarrow f_n \rightarrow g \Rightarrow f_n(x) \rightarrow g(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

Ainsi,  $f(x) = g(x), \forall x \in \mathcal{D}$ . □

**Théorème.**

Supposons que  $(f_n)$  sont continues sur  $\mathcal{D}$ .

Si  $f_n \rightrightarrows f$ , alors  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $x_0 \in \mathcal{D}$ .

On veut montrer que  $f$  est continue en  $x_0$ , c'est-à-dire  $\exists \delta > 0$  t.q.  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Comme  $(f_n) \rightrightarrows f$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) = 0$ .

Ainsi,  $\exists M > 0$  t.q.  $n \geq M \Rightarrow \text{dist}(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ .

En particulier,  $\text{dist}(f_M, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ , c'est-à-dire  $\sup_{x \in \mathcal{D}} |f_M(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  et donc,  $|f_M(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

De plus,  $f_n$  continue sur  $\mathcal{D} \Rightarrow f_M$  continue en  $x_0$ .

Ainsi,  $(\exists \delta > 0)$  t.q.  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_M(x) - f_M(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Supposons donc que  $|x - x_0| < \delta$ . On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_M(x) + f_M(x) - f_M(x_0) + f_M(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(x_0)| + |f_M(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Corollaire.**

Si  $f_n$  continues et  $f_n \rightrightarrows f$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Comme  $f_n$  est continue en  $x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ .

Comme  $f$  est continue en  $x_0$ ,  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

**Théorème.**

Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  continues sur  $[a, b]$ .

Si  $f_n \rightrightarrows f$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_f dx$$

*Démonstration.*

$f_n$  continues et  $f_n \rightrightarrows f$ , alors  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , donc  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b (f_n - f)(x) dx \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= (b - a) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{car } f_n \rightrightarrows f$$

□

**Théorème.**

Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des fonctions de classe  $C^1$  (c'est-à-dire dérivable à dérivée continue).

Supposons

- i)  $f'_n \rightrightarrows g$ ;
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$  existe pour au moins un  $a$ .

Alors,

a)  $f_n$  converge ponctuellement vers  $f$  ;

b)  $f \in C^1$  ;

c)  $f' = g$ , c'est-à-dire  $\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$ .

*Démonstration.*

Supposons  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$  pour un certain  $a$ .

On a  $f_n \in C^1$ , alors  $f'_n$  est continue.

De plus,  $f'_n \rightrightarrows g$ , donc  $g$  est continue.

Alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt$ , pour tout  $x$ .

Du théorème fondamental du calcul,  $\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a)$ .

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_a^x f'_n(t) dt + f_n(a) \right] \\ &= L + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt \\ &= L + \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt \\ &= L + \int_a^x g(t) dt \end{aligned}$$

Ainsi,  $f'(x) = \frac{d}{dx} \left( L + \int_a^x g(t) dt \right) = \frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x)$ .

D'où b) et c),  $f \in C^1$  avec  $f' = g$ .

□

# Chapitre 3 Séries de fonctions

## Section 3.1 Convergence uniforme de série

### Définition.

Soient  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  des fonctions  $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

La *série* des  $f_k$  est la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ .

Si la suite  $(s_n(x))$  converge ponctuellement vers une fonction  $s(x)$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$  est appelée la *somme* de la série, c'est-à-dire,  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ .

### Exemple.

$f_k(x) = x^k$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ .

On cherche  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ .

D'Alembert :  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x| = |x|$ . On a convergence si  $L < 1$ , c'est-à-dire  $-1 < x < 1$ .

Si  $x = -1$ , alors  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$  oscille.

Si  $x = 1$ , alors  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k$  diverge.

Donc, la série converge sur  $] -1, 1[$ .

On a, sur  $] -1, 1[$ ,  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$ .

### Définition.

La série de fonctions  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformément sur  $A$  vers une fonction  $s : A \rightarrow \mathbb{R}$  si  $\left( s_n = \sum_{k=0}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow s$ , c'est-à-dire si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |s_n(x) - s(x)| = 0$ .

### Exemple.

a)  $f_k(x) = x^k$  sur  $A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . On a

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| - \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^k| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0
 \end{aligned}$$

Donc,  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow \frac{1}{1-x}$  sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

b)  $f_k(x) = x^k$  sur  $A = ]-1, 1[$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} 1^k \right| \\
 &\neq 0
 \end{aligned}$$

**Théorème** (Critère de Weierstrass).

Soient  $(f_k : A \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$  t.q.

i)  $(\forall k)(\exists M = M_k)(\forall x \in A), |f_k(x)| \leq M_k$  ;

ii)  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$  converge.

Alors,  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformément.

*Démonstration.*

Soit  $x \in A$ .

On a  $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M_k$ , par i), qui converge, par ii).

Donc,  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  converge absolument et donc converge.

De plus, sur  $A$ ,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |s(x) - s_n(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k
 \end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme. □



*Exemple.*

Étudions la convergence uniforme de  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ .

On a

$$\text{i) } \left| \frac{\cos kx}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2};$$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ converge.}$$

Donc,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$  converge uniformément.

**Théorème.**

$(f_k : A \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $f_k$  continue,  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \Rightarrow s$ , alors  $s$  est continue sur  $A$ .

*Démonstration.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \Rightarrow s \Rightarrow (s_n) \Rightarrow s.$$

Or,  $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$  est continue.

Alors,  $s$  est continue. □

**Théorème.**

$f_k$  continue et  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformément, alors  $\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx \\ \text{puisque la somme est finie} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx \end{aligned}$$

Or,  $f_k$  continue  $\Rightarrow s_n$  continue et  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformément  $\Leftrightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) dx \\ &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx \end{aligned}$$

□

**Théorème.**

$f_k \in C^1$  sur  $A$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k \Rightarrow u$  et  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(a)$  converge pour au moins un  $a \in A$ , alors

- a)  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformément vers  $s$  ;  
 b)  $s \in C^1$  sur  $A$  ;  
 c)  $s' = u$ , c'est-à-dire  $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$ .

*Démonstration.*

Comme au chapitre précédent. □

*Exemple.*

$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{k^3}, \quad k \in \mathbb{N}_*.$$

On a

- i)  $f_k \in C^1$  sur  $\mathbb{R}$  ;  
 ii)  $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$  converge uniformément (Weierstrass) ;  
 iii)  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin 0k}{k^3} = 0$  converge.

$$\text{Alors, } \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{x^3}$$

## Section 3.2 Séries de puissances

**Définition.**

Si  $f_k(x) = a_k \cdot (x - x_0)^k$ , alors  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  est une *série de puissance*.

*Exemple.*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot (x - 0)^i, \text{ où } a_i = \frac{1}{i!} \text{ et } x_0 = 0.$$

**Théorème.**

Soit  $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ . Alors,

- a)  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  converge sur  $]x_0 - R, x_0 + R[$  ;  
 b) Si  $R > 0$  et  $0 < r < R$ , alors  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  converge uniformément sur  $[x_0 - r, x_0 + r]$ .

*Démonstration.*

- a) Fixons  $x$ .

Posons  $b_k = a_k(x - x_0)^k$ .

Considérons la série réelle  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ .

De d'Alembert, la série converge si, et seulement si,  $L < 1$ , avec  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right| =$

$$|x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x - x_0|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = \frac{|x - x_0|}{R}.$$

Donc,  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  converge si, et seulement si,  $L < 1$ , c'est-à-dire  $\frac{|x - x_0|}{R} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < R \Leftrightarrow x \in ]x_0 - R, x_0 + R[$ .

b) Supposons que  $R > 0$  et soit  $0 < r < R$ .

Pour  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ , on a

$$\text{i) } |f_k(x)| = |a_k(x - x_0)^k| = |a_k| |x - x_0|^k \leq |a_k| r^k$$

$$\text{ii) } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \text{ converge.}$$

$$\text{En effet, } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} r^{n+1}}{a_n r^n} \right| = r \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{r}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = \frac{r}{R}.$$

$$\text{Ainsi, } L < 1 \Leftrightarrow \frac{r}{R} < 1 \Leftrightarrow r < R.$$

De Weierstrass,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  converge uniformément sur  $[x_0 - r, x_0 + r]$ .

□

**Définition.**

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \text{ est le rayon de convergence de la série.}$$

*Exemple.*

$$\text{a) } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (x - 0)^i$$

$$R = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{i!}}{\frac{1}{(i+1)!}} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} (i + 1) = \infty.$$

Donc,  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$  converge sur tout  $\mathbb{R}$ .

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x - 0)^k$$

$$R \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1/k}{1/(k+1)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{k} \right| = 1.$$

Donc,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$  converge sur  $] -1, 1[$  converge uniformément sur  $[-r, r]$  avec  $0 < r < 1$ .

$$\text{Pour } x = \frac{1}{2}, \text{ on a } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1/2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{1/2} x^{k-1} dx.$$

$$\text{Puisque } \frac{x^k}{k} \text{ est continue pour tout } k \text{ et } \sum \frac{x^k}{k} \text{ converge uniformément, on a } \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{1/2} x^{k-1} dx = \int_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} dx =$$

$$\int_0^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} x^k dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx = -\ln |1-x| \Big|_0^{1/2} = -\ln \frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2.$$

**Corollaire.**

Supposons que  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  converge vers  $f$  sur  $]x_0 - R, x_0 + R[$ . Alors,

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x - x_0)^k) \text{ est une série de puissance qui converge sur } ]x_0 - R, x_0 + R[;$$

$$\text{b) } f \in C^{\infty} \text{ sur } ]x_0 - R, x_0 + R[;$$

$$\text{c) } \frac{d^n}{dx^n} f = \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} (a_k(x - x_0)^k).$$

*Démonstration.*

a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1}(x-x_0)^k$  qui est effectivement une série de puissance.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)a_{k+1}}{(k+2)a_{k+2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{k+2} \right| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \right| = 1 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R.$$

b),c) Soit  $x \in ]x_0 - R, x_0 + R[$ . Alors,  $\exists 0 < r < R$  t.q.  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ . On sait que  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x-x_0)^k)$  converge uniformément sur  $[x_0 - r, x_0 + r]$ .

De plus,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  converge pour au moins un  $a \in [x_0 - r, x_0 + r]$ .

$$\text{Du théorème, } f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}.$$

$$\text{Donc, } f' \text{ est continue et } \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x-x_0)^k).$$

Par récurrence, on obtient les résultats. □

### Corollaire.

Supposons que  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = f$ , sur  $]x_0 - R, x_0 + R[$ . Alors,  $a_k = \frac{\left(\frac{d^k}{dx^k} f\right)(x_0)}{k!}$ .

Démonstration.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} (a_k(x-x_0)^k) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} (a_0) + \frac{d^n}{dx^n} (a_1(x-x_0)) + \cdots + \frac{d^n}{dx^n} (a_n(x-x_0)^n) + \frac{d^n}{dx^n} (a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}) + \cdots \\ &= 0 + 0 + \cdots + a_n(n)(n-1) \cdots (2)(1) + a_{n+1}(n+1)(n)(n-1) \cdots (3)(2)(x-x_0) + \cdots \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } f^{(n)}(x_0) = 0 + \cdots + 0 + a_n \cdot n! + 0 + \cdots = a_n \cdot n!, \text{ donc } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad \square$$

## Section 3.3 Séries de Taylor

### Théorème.

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$  sur  $A$  et  $x_0 \in A$ .

Alors,  $(\forall x \in A)$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x_0, x)$ , où  $R_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$ .

Démonstration.

Base : Pour  $n = 0$ , la formule devient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} (x-x_0)^0 + R_0(x_0, x) \\ &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0)$$

qui est le théorème fondamental du calcul.

Hyp : Supposons vrai pour  $n$ .

Pas : On a  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x_0, x)$ .

Or,

$$R_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt$$

posons  $u = f^{(n+1)}(t)$ , donc  $du = f^{(n+2)}(t)dt$  et  $dv = \frac{(x - t)^n}{n!} dt$ , donc  $v = -\frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!}$ .

$$\begin{aligned} &= \frac{f^{(n+1)}(t)(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!} \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n + 1)!} (x - t)^{n+1} dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} + R_{n+1}(x_0, x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x_0, x).$$

□

**Théorème.**

*S'il existe  $M > 0$  t.q.  $|f^{(n+1)}(t)| \leq M^{n+1}$  pour tout  $t \in [x_0, x]$ , alors*

$$R_n(x_0, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} |R_n(x_0, x)| &= \left| \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!} (x - t)^n dt \\ &\leq \frac{M^{n+1}}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n dt \\ &= \frac{M^{n+1}}{n!} \cdot \frac{-(x - t)^{n+1}}{n + 1} \Big|_{x_0}^x \\ &= \frac{M^{n+1}}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} \\ &= \frac{(M(x - x_0))^{n+1}}{(n + 1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Stirling : } n! &\simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

**Corollaire.**

*Sous ces conditions,  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ , la série de Taylor de  $f$  autour de  $x_0$ .*

**Corollaire.**

*Si la série de puissance  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  a comme limite  $f$ , alors la série de puissance est la série de Taylor de  $f$  autour de  $x_0$ .*

Exemple.

a)  $\cos x$ , avec  $x_0 = 0$ .

$$\begin{array}{lll} \cos x & : & \cos 0 = 0 \\ -\sin x & : & -\sin 0 = 0 \\ -\cos x & : & -\cos 0 = -1 \\ \sin x & : & \sin 0 = 0 \end{array}$$

$$\text{Ainsi, } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + R_n(0, x).$$

On a

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{(2k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!}} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |(2k+2)(2k+1)| \\ &= \infty \end{aligned}$$

On veut montrer que  $R_n(0, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ).

Pour  $x > 0$ , on a

$$\begin{aligned} R_n(0, x) &= \int_0^x \frac{\cos^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt \\ &\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\ &= \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_0^x \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\text{Pour } x < 0, R_n(0, x) \geq \frac{-|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{Donc, } |R_n(0, x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{Donc, } \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , avec  $x_0 = 1$ .

$$\begin{array}{lll} f(x) & = & \frac{1}{x} & : & f(1) & = & 1 \\ f'(x) & = & -x^{-2} & : & f'(1) & = & -1 \\ f''(x) & = & 2x^{-3} & : & f''(1) & = & 2 \\ f^{(3)}(x) & = & -6x^{-4} & : & f^{(3)}(1) & = & -6 \\ f^{(4)}(x) & = & 24x^{-5} & : & f^{(4)}(1) & = & 24 \\ f^{(n)}(x) & = & (-1)^n n! x^{-(n+1)} & & & & \end{array}$$

$$\text{Donc, } f(x) = 1 - (x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n + \cdots + R_n(1, x).$$

On a

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Il y a donc convergence sur  $]0, 2[$ .

$$\begin{aligned} |R_n(1, x)| &= \left| \int_1^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \\ &= \left| \int_1^x \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! t^{-(n+2)}}{n!} (x-t)^n dt \right| \\ &\leq \int_1^x \left| (n+1) t^{-(n+2)} |x-t|^n dt \right| \\ &\leq (n+1) \int_1^x |x-t|^n dt \\ &= |x-t|^{n+1} \Big|_1^x \\ &= |x-1|^{n+1} \\ \text{car } x \in ]0, 2[ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Donc,  $\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$ .

# Chapitre 4 Intégrales avec paramètres

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\}(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \\ \mathcal{L}\{t^2\}(s) &= \frac{2}{s^3} \\ \mathcal{L}\{t^3\}(s) &= \frac{6}{s^4}\end{aligned}$$

## Section 4.1 Fonction Gamma

**Définition.**

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt, \text{ pour } y > 0.$$

**Proposition.**

$\Gamma(y)$  converge pour tout  $y > 0$ .

*Démonstration.*

1.  $y \geq 1$ .

On a donc  $y - 1 \geq 0$  et c'est une intégrale impropre de première espèce.

On utilise le test de comparaison limite.

Posons  $f(t) = t^{y-1} e^{-t}$  et  $g(t) = e^{-t/2}$ .

On a

$$\begin{aligned}C &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{y-1} e^{-t}}{e^{-t/2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{y-1}}{e^{t/2}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(y-1)t^{y-2}}{\frac{1}{2}e^{t/2}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(y-1)(y-2)t^{y-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{t/2}} \\ &\stackrel{H}{=} \dots \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(y-1)(y-2) \cdots (y-k)}{\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{t/2}} t^{k-y} \quad \text{avec } y - k < 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \int_0^\infty g(t) dt = \int_0^\infty e^{-t/2} dt = \dots = 2.$$

Comme  $\int g$  converge, on a  $\int f$  converge.

Donc,  $\Gamma(y)$  converge si  $y \geq 1$ .



2.  $0 < y < 1$ .

$$\text{On a } \Gamma(y) = \underbrace{\int_0^1 t^{y-1} e^{-t} dt}_{2^{\text{ème}} \text{ esp}} + \underbrace{\int_1^\infty t^{y-1} e^{-t} dt}_{1^{\text{ère}} \text{ esp}}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{y-1} e^{-t} dt &\leq \int_0^1 t^{y-1} dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^1 t^{y-1} dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left. \frac{t^y}{y} \right|_{t=h}^1 \\ &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

La 2<sup>ème</sup> intégrale s'obtient comme au 1<sup>er</sup> cas.

□

**Proposition.**

- a)  $\Gamma(1) = 1$  ;
- b)  $\Gamma(y) = (y-1)\Gamma(y-1)$ , si  $y > 1$  ;
- c)  $\Gamma(y) = (y-1)(y-2)\cdots(y-k)\Gamma(y-k)$ , si  $y > k$  ;
- d)  $\Gamma(n+1) = n!$ , si  $n \in \mathbb{N}$  ;
- e)  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

*Démonstration.*

a)

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt \\ &= -e^{-t} \Big|_{t=0}^\infty \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) Posons  $u = t^{y-1}$ ,  $du = (y-1)t^{y-2} dt$ ,  $dv = e^{-t} dt$ ,  $v = -e^{-t}$ .

$$\begin{aligned} \Gamma(y) &= -t^{y-1} e^{-t} \Big|_{t=0}^\infty + (y-1) \int_0^\infty t^{y-2} e^{-t} dt \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{y-1}}{e^t} + (y-1)\Gamma(y-1) \\ &= (y-1)\Gamma(y-1) \end{aligned}$$

c) récurrence du b)

d) suit de c) et a)

e)

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt \\ \left. \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} &= \int_0^\infty (x^2)^{-1/2} e^{-x^2} 2x dx \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\ \left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{array} \right\} &= 2\sqrt{\pi} \mathbb{P}(X > 0) \quad \text{lorsque } X \sim N(0, 1/2) \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

□

Remarque (Utilité).

a)  $\Gamma(\alpha, \lambda) : f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, x \geq 0;$

b)  $\chi_n^2 : f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2};$

c) Transformée de Laplace :  $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, s > 0, n > -1;$

d) Une compagnie d'assurance a 240 000 clients.

Soit  $N(t)$  le nombre de décès jusqu'au temps  $t$ .

Supposons que le taux de mortalité annuelle est  $1/10\,000$ .

Supposons

i)  $N(0) = 0;$

ii)  $N(t+s) - N(s) \sim P(\lambda t), (\forall s, t \geq 0)(\forall \lambda > 0);$

iii)  $N(b_2) - N(a_2)$  est indépendant de  $N(b_1) - N(a_1)$  lorsque  $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \emptyset$ .

On dit que  $N(t)$  est un *processus de Poisson* d'intensité  $\lambda$ .

On a  $N(t) - N(0) = N(t) \sim P(\lambda t)$  et  $E[N(t)] = \lambda t$ , d'où  $E\left[\frac{N(t)}{t}\right] = \lambda$ .

Donc  $\lambda$  est le nombre moyen d'événements sur une période donnée. Ainsi,  $\lambda = \frac{240\,000}{10\,000} = 24$ .

Soit  $T_1$  le temps avant un 1<sup>er</sup> décès.

On a

$$\begin{aligned} F_{T_1} &= \mathbb{P}(T_1 \leq t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_1 > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(N(t) = 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(P(\lambda t) = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^0}{0!} \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

On en déduit que  $f_{T_1} = \frac{d}{dt} F_{T_1} = \lambda e^{-\lambda t}$ .

Ainsi,  $T_1 \sim \exp(\lambda)$ .

De même, si  $T_i$  désigne le temps entre le  $(i-1)$ <sup>ème</sup> décès et le  $i$ <sup>ème</sup> décès, on peut montrer que  $\{T_i\}$  sont iid  $\exp(\lambda)$ .

On cherche à trouver le temps moyen pour avoir 4 décès à partir d'un moment donné.

$$\begin{aligned} E[T_{i_0} + T_{i_0+1} + T_{i_0+2} + T_{i_0+3}] &= E[\Gamma(4, 24)] \\ &= \frac{4}{24} = \frac{2}{12} \end{aligned}$$

Il faut donc en moyenne 2 mois pour avoir 4 décès.

e)  $\int_0^\infty x^5 e^{-3x} dx.$

Posons  $t = 3x$ ,  $dt = 3dx$ , alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^5 e^{-3x} dx &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{3}\right)^5 e^{-t} \frac{dt}{3} \\ &= \frac{1}{3^6} \int_0^\infty t^5 e^{-t} dt \\ &= \frac{\Gamma(6)}{3^6} \\ &= \frac{5!}{3^6} \end{aligned}$$

## Section 4.2 Fonction Bêta

**Définition.**

$$\begin{aligned}\beta : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, n) &\mapsto \beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt\end{aligned}$$

**Proposition.**

$\beta(m, n)$  converge ( $\forall m, n > 0$ ).

*Démonstration.*

Si  $m, n \geq 1$ , c'est une intégrale définie.

Si  $0 < m < 1$  et  $n \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{t^{1-m}} dt \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{t^{1-m}} dt \\ &\leq \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{1}{t^{1-m}} dt \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left. \frac{t^m}{m} \right|_{t=y}^1 \\ &= \frac{1}{m} - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^m}{m} \\ &= \frac{1}{m}\end{aligned}$$

Si  $m \geq 1$  et  $0 < n < 1$ , alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt &= \int_0^1 \frac{t^{m-1}}{(1-t)^{1-n}} dt \\ &= \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^y \frac{t^{m-1}}{(1-t)^{1-n}} dt \\ &\leq \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^y \frac{1}{(1-t)^{1-n}} dt \\ &= \lim_{y \rightarrow 1^-} \left. \frac{-(1-t)^n}{n} \right|_{t=0}^y \\ &= \lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{-(1-y)^n}{n} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Si  $0 < m, n < 1$ , alors

$$\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt = \int_0^{1/2} \frac{(1-t)^{n-1}}{t^{1-m}} dt + \int_{1/2}^1 \frac{t^{m-1}}{(1-t)^{1-n}} dt$$

On fait comme les deux cas précédents. □

**Proposition.**  $\beta(m, n) = \beta(n, m)$ .

*Idée de la démonstration.* On effectue le changement de variables  $s = 1 - t$ , donc  $t = 1 - s$  et  $ds = -dt$ . On a donc que les rôles de  $m$  et  $n$  sont inversés. #

**Proposition.**

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

*Démonstration.*

On a

$$\begin{aligned}
 \Gamma(m)\Gamma(n) &= \left( \int_0^\infty t^{m-1} e^{-t} dt \right) \left( \int_0^\infty s^{n-1} e^{-s} ds \right) \\
 \left. \begin{array}{l} \text{posons } t = x^2, s = y^2 \\ \text{donc } 2x dx, ds = 2y dy \end{array} \right\} &= \left( \int_0^\infty x^{2m-2} e^{-x^2} 2x dx \right) \left( \int_0^\infty y^{2n-2} e^{-y^2} 2y dy \right) \\
 &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
 \left. \begin{array}{l} \text{posons } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \\ \text{donc } dx dy = r dr d\theta \end{array} \right\} &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r^{2m-1} \cos^{2m-1} \theta r^{2n-1} \sin^{2n-1} \theta e^{-r^2} r dr d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \int_0^\infty r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} dr \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-2} \theta \sin^{2n-2} \theta \frac{2 \cos \theta \sin \theta d\theta}{2} \int_0^\infty r^{2(m+n-1)} e^{-r^2} \frac{2r dr}{2} \\
 \left. \begin{array}{l} \text{posons } u = \sin^2 \theta, v = r^2 \\ \text{donc } du = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta, dv = 2r dr \end{array} \right\} &= \int_0^1 (1-u)^{m-1} u^{n-1} du \int_0^\infty v^{m+n-1} e^{-v} dv \\
 &= \beta(n, m) \Gamma(m+n) \\
 &= \beta(m, n) \Gamma(m+n)
 \end{aligned}$$

□

*Exemple.*

a)

$$\begin{aligned}
 \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt \\
 \left. \begin{array}{l} \text{posons } t = \sin^2 \theta \\ \text{donc } dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \end{array} \right\} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{-1} \theta \cos^{-1} \theta 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{0!} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

b)  $\int_0^a x^m \sqrt[n]{a^n - x^n} dx = \frac{a^{m+2}}{n} \beta\left(\frac{m+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right).$

On a

$$\begin{aligned}
 \frac{a^{m+2}}{n} \beta\left(\frac{m+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right) &= \frac{a^{m+2}}{n} \int_0^1 t^{\frac{m-n+1}{n}} (1-t)^{1/n} dt \\
 &= \frac{a^{m+2}}{n} \int_0^1 t^{\frac{m-n+1}{n}} (1-t)^{1/n} dt \\
 \left. \begin{array}{l} \text{posons } x^n = a^n t \\ \text{donc } n x^{n-1} dx = a^n dt \end{array} \right\} &= \frac{a^{m+2}}{n} \int_0^1 \left(\left(\frac{x}{a}\right)^n\right)^{\frac{m-n+1}{n}} \left(1 - \frac{x^n}{a^n}\right)^{1/n} \frac{n x^{n-1} dx}{a^n} \\
 &= \frac{a^{m+2}}{n} \int_0^1 \frac{x^{m-n+1}}{a^{m-n+1}} \frac{\sqrt[n]{a^n - x^n}}{a} \frac{n x^{n-1} dx}{a^n} \\
 &= \int_0^a x^m \sqrt[n]{a^n - x^n} dx
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\int_0^2 x^4 \sqrt{2^2 - x^2} dx$ , on a  $a = 2, n = 2, m = 4$ .

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^4 \sqrt{2^2 - x^2} dx &= \frac{2^6}{2} \beta\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= 2^5 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} \\ &= \frac{2^5 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{3!} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

*Remarque* (Utilité).

- a) Loi  $B(a, b)$  a comme densité  $B_{a,b}(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a, b)}$  si  $0 < x < 1$ .
- b) On tire au hasard 10 nombres réels dans  $[0, 1]$ .  
On cherche à savoir la probabilité que le 2<sup>e</sup> plus petit soit inférieur à 0.2.  
Soit  $\mathcal{U}_{(2)}$  la valeur du 2<sup>e</sup> plus petit nombre tiré.  
Alors,  $\mathcal{U}_{(2)} \sim B(k, n+1-k)$ , où  $n$  est le nombre de valeurs tirées.  
Ici,  $\mathcal{U}_{(2)} \sim B(2, 9)$ . On a

$$\mathbb{P}(\mathcal{U}_{(2)} < 0.2) = \int_0^{0.2} \frac{x^1(1-x)^8}{\beta(2, 9)} dx$$

$$\text{Or, } \beta(2, 9) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(9)}{\Gamma(11)} = \frac{1!8!}{10!} = \frac{1}{90}.$$

La probabilité cherchée est

$$\int_0^{0.2} 90x(1-x)^8 dx \approx 72.42\%$$

# Chapitre 5 Séries de Fourier

## Section 5.1 Définitions

**Définition.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est *périodique* de période  $T$  si  $f(t + T) = f(t)$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ).

*Exemple.*

$f(t) = \cos 5\pi t$  est périodique.

$$\cos 5\pi t = f(t) = f(t + T) = \cos 5\pi(t + T)$$

$$\cos(5\pi t + 2k\pi) = \cos(5\pi t + 5\pi T)$$

Si on prend  $2k\pi = 5\pi T$ , l'équation est vérifiée, c'est-à-dire  $T = \frac{2k\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}k$ .  
Ainsi,  $\cos 5\pi t$  est périodique de période  $\frac{2}{5}$ .

**Proposition.**  $f, g$  périodiques de période  $T$ . Alors,  $f + g$  est périodique de période  $T$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (f + g)(t + T) &= f(t + T) + g(t + T) \\ &= f(t) + g(t) \\ &= (f + g)(t) \end{aligned}$$

□

**Proposition.**  $f(t) = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t$  est périodique de période  $T$  si, et seulement si,  $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  t.q.  $\omega_1 T = 2\pi m_1$  et  $\omega_2 T = 2\pi m_2$ . Alors,  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2} \in \mathbb{Q}$  et  $\omega_1 = \frac{2\pi m_1}{T}, \omega_2 = \frac{2\pi m_2}{T}$ .

*Démonstration.*

( $\Leftarrow$ )

$$\begin{aligned} f(t + T) &= a_1 \cos \omega_1(t + T) + a_2 \cos \omega_2(t + T) \\ &= a_1 \cos \omega_1 t \cos \omega_1 T - a_1 \sin \omega_1 t \sin \omega_1 T + a_2 \cos \omega_2 t \cos \omega_2 T - a_2 \sin \omega_2 t \sin \omega_2 T \\ &= a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t \\ &= f(t) \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) Supposons  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

On veut montrer que  $\cos \omega_1 t$  et  $\cos \omega_2 t$  sont linéairement indépendantes.

Soient  $c_1, c_2$  t.q.  $c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \cos \omega_2 t = 0$ , ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ).

On applique  $\frac{d^2}{dt^2}$  :  $-c_1 \omega_1^2 \cos \omega_1 t - c_2 \omega_2^2 \cos \omega_2 t = 0$ , ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ).

En  $t = 0$ , on a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 \omega_1^2 - c_2 \omega_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix} \neq 0$ , la seule solution est  $(c_1, c_2) = (0, 0)$ .

Comme  $f$  est périodique de période  $T$ , on a

$$\begin{aligned} a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t &= f(t) \\ &= f(t + T) \\ a_1 \cos \omega_1(t + T) + a_2 \cos \omega_2(t + T) & \end{aligned}$$

Alors,

$$a_1 \left[ \underbrace{\cos \omega_1(t + T) - \cos \omega_1 t}_{g_1(t)} \right] + a_2 \left[ \underbrace{\cos \omega_2(t + T) - \cos \omega_2 t}_{g_2(t)} \right] = 0$$

Or, par  $\cos(x + \alpha) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}$ , on a

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -2 \sin\left(\omega_1 t + \frac{\omega_1 T}{2}\right) \sin \frac{\omega_1 T}{2} \\ g_2(t) &= -2 \sin\left(\omega_2 t + \frac{\omega_2 T}{2}\right) \sin \frac{\omega_2 T}{2} \end{aligned}$$

Comme les sin sont indépendants, on en déduit que  $g_1$  et  $g_2$  le sont aussi.

Comme  $a_1, a_2 \neq 0$ , il faut donc que  $g_1(t) = g_2(t) = 0$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 t + \omega_1 T &= \cos \omega_1 t \\ \cos \omega_2 t + \omega_2 T &= \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

Donc,  $\omega_1 T = 2\pi m_1$  et  $\omega_2 T = 2\pi m_2$ , pour  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ .

□

*Remarque.* On obtient  $\omega_i = \frac{2m_i\pi}{T}$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ .

**Proposition.**

$c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t = B \cos(\omega t + \phi)$ , pour des constantes  $B$  et  $\phi$ .

*Démonstration.*

Prenons  $\theta = \arctan \frac{c_2}{c_1}$ .

On a  $\tan \theta = \frac{c_2}{c_1}$  et

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \Rightarrow \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Rightarrow \frac{c_2^2}{c_1^2} + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \end{aligned}$$

et

$$\sin \theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

Posons  $B = -\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  et  $\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$ .

On obtient

$$\begin{aligned} B \cos(\omega t + \phi) &= B \cos \omega t \cos \phi - B \sin \omega t \sin \phi \\ &= B \cos \omega t (-\sin \theta) - B \sin \omega t \cos \theta \\ &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos \omega t \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin \omega t \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \\ &= c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \end{aligned}$$

□

**Définition.**

a) Un *polynôme trigonométrique* est une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^n \left[ a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right]$$

b) Lorsque  $n = \infty$ , c'est une *série trigonométrique*.

**Proposition.** *Tout polynôme trigonométrique est  $T$ -périodique.*

**Proposition.** *Si une série trigonométrique converge ( $\forall x$ ), alors sa somme est  $T$ -périodique.*

*Remarque.* Si  $f$  n'est pas périodique, alors  $f$  ne pourra être la somme d'une série trigonométrique.

**Définition.** Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $f(a) = f(b)$  et  $T = b - a$ . L'*extension  $T$ -périodique* de  $f$  est

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ f(x - nT) & \text{si } x \in [a + nT, b + nT] \text{ pour un } n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$