

MAT346 - Analyse II  
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Intégration</b>	<b>1</b>
1.1	Intégrales de Riemann . . . . .	1
	Critère d'intégrabilité . . . . .	3
	Inégalité du triangle . . . . .	6
	Théorème de Darboux . . . . .	8
	Loi de la moyenne . . . . .	10
	Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral . . . . .	11
1.2	Techniques d'intégration . . . . .	13
	Fractions partielles . . . . .	14
	Quelques substitutions . . . . .	14
1.3	Intégrales impropres . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Suites de fonctions</b>	<b>24</b>

# Chapitre 1 Intégration

## Section 1.1 Intégrales de Riemann

*Notation.*

$\mathcal{B}[c, d] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}.$

$\mathcal{R}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}.$

$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}.$

On suppose nos fonctions bornées.

**Définition.**

- a) Une partition de  $[a, b]$  est un ensemble fini de points  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$  t.q.  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .
- b) L'ensemble des partitions de  $[a, b]$  est  $\Omega[a, b]$ .
- c) On dit  $\Delta'$  est *plus fine* que  $\Delta$ , noté  $\Delta' \geq \Delta$ , si  $\Delta' \supseteq \Delta$ .
- d) *Raffinement commun* de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , noté  $\Delta_1 \vee \Delta_2$ , est la partition de  $[a, b]$  formée de  $\Delta_1 \cup \Delta_2$  ordonnés.
- e) La *norme* de  $\Delta$ , notée  $\|\Delta\|$ , est  $\|\Delta\| = \max_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$ .
- f)

$$\begin{aligned}\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\end{aligned}$$

*Remarque.*

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &= \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

**Définition.**

- a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de  $f$  pour la partition  $\Delta$  est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de  $f$  pour la partition  $\Delta$  est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

**Proposition.**

a)

$$\underline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, \Delta), \forall \Delta \in \Omega[a, b]$$

b)

$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta)$$

c)

$$\overline{S}(f, \Delta) \leq \overline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a)$$

**Proposition.** Si  $\Delta' \geq \Delta$ , alors  $\overline{S}(f, \Delta') \leq \overline{S}(f, \Delta)$ .

*démonstration.*

Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$$

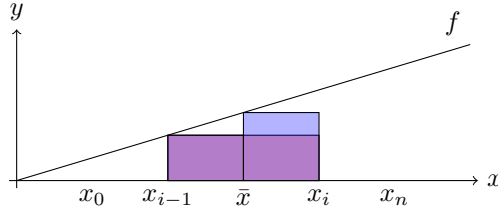
On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})] \\ &\quad - [\overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) + \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x})] \\ &= (x_i - \bar{x}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])] \\ &\quad + (\bar{x} - x_{i-1}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

**Proposition.** Si  $\Delta' \geq \Delta$ , alors  $\underline{S}(f, \Delta') \geq \underline{S}(f, \Delta)$

*démonstration.*



□

*Remarque.*  $\underline{S}(f, \Delta) = -\overline{S}(-f, \Delta)$ .

**Corollaire.**  $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Omega[a, b], \underline{S}(f, \Delta_1) \leq \overline{S}(f, \Delta_2)$

*démonstration.*

On a  $\Delta_1 \vee \Delta_2 \geq \Delta_1$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta_1) &\leq \underline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_2) \end{aligned}$$

□

**Définition.**

- a) La somme par défaut de  $f$  est  $\underline{S}(f) = \sup_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$ .  
 b) La somme par excès de  $f$  est  $\overline{S}(f) = \inf_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$ .

**Théorème.**  $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$

*démonstration.*

Soit  $\Delta_1 \in \Omega[a, b]$

$\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$  est le plus petit majorant des  $\underline{S}(f, \Delta)$  avec  $\Delta \in \Omega[a, b]$ .

Du corollaire précédant, on a que  $\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$ .

Donc,  $\overline{S}(f, \Delta_1)$  est un majorant des  $\underline{S}(f, \Delta)$ .

Ainsi,  $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$ .

De même,  $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$  est le plus grand minorant des  $\overline{S}(f, \Delta)$  avec  $\Delta \in \Omega[a, b]$ .

Comme  $\underline{S}(f)$  est un minorant des  $\overline{S}(f, \Delta)$ , on a que  $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ . □

**Définition.**

Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ . On dit que  $f$  est *intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$*  si  $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$  et on note  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

La valeur commune de  $\underline{S}(f)$  et  $\overline{S}(f)$  est notée  $\int_a^b f(x) dx$

**Critère d'intégrabilité**

**Théorème** (Critère d'intégrabilité).

Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ . Alors  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  si, et seulement si,  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega[a, b])$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .

*démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) Supposons  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

On a  $\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ .

Comme  $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$  ne peut minorer  $\overline{S}(f, \Delta)$ , alors  $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ .

De même,  $\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ .

Comme  $\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$  ne peut majorer  $\underline{S}(f, \Delta)$ , alors  $\exists \Delta_2 \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ .

Posons  $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left( \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= (\overline{S}(f) - \underline{S}(f)) + \varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Soit  $\varepsilon > 0$ .

Alors  $\exists \Delta$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .

Mais alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Du théorème du sandwich,  $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ , car  $\varepsilon > 0$  est arbitraire.

Donc,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

□

**Corollaire.** *S'il existe  $\Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) = \underline{S}(f, \Delta)$ , alors  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .*

**Théorème.** *Toute fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .*

*démonstration.*

Soit  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Par la proposition d'Archimède,  $\exists n \in \mathbb{Z}$  t.q.  $n\varepsilon > b - a$ .

*Rappel.*

$f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$  si  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$  t.q. pour  $x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

*Rappel.*

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

Comme  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , elle est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

Alors,  $\exists \delta > 0$  t.q. pour  $x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$ .

Soit donc  $\Delta \in \Omega[a, b] : a = x_0 < x_1, \dots < x_n = b$  avec  $\|\Delta\| < \delta$ .

Alors,  $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{1}{n}$ .

*Remarque.*  $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])$  peut être noté  $\text{osc}_f([x_{i-1}, x_i])$ .

On obtient

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b - a}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

□

**Théorème.** *Toute  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotone est intégrable.*

*démonstration.*

(1) Si  $f$  est constante, alors  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) = 0 < \varepsilon$ .

(2) Si  $f$  est croissante,

Soit  $\varepsilon > 0$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  t.q.  $n\varepsilon > (b - a)(f(b) - f(a))$

Soit  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  avec  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ ,  $i \in [0..n]$

On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \left( \frac{b-a}{n} \right) \\ &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Donc,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

(3) Si  $f$  est décroissante, alors  $-f$  est croissante et  $-f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Donc,  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

□

**Théorème.**

Si  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ , alors  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$ .

démonstration.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $f_i \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\exists \Delta_i \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f_i, \Delta_i) - \underline{S}(f_i, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

Alors,  $\overline{S}(f_i, \Delta) - \underline{S}(f_i, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Supposons  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

On a

$$\begin{aligned}\overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\ \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\geq \underline{S}(f_1, \Delta) + \underline{S}(f_2, \Delta)\end{aligned}$$

Car  $\sup(f_1 + f_2) \leq \sup f_1 + \sup f_2$  et  $\inf(f_1 + f_2) \geq \inf f_1 + \inf f_2$ .

Alors,

$$\begin{aligned}\overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1, \Delta) - \underline{S}(f_2, \Delta) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Donc,  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ .

De plus,

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1 + f_2 &\leq \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) \\ &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\ &< \underline{S}(f_1, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f_2, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \int_a^b f_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f_2 + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Ainsi,  $\int_a^b f_1 + f_2 < \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Donc,  $\int_a^b f_1 + f_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ .

De même, on peut montrer que  $\int_a^b f_1 + f_2 \geq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ .

Donc,  $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ .

□

**Théorème.**

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $\int \lambda f = \lambda \int f$ .

démonstration.

Laissé en exercice.

Utiliser  $\frac{\varepsilon}{\lambda}$  et  $\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$ . □

**Corollaire.**

Si  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ , alors  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ .

démonstration.

$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0$ . □

**Inégalité du triangle**

**Théorème** (Inégalité du triangle).

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , alors  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $|\int f| \leq \int |f|$ .

démonstration.

Soit  $\varepsilon > 0$

Alors,  $\exists \Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc,  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Enfin,

$$\begin{aligned} -|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\ &\Rightarrow \int f \leq \int |f| \end{aligned}$$

□

**Théorème.**

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $a \leq c < d \leq b$ , alors  $f|_{[c, d]} \in \mathcal{R}[a, b]$ .

démonstration.

Soit  $\varepsilon > 0$

Comme  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$ .

Soit  $\Delta_2$  le raffinement de  $\Delta_1$  en ajoutant les points  $c$  et  $d$ .

Alors,  $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) \leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$

Donc,  $f \in \mathcal{R}[c, d]$ . □

**Théorème.**

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $a < c < b$ , alors  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

démonstration.

Soit  $\varepsilon > 0$

$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a, c]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

De même,  $\exists \Delta_2 \in \Omega[c, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ .



Posons  $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$ . Alors,  $\Delta \in \Omega[a, b]$  et

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\leq \overline{S}(f, \Delta) \\ &= \overline{S}(f, \Delta_1) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \underline{S}(f, \Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f, \Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \underline{S}(f, \Delta_1) + \underline{S}(f, \Delta_2) + \varepsilon \\ &\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a  $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$ .

De même,  $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$ . □

**Théorème.** Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f$  possède  $n$  discontinuités dans  $[a, b]$ , alors  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

*démonstration.*

Pour  $n = 0$ ,  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , donc  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  est un résultat connu.

Supposons l'énoncé vrai pour  $n$ .

Supposons que  $f \in \mathcal{B}[a, b]$  admet  $n + 1$  discontinuités.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Il y a deux cas à considérer

1.  $a$  ou  $b$  est une discontinuité

SPDG, supposons que  $a$  est la discontinuité.

Soit  $\eta \in \mathbb{R}^+$  t.q.  $a$  est l'unique discontinuité de  $[a, a + \eta]$  et  $\eta < \frac{\varepsilon}{4M}$ .

Alors,  $[a + \eta, b]$  contient  $n$  discontinuités.

De l'hypothèse de récurrence,  $f \in \mathcal{R}[a + \eta, b]$ .

Il existe donc  $\Delta \in \Omega[a + \eta, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Posons  $\Delta_\varepsilon = \Delta \vee \{a\}$ .

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= (\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)) + (\overline{M}(f, [a, a + \eta]) - \underline{M}(f, [a, a + \eta])) \eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

2. ni  $a$  ni  $b$  ne sont des discontinuités

Soit  $c \in ]a, b[$  qui est une discontinuité de  $f$ .

Soit  $\eta \in \mathbb{R}^+$  t.q.  $c$  est l'unique discontinuité de  $[c - \eta, c + \eta] \subset [a, b]$  et  $\eta < \frac{\varepsilon}{8M}$ .

Alors,  $[a, c - \eta]$  et  $[c + \eta, b]$  contiennent au plus  $n$  discontinuités, par l'hypothèse de récurrence

$\exists \Delta_1 \in \Omega[a, c - \eta]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{4}$ .

$\exists \Delta_2 \in \Omega[c + \eta, b]$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{4}$ .

Posons  $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

On a donc

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= [\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1)] + [\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2)] \\
 &\quad + [\overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) - \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta])] (2\eta) \\
 &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4M\eta \\
 &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

**Théorème.** Soient  $f : [a, b] \rightarrow [c, d] \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c, d]$ .

Alors  $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

*Remarque.* L'hypothèse que  $g \in \mathcal{C}[c, d]$  est nécessaire.

*Exemple.*

$$\begin{aligned}
 f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ et } \text{pgcd}(m, n) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Fonction de Dirichlet modifiée.

$$\begin{aligned}
 g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ .

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \circ f \notin \mathcal{R}[a, b]$ .

Fonction de Dirichlet.

**Lemme.** Si  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ ,  $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$  et  $\Delta'$  s'obtient de  $\Delta$  en ajoutant un unique point, alors  $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$ .

*démonstration.*

Soient  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ .

$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$ .

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x}) \\
 &= (\bar{x} - x_{i-1}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])) + (x_i - \bar{x}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])) \\
 &\leq 2\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) ((\bar{x} - x_{i-1}) - (x_i - \bar{x})) \\
 &\leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\|
 \end{aligned}$$

□

**Corollaire.** Si  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ ,  $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$  et  $\Delta'$  s'obtient de  $\Delta$  en ajoutant  $p$  points, au plus un point par sous-intervalle de  $\Delta$ , alors  $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2p\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$ .

## Théorème de Darboux

**Théorème** (Darboux, 1875).

Si  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ , alors

$$\overline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) \qquad \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta)$$

*démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ , on a que  $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$  n'est pas un minorant des  $\overline{S}(f, \Delta)$ .

Ainsi,  $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \dots < x_n = b$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_0) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $\delta > 0$  t.q.  $\delta < \min_{i \in [1..n]} |x_i - x_{i-1}|$  et  $\delta < \frac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b])}$ .

Soit  $\Delta \in \Omega[a, b]$  t.q.  $\|\Delta\| < \delta$ .

Alors,  $\|\Delta\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Considérons  $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$ .

Comme  $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$ , aucun sous-intervalle ouvert de  $\Delta$  ne contient plus d'un point de  $\Delta_0$ .

Comme  $\Delta'$  s'obtient de  $\Delta$  en ajoutant au plus  $n-1$  points  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ ,

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &\leq 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\| \\ &< 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f, \Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \overline{S}(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} -\overline{S}(-f, \Delta) \\ &= - \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(-f, \Delta) \\ &= -\overline{S}(-f) \\ &= \underline{S}(f) \end{aligned}$$

□

**Définition.** Soit  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ .

Soit  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \in \Omega[a, b]$ .

Soient  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , pour  $i \in [1..n]$ .

Le nombre réel

$$S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

est appelé *somme de Riemann* de la fonction  $f$  correspondant à la partition  $\Delta$  et aux points  $\{\bar{x}_i\}_{i \in [1..n]}$ .

**Théorème.**

Soit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Alors,  $(\forall \varepsilon > 0)$ ,  $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$  t.q. pour toute partition  $\Delta$  de  $[a, b]$  avec  $\|\Delta\| < \delta$  et pour tout choix de points  $\{\bar{x}_i\}$ , on a

$$\left| \int_a^b f - S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire.

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$$

démonstration.

On a  $\underline{S}(f, \Delta) \leq S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \overline{S}(f, \Delta)$ .

Donc,

$$\underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Comme  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , on a  $\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \int_a^b f$ .

Par le théorème du sandwich,  $S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$ . □

## Loi de la moyenne

**Théorème** (Loi de la moyenne).

Soit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Alors,  $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$  t.q.  $\int_a^b f = (b - a) \cdot \mu$ .

démonstration.

Soit  $\phi$  la fonction donnée par  $\phi(x) = (b - a)x$ .

On a  $\underline{M}(f, [a, b]) \leq f \leq \overline{M}(f, [a, b])$ .

Donc

$$\phi(\underline{M}(f, [a, b])) = (b - a)\underline{M}(f, [a, b]) = \int_a^b \underline{M}(f, [a, b]) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \overline{M}(f, [a, b]) = (b - a)\overline{M}(f, [a, b]) = \phi(\overline{M}(f, [a, b]))$$

Rappel.

**Théorème** (Théorème de valeur intermédiaire).

$f$  continue sur  $[a, b]$ ,  $f(a) < c < f(b)$  implique  $\exists x_0 \in [a, b]$  t.q.  $f(x_0) = c$ .

Comme  $\phi$  est continue sur  $[\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$ , du TVI,  $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$  t.q.  $\phi(\mu) = c$  pour tout  $c \in [\phi(\underline{M}(f, [a, b])), \phi(\overline{M}(f, [a, b]))]$ .

En particulier, si  $c = \int_a^b f$ ,  $\exists \mu$  t.q.  $\phi(\mu) = \int_a^b f$ , c'est-à-dire t.q.  $(b - a)\mu = \int_a^b f$ . □

**Théorème.**

Soit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Alors,

a)  $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \overline{M}(|f|, [a, b]) (b - a) \cdot |x_1 - x_2|$  pour tous  $x_1, x_2 \in [a, b]$  ;

b)  $F$  est uniformément continue sur  $[a, b]$  ;

c) Si  $f$  est continue, alors  $F$  est différentiable et  $F' = f$ .

démonstration.

a) Supp  $x_1 > x_2$

On a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f \right| \\ &= \left| \int_{x_2}^{x_1} f \right| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} |f| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} \overline{M}(|f|, [a, b]) \\ &= \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

b) Soit  $\varepsilon > 0$ .

Prenons  $\delta = \frac{\varepsilon}{\overline{M}(|f|, [a, b])}$ .

Soient  $x, y \in [a, b]$  avec  $|x - y| < \delta$ .

Alors,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x - y| \\ &< \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

c) Soit  $x_0 \in [a, b]$ .

On a

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{Loi de la moyenne}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f(x_0 + \theta(x - x_0))}{x - x_0} \quad \theta \in [0, 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + \theta(x - x_0)) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

□

### Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

*Notation.*  $F$  est une primitive de  $f$ .

**Corollaire.** Si  $f$  est continue, alors  $f$  admet au moins une primitive.

**Corollaire.** Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux primitives de  $f$ , alors  $F_1 - F_2 = C$  pour une constante  $C$ .

**Théorème** (Théorème fondamental du calcul intégral).

Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ .

*démonstration.*

Soit  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \in \Omega[a, b]$ .

Comme  $F$  est continue et différentiable sur  $[a, b]$  et a fortiori sur  $[x_{i-1}, x_i]$ , le théorème de la moyenne donne

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ t.q. } \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i).$$

On a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &\leq f(t_i) \leq \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\ \Rightarrow \underline{S}(f, \Delta) &\leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}(f, \Delta) \\ \Rightarrow \int_a^b f = \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &\leq F(b) - F(a) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f) = \int_a^b f \end{aligned}$$

Donc,  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ .

□

**Proposition.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $f(x) = 0$  sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors,

- a)  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  ;
- b)  $\int_a^b f = 0$ .

démonstration.

- a) déjà fait
- b) Soit  $p$  le nombre de points où  $f \neq 0$ .

Pour  $p = 0$ , c'est trivial.

Supposons que la propriété est vraie pour  $p$ .

Supposons que  $f \neq 0$  en  $p + 1$  points.

Il y a deux cas à considérer

- 1)  $\exists c \in [a, b]$  avec  $f(c) \neq 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $\eta > 0$  t.q.

- i)  $a < c - \eta < c + \eta < b$  ;
- ii)  $c$  est le seul point de  $[c - \eta, c + \eta]$  où  $f \neq 0$  ;
- iii)  $\eta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4\overline{M}(f, [a, b])}, \frac{-\varepsilon}{4\underline{M}(f, [a, b])} \right\}$ .

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\int_a^{c-\eta} f = 0 \quad \int_{c+\eta}^b f$$

Du critère d'intégrabilité,  $\exists \Delta_1 : a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = c - \eta$ ,  $\exists \Delta_2 : c + \eta = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$  t.q.  $\overline{S}(f, \Delta_i) \leq \overline{S}(f, \Delta_i) - \underline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ .

Prenons  $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$ .

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) &= \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \overline{M}(f, [a, b]) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

De même,  $\underline{S}(f, \Delta_i) > \underline{S}(f, \Delta_i) - \overline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ .

et

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta) &= \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &\leq \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \underline{M}(f, [a, b]) + \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &< -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \\ &= -\varepsilon \end{aligned}$$

Donc,  $\varepsilon < \underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$ .

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on en déduit que  $\int_a^b f = 0$ .

- 2)  $f(c) \neq 0$  en  $a$  ou en  $b$ .

On procède de la même manière avec un sous-intervalle de largeur  $\eta$  autour de  $a$  et de  $b$  t.q.  $a$  et  $b$  sont les seules discontinuités dans ces intervalles.

□

**Corollaire.** Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $f = g$  sauf peut-être en un nombre fini de points, alors  $\int_a^b f = \int_a^b g$ .

## Section 1.2 Techniques d'intégration

**Théorème** (Intégration par parties).

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions différentiables t.q.  $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$ . Alors,

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b g f'$$

démonstration.

Posons  $h = fg$ .

Alors,

$$\begin{aligned} h' &= f'g + fg' \\ \int_a^b h' &= \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \\ \int_a^b fg' &= \int_a^b h - \int_a^b f'g \\ &= h \Big|_a^b - \int_a^b f'g \\ &= fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g \end{aligned}$$

□

**Théorème** (Changement de variable/Substitution).

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  de classe  $C^1$ , c'est-à-dire  $\phi$  est dérivable et  $\phi'$  est continue.

Si  $\phi(\alpha) = a$  et  $\phi(\beta) = b$ , alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

démonstration.

Posons  $h(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

Du théorème fondamental,  $h$  est uniformément continue, différentiable et  $h' = f$ .

Soit  $g(t) = (h \circ \phi)(t) = h(\phi(t)) = \int_a^{\phi(t)} f(t)dt$ .

On a  $h, \phi$  différentiables, donc  $g$  l'est aussi et

$$\begin{aligned} g'(t) &= h'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ &= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta g'(t)dt \\ &= g(\beta) - g(\alpha) \\ &= h(\phi(\beta)) - h(\phi(\alpha)) \\ &= h(b) - h(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

### Fractions partielles

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Avec  $b^2 - 4ac < 0$ .

On ramène sur dénominateurs communs.

On ramène en une fraction.

On résout le système d'équations avec  $P(x)$ .

On intègre chaque fraction.

### Quelques substitutions

1.  $f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right)$ , ou  $f$  est une fonction rationnelle  $f = \frac{P(x)}{Q(x)}$ .

On pose  $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$  où  $n$  est un multiple commun de  $n_1, n_2, \dots$ .

*Exemple.*

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \int x^2(x-1)^{-1/2}.$$

Posons  $x-1 = t^2$ .

Alors,  $dx = 2tdt$ .

$$\text{On obtient } \int x^2(x-1)^{-1/2} = \int (t^2-1)^2(t^2)^{-1/2}2tdt = 2 \int (t^2+1)^2 dt.$$

2.  $\int x^\alpha(a+bx^\beta)^\gamma dx$  avec  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ .

On pose  $t = x^\beta$ .

Alors,  $dt = \beta x^{\beta-1} dx$ .

$$\text{Donc, } dx = \frac{dt}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{dt}{\beta t^{\beta-1/\beta}}.$$

*Exemple.*

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} dx.$$

Posons  $t = x^2$ .

$$\text{On a } dt = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} dx &= \int t^{-2}(1+t)^{-1/2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-5/2}(1+t)^{-1/2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2} dt \end{aligned}$$

$$\text{Posons } u^2 = \frac{1+t}{t} = 1 + \frac{1}{t}. \text{ On a } u^2 - 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u^2 - 1}.$$

$$\text{Alors, } dt = (-1)(u^2 - 1)^{-2}(2u)du.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2} dt &= -\frac{1}{2} \int (u^2 - 1)^3 u^{-1} (u^2 - 1)^{-1} 2u du \\ &= - \int (u^2 - 1) du \end{aligned}$$



3.  $f(\sin x, \cos x)$ .

On pose  $t = \tan \frac{x}{2}$ . On a  $x = 2 \arctan t$ .

Alors,  $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ .

*Exemple.*

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

On a

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}} - \frac{\frac{1}{\cos^2}(\sin^2)}{\frac{1}{\cos^2}(\cos^2 + \sin^2)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int \frac{2dt}{1+t^2} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{2dt}{3+t^2} \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

4.  $f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ .

On pose  $x = a \sin t$ . On a  $dx = a \cos t dt$ .

*Exemple.*

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\ &= \int a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \int a^4 \frac{1}{4} \sin^2 2t dt \\ &= \int \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\ &= \frac{a^4}{8} \left[ t - \frac{\sin 4t}{4} \right] \end{aligned}$$

5.

*Rappel.*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x & (\cosh x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cosh^2 x + \sinh^2 x &= -\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc,  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ .

Alors,  $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \Rightarrow \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$ .

Formellement,

$$\sinh x = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

avec  $z \in \mathbb{C}$ .

$f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ .

On pose  $x = a \cosh t$ . On a  $dx = a \sinh t dt$ .

*Exemple.*

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{\sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2}} a \sinh t dt \\ &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{a \sinh t} a \sinh t dt \\ &= \int a^2 \cosh^2 t dt \\ &= \int a^2 \frac{a + \cosh 2t}{2} dt \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sinh 2t}{2} \end{aligned}$$

*Remarque.*  $\operatorname{arccosht} = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$ ,  $\operatorname{arcsinht} = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$ .

6.  $f(x, \sqrt{x^2 + a^2})$ .

On pose  $x = a \sinh t$ . On a  $dx = a \cosh t dt$ .

*Exemple.*

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{a^3 \sinh^3 t}{(a^2 \sinh^2 t + a^2)^{3/2}} a \cosh t dt \\
 &= \int \frac{a^3 \sinh^3 t}{a^3 \cosh^3 t} a \cosh t dt \\
 &= a \int \frac{\sinh^3 t}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \frac{\sinh t \sinh^2 t}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \frac{\sinh t (\cosh^2 t - 1)}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \left( \sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \right) dt \\
 &\text{posons } u = \cosh t, du = \sinh t dt \\
 &= a \cosh t + \frac{a}{\cosh t} \\
 &= a \sqrt{\cosh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{\cosh^2 t}} \\
 &= a \sqrt{1 + \sinh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{1 + \sinh^2 t}} \\
 &= a \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

7.  $f(\sqrt{x^2 + 2bx + c})$ , avec  $x^2 + 2bx + c$  irréductible dans  $\mathbb{R}$ .

On a  $x^2 + 2bx + c = (x + b)^2 + (c - b^2)$ .

On pose  $t = x + b$ . On a  $dt = dx$ .

*Exemple.*

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1}} dx \\
 &\text{posons } t = x + 2, dt = dx \\
 &= \int \frac{t - 2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \\
 &= \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \\
 &\text{posons } u = t^2 + 1, du = 2t dt \\
 &\text{posons } t = \sinh v, dt = \cosh v dv \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 2 \int \frac{\cosh v dv}{\sqrt{\sinh^2 v + 1}} \\
 &= \sqrt{u} - 2 \int dv \\
 &= \sqrt{u} - 2v \\
 &= \sqrt{t^2 + 1} - 2 \operatorname{arcsinh} t \\
 &= \sqrt{t^2 + 1} - 2 \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \\
 &= \sqrt{(x + 2)^2 + 1} - 2 \ln(x + 2 + \sqrt{1 + (x + 2)^2})
 \end{aligned}$$

### Section 1.3 Intégrales impropres

**Définition.**  $f : [a, \infty[$  continue par morceaux.

L'intégrale impropre (de 1<sup>ère</sup> espèce) de  $f$  est  $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x)dx$ .

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

*Exemple.*

1.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\ln y - \ln 1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y x^{-p} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{y^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) \end{aligned}$$

Si  $p > 1$ , alors  $1-p < 0$  et  $y^{1-p} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$ .

On a alors  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ .

Si  $p < 1$ , alors  $1-p > 0$  et  $y^{1-p} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$ .

On a alors que  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$  diverge.

Si  $p = 1$ , c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-sx} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_0^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-sy}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Si  $s < 0$ , alors  $-sy > 0$  et l'intégrale diverge.

Si  $s > 0$ , alors  $-sy < 0$  et l'intégrale converge vers  $\frac{1}{s}$ .

Si  $s = 0$ , alors  $\int_0^\infty e^{-sx} dx = \int_0^\infty dx$  diverge.

4.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\arctan y - \arctan 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**Définition.**  $f : ]a, b]$  continue, mais t.q.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  n'existe pas.

L'intégrale impropre (de 2<sup>ème</sup> espèce) de  $f$  est  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b f(x)dx$ .

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

*Exemple.*

1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln y) \\ &= \infty\end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_y^1 \\ &= \frac{1}{1-p} - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{1-p}}{1-p}\end{aligned}$$

Si  $p > 1$ , alors  $1 - p < 0$  et l'intégrale diverge.

Si  $p < 1$ , alors  $1 - p > 0$  et l'intégrale converge vers  $\frac{1}{1-p}$ .

Si  $p = 1$ , alors c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1^-} (\arcsin y - \arcsin 0) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

*Remarque.*

1.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x} &= \overbrace{\int_0^b \frac{dx}{x}}^{2^{\text{ème}} \text{ esp}} + \overbrace{\int_b^\infty \frac{dx}{x}}^{1^{\text{ère}} \text{ esp}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^b \frac{dx}{x} + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_b^y \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

$\int_0^\infty \frac{dx}{x}$  converge ssi les deux limites existent.

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \sin x dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^y \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \cos x \Big|_{-y}^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos y - \cos(-y)) = \lim_{y \rightarrow \infty} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx &= \int_{-\infty}^0 \sin x dx + \int_0^{\infty} \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^0 \sin x dx + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos(-y) - \cos y) + \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos 0 - \cos y)\end{aligned}$$

diverge

Ainsi, l'intégrale diverge.

**Théorème** (Critère de Cauchy).

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ converge ssi } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a) \text{ t.q. } M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

démonstration.

$$\text{Posons } F(y) = \int_a^y f(x) dx.$$

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  converge.

$$\text{Soit } L = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) dx.$$

$$\text{Alors, } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a) \text{ t.q. } y \leq M \Rightarrow |F(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient  $y_1, y_2$  avec  $M \leq y_1 \leq y_2$ .

On a

$$\begin{aligned}\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| &= |F(y_2) - F(y_1)| \\ &= |F(y_2) - L + L - F(y_1)| \\ &\leq |F(y_2) - L| + |F(y_1) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a), M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

En particulier, on a  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a), M \leq n \leq y \Rightarrow |F(y) - F(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Considérons la suite  $\{F(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Rappel.*  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une *suite de Cauchy* si  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0), m > n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$ .

La suite  $\{F(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy et elle est convergente. Soit  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$ .

Alors,  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0), n > N \Rightarrow |F(n) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Il reste à montrer que  $\{F(y)\}_{y \in \mathbb{R}}$  converge aussi vers  $L$ .

À partir d'un certain rang approprié, on a

$$\begin{aligned}|F(y) - L| &= |F(y) - F(n) + F(n) - L| \\ &\leq |F(y) - F(n)| + |F(n) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

□

*Remarque.* Si  $f \geq 0$ , alors  $F$  est croissante, donc  $\lim F(y)$  converge ou tend vers  $\infty$ .

Ainsi,  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge ssi  $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$ .

**Proposition** (Test de comparaison).

Supposons que  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $(\forall x \geq a)$ .

Alors,  $\int_a^\infty g(x)dx$  converge implique  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge.

*démonstration.*

$\int_a^\infty g(x)dx$  converge, alors  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$ ,  $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$ .

On a

$$0 \leq \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \leq \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx = \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$$

Donc,  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge. □

*Exemple.*

Déterminer si  $\int_1^\infty e^{-x^2}$  converge.

Pour  $x \geq 1$ , on a  $x^2 \geq x$ , donc  $-x^2 \leq -x$  et  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ .

Or,  $\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y e^{-x}dx = \lim_{y \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-y}) = e^{-1}$ .

Comme  $e^{-x^2} \geq 0$ , on a que  $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$  converge.

**Proposition** (Test de comparaison limite).

Supposons  $a \leq b \leq x$  et  $f(x), g(x) \geq 0$ ,  $(\forall x \geq b)$ .

Si  $C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  existe, alors  $\int_a^\infty g(x)dx$  converge implique  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge.

De plus, si  $C \neq 0$ ,  $\int_a^\infty g(x)dx$  converge ssi  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge.

**Proposition** (Convergence absolue).

a)  $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$ , alors  $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$ .

b)  $\left| \int_a^\infty f(x)dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx$ .

*démonstration.*

a) Si  $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$ , alors  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$  t.q.  $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$ .

Or,  $\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx = \left| \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$ .

Du critère de Cauchy,  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge.

b)

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^\infty f(x) dx \right| &= \left| \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) dx \right| \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left| \int_a^y f(x) dx \right| \\
 &\leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y |f(x)| dx \\
 &= \int_a^\infty |f(x)| dx
 \end{aligned}$$

□

Remarque.  $\int_a^\infty f < \infty \not\Rightarrow \int_a^\infty |f| < \infty$ .

Exemple (En effet).

$$\begin{aligned}
 \int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y \frac{\sin x}{x} dx \\
 u = \frac{1}{x} &\Rightarrow du = \frac{-dx}{x^2} \\
 dv = \sin x &\Rightarrow v = -\cos x \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{-\cos x}{x} \Big|_{\pi/2}^y - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2} dx \right) \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos \pi/2}{\pi/2} - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2} dx \right) \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \int_{\pi/2}^\infty \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx < \int_{\pi/2}^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^y \frac{dx}{x^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} \Big|_{\pi/2}^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{y} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

$$\text{Donc, } \int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx < \infty. \text{ Alors, } \int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx < \infty.$$

Montrons que.  $\int_{\pi/2}^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$  diverge.

Considérons les intervalles  $I_k = \left[ 2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ .

Sur  $I_k$ ,  $\sin x$  croît de 0 à 1.

En particulier,  $\exists x_k \in I_k$  t.q.  $\sin x_k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Ainsi, } \left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2x_k}.$$

En vertu de la propriété archimédienne,  $\exists N > 0$  t.q.  $Nk > x_k$ . Alors,  $\frac{1}{x_k} > \frac{1}{Nk}$  et  $\left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| > \frac{\sqrt{2}}{2Nk}$ .

En posant  $c = \frac{\sqrt{2}}{2N}$ , on a  $\left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| > \frac{c}{k}$ .

$$\text{Ainsi, } \int_{I_k} \frac{|\sin x_k| x_k}{d} x > \int_{I_k} \frac{c}{k} dx = \frac{c}{k} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Enfin,  $\int_{\pi/2}^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{I_k} \left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| dx > \sum_{k=1}^\infty \frac{c}{k} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{c\pi}{2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ , la série harmonique qui diverge. □

**Théorème** (Test de l'intégrale).

Soit  $f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monotone décroissante.



$$\text{Alors, } \int_1^\infty f(x)dx < \infty \text{ ssi } \sum_{k=1}^\infty f(k) < \infty.$$

démonstration.

Soit  $\Delta : 1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ , avec  $x_i = i + 1$ , pour  $i \in \mathbb{N}$ .

On a

$$\begin{aligned} S(f, \Delta, \{x_i\}) &= \sum_{i=1}^\infty f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^\infty f(i+1) \\ &= \sum_{j=2}^\infty f(j) \end{aligned}$$

$$\text{De même, } S(f, \Delta, \{x_{i-1}\}) = \sum_{i=1}^\infty f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^\infty f(i).$$

On a donc

$$\sum_{j=2}^\infty f(j) \leq \int_1^\infty f(x)dx \leq \sum_{i=1}^\infty f(i)$$

$$(\Rightarrow) \text{ Si } \int_1^\infty f(x)dx \text{ converge, alors } \sum_{j=2}^\infty f(j) \text{ converge. Donc, } \sum_{i=1}^\infty f(i) \text{ converge.}$$

$$(\Leftarrow) \text{ Si } \sum_{i=1}^\infty f(i) \text{ converge, alors } \int_1^\infty f(x)dx \text{ converge.}$$

□

Exemple.

$$m.q. \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \text{ converge } \forall p > 1.$$

D'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$$

Cauchy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{-p/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-p \frac{\ln n}{n}} = e^{-p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{-p \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} = 1$$

Test de l'intégrale :

$$\text{Posons } f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

On a  $f'(x) = -px^{-p-1} < 0$ , donc  $f$  est monotone décroissante.

De plus,  $\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$  converge ssi  $\int_1^\infty f(x)dx$  converge.

Or,  $\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$  converge si  $p > 1$ .

Donc,  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$  converge si  $p > 1$ .

□

# Chapitre 2 Suites de fonctions

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx &\stackrel{?}{=} \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) &\stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\end{aligned}$$

*Exemple.*

1. Posons  $f_n(x) = x^n$  sur  $[0, 1]$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow 1} x^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ .

Cependant,  $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$  où  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ .

2. Sur  $[0, 1]$ , posons  $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$ .

Posons  $f(x) = 0$ . On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

Ainsi,  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0$ .

Cependant,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bh}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ .

3. Sur  $\mathbb{R}$ , posons  $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 + \frac{1}{4n} & \text{si } \frac{-1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ |x| & \text{sinon} \end{cases}$ . On a  $f'_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si } \frac{-1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases}$ .

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si } \frac{-1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

Cependant,  $\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{d}{dx} |x|$ , qui n'existe pas en  $x = 0$ .

