

MAT346 - Analyse II
Donné par Mario Lambert

Julien Houle

Automne 2025

Table des matières

1	Intégration	1
1.1	Intégrales de Riemann	1
	Critère d'intégrabilité	3
	Inégalité du triangle	6
	Théorème de Darboux	9
	Loi de la moyenne	10
	Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral	11
1.2	Techniques d'intégration	14
	Fractions partielles	15
	Quelques substitutions	15
1.3	Intégrales impropres	19
2	Suites de fonctions	25
3	Séries de fonctions	29
3.1	Convergence uniforme de série	29
3.2	Séries de puissances	32

Chapitre 1 Intégration

Section 1.1 Intégrales de Riemann

Notation.

$\mathcal{B}[c, d] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}.$

$\mathcal{R}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et intégrable}\}.$

$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée et continue}\}.$

On suppose nos fonctions bornées.

Définition.

- a) Une partition de $[a, b]$ est un ensemble fini de points $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$ t.q. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.
- b) L'ensemble des partitions de $[a, b]$ est $\Omega[a, b]$.
- c) On dit Δ' est *plus fine* que Δ , noté $\Delta' \geq \Delta$, si $\Delta' \supseteq \Delta$.
- d) *Raffinement commun* de Δ_1 et Δ_2 , noté $\Delta_1 \vee \Delta_2$, est la partition de $[a, b]$ formée de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ordonnés.
- e) La *norme* de Δ , notée $\|\Delta\|$, est $\|\Delta\| = \max_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$.
- f)

$$\begin{aligned}\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\end{aligned}$$

Remarque.

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &= \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

Définition.

- a) La *somme de Riemann par excès* (ou supérieure) de f pour la partition Δ est

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- b) La *somme de Riemann par défaut* (ou inférieure) de f pour la partition Δ est

$$\underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Proposition.

a)

$$\underline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, \Delta), \forall \Delta \in \Omega[a, b]$$

b)

$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta)$$

c)

$$\overline{S}(f, \Delta) \leq \overline{M}(f, [a, b]) \cdot (b - a)$$

Proposition. Si $\Delta' \geq \Delta$, alors $\overline{S}(f, \Delta') \leq \overline{S}(f, \Delta)$.

Démonstration.

Sans perte de généralité, supposons

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$$

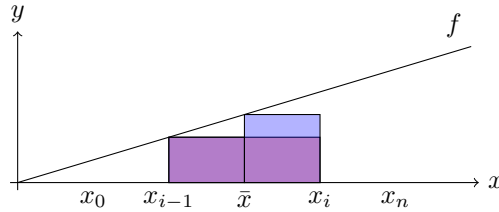
On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})] \\ &\quad - [\overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) + \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x})] \\ &= (x_i - \bar{x}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])] \\ &\quad + (\bar{x} - x_{i-1}) [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Proposition. Si $\Delta' \geq \Delta$, alors $\underline{S}(f, \Delta') \geq \underline{S}(f, \Delta)$

Démonstration.



□

Remarque. $\underline{S}(f, \Delta) = -\overline{S}(-f, \Delta)$.

Corollaire. $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Omega[a, b], \underline{S}(f, \Delta_1) \leq \overline{S}(f, \Delta_2)$

Démonstration.

On a $\Delta_1 \vee \Delta_2 \geq \Delta_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta_1) &\leq \underline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_2) \end{aligned}$$

□

Définition.

- a) La somme par défaut de f est $\underline{S}(f) = \sup_{\Delta \in \Omega[a,b]} \underline{S}(f, \Delta)$.
- b) La somme par excès de f est $\overline{S}(f) = \inf_{\Delta \in \Omega[a,b]} \overline{S}(f, \Delta)$.

Théorème. $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ *Démonstration.*Soit $\Delta_1 \in \Omega[a, b]$ $\underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$ est le plus petit majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a, b]$.Du corollaire précédant, on a que $\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.Donc, $\overline{S}(f, \Delta_1)$ est un majorant des $\underline{S}(f, \Delta)$.Ainsi, $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f, \Delta_1)$.De même, $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$ est le plus grand minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$ avec $\Delta \in \Omega[a, b]$.Comme $\underline{S}(f)$ est un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$. □**Définition.**Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. On dit que f est *intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$* si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et on note $f \in \mathcal{R}[a, b]$.La valeur commune de $\underline{S}(f)$ et $\overline{S}(f)$ est notée $\int_a^b f(x)dx$.**Critère d'intégrabilité****Théorème** (Critère d'intégrabilité).Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$ si, et seulement si, $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \Omega[a, b])$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.*Démonstration.* (\Rightarrow) Supposons $f \in \mathcal{R}[a, b]$.Soit $\varepsilon > 0$.On a $\int_a^b f = \overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$.Comme $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ ne peut minorer $\overline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.De même, $\int_a^b f = \underline{S}(f) = \sup \underline{S}(f, \Delta)$.Comme $\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ ne peut majorer $\underline{S}(f, \Delta)$, alors $\exists \Delta_2 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\underline{S}(f, \Delta_2) > \underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$.Posons $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_2) \\
 &< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
 &= (\overline{S}(f) - \underline{S}(f)) + \varepsilon \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $\exists \Delta$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

Mais alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &\geq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Du théorème du sandwich, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$, car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Corollaire. *Si il existe $\Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) = \underline{S}(f, \Delta)$, alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Théorème. *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par la proposition d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n\varepsilon > b - a$.

Rappel.

f est uniformément continue sur $[a, b]$ si $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Rappel.

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Comme $f \in \mathcal{C}[a, b]$, elle est uniformément continue sur $[a, b]$.

Alors, $\exists \delta > 0$ t.q. pour $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$.

Soit donc $\Delta \in \Omega[a, b] : a = x_0 < x_1, \dots < x_n = b$ avec $\|\Delta\| < \delta$.

Alors, $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{1}{n}$.

Remarque. $\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])$ peut être noté $\text{osc}_f([x_{i-1}, x_i])$.

On obtient

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b - a}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Théorème. *Toute $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

Démonstration.

(1) Si f est constante, alors $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) = 0 < \varepsilon$.

(2) Si f est croissante,

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n\varepsilon > (b - a)(f(b) - f(a))$.

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ avec $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \left(\frac{b-a}{n} \right) \\
 &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

(3) Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Donc, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Théorème.

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $f_i \in \mathcal{R}[a, b]$, $\exists \Delta_i \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f_i, \Delta_i) - \underline{S}(f_i, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

Alors, $\overline{S}(f_i, \Delta) - \underline{S}(f_i, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
 \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\geq \underline{S}(f_1, \Delta) + \underline{S}(f_2, \Delta)
 \end{aligned}$$

Car $\sup(f_1 + f_2) \leq \sup f_1 + \sup f_2$ et $\inf(f_1 + f_2) \geq \inf f_1 + \inf f_2$.

Alors,

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1 + f_2, \Delta) &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) - \underline{S}(f_1, \Delta) - \underline{S}(f_2, \Delta) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

Donc, $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$.

De plus,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f_1 + f_2 &\leq \overline{S}(f_1 + f_2, \Delta) \\
 &\leq \overline{S}(f_1, \Delta) + \overline{S}(f_2, \Delta) \\
 &< \underline{S}(f_1, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f_2, \Delta) + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq \int_a^b f_1 + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f_2 + \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b f_1 + f_2 < \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.

De même, on peut montrer que $\int_a^b f_1 + f_2 \geq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.

Donc, $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$.

□

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\int \lambda f = \lambda \int f$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\exists \Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

On a

$$\overline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \overline{S}(f, \Delta)$$

$$\underline{S}(\lambda f, \Delta) = \lambda \underline{S}(f, \Delta)$$

Car $\sup(\lambda f) = \lambda \sup f$ et $\inf(\lambda f) = \lambda \inf f$.

Alors,

$$\begin{aligned} \overline{S}(\lambda f, \Delta) - \underline{S}(\lambda f, \Delta) &= \lambda \overline{S}(f, \Delta) - \lambda \underline{S}(f, \Delta) \\ &= \lambda (\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)) \\ &< \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$.

De plus,

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f &\leq \overline{S}(\lambda f, \Delta) \\ &= \lambda \overline{S}(f, \Delta) \\ &< \lambda \left(\underline{S}(f, \Delta) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \\ &= \lambda \underline{S}(f, \Delta) + \varepsilon \\ &\leq \lambda \int_a^b f + \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b \lambda f < \lambda \int_a^b f + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Donc, $\int_a^b \lambda f \leq \lambda \int_a^b f$.

De même, on peut montrer que $\int_a^b \lambda f \geq \lambda \int_a^b f$.

Donc, $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. □

Corollaire.

Si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

Démonstration.

$$g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - f \geq 0 \Rightarrow \int g - \int f \geq 0. \quad \square$$

Inégalité du triangle

Théorème (Inégalité du triangle).

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\left| \int f \right| \leq \int |f|$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

Alors, $\exists \Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(|f|, \Delta) - \underline{S}(|f|, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n [\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i])] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.

Enfin,

$$\begin{aligned} -|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \\ &\Rightarrow \int f \leq \int |f| \end{aligned}$$

□

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $a \leq c < d \leq b$, alors $f|_{[c, d]} \in \mathcal{R}[a, b]$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

Comme $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\exists \Delta_1 \in \Omega[a, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$.

Soit Δ_2 le raffinement de Δ_1 en ajoutant les points c et d .

Alors, $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) \leq \overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \varepsilon$

Donc, $f \in \mathcal{R}[c, d]$.

□

Théorème.

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $a < c < b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$

$f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, c] \Rightarrow \exists \Delta_1 \in \Omega[a, c]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

De même, $\exists \Delta_2 \in \Omega[c, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$. Alors, $\Delta \in \Omega[a, b]$ et

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\leq \overline{S}(f, \Delta) \\ &= \overline{S}(f, \Delta_1) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \underline{S}(f, \Delta_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f, \Delta_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \underline{S}(f, \Delta_1) + \underline{S}(f, \Delta_2) + \varepsilon \\ &\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f$.

De même, $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$.

□

Théorème. Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si f possède n discontinuités dans $[a, b]$, alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Démonstration.

Pour $n = 0$, $f \in \mathcal{C}[a, b]$, donc $f \in \mathcal{R}[a, b]$ est un résultat connu.

Supposons l'énoncé vrai pour n .

Supposons que $f \in \mathcal{B}[a, b]$ admet $n + 1$ discontinuités.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Il y a deux cas à considérer

1. a ou b est une discontinuité

Sans perte de généralité, supposons que a est la discontinuité.

Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. a est l'unique discontinuité de $[a, a + \eta]$ et $\eta < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Alors, $[a + \eta, b]$ contient n discontinuités.

De l'hypothèse de récurrence, $f \in \mathcal{R}[a + \eta, b]$.

Il existe donc $\Delta \in \Omega[a + \eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta \cup \{a\}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= (\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)) + (\overline{M}(f, [a, a + \eta]) - \underline{M}(f, [a, a + \eta])) \eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

2. ni a ni b ne sont des discontinuités

Soit $c \in]a, b[$ qui est une discontinuité de f .

Soit $\eta \in \mathbb{R}^+$ t.q. c est l'unique discontinuité de $[c - \eta, c + \eta] \subset [a, b]$ et $\eta < \frac{\varepsilon}{8M}$.

Alors, $[a, c - \eta]$ et $[c + \eta, b]$ contiennent au plus n discontinuités, donc par l'hypothèse de récurrence :

$\exists \Delta_1 \in \Omega[a, c - \eta]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1) < \frac{\varepsilon}{4}$ et $\exists \Delta_2 \in \Omega[c + \eta, b]$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Posons $\Delta_\varepsilon = \Delta_1 \cup \Delta_2$.

On a donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta_\varepsilon) - \underline{S}(f, \Delta_\varepsilon) &= [\overline{S}(f, \Delta_1) - \underline{S}(f, \Delta_1)] + [\overline{S}(f, \Delta_2) - \underline{S}(f, \Delta_2)] \\ &\quad + [\overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) - \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta])] (2\eta) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4M\eta \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

Théorème. Soient $f : [a, b] \rightarrow [c, d] \in \mathcal{R}[a, b]$ et $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}[c, d]$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Remarque. L'hypothèse que $g \in \mathcal{C}[c, d]$ est nécessaire.

Exemple.

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ et } \text{pgcd}(m, n) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Fonction de Dirichlet modifiée.

$$\begin{aligned}
g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
f, g &\in \mathcal{R}[a, b]. \\
g \circ f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
g \circ f &\notin \mathcal{R}[a, b]. \\
&\text{Fonction de Dirichlet.}
\end{aligned}$$

Lemme. Si $f \in \mathcal{B}[a, b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant un unique point, alors $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$.

Démonstration.

Soient $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ et
 $\Delta' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \bar{x} < x_i < \dots < x_n = b$.

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &= \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}]) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i]) \cdot (x_i - \bar{x}) \\
&= (\bar{x} - x_{i-1}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [x_{i-1}, \bar{x}])) + (x_i - \bar{x}) (\overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) - \overline{M}(f, [\bar{x}, x_i])) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|, [x_{i-1}, x_i]) ((\bar{x} - x_{i-1}) - (x_i - \bar{x})) \\
&\leq 2\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\|
\end{aligned}$$

□

Corollaire. Si $f \in \mathcal{B}[a, b]$, $\Delta, \Delta' \in \Omega[a, b]$ et Δ' s'obtient de Δ en ajoutant p points, au plus un point par sous-intervalle de Δ , alors $\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') \leq 2p\overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \|\Delta\|$.

Théorème de Darboux

Théorème (Darboux, 1875).

Si $f \in \mathcal{B}[a, b]$, alors

$$\overline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) \qquad \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta)$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\overline{S}(f) = \inf \overline{S}(f, \Delta)$, on a que $\overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant des $\overline{S}(f, \Delta)$.

Ainsi, $\exists \Delta_0 : a = x_0 < \dots < x_n = b$ t.q. $\overline{S}(f, \Delta_0) < \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\delta > 0$ t.q. $\delta < \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i - x_{i-1}|$ et $\delta < \frac{\varepsilon}{4(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b])}$.

Soit $\Delta \in \Omega[a, b]$ t.q. $\|\Delta\| < \delta$.

Alors, $\|\Delta\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Considérons $\Delta' = \Delta \vee \Delta_0$.

Comme $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\| < \|\Delta_0\|$, aucun sous-intervalle ouvert de Δ ne contient plus d'un point de Δ_0 .

Comme Δ' s'obtient de Δ en ajoutant au plus $n-1$ points $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) - \overline{S}(f, \Delta') &\leq 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \|\Delta\| \\
&< 2(n-1)\overline{M}(|f|, [a, b]) \delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \Delta) &\leq \overline{S}(f, \Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f, \Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \overline{S}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \overline{S}(f) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a donc

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} -\overline{S}(-f, \Delta) \\ &= - \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(-f, \Delta) \\ &= -\overline{S}(-f) \\ &= \underline{S}(f) \end{aligned}$$

□

Définition. Soit $f \in \mathcal{B}[a, b]$.

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \in \Omega[a, b]$.

Soient $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Le nombre réel

$$S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

est appelé *somme de Riemann* de la fonction f correspondant à la partition Δ et aux points $\{\bar{x}_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$.

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Alors, $(\forall \varepsilon > 0)$, $(\exists \delta = \delta(\varepsilon))$ t.q. pour toute partition Δ de $[a, b]$ avec $\|\Delta\| < \delta$ et pour tout choix de points $\{\bar{x}_i\}$, on a

$$\left| \int_a^b f - S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire.

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$$

Démonstration.

On a $\underline{S}(f, \Delta) \leq S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \overline{S}(f, \Delta)$.

Donc,

$$\underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f)$$

Comme $f \in \mathcal{R}[a, b]$, on a $\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \int_a^b f$.

Par le théorème du sandwich, $S(f, \Delta, \{\bar{x}_i\}) = \int_a^b f$.

□

Loi de la moyenne

Théorème (Loi de la moyenne).

Soit $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Alors, $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$ t.q. $\int_a^b f = (b - a) \cdot \mu$.

Démonstration.

Soit ϕ la fonction donnée par $\phi(x) = (b - a)x$.

On a $\underline{M}(f, [a, b]) \leq f \leq \overline{M}(f, [a, b])$.

Donc

$$\phi(\underline{M}(f, [a, b])) = (b - a)\underline{M}(f, [a, b]) = \int_a^b \underline{M}(f, [a, b]) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \overline{M}(f, [a, b]) = (b - a)\overline{M}(f, [a, b]) = \phi(\overline{M}(f, [a, b]))$$

Rappel.

Théorème (Théorème de valeur intermédiaire).

f continue sur $[a, b]$, $f(a) < c < f(b)$ implique $\exists x_0 \in [a, b]$ t.q. $f(x_0) = c$.

Comme ϕ est continue sur $[\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$, du TVI, $\exists \mu \in [\underline{M}(f, [a, b]), \overline{M}(f, [a, b])]$ t.q. $\phi(\mu) = c$ pour tout $c \in [\phi(\underline{M}(f, [a, b])), \phi(\overline{M}(f, [a, b]))]$.

En particulier, si $c = \int_a^b f$, $\exists \mu$ t.q. $\phi(\mu) = \int_a^b c$, c'est-à-dire t.q. $(b-a)\mu = \int_a^b f$. □

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Alors,

- a) $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \overline{M}(|f|, [a, b]) (b-a) \cdot |x_1 - x_2|$ pour tous $x_1, x_2 \in [a, b]$;
- b) F est uniformément continue sur $[a, b]$;
- c) Si f est continue, alors F est différentiable et $F' = f$.

Démonstration.

- a) Supposons que $x_1 > x_2$

On a

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f - \int_a^{x_2} f \right| \\ &= \left| \int_{x_2}^{x_1} f \right| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} |f| \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} \overline{M}(|f|, [a, b]) \\ &= \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

- b) Soit $\varepsilon > 0$.

$$\text{Prenons } \delta = \frac{\varepsilon}{\overline{M}(|f|, [a, b])}.$$

Soient $x, y \in [a, b]$ avec $|x - y| < \delta$.

Alors,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot |x - y| \\ &< \overline{M}(|f|, [a, b]) \cdot \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

- c) Soit $x_0 \in [a, b]$.

On a

$$\begin{aligned}
 F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \\
 &\stackrel{\text{Loi de la moyenne}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f(x_0 + \theta(x - x_0))}{x - x_0} \quad \theta \in [0, 1] \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + \theta(x - x_0)) \\
 &= f(x_0)
 \end{aligned}$$

□

Notation. F est une primitive de f .

Corollaire. Si f est continue, alors f admet au moins une primitive.

Corollaire. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f , alors $F_1 - F_2 = C$ pour une constante C .

Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral).

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et F est une primitive de f , alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Démonstration.

Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \in \Omega[a, b]$.

Comme F est continue et différentiable sur $[a, b]$ et a fortiori sur $[x_{i-1}, x_i]$, le théorème de la moyenne donne $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ t.q. $\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$.

On a

$$\begin{aligned}
 F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(t_i)
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &\leq f(t_i) \leq \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \underline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \overline{M}(f, [x_{i-1}, x_i]) \\
 \Rightarrow \underline{S}(f, \Delta) &\leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}(f, \Delta) \\
 \Rightarrow \int_a^b f = \underline{S}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, \Delta) &\leq F(b) - F(a) \leq \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \overline{S}(f, \Delta) = \overline{S}(f) = \int_a^b f
 \end{aligned}$$

Donc, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

□

Proposition. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors,

a) $f \in \mathcal{R}[a, b]$;

b) $\int_a^b f = 0$.

Démonstration.

- a) déjà fait, car f est continue sauf en un nombre fini de points.
 b) Soit p le nombre de points où $f \neq 0$.

Pour $p = 0$, c'est trivial.

Supposons que la propriété est vraie pour p .

Supposons que $f \neq 0$ en $p + 1$ points.

Il y a deux cas à considérer

- 1) $\exists c \in]a, b[$ avec $f(c) \neq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $\eta > 0$ t.q.

- i) $a < c - \eta < c + \eta < b$;
 ii) c est le seul point de $[c - \eta, c + \eta]$ où $f \neq 0$;
 iii) $\eta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4\overline{M}(f, [a, b])}, \frac{-\varepsilon}{4\underline{M}(f, [a, b])} \right\}$.

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\int_a^{c-\eta} f = 0 = \int_{c+\eta}^b f$$

Du critère d'intégrabilité, $\exists \Delta_1 : a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = c - \eta$, $\exists \Delta_2 : c + \eta = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$ t.q.
 $\overline{S}(f, \Delta_i) \leq \overline{S}(f, \Delta_i) - \underline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.

Prenons $\Delta = \Delta_1 \vee \Delta_2$.

On a

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Delta) &= \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \overline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &\leq \overline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \overline{M}(f, [a, b]) + \overline{S}(f, \Delta_2) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

De même, $\underline{S}(f, \Delta_i) \leq \overline{S}(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, pour $i \in \{1, 2\}$.

et

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Delta) &= \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \underline{M}(f, [c - \eta, c + \eta]) + \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &\geq \underline{S}(f, \Delta_1) + 2\eta \underline{M}(f, [a, b]) + \underline{S}(f, \Delta_2) \\ &> -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \\ &= -\varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $-\varepsilon < \underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta) < \varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\int_a^b f = 0$.

- 2) $f(c) \neq 0$ en a ou en b .

On procède de la même manière avec un sous-intervalle de largeur η autour de a et de b t.q. a et b sont les seules discontinuités dans ces intervalles.

□

Corollaire. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f = g$ sauf peut-être en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Section 1.2 Techniques d'intégration

Théorème (Intégration par parties).

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables t.q. $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b gf'$$

Démonstration.

Posons $h = fg$.

Alors,

$$\begin{aligned} h' &= f'g + fg' \\ \int_a^b h' &= \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \\ \int_a^b fg' &= \int_a^b h - \int_a^b f'g \\ &= h|_a^b - \int_a^b f'g \\ &= fg|_a^b - \int_a^b f'g \end{aligned}$$

□

Théorème (Changement de variable/Substitution).

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 , c'est-à-dire ϕ est dérivable et ϕ' est continue.

Si $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Démonstration.

Posons $h(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Du théorème fondamental, h est uniformément continue, différentiable et $h' = f$.

Soit $g(t) = (h \circ \phi)(t) = h(\phi(t)) = \int_a^{\phi(t)} f(x)dx$.

On a h, ϕ différentiables, donc g l'est aussi et

$$\begin{aligned} g'(t) &= h'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ &= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta g'(t)dt \\ &= g(\beta) - g(\alpha) \\ &= h(\phi(\beta)) - h(\phi(\alpha)) \\ &= h(b) - h(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

Fractions partielles

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Avec $b^2 - 4ac < 0$.

On ramène sur dénominateurs communs.

On ramène en une fraction.

On résout le système d'équations avec $P(x)$.

On intègre chaque fraction.

Quelques substitutions

1. $f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right)$, ou f est une fonction rationnelle $f = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

On pose $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ où n est un multiple commun de n_1, n_2, \dots .

Exemple.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \int x^2(x-1)^{-1/2}.$$

Posons $x-1 = t^2$.

Alors, $dx = 2tdt$.

$$\text{On obtient } \int x^2(x-1)^{-1/2} = \int (t^2-1)^2(t^2)^{-1/2}2tdt = 2 \int (t^2+1)^2 dt.$$

2. $\int x^\alpha(a+bx^\beta)^\gamma dx$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

On pose $t = x^\beta$.

Alors, $dt = \beta x^{\beta-1} dx$.

$$\text{Donc, } dx = \frac{dt}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{dt}{\beta t^{(\beta-1)/\beta}}.$$

Exemple.

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} dx.$$

Posons $t = x^2$.

$$\text{On a } dt = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} dx &= \int t^{-2}(1+t)^{-1/2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-5/2}(1+t)^{-1/2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2} dt \end{aligned}$$

$$\text{Posons } u^2 = \frac{1+t}{t} = 1 + \frac{1}{t}. \text{ On a } u^2 - 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u^2 - 1}.$$

$$\text{Alors, } dt = (-1)(u^2 - 1)^{-2}(2u)du.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2} dt &= -\frac{1}{2} \int (u^2 - 1)^3 u^{-1} (u^2 - 1)^{-2} 2u du \\ &= - \int (u^2 - 1) du \end{aligned}$$

3. $f(\sin x, \cos x)$.

On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. On a $x = 2 \arctan t$.

Alors, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

Exemple.

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

On a

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} - \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} (\sin^2 \frac{x}{2})}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} (\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2})} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int \frac{2dt}{1+t^2} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{2dt}{3+t^2} \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

4. $f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$.

On pose $x = a \sin t$. On a $dx = a \cos t dt$.

Exemple.

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\ &= \int a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \int a^4 \frac{1}{4} \sin^2 2t dt \\ &= \int \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\ &= \frac{a^4}{8} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right] \end{aligned}$$

5.

Rappel.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x & (\cosh x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cosh^2 x + \sinh^2 x &= -\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + 2^{-2x}}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.Alors, $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \Rightarrow \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$.

Formellement,

$$\sinh x = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

avec $z \in \mathbb{C}$. $f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$.On pose $x = a \cosh t$. On a $dx = a \sinh t dt$.*Exemple.*

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{\sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2}} a \sinh t dt \\ &= \int \frac{a^2 \cosh^2 t}{a \sinh t} a \sinh t dt \\ &= \int a^2 \cosh^2 t dt \\ &= \int a^2 \frac{a + \cosh 2t}{2} dt \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sinh 2t}{2} \end{aligned}$$

Remarque. $\operatorname{arccosht} = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$, $\operatorname{arcsinht} = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$.

6. $f(x, \sqrt{x^2 + a^2})$.

On pose $x = a \sinh t$. On a $dx = a \cosh t dt$.

Exemple.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{a^3 \sinh^3 t}{(a^2 \sinh^2 t + a^2)^{3/2}} a \cosh t dt \\
 &= \int \frac{a^3 \sinh^3 t}{a^3 \cosh^3 t} a \cosh t dt \\
 &= a \int \frac{\sinh^3 t}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \frac{\sinh t \sinh^2 t}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \frac{\sinh t (\cosh^2 t - 1)}{\cosh^2 t} dt \\
 &= a \int \left(\sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \right) dt \\
 &\text{posons } u = \cosh t, du = \sinh t dt \\
 &= a \cosh t + \frac{a}{\cosh t} \\
 &= a \sqrt{\cosh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{\cosh^2 t}} \\
 &= a \sqrt{1 + \sinh^2 t} + \frac{a}{\sqrt{1 + \sinh^2 t}} \\
 &= a \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

7. $f(x, \sqrt{x^2 + 2bx + c})$, avec $x^2 + 2bx + c$ irréductible dans \mathbb{R} .

On a $x^2 + 2bx + c = (x + b)^2 + (c - b^2)$.

On pose $t = x + b$. On a $dt = dx$.

Exemple.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1}} dx \\
 &\text{posons } t = x + 2, dt = dx \\
 &= \int \frac{t - 2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \\
 &= \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \\
 &\text{posons } u = t^2 + 1, du = 2t dt \\
 &\text{posons } t = \sinh v, dt = \cosh v dv \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 2 \int \frac{\cosh v dv}{\sqrt{\sinh^2 v + 1}} \\
 &= \sqrt{u} - 2 \int dv \\
 &= \sqrt{u} - 2v \\
 &= \sqrt{t^2 + 1} - 2 \operatorname{arcsinh} t \\
 &= \sqrt{t^2 + 1} - 2 \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \\
 &= \sqrt{(x + 2)^2 + 1} - 2 \ln(x + 2 + \sqrt{1 + (x + 2)^2})
 \end{aligned}$$

Section 1.3 Intégrales impropres

Définition. $f : [a, \infty[$ continue par morceaux.

L'intégrale impropre (de 1^{ère} espèce) de f est $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x)dx$.

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\ln y - \ln 1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y x^{-p} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) \end{aligned}$$

Si $p > 1$, alors $1-p < 0$ et $y^{1-p} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$.

On a alors $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

Si $p < 1$, alors $1-p > 0$ et $y^{1-p} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$.

On a alors que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ diverge.

Si $p = 1$, c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-sx} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-sx}}{-s} \right|_0^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-sy}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Si $s < 0$, alors $-sy > 0$ et l'intégrale diverge.

Si $s > 0$, alors $-sy < 0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{s}$.

Si $s = 0$, alors $\int_0^\infty e^{-sx} dx = \int_0^\infty dx$ diverge.

4.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\arctan y - \arctan 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Définition. $f :]a, b]$ continue, mais t.q. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ n'existe pas.

L'intégrale impropre (de 2^{ème} espèce) de f est $\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b f(x)dx$.

Si la limite existe, on dit que l'intégrale converge.

Exemple.

1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln y) \\ &= \infty \end{aligned}$$

diverge

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_y^1 \\ &= \frac{1}{1-p} - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

Si $p > 1$, alors $1-p < 0$ et l'intégrale diverge.

Si $p < 1$, alors $1-p > 0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{1-p}$.

Si $p = 1$, alors c'est le cas 1, qui diverge.

3.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1^-} (\arcsin y - \arcsin 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Remarque.

1.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x} &= \overbrace{\int_0^b \frac{dx}{x}}^{2^{\text{ème}} \text{ esp}} + \overbrace{\int_b^\infty \frac{dx}{x}}^{1^{\text{ère}} \text{ esp}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^b \frac{dx}{x} + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_b^y \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

$\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ converge si, et seulement si, les deux limites existent.

2.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \sin x dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^y \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \cos x \Big|_{-y}^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos y - \cos(-y)) = \lim_{y \rightarrow \infty} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx &= \int_{-\infty}^0 \sin x dx + \int_0^{\infty} \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^0 \sin x dx + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \sin x dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos 0 - \cos(-y)) + \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos 0 - \cos y)\end{aligned}$$

diverge

Ainsi, l'intégrale diverge.

Théorème (Critère de Cauchy).

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ converge si, et seulement si, } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a) \text{ t.q. } M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Démonstration.

$$\text{Posons } F(y) = \int_a^y f(x) dx.$$

(\Rightarrow) Supposons que $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge.

$$\text{Soit } L = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) dx.$$

$$\text{Alors, } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a) \text{ t.q. } y \leq M \Rightarrow |F(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient y_1, y_2 avec $M \leq y_1 \leq y_2$.

On a

$$\begin{aligned}\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| &= |F(y_2) - F(y_1)| \\ &= |F(y_2) - L + L - F(y_1)| \\ &\leq |F(y_2) - L| + |F(y_1) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

$$(\Leftarrow) \text{ Supposons que } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a), M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{En particulier, on a } (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a), M \leq n \leq y \Rightarrow |F(y) - F(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons la suite $\{F(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Rappel. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0), m > n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$.

La suite $\{F(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et elle est convergente. Soit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$.

$$\text{Alors, } (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0), n > N \Rightarrow |F(n) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il reste à montrer que $\{F(y)\}_{y \in \mathbb{R}}$ converge aussi vers L .

À partir d'un certain rang approprié, on a

$$\begin{aligned}|F(y) - L| &= |F(y) - F(n) + F(n) - L| \\ &\leq |F(y) - F(n)| + |F(n) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

□

Remarque. Si $f \geq 0$, alors F est croissante, donc $\lim F(y)$ converge ou tend vers ∞ .

Ainsi, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si, et seulement si, $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$.

Proposition (Test de comparaison).

Supposons que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $(\forall x \geq a)$.

Alors, $\int_a^\infty g(x)dx$ converge implique $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

Démonstration.

$\int_a^\infty g(x)dx$ converge, alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$, $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$.

On a

$$0 \leq \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \leq \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx = \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$$

Donc, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. □

Exemple.

Déterminer si $\int_1^\infty e^{-x^2}$ converge.

Pour $x \geq 1$, on a $x^2 \geq x$, donc $-x^2 \leq -x$ et $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

Or, $\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y e^{-x}dx = \lim_{y \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-y}) = e^{-1}$.

Comme $e^y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$, on a que $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ converge.

Proposition (Test de comparaison limite).

Supposons $a \leq b \leq x$ et $f(x), g(x) \geq 0$, $(\forall x \geq b)$.

Si $C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe, alors $\int_a^\infty g(x)dx$ converge implique $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

De plus, si $C \neq 0$, $\int_a^\infty g(x)dx$ converge si, et seulement si, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

Proposition (Convergence absolue).

a) $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$, alors $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$.

b) $\left| \int_a^\infty f(x)dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx$.

Démonstration.

a) Si $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$, alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \geq a)$ t.q. $M \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$.

Or, $\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx = \left| \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$.

Du critère de Cauchy, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

b)

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| &= \left| \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) dx \right| \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \left| \int_a^y f(x) dx \right| \\
&\leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y |f(x)| dx \\
&= \int_a^\infty |f(x)| dx
\end{aligned}$$

□

Remarque. $\int_a^\infty f < \infty \not\Rightarrow \int_a^\infty |f| < \infty$.

Exemple (En effet).

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y \frac{\sin x}{x} dx \\
u &= \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-dx}{x^2} \\
dv &= \sin x \Rightarrow v = -\cos x \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{-\cos x}{x} \Big|_{\pi/2}^y - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2} dx \right) \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \pi/2}{\pi/2} - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2} dx \right) \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} - \int_{\pi/2}^y \frac{\cos x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \int_{\pi/2}^\infty \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx < \int_{\pi/2}^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^y \frac{dx}{x^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} \Big|_{\pi/2}^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{y} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

$$\text{Donc, } \int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx < \infty. \text{ Alors, } \int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx < \infty.$$

Montrons que. $\int_{\pi/2}^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ diverge.

Considérons les intervalles $I_k = \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Sur I_k , $\sin x$ croît de 0 à 1.

En particulier, $\exists x_k \in I_k$ t.q. $\sin x_k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Ainsi, } \left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2x_k}.$$

$$\text{Or, } x_k \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 8k + \frac{\pi}{2} \leq 8k + 2k = 10k.$$

$$\text{Alors, } \frac{1}{x_k} \geq \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{k} = c \cdot \frac{1}{k}.$$

$$\text{Ainsi, } \int_{I_k} \left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| dx > \int_{I_k} \frac{c}{k} dx = \frac{c}{k} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Enfin, } \int_{\pi/2}^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{I_k} \left| \frac{\sin x_k}{x_k} \right| dx > \sum_{k=1}^\infty \frac{c}{k} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{c\pi}{2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}, \text{ la série harmonique qui diverge.}$$

□

Théorème (Test de l'intégrale).

Soit $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monotone décroissante.

Alors, $\int_1^\infty f(x) dx < \infty$ si, et seulement si, $\sum_{k=1}^\infty f(k) < \infty$.

Démonstration.

Soit $\Delta : 1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$, avec $x_i = i + 1$, pour $i \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned} S(f, \Delta, \{x_i\}) &= \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f(i+1) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} f(j) \end{aligned}$$

De même, $S(f, \Delta, \{x_{i-1}\}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$.

On a donc

$$\sum_{j=2}^{\infty} f(j) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

(\Rightarrow) Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge, alors $\sum_{j=2}^{\infty} f(j)$ converge. Donc, $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ converge.

(\Leftarrow) Si $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ converge, alors $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

□

Exemple.

m.q. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\forall p > 1$.

D'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1$$

Cauchy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{-p/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-p \frac{\ln n}{n}} = e^{-p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{-p \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} = 1$$

Test de l'intégrale :

Posons $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

On a $f'(x) = -px^{-p-1} < 0$, donc f est monotone décroissante.

De plus, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si, et seulement si, $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

Or, $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$.

Donc, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$.

□

Chapitre 2 Suites de fonctions

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx &\stackrel{?}{=} \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) &\stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\end{aligned}$$

Exemple.

1. Posons $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1} x^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$.

Cependant, $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ où $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, avec $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

2. Sur $[0, 1]$, posons $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$.

Posons $f(x) = 0$. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

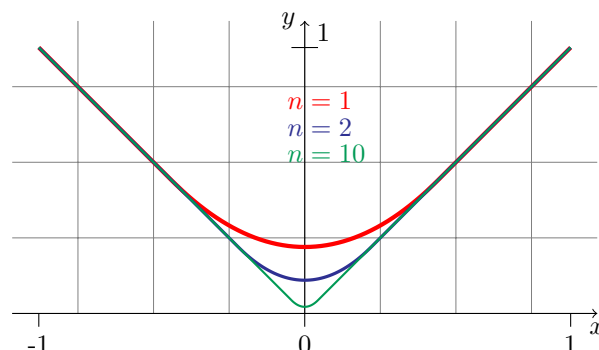
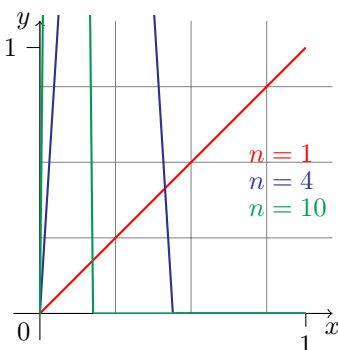
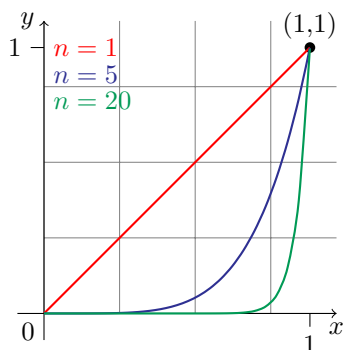
Ainsi, $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0$.

Cependant, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bh}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

3. Sur \mathbb{R} , posons $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 + \frac{1}{4n} & \text{si } \frac{-1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ |x| & \text{sinon} \end{cases}$. On a $f'_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si } \frac{-1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases}$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq \frac{-1}{2n} \\ 2nx & \text{si } \frac{-1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Cependant, $\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{d}{dx} |x|$, qui n'existe pas en $x = 0$.



Rappel.

$(f_n) \rightarrow f$ (convergence ponctuelle)

$(\forall x \in \mathcal{D}), (f_n(x)) \rightarrow f(x)$ ou encore, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, c'est-à-dire $(\forall \varepsilon > 0), (\exists N > 0)$ t.q. $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Définition.

1. La *norme supremum* de f , notée $\|f\|$, est $\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)|$, où $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. La *distance* entre $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est $\text{dist}(f, g) = \|f - g\|$.
3. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément* vers f si $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) = 0$.

Exemple.

1. Sur $[0, \frac{1}{2}]$, prenons $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - 0\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1/2]} |f_n(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Sur $[0, 1]$, prenons $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - f(x)| \quad \text{car } f_n(1) - f(1) = 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1[} |x^n| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, $f_n \not\rightarrow f$ sur $[0, 1]$.

Notation. On note la convergence uniforme et la convergence ponctuelle d'une suite de fonction vers une fonction $f_n \rightrightarrows f$ et $f_n \rightarrow f$ respectivement.

Proposition. $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \rightarrow f$.

Démonstration.

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$$\text{Alors, } \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \forall x \in \mathcal{D}.$$

Ainsi, $f_n \rightarrow f$. □

Proposition. Si $f_n \rightarrow f$ et $f_n \rightrightarrows g$, alors $f = g$.

Démonstration.

$$f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

$$f_n \rightrightarrows g \Rightarrow f_n \rightarrow g \Rightarrow f_n(x) \rightarrow g(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

Ainsi, $f(x) = g(x), \forall x \in \mathcal{D}$. □

Théorème.

Supposons que (f_n) sont continues sur \mathcal{D} .

Si $f_n \rightrightarrows f$, alors f est continue sur \mathcal{D} .

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $x_0 \in \mathcal{D}$.

On veut montrer que f est continue en x_0 , c'est-à-dire $\exists \delta > 0$ t.q. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Comme $(f_n) \rightrightarrows f$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) = 0$.

Ainsi, $\exists M > 0$ t.q. $n \geq M \Rightarrow \text{dist}(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$.

En particulier, $\text{dist}(f_M, f) < \frac{\varepsilon}{3}$, c'est-à-dire $\sup_{x \in \mathcal{D}} |f_M(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et donc, $|f_M(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

De plus, f_n continue sur $\mathcal{D} \Rightarrow f_M$ continue en x_0 .

Ainsi, $(\exists \delta > 0)$ t.q. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_M(x) - f_M(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Supposons donc que $|x - x_0| < \delta$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_M(x) + f_M(x) - f_M(x_0) + f_M(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(x_0)| + |f_M(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

Corollaire.

Si f_n continues et $f_n \rightrightarrows f$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Comme f_n est continue en x_0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Comme f est continue en x_0 , $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Théorème.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ continues sur $[a, b]$.

Si $f_n \rightrightarrows f$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_f dx$$

Démonstration.

f_n continues et $f_n \rightrightarrows f$, alors $f \in \mathcal{C}[a, b]$, donc $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b (f_n - f)(x) dx \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= (b - a) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{car } f_n \rightrightarrows f$$

□

Théorème.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des fonctions de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable à dérivée continue).

Supposons

- i) $f'_n \rightrightarrows g$;
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ existe pour au moins un a .

Alors,

a) f_n converge ponctuellement vers f ;

b) $f \in C^1$;

c) $f' = g$, c'est-à-dire $\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$.

Démonstration.

Supposons $L = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ pour un certain a .

On a $f_n \in C^1$, alors f'_n est continue.

De plus, $f'_n \rightrightarrows g$, donc g est continue.

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt$, pour tout x .

Du théorème fondamental du calcul, $\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a)$.

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^x f'_n(t) dt + f_n(a) \right] \\ &= L + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt \\ &= L + \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt \\ &= L + \int_a^x g(t) dt \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(L + \int_a^x g(t) dt \right) = \frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x)$.

D'où b) et c), $f \in C^1$ avec $f' = g$.

□

Chapitre 3 Séries de fonctions

Section 3.1 Convergence uniforme de série

Définition.

Soient $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des fonctions $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$.

La *série* des f_k est la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$.

Si la suite $(s_n(x))$ converge ponctuellement vers une fonction $s(x)$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ est appelée la *somme* de la série, c'est-à-dire, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

Exemple.

$f_k(x) = x^k$, pour $x \in \mathbb{R}$.

On cherche $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

D'Alembert : $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x| = |x|$. On a convergence si $L < 1$, c'est-à-dire $-1 < x < 1$.

Si $x = -1$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ oscille.

Si $x = 1$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k$ diverge.

Donc, la série converge sur $] -1, 1[$.

On a, sur $] -1, 1[$, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$.

Définition.

La série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément sur A vers une fonction $s : A \rightarrow \mathbb{R}$ si $\left(s_n = \sum_{k=0}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow s$, c'est-à-dire si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |s_n(x) - s(x)| = 0$.

Exemple.

a) $f_k(x) = x^k$ sur $A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| - \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^k| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0
 \end{aligned}$$

Donc, $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow \frac{1}{1-x}$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

b) $f_k(x) = x^k$ sur $A =]-1, 1[$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} 1^k \right| \\
 &\neq 0
 \end{aligned}$$

Théorème (Critère de Weierstrass).

Soient $(f_k : A \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ t.q.

i) $(\forall k)(\exists M = M_k)(\forall x \in A), |f_k(x)| \leq M_k$;

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ converge.

Alors, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément.

Démonstration.

Soit $x \in A$.

On a $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M_k$, par i), qui converge, par ii).

Donc, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge absolument et donc converge.

De plus, sur A ,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |s(x) - s_n(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k
 \end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme. □

Exemple.

Étudions la convergence uniforme de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$.

On a

$$\text{i) } \left| \frac{\cos kx}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2};$$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ converge.}$$

Donc, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ converge uniformément.

Théorème.

$(f_k : A \rightarrow \mathbb{R})$, f_k continue, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \Rightarrow s$, alors s est continue sur A .

Démonstration.

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \Rightarrow s \Rightarrow (s_n) \Rightarrow s.$$

Or, $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ est continue.

Alors, s est continue. □

Théorème.

f_k continue et $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément, alors $\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx \\ \text{puisque la somme est finie} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx \end{aligned}$$

Or, f_k continue $\Rightarrow s_n$ continue et $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément $\Leftrightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) dx \\ &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx \end{aligned}$$

□

Théorème.

$f_k \in C^1$ sur A , $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k \Rightarrow u$ et $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(a)$ converge pour au moins un $a \in A$, alors

- a) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément vers s ;
 b) $s \in C^1$ sur A ;
 c) $s' = u$, c'est-à-dire $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$.

Démonstration.

Comme au chapitre précédent. □

Exemple.

$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{k^3}, \quad k \in \mathbb{N}_*.$$

On a

- i) $f_k \in C^1$ sur \mathbb{R} ;
 ii) $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ converge uniformément (Weierstrass) ;
 iii) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin 0k}{k^3} = 0$ converge.

$$\text{Alors, } \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{x^3}$$

Section 3.2 Séries de puissances

Définition.

Si $f_k(x) = a_k \cdot (x - x_0)^k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ est une *série de puissance*.

Exemple.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot (x - 0)^i, \text{ où } a_i = \frac{1}{i!} \text{ et } x_0 = 0.$$

Théorème.

Soit $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$. Alors,

- a) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ converge sur $]x_0 - R, x_0 + R[$;
 b) Si $R > 0$ et $0 < r < R$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ converge uniformément sur $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Démonstration.

- a) Fixons x .

Posons $b_k = a_k(x - x_0)^k$.

Considérons la série réelle $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

De d'Alembert, la série converge si, et seulement si, $L < 1$, avec $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right| =$

$$|x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x - x_0|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = \frac{|x - x_0|}{R}.$$

Donc, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge si, et seulement si, $L < 1$, c'est-à-dire $\frac{|x - x_0|}{R} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < R \Leftrightarrow x \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

b) Supposons que $R > 0$ et soit $0 < r < R$.

Pour $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, on a

$$\text{i) } |f_k(x)| = |a_k(x - x_0)^k| = |a_k| |x - x_0|^k \leq |a_k| r^k$$

$$\text{ii) } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \text{ converge.}$$

$$\text{En effet, } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} r^{n+1}}{a_n r^n} \right| = r \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{r}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = \frac{r}{R}.$$

$$\text{Ainsi, } L < 1 \Leftrightarrow \frac{r}{R} < 1 \Leftrightarrow r < R.$$

De Weierstrass, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ converge uniformément sur $[x_0 - r, x_0 + r]$.

□

Définition.

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \text{ est le rayon de convergence de la série.}$$

Exemple.

$$\text{a) } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (x - 0)^i$$

$$R = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{i!}}{\frac{1}{(i+1)!}} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} (i+1) = \infty.$$

Donc, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ converge sur tout \mathbb{R} .

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x - 0)^k$$

$$R \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1/k}{1/(k+1)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{k} \right| = 1.$$

Donc, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ converge sur $] -1, 1[$ converge uniformément sur $[-r, r]$ avec $0 < r < 1$.

$$\text{Pour } x = \frac{1}{2}, \text{ on a } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1/2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{1/2} x^{k-1} dx.$$

$$\text{Puisque } \frac{x^k}{k} \text{ est continue pour tout } k \text{ et } \sum \frac{x^k}{k} \text{ converge uniformément, on a } \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{1/2} x^{k-1} dx = \int_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} dx =$$

$$\int_0^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} x_k dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx = -\ln |1-x| \Big|_0^{1/2} = -\ln \frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2.$$

Corollaire.

Supposons que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ converge vers f sur $]x_0 - R, x_0 + R[$. Alors,

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x - x_0)^k) \text{ est une série de puissance qui converge sur }]x_0 - R, x_0 + R[;$$

$$\text{b) } f \in C^{\infty} \text{ sur }]x_0 - R, x_0 + R[;$$

$$\text{c) } \frac{d^n}{dx^n} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} (a_k(x - x_0)^k) = \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k.$$

Démonstration.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1}(x-x_0)^k$ qui est effectivement une série de puissance.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)a_{k+1}}{(k+2)a_{k+2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{k+2} \right| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \right| = 1 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R.$$

b),c) Soit $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$. Alors, $\exists 0 < r < R$ t.q. $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. On sait que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x-x_0)^k)$ converge uniformément sur $[x_0 - r, x_0 + r]$.

De plus, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ converge pour au moins un $a \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Du théorème, $f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$.

Donc, f' est continue et $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k(x-x_0)^k)$.

Par récurrence, on obtient les résultats.

□