SKUPOVI

Naučili smo da brojevi 1,2, 3, 4, ... čine skup **prirodnih brojeva**. Taj skup označavamo sa *N i* pišemo *N* = {1,2, 3, 4,...}. Najmanji prirodan broj je broj 1. Da li postoji najveći prirodan broj?

Jovan je ubedio svog mlađeg brata Janka da u svesci ispiše sve prirodne brojeve. Međutim, kada je njihova sestra Jadranka saznala šta je Jovan uradio, odlučila je da objasni Janku da je njegov cilj nemoguće ostvariti.

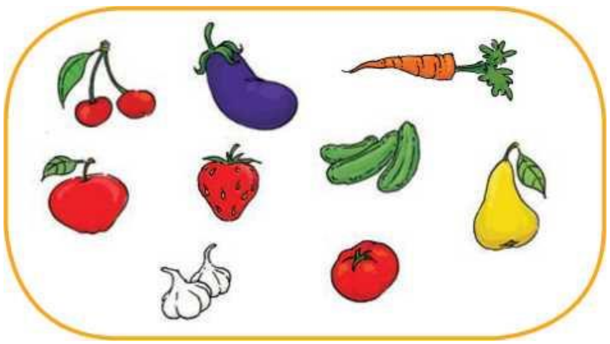
Jasno, skup *N* ima beskonačno mnogo elemenata, pa najveći prirodan broj ne postoji. Zato kada nabrajamo elemente skupa *N* na kraju pišemo tri tačke.
Osim o skupu *N* možemo govoriti i o skupu prirodnih brojeva manjih od 8, to jest o {1,2, 3, 4, 5, 6, 7} ili o skupu parnih brojeva to jest o {2, 4, 6,...} i tako dalje.
Hajde da naučimo nešto više o skupovima uopšte.

POJAM SKUPA

Elementi i pripadanje

Do sada smo često govorili o skupovima i pričali o nekim njihovim osobinama. Možeš li da navedeš primere nekih skupova?

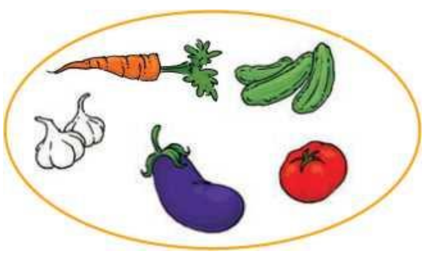
Skup je jedan od osnovnih pojmova u matematici i opisujemo ga kao mnoštvo (ili celinu) objekata koji imaju neku zajedničku osobinu ili svojstvo.



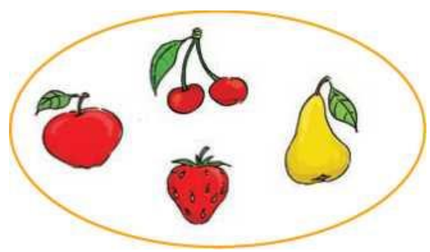
Skup formiramo vodeći računa o zajedničkoj osobini ili svojstvu koje imaju svi članovi tog
Skup formiramo vodeći računa o zajedničkoj osobini ili svojstvu koje imaju svi članovi tog
skup

Skup jestivih delova nekih biljaka.

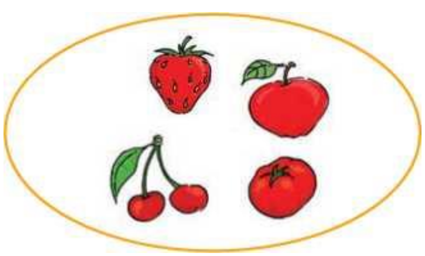
Od jestivih delova biljaka sa gornje slike mogli smo da napravimo još nekoliko skupova.



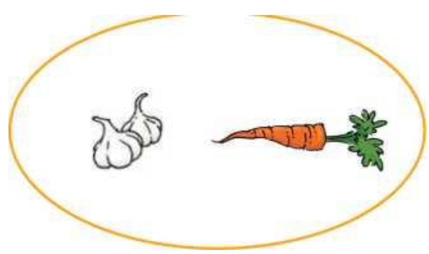
Skup jestivih delova biljaka koje ubrajamo u povrće.



Skup jestivih delova biljaka koje ubrajamo u voće.



Skup jestivih delova biljaka crvene boje.



Skup jestivih delova biljaka koji rastu u zemlji.

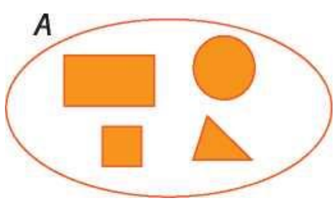
U matematici su od najvećeg značaja skupovi koji su sastavljeni od cifara, brojeva, geometrijskih figura ili nekih drugih matematičkih objekata.

Za svaki objekat koji je u nekom skupu kažemo da pripada tom skupu I da je element tog skupa. U suprotnom kažemo da on ne pripada tom skupu, t jest da nije njegov element.

Sada možemo reći, na primer, da je šargarepa element skupa povrća, a da jabuka nije element tog skupa.

Zadatak 1.
Nabroj tri elementa koji pripadaju skupu voća i dva koja ne pripadaju.

Do sada smo skoro uvek skupove predstavljali crtajući njihove elemente.



Sada ćemo ih zapisivati ovako:

A = {trougao, krug, kvadrat, pravougaonik}.

Skupove označavamo velikim latiničnim slovima *A, B, C, D, ...*

Elemente skupa pišemo unutar vitičastih zagrada { } i odvajamo ih zapetom.

Primer 1. Skup *B* čiji su elementi parni brojevi prve desetice kraće zapisujemo ovako:

$$\boldsymbol{B = \{2, 4, 6, 8, 10\}}.$$

Vidiš da je 4 element skupa *V.* To kraće pišemo $4 \in V$. Oznaku „$\in$ " čitamo „je element" ili „pripada". Vidiš da broj 9 nije element skupa *V*. To kraće pišemo $9 \nexists V$. Oznaku $\nexists$ čitamo „nije element" ili „ne pripada".

Zadatak 2.
Koristeći simbole $\in$ i $\nexists$ zapiši sledeće rečenice:

a) 2 je element skupa *C;* b) 4 nije element skupa *D;*

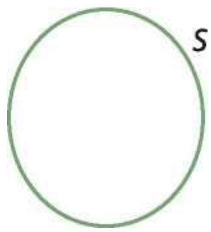
c) 11 ne pripada skupu *E*; d) 100 pripada skupu *F.*

Venovi dijagrami

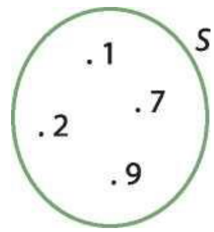
Elemente nekog skupa grafički predstavljamo tačkama koje se nalaze unutar neke zatvorene linije. Oznake elemenata skupa zapisujemo pored tačaka, a oznaku skupa pored zatvorene linije jer ona elemente „okuplja“ u celinu. Ovakav prikaz skupa naziva se **Venov dijagram**. Venov dijagram koji pokazuje da su brojevi 1,2, 7 i 9 elementi skupa S I da brojevi 3, 4, 5 I 8 nisu njegovi elementi crtamo kao što je dole opisano.

Skup predstavljamo zatvorenom linijom.

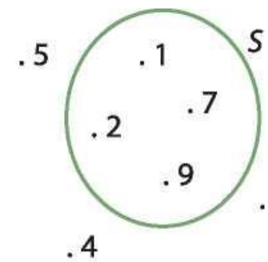
Pored linije pišemo ime posmatranog skupa.



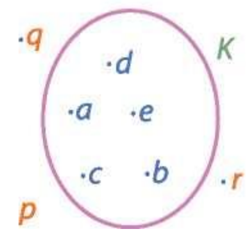
Elemente koji pripadaju skupu zapisujemo unutar zatvorene linije.



Elemente koji ne pripadaju skupu zapisujemo izvan zatvorene linije.



Primer 2. Na slici je prikazan Venov dijagram skupa *K*.
Zaključujemo da je $a \in K$, $b \in K$, $c \in K$, *d* e *K*, $e \in K$, $r \notin K$, $q \notin K$ i $r \notin K$.
Dakle, K = {a,b,c,d,e}



Zadatak 3.
Nacrtaj Venov dijagram za skup $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Zadatak 4.
Predstavi Venovim dijagramom skup *M* ako je poznato: $p \in M$, $q \notin M$, $r \notin M$, $s \in M$ I $f \in M$

Skupovi sa mnogo elemenata I skup bez elemenata

Skupove koji imaju veliki broj elemenata zapisujemo opisivanjem osobina elemenata koji

im pripadaju. Na ovaj način lako zapisujemo skup *A* čiji su elementi prirodni brojevi manji od 500:

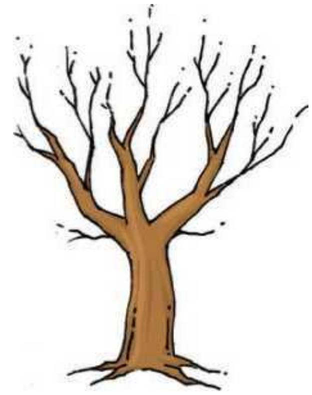
$A = \{x \mid x \in N \text{ i } x < 500\}$.

Levo od uspravne crte pišemo oznaku proizvoljnog elementa skupa (x), a desno osobine koje taj element ima ($x \in N$ i $x < 500$). Uspravnu crtu čitamo „takvi da“ ili „sa osobinom“.

Primer 4. Elementi skupa $E = \{n \mid n$ je paran broj i $n < 5\,001\}$ jesu svi brojevi *n* koji su parni i manji od 5 001. Skup *E* je mnogo lakše zadati opisujući elemente nego pisati 2 500 brojeva.

Zadatak 5.
Skup čiji su elementi svi prirodni brojevi *k* koji su manji od 133 a veći od 5 zapisujemo i ovako: D= $\{k \mid k \in N \text{ i } 5 < k < 133\}$. Koji je najmanji neparan, a koji najveći paran broj koji pripada skupu *D*?

Označimo sa *A* skup svih automobila (ne mislimo na igračke) koji se nalaze u tvojoj učionici. U ovom skupu neće biti niti jedan element, jer u učionici nema automobila. Označimo sada sa *B* skup svih jabuka sa slike levo, a sa C skup svih jabuka sa slike desno. Skup *B* ima elemente, jer na slici levo ima jabuka, dok skup *C* nema elemenata, jer na slici desno nema jabuka.



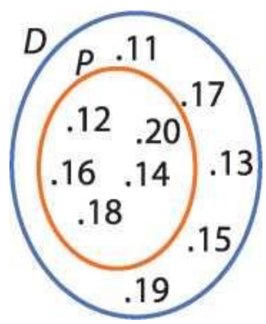
Skup koji ne sadrži elemente naziva se prazan skup I označava se sa Ø

Dakle koristeći ovu oznaku Ø, možemo zapisati B ≠ Ø I C = Ø.

Prazan skup označavamo sa Ø, a ne sa {Ø}.

Podskup skupa

Neka je D skup brojeva druge desetice to jest D = {11,12,13,…,20}. Neka je P skup čiji su elementi svi parn brojevi iz skupa D, to jest P = {12,14,116,18,20}. Za skup P kažemo da je podskup skupa D.



Kao što je prikazano na slici, Venog dijagram podskupa crtamo unutar Venovog dijagrama skupa.

Ako su svi elementi skupa A istovremeno I elementi skupa B, onda kažemo da je skup A podskup skupa B. To kraće pišemo A $\subset$ B. Oznaku $\subset$ čitamo ,,je podskup”.

Primer 5. Sada pišeš P $\subset$ D ili {12,14,16,18,20} $\subset$ {11,12,13,…, 19,20}.

Primer 6. Elementi skupa *N* jesu svi prirodni brojevi, a elementi skupa *N* svi prirodni brojevi i 0. Kako svaki element skupa *N* pripada i skupu ^, kažemo da je skup *N* podskup skupa ^, to jest *Ns №*$_0$.

Zadatak 6.

Da li je skup *X = {a, d, j}* podskup skupa *Y = {a, d, g, k, j}? A* skupa *Z = {a, d, g, i, f}*?

Prazan skup je podskup svakog skupa (Ø ⊂ A, za bilo koji skup A). Svaki skup je podskup samog sebe (A ⊂ A, za bilo koji skup A).

Primer 7. Svi podskupovi skupa *A* = {1,2, 3} su Ø, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2, 3}, {1,2, 3}.

Zadatak 7.
Odredi sve podskupove skupa *V = {a, b, c}*.

Jednakost skupova

Posmatrajmo skupove A={3,1,5,9,7} i B={1,3,5,7,9}. Svaki element skupa A jeste element i skupa B to jest A ⊂ B, I svaki element skupa B jeste element I skupa A, to jest B ⊂ A. Za skupove A I B kažemo da su **jednaki,** i kraće pišemo A = B.

Dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente, to jest ako je svaki element prvog skupa element i drugog skupa, i svaki element drugog skupa jeste element i prvog skupa.

Primer 8. Posmatrajmo skupove *S* = {2, 4, 6} i *P* = {2, 2, 4, 6, 6, 6}. Vidimo da je svaki element skupa *S* element i skupa *P*, i svaki element skupa *P* jeste element skupa *S*. Dakle, zaključujemo da je S = *P.* Samo na prvi pogled može izgledati da skup *P* ima šest elemenata. Za skup jedino je važno da li neki element pripada tom skupu ili ne (a ne koliko je puta zapisan).

Za skup nije bitno kojim redosledom su zapisani njegovi elementi (znači *{a, &} = {&, a})*, niti da li je isti element zapisan više puta (znači {*a*, *a*} = {*a*}).

Zadatak 8.
Da li su jednaki skupovi *U* = {1,4}, *V* = {1, 1, 1, 1,4, 4} i *W* = {4, 1}?

Broj elemenata skupa *A* označavamo sa *n(A),* i to je broj različitih elemenata tog skupa.

Primer 9. Za skupove *A = {a, a, b, c}*, *B* = {1,6, 6, 8} i *C* = {1, *a*, b, *d}* je *n(A)* = 3, *n(B)* = 3 i *n(SC* = 4.

Zadatak 9.
Koliko elemenata imaju skupovi *U* = {1,4}, *V* = {1, 1, 1, 1,4, 4} i *W* = {4, 1}?

OPERACIJE SA SKUPOVIMA

Presek skupova

Posmatraj kartu Evrope i odredi koje države se graniče sa Švajcarskom, a koje sa Češkom.

Označimo sa *5* skup svih država koje se graniče sa Švajcarskom, a sa *S* skup svih država koje se graniče sa Češkom. Zapišimo ova dva skupa nabrajanjem njihovih elemenata:

5 = {Nemačka, Austrija, Italija, Francuska}

S = {Nemačka, Poljska, Slovačka, Austrija}

Vidiš da se neke od zemalja graniče i sa Švajcarskom i sa Češkom. To su Nemačka i Austrija.

Za ove zemlje kažemo da pripadaju preseku skupova zemalja koje se graniče i sa Švajcarskom i Češkom, to jest da su **presek** skupova *5* i *S.*

Presek bilo koja dva skupa jeste novi skup čiji su elementi samo oni koji pripadaju i jednom i drugom skupu.

Dakle, presek dva skupa čine svi njihovi zajednički elementi. Presek skupova *X* i *U* označavamo sa *X* P *U* (čitamo „iks presek ipsilon“) ili *U* P *X.* U našem primeru, presek skupova *5* i *S*označićemo sa *5* P *S i* vidimo da je *5* ("I *S* = {Nemačka, Austrija}.

Za svaka dva skupa X i U važi X P U = U P X

Primer 1. Za skupove *A* = {5, 10, 15, 20, 25} i *V = {4,* 10, 14, 20, 24}, vidimo da je *A* P *V =* {10, 20}.

Zadatak 1.

Odredi presek skupova *R* = {1,2, 3, *s*} i *0* = {1,3, 5, *a, s, e*}.

Presek dva skupa je najlakše odrediti ako posmatraš elemente skupa sa „manje“ elemenata i proveravaš da li su elementi „većeg“ skupa. Ako su i u „većem“ skupu, onda su oni elementi preseka.

Ukoliko dva skupa nemaju zajedničke elemente, tada je presek ova dva skupa prazan skup.

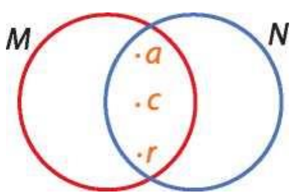
Skupovi su disjunktni ukoliko je njihov presek prazan skup

Pokažimo kako Venovim dijagramom predstavljamo dva skupa.

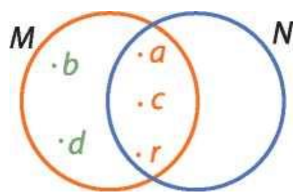
Prvi slučaj

Ako dva skupa imaju zajedničke elemente onda ih crtamo kao na slici. Zajedničke elemente skupova *A* i *V* pišemo unutar ljubičastog dela. Sve elemente skupa *A* koji nisu u preseku ova dva skupa pišemo u plavom, a sve elemente skupa *V* koji nisu u preseku ova dva skupa pišemo u crvenom delu Venovog dijagrama.

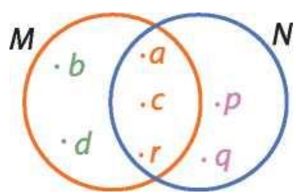
Primer 2. Nacrtajmo Venove dijagrame za skupove *M = {a, d, s, d, g} i N = {a, s, r, ^, g}.*



Zajednički elementi skupova M i N jesu a, c i r, pa ove elemente pišemo u zajedničkom delu Venovih dijagrama.



Elementi d i b pripadaju samo skupu M, pa ih pišemo u delu skupa M koji je izvan preseka



Elementi p i q pripadaju samo skupu N pa ih pišemo u delu skupa N koji je izvan preseka.

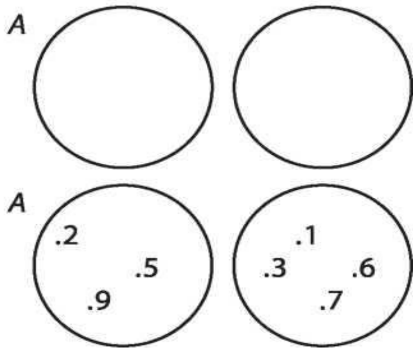
Zadatak 2.

Nacrtaj Venov dijagram za skupove *R* = {3, 4, 7, 8, 10, 23} i *K*= {2, 3, 15, 21, 23}.

Drugi slučaj

Ako dva skupa nemaju zajedničke elemente, Venov dijagram možemo crtati kao na slici i za njih kažemoda su **disjunktni**.

Primer 3. Venove dijagrame za skupove *A* = {2, 5, 9} i *V* = {1,3, 6, 7} crtamo kao na slici desno.



UNIJA SKUPOVA

Odredili smo zemlje sa kojima se graniče i Švajcarska i Češka. Hajdemo da, ponovo posmatrajući kartu na strani 12, odredimo sve zemlje sa kojima se graniči bilo jedna bilo druga zemlja. Vidimo da su to Nemačka, Austrija, Italija, Francuska, Poljska i Slovačka. Za ove zemlje kažemo da pripadaju uniji skupa zemalja koje se graniče sa Švajcarskom ili sa Češkom, to jest da obrazuju **uniju** skupova *5* i *S.*

Unija bilo koja dva skupa jeste novi skup čiji su elementi oni koji pripadaju jednom ili drugom skupu.

Drugim rečima, uniji dva skupa pripadaju oni elementi koji su u bar jednom od tih skupova. Uniju skupova *Xi V* označavamo sa *X* 1J *V*(čitamo „iks unija ipsilon“) ili *V* 1J *X.* U našem uvodnom primeru, uniju skupova *5* i *S*označićemo sa *5* 1J *S i* rekli smo da je *5* 1J *S* = {Nemačka, Austrija, Italija, Francuska, Poljska, Slovačka, Mađarska}.

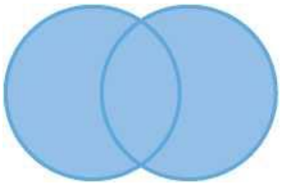
Za svaka dva skupa *X* i *V* važi *X*II*V* = *V* (J *X*.

Primer 4. Ako posmatramo skupove *A* i *V* čiji su elementi *A* = {1,2, 3, 4, 5} i *V* = *{2,* 4, 6, 8, 10}, tada je unija ova dva skupa skup *A* 1J *V* = {1,2, 3, 4, 5, 6, 8, 10}.

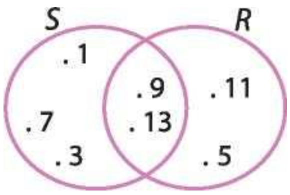
Zadatak 3.
Ako je *S* skup slova reči „taTetaIka“, to jest *S* = *{t, a, I, e, ^, k},* a *O* skup slova reči „TeTgarak“, to jest = {*T, e, g, a, r, k},* odredi uniju skupova *S* i ^.

Pri određivanju unije dva skupa najlakše je prepisati elemente skupa sa više elemenata, a zatim dopisati sve elemente drugog skupa koji nisu već napisani.

Unija dva skupa je novi skup koji Venovim dijagramom predstavljamo kao na slici desno.



Primer 5. Sa slike desno možemo zaključiti da su elementi skupova *5* = {1,3, 7, 9, 13} i *V* = {5, 9, 11, 13}, a isto tako da je i *5* P *V* = {9, 13}, *5* TJ *V* = {1,3, 5, 7, 9, 11, 13}.



RAZLIKA SKUPOVA

Pored preseka i unije, upoznajmo se i sa skupovnom operacijom razlike dva skupa.
Hajde da uočimo neke razlike između skupa zemalja *5* i *S* koje smo ranije zapisali. Odredimo zemlje koje se graniče sa Švajcarskom, a ne graniče se sa Češkom. Posmatrajući kartu vidimo da su to Italija i Francuska. To su zemlje po kojima se skup *5* „razlikuje“ od skupa *S*, pa je prirodno reći da su one **razlika** skupa *5* od skupa *S*.

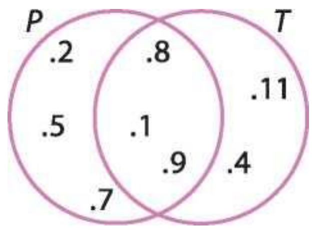
Razlika skupa *H od* skupa *V* jeste novi skup čiji su elementi svi oni koji pripadaju skupu *H,* a ne pripadaju skupu *V.*

Razliku skupa *H* od skupa *V* označavamo sa *H* \ *V* (čitamo „iks razlika ipsilon“), a razliku skupa *V* od skupa *H* sa *V* \ *H*.
Dakle, razliku skupova *5* i *S* označićemo sa *5* \ *S* i rekli smo da je *5* \ *S* = {Italija, Francuska}.
Ako posmatramo one zemlje koje se graniče sa Češkom, a ne graniče se sa Švajcarskom, vidimo da su to Poljska i Slovačka, pa ćemo reći da one čine razliku skupa *S* od skupa *5* i to zapisati *S* \ *5* = {Poljska, Slovačka}.

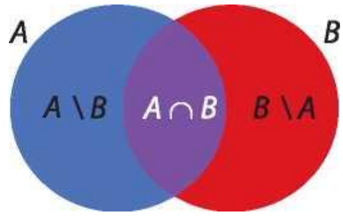
Ako je *XF V* tada je *H*\ *V* različito od *V*\ *H*.

Primer 6. Ako posmatramo skupove *O* i *S* čiji su elementi = *{t, a, g, k, o}* i *S* = *{r, e, {, a, g},* tada je \ *S* = *{t, k, o}*, a *S* \ = *{r, e,* 0.

Primer 7. Sa slike na kojoj je dat Venov dijagram za skupove *R* i *T* možemo zaključiti da je *R* = {1,2, 5, 7, 8, 9}, *T* = {1,4, 8, 9, 11}, *R* P *T* = {1,8, 9}, *R* Dž *T* = {1,2, 4, 5, 7, 8, 9, 11}, *R* \ *T* = {2, 5, 7} i *T* \ *R* = {4, 11}.

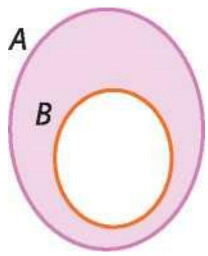


Zadatak 4.
Odredi *V* \ *i* i *i* \ *V* ako je *V* = {2, 4, 6, 8, 10, 12} i *i* = {3,6,9,12}.



Ako je *V*s: *A,* tada se *A* \ *V* naziva **komplement** skupa *V* u odnosu na skup *A* koji označavamo sa $S_A(V)$. Elemente koji pripadaju komplementu zapisujemo u osenčenom delu dijagrama.

Komplement je reč latinskog porekla i znači *dopuna, dodatak*.



Primer 8. Neka je *A* = {1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} i *V* = {3, 6, 9}. Vidimo da je *V* s *A*, pa je komplement skupa *V* u odnosu na skup *A*: $S_A(V)$ = {1, 2, 4, 5, 7, 8}.

Izrazi sa više skupovnih operacija

Pored skupova

5 = {Nemačka, Austrija, Italija, Francuska} i

S = {Nemačka, Poljska, Slovačka, Austrija},

koje smo uveli na početku prethodne lekcije, posmatrajmo i skup *G*, koji će predstavljati skup svih zemalja koje se graniče sa Luksemburgom. Sa karte na strani 12 vidimo da su elementi tog skupa

= {Francuska, Belgija, Nemačka}.

Odredimo sve one zemlje koje se graniče i sa Švajcarskom i sa Češkom i sa Luksemburgom, to jest sa sve tri zemlje. To znači da moraju da se nalaze u sva tri posmatrana skupa, a samim tim i u preseku ova tri skupa. Znači, potrebno je da se odredi *5* P *S* P ^. Prvo ćemo odrediti *5* P *S*, a potom presek tako dobijenog skupa sa skupom ^. Isti postupak primenjujemo i za uniju više skupova.

5 P *S* P = {Nemačka, Austrija, Italija, Francuska} P {Nemačka, Poljska, Slovačka, Austrija} P {Francuska, Belgija, Nemačka} = {Nemačka, Austrija} P {Francuska, Belgija, Nemačka} = {Nemačka}.

Primer 9. Ako je *K* = {1,3, 5, 7, 9}, *N* = {1,2, 4, 5, 7, 8} i *R* = {1,4, 7, 10}, tada je *K* P *N* P *R* = {1,5, 7} P {1,4, 7, 10} = {1,7}.

Zadatak 5.
Koristeći skupove *5, S* i iz uvodnog primera i *K, N* i *R* iz primera 9, odredi *5* II*S* 1J i *K* 1J *N*II *R*.
Šta predstavlja skup *5* 1J *S* 1J ^?

Radeći sa više skupova, nailazimo na izraze sledećeg oblika: (*D* II*R)* P ^, *R* \ (*V*P *0*), (*P* \ *5*) 1J (*R* P*N*), ... za neke unapred zadate skupove *A, R, ^,* ... Znamo da kod brojevnih izraza sa zagradama prvo računamo vrednost izraza u zagradi. Tako radimo i kada imamo izraze sa više skupovnih operacija i zagrada.

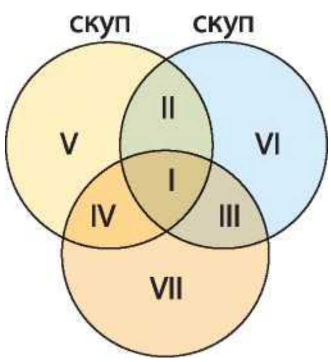
Primer 10. Ako su dati skupovi *A* = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, *V* = {0, 3, 6, 9, 12} i *S* = {3, 4, 5, 6, 7, 8}, tada je:

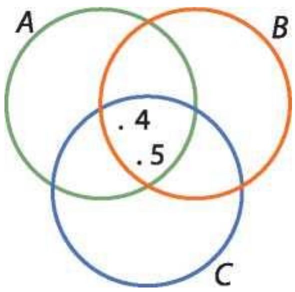
a) (II) \ *V* = {, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12} \ {0, 3, 6, 9, 12} = {2, 4, 5, 7, 8, 10},
b) *V* P (\ ) = {0, 3, 6, 9, 12} P {, 5, } = {3},
v) (*S V*) P (*A* \ *S*) = {3, 6} P {2, 10, 12} = . .

Pokažimo kako predstavljamo Venovim dijagramom tri skupa. Tri skupa mogu imati elemente koji se nalaze u sva tri skupa, u dva od tri skupa ili samo u jednom od skupova. Zbog toga kada crtamo Venove dijagrame tri skupa crtamo ih kao na slici desno. U sledećoj tabeli dat je prikaz koje elemente upisujemo u naznačene oblasti na Venovom dijagramu:

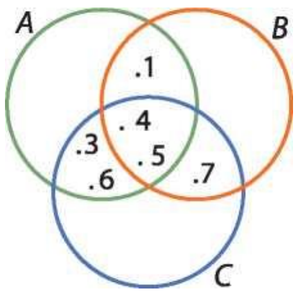
Primer 11. Ako su dati skupovi *A* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, *V* = {1, 4, 5, 7, 8, 9} i *S* = {3, 4, 5, 6, 7, 10}, nacrtajmo Venov dijagram za ove skupove.

I	elementi koji se nalaze u sva tri skupa
II	elementi koji se nalaze samo u prvom i drugom skupu
III	elementi koji se nalaze samo u drugom i trećem skupu
IV	elementi koji se nalaze samo u prvom i trećem skupu
V	elementi koji se nalaze samo u prvom skupu
VI	elementi koji se nalaze samo u drugom skupu
VII	elementi koji se nalaze samo u trećem skupu

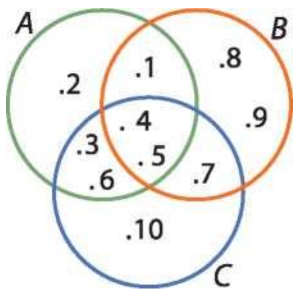




Najpre ucrtajmo zajedničke elemene za sva tri skupa.



Zatim upišimo elemente koji su zajednički za samo dva skupa.



Konačno upisujemo elemente koji se nalaze u samo jednom od skupova.

Skupovi mogu biti elementi drugih skupova

Govorili smo već o broju elemenata skupa. Pored brojeva, slova i drugih objekata, elementi skupa mogu biti i drugi skupovi. U tom slučaju skup koji se nalazi u posmatranom skupu posmatraćemo kao jedan element skupa.

Primer 1. Ako je $A = \{1,2, 3, \{2, 4\}\}$, onda je $p(A) = 4$, jer su elementi skupa *A* brojevi 1,2, 3 i skup $\{2, 4\}$.

Primer 2. Ako je $V = \{\{3\}, \{1\}, \{5, 8\}\}$, onda je $p(V) = 3$, jer su elementi skupa *V* skupovi $\{3\}$, $\{1\}$ i $\{5, 8\}$.

Broj elemenata unije dva skupa

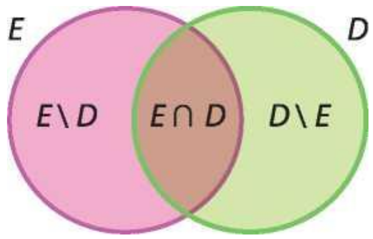
Broj elemenata skupa jednak je broju različitih elemenata datog skupa. Čemu je jednak broj elemenata unije dva skupa? Uniju čine svi elementi i jednog i drugog skupa. Ako sabereš brojeve elemenata ta dva skupa, one elemente koji se javljaju i u jednom i u drugom skupu računaš dva puta. Zbog toga, ukupan broj elemenata unije dva skupa računaš tako što od zbira broja elemenata dva posmatrana skupa oduzmeš broj elemenata njihovog preseka, jer su to elementi koji se javljaju u oba skupa. Dakle, broj elemenata unije jeste:

$$p(A \text{ II } V) = p(A) + p(V) - p(A \text{ P } V).$$

Zadatak.
U jednom odeljenju 20 učenika uči engleski, 17 učenika nemački, a 7 učenika oba jezika. Koliko učenika ima u ovom odeljenju ako svako uči barem jedan od ova dva jezika? Koliko učenika uči samo nemački jezik?

Kako rešavamo ovakve zadatke? Označimo skup učenika koji uči engleski jezik sa *E*, a skup učenika koji uči nemački jezik sa *O*. Znamo da je *p(E)* = 20 i *p(^)* = 17. Kako učenici koji uče i engleski i nemački pripadaju i jednom i drugom skupu, vidimo da je *p(E* P ^) = 7. Svi učenici u odeljenju predstavljaju uniju dva skupa. Koristeći gornju jednakost, ukupan broj učenika u odeljenju izračunavamo na sledeći način:

p(E II *^) = p(E) + p&) - p(E*P *^)* = 20 + 17 - 7 = 30.



Posmatrajući dva skupa predstavljena pomoću Venovih dijagrama, lako uočavamo jednakost

p&) = pf \ E) + p(E P *^).*

Učenici koji uče samo nemački jezik jesu učenici koji pripadaju skupu \ *E*, a njihov broj možemo izračunati koristeći prethodnu jednakost, to jest kada od ukupnog broja učenika koji uče nemački jezik oduzmemo one koji uče oba jezika. Dakle, broj učenika koji uče samo nemački jezik jeste 17 - 7 = 10.

SKUP PRIRODNIH BROJEVA

Uređenje skupa prirodnih brojeva

Hajde da obnovimo ono što smo učili o prirodnim brojevima. Setimo se šta predstavlja zapis 2 607, to jest da je

$$2\,607 = 2 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 1.$$

Prednost savremenog zapisa prirodnih brojeva jeste u činjenici da se pomoću deset cifara (0, 1, ..., 8, 9) na jedinstven način može zapisati svaki prirodan broj. Međutim, do današnjeg jednostavnog sistema kojim pišemo brojeve čovečanstvo je došlo prelazeći dug put koji je trajao nekoliko milenijuma. Pogledaj malo o tome u delu za radoznale na kraju ovog poglavlja.

Prilikom zapisivanja skupa N trudimo se da brojeve pišemo nekim redom. Za svaka dva različita elementa *a i b* važi $a < b$ ili $b < a$. Zbog ovoga kažemo da je skup N uređen skup. Pored relacija < i >, često se upotrebljavaju i relacije ≤ **I** ≥.

Primer 1. Skup E čiji su elementi prirodni brojevi manji ili jednaki od 2 938, zapisujemo ovako: $E = \{x \mid x \in N,\ x < 2\,938 \text{ ili } x = 2\,938\}$.
Da bismo skratili zapis $x < 2\,938$ ili $x = 2\,938$, pisaćemo $x \leq 2\,938$.

Za prikaz brojeva manjih od drugog broja ili jednakih njemu koristimo relaciju ≤ (čitamo „manje ili jednako“). Slično, za prikaz brojeva većih od drugog broja ili jednakih njemu koristimo oznaku ≥ (čitamo „veće ili jednako“).

Znamo da ako je $a < b$ i $b < c$ onda je i $a < c$. Isto tvrđenje važi i za relaciju ≤.

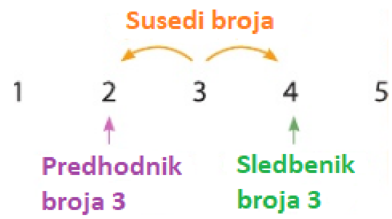
Ako je $a \leq b$ i $b \leq c$, onda je i $a \leq c$.

Za dva različita prirodna broja ne može istovremeno da važi $a < b$ i $b < a$. Međutim, za relaciju ≤ može da važi $a \leq b$ i $b \leq a$, i to samo ako je $a = b$.

Pogledajmo prvih sedam prirodnih brojeva: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Vidimo da između 3 i 7 ima drugih prirodnih brojeva (4, 5 i 6), ali između 1 i 2, 2 i 3, ... nema. Za dva broja između kojih nema drugih prirodnih brojeva kažemo da su uzastopni. Ako posmatramo razlike uzastopnih brojeva, vidimo da su one uvek iste i jednake 1 (2 - 1,3 - 2, 4 - 3,...).

Pored svakog broja, sem 1, u nizu prirodnih brojeva nalaze se druga dva. Za te brojeve kažemo da su mu susedi (1 i 3 su susedi broja 2, 2 i 4 su susedi broja 3, ...). Prvi manji broj je prethodnik, a prvi veći je sledbenik posmatranog broja. Dakle, razlika između broja i njegovog prethodnika i broja i njegovog sledbenika uvek je ista i jednaka 1.

Primer 2.

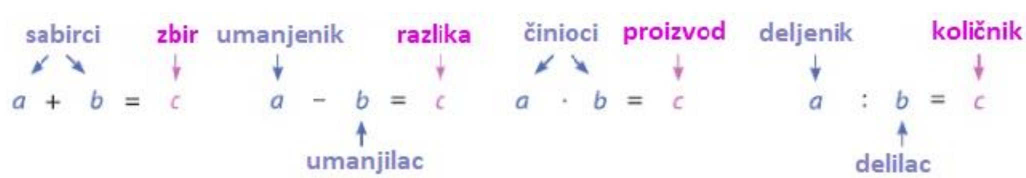


Broj 1 nema svog prethodnika u skupu *N* i za razliku od ostalih brojeva koji imaju dva suseda, on u skupu *N* ima samo jednog.

Nula nije prirodan broj, ali često skupu prirodnih brojeva pridružujemo i nulu. Naučio/-la si da taj skup označavaš sa N_0. Dakle, $N_0 = N \cup \{0\}$.

Operacije u skupu prirodnih brojeva

Do sada smo učili četiri osnovne računske operacije u skupu N_0: sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje



.

Podsetimo se nekih osobina ovih operacija.

Dodavanjem jedinice na bilo koji broj iz N_0 dobijamo njegovog sledbenika koji je takođe broj iz N_0. Kako je sabiranje, u stvari, dodavanje odgovarajućeg broja jedinica na neki broj, zaključujemo da je u skupu N_0 sabiranje uvek izvodljivo.

Naučili smo da je, na primer, 3 • 5 = 5 + 5 + 5, odnosno, svako množenje možemo predstaviti kao sabiranje odgovarajućeg broja istih sabiraka. To nas navodi na zaključak da je u skupu N_0 i množenje uvek izvodljivo.

Međutim, rezultat oduzimanja i deljenja dva broja iz N_0 ne mora uvek biti u tom skupu, na primer 12 - 18, 44 - 132, 13 : 2, 15 : 4. Zato kažemo da oduzimanje i deljenje nisu operacije koje su uvek izvodljive u skupu N_0 ili da su to računske operacije koje su u skupu N_0 uslovno izvodljive.

Da bi razlika brojeva *a* i *b* bila iz N_0 mora biti $a \geq b$.

Ako sa *k* označimo količnik brojeva *a* i *b*, a sa *r* ostatak, tada je $a = b \cdot k + r$. Ostatak je manji od delioca i važi $r \in \{0, 1, ..., b - 1\}$. Količnik dva broja je iz skupa N_0. Ako je $r = 0$, kažemo da je broj *a* deljiv brojem *b*.

Za računsku operaciju kažemo da je **komutativna** ako zamenom mesta brojeva rezultat ostaje isti.

Računska operacija je **asocijativna** ako rezulatat ostaje isti bez obzira na to kako smo združili brojeve.

	komutativna	asocijativna
sabiranje	jeste $a + b = b + a$	jeste $(a + b) + c = a + (b + c)$
oduzimanje	nije jer je $24 - 6 \neq 6 - 24$	nije jer je $(24 - 4) - 2 \neq 24 - (4 - 2)$
množenje	jeste $a \cdot b = b \cdot a$	jeste $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
deljenje	nije jer je $24 : 6 \neq 6 : 24$	nije jer je $(24 : 4) : 2 \neq 24 : (4 : 2)$

Za broj koji ne utiče na rezultat računske operacije kažemo da je **neutralni element za tu operaciju**.
Znaš da je $a + 0 = 0 + a = a$, kao i da je $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Zbog toga kažemo da je 0 neutralni element za sabiranje, a 1 neutralni element za množenje. Ne zaboravimo da je $a \cdot 0 = 0$ za svako $a \in N_0$, kao i da nulom nema smisla deliti.

Za operacije množenja i sabiranja važi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. *Ovo* svojstvo nazivamo **distributivnost množenja u odnosu na sabiranje**.
Isto svojstvo važi i za operacije množenja i oduzimanja: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Primer 3. Koristeći svojstvo distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje i oduzimanje, jednostavnije izračunavamo vrednost nekih izraza.

$$132 \cdot 63 + 132 \cdot 37 = 132 \cdot (63 + 37) = 132 \cdot 100 = 13\,200$$

$$26 \cdot 918 - 26 \cdot 908 = 26 \cdot (918 - 908) = 26 \cdot 10 = 260$$

Prirodne brojeve smo predstavljali i na brojevnoj polupravoj. Crtali smo je tako što smo početnu tačku poluprave označavali sa 0, iz nje nanosili udesno jednu za drugom istu **jediničnu duž**, i njihove krajeve redom označavali prirodnim brojevima 1, 2, ...

Zadatak 1.

Nacrtaj u svojoj svesci brojevnu polupravu ako je jedinična duž 1cm.

Za dva različita broja na brojevnoj polupravoj važi:
- manji je onaj broj koji se na brojevnoj polupravoj nalazi sa leve strane (bliži je nuli);
- ako između ta dva broja nema drugih prirodnih brojeva, onda su oni uzastopni, a ako ih ima, uvek možemo odrediti njihov broj.

Prisetimo se da ukoliko je na brojevnoj polupravoj trebalo da predstavimo „velike“ brojeve, onda smo brojevnu polupravu crtali kao na sledećim slikama.