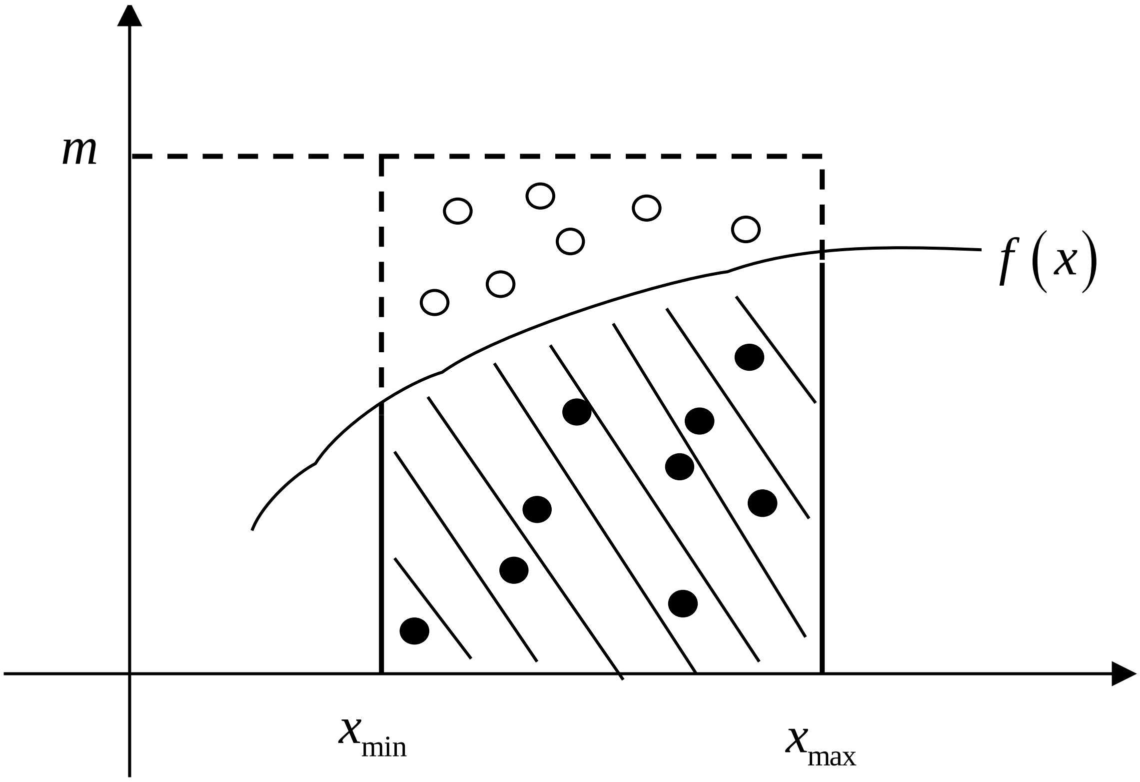
Algo



Cédric Bilat

MonteCarlo

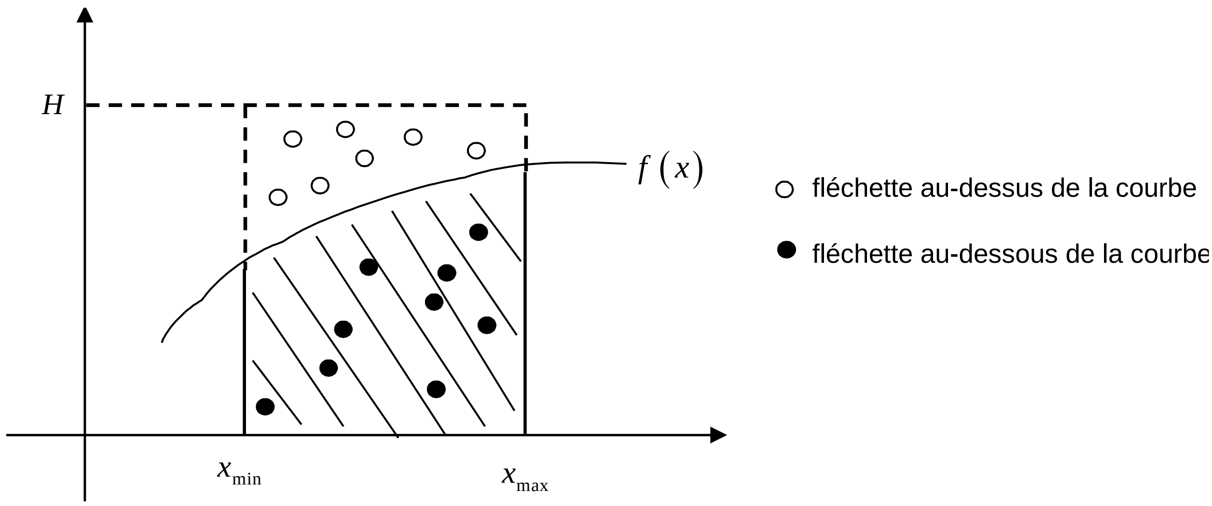
Contexte

Il est possible de calculer une intégrale

$$\int_{xMin}^{xMax} f(x)dx = ?$$

à l'aide de nombres aléatoires. Le principe est le suivant:

On tire aléatoirement n fléchettes sur la cible $[x_{\min}, x_{\max}]x[0, \mathrm{H}]$.



où

H est une borne supérieur quelconque de f sur $[x_{\min}, x_{\max}]$

On compte ensuite :

- le nombre de fléchettes noires (en dessous de la courbe)
- le nombre de fléchettes blanches (en dessus de la courbe)

et on en déduit l'intégrale !

Algorithme

Approche par comptage

Notation

Comme ci-dessus, posons

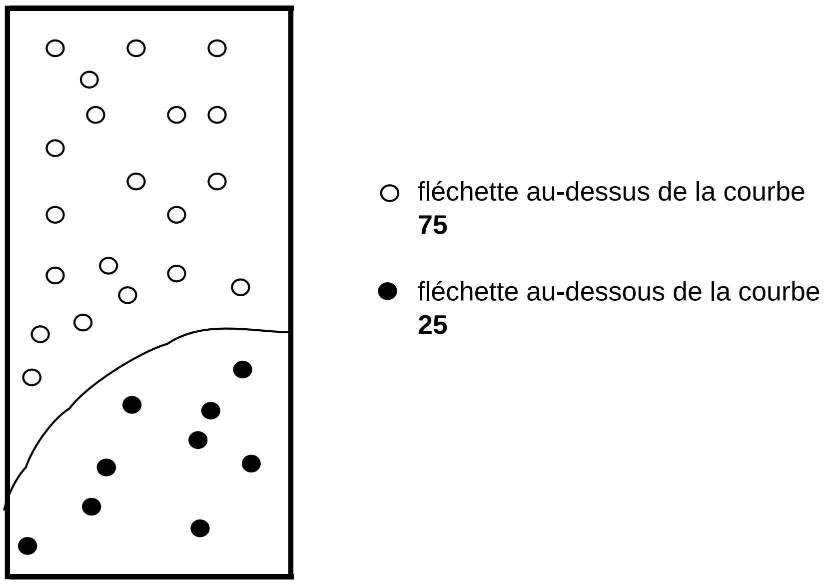
$$n_h = \#\text{fléchettes au-dessus de la courbe } y = f(x)$$
$$n_b = \#\text{fléchettes sous la courbe } y = f(x)$$

$$n = n_h + n_b = \#\text{ fléchettes totales lancées aléatoirement sur la cible.}$$

Exemple

On tire 100 fléchettes aléatoirement dans la cible, et on obtient

75 fléchettes arrivent en dessus ($n_h = 75$)
25 fléchettes arrivent en dessous ($n_b = 25$)



Si on sait que chaque fléchette arrive forcément dans la cible, et que l'on tire une 101-ième fléchette, qu'elle est la probabilité qu'elle arrive en dessous de la courbe ? La réponse naïve, et correcte est :

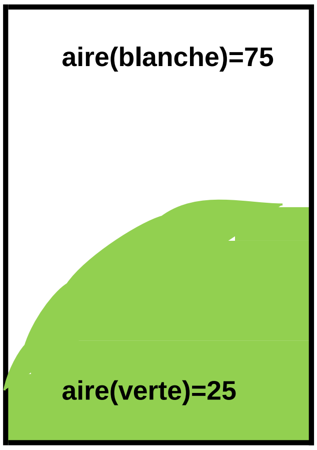
$$p(101 \; en \; dessous) = \frac{25}{25+75} = \frac{25}{100} = 25\%$$

De manière générale

$$\boxed{p(en\ dessous) \cong \frac{n_b}{n_h + n_b} = \frac{n_b}{n}} \qquad (\#)$$

Approche par aire

Si l'aire verte vaut 25 et l'aire blanche vaut 75



Qu'elle est la probabilité qu'une fléchette tirée aléatoirement dans la cible arrive dans la partie verte ? La réponse naïve qui est aussi juste est

$$p(verte) = \frac{aire(verte)}{aire(Totale)}$$
$$= \frac{aire(verte)}{aire(verte) + aire(blanche)} = \frac{25}{25+75} = 25\%$$

De manière générale

$$\boxed{p(en\ dessous) \cong \frac{aire(verte)}{aire(Totale)}} \qquad (\#\#)$$

Consolidation

Comme (#) et (##) sont égaux, on obtient :

$$\frac{n_b}{n} \cong \frac{aire(verte)}{aire(Totale)}$$

que l'on peut reformuler ainsi

$$aire(verte) \cong \frac{n_b}{n} aire(Totale)$$

ou encore comme suit

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx &\cong \frac{n_b}{n} aire(cible) \\ &\cong \frac{n_b}{n}\left(x_{\max} - x_{\min}\right) H\end{aligned}}$$

où H est la hauteur de la cible. Pour H il suffit de prendre n'importe quelle valeur qui est plus grande que f sur l'intervalle d'intégration.

$$H \geq \max_{[x_{\min}, x_{\max}]} \mathrm{f}(x)$$

Attention

L'algo présenté ici ne fonctionne que si f est positive sur l'intervalle d'intégration. Si telle n'est pas le cas, il est laissé au lecteur le soin d'adapter l'algorithme !

Applications PI

<u>But</u> :

Calculer une approximation du nombre PI, que l'on peut obtenir d'une intégrale.

<u>Application 1</u>

$\boxed{\pi = \int_0^1 f(x)dx}$ avec $\boxed{f(x) = \frac{4}{1+x^2}}$

<u>Application 2</u>

Soit $f:[-1,1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, x \to y = \sqrt{1-x^2}$ l'équation du demi-cercle de rayon 1. On a

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{\pi * 1^2}{2}$$

et aisni

$\boxed{\pi = 2\int_{-1}^{1} f(x)dx}$ avec $\boxed{f(x) = \sqrt{1-x^2}}$

Qualité de l'approximation

Elle est bornée par une asymptote horizontale (exe x : nombre de fléchettes, axe y = précision)

On peut espérer trouver 3 décimales justes environ.
Ensuite, même si vous tirez beaucoup, beaucoup plus de fléchettes, la qualité ne va plus s'améliorer de manière significative.

End