Capitolul 2

Formule combinatoriale

În acest capitol vom prezenta câteva formule combinatoriale clasice şi unele aplicaţii ale acestora.

2.1 Formula binomului lui Newton şi extinderi

Teorema 2.1.1 (formula binomului lui Newton).

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstraţie. Deoarece $(x+y)^n = (y+x)^n$, a doua egalitate este o consecinţă imediată a primei egalităţi. Demonstrăm această primă egalitate în trei etape.

1) Presupunem că $x, y \in \mathbb{N}$. Conform Propoziţiei 1.4.1, $(x+y)^n =$ numărul de aranjări cu repetiţie a n bile numerotate $1, \ldots, n$ în $x+y$ urne numerotate $1, \ldots, x+y$ şi neordonate.

Numărăm altfel aceste aranjări, şi anume după numărul k de bile aşezate în primele x urne. Evident, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Pentru k arbitrar fixat numărăm aranjările astfel:

- alegem cele k bile (din totalul de n) ce sunt aşezate în primele x urne; rezultă $\binom{n}{k}$ moduri posibile;

- pentru fiecare alegere de mai sus, aranjăm cele k bile în primele x urne; rezultă x^k moduri posibile (conform Propoziţiei 1.4.1);
- pentru fiecare alegere şi fiecare aranjare de mai sus, aranjăm cele $n-k$ bile rămase în ultimele y urne; rezultă y^{n-k} moduri posibile (conform Propoziţiei 1.4.1).

Deci obţinem $\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ aranjări ale celor n bile în cele $x+y$ urne, pentru k fixat.

Luând acum k variabil obţinem că numărul total de aranjări este egal cu $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$, deci are loc egalitatea din enunţ.

2) Presupunem că $x \in \mathbb{R}$ şi $y \in \mathbb{N}$. Considerând polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(X) = (X+y)^n - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k y^{n-k},$$

conform etapei 1) rezultă că $P(X) = 0\ \forall\, X \in \mathbb{N}$. Cum $\operatorname{grad} P \leq n$, rezultă că polinomul P este identic nul, deci $P(x) = 0$, adică are loc egalitatea din enunţ.

3) Fie acum $x, y \in \mathbb{R}$. Considerând polinomul $Q \in \mathbb{R}[Y]$,

$$Q(Y) = (x+Y)^n - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k Y^{n-k},$$

conform etapei 2) avem $Q(Y) = 0\ \forall\, Y \in \mathbb{N}$. Cum $\operatorname{grad} Q \leq n$, rezultă din nou că polinomul Q este identic nul, deci $Q(y) = 0$, adică are loc egalitatea din enunţ. $\square$

Observaţia 2.1.1. O altă demonstraţie, elementară, a formulei binomului lui Newton se obţine prin inducţie după n.

Teorema 2.1.2 (formula multinomului lui Newton). *Pentru orice $m \in \mathbb{N}^\star$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ avem*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathcal{N}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m},$$

unde $\mathcal{N} = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) | n_i \in \mathbb{N}\ \forall\, i,\ n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n\}$.

Demonstraţie. Procedăm analog ca la demonstraţia teoremei anterioare. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{N}$ egalitatea rezultă numărând cele $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ aranjări cu repetiţie a n bile numerotate $1, \ldots, n$ în $x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ urne numerotate şi neordonate, după numerele $(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathcal{N}$, unde n_1 reprezintă numărul de bile aşezate în primele x_1 urne, n_2 reprezintă numărul de bile aşezate în următoarele x_2 urne, ..., n_m reprezintă numărul de bile aşezate în ultimele x_m urne.

Extinderea la $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ se face treptat: $x_1 \in \mathbb{R}, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{N}$, apoi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3, \ldots, x_m \in \mathbb{N}, \ldots,$ în final $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, de fiecare dată obţinându-se că polinomul definit prin diferenţa dintre cei doi membri ai egalităţii din enunţ şi având necunoscuta x_1, apoi $x_2, \ldots$, în final x_m, este identic nul (deoarece din nou are gradul cel mult n şi orice număr natural este rădăcină, conform etapei anterioare). □

Observaţia 2.1.2. Conform Propoziţiei 1.11.1, suma din teorema de mai sus are $\left(\!\binom{m}{n}\!\right)$ termeni.

Observaţia 2.1.3. Luând $m = 2$ în formula multinomului se obţine formula binomului lui Newton. Datorită acestor formule, combinările $\binom{n}{k}$ se numesc şi **numere binomiale**, iar permutările cu repetiţie $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ se numesc şi **numere multinomiale**.

Următoarea definiţie extinde definiţia combinărilor.

Definiţia 2.1.1. *Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Numărul*

$$\binom{x}{n} = \frac{[x]_n}{n!}$$

se numeşte ***combinări de*** x ***luate câte*** n*, iar numărul*

$$\left(\!\binom{x}{n}\!\right) = \frac{[x]^n}{n!}$$

se numeşte ***combinări cu repetiţie de*** x ***luate câte*** n*.*

Exemplul 2.1.1. Avem

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} = \frac{1}{16}, \quad \left(\!\binom{\frac{1}{2}}{3}\!\right) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)(\frac{1}{2} + 2)}{3!} = \frac{5}{16}.$$

Teorema 2.1.3. *Avem*

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k,\ \forall\, x \in (-1,1),\ \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Pentru $r \in \mathbb{N}$ egalitatea poate fi obţinută luând $y = 1$ în formula binomului lui Newton şi folosind că

$$\binom{r}{k} = \frac{[r]_k}{k!} = 0\ \forall\, k > r.$$

Fie acum $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Funcţia $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^r$ este indefinit derivabilă, derivata de ordinul k fiind $f^{(k)}(x) = r(r-1)\ldots(r-k+1)(1+x)^{r-k}$.

Seria de puteri asociată funcţiei f în punctul $x_0 \in (-1,1)$ este

$$\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} (1+x_0)^{r-k} x^k.$$

Raza de convergenţă a acestei serii de puteri este

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{r}{k}(1+x_0)^{r-k}}{\binom{r}{k+1}(1+x_0)^{r-k-1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)(1+x_0)}{r-k} \right| = 1 + x_0.$$

Pentru orice compact $[-a,a] \subseteq (-1,1)$ obţinem că $\rho = 1 + x_0 \geq 1 - a > 0$ $\forall\, x_0 \in [-a,a]$. Conform teoriei seriilor de puteri (a se vedea, de exemplu, [4] Cor.13 pag. 273), rezultă că funcţia f este analitică, deci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,\ \forall x \in (-1,1).$$

Cum $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dbinom{r}{k}$, obţinem egalitatea din enunţ. $\square$

2.2 Formulele lui Vandermonde şi Nörlund

Teorema 2.2.1 (formulele lui Vandermonde)**.** *Avem:*

i) $[x+y]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_k [y]_{n-k},\ \forall\, x,y \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N};$

ii) $\displaystyle\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

iii) $\displaystyle\sum_{k=-m}^{n}\binom{x}{m+k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{m+n}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Demonstraţia formulei de la punctul i) este analogă celei a binomului lui Newton, înlocuind aranjările cu repetiţie de bile numerotate în urne numerotate şi neordonate cu aranjările fără repetiţie de bile numerotate în urne numerotate, şi aplicând astfel Propoziţia 1.5.1 în locul Propoziţiei 1.4.1. Remarcăm că diferenţa dintre cei doi membri ai egalităţii date este din nou un polinom de grad cel mult n, atât în variabila x cât şi în variabila y.

Formula de la punctul ii) se obţine uşor din cea de la punctul i):

$$\binom{x+y}{n} = \frac{1}{n!}[x+y]_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}[x]_k[y]_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}.$$

Formula de la punctul iii) rezultă uşor din cea de la punctul ii), schimbând variabila de sumare k cu $l = m + k$:

$$\sum_{k=-m}^{n}\binom{x}{m+k}\binom{y}{n-k} = \sum_{l=0}^{m+n}\binom{x}{l}\binom{y}{m+n-l} = \binom{x+y}{m+n}.$$

□

Definiţia 2.2.1. *Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, definim* $\displaystyle\binom{x}{n} = 0$.

Observaţia 2.2.1. Cu Definiţia 2.2.1, formula iii) din teorema anterioară poate fi scrisă sub forma:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\binom{x}{m+k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{m+n}.$$

Teorema 2.2.2 (formulele lui Nörlund)**.** *Avem:*

i) $\displaystyle [x+y]^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[x]^k[y]^{n-k}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

ii) $\left(\!\!\binom{x+y}{n}\!\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{x}{k}\!\!\right) \left(\!\!\binom{y}{n-k}\!\!\right)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

iii) $\sum_{k=m-x}^{y-n} \binom{x+k}{m}\binom{y-k}{n} = \binom{x+y+1}{m+n+1}$, $\forall\, x, y, m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Demonstraţia formulei de la punctul i) este din nou analogă celei a binomului lui Newton, înlocuind acum aranjările cu repetiţie de bile numerotate în urne numerotate şi neordonate cu aranjările cu repetiţie de bile numerotate în urne numerotate şi ordonate, şi aplicând astfel Propoziţia 1.7.1 în locul Propoziţiei 1.4.1. Remarcăm din nou că diferenţa dintre cei doi membri ai egalităţii date este un polinom de grad cel mult n, atât în variabila x cât şi în variabila y.

Formula de la punctul ii) se obţine uşor din cea de la punctul i):

$$\left(\!\!\binom{x+y}{n}\!\!\right) = \frac{[x+y]^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}[x]^k[y]^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{x}{k}\!\!\right)\left(\!\!\binom{y}{n-k}\!\!\right).$$

Pentru demonstrarea formulei de la punctul iii) vom utiliza următoarele **formule de trecere între combinări şi combinări cu repetiţie**

$$\binom{x}{n} = \frac{[x]_n}{n!} = \frac{[x-n+1]^n}{n!} = \left(\!\!\binom{x-n+1}{n}\!\!\right), \forall x, n \in \mathbb{N}, n \le x+1, \tag{2.2.1}$$

$$\left(\!\!\binom{x}{n}\!\!\right) = \frac{[x]^n}{n!} = \frac{[x+n-1]_n}{n!} = \binom{x+n-1}{n}, \ \forall\, x, n \in \mathbb{N},\ (x,n) \ne (0,0), \tag{2.2.2}$$

precum şi **formulele combinărilor complementare**

$$\binom{x}{n} = \binom{x}{x-n}, \ \forall\, x, n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.3}$$

$$\left(\!\!\binom{x}{n}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n+1}{x-1}\!\!\right), \ \forall\, x, n \in \mathbb{N},\ x \ne 0. \tag{2.2.4}$$

Aceste formule pot fi uşor obţinute folosind scrierile

$$\binom{x}{n} = \frac{x!}{n!(x-n)!}, \quad \left(\!\!\binom{x}{n}\!\!\right) = \binom{x+n-1}{n} = \frac{(x+n-1)!}{n!(x-1)!}.$$

Folosind succesiv formulele (2.2.1), (2.2.4), schimbarea de variabilă $l = x + k - m$, formula de la punctul ii), (2.2.2) şi (2.2.3) avem

$$\begin{aligned}\sum_{k=m-x}^{y-n}\binom{x+k}{m}\binom{y-k}{n} &= \sum_{k=m-x}^{y-n}\left(\!\!\binom{x+k-m+1}{m}\!\!\right)\left(\!\!\binom{y-k-n+1}{n}\!\!\right)\\ &= \sum_{k=m-x}^{y-n}\left(\!\!\binom{m+1}{x+k-m}\!\!\right)\left(\!\!\binom{n+1}{y-k-n}\!\!\right)\\ &= \sum_{l=0}^{x+y-m-n}\left(\!\!\binom{m+1}{l}\!\!\right)\left(\!\!\binom{n+1}{x+y-m-n-l}\!\!\right)\\ &= \left(\!\!\binom{m+n+2}{x+y-m-n}\!\!\right)\\ &= \binom{x+y+1}{x+y-m-n} = \binom{x+y+1}{m+n+1}.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.3 (formulele multinomiale ale lui Vandermonde şi Nörlund). *Pentru orice $m \in \mathbb{N}^\star$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ avem*

i) $$[x_1+x_2+\cdots+x_m]_n = \sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_m)\in\mathcal{N}}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m}[x_1]_{n_1}[x_2]_{n_2}\ldots[x_m]_{n_m},$$

ii) $$[x_1+x_2+\cdots+x_m]^n = \sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_m)\in\mathcal{N}}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m}[x_1]^{n_1}[x_2]^{n_2}\ldots[x_m]^{n_m},$$

unde $\mathcal{N} = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) | n_i \in \mathbb{N}\,\forall\, i,\ n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n\}$.

Demonstraţie. Se procedează analog ca la demonstraţia Teoremei 2.1.2, înlocuind aranjările cu repetiţie de bile numerotate în urne numerotate şi neordonate cu aranjările fără repetiţie de bile numerotate în urne numerotate pentru prima formulă (Vandermonde), respectiv cu aranjările cu repetiţie de bile numerotate în urne numerotate şi ordonate pentru cea de-a doua formulă (Nörlund). □

Prezentăm în continuare câteva consecinţe imediate ale formulelor lui Newton, Vandermonde şi Nörlund.

Corolarul 2.2.1. *Fie $n \in \mathbb{N}^\star$. Atunci:*

a) numărul de compuneri ale lui n cu cel mult n termeni este

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) = \binom{2n}{n+1};$$

b) numărul de compuneri ale lui n cu termeni nenuli este

$$\sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} = 2^{n-1}.$$

Demonstraţie. a) Aplicând Propoziţia 1.11.1, formula (2.2.2) şi formula iii) a lui Nörlund, numărul cerut este

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) = \sum_{m=1}^{n} \binom{m+n-1}{n}\binom{n-m}{0} = \binom{2n}{n+1}.$$

b) Aplicând Propoziţia 1.11.1 şi formula binomului lui Newton, numărul cerut este

$$\sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} \cdot 1^{m-1} \cdot 1^{n-m} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

□

Corolarul 2.2.2. *Fie $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. Atunci:*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{m};$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n-m+1}.$

Demonstraţie. a) Utilizăm formula combinărilor complementare şi formula iii) a lui Vandermonde:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{m-k}=\binom{m+n}{m}.$$

b) Utilizăm formula

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

(ce poate fi uşor verificată utilizând, de exemplu, scrierea cu factoriale), formula combinărilor complementare şi formula iii) a lui Nörlund:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} &= \frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{k}{0}\\ &= \frac{1}{\binom{n}{m}}\binom{n+1}{n-m+1}=\frac{m!(n-m)!}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-m+1)!m!}\\ &= \frac{n+1}{n-m+1}.\end{aligned}$$

□

2.3 Principiul includerii şi excluderii

Definiţia 2.3.1. *Un* ***spaţiu măsurabil*** *este o pereche* $(\Omega,\mathcal{B})$*, unde* Ω *este o mulţime iar* $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ *este o familie nevidă de submulţimi (părţi) ale lui* Ω *având următoarele două proprietăţi:*

1) dacă $A\in\mathcal{B}$*, atunci* $\Omega\setminus A\in\mathcal{B}$*;*

2) dacă $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}\subseteq\mathcal{B}$*, atunci* $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}$*.*

$\mathcal{B}$ *se numeşte* ***corp borelian (σ-corp, σ-algebră)*** *pe* Ω*.*

Propoziţia 2.3.1. *Fie* $(\Omega, \mathcal{B})$ *un spaţiu măsurabil. Atunci au loc următoarele proprietăţi:*

1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{B}$*;*

2) dacă $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^\star} \subseteq \mathcal{B}$*, atunci* $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$;

3) dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$*, atunci* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$ *şi* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$;

4) dacă $A, B \in \mathcal{B}$*, atunci* $A \setminus B \in \mathcal{B}$*.*

Demonstraţie. 1) Fie $A \in \mathcal{B}$ (există, deoarece $\mathcal{B} \neq \emptyset$). Atunci $\Omega \setminus A \in \mathcal{B}$ (proprietatea 1) din Definiţia 2.3.1). Luând $A_1 = \Omega \setminus A$, $A_i = A \, \forall\, i \geq 2$ şi aplicând proprietatea 2) din Definiţia 2.3.1, rezultă că $(\Omega \setminus A) \cup A \in \mathcal{B}$, adică $\Omega \in \mathcal{B}$. Conform proprietăţii 1) din Definiţia 2.3.1 obţinem că $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{B}$.

2) Folosim că $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \setminus [\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_i)]$ şi proprietăţile 1) şi 2) din Definiţia 2.3.1.

3) Luăm $A_i = A_1 \, \forall i \geq n+1$ şi aplicăm proprietatea 2) din Definiţia 2.3.1 şi proprietatea 2) din această propoziţie.

4) Folosim că $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B)$ şi folosim proprietatea 1) din Definiţia 2.3.1 şi proprietatea 3) din această propoziţie. □

Definiţia 2.3.2. *Fie* $(\Omega, \mathcal{B})$ *un spaţiu măsurabil. O* ***măsură finită*** *pe spaţiul* $(\Omega, \mathcal{B})$ *este o funcţie* $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ *având următoarele două proprietăţi:*

1) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

2) dacă submulţimile $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^\star} \subseteq \mathcal{B}$ *sunt disjuncte două câte două, atunci* $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$*.*

Propoziţia 2.3.2. *Fie* μ *o măsură finită pe spaţiul măsurabil* $(\Omega, \mathcal{B})$*. Dacă submulţimile* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$ *sunt disjuncte două câte două, atunci* $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$*.*

Demonstraţie. Luând $A_i = \emptyset \ \forall\, i \geq n+1$ şi aplicând proprietăţile 2) şi 1) din Definiţia 2.3.2 obţinem

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i),$$

deoarece $\mu\,(A_i) = \mu(\emptyset) = 0 \ \forall\, i \geq n+1$. □

Teorema 2.3.1 (Principiul includerii şi excluderii)**.**

a) Fie μ *o măsură finită pe spaţiul măsurabil* $(\Omega, \mathcal{B})$*. Dacă* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$*, atunci*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

b) Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sunt mulţimi finite* $(n \in \mathbb{N}^\star)$*, atunci*

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \operatorname{card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Demonstraţie. a) Folosim metoda inducţiei matematice. Pentru $n = 1$ egalitatea din enunţ devine $\mu(A_1) = \mu(A_1)$. Pentru $n = 2$ trebuie să demonstrăm că

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).$$

Într-adevăr, folosind proprietăţile măsurii date de Definiţia 2.3.2 şi Propoziţia 2.3.2 avem

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

Presupunem acum adevărată egalitatea din enunţ pentru orice n mulţimi $A_1', A_2', \ldots, A_n' \in \mathcal{B}$, unde $n \geq 2$, şi o demonstrăm pentru $n+1$ mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{B}$. Folosind proprietăţile măsurii, egalitatea de mai sus şi ipoteza de inducţie avem

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mu(A_{n+1}) - \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \mu(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + (-1)^{1-1} \sum_{i_1 = n+1} \mu(A_{i_1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k = n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k = n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}),
\end{aligned}$$

şi astfel demonstraţia prin inducţie este încheiată.

b) Fie $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ şi $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ mulţimea tuturor submulţimilor lui Ω. Evident, $(\Omega, \mathcal{B})$ este un spaţiu măsurabil, iar funcţia

$$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty),\ \mu(A) = \mathrm{card}\,(A)\ \forall\, A \in \mathcal{B}$$

este o măsură finită pe acest spaţiu, deci aplicând formula de la punctul a) obţinem egalitatea din enunţ. $\square$

Corolarul 2.3.1. *Fie $n \in \mathbb{N}^\star$. Atunci numărul permutărilor $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ cu proprietatea că $\sigma(i) \neq i\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ (numite **permutări fără puncte fixe** sau **deranjamente**) este*

$$D(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right).$$

Demonstraţie. Fie

$$A = \{\sigma | \sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\},\ \sigma(i) \neq \sigma(j)\ \forall\, i \neq j\}$$

mulţimea permutărilor de ordinul n, şi fie

$$A_i = \{\sigma \in A | \sigma(i) = i\},\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Pentru orice $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ avem

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} = \{\sigma \in A | \sigma(i_1) = i_1, \ldots, \sigma(i_k) = i_k\},$$

deci, conform Propoziţiei 1.6.1,

$$\mathrm{card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!,$$

deoarece orice permutare $\sigma \in A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ este bine determinată de restricţia sa

$$\overline{\sigma} : \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\} \to \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\},\ \overline{\sigma}(i) = \sigma(i)\ \forall\, i,$$

care este o permutare de ordinul $n - k$. Aplicând Principiul includerii şi excluderii şi Propoziţia 1.6.1 avem

$$\begin{aligned}
D(n) &= \mathrm{card}\,(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mathrm{card}\,(A) - \mathrm{card}\,(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \\
&= \mathrm{card}\,(A) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathrm{card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (n-k)! \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (n-k)! \binom{n}{k} \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (n-k)! \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= n! \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \frac{1}{k!} \right).
\end{aligned}$$

Am utilizat faptul că o sumă de forma $\sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$ are $\binom{n}{k}$ termeni (conform Propoziţiei 1.8.1). □

Corolarul 2.3.2. *Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Atunci*

numărul de cuvinte de lungime n ce conţin toate literele unui alfabet cu m litere

= numărul de funcţii surjective definite pe o mulţime cu n elemente, cu valori într-o mulţime cu m elemente

= numărul de aranjări cu repetiţie a n bile numerotate în m urne numerotate, neordonate şi nevide (adică orice urnă conţine cel puţin o bilă)

$$= m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} 0^n \overset{def}{=} s_{n,m}.$$

Demonstraţie. Egalitatea dintre numerele de cuvinte, de funcţii şi de aranjări din enunţ se obţine cu aceleaşi corespondenţe bijective din Propoziţia 1.4.1. Rămâne de demonstrat că numărul de funcţii surjective $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ este egal cu $s_{n,m}$.

Fie

$$A = \{f | f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}\}$$

şi fie

$$A_i = \{f \in A | i \notin \mathrm{Im}(f)\}, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\},$$

unde $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) | x \in \{1, \ldots, n\}\}$ reprezintă imaginea funcţiei f.

Pentru orice $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ avem

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} = \{f \in A | i_1, \ldots, i_k \notin \mathrm{Im}(f)\},$$

deci, conform Propoziţiei 1.4.1,

$$\mathrm{card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (m-k)^n,$$

deoarece orice funcţie $f \in A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ este bine determinată de restricţia sa

$$\overline{f} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\},\ \overline{f}(x) = f(x)\, \forall\, x \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mulţimea funcţiilor surjective $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ este $A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.

Aplicând Principiul includerii şi excluderii şi Propoziţia 1.4.1 avem

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i) &= \operatorname{card}(A) - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= m^n - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} (m-k)^n \\
&= m^n - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}(m-k)^n \binom{m}{k} = s_{n,m}.
\end{aligned}$$

□

Propoziţia 2.3.3. *Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$. Atunci*

$$s_{n,m} = \sum_{(n_1,\ldots,n_m) \in \mathcal{N}^\star} \binom{n}{n_1, \ldots, n_m},$$

unde $\mathcal{N}^\star = \{(n_1, \ldots, n_m) | n_i \in \mathbb{N}^\star \; \forall\, i,\; n_1 + \ldots + n_m = n\}$.

Demonstraţie. Conform corolarului anterior, $s_{n,m}$ reprezintă numărul de aranjări cu repetiţie a n bile numerotate în m urne numerotate, neordonate şi nevide. Numărăm aceste aranjări după numerele $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathcal{N}^\star$, unde n_i reprezintă numărul de bile aşezate în urna i, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Pentru $(n_1, \ldots, n_m)$ arbitrar fixat, conform Propoziţiei 1.10.1 avem $\binom{n}{n_1, \ldots, n_m}$ astfel de aranjări.

Luând $(n_1, \ldots, n_m)$ variabil obţinem egalitatea din enunţ. □

Algoritmul 2.3.1 (**de generare a funcţiilor surjective**). Conform demonstraţiei propoziţiei anterioare, pentru a genera funcţiile surjective $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ $(n \ge m)$ putem proceda astfel:

- generăm compunerile cu termeni nenuli $n = t_1 + t_2 + \cdots + t_m$, utilizând Algoritmul 1.11.2;

- pentru fiecare astfel de compunere, generăm permutările cu repetiţie de n luate câte $t_1, t_2, \cdots, t_m$, utilizând Algoritmul 1.10.1, iar pentru fiecare astfel de permutare $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ afişăm funcţia surjectivă corespunzătoare, dată de

$$f(i) = p_i,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Programul C++ corespunzător este:

```
#include<iostream.h>    //Generarea FUNCTIILOR SURJECTIVE
#include<conio.h>
int m,n,nr=0;
void afisare_functie(int x[20],int nx)
{ int i;
  cout<<++nr<<") ";
  for(i=1;i<=nx;i++) cout<<"f("<<i<<")="<<x[i]<<" ";
  cout<<endl;
  if (wherey()==25)
   { cout<<"   <enter> pt. continuare";
     getch();clrscr();
   }
}
void permutari_cu_repetitie(int m,int N[20])
{ int p[20],i,k,j,aux;
  n=0; for(i=1;i<=m;i++) n=n+N[i];
  i=0; for(j=1;j<=m;j++)
  for(k=1;k<=N[j];k++) p[++i]=j;
  afisare_functie(p,n);
  do
  { k=n-1;
    while ((p[k]>=p[k+1])&&(k>0)) k=k-1;
    if (k>0)
    { j=n;
      while(p[j]<=p[k]) j=j-1;
      aux=p[k]; p[k]=p[j]; p[j]=aux;
      for(i=1;i<=(n-k)/2;i++)
      { aux=p[k+i]; p[k+i]=p[n-i+1]; p[n-i+1]=aux;
      }
      afisare_functie(p,n);
    }
  }
  while(k>0);
}
void functii_surjective(int n, int m)
{ int t[20],i,k;
  for(i=1;i<=m-1;i++) t[i]=1;
  t[m]=n-m+1;
  permutari_cu_repetitie(m,t);
  do
  { k=m;
    while ((t[k]==1)&&(k>1)) k=k-1;
    if (k>1)
```

```
    { t[k-1]++; t[m]=t[k]-1;
      if(k<m) t[k]=1;
      permutari_cu_repetitie(m,t);
    }
  }
  while(k>1);
}
void main(void)
{ clrscr();
  cout<<"Dati nr. de elem. din domeniu: n=";cin>>n;
  cout<<"Dati nr. de elem. din codomeniu (<=n): m=";cin>>m;
  cout<<"Functiile surjective f:{1,...,n}-->{1,...,m} sunt:\n";
  functii_surjective(n,m);
  getch();
}
```

2.4 Serii şi funcţii generatoare

În această secţiune vom descrie şi utiliza metoda funcţiilor generatoare pentru a obţine câteva formule combinatoriale.

Definiţia 2.4.1. *a)* ***Seria generatoare*** *a şirului numeric* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *este seria formală de puteri* $\sum\limits_{n\geq n_0} a_nX^n$, *iar* ***funcţia generatoare*** *a acestui şir este dată de suma seriei, adică* $F(X)=\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_nX^n$.

b) ***Seria generatoare*** *a şirului numeric dublu* $(a_{n,k})_{n\geq n_0,k\geq k_0}$ *este seria formală dublă de puteri* $\sum\limits_{n\geq n_0}\sum\limits_{k\geq k_0} a_{n,k}X^nY^k$, *iar* ***funcţia generatoare*** *a acestui şir dublu este dată de suma seriei duble, adică*

$$F(X,Y)=\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{k=k_0}^{\infty} a_{n,k}X^nY^k.$$

Observaţia 2.4.1. Domeniul de definiţie al funcţiei generatoare este, desigur, domeniul de convergenţă al seriei generatoare corespondente.

Metoda funcţiilor generatoare este fundamentată de următorul rezultat binecunoscut relativ la seriile de puteri (a se vedea, de exemplu, [4] Prop. 6 şi 2, pag. 258, 256).

Lema 2.4.1. *Dacă* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *şi* $(b_n)_{n\geq n_0}$ *sunt două şiruri numerice având funcţiile generatoare* $F(X) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n X^n$ *şi* $G(X) = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n X^n$, *atunci avem echivalenţa*

$$a_n = b_n, \forall n \geq n_0 \Longleftrightarrow F(X) = G(X),\ \forall X \in (0, \varepsilon),$$

unde $(0, \varepsilon)$ *este un interval pe care ambele serii sunt convergente,* $\varepsilon > 0$.

Pe baza acestei leme se obţine următoarea metodă, numită **metoda funcţiilor (seriilor) generatoare** pentru demonstrarea unor identităţi de forma $a_n = b_n, \forall n \geq n_0$:

- se calculează funcţia generatoare $F(X) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n X^n$ a şirului din membrul stâng al identităţii date;

- se calculează funcţia generatoare $G(X) = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n X^n$ a şirului din membrul drept al identităţii date;

- se obţine că $F(X) = G(X)$ pe un interval $(0, \varepsilon)$ pe care ambele serii sunt convergente, cu $\varepsilon > 0$;

- se concluzionează că identitatea dată este adevărată.

Observaţia 2.4.2. Metoda se aplică şi pentru şiruri numerice duble sau, mai mult, multidimensionale, putând fi utilizată cu succes pentru demonstrarea unor identităţi combinatoriale cu enunţuri mai mult sau mai puţin ”prietenoase”.

Teorema 2.4.1 (funcţiile generatoare ale combinărilor)**.** *Avem:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}X^k = (1+X)^n,\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall X\in\mathbb{R}; \tag{2.4.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}X^n = \frac{X^k}{(1-X)^{k+1}},\ \forall\, k\in\mathbb{N},\ \forall X\in(-1,1); \tag{2.4.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}X^nY^k = \frac{1}{1-X-XY},\ \forall\, X,Y\in\left(0,\frac{1}{2}\right); \tag{2.4.3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\binom{n}{k}\!\right)X^k = \frac{1}{(1-X)^n},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall X\in(-1,1); \tag{2.4.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\!\binom{n}{k}\!\right)X^n = \frac{X}{(1-X)^{k+1}},\ \forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ \forall X\in(-1,1). \tag{2.4.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\binom{n}{k}\!\right)X^nY^k = \frac{1-Y}{1-X-Y},\ \forall\, X,Y\in\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{2.4.6}$$

Demonstraţie. Deoarece $\binom{n}{k} = 0$ pentru orice $k > n$, egalitatea (2.4.1) rezultă imediat conform formulei binomului lui Newton. Egalitatea (2.4.4) poate fi demonstrată, de exemplu, prin derivarea sumei seriei geometrice. Ea este evidentă pentru $n = 0$, iar pentru $n \geq 1$, condiţiile de derivare termen cu termen a unei serii de puteri fiind îndeplinite (a se vedea, de exemplu, [4] Cor. 5, pag. 258), avem:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-X)^n} &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{1-X}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}X^k\right)^{(n-1)}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(X^k\right)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=n-1}^{\infty}\left(X^k\right)^{(n-1)}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=n-1}^{\infty}k(k-1)\dots(k-n+2)X^{k-n+1}\\
&= \sum_{k=n-1}^{\infty}\binom{k}{n-1}X^{k-n+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n-1}X^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}X^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\binom{n}{k}\!\right)X^k.
\end{aligned}$$

La ultimele două egalităţi am utilizat formulele (2.2.3) şi (2.2.2). O altă demonstraţie a egalităţii (2.4.4) se obţine utilizând formula

$$\begin{aligned}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) &= \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k\frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!}\\ &= (-1)^k\binom{-n}{k}\end{aligned}$$

şi Teorema 2.1.3:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)X^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-X)^k = (1-X)^{-n}.$$

Folosind formulele (2.2.1)-(2.2.4) şi egalitatea (2.4.4) putem obţine uşor egalităţile (2.4.2) şi (2.4.5):

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}X^n &= \sum_{n=k}^{\infty}\left(\!\!\binom{n-k+1}{k}\!\!\right)X^n = X^k\sum_{n=k}^{\infty}\left(\!\!\binom{k+1}{n-k}\!\!\right)X^{n-k}\\ &= X^k\sum_{n=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{k+1}{n}\!\!\right)X^n = \frac{X^k}{(1-X)^{k+1}};\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)X^n &= X\sum_{n=1}^{\infty}\left(\!\!\binom{k+1}{n-1}\!\!\right)X^{n-1}\\ &= X\sum_{n=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{k+1}{n}\!\!\right)X^n = \frac{X}{(1-X)^{k+1}}.\end{aligned}$$

Folosind egalităţile (2.4.1) şi, respectiv, (2.4.4), precum şi suma seriei geometrice, putem obţine uşor egalităţile (2.4.3) şi (2.4.6):

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}X^nY^k &= \sum_{n=0}^{\infty}X^n(1+Y)^n = \frac{1}{1-X-XY};\\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)X^nY^k &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{(1-Y)^n} = \frac{1}{1-\frac{X}{1-Y}} = \frac{1-Y}{1-X-Y}.\end{aligned}$$

Demonstraţia teoremei este astfel încheiată. □

Propoziţia 2.4.1. *Pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, avem*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\!\!\binom{m}{k}\!\!\right) = (-1)^n \binom{m-1}{n}.$$

Demonstraţie. Vom aplica metoda funcţiilor generatoare. Notăm

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\!\!\binom{m}{k}\!\!\right) \text{ şi } b_{n,m} = (-1)^n \binom{m-1}{n}.$$

Folosind Teorema 2.4.1 şi suma seriei geometrice avem

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} X^n Y^m &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^n \sum_{m=1}^{\infty} \left(\!\!\binom{m}{k}\!\!\right) Y^m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^k}{(1-X)^{k+1}} \cdot \frac{Y}{(1-Y)^{k+1}} \\
&= \frac{Y}{(1-X)(1-Y)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-X}{(1-X)(1-Y)} \right)^k \\
&= \frac{Y}{(1-X)(1-Y)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{X}{(1-X)(1-Y)}} = \frac{Y}{1 - Y + XY} \qquad (2.4.7)
\end{aligned}$$

(pentru orice $X, Y \in (0,1)$ cu $\frac{X}{(1-X)(1-Y)} < 1$).

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} X^n Y^m &= \sum_{m=1}^{\infty} Y^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m-1}{n} (-X)^n \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} Y^m (1-X)^{m-1} = \frac{Y}{1 - Y(1-X)} = \frac{Y}{1 - Y + XY} \qquad (2.4.8)
\end{aligned}$$

(pentru orice $X, Y \in (0,1)$).

Din relaţiile (2.4.7) şi (2.4.8), conform metodei funcţiilor generatoare rezultă egalitatea din enunţ. □

Observaţia 2.4.3. Reamintim că sumele duble pot fi permutate când au termenii nenegativi sau când măcar una din sume are un număr finit de termeni (nenuli).

Corolarul 2.4.1.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)=0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^\star.$$

Demonstraţie. Luăm $m=n$ în propoziţia anterioară. □

Definiţia 2.4.2. *Fie $n,B,S\in\mathbb{N},\ n\geq 1,\ B\geq 2$.*

a) Notăm cu $f_B(n,S)$ numărul de numere naturale de n cifre din baza B cu suma cifrelor egală cu S.

b) Notăm cu $g_B(n,S)$ numărul de numere naturale mai mici decât B^n (adică de cel mult n cifre în baza B) cu suma cifrelor egală cu S.

Formula de calcul pentru $g_B(n,S)$ este dată în următoarea propoziţie.

Propoziţia 2.4.2. *Pentru orice $n,B,S\in\mathbb{N},\ n\geq 1,\ B\geq 2$, avem*

$$g_B(n,S)=\sum_{k=0}^{\min\{n,\lfloor S/B\rfloor\}}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+S-Bk-1}{n-1},\tag{2.4.9}$$

unde $\lfloor x\rfloor$ reprezintă partea întreagă (inferioară) a numărului real x.

Demonstraţie. Demonstraţia 1. Vom utiliza metoda funcţiilor generatoare. Avem

$$\sum_{S=0}^{\infty}g_B(n,S)X^S=\Big(1+X+X^2+\ldots+X^{B-1}\Big)^n,\tag{2.4.10}$$

deoarece coeficientul lui X^S în dezvoltarea $\Big(1+X+X^2+\ldots+X^{B-1}\Big)^n$ este egal cu numărul termenilor de forma $X^{i_1}X^{i_2}\ldots X^{i_n}$ cu proprietăţile

$$i_1+i_2+\ldots+i_n=S,\ i_1,i_2,\ldots,i_n\in\{0,1,\ldots,B-1\},$$

adică cu $g_B(n,S)$.

Pentru orice $n,S,B\in\mathbb{N},\ n\geq 1,\ B\geq 2$, fie

$$c_B(n,S)=\sum_{k=0}^{\min\{n,\lfloor S/B\rfloor\}}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+S-Bk-1}{n-1}.\tag{2.4.11}$$

Folosind expresiile funcţiilor generatoare ale combinărilor date de formulele (2.4.2) şi (2.4.1) avem

$$\begin{aligned}
\sum_{S=0}^{\infty} c_B(n,S)X^S &= \sum_{S=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\min\{n,\lfloor S/B\rfloor\}} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+S-Bk-1}{n-1} X^S \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{S=Bk}^{\infty} \binom{n+S-Bk-1}{n-1} X^S \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} X^{Bk+1-n} \frac{X^{n-1}}{(1-X)^n} \\
&= \frac{1}{(1-X)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} X^{Bk} = \frac{1}{(1-X)^n}\Big(1-X^B\Big)^n \\
&= \Big(1+X+X^2+\ldots+X^{B-1}\Big)^n, \ \forall X \in (-1,1). \qquad (2.4.12)
\end{aligned}$$

Din relaţiile (2.4.10) şi (2.4.12) obţinem că

$$\sum_{S=0}^{\infty} g_B(n,S)X^S = \sum_{S=0}^{\infty} c_B(n,S)X^S, \ \forall X \in (-1,1),$$

deci conform metodei funcţiilor generatoare rezultă egalitatea din enunţ. *Demonstraţia 2.* Vom utiliza acum Principiul includerii şi excluderii. Fie $n, B, S \in \mathbb{N}$ arbitrar fixaţi, $n \geq 1$, $B \geq 2$. Definim mulţimea A şi submulţimile sale $A_1, A_2, \ldots, A_n$ astfel:

$$\begin{aligned}
A &= \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) | c_1 + c_2 + \ldots + c_n = S, \ c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{N}\}, \\
A_i &= \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in A | c_i \geq B\}, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

Evident,

$$g_B(n,S) = \mathrm{card}\Big(A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)\Big). \qquad (2.4.13)$$

Aplicând formula de numărare a compunerilor, dată în Propoziţia 1.11.1, avem

$$\mathrm{card}\,(A) = \left(\!\!\binom{n}{S}\!\!\right). \qquad (2.4.14)$$

Pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi orice $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ avem

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in A | c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k} \geq B\},$$

deci notând

$$c_i' = \begin{cases} c_i - B, & \text{dacă} \quad i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}, \\ c_i, & \text{dacă} \quad i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}, \end{cases} \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

avem echivalenţa

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \iff \begin{cases} c_1' + c_2' + \ldots + c_n' = S - Bk, \\ c_1', c_2', \ldots, c_n' \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Aplicând formula de numărare a compunerilor, dată în Propoziţia 1.11.1, avem

$$\operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \begin{cases} \left(\!\!\binom{n}{S - Bk}\!\!\right), & \text{pentru } k \le \lfloor S/B \rfloor, \\ 0, & \text{pentru } k > \lfloor S/B \rfloor. \end{cases} \tag{2.4.15}$$

Aplicând acum Principiul includerii şi excluderii, din relaţiile (2.4.13), (2.4.14) şi (2.4.15) rezultă că

$$\begin{aligned} g_B(n, S) &= \operatorname{card}\Big(A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)\Big) \\ &= \operatorname{card}(A) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\ &= \left(\!\!\binom{n}{S}\!\!\right) + \sum_{k=1}^{\min\{n, \lfloor S/B \rfloor\}} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \left(\!\!\binom{n}{S - Bk}\!\!\right) \\ &= \left(\!\!\binom{n}{S}\!\!\right) + \sum_{k=1}^{\min\{n, \lfloor S/B \rfloor\}} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\!\!\binom{n}{S - Bk}\!\!\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\min\{n, \lfloor S/B \rfloor\}} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\!\!\binom{n}{S - Bk}\!\!\right). \end{aligned}$$

Conform formulelor (2.2.2) şi (2.2.3) avem

$$\left(\!\!\binom{n}{S - Bk}\!\!\right) = \binom{n + S - Bk - 1}{S - Bk} = \binom{n + S - Bk - 1}{n - 1},$$

deci obţinem egalitatea din enunţ. □

Folosind Propoziţia 2.4.2, putem obţine formula de calcul pentru $f_B(n,S)$.

Propoziţia 2.4.3. *Pentru orice* $n, B, S \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ B \geq 2$, *avem* $f_B(n,S) =$

$$= \sum_{k=0}^{\min\{n,\lfloor S/B\rfloor\}} (-1)^k \frac{nS-(B-1)nk-k}{(n+S-Bk)(n+S-Bk-1)} \binom{n}{k} \binom{n+S-Bk}{n}. \tag{2.4.16}$$

Demonstraţie. Evident, $f_B(n,S) = g_B(n,S) - g_B(n-1,S)$ şi, aplicând formula lui $g_B(n,S)$ dată de Propoziţia 2.4.2, se obţine uşor formula (2.4.16). □

Particularizând valoarea sumei S vom deduce în continuare trei identităţi combinatoriale ce sunt aparent destul de puţin ”prietenoase”.

Corolarul 2.4.2. *Pentru orice* $n, m, B \in \mathbb{N}^*$ *cu* $m \geq n$ *şi* $B \geq 2$ *avem*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=k+\lceil k/(B-1)\rceil}^{m} \binom{n+(B-1)i-Bk-1}{n-1} = 1 + \frac{B^n-1}{B-1},$$

unde $\lceil x \rceil$ *reprezintă partea întreagă superioară a numărului real* x.

Demonstraţie. Folosind criteriul de divizibilitate în baza B

$$\overline{c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0}_{(B)} \,\vdots\, B-1 \iff c_k + c_{k-1} + \ldots + c_1 + c_0 \,\vdots\, B-1$$

avem

$$\begin{aligned} 1 + \frac{B^n-1}{B-1} &= \operatorname{card}\{r \mid r \in \mathbb{N},\ r < B^n,\ r \,\vdots\, B-1\} \\ &= \sum_{i=0}^{n} g_B(n,(B-1)i) = \sum_{i=0}^{m} g_B(n,(B-1)i) \end{aligned}$$

(deoarece $g_B(n,(B-1)i) = 0,\ \forall i > n$) şi aplicând formula dată de Propoziţia 2.4.2 pentru $g_B(n,(B-1)i)$ se obţine identitatea din enunţ. □

Corolarul 2.4.3. *Pentru orice* $n, B \in \mathbb{N}^*$ *cu* $B \geq 2$ *avem*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor (B-1)n/B \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{B(n-k)-1}{n-1} = 1.$$

Demonstraţie. Evident, avem

$$g_B(n,(B-1)n) = 1$$

şi aplicând formula dată de Propoziţia 2.4.2 pentru $g_B(n,(B-1)n)$ se obţine identitatea din enunţ. □

Corolarul 2.4.4. *Pentru orice $n, m, B \in \mathbb{N}^*$ cu $m > Bn$ şi $B \geq 2$ avem*

$$\sum_{k=0}^{\min\{n,\lfloor (m-n)/B \rfloor\}} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m-Bk-1}{n-1} = 0.$$

Demonstraţie. Evident, deoarece $m-n > (B-1)n$ avem

$$g_B(n, m-n) = 0$$

şi aplicând formula dată de Propoziţia 2.4.2 pentru $g_B(n, m-n)$ se obţine identitatea din enunţ. □

Observaţia 2.4.4. Luând $B = 10$ regăsim formule de numărare şi identităţi combinatoriale corespunzătoare bazei de numeraţie zecimală.

Încheiem acest capitol cu o altă egalitate destul de ”neprietenoasă”, propusă de D. Bloom şi demonstrată de R. Chapman [6].

Propoziţia 2.4.4. *Pentru orice $m, k \in \mathbb{N}$ avem*

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{r}{k-r}\binom{m}{r} = \sum_{j=0}^{k} \binom{\lfloor j/2 \rfloor}{k-j}\binom{m-k+\lfloor 3j/2 \rfloor}{j}.$$

Demonstraţie. Vom aplica metoda funcţiilor generatoare. Notăm cu $a_{m,k}$ şi $b_{m,k}$ sumele din membrul stâng, respectiv din membrul drept ai egalităţii din enunţ. Folosind Teorema 2.4.1 şi suma seriei geometrice avem:

$$\begin{aligned}
\sum_{m,k=0}^{\infty} a_{m,k} X^m Y^k &= \sum_{m,k,r=0}^{\infty} \binom{r}{k-r}\binom{m}{r} X^m Y^k \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{r} X^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k-r} Y^k \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{X^r}{(1-X)^{r+1}} \cdot Y^r (1+Y)^r = \frac{1}{1-X} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{XY(1+Y)}{1-X} \right)^r \\
&= \frac{1}{1-X} \cdot \frac{1}{1 - \frac{XY(1+Y)}{1-X}} = \frac{1}{1 - X(1+Y+Y^2)}.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$
\begin{aligned}
\sum_{m,k=0}^{\infty} b_{m,k}X^mY^k &= \sum_{m,k,j=0}^{\infty} \binom{\lfloor j/2\rfloor}{k-j}\binom{m-k+\lfloor 3j/2\rfloor}{j}X^mY^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lfloor j/2\rfloor}{k-j}Y^k\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m-k+\lfloor 3j/2\rfloor}{j}X^m \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lfloor j/2\rfloor}{k-j}Y^kX^{k-\lfloor 3j/2\rfloor}\cdot\frac{X^j}{(1-X)^{j+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lfloor j/2\rfloor}{k-j}\frac{(XY)^k}{X^{\lfloor j/2\rfloor}(1-X)^{j+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{X^{\lfloor j/2\rfloor}(1-X)^{j+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lfloor j/2\rfloor}{k-j}(XY)^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(XY)^j}{X^{\lfloor j/2\rfloor}(1-X)^{j+1}}\cdot(1+XY)^{\lfloor j/2\rfloor} \\
&= \sum_{j=2i\in\mathbb{N}}\frac{(XY)^j}{X^{\lfloor j/2\rfloor}(1-X)^{j+1}}\cdot(1+XY)^{\lfloor j/2\rfloor} \\
&\quad+\sum_{j=2i+1\in\mathbb{N}}\frac{(XY)^j}{X^{\lfloor j/2\rfloor}(1-X)^{j+1}}\cdot(1+XY)^{\lfloor j/2\rfloor} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1+XY)^i(XY)^{2i}}{X^i(1-X)^{2i+1}}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1+XY)^i(XY)^{2i+1}}{X^i(1-X)^{2i+2}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(1+XY)XY^2}{(1-X)^2}\right)^i\cdot\left(\frac{1}{1-X}+\frac{XY}{(1-X)^2}\right) \\
&= \frac{1-X+XY}{(1-X)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{(1+XY)XY^2}{(1-X)^2}} \\
&= \frac{1-X+XY}{(1-X+XY)(1-X-XY-XY^2)} \\
&= \frac{1}{1-X(1+Y+Y^2)}.
\end{aligned}
$$

Deci

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} a_{m,k} X^m Y^k = \sum_{m,k=0}^{\infty} b_{m,k} X^m Y^k.$$

Conform metodei funcţiilor generatoare obţinem $a_{m,k} = b_{m,k} \; \forall\, m, k$, adică egalitatea din enunţ. $\square$