Algoritmica grafurilor. Laborator 3

PROGRAME OBLIGATORII:

1. Generarea compunerilor lui n cu m termeni.
2. Generarea compunerilor lui n cu m termeni nenuli.
3. Generarea partiţiilor lui n cu k termeni.
4. Calculul numerelor $P(n,k)$ şi $P(n)$ (tabel).
5. Generarea partiţiilor mulţimii $\{1,2,\ldots,n\}$ cu k părţi.
6. Calculul numerelor $S(n,k)$ şi B_n (tabel).

PROGRAME SUPLIMENTARE:

1. Generarea tuturor partiţiilor lui n în ordine lexicografică.
2. Generarea tuturor partiţiilor unei mulţimi, în ordinea lexicografică a vectorilor caracteristici (nerecursiv!).
3. Se citesc n şi m. Să se genereze toate funcţiile surjective $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,m\}$.

PROBLEME:

1. Demonstraţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}^\star$ avem

$$S(n,2)=2^{n-1}-1,\ S(n,3)=\frac{3^{n-1}-2^n+1}{2},\ S(n,4)=\frac{4^{n-1}-3^n+3\cdot 2^{n-1}-1}{6}.$$

2. Demonstraţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ avem

$$S(n,1)-1!S(n,2)+2!S(n,3)-\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)!S(n,n)=0.$$

3. Demonstraţi că pentru orice $n,k\in\mathbb{N}$ avem

$$\begin{aligned}S(n,k)&=\frac{1}{k!}s_{n,k}\\&=\frac{1}{k!}\left[k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^n-\ldots+(-1)^k\binom{k}{k}0^n\right],\end{aligned}$$

unde $s_{n,k}$ reprezintă numărul de funcţii surjective definite pe o mulţime cu n elemente, cu valori într-o mulţime cu k elemente.

4. Demonstraţi că pentru orice $n,k\in\mathbb{N}^\star$ avem

$$s_{n,k}=k(s_{n-1,k-1}+s_{n-1,k}),$$

unde $s_{n,k}$ reprezintă numărul de funcţii surjective definite pe o mulţime cu n elemente, cu valori într-o mulţime cu k elemente.

5. Demonstraţi că pentru orice $n,k\in\mathbb{N}^\star$ a.î. $\dfrac{n}{2}\leq k\leq n-1$ avem $P(n,k)=P(n-k)$.

6. Demonstraţi că pentru orice $n, k \in \mathbb{N}^\star$ avem $\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \leq P(n,k) \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Prima inegalitate devine egalitate dacă şi numai dacă $k = 1$ sau $\begin{cases} k = 2, \\ n = \text{impar} \end{cases}$ sau $k > n$.

A doua inegalitate devine egalitate dacă şi numai dacă $k = 1$ sau $k \geq n$.