אלקטרומגנטיות ואלקטרודינמיקה גליון 8

214290629 - איתן גלי

18.6.2023

1 שאלה 1 - פונקצית גרין בין שתי קליפות ספריות

1.1 נכתוב את פונקצית גרין כטור של פונקציות הרמוניות:

אנחנו נרצה פונקצית גרין שתתאפס על הקליפות הכדוריות כלומר $G_D|_{r=a} = G_D|_{r=b} = 0$
וגם תקיים את המשוואה $\nabla^2 G_D(x, x') = -4\pi\delta^{(3)}(x - x')$.
אנחנו מחפשים פונקציה מהצורה: $G_D(x, x') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}(r|r', \theta', \varphi') Y_{l,m}(\theta, \varphi)$.
נזכור כי $\delta^{(3)}(x - x') = \frac{1}{r^2}\delta(r - r')\delta(\varphi - \varphi')\delta(cos\theta - cos\theta')$ וגם כי $Y_{l,m}$ אורתונורמלית ומקיימת:

$$\delta(\varphi - \varphi')\delta(cos\theta - cos\theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\theta', \varphi') Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$-4\pi\frac{1}{r^2}\delta(r-r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\theta', \varphi') Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[\frac{1}{r}\partial_r^2 r a_{l,m}\right] Y_{l,m} + \frac{1}{r^2} a_{l,m} \left[\frac{1}{sin\theta}\partial_\theta sin\theta \partial_\theta Y_{l,m} + \frac{1}{sin^2\theta}\partial^2_\varphi Y_{l,m}\right]$$

כידוע מפיתוח $Y_{l,m}$ כפתרון של משוואת פואסון מתקיימת הזהות:

$$\left[\frac{1}{sin\theta}\partial_\theta sin\theta \partial_\theta Y_{l,m} + \frac{1}{sin^2\theta}\partial^2_\varphi Y_{l,m}\right] = -l(l+1)Y_{l,m}$$

נציב את הזהות במשוואה ונקבל:

$$-4\pi\frac{1}{r^2}\delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\theta', \varphi') Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[\frac{1}{r}\partial_r^2 r a_{l,m}\right] Y_{l,m} - \frac{1}{r^2} a_{l,m} l(l+1) Y_{l,m}$$

יש לנו פה השוואה של שני טורים עם אותן פונקציות $Y_{l,m}$ אז נבצע השוואת מקדמים:

$$-4\pi\frac{1}{r^2}\delta(r - r') Y^*_{l,m}(\theta', \varphi') = \frac{1}{r}\partial_r^2 r a_{l,m} - \frac{1}{r^2} a_{l,m} l(l+1)$$

מכיוון שצד שמאל של המשוואה מופרד בין המשתנים r, r' לבין θ', φ' נסיק שגם $a_{l,m}$ מתנהג כך ונסמן $a_{l,m} = g_{l,m}(r,r')Y^*_{l,m}(\theta',\varphi')$ עוד מעט נראה שg אינו תלוי בm.

$$-4\pi\frac{1}{r^2}\delta(r-r')Y^*_{l,m}(\theta',\varphi') = \left(\frac{1}{r}\partial_r^2 r g_{l,m} - \frac{l(l+1)}{r^2}g_{l,m}\right)Y^*_{l,m}$$

$$-4\pi\frac{1}{r^2}\delta(r-r') = \frac{1}{r}\partial_r^2 r g_{l,m} - \frac{l(l+1)}{r^2}g_{l,m}$$

כפי שאנו רואים הפתרון של המד"ר אינו תלוי בm ולכן אין סיבה שg יהיה תלוי בm אז קיבלנו : $a_{l,m} = g_l(r,r')Y^*_{l,m}(\theta',\varphi')$:

$$-4\pi\frac{1}{r^2}\delta(r-r') = \frac{1}{r}\partial_r^2 r g_l - \frac{l(l+1)}{r^2}g_l$$

וזו המד"ר המבוקשת.

1.2 נמצא פתרון למד"ר:

נבחין כי כאשר $r \neq r'$ המד"ר הינה $\frac{1}{r}\partial_r^2 r g_l - \frac{l(l+1)}{r^2}g_l = 0$ וננחש פתרון $g_l = C(r')r^\alpha$

$$C(r')\frac{1}{r}(\alpha+1)\alpha r^{\alpha-1} = C(r')l(l+1)r^{\alpha-2} \to \alpha = l, -l-1$$

מכאן הפתרון

$$g_l(r,r') = a_l(r')r^l + b_l(r')r^{-l-1}$$

כמובן שיש שני תחומים בהם $r \neq r'$ ולכן הפתרון יהיה

$$g_l(r,r') = \begin{cases} A_l(r')r^l + B_l(r')r^{-l-1} & r < r' \\ A'_l(r')r^l + B'_l(r')r^{-l-1} & r > r' \end{cases}$$

1.3 נציב תנאי שפה ונשאר עם שני קבועים:

נניח כי הרדיוס הפנימי a והחיצוני b ולכן

$$g_l(a,r') = A_l(r')a^l + B_l(r')a^{-l-1} = 0 \to B_l(r') = -A_l(r')a^{2l+1}$$

$$g_l(b,r') = A'_l(r')b^l + B'_l(r')b^{-l-1} = 0 \to B'_l(r') = -A'_l(r')b^{2l+1}$$

ולכן הפתרון:

$$g_l(r,r') = \begin{cases} A_l(r')r^l - A_l(r')a^{2l+1}r^{-l-1} & r<r' \\ A_l'(r')r^l - A_l'(r')b^{2l+1}r^{-l-1} & r>r' \end{cases}$$

$$g_l(r,r') = \begin{cases} A_l(r')\left(r^l - a^{2l+1}r^{-l-1}\right) & r<r' \\ A_l'(r')\left(r^l - b^{2l+1}r^{-l-1}\right) & r>r' \end{cases}$$

1.4 נגדיר $r_> \equiv max\left\{r,r'\right\}, r_< \equiv min\left\{r,r'\right\}$ ומסימטריה $g_l = C\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$ ונמצא את C:

$$g_l(r,r') = \begin{cases} A_l(r')\left(r^l - a^{2l+1}r^{-l-1}\right) & r<r' \\ A_l'(r')\left(r^l - b^{2l+1}r^{-l-1}\right) & r>r' \end{cases}$$

אבל אם נחליף בין r', r נקבל:

$$g_l(r',r) = \begin{cases} A_l(r)\left(r'^l - a^{2l+1}r'^{-l-1}\right) & r'<r \\ A_l'(r)\left(r'^l - b^{2l+1}r'^{-l-1}\right) & r'>r \end{cases}$$

לכן עבור $r<r'$ קיבלנו את השוויון:

$$A_l'(r)\left(r'^l - b^{2l+1}r'^{-l-1}\right) = A_l(r')\left(r^l - a^{2l+1}r^{-l-1}\right)$$

ועבור $r>r'$ נקבל:

$$A_l(r)\left(r'^l - a^{2l+1}r'^{-l-1}\right) = A_l'(r')\left(r^l - b^{2l+1}r^{-l-1}\right)$$

נקבל:

$$\frac{A_l'(r)}{A_l(r')} = \frac{\left(r^l - a^{2l+1}r^{-l-1}\right)}{\left(r'^l - b^{2l+1}r'^{-l-1}\right)}$$

$$\frac{A_l(r)}{A_l'(r')} = \frac{\left(r^l - b^{2l+1}r^{-l-1}\right)}{\left(r'^l - a^{2l+1}r'^{-l-1}\right)}$$

ניתן לראות ש $A_l'(r) = C'\left(r^l - a^{2l+1}r^{-l-1}\right), A_l(r) = C'\left(r^l - b^{2l+1}r^{-l-1}\right)$ פותרים את צמד המשוואות ולכן הפתרון:

$$g_l(r,r') = \begin{cases} C'\left(r'^l - b^{2l+1}r'^{-l-1}\right)\left(r^l - a^{2l+1}r^{-l-1}\right) & r<r' \\ C'\left(r'^l - a^{2l+1}r'^{-l-1}\right)\left(r^l - b^{2l+1}r^{-l-1}\right) & r>r' \end{cases}$$

$$g_l(r,r') = \begin{cases} \frac{-C'}{b^{2l+1}}\left(-\frac{r'^l}{b^{2l+1}} + r'^{-l-1}\right)\left(r^l - a^{2l+1}r^{-l-1}\right) & r<r' \\ \frac{-C'}{b^{2l+1}}\left(r'^l - a^{2l+1}r'^{-l-1}\right)\left(-\frac{r^l}{b^{2l+1}} + r^{-l-1}\right) & r>r' \end{cases}$$

ואם נסמן $C = \frac{C'}{b^{2l+1}}$ נקבל:

$$g_l(r,r') = \begin{cases} C\left(-\frac{r'^l}{b^{2l+1}} + r'^{-l-1}\right)\left(r^l - a^{2l+1}r^{-l-1}\right) & r<r' \\ C\left(r'^l - a^{2l+1}r'^{-l-1}\right)\left(-\frac{r^l}{b^{2l+1}} + r^{-l-1}\right) & r>r' \end{cases}$$

עכשיו נשתמש בסימון $r_<, r_>$ להיפרד מהמקרים:

$$g_l = C\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

עכשיו נמצא את C עם איזון הלמים:)

נבצע אינטגרציה על $\frac{1}{r}\partial_r^2 rg_l - \frac{l(l+1)}{r^2}g_l = -4\pi\frac{1}{r^2}\delta(r-r')$ ונקבל:

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} -4\pi\frac{1}{r^2}\delta(r-r') = \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\frac{1}{r}\partial_r^2 rg_l - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\frac{l(l+1)}{r^2}g_l$$

נזכור שg_lצריכה להיות רציפה ולכן אינטגרל עליה בגבול$0 \to \varepsilon$ צריך להתאפס

$$\frac{-4\pi}{r'^2} = \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\frac{1}{r}\partial_r^2 rg_l$$

אוקי זה קשה אז מראש נכפול את המשוואה המקורית בr ונקבל:

$$\partial_r^2 rg_l - \frac{l(l+1)}{r}g_l = -4\pi\frac{1}{r}\delta(r-r')$$

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} -4\pi\frac{1}{r}\delta(r-r') = \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\partial_r^2 rg_l - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\frac{l(l+1)}{r}g_l$$

$$\frac{-4\pi}{r'} = \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\partial_r^2 rg_l$$

$$\frac{-4\pi}{r'} = \partial_r rg_l|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = \partial_r rg_l|_{r'+\varepsilon} - \partial_r rg_l|_{r'-\varepsilon}$$

נגזור ונשאיף את $\varepsilon \to 0$ וכמובן נקבל:

$$\frac{-4\pi}{r'} = C\left(r'^l - a^{2l+1}r'^{-l-1}\right)\left(-(l+1)\frac{r'^l}{b^{2l+1}} - lr'^{-l-1}\right) - C\left(-\frac{r'^l}{b^{2l+1}} + r'^{-l-1}\right)\left((l+1)r'^l + la^{2l+1}r'^{-l-1}\right)$$

$$\frac{4\pi}{r'C}=(l+1)\frac{r'^{2l}}{b^{2l+1}}+lr'^{-1}-a^{2l+1}(l+1)\frac{r'^{-1}}{b^{2l+1}}-a^{2l+1}lr'^{-2l-2}-\frac{r'^{2l}}{b^{2l+1}}(l+1)-\frac{r'^{-1}}{b^{2l+1}}la^{2l+1}+(l+1)r'^{-1}+la^{2l+1}r'^{-2l-2}$$

זה החלק הכיף עכשיו כי אני תותח בגורמים משותפים (כמעט כמו שתומר תותח בגזירה :) וגם יש יוני רכטר ברקע!!!

$$\frac{4\pi}{r'C}=\left\{(l+1)\frac{r'^{2l}}{b^{2l+1}}\right\}+lr'^{-1}-a^{2l+1}(l+1)\frac{r'^{-1}}{b^{2l+1}}-\left[a^{2l+1}lr'^{-2l-2}\right]-\left\{\frac{r'^{2l}}{b^{2l+1}}(l+1)\right\}-\frac{r'^{-1}}{b^{2l+1}}la^{2l+1}+(l+1)r'^{-1}+\left[la^{2l+1}r'^{-2l-2}\right]$$

$$\frac{4\pi}{r'C}=(2l+1)r'^{-1}-(2l+1)a^{2l+1}\frac{r'^{-1}}{b^{2l+1}}$$

$$C=\frac{4\pi}{(2l+1)\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right)}$$

עכשיו נכתוב את פונקצית גרין המלאה :

$$G_D(x,x')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}(r|r',\theta',\varphi')Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

נציב את $a_{l,m}$:

$$G_D(x,x')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}g_l(r,r')Y^*_{l,m}(\theta',\varphi')Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

נציב את g_l :

$$G_D(x,x')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C\left(r_<^l-\frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)Y^*_{l,m}(\theta',\varphi')Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

ונציב את C :

$$G_D(x,x')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{(2l+1)\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right)}\left(r_<^l-\frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)Y^*_{l,m}(\theta',\varphi')Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

סוף עונת התפוזים.

1.5 נכתוב את פונקציית גרין בגבול $a\to 0, b\to\infty$:

בגבול הזה נקבל $\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\to 0$ וסהכ $\frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\to 0, \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\to 0,$:

$$G_D\to\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{l,m}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{l,m}\left(\theta,\varphi\right)$$

וזה מזכיר לנו משהו מהרצאה 16 של רזמט :

$$\hat{G}_D(x,x')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{l,m}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{l,m}\left(\theta,\varphi\right)\begin{cases}r^{-l-1}\left(r'^l-\frac{R_0^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right) & r>r'\\ r'^{-l-1}\left(r^l-\frac{R_0^{2l+1}}{r^{l+1}}\right) & r<r'\end{cases}$$

כאשר זו פונקצית גרין לקליפה כדורית ברדיוס R_0 כלומר $\hat{G}_D(x,x')=\frac{1}{|x-x'|}-\frac{R_0}{|x'||x-\frac{R_0^2}{|x'|^2}x'|}$

נשים לב שאם נשאיף את $R\to 0$ נקבל $\hat{G}_D(x,x')\to\frac{1}{|x-x'|}$וגם

$$\hat{G}_D(x,x')\to\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{l,m}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{l,m}\left(\theta,\varphi\right)\begin{cases}r^{-l-1}r'^l & r>r'\\ r'^{-l-1}r^l & r<r'\end{cases}$$

$$\hat{G}_D(x,x')\to\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{l,m}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{l,m}\left(\theta,\varphi\right)\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}$$

וזה גם מה שקיבלנו עבור פונקצית הגרין שפיתחנו ולכן

$$G_D\to\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{l,m}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{l,m}\left(\theta,\varphi\right)\to\frac{1}{|x-x'|}$$

וזה הגיוני כי הגאומטריה שלנו הפכה משתי קליפות לקליפה באינסוף וקליפה עם רדיוס אפס שזה פשוט שקול לגאומטריה ללא תנאי שפה ולפונקצית הגרין שמתקבלת ללא תנאי שפה. כמובן שאם היינו משאיפים רק את $b\to\infty$ היינו מקבלים את פונקצית הגרין של קליפה כדורית שכן היינו עוברים לגיאומטריה הזו של הבעיה.

עכשיו נקשיב לאריק איינשטיין שאמר "לקחת פסק זמן ולא לחשוב, לשבת מול הים ולא לדאוג, לתת לראש לנוח מהפיצוצים, לתת ללב לנוח מהלחצים".

איך השירים היום מגיעים בול בזמן.

2 שאלה 2 - מתחים מתחלפים על פלחים עוקבים

קליפה מוליכה חלולה עם רדיוס פנימי a מחולקת למספר זוגי, $2n$, של פלחים שמופרדים על ידי מישורים המתלכדים עם ציר z, כאשר כל מישור מופרד על ידי זווית אזימוטלית, $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{2n}$ מהמישור הבא. כל פלח מוחזק בפוטנציאל $\pm V$ כאשר הסימן מתחלף בין פלחים עוקבים.

2.1 נרשום את הפוטנציאל בתוך הקליפה כטור מופרד משתנים בקואורדינטות כדוריות ונרשום ביטויים אינטגרליים למקדמי הפיתוח:

בהרצאה 15 של רזמט ראינו את הביטוי הכי כללי למשוואת לפלס בקורדינטות כדוריות עם הפרדת משתנים:

$$A^0(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{l,m}r^{-l-1}+b_{l,m}r^l\right)Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

כמו שהיה במד"ח, נרצה פתרון שלא מתבדר ב$r\to 0$ כי זה לא פיזיקלי ולכן $a_{l,m}=0$.

$$A^0(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}b_{l,m}r^lY_{l,m}(\theta,\varphi)$$

עכשיו נקבל את המקדמים מ$r=a$:

$$A^0(a,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}b_{l,m}a^lY_{l,m}(\theta,\varphi)=\begin{cases}V & \frac{2\pi}{2n}j<\varphi<\frac{2\pi}{2n}(j+1),j\%2=0\\ V & \frac{2\pi}{2n}j<\varphi<\frac{2\pi}{2n}(j+1),j\%2=1\end{cases}$$

משלמות ההרמוניות הספריות נטיל את $A^0(a,\theta,\varphi)$ על ההרמוניות (זה כמו לכפות את הביטוי שלנו ב$Y^*_{l,m}sin\theta$ ולבצע אינטגרל) נראה זאת:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}A^0(a,\theta,\varphi)Y^*_{l',m'}(\theta,\varphi)sin\theta d\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y^*_{l',m'}(\theta,\varphi)sin\theta\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}b_{l,m}a^lY_{l,m}(\theta,\varphi)d\theta d\varphi$$

מאורתונורמליות אנחנו יודעים $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y^*_{l,m}(\theta,\varphi)Y_{l,m}(\theta,\varphi)sin\theta=\delta^l_{l'}\delta^m_{m'}$ נקבל:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}A^0(a,\theta,\varphi)Y^*_{l,m}(\theta,\varphi)sin\theta d\theta d\varphi=b_{l,m}a^l$$

$$a^{-l}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}A^0(a,\theta,\varphi)Y^*_{l,m}(\theta,\varphi)sin\theta d\theta d\varphi=b_{l,m}$$

2.2 נראה כי המקדמים של $Y_{l,m}$מתאפסים אלא אם $l+m$ זוגי:

לבעיה יש סימטריה לשיקוף $z\to -z$ ולכן על מקדמי הטור לשמור על הסימטריה. השיקוף משמעו $\theta\to\pi-\theta$ שזה שקול ל$\to cos\theta$ $cos(\pi-\theta)=-cos\theta$. נזכור כי בתוך הפונקציות ההרמוניות מתחבא פולינום לגנדר בצורה הבאה:

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}P_l^m(cos\theta)e^{im\varphi}$$

ונשים לב שפולינומי לגנדר בעלי תכונת זוגיות\אי זוגיות לסרוגין כלומר:

$$P_l^m(cos\theta)=(-1)^{l+m}P_l^m(-cos\theta)$$

אנחנו נרצה ש$Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ יהיה זוגי ב$cos\theta$ מסימטרית השיקוף שראינו ולכן אין ברירה אלא לאפס את כל המקדמים בהם $l+m$ אי זוגי כדי להישאר עם טור פונקציות זוגיות.

2.3 נראה שלבעיה סימטריה מהצורה $\phi(\varphi) \to A\phi(\varphi + \Delta\varphi)$ ונמצא את A:

מתנאי השפה $A^0(a,\varphi) = -A^0\left(a, \varphi + \frac{2\pi}{2n}\right)$ ולכן $A = -1$ וגם הפתרון יהיה עם אותה סימטריה

$$A^0(r,\theta,\varphi) = -A^0\left(r,\theta,\varphi + \frac{2\pi}{2n}\right)$$

2.4 נקבע עבור אילו ערכי m המקדם של $Y_{l,m}$ מתאפס ונכתוב את המקדמים כאינטגרל על $cos\theta$:

לפי מה שראינו על ההרמוניות הספריות התלות בφ מתבטאת ב$e^{im\varphi}$ ולכן לפי הסעיף הקודם נדרוש

$$e^{im\varphi} = -e^{im\left(\varphi + \frac{2\pi}{2n}\right)} \to 1 = -e^{i\frac{m\pi}{n}} \to \frac{m}{n} = 2k-1, k \in N \to m = n\left(2k-1\right)$$

מכאן המקדמים היחידים שלא מתאפסים הם $m = n\left(2k-1\right), k \in N$. כעת נחזור לאינטגרל למציאת המקדמים:

$$a^{-l}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A^0(a,\varphi)Y^*_{l,n(2k-1)}(\theta,\varphi)sin\theta d\theta d\varphi = b_{l,n(2k-1)}$$

רק שנציב את ההרמוניות הספריות:

$$a^{-l}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A^0(a,\varphi)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left|l+n\left(2k-1\right)\right|!}{\left|l-n\left(2k-1\right)\right|!}}P_l^{n(2k-1)}(cos\theta)e^{-in(2k-1)\varphi}sin\theta d\theta d\varphi = b_{l,n(2k-1)}$$

$$a^{-l}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left|l+n\left(2k-1\right)\right|!}{\left|l-n\left(2k-1\right)\right|!}}\int_0^{\pi} P_l^{n(2k-1)}(cos\theta)sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} A^0(a,\varphi)e^{-in(2k-1)\varphi}d\varphi = b_{l,n(2k-1)}$$

$$a^{-l}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left|l+n\left(2k-1\right)\right|!}{\left|l-n\left(2k-1\right)\right|!}}\int_0^{\pi} P_l^{n(2k-1)}(cos\theta)sin\theta d\theta 2n\int_0^{\frac{2\pi}{2n}} Ve^{-in(2k-1)\varphi}d\varphi = b_{l,n(2k-1)}$$

$$a^{-l}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left|l+n\left(2k-1\right)\right|!}{\left|l-n\left(2k-1\right)\right|!}}\int_0^{\pi} P_l^{n(2k-1)}(cos\theta)sin\theta d\theta\frac{2nV}{-in(2k-1)}e^{-in(2k-1)\varphi}|_0^{\frac{2\pi}{2n}}d\varphi = b_{l,n(2k-1)}$$

$$a^{-l}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left|l+n\left(2k-1\right)\right|!}{\left|l-n\left(2k-1\right)\right|!}}\int_0^{\pi} P_l^{n(2k-1)}(cos\theta)sin\theta d\theta\left(\frac{2nV}{-in(2k-1)}e^{-i(2k-1)\pi} + \frac{2nV}{in(2k-1)}\right)d\varphi = b_{l,n(2k-1)}$$

$$a^{-l}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left|l+n\left(2k-1\right)\right|!}{\left|l-n\left(2k-1\right)\right|!}}\int_0^{\pi} P_l^{n(2k-1)}(cos\theta)sin\theta d\theta\left(\frac{2V}{i(2k-1)} + \frac{2V}{i(2k-1)}\right)d\varphi = b_{l,n(2k-1)}$$

$$\frac{4V}{i(2k-1)}a^{-l}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left|l+n\left(2k-1\right)\right|!}{\left|l-n\left(2k-1\right)\right|!}}\int_{-1}^{1} P_l^{n(2k-1)}(cos\theta)d\left(cos\theta\right) = b_{l,n(2k-1)}$$

3 שאלה 3 - חצי קליפה כדורית (אני המצאתי את השם)

משטח הבנוי מלוח אינסופי ובליטה בצורת חצי קליפה כדורית ברדיוס a מוחזק בפוטנציאל כלשהו. ראשית הצירים מוגדרת כמרכז הקליפה והמישור ב$z=0$.

בתרגול מצאנו את פונקצית גרין דריכלה של הבעיה מעל הלוח והבליטה:

$$G(r,r') = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'cos\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'cos\beta}}$$

כאשר

$$cos\gamma = cos\theta cos\theta' + sin\theta sin\theta' cos(\varphi-\varphi')$$

$$cos\beta = -cos\theta cos\theta' + sin\theta sin\theta' cos(\varphi-\varphi')$$

3.1 נמצא את הנגזרת של פונקצית גרין זו בכיוון הנורמל:

עבור $r' \leq a$ אנחנו על הקליפה הכדורית ולכן $\frac{\partial G_D}{\partial n'}|_{\partial V} = -\frac{\partial G_D}{\partial r'}|_{r'=a}$. נחשב ונקבל:

$$\frac{\partial G(r,r')}{\partial r'} = \frac{-r'+rcos\gamma}{(r^2+r'^2-2rr'cos\gamma)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{-r'\left(\frac{r}{a}\right)^2+rcos\gamma}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'cos\gamma\right)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{-r'+rcos\beta}{(r^2+r'^2-2rr'cos\beta)^{-\frac{3}{2}}} + \frac{-r'\left(\frac{r}{a}\right)^2+rcos\beta}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'cos\beta\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial G(r,r')}{\partial r'}|_{r'=a} = \frac{-a+rcos\gamma}{(r^2+a^2-2racos\gamma)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{-\frac{r^2}{a}+rcos\gamma}{(r^2+a^2-2racos\gamma)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{-a+rcos\beta}{(r^2+a^2-2racos\beta)^{-\frac{3}{2}}} + \frac{-\frac{r^2}{a}+rcos\beta}{(r^2+a^2-2racos\beta)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial G(r,r')}{\partial r'}|_{r'=a} = \frac{\frac{r^2}{a}-a}{(r^2+a^2-2racos\gamma)^{-\frac{3}{2}}} + \frac{a-\frac{r^2}{a}}{(r^2+a^2-2racos\beta)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial G(r,r')}{\partial r'}|_{r'=a} = \left(\frac{r^2}{a}-a\right)\left[\frac{1}{(r^2+a^2-2racos\gamma)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(r^2+a^2-2racos\beta)^{-\frac{3}{2}}}\right]$$

עבור $r' > a$ אנחנו על המישור ולכן $\frac{\partial G_D}{\partial n'}|_{\partial V} = \frac{1}{r'}\frac{\partial G_D}{\partial \theta'}|_{\theta'=\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{1}{r'}\frac{\partial G(r,r')}{\partial \theta'} = \frac{r\frac{\partial cos\gamma}{\partial\theta'}}{(r^2+r'^2-2rr'cos\gamma)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{r\frac{\partial cos\gamma}{\partial\theta'}}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'cos\gamma\right)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{r\frac{\partial cos\beta}{\partial\theta'}}{(r^2+r'^2-2rr'cos\beta)^{-\frac{3}{2}}} + \frac{r\frac{\partial cos\beta}{\partial\theta'}}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'cos\beta\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{r'}\frac{\partial G(r,r')}{\partial \theta'} = \frac{r\left(-cos\theta sin\theta' + sin\theta cos\theta' cos(\varphi-\varphi')\right)}{(r^2+r'^2-2rr'cos\gamma)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{r\left(-cos\theta sin\theta' + sin\theta cos\theta' cos(\varphi-\varphi')\right)}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'cos\gamma\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{r\left(cos\theta sin\theta'+sin\theta cos\theta' cos(\varphi-\varphi')\right)}{\left(r^2+r'^2-2rr'cos\beta\right)^{-\frac{3}{2}}}+\frac{r\left(cos\theta sin\theta'+sin\theta cos\theta' cos(\varphi-\varphi')\right)}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'cos\beta\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{r'}\frac{\partial G(r,r')}{\partial\theta'}|_{\theta'=\frac{\pi}{2}}=-\frac{rcos\theta}{\left(r^2+r'^2-2rr'sin\theta cos(\varphi-\varphi')\right)^{-\frac{3}{2}}}+\frac{rcos\theta}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'sin\theta cos(\varphi-\varphi')\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{rcos\theta}{\left(r^2+r'^2-2rr'sin\theta cos(\varphi-\varphi')\right)^{-\frac{3}{2}}}+\frac{rcos\theta}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'sin\theta cos(\varphi-\varphi')\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{r'}\frac{\partial G(r,r')}{\partial\theta'}|_{\theta'=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2rcos\theta}{\left(r^2+r'^2-2rr'sin\theta cos(\varphi-\varphi')\right)^{-\frac{3}{2}}}+\frac{2rcos\theta}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'sin\theta cos(\varphi-\varphi')\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

סהכ קיבלנו:

$$\frac{\partial G}{\partial n'}|_{\partial V}=\left[\frac{\frac{r^2}{a}-a}{\left(r^2+a^2-2racos\gamma\right)^{-\frac{3}{2}}}+\frac{a-\frac{r^2}{a}}{\left(r^2+a^2-2racos\beta\right)^{-\frac{3}{2}}}\right]\Theta(a+\varepsilon-r')$$

$$+\left[-\frac{2rcos\theta}{\left(r^2+r'^2-2rr'sin\theta cos(\varphi-\varphi')\right)^{-\frac{3}{2}}}+\frac{2rcos\theta}{\left(\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'sin\theta cos(\varphi-\varphi')\right)^{-\frac{3}{2}}}\right]\Theta(r'-a-\varepsilon)$$

3.2 כעת מחזיקים את חצי הקליפה בפוטנציאל V_0 ומאריקים את המישור, נמצא את הפוטנציאל על ציר הסימטריה מעל הבליטה:

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\int_{z'>0}dx'\rho(x')G(x,x')-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}d\sigma'\phi(x')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'}$$

ומכיוון שאין מטען במרחב נקבל:

$$\phi(r,\theta,\varphi)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}d\sigma'\phi(x')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'}$$

$$\phi(r,\theta,\varphi)=-\frac{V_0}{4\pi}\int_{r'=a,0\le\theta'\le\frac{\pi}{2},0\le\varphi'\le2\pi}d\varphi' d\theta' asin\theta'\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'}$$

$$\phi(r,0,\varphi)=-\frac{V_0}{4\pi}\int_{r'=a,0\le\theta'\le\frac{\pi}{2},0\le\varphi'\le2\pi}d\varphi' d\theta' a^2sin\theta'\left[\frac{\frac{r^2}{a}-a}{\left(r^2+a^2-2racos\theta'\right)^{-\frac{3}{2}}}+\frac{a-\frac{r^2}{a}}{\left(r^2+a^2+2racos\theta'\right)^{-\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\phi(r,0,\varphi) = -\frac{V_0}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} d\varphi' d\theta' \left[\frac{\left(r^2a - a^3\right) sin\theta'}{\left(r^2 + a^2 - 2racos\theta'\right)^{-\frac{3}{2}}} + \frac{\left(a^3 - r^2a\right) sin\theta'}{\left(r^2 + a^2 + 2racos\theta'\right)^{-\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\phi(r,0,\varphi) = \frac{V_0}{-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \left[\frac{1}{2ra}\frac{2ra\left(r^2a - a^3\right) sin\theta'}{\left(r^2 + a^2 - 2racos\theta'\right)^{-\frac{3}{2}}} + \frac{1}{-2ra}\frac{-2ra\left(a^3 - r^2a\right) sin\theta'}{\left(r^2 + a^2 + 2racos\theta'\right)^{-\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\phi(r,0,\varphi) = \frac{-V_0}{2}\left[\frac{1}{ra}\frac{\left(a^3 - r^2a\right)}{\left(r^2 + a^2 - 2racos\theta'\right)^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{ra}\frac{\left(a^3 - r^2a\right)}{\left(r^2 + a^2 + 2racos\theta'\right)^{-\frac{1}{2}}}\right]|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\phi(r,0,\varphi) = \frac{-V_0}{2}\left[\frac{2}{ra}\frac{\left(a^3 - r^2a\right)}{\left(r^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + \frac{V_0}{2ra}\left[\frac{\left(a^3 - r^2a\right)}{\left(r^2 + a^2 - 2ra\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left(a^3 - r^2a\right)}{\left(r^2 + a^2 + 2ra\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\phi(r,0,\varphi) = \frac{V_0}{2}\left[\frac{2}{ra}\frac{\left(a^3 - r^2a\right)}{\left(r^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + \frac{-V_0}{2ra}\left[\frac{\left(a^3 - r^2a\right)}{r - a} + \frac{\left(a^3 - r^2a\right)}{r + a}\right]$$

$$\phi(r,0,\varphi) = \frac{V_0}{ra}\frac{\left(a^3 - r^2a\right)}{\left(r^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}} - V_0\frac{a^2 - r^2}{r^2 - a^2}$$

$$\phi(r,0,\varphi) = -V_0\left(-1 + \frac{r^2 - a^2}{r\left(r^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

כאשר אנחנו במקרה שלנו $r = z$ ולכן על ציר הסימטריה :

$$\phi(z, x = 0, y = 0) = V_0\left(1 - \frac{z^2 - a^2}{z\left(z^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

וזה הגיוני כי על $z = a$ אנחנו בפוטנציאל V_0 ובאינסוף אנחנו בפוטנציאל שואף ל0.

"והיה ומישהו בא אל תסתובב, כי זה תמיד יכול להיות זה שידליק לך את הלב, יפרוק את הכאב בשלווה"