## 2016～2017 学年第一学期期末考试试卷答案

**(2017 年 1 月 6 日，2 个小时)**

**一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）**

A 卷：1. A　2. B　3. A　4. C　5.D

**二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）**

A 卷：1. $1$　2. $2,\dfrac{1}{2}$　3. $\pi-2$　4. $2x+2y-3z=0$　5. $\dfrac{1}{2}e^{2x}+xe^{2x}+\dfrac{1}{2}$

**一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）**

B 卷：1. $1$　2. $2,\dfrac{1}{2}$　3. $2x+2y-3z=0$　4. $\pi-2$　5. $\dfrac{1}{2}e^{2x}+xe^{2x}+\dfrac{1}{2}$

**二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）**

B 卷：1. A　2. B　3. A　4. D　5. C

**三、解答题（每小题 8 分，共 48 分）**

1.解：由原题知，当 $t=0$ 时，$x=1, y=1$.

在 $ty=e^y-e$ 两边对 $t$ 求导，得 $y+t\dfrac{dy}{dt}=e^y\dfrac{dy}{dt}$，令 $t=0$ 得 $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{e}$.

在 $x=1+\arctan t$ 两边对 $t$ 求导，得 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$，令 $t=0$ 得 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1$.

所以，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}}{\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}}=\dfrac{1}{e}$.

2. 解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-\cos x}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}\cos x+\sin x}{4}=\dfrac{1}{4}$.

3.令 $a=\int_0^1 f(x)dx$，在等式两边在 $[0,1]$ 上积分得 $a=\int_0^1 e^x dx+a\int_0^1 x dx=(e-1)+\dfrac{1}{2}a$,

解得 $a=2(e-1)$，所以，$f(x)=e^x+2(e-1)x$.

令 $u=-x$，则 $\int_{-1}^0 f(-x)dx=\int_0^1 f(u)du=2(e-1)$.

4. 解：令 $t=\arctan\sqrt{x}\in[0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}>0$, $x=\tan^2 t$,

$$\int\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2 dx=\int t^2 d\tan^2 t=t^2\tan^2 t-2\int t\tan^2 t\,dt$$
$$=t^2\tan^2 t-2\int t(\sec^2 t-1)dt$$
$$=t^2\tan^2 t-2\int t d\tan t+2\int t dt$$
$$=t^2\tan^2 t-2(t\tan t-\int\tan t dt)+t^2+C$$
$$=t^2\tan^2 t-2t\tan t-2\int\frac{d\cos t}{\cos t}+t^2+C$$
$$=t^2\tan^2 t-2t\tan t-2\ln\cos t+t^2+C$$
$$=(x+1)\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}+\ln(1+x)+C.$$

5. 解：将直线 $L$ 的参数式 $\begin{cases}x=5t+7,\\ y=t+4,\\ z=4t+5\end{cases}$ 带入平面 $\Pi$ 的方程解得 $t=-1$, 所以，$M(2,3,1)$.

过点 $M$ 且与直线 $L$ 垂直的平面 $\Pi_1$ 的方程为：$5(x-2)+(y-3)+4(z-1)=0$，即 $5x+y+4z=17$.所以，$l$ 的一般式方程是 $\begin{cases}5x+y+4z=17,\\ 3x-y+2z=5.\end{cases}$

$l$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\5&1&4\\3&-1&2\end{vmatrix}=(6,2,-8)$，故 $l$ 的对称式方程是 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$.

6. 解：$\rho=1$ 与 $\rho=2\sin\theta$ 的交点是 $(1,\dfrac{\pi}{6})$, $\rho=1$ 与 $\rho=2\sin\theta$ 的交点是 $(1,\dfrac{\pi}{3})$,

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin\theta)^2 d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}1^2 d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta)^2 d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos2\theta)d\theta+\frac{\pi}{12}+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})+\frac{\pi}{12}+(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

四、解答题（每小题 9 分，共 18 分）

1. 解：原方程对应的齐次方程为 $y''+2y'-3y=0$，其特征方程为 $r^2+2r-3=0$，

解得 $r_1=-3$，$r_2=1$.所以齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^x$，其中 $C_1,C_2$ 为任意实数.

方程的自由项为 $P_n(x)e^{\lambda x}$ 型，其中 $P_n(x)=8x,n=1,\lambda=1$.因 $\lambda=1$ 是单特征根，

故 $y''+2y'-3y=8xe^x$ 有形如 $y^*=(ax^2+bx)e^x$ 的特解. 将其带入原方程得

$8ax+(2a+4b)=8x$，解得 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$，从而 $y^*=(x^2-\dfrac{1}{2}x)e^x$.

故原方程的通解为 $y=\overline{y}+y^*=C_1e^{-3x}+C_2e^x+(x^2-\dfrac{1}{2}x)e^x$.

由 $y(0)=C_1+C_2=0$，$y'(0)=-3C_1+C_2-\dfrac{1}{2}=0$，解得 $C_1=-\dfrac{1}{8},C_2=\dfrac{1}{8}$.

所以 $y=-\dfrac{1}{8}e^{-3x}+\dfrac{1}{8}e^x+(x^2-\dfrac{1}{2}x)e^x$.

2. 解：因为 $A(x)=\int_0^x y(x)\mathrm{d}x, l(x)=\int_0^x\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$,所以

$\int_0^x y(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x,(\forall x>0)$，从而 $\begin{cases} y(x)=\sqrt{1+y'^2(x)}\ (\forall x>0), & (1)\\ y(0)=1. & (2)\end{cases}$

解法一：由 $y'(x)>0\ (x>0)$ 知 $y(x)>y(0)=1(x>0)$,所以由（1）知 $y'=\sqrt{y^2-1}$，分离变量后积分得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\int\mathrm{d}x,$ (3)

令 $y=\sec t\ (t\in(0,\dfrac{\pi}{2}))$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\int\sec t\,\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1=\ln(y+\sqrt{y^2-1})+C_1,$$

所以，由（3）得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=x+C$,根据条件（2），解得 $C=0$,从而 $y+\sqrt{y^2-1}=e^x$,

解得 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},(x\geq 0)$.

解法二：由（1）知 $y'(0)=0$. (4)

在（1）式两边对 $x$ 求导得：$y'=\dfrac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2(x)}}\ (x>0)$,由 $y'(x)>0$，所以 $y''=\sqrt{1+y'^2(x)}$，与

（1）联立得 $y''-y=0$,其通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x$.根据初值条件(2)和(4)解得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$,

所以 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},(x\geq 0)$.

五、证明题（共 4 分）

证明：由条件，利用积分中值定理得：$f(0)=e^{\eta^2}f(\eta)$,即 $f(0)=e^{\eta^2}f(\eta)$, $(\dfrac{2}{3}<\eta<1)$

令 $g(x)=e^{x^2}f(x)$，由于 $g(0)=g(\eta)$,那么 $g(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理，所以有

$g'(\xi)=0\ (0<\xi<\eta<1)$,即 $g'(\xi)=e^{\xi^2}(2\xi f(\xi)+f'(\xi))=0$，得证.