2021～2022 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 2A》（ A 卷，共 3 页）

（考试时间：2022 年 1 月 10 日, 14:00-16:00）

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
得分								

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 已知 $|\vec a|=2,\ |\vec b|=\sqrt{2}$，且 $\vec a\cdot\vec b=2$，则 $|\vec a\times\vec b|=$ ________________.

2. 若 $x-\mathrm{e}^{-2x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f'(x)=$ ____________________.

3. 若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ ____________.

4. 曲线 $y=4x-x^2$ 在点 $(2-\sqrt{2},\ 2)$ 处的曲率是 ________________.

5. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 ______________________.

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 下列反常积分发散的是 (　　　　　　).

(A) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$　(B) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$　(C) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x$　(D) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3+1}}\mathrm{d}x$

2. 已知 $y_1=\frac{1}{5}x^3,\ y_2=\frac{1}{5}x^3+x^2,\ y_3=\frac{1}{5}x^3+x^{-2}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解，则此微分方程的通解为 (　　　　　　).

(A) $C_1x^2+C_2x^{-2}+\frac{1}{5}x^3$　　(B) $C_1x^2+C_2x^{-2}+\frac{3}{5}x^3$

(C) $\frac{C_1}{5}x^3+C_2x^2+x^{-2}$　　(D) $\frac{C_1}{5}x^3+C_2x^{-2}+x^2$

3. 若 $(0,1)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点，则必有 (　　　　　　).

(A) $a=1,\ b=-3,\ c=1$　　(B) $a=1,\ b=0,\ c$ 是任意实数

(C) $a\neq 0,\ b=0,\ c=1$　　(D) $c=1,\ a,b$ 是任意实数

4. 微分方程 $y''-y=\sin x+\mathrm{e}^{2x}$ 的特解 y^* 的形式为(其中 A,B,C 为常数) (　　　　　　).

(A) $A\sin x+Bx\mathrm{e}^{2x}$　　(B) $A\cos x+B\sin x+C\mathrm{e}^{2x}$

(C) $x(A\cos x+B\sin x)+C\mathrm{e}^{2x}$　　(D) $x(A\cos x+B\sin x)+Cx\mathrm{e}^{2x}$

5. 设函数 $f(x)$ 存在二阶导函数，且 $f(0)=0$，函数 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$

则下述结论正确的是 (　　　　　　).

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　(B) $x=0$ 是 $F'(x)$ 的无穷间断点

(C) $x=0$ 是 $F'(x)$ 的可去间断点　　(D) 导函数 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

三、计算题（本题 5 分）

求过点 $A(1,2,1)$ 且与直线 $L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ x-y+z-1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 设参量函数 $\begin{cases} x = t\,\mathrm{e}^{t^2}, \\ y = \dfrac{2}{3}t^3 + t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin(x^2), & -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}, \\ -1, & x>\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

4. 计算不定积分 $\int \dfrac{x}{1+\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x$.

5. 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{3x} f(\dfrac{t}{3})\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$，求 $f(x)$ 的表达式.

五、解答题（共 24 分,每小题 8 分）

1. 求二阶线性微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

2. 求函数 $F(a)=\int_1^a\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\ (0<a\le 2)$ 的最大值与最小值 (若不存在,请说明理由).

3. 设 D 是由抛物线 $y=(x-2)^2$ 与直线 $y=4$ 所围成的平面闭区域. 求:

(1) D 的面积; (2) D 绕 y 轴旋转一周而得的旋转体的体积.

六、证明题（本题 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶连续导数，且满足 $f(0)=f(1)=0$.

证明: (1) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\,\mathrm{d}x$; (2) $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{12}\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$.