第四章　约束优化方法

在实际问题中，约束优化问题是一类经常遇到、应用非常广泛的数学规划问题. 对于求解约束优化问题要比求解无约束优化问题困难得多，也复杂得多. 由于约束优化问题应用广泛，因而其求解方法引起了广泛关注，研究其解法的人也越来越多，并得到了很多有效的求解方法. 本章在介绍约束优化问题的基本理论之后，重点介绍以下几类基本的求解方法:

(I) 通过构造增广目标函数，把约束优化问题转化为无约束优化问题来求解. 这类求解方法主要有：SUMT外点法(外罚函数法)，SUMT内点法(内罚函数法)和乘子法等;

(II) 对约束优化问题直接进行求解，在可行域内寻找迭代点列来逼近问题的最优解，从而可得到问题的最优解. 例如：可行方向法，梯度投影法，简约梯度法以及约束变尺度法等;

(III) 利用一系列的二次规划(或线性规划)最优解的点列，来逐次逼近原约束优化问题的最优解. 例如：序列二次规划法(SQP法).

§4.1　约束优化问题的最优性条件

§4.1.1　一阶最优性条件

考虑一般约束优化问题(1.1.1), 即:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in I = \{1, 2, \ldots, p\}, \\ & c_i(x) = 0, \quad \forall i \in E = \{p+1, p+2, \ldots, m\}, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

其中$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$，$x \in \mathbb{R}^n$, E和I分别表示等式约束和不等式约束的指标集. 记该约束优化问题的可行域为

$$\mathscr{F} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{aligned} & c_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in I = \{1, 2, \ldots, p\}, \\ & c_i(x) = 0, \quad \forall i \in E = \{p+1, p+2, \ldots, m\} \end{aligned} \right\}.$$

4.1 最优性条件 — 一阶必要条件

定义 4.1.1 设$\bar{x}$是问题*(4.1.1)*的一个可行解，则不等式约束条件在$\bar{x}$处会呈现出两种情况:

(I) 若$c_i(\bar{x}) = 0$，则说明该不等式约束$c_i(x) \geq 0$在$\bar{x}$处起到约束作用，由此，称此约束关于$\bar{x}$为有效约束或紧约束，或积极约束；

(II) 若$c_i(\bar{x}) > 0$，说明该不等式约束$c_i(x) \geq 0$在$\bar{x}$处起到约束作用不大，于是称此约束关于$\bar{x}$为非有效约束或松约束，或非积极约束；

对于有效约束，通常用$I(\bar{x})$表示在可行点$\bar{x}$处的有效约束指标集，即

$$I(\bar{x}) := \{i \mid c_i(\bar{x}) = 0,\ \ i \in I = \{1, 2, \ldots, p\}\}.$$

简称$I(\bar{x})$为$\bar{x}$处的有效约束指标集或有效集.

4.1 最优性条件 — 一阶必要条件

一、几何最优性条件

定理 4.1.2 设x^*是一般约束优化问题(4.1.1)的局部最优解，令$I(x^*) = \{i \mid c_i(x^*) = 0,\ \ i \in \{1, \ldots, p\}\}$ 为x^* 处的有效集. 若

(i) 函数f和c_i $(i \in I(x^*))$ 在x^*处可微;

(ii) c_i $(i \in I \setminus I(x^*))$在$x^*$处连续，且$c_i$ $(i \in E)$在x^*处连续可微;

(iii) $\{\nabla c_i(x^*) \mid \forall i \in E\}$线性无关,

则

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset,$$

其中，$\mathcal{F} := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x^*)^\top d < 0\}$, $\mathcal{G} := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla c_i(x^*)^\top d > 0,\ \ \forall i \in I(x^*)\}$, $\mathcal{H} := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla c_i(x^*)^\top d = 0,\ \ \forall i \in E\}$.

二、代数最优性条件

定理 4.1.3 *(Fritz-John 一阶必要条件)* 设x^*是一般约束优化问题*(4.1.1)*的局部最优解，令$I(x^*) = \{i \mid c_i(x^*) = 0,\ \ i \in I\}$为$x^*$处的有效集. 若

(i) 函数f和c_i $(i \in I(x^*))$ 在x^*处可微;

(ii) c_i $(i \in I \setminus I(x^*))$ 在x^*处连续, 且c_i $(i \in E)$在x^*处连续可微,

则存在不全为零的非负实数λ_0, λ_i $(i \in I(x^*))$和实数λ_i $(i \in E)$，使得

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*) \cup E} \lambda_i \nabla c_i(x^*) = 0. \tag{4.1.3}$$

4.1 最优性条件 — 一阶必要条件

证明 如果$\{\nabla c_i(x^*) \mid \forall i \in E\}$线性相关，那么存在不全为零的实数$\lambda_i\ (i \in E)$使得

$$\sum_{i \in E} \lambda_i \nabla c_i(x^*) = 0.$$

此时，令$\lambda_0 = 0$ 且$\lambda_i = 0\ (\forall i \in I(x^*))$, 定理即可得证.

如果$\{\nabla c_i(x^*) \mid \forall i \in E\}$线性无关，由定理4.1.2可得$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset$, 即方程组

$$\begin{cases} \nabla f(x^*)^\top d < 0, \\ \nabla c_i(x^*)^\top d > 0, \quad \forall i \in I(x^*), \\ \nabla c_i(x^*)^\top d = 0, \quad \forall i \in E \end{cases}$$

无解. 类似于定理1.3.3的证明($u_0 = 0$的情况)，则必存在不全为零的非负实数$\lambda_0, \lambda_i\ (i \in I(x^*))$和实数$\lambda_i\ (i \in E)$，使得

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*) \cup E} \lambda_i \nabla c_i(x^*) = 0.$$

定理得证. □

4.1 最优性条件 — 一阶必要条件

注. 定理4.1.3中的(4.1.3)式称为问题(4.1.1)的Fritz-John条件，满足Fritz-John条件的点x^* 称为Fritz-John点.

Fritz-John条件仅仅是判断可行解是否为最优解的必要条件，而不是充分条件. 此外，运用Fritz-John条件时，会出现$\lambda_0 = 0$的情形. 在此情况下，Fritz-John条件中不含有目标函数的任何信息，这显然是不合理的. 这也是Fritz-John条件的主要缺点. 为了保证$\lambda_0 \neq 0$, 或要求$\lambda_0 > 0$，还需要对约束附加某种限制条件. 通常把这种限制条件称为**约束规格或约束规范**. 例如附加条件为:“向量组$\{\nabla c_i(x^*) \mid \forall i \in I(x^*)\}$线性无关”的约束规格，称此约束规格为K-T约束规格. 进一步，可得到下面著名的K-T条件(Kuhn-Tucker), 或称为K-K-T条件(Karush-Kuhn-Tucker).

4.1 最优性条件 — 一阶必要条件

定理 4.1.4 *(Kuhn-Tucker 一阶必要条件)* 假设x^*是约束优化问题(4.1.1)的一个局部最优解, $I(x^*) = \{i \mid c_i(x^*) = 0,\ \ i \in I\}$为$x^*$处的有效集. 若

(i) 函数f和c_i $(i \in I(x^*))$ 在x^*处可微;

(ii) c_i $(i \in I \setminus I(x^*))$在$x^*$处连续, 并且$c_i$ $(i \in E)$在x^*处一阶连续可微;

(iii) 向量组$\{\nabla c_i(x^*) \mid \forall i \in E \cup I(x^*)\}$线性无关,

则存在实数$\lambda_i \geq 0$ $(i \in I(x^*))$和λ_i $(i \in E)$, 使得

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*) \cup E} \lambda_i \nabla c_i(x^*) = 0. \tag{4.1.4}$$

若c_i $(i \in I \setminus I(x^*))$在点$x^*$处可微, 则存在实数$\lambda_i \geq 0$ $(i \in I)$ 和λ_i $(i \in E)$, 使得

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{i \in I \cup E} \lambda_i \nabla c_i(x^*) = 0, \\ \lambda_i c_i(x^*) = 0, \quad i \in I, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i \in I. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

4.1 最优性条件 — 一阶必要条件

证明 根据定理4.1.3，则存在不全为零的非负实数$\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i$ $(i \in I(x^*))$和实数$\bar{\lambda}_i$ $(i \in E)$，使得

$$\bar{\lambda}_0 \nabla f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*) \cup E} \bar{\lambda}_i \nabla c_i(x^*) = 0.$$

容易得到$\bar{\lambda}_0 > 0$. 事实上, 若$\bar{\lambda}_0 = 0$，则由向量组$\{\nabla c_i(x^*) \mid \forall i \in E \cup I(x^*)\}$线性无关可得：对任意的$i \in I(x^*) \cup E$都有$\bar{\lambda}_i = 0$. 这与$\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_i$ $(i \in I(x^*))$和实数$\bar{\lambda}_i$ $(i \in E)$不全为零相矛盾. 故$\bar{\lambda}_0 > 0$. 于是，记$\lambda_i := \frac{\bar{\lambda}_i}{\bar{\lambda}_0}$，$(\forall i \in I(x^*) \cup E)$，则有

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*) \cup E} \lambda_i \nabla c_i(x^*) = 0 \quad 且 \quad \lambda_i \geq 0, \ \forall i \in I(x^*).$$

即(4.1.4)式成立. 第一个结论得证.

再证第二个结论. 由于函数c_i $(i \in I \setminus I(x^*))$在点$x^*$处可微，因而只要取相应的乘子$\lambda_i = 0$，即有(4.1.5)式成立. 定理得证. □

4.1 最优性条件 — 一阶必要条件

注. (i) 定理4.1.4中的(4.1.4)和(4.1.5)均称为是一般约束优化问题(4.1.1) 的K-T 条件. 满足K-T条件的点x^*称为K-T点；满足K-T条件的点对(x^*, λ^*)称为K-T点对. (ii) 一般约束优化问题(4.1.1)的广义Lagrange函数定义为:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i \in E \cup I} \lambda_i c_i(x), \tag{4.1.6}$$

其中$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^\top \in \mathbb{R}^m$称为广义的Lagrange乘子向量. 则问题(4.1.1)的K-T条件可变为

$$\begin{cases} \nabla L_x(x, \lambda) = 0, \\ \lambda_i c_i(x) = 0, \quad i \in I, \\ \lambda_i \geq 0, \quad i \in I. \end{cases}$$

由上述K-T条件可看出，不等式约束与其对应的Lagrange乘子之间存在一种互补关系，称之为**互补松弛条件**. 若对任意的$i \in I$，Lagrange乘子λ_i与$c_i(x)$不全为零，此时的互补关系称为**严格互补松弛条件**，并称该问题在最优解x^*处满足严格互补松弛条件.

4.1 最优性条件 — 一阶必要条件

例 4.1.3 求约束优化问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2, \\
\text{s.t.} \quad & c_1(x) = -x_1 - x_2 + 2 \ge 0, \\
& c_2(x) = x_2 \ge 0,
\end{aligned}
$$

的可行K-T点.

解 因为目标函数和约束函数的梯度函数分别为:

$$
\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla c_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla c_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

所以，此问题对应的K-T条件为

$$
\begin{cases}
2(x_1 - 1) + \lambda_1 = 0, \\
1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\
\lambda_1(-x_1 - x_2 + 2) = 0, \\
\lambda_2 x_2 = 0, \\
\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0.
\end{cases}
$$

4.1 最优性条件 — 一阶必要条件

下面分情况讨论求解:
若$\lambda_2 = 0$，由K-T条件的第2个式子，可得$\lambda_1 = -1$. 这与$\lambda_1 \geq 0$相矛盾，由此可得$\lambda_2 > 0$. 再由K-T条件的第4个式子，可得$x_2 = 0$，于是上述方程组变为

$$\begin{cases} 2(x_1 - 1) + \lambda_1 = 0, \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1(-x_1 + 2) = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 > 0. \end{cases}$$

若$-x_1 + 2 = 0$，即$x_1 = 2$，由上述方程组中的第1个式子，可得$\lambda_1 = -2$. 这与$\lambda_1 \geq 0$相矛盾, 所以$-x_1 + 2 \neq 0$. 再由方程组中的第3个式子，可得$\lambda_1 = 0$. 然后，将$\lambda_1 = 0$分别代入上述方程组中的第1个和第2个式子中，可得$x_1 = 1, \lambda_2 = 1$. 由于$x^* = (1, 0)^\top$是问题的可行解，并且满足K-T条件，因此，$x^* = (1, 0)^\top$为所求问题的可行K-T点. □

§4.1.2 二阶最优性条件

定理 4.1.5 *(二阶必要条件)* 设x^*是一般约束优化问题*(4.1.1)* 的局部最优解，并满足*K-T*条件，λ^*是相应的*Lagrange*乘子向量，其中对任意的$i \in I$有$\lambda_i^* \geq 0$. 若函数f和c_i $(\forall i \in I \cup E)$在x^*处二阶可微，则对任意的

$$d \in T(x^*, \lambda^*) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} x^* + \delta_k d^k \in \mathscr{F}, \ \sum_{i \in I} \lambda_i^* c_i(x^* + \delta_k d^k) = 0, \\ \delta_k \to 0, \ \ d^k \to d \end{array} \right\}$$

都有$d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0$, 其中$L(\cdot,\cdot)$为问题*(4.1.1)*的广义*Lagrange*函数，由*(4.1.6)*式给出.

4.1 最优性条件 — 二阶必要条件

证明　对任意的$d \in T(x^*, \lambda^*)$, 若$d = 0$, 则结论显然成立；若$d \neq 0$, 则必存在序列$\{d^k\}$和正数列$\{\delta_k\}$ 使得$\delta_k \to 0$, $x^* + \delta_k d^k \in \mathscr{F}$, 且$\sum_{i\in I} \lambda_i^* c_i(x^* + \delta_k d^k) = 0$. 所以由(4.1.6)式，可得

$$
\begin{aligned}
f(x^* + \delta_k d^k) &= L(x^* + \delta_k d^k, \lambda^*) \\
&= L(x^*, \lambda^*) + \frac{1}{2}\delta_k^2 (d^k)^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d^k + o(\delta_k^2 \|d^k\|^2) \\
&= f(x^*) + \frac{1}{2}\delta_k^2 (d^k)^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d^k + o(\delta_k^2 \|d^k\|^2).
\end{aligned}
\tag{4.1.7}
$$

又由x^*是问题(4.1.1)的局部最优解，故对充分大的k, 都有$f(x^* + \delta_k d^k) \geq f(x^*)$. 再结合(4.1.7)式, 令$\delta_k \to 0$ 以及$d^k \to d$，即可得到$d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0$. 定理得证. □

4.1 最优性条件 — 二阶充分条件

定理 4.1.6 *(二阶充分条件)* 对于一般约束优化问题*(4.1.1)*, 若

(i) 函数f和c_i $(i \in I \cup E)$ 二阶连续可微;

(ii) 可行点对(x^*, λ^*) 为该问题的*K-T*点对, 且严格互补松弛条件成立;

(iii) 对任意的$d \in M := \{d \in \mathbb{R}^n \mid d^\top \nabla c_i(x^*) = 0, \ \forall i \in I(x^*) \cup E\}$, 都有

$$d^\top \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) d > 0,$$

其中$L(\cdot, \cdot)$为问题*(4.1.1)*的广义*Lagrange*函数, 由*(4.1.6)*式给出,

则x^*为问题*(4.1.1)*的严格局部最优解.

4.1 最优性条件 — 二阶充分条件

证明　用反证法. 假设x^*不是问题(4.1.1)的严格局部最优解, 则在x^*的邻域内存在序列$\{x^k\} \subseteq \mathscr{F}$, 使得$x^k \to x^*$ $(x^k \neq x^*)$, 且$f(x^k) \leq f(x^*)$. 在x^*处由一阶Taylor公式, 可得

$$f(x^k) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^\top (x^k - x^*) + o(\|x^k - x^*\|).$$

令$d^k = \dfrac{x^k - x^*}{\|x^k - x^*\|}$, 则序列$\{d^k\}$有界，进而序列$\{d^k\}$存在收敛子列. 不失一般性，不妨设序列$\{d^k\}$收敛，且极限为$d$，则$\|d\| = 1$，而且$d$是问题(4.1.1)在$x^*$处的一个可行方向. 此外, 注意到:

$$\nabla f(x^*)^\top d^k + o(\|d^k\|) = \frac{f(x^k) - f(x^*)}{\|x^k - x^*\|} \leq 0.$$

上式两边对k取极限，于是有$\nabla f(x^*)^\top d \leq 0$.

事实上, 进一步可证得$\nabla f(x^*)^\top d = 0$. 因为d是问题(4.1.1)在x^*处的一个可行方向, 根据约束条件, 进而有

$$\nabla c_i(x^*)^\top d = 0,\ \ \forall i \in E \quad 且 \quad \nabla c_i(x^*)^\top d \geq 0,\ \ \forall i \in I(x^*).$$

再由点对(x^*, λ^*)是问题(4.1.1)的K-T点对, 故有

$$\nabla f(x^*)^\top d = \sum_{i \in I \cup E} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*)^\top d \geq 0.$$

4.1 最优性条件 — 二阶充分条件

结合$\nabla f(x^*)^\top d \le 0$, 进而可得$\nabla f(x^*)^\top d = 0$. 所以

$$\nabla f(x^*)^\top d = \sum_{i\in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*)^\top d = 0.$$

再由$\nabla c_i(x^*)^\top d \ge 0 \ (i \in I(x^*))$, $\lambda_i^* \ge 0 \ (i \in I)$以及严格互补条件, 所以对任意的$i \in I(x^*)$, 有$\nabla c_i(x^*)^\top d = 0$, 即$d$满足:

$$\begin{cases} \nabla c_i(x^*)^\top d = 0, & \lambda_i > 0, \quad i \in I(x^*) \\ \nabla c_i(x^*)^\top d \ge 0, & \lambda_i = 0, \quad i \in I \setminus I(x^*) \\ \nabla c_i(x^*)^\top d = 0, & i \in E. \end{cases}$$

结合严格互补条件成立, 考虑广义Lagrange函数$L(\cdot,\cdot)$在x^*处的二阶Taylor公式:

$$\begin{aligned} L(x^*,\lambda^*) &= f(x^*) \ge f(x^k) \ge f(x^k) - \sum_{i\in I\cup E} \lambda_i^* c_i(x^k) = L(x^k,\lambda^*) \\ &= L(x^*,\lambda^*) + \frac{1}{2}\delta_k^2 (d^k)^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*,\lambda^*) d^k + o(\|\delta_k d^k\|^2), \end{aligned}$$

其中$\delta_k = \|d^k\|$. 由于$d^k \to d \ne 0$，$0 < \delta_k \to 0$, 有$d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*,\lambda^*) d \le 0$. 这与条件$(iii)$相矛盾. 所以$x^*$为问题(4.1.1)的严格局部最优解. □

§4.1.3 凸规划问题的最优性条件

对于凸规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in I = \{1, 2, \ldots, p\}, \\ & c_i(x) = a_i^\top x + b_i = 0, \quad \forall i \in E = \{p+1, \ldots, m\}, \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

其中$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是凸函数，$c_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$是凹函数. 记问题(4.1.8)的可行域为

$$\mathscr{F} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) = a_i^\top x + b_i = 0,\ i \in E; \quad c_i(x) \geq 0,\ i \in I\}.$$

实际上，对于凸规划问题，其可行的K-T点都是凸规划问题的最优解.

4.1 最优性条件 — 凸规划

定理 4.1.7 对于凸规划问题(4.1.8), 若

(i) 函数f和c_i $(i \in I)$ 在x^*处可微;

(ii) x^*是凸规划问题(4.1.8)的可行K-T点,

则x^*是凸规划问题(4.1.8)的全局最优解.

证明 设x^*是凸规划问题(4.1.8)的可行K-T点, λ^*是相应的Lagrange乘子向量, 且广义Lagrange 函数由(4.1.6)定义, 即

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i \in E \cup I} \lambda_i c_i(x).$$

由于目标函数f是凸函数, 约束函数$c_i(x)$ $(i \in I)$是凹函数且$c_i(x)$ $(i \in E)$是线性函数, 因而直接验证可得: 广义Lagrange函数$L(\cdot,\lambda)$关于x是凸函数. 利用凸函数的性质和K-T条件, 于是有

$$L(x,\lambda^*) \geq L(x^*,\lambda^*) + (x-x^*)^\top \nabla_x L(x^*,\lambda^*) = L(x^*,\lambda^*) = f(x^*), \quad \forall x \in \mathscr{F}.$$

再由广义Lagrange函数的定义和可行性条件, 可得对任意的$x \in \mathscr{F}$都有$f(x) \geq f(x^*)$, 即x^*是凸规划问题(4.1.8)的全局最优解. □

4.1 最优性条件 — 凸规划

例 4.1.4 利用最优性条件求解约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & c_1(x) = -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ & c_2(x) = 2x_1 + x_2 - 3 = 0. \end{aligned}$$

解 由于该问题的广义Lagrange函数为

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= f(x) - \lambda c_1(x) - \mu c_2(x) \\ &= (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 - \lambda(-x_1^2 + x_2) - \mu(2x_1 + x_2 - 3), \end{aligned}$$

4.1 最优性条件 — 凸规划

由广义Lagrange函数分别对x_1, x_2求偏导数，于是可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(x,\lambda,\mu)}{\partial x_1} &= 2(x_1-3)+2\lambda x_1-2\mu, \\
\frac{\partial L(x,\lambda,\mu)}{\partial x_2} &= 2(x_2-1)-\lambda-\mu.
\end{aligned}
$$

所以该问题的K-T条件和约束条件为：

$$
\begin{cases}
2(x_1-3)+2\lambda x_1-2\mu=0, \\
2(x_2-1)-\lambda-\mu=0, \\
\lambda(-x_1^2+x_2)=0, \\
-x_1^2+x_2\geq 0, \\
2x_1+x_2-3=0, \\
\lambda\geq 0.
\end{cases}
$$

对上述方程组分情况讨论求解:

若$\lambda=0$，由上述方程组中的第1个和第2个式子，分别可得

$$
\begin{cases}
2(x_1-3)-2\mu=0, \\
2(x_2-1)-\mu=0.
\end{cases}
$$

再结合方程$2x_1+x_2-3=0$，解之得：$x_1=\frac{7}{5}, x_2=\frac{1}{5}, \mu=-\frac{8}{5}$. 但是此解不满足条件$-x_1^2+x_2\geq 0$, 所以点$x=\left(\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)^\top$不是该问题的可行解, 由此可得$\lambda\neq 0$. 再由方程组中的第3个式子，则$-x_1^2+x_2=0$，即$x_2=x_1^2$. 将之依次分别代入方程组中的最后一个式子、第1个式子以及第2个式子中，整理可求得：

$$x_1=1,\quad x_2=1,\quad \lambda=1,\quad \mu=-1$$

或

$$x_1=-3,\quad x_2=9,\quad \lambda=-11,\quad \mu=27.$$

由$\lambda\geq 0$, 故第二组解舍去, 即$x=(-3,9)^\top$不是该问题的K-T点. 所以该问题的可行K-T点只有$\bar{x}=(1,1)^\top$.

另一方面，容易验证：目标函数f是$\mathbb{R}^2$上的凸函数，约束函数c_1是凹函数. 此外，c_2又是线性函数，因此，易知该问题是凸规划问题. 根据定理4.1.8以及凸规划问题最优解的性质，所以，$x^*=(1,1)^\top$是所求问题的全局最优解. □

4.1 最优性条件 — 作业

4.4 求下列约束优化问题的K-T点:

(1)
$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) = 4x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 4 - x_1 - x_2 \ge 0, \\
& x_2 + 7 \ge 0, \\
& -(x_1 - 3)^2 + x_2 + 1 \ge 0.
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 + x_2^2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 \le 4, \\
& 2x_1 + x_2 \le 3, \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

4.1 最优性条件 — 作业

4.6 考虑下面的约束优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & g(x) = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2 \le 0. \end{aligned}$$

(1) 写出该问题的K-T条件，并求出相应的K-T点.

(2) 试证：该问题的K-T点x^*是该问题的一个严格全局最优解.

4.9 设矩阵G对称正定，x^*是下面二次规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \frac{1}{2} x^\top G x + r^\top x \\ \text{s.t.} \quad & A^\top x = b, \end{aligned}$$

的全局最优解的充分必要条件是x^*, λ^*满足下列条件

$$x^* = G^{-1}(A\lambda^* - r), \quad \lambda^* = (A^\top G^{-1} A)^{-1}(A^\top G^{-1} r + b).$$