天津大学2012 ～2013 学年第二 学期研究生课程考试试卷

A正定 ⇒ GS收.

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________ 学号：___ ________ 姓名：________

声明

1. 非标准答案，仅供参考。不保证正确，请帮忙改正。
2. 解题方法不是唯一的，该答案只是给出一种思路。
3. 虚线框内为判断理由或者计算方法（考试时不用写）。

一、判断（10分）

1. 设 X 是数域 K 上的线性空间，M_1，M_2 是 X 的子空间，则 $M_1 \cap M_2$ 是 X 的线性子空间。（√）

结论是正确的。注意：$M_1 \cup M_2$ 不是 X 的子空间。

2. 设 $A \in C^{n\times n}$，A 可对角化的充分必要条件是其特征多项式无重零点．（×）

是充分条件但不是必要条件。A 的最小多项式与 A 的特征多项式有相同的零点，不同的只是零点的重数。即最小多项式无重零点的情况，特征多项式可能有重零点。所以结论是错误的。要注意下面几种说法：

① A 可对角化的充分必要条件是其最小多项式无重零点。（√）
② A 可对角化的充分必要条件是其特征多项式无重零点。（×）
③ A 可对角化的充分必要条件是 A 存在一个无重零点的零化多项式。（√）
④ A 可对角化的充分必要条件是 A 的初等因子都是一次的。（√）

3. 设 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上以 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x_k) = 1$．（×）

应为 $n+1$，所以结论错误。注意下面几个结论：

① $\sum_{k=0}^{n} l_k(x_k) = n+1$　② $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$　③ $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) x_k^m = x^m \ (m \le n)$

4. A 是正定对称矩阵，则线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛．（×）

由定理 7.9"若 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 对称正定，则 Gauss-Seidel 迭代格式收敛"，该定理并不适用 Jacobi 迭代格式，所以结论是错误的。

5. 设 X 是内积空间，当 $x, y \in X$，$\langle x, y \rangle = 0$ 时，必有 $x=0$ 或 $y=0$．（×）

由定理 6.1 "若 $x=0$ 或 $y=0$，则 $\langle x,y \rangle = 0$"，但反之不然，所以结论错误。

6. 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上任意一种方阵范数，单位矩阵 $E \in C^{n\times n}$，则 $\|E\| = 1$．（×）

F 范数是方阵范数，但 $\|E\|_F = \sqrt{n} \ne 1$，所以结论错误。$\|A\|_F = (\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$

7. T 是线性算子，则 $T(0)=0$．（√）

由定理 1.8 可知线性算子 T 的基本性质：

① $T(0)=0$　② $T(-x) = -T(x)$　($\forall x$ ä X)，可知结论正确。

8. 已知 $A, B \subset E$，则 $A \times B \ne B \times A$．（×）

一般来说，$A \times B \ne B \times A$，即直积不满足交换律，所以结论是错误的。

9. 设 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $(A-2E)^2 = 0$．（×）

初等：$(\lambda-2)^3$
$d_3(\lambda) = (\lambda-2)^3$
$(A-2E)^2 \ne 0$

由 Jordan 标准形可知 A 的初等因子为 $(\lambda-2)^3$，可推出最小多项式为 $(\lambda-2)^3$。由"分解检验法"的过程可倒推，$(A-2E)^2 \ne 0$．所以结论是错误的。

10. $A \in \square^{n\times n}$，$A$ 存在 Doolittle 分解的充要条件是 A 的各阶顺序主子式大于零 $\ne 0$. Doolittle. P212

（*** 忽略，第十题不考 ***）

　考试时间：2013 年 7 月 7 日

课程名称：工程数学基础 课程编号：S131A035 学院名称：________ 学号：________ 姓名：________

二、填空（10分）

1. 设 X 是内积空间，A 是 X 的子空间，则 $A\cap A^{\perp}=$ ___{ 0 }___.

由定理 6.5 "$A\cap A^{\perp}\subset\{0\}$，当 $0\in A$ 时 $A\cap A^{\perp}=\{0\}$"，而 A 是 X 的子空间，由线性空间的零元素存在性可知 $0\in A$，所以 $A\cap A^{\perp}=\{0\}$。

2. 已知 $F(x)=(\sin x_1x_2, 2x_1^2, e^{x_1})^T$ 则 $\dfrac{dF(x)}{dx}=$ ___（如下）___.

由定义 5.3，可知向量值函数的求导方法如下：

令 $F_1(x)=\sin x_1x_2 \quad F_2(x)=2x_1^2 \quad F_3(x)=e^{x_1}$

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\cos x_1x_2 & x_1\cos x_1x_2\\ 4x_1 & 0\\ 0 & e^{x_1}\end{bmatrix}$$

3. 设 $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&4\end{bmatrix}$，则 $Cond_\infty(A)=$ ___5.___ .

由定义 7.2，可知公式 $\mathrm{Cond}_\infty(A)=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty$，而 $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$。

由初等行变换求出 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，

可得 $\|A\|_\infty=4$，$\|A^{-1}\|_\infty=\frac{5}{4}$，所以 $\mathrm{Cond}_\infty(A)=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty=5$

注：求 A 的逆矩阵过程如下（将矩阵 $A|E$ 通过初等行变换化为 $E|A^{-1}$）

$$\begin{bmatrix}-2&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&4&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&1&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

4. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}$，则 $\det(e^A)=$ ___（如下）___.

由例 5.11，直接得到 $\det(e^A)=e^{\mathrm{Tr}A}=e^{1+(-1)+(-1)}=e^{-1}$

5. $\|(i,1+i,1)\|_2=$ ___2___.

由公式 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T\in \mathrm{R}^n(\mathrm{C}^n)$，$\|x\|_2=(\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

可得 $\|(i,1+i,1)\|_2=(|i|^2+|1+i|^2+1^2)^{\frac{1}{2}}=(1+2+1)^{\frac{1}{2}}=2$

注：$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，所以 $|i|=1$，$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

 考试时间：2013 年 7 月 7 日

三．(12 分) 设 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C．

解：先求不变因子

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-(\lambda-2)\\4&\lambda-3&0\\\lambda+1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-(\lambda-2)\\0&\lambda-3&4(\lambda-2)\\0&-1&(\lambda+1)(\lambda-2)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-(\lambda-2)\\0&1&-(\lambda+1)(\lambda-2)\\0&\lambda-3&4(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-(\lambda-2)\\0&1&-(\lambda+1)(\lambda-2)\\0&0&4(\lambda-2)+(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

不变因子为：$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

初等因子为：$\lambda-2$，$(\lambda-1)^2$

属于 $\lambda-2$ 的 Jordan 块为 $[2]$，属于 $(\lambda-1)^2$ 的 Jordan 块为 $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$，

所以 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

$d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$ 的相伴矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&-5\\0&1&4\end{bmatrix}$，

所以 A 的有理标准形为 $C=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&-5\\0&1&4\end{bmatrix}$

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________ 学号：____ ________ 姓名：________

四．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}$，求 e^{At}.

解：先求 A 的特征值及最小多项式。因

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-2&-3\\-4&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$。

$$经检验 (A-2E)(A-E)=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\4&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&3\\4&0&0\end{bmatrix}\neq 0.$$

故 A 的最小多项式为 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$，$\deg\varphi(\lambda)=3$

设 $f(At)=e^{At}=a_0(t)E+a_1(t)A+a_2(t)A^2=T(At)$。

由于 $f(\lambda t)=e^{\lambda t}$ 与 $T(\lambda t)=a_0(t)+a_1(t)\lambda+a_2(t)\lambda^2$ 在 A 上谱值相等，

得方程组 $\begin{cases}a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)=e^{2t}\\a_0(t)+a_1(t)+a_2(t)=e^t\\a_1(t)+4a_2(t)=te^{2t}\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}a_0(t)=(2t-3)e^{2t}+4e^t\\a_1(t)=(4-3t)e^{2t}-4e^t\\a_2(t)=(t-1)e^{2t}+e^t\end{cases}$

又因 $A^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}4&0&0\\16&4&9\\12&0&1\end{bmatrix}$，

所以

$$e^{At}=a_0(t)E+a_1(t)A+a_2(t)A^2$$

$$=a_0(t)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+a_1(t)\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}+a_2(t)\begin{bmatrix}4&0&0\\16&4&9\\12&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)&0&0\\a_1(t)+16a_2(t)&a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)&3a_1(t)+9a_2(t))\\4a_1(t)+12a_2(t))&0&a_0(t)+a_1(t)+a_2(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{2t}&0&0\\(13t-12)e^{2t}+12e^t&e^{2t}&3e^{2t}-3e^t\\4e^{2t}-4e^t&0&e^t\end{bmatrix}$$

考试时间：2013 年 7 月 7 日

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________　学号：___　________　姓名：________

五.（14 分）已知线性方程组为 $\begin{bmatrix}2&1&3\\1&4&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-8\\2\end{bmatrix}$

（1）写出 Gauss-Jacobin 和 Gauss-Seidel 迭代格式，

（2）判断迭代格式收敛性.

解：

（1）Gauss-Jacobi 迭代格式为：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}(6-x_2^{(k)}-3x_3^{(k)})\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-8-x_1^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=2-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代格式为：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}(6-x_2^{(k)}-3x_3^{(k)})\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-8-x_1^{(k+1)})\\x_3^{(k+1)}=2-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}\end{cases}$$

（2）Gauss-Jacobi 迭代矩阵为：$M_1=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{4}&0&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}$，

由 $\det(\lambda E-M_1)=\begin{vmatrix}\lambda&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{1}{4}&\lambda&0\\2&1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+\frac{3}{8}-3\lambda-\frac{1}{8}\lambda=\lambda^3-\frac{25}{8}\lambda+\frac{3}{8}$，

设 $f(\lambda)=\lambda^3-\frac{25}{8}\lambda+\frac{3}{8}$，因 $f(1)<0,f(2)>0$，由连续性可知在 $(1,2)$ 之间必有一个特征值，使得 $f(\lambda)=0$ 。所以 M_1 的谱半径 $\rho(M_1)>1$，故 Gauss-Jacobi 迭代格式发散。

Gauss-Seidel 迭代矩阵为：

$$M_2=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&4&0\\2&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{7}{8}&-\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&\frac{7}{8}&\frac{21}{8}\end{bmatrix}$$

由 $\det(\lambda E-M_1)=\begin{vmatrix}\lambda&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&\lambda-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}\\0&-\frac{7}{8}&\lambda-\frac{21}{8}\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-\frac{1}{8})(\lambda-\frac{21}{8})-\frac{21}{64}\lambda=\lambda^2(\lambda-\frac{11}{4})$

可知 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\frac{11}{4}$，$\rho(M_2)=\frac{11}{4}>1$，故 Gauss-Seidel 迭代格式发散。

注：用初等行变换求逆矩阵过程

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&0\\1&4&0&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\1&4&0&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&4&0&-\frac{1}{2}&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&-\frac{7}{8}&-\frac{1}{4}&1\end{array}\right]$$

考试时间：2013 年 7 月 7 日

六．(10 分) 已知下列插值条件

x	76	77	78	79	81	82
$y(x)$	2.83267	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

用二次 Newton 插值多项式计算 $f(78.40)$ 的近似值（结果保留到小数点后第 5 位）。

解：取 78.4 周围的三个节点 77，78，79，构造差商表如下：

k	x_k	$f(x_k)$	$f[x_0,x_k]$	$f[x_0,x_1,x_k]$
0	77	2.90256	-	-
1	78	2.97857	0.07601	-
2	79	3.06173	0.07959	0.00358

所以二次 Newton 插值多项式为：

$$N_2(x) = 2.90256 + 0.07601(x-77) + 0.00358(x-77)(x-78).$$

计算得：

$$f(78.40) \approx N_2(78.40) = 2.90256 + 0.07601(78.40-77) + 0.00358(78.40-77)(78.40-78) \approx 3.01098$$

注：

题目要求用二次 Newton 插值公式所以选择三个节点做差商表，节点选择应尽量把要求的值包在中间。

差商计算公式如下

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{2.97857-2.90256}{78-77} = 0.07601$$

$$f[x_0,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = \frac{3.06173-2.90256}{79-77} = 0.07959$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{0.07959-0.07601}{79-78} = 0.00358$$

二次 Newton 插值公式为：

$$\begin{aligned} N_2(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &= 2.90256 + 0.07601(x-77) + 0.00358(x-77)(x-78) \end{aligned}$$

课程名称：工程数学基础 课程编号：S131A035 学院名称：______ 学号：___ ______ 姓名：______

七．(10 分) 对积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx$，用 Romberg 方法计算积分的近似值，并将结果填入下表（结果保留至小数点后第五位）.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.75000			
1	0.81945	0.84260		
2	0.83171	0.83580	0.83535	
3	0.83468	0.83567	0.83566	0.83566

注：计算过程如下

（计算很繁琐-_-!!! 要仔细，一步算错则后面的结果就都错了）

$$f(x)=\frac{1}{1+x^3}$$

$$T_1=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=0.75$$

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\tfrac{1}{2})=0.375+0.44445=0.81945$$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\tfrac{1}{4})+f(\tfrac{3}{4})]=0.40973+\frac{1}{4}(0.98462+0.70330)=0.83171$$

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}[f(\tfrac{1}{8})+f(\tfrac{3}{8})+f(\tfrac{5}{8})+f(\tfrac{7}{8})]=$$

$$=0.41586+\frac{1}{8}(0.99805+0.94991+0.80377+0.59883)=0.83468$$

$$S_1=\frac{4T_2-T_1}{3}=\frac{3.2778-0.75}{3}=0.84260$$

$$S_2=\frac{4T_4-T_2}{3}=\frac{3.32684-0.81945}{3}=0.83580$$

$$S_4=\frac{4T_8-T_4}{3}=\frac{3.33872-0.83171}{3}=0.83567$$

$$C_1=\frac{16S_2-S_1}{15}=\frac{13.3728-0.8426}{15}=0.83535$$

$$C_2=\frac{16S_4-S_2}{15}=\frac{13.37072-0.8358}{15}=0.83566$$

$$R_1=\frac{64C_2-C_1}{63}=\frac{53.48224-0.83535}{63}=0.83566$$

考试时间：2013 年 7 月 7 日

天津大学 2012 ~2013 学年第二 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________　学号：___　________　姓名：______

八. (12 分) 设函数 $f(x)=\sin x$，用 Legendre 多项式求 $f(x)$ 在 $P_2[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$，并求 $\delta^2=\|f-S_2^*\|_2^2$（结果保留到小数点后第 5 位.）

（*** 忽略，老师没有讲这部分内容，应该不会考吧 ***）

$$S_2^*(x)=15(\sin 1+3\cos 1)x^2+(-12\sin 1-48\cos 1)x+(10-\frac{3}{2})\sin 1+(30+\frac{3}{2})\cos 1$$

$\langle g,p_0\rangle=0$

$\langle g,p_1\rangle=\sin 1-\cos 1$

$\langle g,p_2\rangle=\sin 1+3\cos 1$

$$\delta^2=\|f-S_2^*\|_2^2=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}|g(t)|^2dt-\sum_{k=0}^{2}\frac{2k+1}{2}|\langle g,p_k\rangle|^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}|g|^2dt-\left(0+\frac{3}{2}|\langle g,p_1\rangle|^2+\frac{5}{2}|\langle g,p_2\rangle|^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\sin^2(t+1)dt-\left(\frac{3}{2}|\langle g,p_1\rangle|^2+\frac{5}{2}|\langle g,p_2\rangle|^2\right)\right]$$

九.（12 分）证明：

1.设 $A\in C^{n\times n}$ 试证 $\det e^A=e^{\mathrm{Tr}A}$.

证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$，则 e^A 的特征值为 $e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\ldots,e^{\lambda_n}$，所以

$$\det e^A=e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n}=e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=e^{\mathrm{Tr}A}$$

2.若 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的标准正交系，则对 $\forall x\in\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 可唯一地表示为

$$x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$$

证明：因为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的正交系，所以 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是线性无关的，故它是 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的一个基，于是 $\forall x$ ä $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 可唯一地表示为 $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$ 。因此 $\forall i$ ä $\{1,2,\cdots,n\}$ 有

$$\langle x,e_i\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k,e_i\right\rangle=\lambda_i\langle e_i,e_i\rangle=\lambda_i\text{，即 }x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\text{。}$$

考试时间：2013 年 7 月 7 日