5.3 多目标规划问题的解法 — 概述

对于多目标规划问题(5.2.1)的求解, 最好是找出该问题的绝对最优解. 若该问题不存在绝对最优解，应找出它的有效解或弱有效解. 但是，在一般情况下，多目标规划问题的有效解或弱有效解可能有无穷多个. 若对多目标规划问题(5.2.1)直接求解出所有的最优解，这种求解是比较困难的. 实际上，确定整个有效解集的问题是NP-难的. 另外，多目标规划问题任何一个有效解或弱有效解并不都是符合决策者所希望得到的解，于是在解集中需要找到一个能满足决策者意图的解. 由此，对于多目标规划问题(5.2.1)，往往采取一些间接求解多目标规划问题的方法，即把多目标规划问题(5.2.1)转化为一个或多个单目标规划问题. 本节中，我们介绍一些间接求解多目标规划问题的方法.

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

评价函数法的基本思想是：根据问题的特点和决策者的意图，将原来多目标规划问题(5.2.1) 转化成一个单目标优化问题，即通过多目标规划问题(5.2.1)的m个分量目标函数f_i构造一个单目标(数值)函数$u(F(x))$(称之为**评价函数**). 然后，利用求解非线性最优化问题的方法求解如下单目标优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & u(F(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathscr{F}. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

把所求优化问题(5.3.1)的最优解x^*作为原多目标规划问题(5.2.1)某种意义下的最优解x^*. 根据实际问题，可以采用不同的方法构造评价函数，因此得到各种不同的评价函数法，从而可求出在不同意义下的最优解x^*. 现在要问：所得到问题(5.3.1)的最优解x^*是原多目标规划问题(5.2.1)的有效解还是弱有效解？如果不是，那么，在什么条件下，能保证问题(5.3.1)的最优解x^*是原多目标规划问题(5.2.1)的有效解或弱有效解？为此，需引入下面的概念和定理. 然后，我们将介绍常用的几种评价函数法，并能保证所得到问题(5.3.1)的最优解x^*一定是原多目标最优化问题(5.2.1)的有效解或弱有效解.

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

评价函数法的基本思想是：根据问题的特点和决策者的意图，将原来多目标规划问题(5.2.1) 转化成一个单目标优化问题，即通过多目标规划问题(5.2.1)的m个分量目标函数f_i构造一个单目标(数值)函数$u(F(x))$(称之为**评价函数**). 然后，利用求解非线性最优化问题的方法求解如下单目标优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & u(F(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathscr{F}. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

把所求优化问题(5.3.1)的最优解x^*作为原多目标规划问题(5.2.1)某种意义下的最优解x^*. 根据实际问题，可以采用不同的方法构造评价函数，因此得到各种不同的评价函数法，从而可求出在不同意义下的最优解x^*. 现在要问：所得到问题(5.3.1)的最优解x^*是原多目标规划问题(5.2.1)的有效解还是弱有效解? 如果不是，那么，在什么条件下，能保证问题(5.3.1)的最优解x^*是原多目标规划问题(5.2.1)的有效解或弱有效解?

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

为此，需引入下面的概念和定理. 然后，我们将介绍常用的几种评价函数法，并能保证所得到问题(5.3.1)的最优解x^*一定是原多目标最优化问题(5.2.1)的有效解或弱有效解.

定义 5.3.1 设映射$u:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

(i) 若对任意的$X_1, X_2 \in \mathbb{R}^m$且$X_1 \preccurlyeq X_2$, 都有$u(X_1) < u(X_2)$, 则称函数$u$关于变量$X$是一个严格单调增函数;

(ii) 若对任意的$X_1, X_2 \in \mathbb{R}^m$且$X_1 < X_2$, 都有$u(X_1) < u(X_2)$, 则称函数$u$关于变量$X$是一个单调增函数.

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

定理 5.3.1 对于映射$u: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 和$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 设点$x^*$ 是单目标最优化问题(5.3.1)的最优解.

(i) 若$u(F)$关于变量F是一个严格单调增函数, 则点x^*为原多目标规划问题(5.2.1) 的一个有效解，即$x^* \in P$;

(ii) 若$u(F)$关于变量F是一个单调增函数, 则点x^*为原多目标规划问题(5.2.1) 的一个弱有效解，即$x^* \in P_w$.

证明 (i) 用反证法证明. 假设x^*不是原多目标规划问题(5.2.1)的有效解，即$x^* \notin P$. 根据有效解的概念，因而必存在一点$y \in \mathscr{F}$使得$F(y) \preccurlyeq F(x^*)$. 再由$u(F)$关于变量F是严格单调增函数，故$u(F(y)) < u(F(x^*))$, 这与x^*是单目标最优化问题(5.3.1)的最优解相矛盾，因此可证得x^*为多目标规划问题(5.2.1) 的有效解.

(ii) 类似于结论(i)的证明，同理可证得结论(ii)成立. $\square$

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

一、线性加权和法

线性加权和法的基本思想是：首先，对多目标规划问题(5.2.1)中的各个分量目标函数f_i $(i \in \{1, 2, \ldots, m\})$按照其重要程度赋予适当的权系数$\lambda_i \geq 0 \;\; (i \in \{1, \ldots, m\})$, 且$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. 然后，把这些带权系数的分量目标函数相加来构造评价函数$u(F(x))$, 即

$$u(F(x)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

再求解对应单目标最优化问题(5.3.1)，得其最优解为x^*, 则x^*为原多目标最优化问题(5.2.1) 某种意义下的最优解.

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

定理 5.3.2 设映射$u(F) = \lambda^T F$, 其中$F \in \mathbb{R}^m$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$ 称为权向量.

(i) 当$\lambda > 0$时，则函数$u(F)$关于F严格单调递增. 此时，单目标优化问题*(5.3.1)* 的最优解x^*为多目标规划*(5.2.1)*的有效解;

(ii) 当$\lambda \succcurlyeq 0$时，则函数$u(F)$关于F单调递增. 此时，单目标优化问题*(5.3.1)* 的最优解x^*为多目标规划*(5.2.1)*的弱有效解.

证明 (*i*) 对任意的$F_1, F_2 \in \mathbb{R}^m$, 且$F_1 \preccurlyeq F_2$, 由于$u(F) = \lambda^T F$和$\lambda > 0$，因而

$$u(F_1) = \lambda^T F_1 < \lambda^T F_2 = u(F_2).$$

根据严格单调增函数的概念，从而可知函数$u(F)$关于变量F是严格单调增的. 再由定理5.3.1, 所以单目标最优化问题(5.3.1)的最优解x^* 为原多目标规划问题(5.2.1)的有效解.

(*ii*) 类似于结论(*i*)的证明，同理可得结论(*ii*)成立. □

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

注. (i) 线性加权和法的特点: 简单易行，计算量小，常被实际工作者所采用; (ii) 权系数的相对大小表示各个分量目标函数的相对重要程度，权系数越大，表明对应的分量目标函数越重要. 权系数给予的越合理，得到的最优解越使我们满意，那么，怎样能够给出合理的权系数? 关于确定权系数的方法，我们在下一小节中再讨论.

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

二、极大极小法($\min-\max$**法**)　在对策论中，作决策时，往往采取这样一种策略思想，即在最不利的情况下找出一个最有利、最好的策略方案. 根据这种思想，对于求解多目标规划问题(5.2.1)，首先，考虑用各个分量目标函数$f_i(x)$ $(i \in \{1,\ldots,m\})$的最大值函数来作为评价函数$u(F(x))$, 即

$$u(F(x)) = \max_{1\le i\le m}\{f_i(x)\}.$$

然后，求解相应的单目标最优化问题(5.3.1), 得最优解x^*, 则x^*为原多目标规划(5.2.1) 在某种意义下的最优解, 我们把此解x^*称为原多目标规划(5.2.1)在极大极小意义下的一种最优解. 更一般地，可选取一组适当的权系数$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$使得$\lambda_i \ge 0$ $(i \in \{1,\ldots,m\})$且$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, 则对应的评价函数$u(F(x))$变为

$$u(F(x)) = \max_{1\le i\le m}\{\lambda_i f_i(x)\}.$$

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

定理 5.3.3 若对任意的权向量$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T > 0$, 则相应单目标最优化问题(5.3.1) 的最优解x^*必为多目标规划问题(5.2.1)的弱有效解.

证明 用反证法证明. 假设x^*是单目标最优化问题(5.3.1) 的最优解，而不是多目标规划问题(5.2.1)的弱有效解. 则必存在一个$y \in \mathscr{F}$使得$F(y) < F(x^*)$. 由于$\lambda > 0$，因而

$$\lambda_i f_i(y) < \lambda_i f_i(x^*) \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

从而，

$$\max_{1 \le i \le m}\{\lambda_i f_i(y)\} < \max_{1 \le i \le m}\{\lambda_i f_i(x^*)\}.$$

这也说明x^*不是单目标最优化问题(5.3.1)的最优解，与x^*是单目标最优化问题(5.3.1) 的最优解相矛盾. 定理得证. □

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

三、理想点法 理想点法的基本思想是：首先，对多目标规划问题(5.2.1)中每个分量目标函数$f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$，分别求其极小值f_i^*来作为该分量目标函数的理想值；然后，通过分量目标函数$f_i(x)$在可行域$\mathscr{F}$内尽可能地逼近相应理想值的方法，来获得原多目标规划问题(5.2.1)某种意义下的最优解．评价函数$u(F(x))$的构造可为如下形式：

$$u(F(x)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i(x) - f_i^*)^2}.$$

再求解相应的单目标最优化问题(5.3.1)，得其最优解为x^*，则x^*为原多目标规划问题(5.2.1) 某种意义下的最优解.

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

定义 5.3.2 对于多目标规划问题*(5.2.1)*，设各个分量目标函数f_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$在可行域$\mathscr{F}$上的极小值点x_i^*存在，并令

$$f_i^* := f_i(x_i^*) = \min_{x \in \mathscr{F}} f_i(x), \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\},$$

则称向量$F^* := (f_1^*, \ldots, f_m^*)^T$为向量目标函数$F(x)$的理想点.

根据理想点和范数的概念，评价函数可以表示成如下形式:

$$u(F(x)) = \|F(x) - F^*\|.$$

更一般地，若在向量空间$\mathbb{R}^m$中引入p范数$(1 \le p < \infty)$，则相应的评价函数可表示为:

$$u(F(x)) = \|F(x) - F^*\|_p = \left[\sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i^*|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

定理 5.3.4 若$p \geq 1$, 则单目标最优化问题*(5.3.1)* 的最优解x^*必为原多目标规划问题*(5.2.1)*的有效解.

证明 用反证法证明. 假设x^*是单目标最优化问题(5.3.1) 的最优解，而不是多目标规划问题(5.2.1)的有效解. 则必存在一个$y \in \mathscr{F}$使得$F(y) \preccurlyeq F(x^*)$. 根据理想点的概念可知, 对任意的$x \in \mathscr{F}$，都有

$$F^* \leq F(x).$$

进而有

$$0 \leq F(y) - F^* \preccurlyeq F(x^*) - F^*.$$

由此可得,

$$\|F(y) - F^*\|_p < \|F(x^*) - F^*\|_p,$$

即可说明x^*不是单目标最优化问题(5.3.1)的最优解，与x^*是单目标最优化问题(5.3.1) 的最优解相矛盾. 定理得证. □

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

注. (i) 若引进一组适当的权系数$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$使得$\lambda_i \geq 0$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$且$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$，即可得到更为一般的评价函数：

$$u(F(x)) = \left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i |f_i(x) - f_i^*|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

同理可证：对于$p \geq 1$和$\lambda > 0$(或$\lambda \geq 0$), 单目标最优化问题(5.3.1)的最优解x^*必为原多目标规划(5.2.1)的有效解(或弱有效解). (ii) 若在向量空间$\mathbb{R}^m$中引入∞范数，则相应的评价函数可表示为：

$$u(F(x)) = \|F(x) - F^*\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |f_i(x) - f_i^*|.$$

同理可证：在此范数意义下，对于$\lambda > 0$, 单目标最优化问题(5.3.1)的最优解x^*为原多目标规划问题(5.2.1)的弱有效解.

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

§5.3.2 权系数的确定

在多目标规划(5.2.1)中，各分量目标函数f_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$之间可能会存在数量级的差别. 为了能给出一个合理的权系数，不导致权系数作用失效，在确定权系数之前，一般对各个分量目标函数值做一个统一量纲的处理. 处理方法如下：

首先，对各个分量目标函数f_i都加上一个适当大的正数，使变化后的目标函数都满足：对任意的$x \in \mathscr{F}$, 都有

$$f_i(x) > 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

然后，对变化后的各个分量目标函数在可行域$\mathscr{F}$上求其极小值，不妨令：

$$f_i^* := \min_{x \in \mathscr{F}} f_i(x), \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

把函数$\frac{f_i(x)}{f_i^*}$ $(\forall i \in \{1, \ldots, m\})$作为后面求解的各个分量目标函数. 上述过程即为对各个分量目标函数值做统一量纲处理的过程.

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

老手法(专家评估法)　老手是指对所研究问题有深刻见解或者有丰富经验的实际工作者. 老手法就是一种凭借经验评估，通过数理统计方法来处理确定权系数的方法. 具体操作方法如下:

首先，邀请一批(N个)老手(专家)，请他们各自独立地对各个分量目标函数进行评估. 假设详细的评估如下表:

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\ldots$	$f_m(x)$
	λ_1	λ_2	$\ldots$	λ_m
1	λ_{11}	λ_{12}	$\ldots$	λ_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	λ_{N1}	λ_{N2}	$\ldots$	λ_{Nm}

其中，$\lambda_{ij} > 0$ $(i \in \{1, \ldots, N\}, j \in \{1, \ldots, m\})$ 表示第i位老手(专家)对第j个分量目标函数f_j赋予的权系数, 且$\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} = 1$.

5.3 多目标规划问题的解法 — 评价函数法

根据λ_{ij}的值，可计算出各个分量目标函数f_i权系数的平均值为:

$$\lambda_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ij}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

易知：$\lambda_j > 0$ 且$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j = 1$. 然后，对每个老手$i$ $(i \in \{1, \ldots, N\})$，计算老手提供的权系数λ_{ij}与平均值λ_j之间的偏差，即

$$\delta_{ij} = |\lambda_{ij} - \lambda_j|, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

若令$\varepsilon > 0$为选定的最大允许偏差. 如果偏差$\delta_{ij} \le \varepsilon$ $(i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, m\})$，则表示老手们的评估没有显著差异，此时，$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$即为所求各个分量目标函数的权系数. 否则，请偏差较大的老手重新评估，对权系数作适当调整，再重复上述过程, 以便获得较为可靠满意的权系数.

注. 老手法的特点：简便实用，但主观性比较强. 为了得到更客观一些的权系数数据，要求老手的人数不能太少，但是这样的工作量就变得比较大了.

5.3 多目标规划问题的解法 — 分层求解法

§5.3.3 分层求解法

评价函数法的基本思想是把多目标规划问题按照某种规则，转化成一个单目标最优化问题，然后通过求解单目标最优化问题，得到原多目标规划问题某种意义下的最优解. 对求解多目标规划问题，另外一种求解思路是: 把多目标规划问题(5.2.1)转化成有一定顺序的多个单目标最优化问题; 然后，分别求解这些单目标最优化问题，并把最后一个单目标最优化问题的最优解作为原多目标规划问题(5.2.1)某种意义下的最优解，而且保证是多目标规划问题的有效解或弱有效解.

5.3 多目标规划问题的解法 — 分层求解法

一、分层排序法　分层排序法的基本思想是: 把所有m个的分量目标函数$f_1, f_2, \ldots, f_m$ 按照其重要程度进行排序；然后，分别在前一个分量目标函数的最优解集中，寻找后一个分量目标函数的最优解集，并把最后一个分量目标函数的最优解作为原多目标规划问题(5.2.1)某种意义下的最优解. 具体的操作步骤如下:

不妨设m个分量目标函数按其重要程度由大到小的排序为

$$f_1, f_2, \ldots, f_m.$$

先求解单目标最优化问题

$$\min_{x\in\mathscr{F}} f_1(x),$$

得到的最优解集为S^1. 然后，对$i \in \{2, 3, \ldots, m\}$，依次求解对应的单目标最优化问题

$$\min_{x\in S^{i-1}} f_i(x),$$

得到的最优解集为S^i $(i \in \{2, \ldots, m\})$；最后，可将S^m中的最优解作为原多目标规划问题(5.2.1)某种意义下的最优解.

5.3 多目标规划问题的解法 — 分层求解法

定理 5.3.5 若$x^* \in S^m$是由分层排序法得到原多目标规划*(5.2.1)*的解，则x^*必是多目标规划问题*(5.2.1)*的有效解.

证明 用反证法证明. 假设$x^* \in S^m$ 不是原多目标规划(5.2.1)的有效解，则必存在一个$y \in S^1$使得$F(y) \preccurlyeq F(x^*)$. 注意到

$$x^* \in S^m \subseteq S^{m-1} \subseteq \ldots \subseteq S^1,$$

所以，

$$f_i(x^*) \leq f_i^* = \min_{x \in S^{i-1}} f_i(x), \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

由$F(y) \preccurlyeq F(x^*)$, 则至少存在$k \in \{1, \ldots, m\}$使得$f_k(y) < f_k(x^*)$. 因而，

$$f_k(y) < f_k(x^*) \leq f_k^* = \min_{x \in S^{k-1}} f_k(x).$$

结合$F(y) \preccurlyeq F(x^*)$以及S^i $(i \in \{1, \ldots, m\})$的定义，不难验证: $y \in S^k$, 这说明x^*不是单目标最优化问题$\min_{x \in S^{k-1}} f_k(x)$的最优解，即$x^* \notin S^k$, 这与$x^* \in S^m \subseteq S^k$相矛盾. 定理得证. □

5.3 多目标规划问题的解法 — 分层求解法

注. 通过上述定理5.3.5可知，若其中某个最优解集S^i $(i = 1, \dots, m)$是一个单点集，即对应的单目标最优化问题

$$\min_{x \in S^{i-1}} f_i(x)$$

只有唯一的最优解, 则后面所有单目标最优化问题都具有唯一的最优解，即

$$S^i = S^{i+1} = \dots = S^m.$$

出现这种情况，实际上，计算过程可以被终止. 另外一种情况, 即其中的某个最优解集$S^i = \emptyset$, 也可以被终止. 为了扩大搜索多目标规划问题(5.2.1) 最优解的范围，常将分层排序法修改如下:

5.3 多目标规划问题的解法 — 分层求解法

选取一组适当的正数$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ (称之为宽容值), 若求出单目标最优化问题

$$\min_{x \in \mathscr{F}} f_1(x)$$

的最优值f_1^*，则对于$i \in \{2, 3, \ldots, m\}$，令集合

$$S^{i-1}(\varepsilon) = \left\{x \in \mathscr{F} \mid f_j(x) \le f_j^* + \varepsilon_j, \ \ \forall j \in \{1, \ldots, i-1\}\right\},$$

并求解相应的单目标最优化问题

$$\min_{x \in S^{i-1}(\varepsilon)} f_i(x),$$

得其最优值为f_j^*. 于是，可得集合

$$S^m(\varepsilon) = \{x \in \mathscr{F} \mid f_i(x) \le f_i^* + \varepsilon_i, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}\},$$

称之为原多目标规划问题(5.2.1)在宽容意义下的最优解集.

此外，可以证明: 多目标规划问题(5.2.1)在宽容意义下的最优解必是弱有效解.

5.3 多目标规划问题的解法 — 分层求解法

二、分组排序法 分组排序法的基本思想是：根据具体的某种规则，首先将多目标规划问题(5.2.1)的各个分量目标函数f_i $(i = 1,\ldots,m)$ 分成若干组，使得处于同一组的目标函数的重要程度相差不多. 这样每组的目标函数都可以重新组成一个新的小规模的多目标规划问题；我们可以采用前两节所介绍的方法来求解小规模的多目标规划问题的最优解；然后，依次在前一组目标函数对应小规模多目标规划问题的最优解集中，寻找后一组目标函数所对应小规模多目标规划问题的最优解集，并把最后一组目标函数所对应多目标规划问题的最优解作为原多目标规划问题(5.2.1)某种意义下的最优解.

注. 实际上，分组排序法是分层排序法的一种推广形式. 分层排序法是指在每一个分层中只有且仅有一个分量目标函数，再求解相应的单目标最优化问题；而分组排序法是在每一层中可以含有多个分量目标函数，再求解相应小规模的多目标规划问题.