天津大学 2012 ~2013 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：**工程数学基础**　　课程编号：S131A035　　学院名称：________　　教学班 ___　学号：________　姓名：________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	成绩
得分											

一. 判断（10 分）

1. 设 X 是数域 K 上的线性空间, M 是 X 的子空间, 则 $spanM \subset M$.（　）

2. 设 $A \in C^{n\times n}$, A 相似于对角阵的充分必要条件是其特征多项式无重零点 .（　）

3. 设 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上以 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为节点的 *Lagrange* 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) x_k^m = x^m$， $m \le n$.　（　）

4. 解线性方程组 $Ax = b$ 的 G-S 迭代格式收敛的充分必要条件是 A 是正定矩阵.（　）

5. 设 $x \in (X, \|\bullet\|)$，当 $x \ne 0$ 时，必有 $\|x\| > 0$.　（　）

6. 设 $\|\bullet\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上任意一种算子范数，单位矩阵 $E \in C^{n\times n}$，则 $\|E\| = 1$.（　）

7. 若求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，当 $f(x)$ 为 x^m 时，求积公式成为等式，则此求积公式代数精度为 m 次 .　（　）

8. 设初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) & a < x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 中 $f(x,y)$ 在 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件，则求解该问题的改进 Euler 格式收敛.　（　）

9. 设 $A \in C^{3\times 3}$ 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$，则 $(A-2E)^2 = 0$　（　）

10. 设 $A, B \in C^{n\times n}$，若存在可逆阵 $P \in C^{n\times n}$，使得 $P^{-1}AP = B$ 则 A, B 等价.（　）

二. 填空（10 分）

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & 2 & 6 \\ & & -1 \end{bmatrix}$, 则 $\rho(A^{-1}) =$________.

2. 已知 $A(t) = \begin{bmatrix} e^t & 3t^2 \\ te^t & 1 \end{bmatrix}$ 则 $\int_0^1 A(t)dt =$ ________ .

3. 设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，则 $Cond_\infty(A) =$______ .

4. 设插值型求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(x_0) + f(x_1)$ 确定参数 $x_0 =$______， $x_2 =$_____ 使其代数精度尽量高 .

5. 已知 Hermite 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ 的 3 个特征值为 $-1, -1, 2$，则 A 的 Jordan 标准

考试时间：　年　月　日

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：__________　教学班___　学号：________　姓名：______

形 $J=$ __________.

三．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J.和有理标准形 C .

四．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$，（1）求 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$；（2）求 e^{At}.

天津大学 2012 ~2013 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：______　教学班____　学号：______　姓名：______

五. (10 分) 已知线性方程组为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式，(2) 判断迭代格式收敛性.

六 . (10 分) 已知下列插值条件

x	76	77	78	79	81	82
$f(x)$	2.83267	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

(1)用 3 次 Newton 插值多项式计算 $f(80.25)$ 的近似值（结果保留到小数点后第 5 位），(2) 写出插值余项.

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：______　教学班___　学号：______　姓名：______

七．(10 分) 对积分 $\int_0^4 \frac{2}{1+x^2}dx$，用 Romberg 方法计算积分的近似值，并将结果填入下表（结果保留至小数点后第五位）．

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				
4				

八．(10 分) 设函数 $f(x)=e^x$，用 Legendre 多项式求 $f(x)=e^x$ 在 $P_2[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$，并求 $\delta^2=\|f-S_2^*\|_2^2$ (结果保留到小数点后第 5 位，取 $e\approx 2.71828$)

九．(10 分) 写出用标准 Runge-Kutta 方法解初值问题

$$\begin{cases} y''=2y'+y^2+\cos x, & 0<x\le 1 \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$$

的计算格式．

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：________　教学班____　学号：________　姓名：________

十.（10 分）证明

1. 空间 $C[-1,\ 1]$, $\forall x \in C[-1,1]$,定义范数: $\|x\| = \max\limits_{-1\le t\le 1}|x(t)|$, $\forall x \in C[-1,1]$,

设算子 $T: C[-1,1] \to C[-1,1]$ 定义为

$(Tf)(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt \qquad (\forall f \in C[-1,1], x \in [-1,1])$,

试证: (1) T 是有界线性算子,(2) 计算 $\|T\|$.

2. 若正定矩阵 $A, B \in C^{n\times n}$ 且 $AB = BA$，则 AB 是正定矩阵 **.**