天津大学 2013 ~ 2014 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　　课程编号：S131A035　　学院名称：________　　年级：___　　学号：________　　姓名：________

声明

1. 非标准答案，仅供参考。不保证正确，请帮忙改正。
2. 解题方法不是唯一的，该答案只是给出一种思路。
3. 虚线框内为判断理由或者计算方法（考试时不用写）。

一、判断（每小题 1 分，共 10 分）

1. 设 $E\subset□$，则 $\sup E\in E$　　（×）

Δ

比如 $[0,1)$ 的上确界为 1，但 1 不属于 $[0,1)$，所以结论是错误的。

2. 设 $A\in C^{n\times n}$，则 $\lambda E-A$ 是满秩的。　（√）

Δ

A ä $C^{n\times n}$ 的特征矩阵的秩为 n，即为满秩的，所以结论正确。

3. 设 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上以 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n}l_k(x)=1$.　（√）

注意下面几个结论：

① $\sum_{k=0}^{n}l_k(x_k)=n+1$　② $\sum_{k=0}^{n}l_k(x)=1$　③ $\sum_{k=0}^{n}l_k(x)x_k^m=x^m\ (m\le n)$

4. 若 $A\in C^{n\times n}$ 是严格行对角占优矩阵，则线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛。（~~×~~）√

由定理 7.8 " $Ax=b$ 的系数矩阵 A 按行（或列）严格对角占优，则方程组有唯一解，且 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式收敛" 可知，结论正确。

5. 设 X 是赋范空间，则 X 中的 Cauchy 序列一定是收敛序列.　（×）

由例 3.13 可知，X 中的 Cauchy 序列不一定是收敛序列，所以结论错误。
注意下面这几种说法：
① 设 X 是赋范空间，则 X 中的 Cauchy 序列一定是有界序列。（√）
② 设 X 是完备的赋范空间，则 X 中的 Cauchy 序列一定是收敛序列。（√）
③ 设 X 是 Banach 空间，则 X 中的 Cauchy 序列一定是收敛序列。（√）

6. 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上任意一种方阵范数，单位矩阵 $E\in C^{n\times n}$，则 $\|E\|=1$.（×）　F范

F 范数是方阵范数，但 $\|E\|_F=\sqrt{n}\ne 1$，所以结论错误。$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

7. T 是线性算子，则 $T(0)=0$　（√）

由定理 1.8 可知线性算子 T 的基本性质：
① $T(0)=0$　② $T(-x)=-T(x)$　$(\forall x$ ä $X)$，可知结论正确。

8. 设 X 是基本集．$A,B\subset X$，则 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.　（√）

由定理 1.1，可知 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$，$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，所以结论正确。

9. 设 $A(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$ 可导，则 $\frac{dA^2(t)}{dt}=2A(t)\frac{dA(t)}{dt}$.　（×）

由例 5.1 可知，一般情况下，$\frac{dA^2(t)}{dt}\ne 2A(t)\frac{dA(t)}{dt}$，所以结论错误。

考试时间：2013 年 11 月 17 日

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________　年级：___　学号：________　姓名：________

10.因为求积公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$，当 $f(x)=x^3$ 时，等式成立，

$1, x, x^2, x^3, x^4 \times$

故其代数精度至少是 5.　　（×）

说法不正确。只有当 $f(x)=1,x,x^2,x^3,x^4,x^5$ 时，等式都成立，才能说其代数精度至少为 5。注意下面结论：

当 $f(x)=1,x,x^2,x^3,x^4,x^5$ 时，等式成立，而当 $f(x)=x^6$ 时，等式不成立，故其代数精度为 5。

二．填空(每小题 2 分，共 10 分)

1．设 A 是赋范空间 X 的非空子集，__spanA__ 是 X 中包含 A 的最小的子空间.

教材例 1.19 说明，span M 是包含 M 的最小子空间。

2．已知 $f(x)=x^3-3x+4$，则 $f[2^0,2^1,2^2,2^3]=$ __1__ .

因为 $f(x)$ 是三次多项式，故三阶差商等于最高次多项式的系数。

3．设 $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&4\end{bmatrix}$，则 $Cond_\infty(A)=$ __5__ .

由定义 7.2，可知公式 $\mathrm{Cond}_\infty(A)=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty$，而 $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$。

由初等行变换求出 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，

可得 $\|A\|_\infty=4,\|A^{-1}\|_\infty=\frac{5}{4}$，所以 $\mathrm{Cond}_\infty(A)=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty=5$

注：求 A 的逆矩阵过程如下（将矩阵 $A|E$ 通过初等行变换化为 $E|A^{-1}$）

$$\begin{bmatrix}-2&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&4&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&1&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

4．设 A 的 Jordan 标准形 $J=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&1&1\end{bmatrix}$，则 A 的最小多项式为 __(如下)__。

由 Jordan 标准形可知 A 的初等因子组为 $(\lambda-1),(\lambda-1)^2$，可推出不变因子为 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=(\lambda-1),d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2$。所以最小多项式为 $(\lambda-1)^2$。

5．设 $C_k^{(n)}$ 是 Cotes 系数，则 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=$ __1__ .

由定理 9.3，Cotes 系数满足下列关系式：

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=1,\ C_k^{(n)}=C_{n-k}^{(n)},\ k=0,1,\ldots,n}$$

$\sum\limits_{k=0}^{n} l_k(x)=1$

$l_k(x_k)=1$

$\sum\limits_{k=0}^{n} l_k(x_k)=n+1$

考试时间：2013 年 11 月 17 日

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：＿＿＿＿＿　年级：＿＿　学号：＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿

三．(12分) 设 $A=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C．

解：先求不变因子

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-7 & -4 & 4 \\ -4 & \lambda+8 & 1 \\ 4 & 1 & \lambda+8 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}(\lambda+8) \\ -4 & \lambda+8 & 1 \\ \lambda-7 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}(\lambda+8) \\ 0 & \lambda+9 & \lambda+9 \\ 0 & -\frac{1}{4}(\lambda+9) & -\frac{1}{4}(\lambda+9)(\lambda-8) \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+9 & \lambda+9 \\ 0 & \lambda+9 & (\lambda+9)(\lambda-8) \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+9 & \lambda+9 \\ 0 & 0 & (\lambda+9)(\lambda-9) \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+9 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+9)(\lambda-9) \end{bmatrix}$$

不变因子为：$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda+9, d_3(\lambda)=(\lambda+9)(\lambda-9)$

初等因子为：$\lambda+9$，$\lambda+9$，$\lambda-9$

属于 $\lambda+9$ 的 Jordan 块为 $[-9]$，属于 $\lambda-9$ 的 Jordan 块为 $[9]$，

所以 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$d_2(\lambda)=\lambda+9$ 的相伴矩阵为 $[-9]$，

$d_3(\lambda)=(\lambda+9)(\lambda-9)=\lambda^2-81$ 的相伴矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 81 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，

所以 A 的有理标准形为 $C=\begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________　年级：___　学号：________　姓名：________

四．(12分) 设 $A=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$，求 e^{At}．

解：先求 A 的特征值及最小多项式。因

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2-4(\lambda-1)=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$$

得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$。

经检验 $(A-E)(A-5E)=\begin{bmatrix}0&-2&-2\\0&2&2\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&-2&-2\\0&-2&2\\0&2&-2\end{bmatrix}=0$，

故 A 的最小多项式为 $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5)$，$\boxed{\deg\varphi(\lambda)=2}$

几阶几个式子

$$\begin{cases}\lambda=1\\\lambda=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{t}=\\e^{5t}=\end{cases}$$

设 $f(At)=e^{At}=a_0(t)E+a_1(t)A=T(At)$。

由于 $f(\lambda t)=e^{\lambda t}$ 与 $T(\lambda t)=a_0(t)+a_1(t)\lambda$ 在 A 上谱值相等，得方程组

$$\begin{cases}a_0(t)+a_1(t)=e^{t}\\a_0(t)+5a_1(t)=e^{5t}\end{cases}\quad\text{解之得}\begin{cases}a_0(t)=-\frac{1}{4}(e^{5t}-5e^{t})\\a_1(t)=\frac{1}{4}(e^{5t}-e^{t})\end{cases}$$，所以

$$e^{At}=a_0(t)E+a_1(t)A=a_0(t)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+a_1(t)\begin{bmatrix}1&-2&-2\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_0(t)+a_1(t)&-2a_1(t)&-2a_1(t)\\0&a_0(t)+3a_1(t)&2a_1(t)\\0&2a_1(t)&a_0(t)+3a_1(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{t}&-\frac{1}{2}(e^{5t}-e^{t})&-\frac{1}{2}(e^{5t}-e^{t})\\0&\frac{1}{2}(e^{5t}+e^{t})&\frac{1}{2}(e^{5t}-e^{t})\\0&\frac{1}{2}(e^{5t}-e^{t})&\frac{1}{2}(e^{5t}+e^{t})\end{bmatrix}$$

考试时间：2013年11月17

天津大学 2013～2014 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　　课程编号：S131A035　　学院名称：________　　年级：___　　学号：________　　姓名：________

五.（12 分）已知线性方程组为 $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ -24 \end{bmatrix}$

（1）写出 Gauss-Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代格式，

（2）判断迭代格式收敛性。

解：

（1）Gauss-Jacobi 迭代格式为：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(24-3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(20-3x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(-24+x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代格式为：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(24-3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(20-3x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(-24+x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

（2）Gauss-Jacobi 迭代矩阵为：$M_1=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$，

由 $\det(\lambda E-M_1)=\begin{vmatrix} \lambda & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \lambda & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-\dfrac{1}{16}\lambda-\dfrac{9}{16}\lambda=\lambda(\lambda-\sqrt{\frac{5}{8}})(\lambda+\sqrt{\frac{5}{8}})$，

可知 $\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{\frac{5}{8}},\lambda_3=-\sqrt{\frac{5}{8}}$，$\rho(M_1)=\sqrt{\frac{5}{8}}<1$，故 Gauss-Jacobi 迭代格式收敛。

Gauss-Seidel 迭代矩阵为：
$$M_2=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{64} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{64} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

由 $\det(\lambda E-M_2)=\begin{vmatrix} \lambda & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{9}{64} & \lambda-\frac{1}{16} \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-\frac{9}{16})(\lambda-\frac{1}{16})-\frac{9}{256}\lambda$

$$=\lambda[(\lambda-\tfrac{9}{16})(\lambda-\tfrac{1}{16})-\tfrac{9}{256}]=\lambda^2(\lambda-\tfrac{5}{8})$$

可知 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\frac{5}{8}$，$\rho(M_2)=\dfrac{5}{8}<1$，故 Gauss-Seidel 迭代格式收敛。

注：用初等行变换求逆矩阵过程

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{64} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

考试时间：2013 年 11 月 17 日

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________　年级：___　学号：________　姓名：________

六．(10 分) 已知下列插值条件

x	76	77	78	79	81	82
$f(x)$	2.83267	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

用三次 Newton 插值多项式计算 $f(77.64)$ 的近似值（结果保留到小数点后第 5 位）。

解：取 77.64 周围的四个节点 76，77，78，79，构造差商表如下：

k	x_k	$f(x_k)$	$f[x_0,x_k]$	$f[x_0,x_1,x_k]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_k]$
0	76	2.83267	-	-	-
1	77	2.90256	0.06989	-	-
2	78	2.97857	0.07295	0.00306	-
3	79	3.06173	0.07635	0.00323	0.00017

所以三次 Newton 插值多项式为：

$$N_3(x) = 2.83267 + 0.06989(x-76) + 0.00306(x-76)(x-77) + 0.00017(x-76)(x-77)(x-78)$$

计算得：

$$f(77.64) \approx N_3(77.64) = 2.83267 + 0.06989(77.64-76) + 0.00306(77.64-76)(77.64-77) + 0.00017(77.64-76)(77.64-77)(77.64-78) = 2.95044$$

注：

题目要求用三次 Newton 插值公式所以选择四个节点做差商表，节点选择应尽量把要求的值包在中间。

差商计算方法如下

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{2.90256-2.83267}{77-76} = 0.06989$$

$$f[x_0,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = \frac{2.97857-2.83267}{78-76} = 0.07295$$

$$f[x_0,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0} = \frac{3.06173-2.83267}{79-76} = 0.07635$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{0.07295-0.06989}{78-77} = 0.00306$$

$$f[x_0,x_1,x_3] = \frac{f[x_0,x_3]-f[x_0,x_1]}{x_3-x_1} = \frac{0.07635-0.06989}{79-77} = 0.00323$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_2} = \frac{0.00323-0.00306}{79-78} = 0.00017$$

三次 Newton 插值公式为：

$$N_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

考试时间：2013 年 11 月 17 日

天津大学 2013～2014 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　　课程编号：S131A035　　学院名称：________　年级：___　学号：________　姓名：________

七．(10 分) 对积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+2x^3}dx$，用 Romberg 方法计算积分的近似值，并将结果填入下表（结果保留至小数点后第五位）。

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.66667			
1	0.73334	0.75556		
2	0.74469	0.74847	0.74800	
3	0.74735	0.74824	0.74822	0.74822

注：计算过程如下

（计算很繁琐-_-!!! 要仔细，一步算错则后面的结果就都错了）

$$f(x)=\frac{1}{1+2x^3}$$

$$T_1=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=\frac{1}{2}(1+0.33333)=0.66667$$

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\tfrac{1}{2})=0.33334+0.4=0.73334$$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\tfrac{1}{4})+f(\tfrac{3}{4})]=0.36667+\frac{1}{4}(0.96970+0.54237)=0.74469$$

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}[f(\tfrac{1}{8})+f(\tfrac{3}{8})+f(\tfrac{5}{8})+f(\tfrac{7}{8})]=$$

$$=0.37235+\frac{1}{8}(0.99611+0.90459+0.67192+0.42738)=0.74735$$

$$S_1=\frac{4T_2-T_1}{3}=\frac{2.93336-0.66667}{3}=0.75556$$

$$S_2=\frac{4T_4-T_2}{3}=\frac{2.97876-0.73334}{3}=0.74847$$

$$S_4=\frac{4T_8-T_4}{3}=\frac{2.98940-0.74469}{3}=0.74824$$

$$C_1=\frac{16S_2-S_1}{15}=\frac{11.97552-0.75556}{15}=0.74800$$

$$C_2=\frac{16S_4-S_2}{15}=\frac{11.97184-0.74847}{15}=0.74822$$

$$R_1=\frac{64C_2-C_1}{63}=\frac{47.88608-0.74800}{63}=0.74822$$

八．(10 分) 写出以下初值问题的标准 Runge-Kutta 格式：

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'),\ a<x<b \\ y(a)=y_0,\ y'(a)=y_1 \end{cases}$$

（*** 忽略，第十章不会指 ***）

考试时间：2013 年 11 月 17 日

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：＿＿＿＿　年级：＿＿　学号：＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿

九．（6 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&2\\0&-3&2\end{bmatrix}$，求矩阵的算子范数 $\|A\|_2$。

解：先求 A^HA 的特征值：

$$A^HA=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&-3\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&2\\0&-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0&0\\0&18&0\\0&0&8\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda E-A^HA)=\begin{vmatrix}\lambda-25&0&0\\0&\lambda-18&0\\0&0&\lambda-8\end{vmatrix}=(\lambda-25)(\lambda-18)(\lambda-8)$$

可得特征值为 $\lambda_1=25,\lambda_2=18,\lambda_3=8$，$\rho(A^HA)=\max(|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|)=25$

所以 $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^HA)}=\sqrt{25}=5$

十．（8 分）已知 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的一个方阵范数，$S\in C^{n\times n}$ 是酉矩阵，定义

$\|A\|_*=\|S^HAS\|$，证明 $\|\cdot\|_*$ 是方阵范数.

证明：$\forall A,B$ ä $C^{n\times n}$；假设 $S^HAS=C$，$S^HBS=D$，

等式两边同时左乘 S 和右乘 S^H 得：

$$SS^HASS^H=SCS^H,\ SS^HBSS^H=SDS^H.$$

因为 S 是酉矩阵，可知 $SS^H=S^HS=E$，上式化为：

$$EAE=SCS^H,\ EBE=SDS^H\Leftrightarrow A=SCS^H,\ B=SDS^H$$

所以

$$\|AB\|_*=\|SCS^HSDS^H\|_*=\|S^HSCS^HSDS^HS\|=\|CD\|.$$

$$\|A\|_*=\|S^HAS\|=\|C\|$$

$$\|B\|_*=\|S^HBS\|=\|D\|$$

因为 $\|\cdot\|$ 是方阵范数，满足次乘性，所以 $\|CD\|\le\|C\|\|D\|$，因此

$$\|AB\|_*\le\|A\|_*\|B\|_*.$$

即 $\|\cdot\|_*$ 满足次乘性，所以 $\|\cdot\|_*$ 是方阵范数。

考试时间：2013 年 11 月 17 日