2017 年工程硕士考试试卷

《工程数学基础》（共 4 页）

（考试时间：2018 年 1 月 14 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
得分											

一、判断题（每小题 1 分，共 8 分）

1、由全体无理数构成的集合 P 是可数的. [ ]

2、设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，且 $f(\lambda)=\det(\lambda E-A)$，则 $f(A)=O$. [ ]

3、若 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 严格对角占优，则求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛 . [ ]

4、$\forall A\in\mathbf{C}^{n\times n}, x\in\mathbf{C}^{n}$，若 A 可逆且 $x\neq 0$，则 $x^H A^H Ax>0$. [ ]

5、在赋范线性空间中, 绝对收敛的级数一定是收敛的. [ ]

6、设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\left(e^{A}\right)^{-1}=e^{A^{-1}}$. [ ]

7、若 A 是酉矩阵，则 A 的特征值只能为 1 或者−1. [ ]

8、 $n+1$ 个求积节点的插值型求积公式的代数精度 m 满足不等式 $n\le m\le 2n+1$. [ ]

二、填空题（每小题 2 分，共 12 分）

1、设 $x=(i,-1,1-i)^T\in\mathbf{C}^3$，则 $\|x\|_2=$_________ .

2、设 $f(x)=f(x_1,x_2,x_3)=\left(e^{x_1}+\sin x_2, x_1x_3\right)^T$ ，则 $f'(x)=$______________.

3、设 $A(t)=\begin{bmatrix} t^2 & e^t \\ \sin t & t \end{bmatrix}$，则 $\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t=$______________.

4、设 $\{l_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 是 $[a,b]$ 上的以 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=$___________.

5、设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\det e^{A}=$ ________________ .

6、设 $A=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 3 & \\ -2 & & \end{bmatrix}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\mathrm{cond}_\infty A=$ _______ .

三、（10 分） 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$，（1）求 $\lambda E-A$ 的初等因子组；（2）求 A 的 Jordan 标准形 J.

四、**（12 分）** 设 $A=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&0&3\\0&7&4\end{bmatrix}$，（1）求 $\lambda E-A$ 的行列式因子、不变因子;

（2）求 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形; （3）求 A 的有理标准形 C.

五、（10 分） 写出求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Gauss—Seidel 迭代格式以及迭代矩阵 M，并判断所写格式的收敛性，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&0\\3&0&9\end{bmatrix},\quad \mathrm{b}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}.$$

六、(12 分) 已知函数 $y=f(x)$ 的数值表如下

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
y	0.86321	0.80850	0.74571	0.67546	0.59847

用三次插值多项式求 $f(2.24)$ 的近似值(计算过程与结果均保留至小数点后第 5 位).

七、(13 分) 设 $A=\begin{bmatrix}3&0&6\\1&5&6\\0&0&9\end{bmatrix}$，求（1） 矩阵 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$；（2） 方阵函数 e^{At}.

八、**（10 分）**用 *Romberg* 算法求积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后第 6 位）.

k	T_{2^k}	S_{2^k}	C_{2^k}	R_{2^k}
0				
1				
2				
3				
4				

九、**计算题（8 分）**设 $A=\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 & -4 \\ 1-\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 3+4\mathrm{i} \\ 6 & 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$，求 $\|A\|_{\mathrm{F}}$, $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\rho(A)$.

十、**证明题（5 分）** 在线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中，对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 定义

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\quad \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|.$$

证明：$\|x\|_1$ 和 $\|x\|_\infty$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的范数.