2020-2021-01 学期期中试题参考答案

一、填空题与单项选择题（共 35 分，每小题 5 分）

1. B；　2. $\underline{3(a+10)(a-2)}$；　3. C；　4. $\underline{\lambda\neq 4\text{且}\lambda\neq 5}$；

5. C；　6. $\underline{6000}$；　7. A

二、（共计 39 分）

1、（12 分）解　对矩阵进行分块，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 8\\ 0 & 2\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

由于 $\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^k & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^k\end{bmatrix}$，所以只需求 $\boldsymbol{B}^k$和$\boldsymbol{C}^k$ 即可.

因为 $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{D}$，其中$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，且$\boldsymbol{D}^2=\boldsymbol{O}$，所以由二项式定理得

$$\boldsymbol{B}^k=(2\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{D})^k=2^k\boldsymbol{E}_2+k\cdot 2^{k-1}\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2^k & k\cdot 2^{k+2}\\ 0 & 2^k\end{bmatrix}.$$

（或者也可以利用初等倍加矩阵的性质，有

$$\boldsymbol{B}^k=\begin{bmatrix}2 & 8\\ 0 & 2\end{bmatrix}^k=\left(2\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^k=2^k\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}^k=2^k\begin{bmatrix}1 & 4+(k-1)\cdot 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2^k\begin{bmatrix}1 & 4k\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^k & k\cdot 2^{k+2}\\ 0 & 2^k\end{bmatrix}.）$$

又由 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}$ 可得

$$\boldsymbol{C}^k=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\right)^{k-1}\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}=6^{k-1}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}=6^{k-1}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}6^{k-1}\cdot 3 & 6^{k-1}\cdot 9\\ 6^{k-1} & 6^{k-1}\cdot 3\end{bmatrix}.$$

（或者也可以　因为 $r(\boldsymbol{C})=1$，所以 $\boldsymbol{C}^k=(\mathrm{tr}\boldsymbol{C})^{k-1}\boldsymbol{C}=6^{k-1}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}6^{k-1}\cdot 3 & 6^{k-1}\cdot 9\\ 6^{k-1} & 6^{k-1}\cdot 3\end{bmatrix}$.）

所以

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}2^k & k\cdot 2^{k+2} & 0 & 0\\ 0 & 2^k & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6^{k-1}\cdot 3 & 6^{k-1}\cdot 9\\ 0 & 0 & 6^{k-1} & 6^{k-1}\cdot 3\end{bmatrix}.$$

2、（12 分）解　计算 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2.$

等式$2XA^{-1}=AXA^{*}+2E_3$两边同时右乘A，可得$2X=|A|AX+2A$，

即$(A+E_3)X=A$． 因为

$$[A+E_3,A]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&2&0&-1&2\\4&3&3&4&2&3\\2&1&2&2&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-4r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&2&0&-1&2\\0&7&-5&4&6&-1\\0&3&-2&2&3&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_2]{\substack{r_2-2r_3\\ r_1+r_2}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&-1&3\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&2&3&-6\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&-4&9\\0&1&0&2&3&-5\\0&0&1&2&3&-6\end{array}\right],$$

所以$X=\begin{bmatrix}-2&-4&9\\2&3&-5\\2&3&-6\end{bmatrix}$.

3、（15 分）解 记 $A^*=\begin{bmatrix}O&B_1\\B_2&O\end{bmatrix}$ ，则$|A^*|=\begin{vmatrix}O&B_1\\B_2&O\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|B_1||B_2|=16$

因为 $|A^*|=|A|^{5-1}$，且$||A|>0$，所以$|A|=2$.

由于$A^*=|A|A^{-1}$，所以$A=|A|(A^*)^{-1}=2\begin{bmatrix}O&B_2^{-1}\\B_1^{-1}&O\end{bmatrix}$.

又$B_2^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\-\dfrac{3}{2}&1\end{bmatrix}$,

$$[B_1,E_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&0&0&1&0&0\\2&2&0&0&1&0\\2&2&2&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&0&0&1&0&0\\0&2&0&-1&1&0\\0&0&2&0&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

所以$B_1^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}&0&0\\-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&0\\0&-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$.

因此 $\boldsymbol{A}=2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

三、（16 分）解. 记该方程组的系数矩阵为 $\mathbf{A}$，增广矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$. 对 $\tilde{\mathbf{A}}$ 进行初等行变换化为行阶梯形矩阵,

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 5 & a & 5\\ 3 & a+5 & a-1 & 7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & a+2 & 1\\ 0 & a-1 & a+2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & a+2 & 1\\ 0 & 0 & (a+2)(1-(a-1)) & 1-(a-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & a+2 & 1\\ 0 & 0 & (a+2)(2-a) & 2-a\end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a\neq -2$ 且 $a\neq 2$ 时，$(a+2)(2-a)\neq 0$，此时，$r(\mathbf{A})=r(\tilde{\mathbf{A}})=3$，所以原方程组有唯一解;

(2) 当 $a=-2$ 时， 此时,

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 5 & -2 & 5\\ 3 & 3 & -3 & 7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

所以 $2=r(\mathbf{A})\neq r(\tilde{\mathbf{A}})=3$，故原方程组无解;

(3). 当 $a=2$ 时， 此时,

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 2 & 5\\ 3 & 7 & 1 & 7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -9 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

所以 $r(\mathbf{A})=r(\tilde{\mathbf{A}})=2<3$，故原方程组有无穷多解. 原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1= & 9x_3,\\ x_2= & 1-4x_3,\end{cases}$$

其中 x_3 为自由变量, 所以原方程组的通解为:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9k \\ 1-4k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$ 其中 k 为任意常数.

四、（10 分）证明：$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}] = [\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}]$

$$= [\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{A\alpha} + 8\boldsymbol{\alpha}]$$

$$= [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{BC},$$

其中 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，且 $|\boldsymbol{C}| = 8$. 因为 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 因而

$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{BC}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}| \neq 0$，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且存在 3 阶方阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BC}$ 成立.