三． **解**：$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & -3\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & -3 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

$(A-2E)(A+E)\neq 0$，故 A 的最小多项式为 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

故初等因子组为 $\lambda-2$，$(\lambda+1)^2$，A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & 1 & -1\end{bmatrix}\quad,\quad S(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

有理标准形 $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

四．解：Seidel 迭代格式为 $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{3}(2x_3^{(k)}+6)\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{2}(-x_3^{(k)}+8)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}(2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}+5)\end{cases}$

Seidel 迭代法的迭代阵为 $M_2=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{11}{12}\end{bmatrix}$

$$\det(\lambda E-M_2)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \lambda & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \lambda-\frac{11}{12}\end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{11}{12}\lambda^2$$

得 $\rho(M_2)=\dfrac{11}{12}<1$，Seidel 迭代法收敛.

五．解: (1) 差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	1.0000			
0.2	1.2214	1.1070		
0.4	1.4918	1.3520	0.6125	
0.6	1.8821	1.6515	0.7488	0.2272

$N_3(x)=1+1.1070x+0.6125x(x-0.2)+0.2272x(x-0.2)(x-0.4)$.

$f(0.15)\approx N_3(0.15)=1.1619$.

六．解： (1) $\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -3\\ -4 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 因为

$(A-E)(A-2E)\neq O$, 故最小多项式 $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$.

（2）令 $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

由于 $\deg\varphi(\lambda)=3$, 故设 $\mathrm{e}^{At}=a_0(t)E+a_1(t)A+a_2(t)A^2=T(At)$.

由 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ 与 $T(\lambda t)$ 在 A 上的谱值相等,于是有

$$\begin{cases} a_0(t)+\ \ a_1(t)+\ \ a_2(t)=\mathrm{e}^t \\ a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)=\mathrm{e}^{2t} \\ \qquad\qquad a_1(t)+4a_2(t)=t\mathrm{e}^{2t}\end{cases},\text{解得}\begin{cases} a_0(t)=4\mathrm{e}^t-3\mathrm{e}^{2t}+2t\mathrm{e}^{2t} \\ a_1(t)=-4\mathrm{e}^t+4\mathrm{e}^{2t}-3t\mathrm{e}^{2t} \\ a_2(t)=\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}+t\mathrm{e}^{2t}\end{cases},$$

故

$$\mathrm{e}^{At}=(4\mathrm{e}^t-3\mathrm{e}^{2t}+2t\mathrm{e}^{2t})\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}+(-4\mathrm{e}^t+4\mathrm{e}^{2t}-3t\mathrm{e}^{2t})\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$+(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}+t\mathrm{e}^{2t})\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 16 & 4 & 9\\ 12 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t} & 0 & 0\\ 12\mathrm{e}^t-12\mathrm{e}^{2t}+13t\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} & -3\mathrm{e}^t+3\mathrm{e}^{2t}\\ -4\mathrm{e}^t+4\mathrm{e}^{2t} & 0 & \mathrm{e}^t\end{bmatrix}.$$

七．

k	T_{2^k}	S_{2^k}	C_{2^k}	R_{2^k}
0	2.25000	2.34999	2.35659	2.35620
1	2.32500	2.35617	2.35620	2.35620
2	2.34837	2.35620	2.35620	
3	2.35425	2.35620		
4	2.35572			