

## 2022 年《数值计算方法与 Matlab》复习题

### 第一章 引论

#### 一. 填空题:

1. 设  $\pi = 3.14159265358979\dots$ , 则  $4\pi$  的近似值 12.566370 具有\_\_\_\_\_位有效数字, 其绝对误差限\_\_\_\_\_.

2. 在科学与工程计算中, 不可避免地要遇到各种误差中, 其中数值计算方法可以处理的误差是\_\_\_\_\_.

3. 为了使近似计算结果更加准确, 函数式  $\frac{1-\cos 2x}{x}$  当  $x=0.001$  时应该改写为\_\_\_\_\_.

### 第二章 线性方程组的数值解法

#### 一. 填空题:

1. 设  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , 则求解  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代矩阵  $M =$

\_\_\_\_\_.

2. 已知求解三阶线性方程组  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(-3x_2^{(k)} + 24), \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(-3x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 30), \quad k=0, 1, 2, \dots, \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(x_2^{(k)} - 24), \end{cases}$$

则求解此方程组的 Seidel 迭代格式为\_\_\_\_\_.

3. 若将  $Ax = b$  的系数矩阵分裂为  $A = D - L - U$  (其中  $D, L, U$  如教材所规定), 则 Seidel 迭代矩阵  $M =$ \_\_\_\_\_.

4. 若对于线性方程组  $Ax = b$ , Jacobi 迭代格式和 Seidel 迭代格式都收敛, 则一般说来\_\_\_\_\_迭代格式要比\_\_\_\_\_迭代格式收敛得快.

5. 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $\text{cond}_1 A =$  \_\_\_\_\_.

6.  $A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ , 则  $A$  的 Doolittle 分解为  $A =$  \_\_\_\_\_.

7. 设 SOR 迭代法收敛, 则松弛因子  $\omega \in$  \_\_\_\_\_。

8. 线性方程组  $Ax = b$  ( $b \neq 0$ ) 中的  $b$  的扰动  $\delta b$  引起的解  $x$  的相对误差  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq$  \_\_\_\_\_.

9. 用 Gauss 消去法解线性方程组  $Ax = b$  的演算, 分为 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_ 两个过程.

10. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 则  $\text{cond}_\infty(A) =$  \_\_\_\_\_. 当  $b$  有误差  $\delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$  时,

其中  $0 < \varepsilon < 1$ , 引起解向量  $x$  的为误差  $\delta x$ , 则  $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$  的上界为 \_\_\_\_\_.

11. 设线性方程组  $Ax = b$  的系数矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 用迭代法

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(Ax^{(k)} - b)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , 进行求解, 则迭代法收敛的充分必

要条件是  $\alpha \in$  \_\_\_\_\_ 区间。

12. 设矩阵  $A$  的 Doolittle 分解为  $A = LU$ , 则矩阵  $L$  的对角线元素

$l_{ii} =$  \_\_\_\_\_.

13. 设线性方程组  $Ax = b$  的系数矩阵对称正定, 则求解该方程组的 \_\_\_\_\_ 迭代法收敛。

二. 判断题:

1. 求解  $n$  阶线性方程组  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代格式收敛的充要条件是  $\rho(A) < 1$ . ( )

2. 若  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  严格对角占优, 则求解  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代格式和 Seidel 迭代格式都收敛. ( )

3. 若  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  对称正定, 则求解  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代格式一定收敛. ( )

4. 若求解线性方程组  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代格式收敛, 则其 Seidel 迭代格式也收敛. ( )

5. 若求解线性方程组  $Ax = b$  的 Seidel 迭代格式收敛, 则其 Jacobi 迭代格式也收敛. ( )

6. 设  $M$  是求解线性方程组  $Ax = b$  的 Seidel 迭代矩阵, 则 Seidel 迭代格式收敛的充要条件是  $\|M\|_{\infty} < 1$ . ( )

7. 若求解线性方程组  $Ax = b$  的 Seidel 迭代格式收敛, 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ . ( )

8. 若求解线性方程组  $Ax = b$  的迭代格式收敛,  $M$  是迭代矩阵, 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|M^k\|_2 = 0$ . ( )

9. 改变方程组中方程的排列顺序, 不可能改变迭代格式的收敛性. ( )

10. 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是非奇异矩阵, 则  $\text{cond } A \geq 1$ . ( )

11. 若 SOR 迭代格式收敛, 则松弛因子  $\omega \in (0, 2)$ . ( )

12. 设  $M$  是求解线性方程组  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代矩阵, 若  $A$  严格列对角占优, 则  $\|M\|_1 < 1$ . ( )

13.  $A$  的 Doolittle 分解中, 矩阵  $L$  的对角线元素一定是 1. ( )

14. 设求解线性方程组  $Ax = b$  的迭代格式为  $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + f$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $x^*$  是  $Ax = b$  的解, 则对任意初始向量  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , 当  $\|M\|_{\infty} < 1$  时, 有误差估计式

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{\|M\|_{\infty}}{1 - \|M\|_{\infty}} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}. \quad ( )$$

15. 若  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是非奇异矩阵, 则  $A$  存在唯一的 Doolittle 分解的充要条件是:  $A$  的各阶顺序主子式均大于零. ( )

16. 用顺序 Gauss 消去法解线性方程组  $Ax = b$  时, 只要  $A$  非奇异, 其消元过程就能进行到底. ( )

17. 用列主元素 Gauss 消去法解线性方程组  $Ax = b$  时, 只要  $A$  非奇异, 其消元过程就能进行到底. ( )

### 第三章 函数的插值

#### 一. 填空题:

1. 设  $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$  是区间  $[a, b]$  上以  $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$  为节点的 Lagrange 插值基函数, 则  $\sum_{k=0}^n l_k(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\sum_{k=0}^n l_k(x_k) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 填写下表:

$x$	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
4	8			
5	12			
6	18			
8	28			

3. 利用第 2 题的差商表, 选节点  $x_0 = 4, x_1 = 5, x_2 = 6$ , 求得  $f(5.8) \approx N_2(5.8) = 16.640$ , 则

$$f(5.8) \approx N_3(5.8) = 16.640 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 满足插值条件

$$p(0) = f(0) = 1, p(1) = f(1) = 2, p(2) = f(2) = 1, \\ p'(1) = f'(1) = 0, p'(2) - f'(2) = -1$$

的四次插值多项式  $p(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 三次样条插值的第三种边界条件为

$$S(x_0) = S(x_n), \quad S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0), \quad \underline{\hspace{2cm}}, \\ \underline{\hspace{2cm}}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

6. 根据样条函数的定义, 区间  $[a, b]$  上的  $m$  次样条函数  $S(x)$  除了满足在每一

子区间 $[x_k, x_{k+1}]$  ( $k=0,1,\dots,n$ )上是次数不超过  $m$  的多项式外,  $S(x)$  还满足: \_\_\_\_\_

7. 已知函数  $y=f(x)$  的三对数据  $(0,1)$ ,  $(-1,5)$   $(2,-1)$ , 则其关于这三点的二阶差商  $f[0,-1,2]=$  \_\_\_\_\_, 过此三点的 Lagrange 插值多项式为 \_\_\_\_\_。

8. 在科学与工程计算中, 常常使用分段低次插值, 这是为了避免 \_\_\_\_\_。

9、设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的  $n+1$  阶导数存在,  $H_{2n+1}(x)$  为  $f(x)$  在互异节点  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  上的  $2n+1$  次 Hermite 插值公式, 则对任意的  $x \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in$  \_\_\_\_\_, 使得插值余项  $R(x)=$  \_\_\_\_\_。

10、设  $S(x)$  是区间  $[a, b]$  上以  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  为互异节点的三次样条插值函数, 则求解  $S(x)$  共有 \_\_\_\_\_ 个定解条件。若三次样条插值函数

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + 2x, & x \in [0,1] \\ 3x^2 + cx + d, & x \in [1,2] \end{cases}, \text{ 则系数 } c = \text{_____} \text{ 和 } d = \text{_____}。$$

二. 判断题:

1. 设  $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$  是区间  $[a, b]$  上以  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  为节点的 Lagrange 插值基函数, 则  $\sum_{k=0}^n |l_k(x)| = 1$ . ( )

2. 设  $L_n(x)$  和  $N_n(x)$  分别是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上以  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  为节点的  $n$  次 Lagrange 插值多项式和 Newton 插值多项式, 则  $L_n(x) \equiv N_n(x)$ . ( )

3. 设  $f(x)$  是  $n$  次多项式,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  是  $[a, b]$  上的  $n+1$  个互异的点, 则  $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$ . ( )

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有任意阶导数, 则  $n$  次插值公式的余项为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x), \xi \in (a, b) \text{ 且与 } x \text{ 有关.} \quad ( )$$

5. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有三阶导数,  $S(x)$  是  $f(x)$  的三次样条插值函数, 则在插值节点处有

$$S''(x_k) = f''(x_k) (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad ( \quad )$$

6. 设  $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$  是区间  $[a, b]$  上以  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  为节点的 Lagrange 插值基函数, 则

$$\sum_{k=0}^n l_k(x)(x_k^m - 1) = x^m - 1 (m \in \mathbb{N} \text{ 且 } m \leq n). \quad ( \quad )$$

7. 设  $f \in C^{2n+1}[a, b]$  且  $f^{(2n+2)}(x)$  在  $(a, b)$  内存在,  $H_{2n+1}(x)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的以  $x_0, x_1, \dots, x_n$  为节点的 Hermite 插值多项式,

$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ , 则插值余项

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega(x),$$

其中  $\xi \in (a, b)$  且与  $x$  有关. ( \quad )

#### 第四章 函数的数值逼近

##### 一. 填空题:

1. 设  $p_4(x)$  是 4 阶 Legendre 多项式, 则  $\int_{-1}^1 (2x^3 + 3x^2 + 4x + 1)p_4(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 设  $\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  是区间  $[0, 1]$  上权  $\rho(x) = e^{-x}$  的最高次项系数为 1 的正交多项式序列, 则  $g_1(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\int_0^1 e^{-x} \cdot g_k(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 若  $S_n^*(x)$  为  $f \in C[a, b]$  在子空间  $\Phi = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  中的最佳平方逼近, 则从几何角度上看,  $S_n^*(x)$  是  $f(x)$  在  $\Phi$  中的 正交投影。

4. 若用线性最小二乘法拟合数学模型  $y = \frac{t}{at+b}$ , 其中  $a, b$  是待定参数, 那么如何将其线性化: 令  $u = \frac{1}{at+b}$ , 则  $y = tu$ 。

5. 只要作变换  $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$ , 也可利用 Legendre 多项式系求出  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的  $n$  次最佳平方逼近  $s_n(x)$ 。

## 第五章 数值积分与数值微分

### 一. 填空题:

1. 设  $C_k^{(n)}$  是 Cotes 系数, 则  $\sum_{k=0}^n C_k^{(n)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 已知 Newton-Cotes 公式  $\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^3 C_k^{(3)} f(x_k)$  中的  $C_0^{(3)} = \frac{1}{8}$ , 则  $C_1^{(3)} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $C_2^{(3)} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $C_3^{(3)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 数值积分的复化梯形公式和复化 Cotes 公式的收敛阶分别是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 已知 Gauss 型求积公式  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  的  $n+1$  个系数  $A_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) 均相等, 则  $A_k = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. Gauss 型求积公式是稳定的, 是因为其求积系数  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 当我们使用 Romberg 算法计算积分  $\int_1^3 g(x) dx$  时, 得到变步长梯形序列  $T_{2^k}$  (见下表), 请继续使用该算法, 填写下表对角线上的空格 (保留 4 位小数).

k	$T_{2^k}$	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	5.1218	*****	*****	*****
1	9.2798	_____	*****	*****
2	10.5206	*****	_____	*****
3	10.8420	*****	*****	_____

7. 已知函数  $f(x)$  在  $x=2.5, 2.7$  和  $2.9$  处的函数值分别为 12.1825, 14.8797 和 18.1741。若用三点数值微分公式计算, 则在  $x=2.7$  处的函数一阶和二阶导数的近似值分别为  $\underline{\hspace{2cm}}$  和  $\underline{\hspace{2cm}}$  (保留 5 位有效数字)。

8. 利用三点 Gauss-Legendre 求积公式计算积分  $\int_1^2 x e^{-x} dx$  的数值计算公式为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

9、设  $A_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) 是区间  $[0, 3]$  上的插值型数值积分公式的求积系数,

则  $\sum_{k=0}^n A_k =$ \_\_\_\_\_。

10、Gauss 求积公式  $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ , 具有\_\_\_\_\_次代数

精度, 相应的求积节点  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 是\_\_\_\_\_多项式的零点。

二. 判断题:

1.  $n + 1$  个求积节点的插值型求积公式的代数精度  $m$  满足不等式  
 $n \leq m \leq 2n + 1$ . ( )

2. 设  $A_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) 是区间  $[a, b]$  上的插值型求积公式的求积系数, 则

$$\sum_{k=0}^n A_k = 1. \quad ( )$$

3. 因为求积公式  $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ , 对于  $f(x) = x^5$  精确成立, 故其代数精度至少是 5. ( )

4. 奇数个求积节点的 Newton-Cotes 公式的代数精度至少等于节点的个数. ( )

5. Cotes 系数  $C_k^{(n)}$  只与求积节点的个数有关, 而与被积函数和积分区间均无关. ( )

6.  $n + 1$  个求积节点的 Gauss 型求积公式的代数精度为  $2n + 1$ . ( )

7. Gauss 型求积公式的求积系数均大于零. ( )

8. 设  $p_n(x)$  是  $n$  阶 Legendre 多项式, 则 Gauss-Legendre 公式  $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  中的求积节点  $x_k$  满足  $p_n(x_k) = 0$ . ( )

9. 利用 Gauss-Hermite 求积公式可以计算形如  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx$  的广义积分近似值, 且代数精度能达到最高. ( )



10. 设  $f^{(4)} \in C[a, b]$ ,  $S(x)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的满足边界条件 I 或 II 的三次样条插值函数,  $h$  是步长, 则  $S''(x) \approx f''(x)$  的截断误差为  $O(h^3)$ . ( )

## 第六章 常微分方程的数值解法

### 一. 填空题:

1. 对于初值问题  $\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_0, & y'(a) = y_0^{(1)}, \end{cases}$  若令  $z = y'$ , 则可

将其化为一阶方程组初值问题\_\_\_\_\_.

2. 求解第 1 题中的初值问题的标准 Runge-Kutta 格式为\_\_\_\_\_.

3. 常微分方程离散化为差分方程的基本方法有\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.

4. 用改进 Euler 方法解  $\begin{cases} y' = -8y + 7z, \\ z' = x^2 + yz, \\ y(0) = 1, z(0) = 0, \end{cases} \quad x \in (0, 1]$  的计算格式

为\_\_\_\_\_.

5. 当步长  $h \in$  \_\_\_\_\_ 时, 标准 Runge-Kutta 法是绝对稳定的.

6. 建立常微分方程初值问题  $y'(x) = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  的改进 Euler 公式为\_\_\_\_\_, 它是\_\_\_\_\_阶方法.

7. 求解常微分方程初值问题的两种一阶格式是\_\_\_\_\_.

### 二. 判断题:

1. 设  $f(x, y)$  在域  $D = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$  上连续且关于  $y$  满足 Lipschitz 条件, 则初值问题  $\begin{cases} y' = f(x, y), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$  在区间  $[a, b]$  上存在唯一解. ( )

2. 若求解初值问题  $\begin{cases} y' = f(x, y), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$  的某种数值方法的整体截断误差  $e_n = O(h^{p+1})$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), 其中  $h$  为步长,  $p \in \mathbb{N}$ , 则该数值方法是  $p$  阶方法. ( )

3. 若  $f(x, y)$  在域  $D = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$  上连续且关于  $y$  满足 Lipschitz 条件, 则解初值问题 
$$\begin{cases} y' = f(x, y), a < x \leq b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$
 的二阶和四阶 Runge-Kutta 方法是收敛的. ( )

4. 对于实验方程  $y' = \lambda y$  ( $\lambda < 0$  为常数), 对任意步长  $h > 0$ , Euler 方法都是绝对稳定的. ( )