三． **解：** $D_3(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+2)^2$；

$\because \begin{vmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \therefore D_2(\lambda)=1$，从而 $D_1(\lambda)=1$；故 $\lambda E-A$ 的不变因子为

$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+2)^2=\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda$，

故 A 的初等因子组为 λ，$(\lambda+2)^2$，A 的 Jordan 标准形 $J=\begin{bmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & 1 & -1\end{bmatrix}$，

A 的有理标准形 $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$.

四．解：Seidel 迭代格式为 $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{3}(2x_3^{(k)}+1)\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{2}(-x_3^{(k)}+2)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}(2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}+3)\end{cases}$

Seidel 迭代法的迭代阵为 $M_2=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{11}{12}\end{bmatrix}$

$$\det(\lambda E-M_2)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \lambda & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \lambda-\frac{11}{12}\end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{11}{12}\lambda^2$$

得 $\rho(M_2)=\dfrac{11}{12}<1$，Seidel 迭代法收敛.

五．解：选 $x_0=0.20, x_1=0.40, x_2=0.60, x_2=0.80$.

作差商表：

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0.20	1.2214			
0.40	1.4918	1.3520		
0.60	1.8221	1.6515	0.7488	
0.80	2.2255	2.0170	0.9138	0.2750

$$f(0.45) \approx N_3(0.45) = 1.2214 + 1.3520(0.45-0.2) + 0.7488(0.45-0.2)(0.45-0.40)$$

$$+0.2750(0.45-0.20)(0.45-0.40)(0.45-0.60)$$

$$= 1.2214 + 0.3380 + 0.0094 - 0.0005$$
$$= 1.5683 .$$

六．解：（1） $\det(\lambda E - A) = \lambda(\lambda+1)^2$,又 $A(A+E) \neq O$ ， 故最小多项式为

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2 \ .$$

（2） 令 $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2 = 0$ 得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.因为 $\deg \varphi(\lambda) = 3$，故设

$$\mathrm{e}^{At} = a_0(t)E + a_1(t)A + a_2(t)A^2 = T(At) .$$

由 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ 与 $T(\lambda t)$ 在 A 上的谱值相等，得

$$\begin{cases} a_0(t) = 1 \\ a_0(t) - a_1(t) + a_2(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ a_1(t) - 2a_2(t) = t\mathrm{e}^{-t} \end{cases}, \quad 解之得 \quad \begin{cases} a_0(t) = 1 \\ a_1(t) = (-2-t)\mathrm{e}^{-t} + 2 \\ a_2(t) = -(t+1)\mathrm{e}^{-t} + 1 \end{cases}.$$

又 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，故

$$\mathrm{e}^{At} = a_0(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + a_1(t)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + a_2(t)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_0(t) - a_1(t) + a_2(t) & 0 \\ a_1(t) - a_2(t) & -a_1(t) + 2a_2(t) & a_0(t) - a_1(t) + a_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-t} & -t\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}.$$

七．用 Romberg 算法填写下表（计算过程及结果均保留至小数点后第 6 位）：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.173287			
1	0.248829	0.274010		

2	0.266458	0.272334	0.272222	
3	0.270769	0.272206	0.272197	0.272197
4	0.271841	0.272198	0.272197	0.272197

七. $\|A\|_F = \sqrt{1+1+1+1} = 2$；

令 $\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -\mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$ ，得 $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ ，故

$\rho(A) = \sqrt{2}$；

因为 A 是 Hermite 矩阵，所以 $\|A\|_2 = \rho(A) = \sqrt{2}$.

（或 $A^H A = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$，

由 $\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2$ 得 $\rho(A^H A) = 2$，

故 $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sqrt{2}$.）

九． 证明：

$\|x+y\|^2 = \langle x+y,\ x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y \rangle$，

必要性：

因为 $x \perp y$，即 $\langle x,y \rangle = 0$，所以 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

充分性：

因为 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$，由上知 $2\langle x,y \rangle = 0$，即 $\langle x,y \rangle = 0$，故 $x \perp y$.