天津大学《数值计算方法与 Matlab》2008-2009 学年第二学期期末试卷 A

题　号	一	二	三	成　绩	核分人签字
得　分					

一、填空题：（共 42 分，每空 3 分）按要求把正确的答案填在每题中的横线上方。

1. 下列各数是经过四舍五入得到的近似值 $x_1^* = 1.1021$ ，$x_2^* = 0.031$ ，则它们分别有几位有效数字________，$x_1^* + x_2^*$ 的绝对误差限为____________。

2. n+1 点插值型数值积分公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的代数精度，至少是______，最高不超过_____。

3. 已知 $f(x_k)$ 在节点 x_k=0.9，1.0 和 1.1 处函数值分别为 1.260，1.557 和 1.964，则用三点数值微分公式计算，$f'(1.1) =$ _____ 和 $f'(0.9) =$ _____（保留 3 位有效数字）。

4. 建立常微分方程初值问题 $y'(x) = f(x, y)$，$y(x_0) = y_0$ 的计算格式有三种基本方法，它们是________________________________。

5. 设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在互异节点 x_k（$k = 0,1,\ldots,n$）上的三次样条函数，要想确定此三次样条函数 $S(x)$，共需要几个定解条件：________，其中自然边界条件是指____________。

6. 已知 $\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 是区间 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x) = 1$ 的最高次项系数为 1 的正交多项式序列，则 $\int_0^1 x \cdot g_k(x)\,\mathrm{d}x =$ ________________________________。

7. 复化 simpson 积分公式的余项为____________，若用此公式计算积分 $I = \int_0^1 \frac{1}{2+x}\mathrm{d}x$，则为使误差不超过 10^{-5}，至少需要节点个数是_____。

8. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $\mathrm{cond}_2(A) =$ _______。考虑方程组 $Ax = b$，这里 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。当 b 有误差 $\delta b = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$ 时，引起解向量的相对误差 $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2}$ 的上界为_______。

二、解下列各题：（共 36 分，每小题 9 分）

1. 确定求积公式 $\int_0^2 xf(x)\,\mathrm{d}x \approx Af(0) + Bf(1) + Cf(2)$ 中的待定参数 A, B, C，使其代数精度尽量高，并指出所确定的求积公式的代数精度。

2. 写出解下列方程组的 Gauss-Seidel 法迭代公式的分量形式，并考察此方法当常数 c 为何值时收敛与发散。

$$\begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ c & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. 利用 Gauss-Legendre 三点求积公式计算积分 $\int_0^2 e^{-2x^2}\cos(2x)\,dx$（保留 5 位有效数字）。

3. 设 $y=\cos x$ 的函数数据表如下：

x_k	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_k	1.00000	0.99500	0.98007	0.95534	0.92106	0.87758	0.82534

利用四次插值多项式计算 $\cos(0.048)$ 的近似值（保留 5 位有效数字）。

三、应用题：(共22分，每小题11分)

1. 给定实验数据如下：

x	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6
y	0.931	0.473	0.297	0.224	0.168

求形如 $y=\dfrac{1}{a+bx}$ 的拟合函数（结果保留三位小数）。

2. 假设有两种生物蓝鲸和磷虾，在时刻t时的数量分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。蓝鲸以磷虾为主要食物，二者在自然条件下，它们的数量关系为：

$$\dot{x}_1=-ax_1+bx_1x_2,\ \dot{x}_2=cx_2-dx_1x_2$$

其中 $a=0.8,b=0.3,c=1.2,d=0.6$，$\dot{x}_k,k=1,2$ 表示 x_k 对时间 t 的导数，初始条件为 $x_1(0)=2$ 和 $x_2(0)=1$。写出用经典四阶Runge-Kutta方法解此初值问题的计算格式(步长取为h)。