2019～2020 学年第一学期《高等数学 2A》期末考试参考答案

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

A 卷 1. 2e 2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 3. $\dfrac{5}{6}$ 4. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 5. $5\sqrt{3}$

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

A 卷 1. D 2. A 3. C 4. C 5. B

三、计算题（本题 9 分）

设曲线 $C: y=y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=3t+t^3, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$ 及曲线在 $t=1$ 处的切线方程.

解：由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{1+t^2}$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3\left(1+t^2\right)$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(1+t^2\right)^2$,

由 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{12t(1+t^2)}{\dfrac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2$, 得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=48$.

当 $t=1$ 时 $x=\dfrac{\pi}{4}, y=4$， $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=12$.

故曲线在 $t=1$ 处的切线方程为 $y-4=12\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, 即 $y=12x-3\pi+4$.

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)-\sin x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\sin x}{2}=1$.

2. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}$，有 $\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$.

原式$=\displaystyle\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t=2\int\frac{1}{t^2-1}\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1}+C.$

3. 求过点 $(-1,2,3)$, 垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$ 且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

解:设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$. 记已知直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(4,5,6)$, 平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(7,8,9)$. 由题设知 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$, 则 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,

取 $\boldsymbol{s}=(1,-2,1)$, 故所求直线方程为 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

4. 设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x\ (1\le x\le \mathrm{e})$，求由曲线 L, 直线 $x=1$, $x=\mathrm{e}$ 和 x 轴所围平面图形的面积.

解： $S=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}x^3\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\left(\mathrm{e}^3-1\right)-\frac{1}{2}\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}$

$=\dfrac{1}{12}\left(\mathrm{e}^3-1\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^3-7}{12}$.

5. 求线性微分方程 $y''-10y'+9y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

解：特征方程为 $r^2-10r+9=0$，解得特征根为 $r_1=1$， $r_2=9$.

则齐次线性微分方程 $y''-10y'+9y=0$ 的通解为 $\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{9x}$.

设该非齐次方程有特解 $y^*=A\mathrm{e}^{2x}$. 将 $y^*=A\mathrm{e}^{2x}$ 代入原方程得 $4A-20A+9A=1$, 解得 $A=-\dfrac{1}{7}$. 故所求的特解为 $y^*=-\dfrac{1}{7}\mathrm{e}^{2x}$.

于是原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{9x}-\dfrac{1}{7}\mathrm{e}^{2x}$.

五、解答题（共 20 分，每小题 10 分）

1. 已知 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

（1）求 $y(x)$； （2）求由曲线 $y=y(x)$，直线 $x=1,x=2$ 和 x 轴所围的曲边梯形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1） $y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\int\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{x}+C\right)$，

因为 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$，得 $C=0$．所以 $y(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$．

（2） $V=\int_1^2\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_1^2=\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})$.

2. 设函数 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$.

（1）求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调区间； （2）计算定积分 $I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

解：(1) $f'(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$，

当 $x\in(0,\sqrt{\pi})\cup(\sqrt{2\pi},\sqrt{3\pi})$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in(\sqrt{\pi},\sqrt{2\pi})\cup(\sqrt{3\pi},\pi)$ 时， $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调增加区间为 $(0,\sqrt{\pi})$ 和 $(\sqrt{2\pi},\sqrt{3\pi})$；

$f(x)$ 的单调减少区间为 $(\sqrt{\pi},\sqrt{2\pi})$ 和 $(\sqrt{3\pi},\pi)$.

(2) $I=\dfrac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{1}{2}x^2\cdot\dfrac{\sin x^2}{x}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{1}{2}\int_0^1 x\sin x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\cos x^2\Big|_0^1=\dfrac{1}{4}(\cos 1-1)$.

六、证明题（本题 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，存在 $x_0\in(a,b)$，满足 $f(x_0)>f(a)$，及 $(b-x_0)f(x_0)>\int_{x_0}^b f(x)\mathrm{d}x$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

证明：由积分中值定理，至少存在一点 $\eta\in(x_0,b)$，使 $\int_{x_0}^b f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)(b-x_0)$.

又由 $(b-x_0)f(x_0)>\int_{x_0}^b f(x)\mathrm{d}x$，则有 $f(x_0)>f(\eta)$.

对 $f(x)$ 在 (a,x_0) 和 (x_0,η) 上分别应用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=f'(\xi_1)>0，\quad a<\xi_1<x_0，$$

$$\frac{f(\eta)-f(x_0)}{\eta-x_0}=f'(\xi_2)<0，\quad x_0<\xi_2<\eta<b.$$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对导函数 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理，有

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0\ ，\quad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b).$$