2016～ 2017 学年第一学期期末考试试卷　（A 卷）

《高等数学 2A》（共 3 页，另附 2 页草纸）

（考试时间：2017 年 1 月 6 日　14:00-16:00）

题号	一	二	三	四	五	成绩	核分人
得分							

得分	

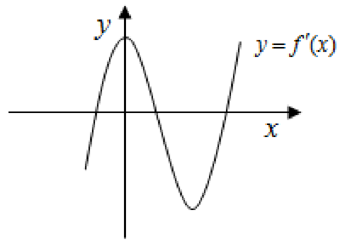
一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$, 则 (　　).

(A) $f(0)=0, f'_+(0)$ 存在　　(B) $f(0)=1, f'_-(0)$ 存在

(C) $f(0)=0, f'_-(0)$ 存在　　(D) $f(0)=1, f'_+(0)$ 存在

2.设函数 $y=f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内可导，且导函数 $y=f'(x)$ 的图形如右图所示，则 $y=f(x)$ 有(　　).



（第 2 题图）

(A) 两个极值点，两个拐点　　(B) 三个极值点，两个拐点

(C) 两个极值点，一个拐点　　(D) 三个极值点，一个拐点

3. 可导函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增的充分条件是在区间 $[0,1]$ 上(　　).

(A) $\Delta f(x)=[1+f^4(x)]\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$　　(B) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$

(C) $\Delta f(x)=(1-\mathrm{e}^{x^2})\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$　　(D) $f''(x)>0$

4. 下列反常积分收敛的是(　　).

(A) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$　(B) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$　(C) $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$　(D) $\int_0^1\dfrac{1}{\ln(1+x)}\mathrm{d}x$

5. 线性非齐次微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^x+1+\mathrm{e}^x\cos 2x$ 的特解 y^* 的形式是 (　　).

(A) $ax\mathrm{e}^x+b+A\mathrm{e}^x\cos 2x$　　(B) $a\mathrm{e}^x+b+\mathrm{e}^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

(C) $ax\mathrm{e}^x+b+x\mathrm{e}^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$　　(D) $ax\mathrm{e}^x+b+\mathrm{e}^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

得分	

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x}, & x\geq 0,\\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的间断点共有_____个.

2. 抛物线 $y=x^2$ 在点 $O(0,0)$ 处的曲率是_____，曲率圆的半径是_____.（用数值作答）

3. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+\sin^2 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$ 的值是___________.

4. 已知平面 Π 过点 $O(0,0,0)$ 和 $P(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则平面 Π 的方程为____________________.

5. 微分方程 $y'-2y=\mathrm{e}^{2x}-1$ 满足 $y(0)=1$ 的特解是 $y=$________________.

得分	

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+\arctan t,\\ ty=\mathrm{e}^y-\mathrm{e}\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^{\sin t}-\cos t)\,dt}{x\sin 2x}$.

3.已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可积，且 $f(x)=e^x+x\cdot\int_0^1 f(x)\,dx$, 求 $f(x)$ 的解析式和 $\int_{-1}^0 f(-x)\,dx$ 的值.

4. 计算不定积分 $\int\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2 dx$.

5. 已知平面 Π: $3x-y+2z=5$ 和直线 L: $\dfrac{x-7}{5}=y-4=\dfrac{z-5}{4}$ 的交点是 M, 在平面 Π 上求过点 M 且与直线 L 垂直的直线 l 的一般式方程和对称式方程.

6. 在极坐标系下，求由圆周 $\rho=1$, $\rho=2\sin\theta$, $\rho=2\cos\theta$ 所围成的公共部分的面积 S .

得分	

四、解答题（每小题 9 分，共 18 分）

1.求微分方程 $y''+2y'-3y=8x\mathrm{e}^{x}$ 满足条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的特解.

2. 已知函数 $y=y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$y(0)=1,\ y'(x)>0\ (x>0)$,且对任意实数 $x>0$, 在区间 $[0,x]$ 上以曲线 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积记为 $A(x)$, 曲线 $y=y(x)$ 在区间 $[0,x]$ 上的弧长记为 $l(x)$, 若 $A(x)=l(x)$, 求函数 $y(x)$ 在 $x\geq 0$ 时的解析式.

得分	

五、证明题（4 分）

已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=3\int_{\frac{2}{3}}^{1}\mathrm{e}^{x^2}f(x)\,\mathrm{d}x$. 证明:存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$.