2014 年工程硕士考试试卷

《工程数学基础》（共 4 页）

（考试时间：2014 年 12 月 21 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	成绩
得分										

一、判断题（每小题 1 分，共 10 分）

1、有限个或可数个可数集的并集是可数集. [ ]

2、设 $A,B\in C^{n\times n}$，则 $A\sim B$ 的充要条件是 A 和 B 具有相同的最小多项式. [ ]

3、若 $A\in R^{n\times n}$ 正定，则求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛 . [ ]

4、$\forall A\in C^{n\times n}, x\in C^{n}$，若 A 可逆且 $x\neq 0$，则 $x^{H}A^{H}Ax>0$. [ ]

5、线性空间 $P_n[a,b]$ 是 n 维的. [ ]

6、设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上任意一种算子范数，$E\in C^{n\times n}$ 是单位矩阵，则 $\|E\|=$_____. [ ]

7、设 $\{x_n\}\subset\left(X,\|\cdot\|\right)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\to x\|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$. [ ]

8、赋范空间上的线性算子是连续算子. [ ]

9、 若 A 是酉矩阵，则 $\rho(A)=1$. [ ]

10、设 X 是基本集合，$A,B\in X$，则 $(A\bigcap B)^{c}=A^{c}\bigcup B^{c}$. [ ]

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[-1+\dfrac{1}{n},\ 3-\dfrac{1}{n}\right]=$_________________.

2、设 $f(x)=f(x_1,x_2,x_3)=(3x_1e^{x_2},x_2+\sin x_3)^{T}$，则 $f'(x)=$______________.

3、设 $\{l_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 是 $[a,b]$ 上的以 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum\limits_{k=0}^{n}l_k(x_k)=$___________.

4、设 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\3&4&1\\-1&2&2\end{bmatrix}$，则 $\det e^{A}=$________________.

5、设 $A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，则 $Cond_1(A)=$________.

三、（12 分） 设 $A=\begin{bmatrix}-1&4&3\\0&2&0\\0&3&-1\end{bmatrix}$，（1）求 $\lambda E-A$ 的不变因子；（2）求 A 的有理标准形 C.

四、（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&-5\\0&1&4\end{bmatrix}$，（1）求 $\lambda E-A$ 的初等因子组；（2）求 A 的 Jordan 标准形 J .

五、（10 分）写出求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Gauss—Seidel 迭代格式，并判断所写格式的收敛性，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&6&0\\-1&0&4\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

六、（12 分） 根据下列插值条件

x	0.30	0.45	0.55	0.70	0.80
$f(x)$	4	1	0	1	1

用 2 次 Newton 插值多项式计算 $f(0.59)$ 的近似值（结果保留至小数点后第 4 位）.

七、（12 分） 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求

（1） 矩阵 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$ ；

（2） 方阵函数 e^{At}.

八、（10 分）用 $Romberg$ 算法求积分 $\int_0^1 \frac{3}{1+x^2}dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后第 5 位）.

k	T_{2^k}	S_{2^k}	C_{2^k}	R_{2^k}
0	2.25000			
1				
2				
3				
4	2.35572			

九、计算题（8 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求 $\|A\|_1, \|A\|_F, \|A\|_\infty, \|A\|_2$.

十、证明题（6 分） 若正定矩阵 $A,B\in C^{n\times n}$ 且 $AB=BA$，则 AB 是正定矩阵 **.**