天津大学 2012 ~2013 学年第二 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　　课程编号：S131A035　　学院名称：______　　学号：______　　姓名：______

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	成绩
得分										

一. 判断 （10 分）

1．设 X 是数域 K 上的线性空间, M_1, M_2 是 X 的子空间, 则 $M_1 \cap M_2$ 是 X 的线性子空间． （ ）

2．设 $A \in C^{n\times n}, A$ 可对角化的充分必要条件是其特征多项式无重零点. （ ）

3．设 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上以 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为节点的 $Lagrange$ 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x_k) = 1$. （ ）

4. A 是正定对称矩阵，则线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛. （ ）

5. 设 X 是内积空间，当 $x, y \in X, \langle x, y \rangle = 0$ 时，必有 $x = 0$ 或 $y = 0$ （ ）.

6. 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上任意一种方阵范数，单位矩阵 $E \in C^{n\times n}$，则 $\|E\| = 1$. （ ）

7. T 是线性算子，则 $T(0)=0$. （ ）

8. 已知 $A, B \subset E$, 则 $A \times B = B \times A$. （ ）

9. 设 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $(A-2E)^2 = 0$. （ ）

10. $A \in \sim^{n\times n}$, A 存在 Doolittle 分解的充要条件是 A 的各阶顺序主子式大于零. （ ）

二. 填空(10 分)

1. 设 X 是内积空间，A 是 X 的子空间，则 $A \cap A^{\perp} =$ { } .

2. 已知 $F(x) = (\sin x_1 x_2, 2x_1^2, e^{x_2})^T$ 则 $\dfrac{dF(x)}{dx} =$ ______ .

3. 设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，则 $Cond_{\infty}(A) =$______ .

4. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $\det(e^A) =$ ______ .

5. $\|(i, 1+i, 1)\|_2 =$______.

三．（12 分）设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，

求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C .

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：＿＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿

四．（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}$**，求** e^{At}.

五. （14 分）已知线性方程组为 $\begin{bmatrix}2&1&3\\1&4&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-8\\2\end{bmatrix}$

（1） 写出 Gauss-Seidel 迭代格式，

（2） 判断迭代格式收敛性.

六．（10 分）已知下列插值条件

x	76	77	78	79	81	82
$f(x)$	2.83267	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

用二次 Newton 插值多项式计算 $f(78.40)$ 的近似值(结果保留到小数点后第 5 位)。

七．（10 分）对积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx$，用 Romberg 方法计算积分的近似值，并将结果填入下表（结果保留至小数点后第五位）.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				

天津大学 2012 ~2013 学年第二 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　　课程编号：S131A035　　学院名称：＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿

八.（12 分） 设函数 $f(x)=\sin x$，用 Legendre 多项式求 $f(x)$ 在 $P_2[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$，并求 $\delta^2=\left\|f-S_2^*\right\|_2^2$（结果保留到小数点后第 5 位.）

九.（12 分）证明：

1. 设 $A\in C^{n\times n}$ 试证 $\det e^A=e^{\mathrm{TrA}}$.

2. 若 $\left\{e_1,e_2,\cdots,e_n\right\}$ 是 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的标准正交系，则对 $\forall x\in\operatorname{span}\left\{e_1,e_2,\cdots,e_n\right\}$ 可唯一地表示为

$$x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k.$$