2019～2020 学年第二学期期末考试试卷

《工程数学基础》（共 6 页）

（考试时间：2020 年 9 月 12 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	成绩	核分人签字
得分											

一、判断题（共 20 分，每小题 1 分）

1、设 X 是基本集合，$A,B\subset X$，则 $A\times B=B\times A$。 ( )

2、线性空间 $P_n[a,b]$ 是 n 维的。 ( )

3、$(1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots)$ 是 $C[a,\ b]$ 的一个基。 ( )

4、线性算子 $T:X\to Y$ 的零空间 $N\ (T)$ 是 X 的线性子空间。 ( )

5、设 X 是任一内积空间，$x,y\in X$，则 $x\perp y\Leftrightarrow \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$。 ( )

6、设 X 是内积空间，$A\subset X$，则 $A^{\perp}$ 是 X 的子空间。 ( )

7、设有内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，则 $\forall x,y\in X$ 有 $|\langle x,y\rangle|\le\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}$。 ( )

8、设 $A,B\in \mathrm{X}^{n\times n}$，则 $A\sim B$，当且仅当 A 与 B 有相同的最小多项式。 ( )

9、若 $A\in \mathrm{X}^{n\times n}$ 满足 $A^2+2A+E=0$，则 A 一定可对角化。 ( )

10、$\forall A\in \mathrm{X}^{n\times n}$，$A^H A$ 的特征值均为非负实数。 ( )

11、正规矩阵 $A\in \mathrm{X}^{n\times n}$ 是酉矩阵的充要条件是 A 的特征值都是实数。 ( )

12、设 $x\in(X,\|\cdot\|)$，当 $x\neq 0$ 时，必有 $\|x\|>0$。 ( )

13、Hilbert 空间的子空间是 Hilbert 空间。 ( )

14、在 Banach 空间中,收敛级数都是绝对收敛的。 ( )

15、设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathrm{X}^{n\times n}$ 上的任意一种方阵范数，$E\in \mathrm{X}^{n\times n}$ 是单位矩阵，则 $\|E\|=1$。 ( )

16、线性算子 $T:(X,\|\cdot\|)\to(Y,\|\cdot\|)$ 是连续的，当且仅当 $T(S(0,1))$ 是 Y 中的有界集。 ( )

17、设 $A\in \mathrm{X}^{n\times n}$ 是反 Hermite 矩阵(即 $A^H=-A$)，则 e^A 是酉矩阵。 ( )

18、若 $A\in \mathrm{P}^{n\times n}$ 严格对角占优，则求解 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代格式和 Seidel 迭代格式都收敛。

( )

19、设 $A_k\ \ (k=0,1,2,\Lambda\ ,n)$ 是区间 $[a,\ b]$ 上的插值型求积公式的求积系数，则 $\sum_{k=0}^{n}A_k=1$。

( )

20、若求解初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y),\ a<x\le b\\ y(a)=y_0\end{cases}$ 的某种数值方法的整体截断误差 $e_n=O(h^{p+1})$

($n=1,2,\Lambda\ ,N$),其中 h 为步长, $p\in\mathbb{N}$,则该数值方法是 p 阶方法。 ( )

二、填空题（共 20 分，每空 1 分）

1、设 X 是基本集合，$A,B\subset X$，则 $(A\cup B)^C=$____________。

2、设 $E=(-3,\sqrt{2}]$，则 $\inf E=$____。

3、设 Y 是线性空间 X 的子空间，则 $\operatorname{span}Y=$_____。

4、设 A 是内积空间 X 的任一集合，且 $0\in A$，则 $A\cap A^{\perp}=$___。

5、设有界线性算子 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ 的定义为：$\forall f\in C[a,\mathrm{b}]$，$(Tf)(x)=\int_a^x f(t)dt$，

$(\forall x\in[a,b])$，则 $\|T\|=$__________。

6、设 $A\in X^{3\times3}$ 的有理标准形 $C=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&-9\\0&1&9\end{bmatrix}$，则 $\operatorname{tr}A=$____。

7、设 Hermite 矩阵 $A\in X^{3\times3}$ 的特征值为 1,1,1，且 $B\sim A$，则 $\lambda E-B$ 的第一个不变因子

$d_1(\lambda)=$__________。

8、设 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵，$A=\frac{1}{2}U$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=$________。

9、设 $A(t)=\begin{bmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{bmatrix}$，则 $\det\left[\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\right]=$______。

10、设 $A=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&1&-1\\0&2&1-\mathrm{i}\\1&2&0\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$_________。

11、设 $f(x)=f(x_1,x_2,x_3)=[x_2\cos x_3,x_1e^{x_2}]^T$，则 $f'(x)=$____________________。

12、若 $f(x)=2x^4+3x^3+1$，则差商 $f[2,4,6,8,9]=$_____。

13、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&2\\1&3\end{bmatrix}$，若用迭代法 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(Ax^{(k)}-b)$，$k=0,1,2,\ldots$，求解 $Ax=b$，则迭代法收敛的充分必要条件是 α 满足________________。

14、已知 $n=4$ 时 Newton-Cotes 求积公式的系数分别是：$C_0^{(4)}=\frac{7}{90},C_1^{(4)}=\frac{16}{45},C_2^{(4)}=\frac{2}{15}$，则 $C_3^{(4)}=$_______ 。

15、将区间 $[0,1]$ 做 n 等分，$h=\frac{b-a}{n}$，$x_i=a+ih\ (i=0,1,\ldots,n)$，则求 $\int_0^1 f(x)dx$ 的复化梯形公式 $T_n(f)=$________________________________。

16、设 $f(x)\in C^4[0,2]$，Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 满足 $H_3(0)=f(0)$，$H_3'(0)=f'(0)$，$H_3(2)=f(2)$，$H_3'(2)=f'(2)$，则余项为______________________________。

17、已知下列函数 $S(x)$ 为 $[0,3]$ 上的样条函数，则 $a+b=$____。

$$S(x)=\begin{cases}x^3 & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c & 1\le x\le 3\end{cases}$$

18、已知一组实验数据 $\{(x_k,y_k)\}=\{(-3,-2),(-1,-1),(0,0),(2,2)\}$，则拟合这些数据的一次多项式 $S_1^*=$______________。

19、设求积公式 $\int_a^b x^2f(x)dx\approx\sum\limits_{k=0}^{n}A_kf(x_k),(n\ge2)$ 是插值型求积公式，这里 x^2 为权函数，则 $\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx_k^2=$______。

20、当步长 $h\in$____________时，求初值问题 $\begin{cases}y'=-10y,\ 0<x\le1\\ y(0)=1\end{cases}$ 的标准 Runge- Kutta 方法是绝对稳定的。

三、(8 分) (1)用列主元 Gauss 消去法求解下列线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

(2) 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

写出对应的 Jacobi 格式并分析收敛性。

四、(6 分) 已知 $f(x)$ 的数据表

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	-3	-4	2

求 $f(x)$ 的 3 次 Newton 插值多项式，并给出相应的插值余项。

五、(1) (8 分)已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$，用初等变换求 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准型，并写出 A 的最小多项式 $m(\lambda)$，Jordan 标准型 J 和有理标准型 C。

(2) (8 分)求解以 A 为系数矩阵的初值问题 $\begin{cases} x'(t)=A\cdot x(t), \\ x(0)=(1,0,1)^T, \end{cases}$ 这里 $x(t)=(x_1,x_2,x_3)^T$。

六、(8 分) 设 $f(x)=x^2$，$x\in[0,1]$，用 Legendre 多项式求出 $f(x)$ 的一次最佳平方逼近多项式，并求出平方误差。(结果保留 4 位小数)

(注：本题中所有积分均需给出精确值，直接给出近似值不得分)

七、（6 分）下表记录 Romberg 算法的部分计算结果， 将空格①~③处的结果补充完整。

(注：需在表格下方写出具体计算步骤，将相应结果填入表格中

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$
0	0.500 000		
1	0.426 777	0.402 369	
2	0.407 018	②	0.400 302
3	①	0.400 007	③

八、（6 分）写出用标准 Runge-Kutta 方法解初值问题

$$\begin{cases} y'' - (1+x^2)y = 1, \quad x \in (0,1], \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \end{cases}$$

的计算格式。

九、(1) (5 分) 设 (x_n) 和 (y_n) 是赋范线性空间 X 中任意两个 Cauchy 序列,证明数列 $(\|x_n - y_n\|)$ 收敛。

(2) (5 分) 设 A,B 为 n 阶 Hermite 对称矩阵，且 A 是正定矩阵。证明存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^H AP = E, P^H BP = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{bmatrix}$，且 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 为实数。