

学院_____专业/大类_____班 年级_____学号_____姓名_____ 共 3 页 第 1 页

2022~2023 学年第一学期第一次月考试卷

《高等数学 2A》(共 3 页, 附 2 页演算纸)

考试时间: 2022 年 9 月 30 日 (1 小时)

题号	一	二	三	成绩	核分人签字
得分					

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(1 + \cos x)(\sqrt{1 + x^2} - 1)}.$$

一、求下列极限 (每小题 10 分, 共 50 分)

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - \sin x}{2x^2 + \sin^2 x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\arctan \frac{2}{x-1} + \frac{\pi}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} \right).$$

学院_____专业/大类_____班_____年级_____学号_____姓名_____共 3 页 第 2 页

二、计算和解答题（共 10 分，每小题 30 分）

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \ln(1 + bx), & x < 0. \end{cases}$ 确定常数 a, b , 使 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续.

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{2 + \tan x} - \sqrt{2 + \sin x}$ 与 x^α 是同阶无穷小量, 求常数 α 的值.

2. 求函数 $f(x) = \frac{(1+x)\sin x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点, 并判断每个间断点的类型.

三、证明题（共 20 分，每小题 10 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续, $a < c < d < b$, 且常数 $k_1, k_2 > 0$.

证明: 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $k_1 f(c) + k_2 f(d) = (k_1 + k_2) f(\xi)$.

2. 设常数 $a > b > 0$, $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$, 且 $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ ($n \in \mathbb{N}_+$).

证明: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 并且它们的极限相等.