天津大学
Tianjin University

最优化理论与方法

主讲：　黄正海

教材与参考书

教材：

黄正海、苗新河，《最优化计算方法》，科学出版社，2015年。

参考书

1. 孙文瑜、徐成贤、朱德通，《最优化方法》，高等教育出版社，　2004年。
2. 袁亚湘、孙文瑜，《最优化理论与方法》，科学出版社，1997年。
3. 解可新、韩健、林友联，《最优化方法》，天津大学出版社，2004年。

第一章　引论

1.1 最优化问题概述 ---- 什么是最优化？

例子：田忌赛马

	齐威王		田忌（+孙膑）	齐威王		田忌（+孙膑）
上等马	A	>	B	A	>	F
中等马	C	>	D	C	<	B
下等马	E	>	F	E	<	D
	3	:	0	1	:	2

1.1 最优化问题概述 ---- 什么是最优化？

田忌赛马的启示：

- 人们做一件事情时会有很多选择，如何决策重要非常重要
- 决策者总是希望选择对自己最有利的方案

  （优化 ——optimization）

任何存在/需要决策的问题都是优化问题.

(大多数问题可以归结于决策问题)

(涉及到最大、最小、最好、最坏、最佳等等)

1.1 最优化问题概述 – 应用广泛

应用:

- 力　　学：（最小重量，最大载重，结构最优）
- 材料科学：（最小能量）
- 金　　融：（最大利润，最小风险）
- 生命科学：（DNA序列，蛋白质折叠）
- 信息科学：（Data Mining，图像处理）
- 地　　学：（反问题 —— 误差最小）
- 交　　通：（最大效益，时刻表，恢复运行）
- 深度学习：（丢失函数极小化）

1.1 最优化问题概述 – 应用广泛

由于宇宙组成是最完美也是最聪明造物主之产物，宇宙间万物无不遵循某种最大或最小准则

———— 欧拉

Für, da das Gewebe des Universums am vollkommensten und die Arbeit eines klügsten ist Schöpfers, nichts an findet im Universum statt, in dem irgendeine Richtlinie des Maximums oder des Minimums nicht erscheint

Leonhard Euler (1707-1783)

优化 无处不在！ 学习优化，优化人生！

1.1 最优化问题概述 — 数学模型

通俗地讲：

人们做某件事情，会面临多种选择方案，那么如何做决策对自己有利，这样的问题就是最优化问题。

稍微数学一点地讲：

最优化问题就是在一定范围内使得关心的指标达到最佳。

（ 目标：关心的指标； 约束集合：界定的范围）

更数学一些：

通过引入变量，目标可表示为变量的函数；约束通过变量的一些等式与不等式来表示。

1.1 最优化问题概述 — 数学模型

最优化问题的基本数学模型为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in I := \{1, 2, \ldots, p\}, \\
& c_i(x) = 0, \quad \forall i \in E := \{p+1, p+2, \ldots, m\},
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

其中, min是minimize的缩写, s.t.是subject to的缩写,

$x \in \mathbb{R}^n$称为决策向量, 函数$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$称为目标函数,

函数$c_i(\cdot)$ $(i \in I)$称为不等式约束函数,

函数$c_i(\cdot)$ $(i \in E)$称为等式约束函数,

不等式$c_i(x) \geq 0$ $(i \in I)$称为不等式约束,

方程$c_i(x) = 0$ $(i \in E)$称为等式约束,

I称为不等式约束的指标集, E称为等式约束的指标集.

1.1 最优化问题概述 — 数学模型

记

$$
\mathcal{F} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} c_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in I = \{1, 2, \cdots, p\}, \\ c_i(x) = 0, \quad \forall i \in E = \{p+1, p+2, \cdots, m\} \end{array} \right\}. \tag{1.1.2}
$$

称集合$\mathcal{F}$为最优化问题(1.1.1)的可行域,

$\mathcal{F}$中的每个点x称为最优化问题(1.1.1)的一个可行点.

若$\mathcal{F} = \emptyset$, 则称问题(1.1.1)是不可行的; 否则称它是可行的.

因此, 最优化问题(1.1.1)就是在可行域$\mathcal{F}$中寻找一点x使得它所对应的目标函数值$f(x)$不大于$\mathcal{F}$中其它任何点所对应的目标函数值.

1.1 最优化问题概述 – 最优解与最优值

定义 1.1.1 假设可行域$\mathscr{F}$由(1.1.2)式给出.

(i) 若$x^* \in \mathscr{F}$, 且对所有的$x \in \mathscr{F}$恒有$f(x^*) \leq f(x)$, 则称x^*为最优化问题(1.1.1)的一个全局最优解. (*Global optimal solution*)

(ii) 若$x^* \in \mathscr{F}$, 且对所有的$x \in \mathscr{F} \setminus \{x^*\}$恒有$f(x^*) < f(x)$, 则称$x^*$为最优化问题(1.1.1)的严格全局最优解.

(iii) 若$x^* \in \mathscr{F}$, 且存在x^*的某个邻域

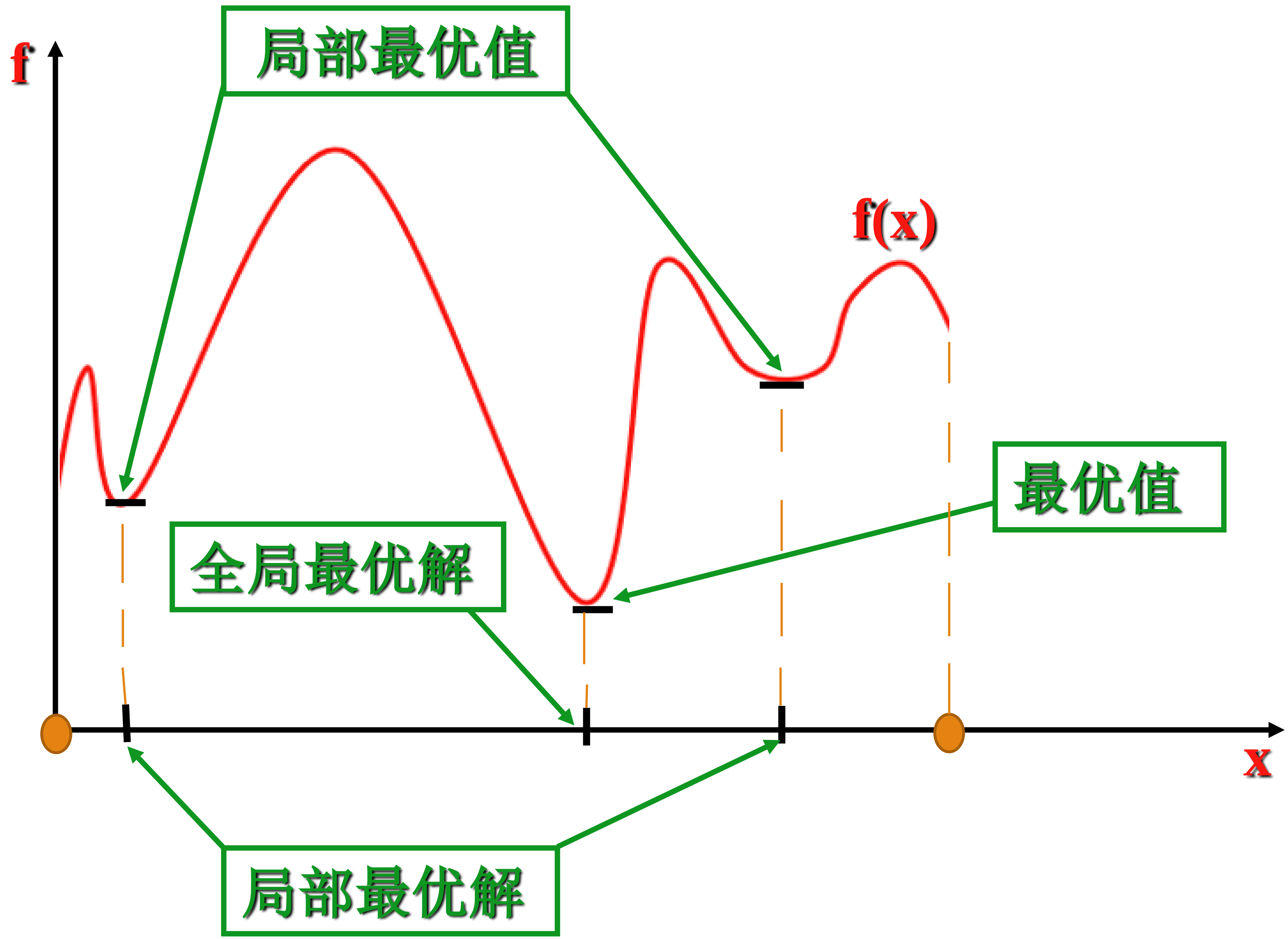
$$\mathscr{N}_\epsilon(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^*\| < \epsilon\}, \quad \text{其中}\epsilon\text{为正实数},$$

使得对所有的$x \in \mathscr{F} \cap \mathscr{N}_\epsilon(x^*)$恒有$f(x^*) \leq f(x)$, 那么称$x^*$为最优化问题(1.1.1)的一个局部最优解. (*Local optimal solution*)

(iv) 若$x^* \in \mathscr{F}$, 且存在x^*的某个邻域$\mathscr{N}_\epsilon(x^*)$, 使得对所有的$x \in \mathscr{F} \cap \mathscr{N}_\epsilon(x^*) \setminus \{x^*\}$ 恒有$f(x^*) < f(x)$, 那么称x^*为最优化问题(1.1.1)的一个严格局部最优解.

定义 1.1.2 对于最优化问题(1.1.1), 称其最优解x^*对应的目标函数值$f(x^*)$为此优化问题的最优值.

1.1 最优化问题概述 — 最优解与最优值



1.1 最优化问题概述 — 数学模型

最优化问题(1.1.1)也常被写成

$$\min \left\{ f(x) \;\middle|\; \begin{array}{ll} c_i(x) \geq 0, & \forall i \in I = \{1, 2, \cdots, p\}, \\ c_i(x) = 0, & \forall i \in E = \{p+1, p+2, \cdots, m\} \end{array} \right\},$$

或者

$$\min\{f(x) \mid x \in \mathscr{F}\};$$

或者

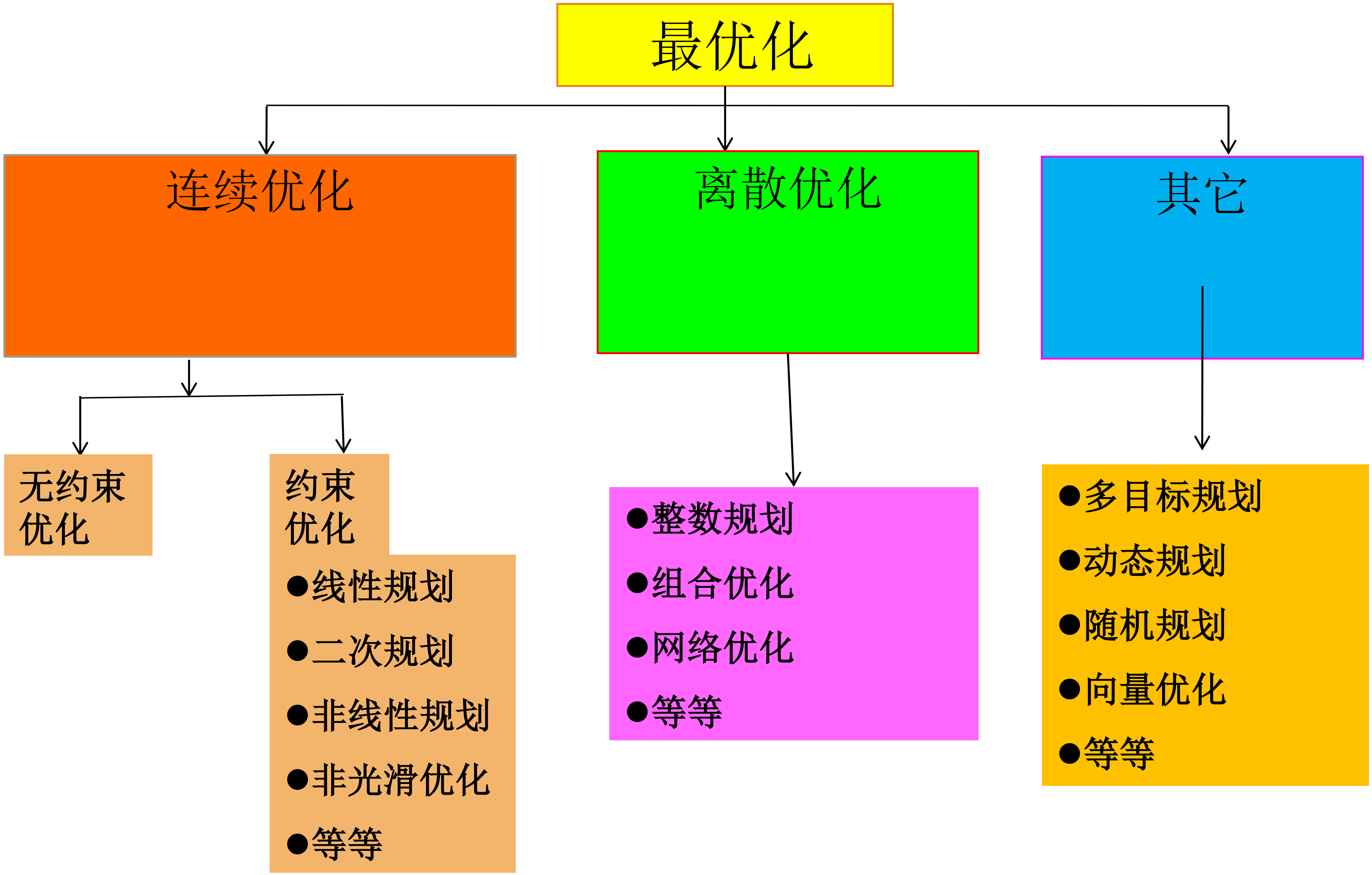
$$\min_{x \in \mathscr{F}} f(x);$$

或者

$$x^* = \arg\min_{x \in \mathscr{F}} f(x),$$

其中arg min为the argument of the minimum的缩写.

1.1 最优化问题概述 – 分类



1.1 最优化问题概述 — 小结与作业

小结：

本节介绍了什么是最优化，说明了其应用广泛，特别地，给出了最优化问题的基本数学模型及其相关的基本概念。

作业：

1.2 给定函数$f: \mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 记$g(x) := -f(x)$. 假设优化问题$\min_{x\in\mathscr{F}} f(x)$有最优解. 试证: 优化问题$\max_{x\in\mathscr{F}} g(x)$也有最优解, 并且两个优化问题的最优解集相同、最优值互为相反数.

1.3 验证$x^* = (0, -3)^\top$是优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = x_1^2 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 9 \end{aligned}$$

的严格全局最优解.