2017～2018 学年第一学期期末考试试卷答案
(2018 年 1 月 9 日，2 个小时)

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

A 卷：1. B　2. A　3. C　4. B　5.D

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

A 卷：1．$\cos x$　2. $y=x+1$　3. 发散　4. $\dfrac{1}{4}$　5. $A\sin x+B\cos x+Cx\mathrm{e}^{-x}$

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

B 卷：1．$y=x+1$　2. $\cos x$　3. 发散　4. $\dfrac{1}{4}$　5. $A\sin x+B\cos x+Cx\mathrm{e}^{-x}$

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

B 卷：1. B　2. A　3. B　4. C　5.D

三、解答题（共 42 分，每小题 7 分）

1.解：$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln(1+x)\cdot\ln x\right]=\lim\limits_{x\to0^+}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0^+}x=0.$

2. 解：因为 $F(x)=x^2\int_0^x f''(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2f''(t)\mathrm{d}t=x^2(f'(x)-f'(0))-\int_0^x t^2f''(t)\mathrm{d}t,$

所以，$F'(x)=2x(f'(x)-f'(0))+x^2f''(x)-x^2f''(x)=2x(f'(x)-f'(0)).$

由题意知，

$$1=\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x(f'(x)-f'(0))}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2(f'(x)-f'(0))}{x}=2f''(0).$$

所以 $f''(0)=\dfrac{1}{2}.$

3.解：因为 $f(x)=F'(x)=2\ln(x+\sqrt{x^2+1})\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$

所以，$\int xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)-\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]^2+C$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]^2+C.$$

4. 解：

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(1+\cos x)}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\ln(1+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{3}{2}.$$

5. 解：在 $y^2=2x$ 两边对 x 求导得 $2yy'=2$，将点 $(\frac{1}{2},1)$ 带入得到 $y'(\frac{1}{2})=1.$

所以法线方程为：$y-1=-(x-\dfrac{1}{2})$，即 $y=-x+\dfrac{3}{2}.$

联立 $\begin{cases}y=-x+\dfrac{3}{2},\\ y^2=2x,\end{cases}$ 解得交点 $(\frac{1}{2},1)$，$(\frac{9}{2},-3)$.所以

$$S=\int_{-3}^{1}(-y+\frac{3}{2}-\frac{y^2}{2})\mathrm{d}y=\frac{16}{3}.$$

6. 解：这是伯努利方程.

令 $u=y^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2yy'$. 原方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}u=-x$，这是关于 u 的一阶线性非齐次方程，其中 $P(x)=-\dfrac{1}{x}, Q(x)=-x,$　$\mathrm{e}^{\int-P(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=x$，所以

$$u(x)=C\mathrm{e}^{\int-P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{\int-P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$=Cx+x\int(-x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=Cx-x^2,$$

所以 $y^2=Cx-x^2.$

四、解答题（共 20 分，每小题 10 分）

1. 解：(1)设平面 Π 的上任意一点为 $M(x,y,z)$，由题意知 $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}$ 共面，所以

$$\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0，即 x+y+z+1=0.$$

故平面 Π 的方程是 $x+y+z+1=0$.

（2）设要求的平面的方程为 $x+y+z+D=0$.则由两个平行平面间的距离公式知

$\dfrac{|D-1|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，解得 $D=-2$ 或 $D=4$.

所以，所求的平面方程为 $x+y+z-2=0,\ x+y+z+4=0$.

2.

解：原方程对应的齐次方程为 $y''-2y'+y=0$，其特征方程为 $r^2-2r+1=0$，

解得 $r_1=r_2=1$，所以齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$，其中 C_1,C_2 为任意实数.

方程的自由项为 $P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型，其中 $P_n(x)=2, n=0,\ \lambda=1$.因 $\lambda=1$ 是二重特征根，

故 $y''-2y'+y=2\mathrm{e}^x$ 有形如 $y^*=ax^2\mathrm{e}^x$ 的特解. 将其带入原方程

解得 $a=1$，从而 $y^*=x^2\mathrm{e}^x$.

故原方程的通解为 $y=\overline{y}+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x$.

由 $y(0)=C_1=1$，$y'(0)=C_1+C_2=2$，解得 $C_1=1, C_2=1$.

所以 $y=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=(1+x+x^2)\mathrm{e}^x$.

五、证明题(共 8 分，每小题 4 分)

1. 证明：对 $\forall x\in[a,b]$，取 h 充分小使得 $x+h\in[a,b]$,则

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x),$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间.

2. 证明：由条件，利用定积分的几何意义，要证明的结论是存在唯一的 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(x)]\mathrm{d}x=3\int_{\xi}^b[f(x)-f(\xi)]\mathrm{d}x$.

令 $F(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}x-3\int_t^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x,\ t\in[a,b]$，则 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导，由 $f'(x)>0$ 知 $f(a)<f(x)<f(b), \forall x\in(a,b)$，所以

$$F(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x<0, F(b)=\int_a^b[f(b)-f(x)]\mathrm{d}x>0,$$

根据闭区间上连续函数的性质，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(x)]\mathrm{d}x=3\int_{\xi}^b[f(x)-f(\xi)]\mathrm{d}x$.

又 $F(t)=f(t)(t-a)-\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-3\int_t^b f(x)\mathrm{d}x+3f(t)(b-t)$，由 $f'(x)>0$ 得到 $F'(t)=f'(t)(t-a)+3f'(t)(b-t)>0$，从而 $F(t)$ 的零值点唯一，结论得证.