天津大学工程硕士研究生

《工程数学基础》试卷 （共 8 页）

_______ 学院 _______________专业_________ 班，姓名_____________学号____________

题号	一	二	三							四		成绩
			1	2	3	4	5	6	7	1	2	
得分												

一. **判断 (每小题 1 分,共 10 分)**

1. Hermite 矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 是负定的充要条件为 A 的各阶顺序主子式均小于零.（　　）

2. 线性算子 $T: X \to Y$ 的零空间 $\mathrm{N}(T)$ 是 X 的线性子空间.　　（　　）

3. 任意多个闭集的并仍然是闭集.　（　　）

4. 在 Banach 空间中，Cauchy 序列与收敛序列是等价的.　（　　）

5. 正规矩阵的最小多项式无重零点.　（　　）

6. 设 $L_n(x)$和 $N_n(x)$ 分别是 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上以 $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ 为节点的 n 次 Lagrange 插值多项式和 Newton 插值多项式，则 $L_n(x) = N_n(x)$.（　　）

7. 用 Newton-Cotes 公式计算$\int_a^b f(x)dx$ 的近似值时节点取得越多则精度越高.（　　）

8. 线性空间 $P_n[a,b]$ 是 n 维的.　（　　）

9. $\|(i,i,2)^T\|_2 = \sqrt{2}$.　（　　）

10. 线性算子 $T:(X,\|\cdot\|_X) \to (Y,\|\cdot\|_Y)$ 是有界的充要条件为存在数 $M>0$ 使得对任意的 $x \in X$ 有 $\|Tx\|_Y \le M$ 成立.　（　　）

二.填空 (每小题 1 分,共 10 分)

1. 设 $A=\left(2,\sqrt{5}\right]$ 则 $\inf A=$_________.

2. 已知 4 阶矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-4)$, 则 A 的初等因子组为_________________________.

3. 设 $A\in C^{3\times3}$ 的 Jordan 标准形 $J=\begin{bmatrix}2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}$, 则 A 的有理标准形

$C=$________________.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i} & 0\\ 2 & -1 & 1\\ \mathrm{i} & 0 & 1\end{bmatrix}$ 则 $\|A\|_F=$________.

5. $A(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$ 可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}A^T(t)}{\mathrm{d}t}=$___________________.

6. 已知 $A(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t & t^2\\ t & 1\end{bmatrix}$ 则 $\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t=$_________________.

7. 设 M 求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代矩阵，则 Jacobi 迭代格式收敛的充要条件是 $\rho(M)$_______________.

8. 设 $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$ 是 $[a,b]$ 上的以 $a\le x_0<x_1,\cdots,x_n\le b$ 为节点的 Lagrange 插值函数则 $\sum_{k=0}^n l_k(x)=$_______.

9. 设 n 为奇数，则 $n+1$ 个求积节点的 Newton-Cotes 求积公式的代数精度最低为__________.

10. 方阵 A 可对角化的充要条件是: A 的最小多项式__________________.

三．计算题 （每小题 10 分，共 70 分）

1. 设

$$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix},$$

（1）求$\lambda E - A$的初等因子组；(2) 求A的 Jordan 标准形J.

2. 设

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

（1）求$\lambda E - A$的不变因子；（2）求A的有理标准形C.

3．设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \ ,$$

（1）求A的最小多项式$\varphi(\lambda)$；（2）求e^{At}.

4. 已知函数$y = f(x)$的数值如下：

x	1949	1959	1964	1982	1990
y	402.54	555.48	624.92	776.41	878.54

用 3 次插值多项式计算$f(1973)$的近似值（计算过程及结果均保留至小数点后第 2 位）。

5. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin At)$.

6. 用列主元法求解以下线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 \quad\ \ = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

7. 写出用标准 Runge—Kutta 法求解初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x + y'), & 0 < x \le 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{cases}$$

的计算公式.

四． 证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 对任意集合 E, A, B, 试证明：

$$E \setminus (A \bigcup B) = (E \setminus A) \bigcap (E \setminus B).$$

2. 若 $A, B \in C^{n \times n}$ 都是 Hermite 矩阵, 则 AB 是 Hermite 矩阵的充要条件为 $AB = BA$.