习题 1

一、

二、

习题 2

一、

二、

习题 3

一、

7. 见 P94 的 (齐次性).

8. 赋范空间 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 是完备的 (例 3.20,P107),$(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ 是不完备的 (例 3.21,P107), 所以二者不等价.

9. 因为序列 $x_n \to x \in X$, 所以序列 (x_n) 是 $\mathbf{X}$ 中的 Caucy 列. 又 (x_n) 是 W 中的序列, 由 Cauchy 的定义容易看出,(x_n) 也是 $\mathbf{W}$ 中的 Caucy 列. 再由 W 的完备性知 $x_n \to x' \in W$. 由于 $W \subset X$, 自然可把 (x_n) 看成是 $\mathbf{X}$ 中的收敛序列且极限为 $x' \in X$, 所以由极限的唯一性知 $x = x'$, 所以 $x \in W$.

11. $|\,\|x_n\| - \|x\|\,| \leqslant \|x_n - x\|$.

13. 答案有误. 反例: 在 $\mathbb{R}$ 中, 由莱布尼茨判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$ 收敛, 但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |s_n| = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots$ 不收敛.

15. 事实上, 空间 $l^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 都是完备的, 证明略.

16. 见 P109 推论.

17.“ $\Rightarrow$ ” 显然,“ $\Leftarrow$ ”, 见 P113 推论.

19. 这里见 P109 定理 3.11.

20. 映射少线性的条件.

22. 见 P118(2) 的证明.

23. 算子范数成立, 但一般方阵范数不成立, 如 F-范数, 见 P118(3).

24. 证明见 P129 第 11 题.

25.$\|A\|^2 = \rho(A^H A) \leqslant \left\|A^H A\right\|_\infty \leqslant \left\|A^H\right\|_\infty \|A\|_\infty = \|A\|_1 \|A\|_\infty$, 这里利用了 $\left\|A^H\right\|_\infty = \|A\|_1$.

二、

3. 见 P98 例 3.9.

4.$\|A\|_\infty = \left\|A^T\right\|_1$.

6.$f^{-1} \circ f = I_X$(即 X 上的恒等映射, 定义见 P10 例 1.3). 由定义,

$$\left\|f^{-1} \circ f\right\| = \|I_X\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|I_X(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

习题 4

二、

2. 由 $\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=2tE$ 得

$$A(t)=\begin{bmatrix} t^2+a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t^2+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & t^2+a_{nn} \end{bmatrix},$$

这里 a_{ij} 为常数, 再由 $A(0)=E$ 知 $a_{ii}=1, a_{ij}=0(i\neq j)$, 所以 $A(t)=\mathrm{diag}(t^2+1,\cdots,t^2+1)=(t^2+1)E$, 从而 $A^{-1}(t)=(t^2+1)^{-1}E$. 则

$$\frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}=-A^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t)=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}E.$$

4. 一般地, 对 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 设其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则由谱映射定理 (定理 4.9,P156) 知 e^A 的特征值为 $\mathrm{e}^{\lambda_1},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n}$, 因此 $\det(\mathrm{e}^A)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\lambda_i}=\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A}$. 对本题, 由给定条件知 A 的特征值为 $-1,2,2$, 所以 $\det(\mathrm{e}^A)=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A}=\mathrm{e}^3$.

5. 在 P150 公式 (4.6) 中,$f(\lambda t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$, $f'_\lambda(\lambda t)=t\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}$, $f''_\lambda(\lambda t)=t^2\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}$, 注意 A^T 是一个 Jordan 块,$\lambda=-2$, 所以

$$\mathrm{e}^{At}=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & & \\ t\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t} & \\ \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-2t} & t\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & t\mathrm{e}^{-2t} & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ & \mathrm{e}^{-2t} & t\mathrm{e}^{-2t} \\ & & \mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}.$$

6.A 是对角矩阵,$f(\lambda t)=\sin(\lambda t)$, 由地可以得到

$$\sin At=\begin{bmatrix} \sin(-t) & & \\ & \sin t & \\ & & \sin 2t \end{bmatrix},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin At)=\begin{bmatrix} -\cos(-t)(\text{答案有误}) & & \\ & \cos t & \\ & & 2\cos 2t \end{bmatrix}.$$

7.$\cos A$ 的特征值是 $\cos(-1),\cos 0,\cos 2$.

8.$\det[(\mathrm{e}^A)^{-1}]=\det(\mathrm{e}^{-A})=\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,A}=\mathrm{e}^{-3}$.

习题 5

一、

2. 答案有误. 见定理 5.3(1)(P172).

3. 见定理 5.3(4)(P172).

7. 取 $A=B$, 则有 $\langle A,A\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{a_{ij}}=\|A\|_F^2$.

10.$(\mathrm{e}^A)^H\cdot\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^{A^H}\cdot\mathrm{e}^A$(见 P146 性质 8, 对 Hermite 转置也成立)$=\mathrm{e}^{A^H+A}$(见 P145 性质 4 及 $A^HA=AA^H$) $=\mathrm{e}^0=E$.

11. 见例 5.18(P191).

二、

1. 取 $u=x$ 时有 $\langle x,x\rangle=0$, 由内积的正定性即知 $x=0$.

5. 见例 5.20(P191).

6.$\rho(A)=\frac{1}{2}\rho(U)=\frac{1}{2}$.

7.B 也是正规矩阵, 故可对角化, 且 B 的特征值也是 $1,1,2$.

8. 见定理 5.10(2)(P185).

9. 见定理 5.10(4).

10. $|\det(UV)| = |\det U| \cdot |\det V| = 1$.

11. 第一列的 2-范数平方 $= 1/2 + 1/2 + a^2 = 1$, 所以 $a = 0$(答案有误). 由第一列和第二列正交知 $1/\sqrt{2} \cdot \mathrm{i}/\sqrt{6} + 1/\sqrt{2} \cdot b = 0$, 所以 $b = -\mathrm{i}/\sqrt{6}$, 类似地 $c = \mathrm{i}/\sqrt{3}$.

三、

1. 见例 5.15(P186).

2. 见例 5.14(P184).

习题 6

一、

2. 见定理 6.6,6.7.

3. 见定理 6.8.

6. 充分但不必要.

8. 由定理 6.3, $\lim\limits_{n\to\infty} M^k = \mathbf{O}$,(见教材 P135 的定义) 亦即对任一方阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|M^k - \mathbf{O}\right\| = \lim\limits_{n\to\infty} \left\|M^k\right\| = 0$, 对 $\|\cdot\|_2$ 范数当然也成立.

习题 7

一、

1. 已知 $\sum\limits_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$, 而 $|l_k(x)| = l_k(x)$ 不是对 $\forall x \in [a, b]$ 都成立, 所以一般 $\sum\limits_{k=0}^{n} |l_k(x)| \neq 1$. 以 x_0, x_1 为节点的线性插值为例,$l_0(x) = (x - x_1)/(x_0 - x_1), l_1(x) = (x - x_0)/(x_1 - x_0)$.

3. 见 (7.14) 式 (P255)。

4. 见 (7.9) 式 (P247).

5. 见定义 7.1(P260).

二、

1.$l_k(x_k) = 1$, 所以 $\sum\limits_{k=0}^{n} l_k(x_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n + 1$.

4. 用公式 7.20(P258).

5. 在插值节点 $x_1 = 1$ 处,$S''(x_1 - 0) = (x^3)''|_{x=1} = 6x|_{x=1} = 6$,$S''(x_1 + 0) = [\frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + 3(x-1) + 1]''|_{x=1} = [3(x-1) + 2a]|_{x=1} = 2a$, 由 $S''(x_1 - 0) = S''(x_1 + 0)$= 即知 $a = 3$.

习题 8

一、

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} A_k = b - a$.

3. 这是 $n = 1$ 的 Gauss-Legendre 求积公式, 精度为 3, 当 $f(x) = x^4$ 式 $R(f) \neq 0$.

4. 见定理 8.4(P298), 注意对 $n + 1$ 个求积节点 $x_0, \cdots, x_n$, 此时 n 为偶数.

7. 见 P314 定理 8.6 下所给结论.

二、

4. 注意 $\sum\limits_{k=0}^{n} A_k = b - a = 2$.