天津大学 2017～2018 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：　S131A305　学院名称：＿＿＿＿＿　专业名称：＿＿＿＿班 ＿＿学号：＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿

一. 判断 （10 分）

1. 设X, Y是$\mathbf{K}$上的线性空间,算子$T: X \to Y$则$\{x \in X | Tx = 0\}$是X的子空间. （ ）
2. $\{1, cos\, x, sin\, x, \cdots, cos\, n\, x, sin\, n\, x, \cdots\}$线性无关. （ T ）
3. 对 Legendre 多项式$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$,有
$$span\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\} = \mathrm{span}\{1, x, \ldots, x^n\}.$$ （ T ）
4. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则$A^H A$可对角化. （ T ）
5. 设$R(x)$是 Hermite 插值余项，则节点$x_k, k = 0,1,\cdots, n$为$R(x)$的二重零点. （ T ）
6. Cotes 系数$C_k^{(n)}$只与求积节点的个数有关而与被积函数和积分区间无关. （ ）
7. 设$\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$,$\|\cdot\|$是$\mathbf{C}^{n\times n}$上的任意方阵范数，则
$$\|\boldsymbol{A}\| \le \rho(\boldsymbol{A}) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$ （ ）
8. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则$(e^A)^H = e^{A^H}$. （ ）
9. 若$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$为 Gauss 型求积公式，则$\sum_{i=0}^{n} |A_i| = 2$. （ ）
10. 若正规矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其特征值均为实数，则$A$为酉矩阵. （ ）

二、填空 （10 分）

1. 已知$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_2 =$＿＿＿ .

2. $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3 e^{x_2}, x_1 + x_2^2 \sin x_3)^T$,则$f'(x) =$＿＿＿＿＿＿＿ .

3. 设$M_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$是 Seidel 迭代矩阵，则$M_2$的所有特征值中绝对值最小的为0＿＿ .(第一列元素均为 0)

4. 若$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$为插值型求积公式，$l_k(x)$，$(k = 0,1,\cdots.n)$是 n 次 Lagrange 插值基函数，令$f(x) = l_k(x)$则$\int_a^b l_k(x)dx =$＿＿＿ .

5. 设酉矩阵$A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$，且$det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)^3$则$\lambda E - A$的不变因子$d_3(\lambda) =$＿＿＿＿ .

三．(8 分) 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求$A$的有理标准形$C$.

考试时间：2018 年 1 月 8 日

天津大学 2017～2018 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：　S131A305　学院名称：＿＿＿＿＿＿ 专业名称：＿＿＿＿＿班 ＿＿ 学号：＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿

四 .(8 分)求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = 2\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t}) + 4\boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t}), \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = 2\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t}), \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = 3\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t}), \\ \boldsymbol{x}_1(0) = 1, \boldsymbol{x}_2(0) = 0, \boldsymbol{x}_3(0) = 1. \end{cases}$$

五. (8 分) 已知线性方程组为 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(1)写出 Seidel 迭代格式，(2) 判断迭代格式收敛性.

天津大学 2017～2018 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：　S131A305　学院名称：________ 专业名称：________ 班 ____ 学号：________ 姓名：________

六.（8 分）由下列插值条件

x_k	1.63	1.73	1.95	2.28	2.53
$f(x_k)$	14.094	16.844	18.475	20.963	23.135

用三次 Newton 插值多项式计算$f(2.10)$的近似值(结果保留至小数点后第 3 位)

七.（10 分）用$Romberg$算法求积分$\int_0^4 \frac{1}{2+x^2}dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（计算结果保留至小数点后第 5 位）

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				
4				

天津大学 2017～2018 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：　S131A305　学院名称：________ 专业名称：________班 ____ 学号：________　姓名：________

八. (10 分)　用 Legendre 多项式求函数$f(x) = sin\frac{\pi x}{2}$在 $P_3[-1,1]$上的三次最佳平方逼近 $S_3^*(x)$，并求 $\delta^2 = \|f - S_2^*\|_2^2$ (结果保留到小数点后第 5 位，取 $e \approx 2.71828$)

九.(8 分)写出用标准 Runge-Kutta 方法解下列初值问题的计算公式.

$$\begin{cases} y'' - x^2 - yy' = 0, & 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \end{cases}$$

考试时间：2018 年　1 月 8 日

十.(10 分) 证明

1. 内积空间X中的任何正交系M都是线性无关的.
2. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则$\|A\|_2 \le \|A\|_F$