2018–2019 学年第二学期《工程数学基础》试卷
标准答案及评分标准

考试时间:2019-6-26

一、判断题

1.× 2.× 3.× 4.✓ 5.✓ 6.✓ 7.× 8.✓ 9.✓ 10.× 11.✓ 12.✓ 13.✓ 14.✓ 15.× 16.✓ 17.✓ 18.× 19.✓ 20.✓

二、填空题

1. 3 2. n 3. $\mathrm{span}A$ 4. $\sum\limits_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ 5. $\frac{1}{3}(b^3-a^3)$ 6. 6 7. $\frac{1}{2}$ 8. $\lambda-3$ 9. e^3 10. $\begin{bmatrix} e^{x_2} & x_1e^{x_2} & 0 \\ 0 & \sin x_3 & x_2\cos x_3 \end{bmatrix}$

11. $\dfrac{3}{2}$ 12. 1 13. $(-\dfrac{1}{2},0)$ 14. $\dfrac{3}{8}$ 15. $\frac{h}{2}[f(0)+2\sum_{i=1} n-1 f(x_i)+f(1)]$ 16. $\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)^2(x-3),\xi\in(1,3)$ 17. -1 18. $0.6x$ 19. $\frac{1}{2n+1}(b^{2n+1}-a^{2n+1})$ 20. $(0,\dfrac{1}{25}]$或$(0,0.04]$

三、解:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ \underline{\mathbf{2}} & 5 & 3 & 7 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \underline{\mathbf{3}} & 6 & 6 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$$

回代解得 $x_3=3,x_2=-4,x_1=9$, 即 $x=(9,-4,3)^T$.

Sidel 迭代的迭代矩阵

$$M=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} & 0 \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{15} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & \dfrac{4}{5} & -\dfrac{1}{5} \\ 0 & -\dfrac{4}{5} & -\dfrac{4}{5} \end{bmatrix}$$

由 $|\lambda E-M|=\lambda(\lambda^2-\dfrac{4}{5})=0$ 解得 M 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_{2.3}=\sqrt{\frac{4}{5}}$,

所以 $\rho(M)=\sqrt{\frac{4}{5}}<1$, 从而 Sidel 迭代收敛.

四、解： 构造差商表为

表 1: 差商表

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-1	4			
0	-1	-5		
1	2	3	4	
3	6	2	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{13}{12}$

三次 Newton 插值多项式

$$\begin{aligned} N_3(x) &= 4-5(x+1)+4(x+1)(x-0)-\frac{13}{12}(x+1)(x-0)(x-1) \\ &= -\frac{13}{12}x^3+4x^2+\frac{1}{12}x-1, \end{aligned}$$

Newton 插值公式的余项

$$R_3(x)=f[-1,0,1,3,x](x+1)(x-0)(x-1)(x-3).$$

五、 解： (1)

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 2 & 1 & \lambda-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & \lambda & 0\\ \lambda-2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & \lambda-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0\\ 0 & 1-2\lambda & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0\\ 0 & -3 & \lambda-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0\\ 0 & -3 & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & \lambda-2\\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}(\lambda-2)\\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}(\lambda-2)\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix},$$

所以 A 的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$, 且

$$J=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}.$$

(2) 由 A 的最小多项式为 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$, 设

$$e^{tA}=a_0(t)+a_1(t)A+a_2(t)A^2=T(tA),$$

因为 $T(tA)$ 与 e^{tA} 在 $\sigma(A)=\{1,2\}$ 上的值相同，故有

$$\begin{cases} a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)=e^{2t}, \\ a_0(t)+a_1(t)\ \ +a_2(t)\ \ =e^{t}, \\ \qquad\quad a_1(t)\ \ +2a_2(t)=te^{t}, \end{cases}$$

解得 $a_2(t)=e^{2t}-te^t-e^t, a_1(t)=3e^tt-2e^{2t}+2e^t, a_0(t)=e^{2t}-2te^t$, 所以

$$\begin{aligned} e^{tA} &= (e^{2t}-2te^t)E+(3e^tt-2e^{2t}+2e^t)A+(e^{2t}-te^t-e^t)A^2 \\ &= \begin{bmatrix} e^t(t+1) & te^t & 0 \\ -te^t & e^t(1-t) & 0 \\ -3e^{2t}+e^t(t+3) & e^t(t+2)-2e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以初值问题的解

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}c \\ &= \begin{bmatrix} e^t(t+1) & te^t & 0 \\ -te^t & e^t(1-t) & 0 \\ -3e^{2t}+e^t(t+3) & e^t(t+2)-2e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t(t+1) \\ -te^t \\ -2e^{2t}+e^t(t+3) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

六、解: 令

$$x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1), t\in[-1,1],$$

则有

$$F(t)=f(x(t))=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t+1)}.$$

用 Legendre 多项式求 $F(t)$ 在 $[-1,1]$ 上的一次最佳平方逼近, 设其为

$$S_1(t)=a_0P_0(t)+a_1P_1(t)$$

则根据公式有

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t+1)}dt=\mathrm{e}-1$$
$$a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t+1)}\cdot tdt=9-3e$$

因此

$$S_1(t)=(\mathrm{e}-1)+(9-3e)t,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近

$$S_1^*(x)=S_1(2x-1)=(\mathrm{e}-1)+(9-3e)(2x-1)=4\mathrm{e}-10+(18-6\mathrm{e})x.$$

平方误差为

$$
\begin{aligned}
\delta^2 &= \|f(x) - S_1^*(x)\|_2^2 = \frac{1}{2}\|F(t) - S_1(t)\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{t+1}dt - 2a_0^2 - \frac{2}{3}a_1^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^2 - 1 - 2(\mathrm{e}-1)^2 - \frac{2}{3}(9-3\mathrm{e})^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(-7\mathrm{e}^2 + 40\mathrm{e} - 57\right) = 3.94 \times 10^{-3}.
\end{aligned}
$$

七、解：

$$T_{2^3} = \frac{T_{2^2}}{2} + \frac{1}{2}[f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{2}) + f(\frac{5}{2}) + f(\frac{7}{2})] \approx 3.13900,$$

$$S_{2^2} = \frac{4T_{2^3} - T_{2^2}}{4-1} \approx 3.14161,$$

$$C_{2^1} = \frac{4^2 S_{2^2} - S_{2^1}}{4^2-1} \approx 3.14161,$$

$$R_{2^0} = \frac{4^3 C_{2^1} - C_{2^0}}{4^3-1} \approx 3.14160.$$

八、解： 令 $z = y'$, 初值问题化为

$$
\begin{cases}
y' = z, \\
z' = (\sqrt{x} - 1)y, \quad (0 < x \le 1), \\
y(0) = 1, z(0) = 0.
\end{cases}
$$

解此问题的标准 Runge-Kutta 格式为

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \\
k_1 = z_n, \\
l_1 = (\sqrt{x_n} - 1)y_n, \\
k_2 = z_n + \dfrac{h}{2}l_1, \\
l_2 = (\sqrt{x_n + \dfrac{h}{2}} - 1)(y_n + \dfrac{h}{2}k_1), \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1. \\
k_3 = z_n + \dfrac{h}{2}l_2, \\
l_3 = (\sqrt{x_n + \dfrac{h}{2}} - 1)(y_n + \dfrac{h}{2}k_2), \\
k_4 = z_n + hl_3, \\
l_4 = (\sqrt{x_n + h} - 1)(y_n + hk_3), \\
y_0 = 1, z_0 = 0,
\end{cases}
$$

九、证明: (1) 要证 $x_0 \in \mathscr{N}(T)$, 只需证明 $Tx_0 = 0$.
由 $(x_n) \subset \mathscr{N}(T)$ 知 $Tx_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 又 T 是有界线性算子, 故 T 是连续的, 因此由相关性质知, 当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 时, 有

$$T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

故 $x_0 \in \mathscr{N}(T)$.

(2) 因为 A 为 n 阶对称正定矩阵, 所以存在 n 阶正交矩阵 Q, 使得

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)Q^T,$$

这里 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 A 的特征值,$\lambda_i > 0$.
令

$$D = Q\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}), \quad B = QDQ^T,$$

则显然 B 是对称正定矩阵, 且 $B^2 = (QDQ^T)(QDQ^T) = QD^2Q^T$

$$= Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)Q^T = A.$$