2019-2020-02 学期 线性代数及其应用期中试题参考答案

一、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1、B　　2、BCD　　3、D　　4、 ACD　　5、A

6、C　　7、ABC　　8、B

二、解答题（共 52 分）

1、（7 分）**解**　系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & 1\\ 2 & \lambda+1 & -2\\ -3 & -6 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & \lambda-3\\ 2 & \lambda+1 & 0\\ -3 & -6 & \lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & 0\\ 2 & \lambda+1 & 0\\ -3 & -6 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+3)$$

由题设齐次线性方程组有非零解当且仅当$|\boldsymbol{A}|=0$，故$\boldsymbol{\lambda}=-3$或3.

2、（16 分）**解** 对方程组的增广矩阵施以初等行变换，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0 & -4 & a\\ -1 & 0 & 1 & 5 & 3\\ 4 & 3 & 2 & -2 & b\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -6 & a+2\\ 0 & 1 & 2 & 6 & 2\\ 0 & -1 & -2 & -6 & b+4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -5 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+6\end{array}\right]$$

（1）当$a\neq-4$或$b\neq-6$时，$r(\tilde{\boldsymbol{A}})\neq r(\boldsymbol{A})$, 方程组无解

(2) 当$\boldsymbol{a}=-4$且$\boldsymbol{b}=-6$时，$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=2<4$,方程组有无穷多解.

同解方程组为　$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=-3+\boldsymbol{x}_3+5\boldsymbol{x}_4,\\ \boldsymbol{x}_2=2-2\boldsymbol{x}_3-6\boldsymbol{x}_4.\end{cases}$

方程组向量形式的通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\1\end{bmatrix}$,其中$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$为任意常数

$(\forall k_1,k_2\in\mathbb{P})$.

3、（14 分）**解**　$|\boldsymbol{A}|=-1$，　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$

方程两边左乘$\boldsymbol{A}$，右乘$\boldsymbol{A}^{-1}$，得到　$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}$，即$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}$　.

显然$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，且　$\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&2&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&2\\2&4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&-2\\-2&2\end{bmatrix},\text{故}\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}.$

4、（15 分）**解**　对 $\boldsymbol{A}$ 进行分块，有

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:ccc}1&2&0&0&0\\2&4&0&0&0\\ \hdashline 0&0&1&2&2\\0&0&2&1&-2\\0&0&2&-2&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix},\quad \text{其中}\ \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix},\text{则}$$

$$\boldsymbol{A}^{2m}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{2m}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^{2m}\end{bmatrix}.$$

注意到，$r(\boldsymbol{A}_1)=1$，则

$$\boldsymbol{A}_1^{2m}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_1)^{2m-1}\boldsymbol{A}_1=5^{2m-1}\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}5^{2m-1}&2\cdot5^{2m-1}\\2\cdot5^{2m-1}&4\cdot5^{2m-1}\end{bmatrix}.$$

计算 $\boldsymbol{A}_2^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}=9\boldsymbol{E}_3$，则

$$\boldsymbol{A}_2^{2m}=(\boldsymbol{A}_2^2)^m=(9\boldsymbol{E}_3)^m=9^m\boldsymbol{E}_3,$$

因此 $\boldsymbol{A}^{2m}=\begin{bmatrix}5^{2m-1}&2\cdot5^{2m-1}&0&0&0\\2\cdot5^{2m-1}&4\cdot5^{2m-1}&0&0&0\\0&0&9^m&0&0\\0&0&0&9^m&0\\0&0&0&0&9^m\end{bmatrix}.$

三、（8 分）**证明**　(1) 因为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=m$，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m}$，$\boldsymbol{Q}_{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m&\boldsymbol{O}_{m\times(n-m)}\end{bmatrix}.$$

从而 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m&\boldsymbol{O}_{m\times(n-m)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}&\boldsymbol{O}_{m\times(n-m)}\end{bmatrix}.$

令 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\\\boldsymbol{O}_{(n-m)\times m}\end{bmatrix}$，则

$$AD = AQ\begin{bmatrix} P \\ O_{(n-m)\times m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} & O_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ O_{(n-m)\times m} \end{bmatrix} = E_m.$$

(2) 因为存在 m 阶方阵 B，使 $A = BA$，根据(1)，右乘矩阵 D，得

$$E_m = AD = BAD = B(AD) = BE_m = B.$$

再根据 $CB = O$ 可得 $C = O$，所以 $|AC - B| = |-E_m| = (-1)^m$.