5.1 多目标规划的模型及其分类 — 概述

在前几章讲述的线性规划和非线性规划中，所研究的问题都是只含有一个目标函数，我们把这类问题称为单目标最优化问题，又称为数值最优化问题. 但是在很多的实际问题中，往往需要同时考虑多个目标(标准)的优化问题. 例如，设计一个新产品，人们总希望在给定的条件下，能选择同时具有质量好，产量高以及利润大的方案. 还有在确定一个橡胶配方时，往往要同时考察强力、硬度、变形以及伸长等多个目标. 这类问题都是在决策变量满足给定约束的条件下，同时研究多个目标都尽可能好的最优化问题，称之为**多目标最优化问题或多目标规划问题**. 研究多目标最优化问题的学科称为多目标最优化或多目标规划. 它是数学规划的一个重要分支，它们的早期来源是经济理论，如今在经济规划、计划管理、金融决策、工程设计、城市地区发展规划、卫生保健和军事科学等领域中都有着广泛的应用.

5.1 多目标规划的模型及其分类 — 概述

关于多目标规划问题的研究主要分为以下四个方面:

(I) 有关各种解的概念与性质. 迄今为止，关于具有一定影响力最优解的概念不下20多种，其中最常见的解有绝对最优解、有效解以及弱有效解等. 关于多目标最优化问题解的研究, 在理论方面主要包括解的存在性、解的连通性与稳定性以及解与解之间的关系等等;

(II) 多目标规划的解法. 关于多目标规划直接解法的研究相对较少一些，而间接解法则通常是借助于问题的实际背景，可以把多目标最优化问题转化为单目标最优化问题来求解;

(III) 目标规划的对偶问题. 关于多目标规划问题对偶问题的研究，目前已经存在很多各种各样的对偶形式，例如：Lagrange 对偶以及共轭对偶等;

(IV) 不可微多目标规划. 已经有多种关于导数的广义概念可以应用于这方面的研究，例如：广义梯度，Dini次微分等.

5.1 多目标规划的模型及其分类

一、一般多目标最优化问题的数学模型

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
\min \quad & f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
& \quad \cdots\cdots \\
\min \quad & f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
\text{s.t.} \quad & g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}, \\
& h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, q\},
\end{aligned}
\tag{5.1.1}
$$

其中$x_1, x_2, \ldots, x_n$称为决策变量; 由决策变量构成的n维向量$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$称为决策向量; 函数$g_i$和$h_j$称为约束函数; m个函数f_k $(k \in \{1, \ldots, m\})$称为目标函数.

5.1 多目标规划的模型及其分类

由m个目标函数构成的m维向量$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))^T$称为向量目标函数，并记多目标最优化问题(5.1.1)的可行域为

$$\mathscr{F} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, & \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}, \\ h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & \forall j \in \{1, 2, \ldots, q\}, \end{array} \right\}.$$

如果不明确指明约束函数的具体形式，那么一般多目标最优化问题的向量形式可以记为

$$\text{(VMP)} \qquad V - \min_{x \in \mathscr{F}} \; F(x). \tag{5.1.2}$$

有时称问题(5.1.2)为向量数学规划问题(简记为VMP). 符号V−min表示在可行域$\mathscr{F}$上对向量目标函数$F(x)$求极小.

5.1 多目标规划的模型及其分类

二、分层多目标最优化问题的数学模型

假设按照重要性把m $(m \geq 2)$个目标函数分成L $(L \geq 2)$个优先层次，不妨设

第1优先层次中的分量目标函数为: $f_1^1(x), \ldots, f_{l_1}^1(x)$;

第2优先层次中的分量目标函数为: $f_1^2(x), \ldots, f_{l_2}^2(x)$;

. . . .

第L优先层次中的分量目标函数为: $f_1^L(x), \ldots, f_{l_L}^L(x)$,

则上述的分量目标函数在约束条件下的分层多目标最优化问题可表示为:

$$L - \min_{x \in \mathscr{F}} [P_1(f_1^1(x), \ldots, f_{l_1}^1(x)), \ldots, P_L(f_1^L(x), \ldots, f_{l_L}^L(x))],$$

其中符号“$L - \min$”表示按照$P_1, \ldots, P_L$的顺序逐层地先后对分量目标函数进行极小化，又称为按字典序极小化; P_i $(i \in \{1, \ldots, L\})$仅仅表示优先层次的符号, 并用符号$P_s \geq P_{s+1}$ $(s \in \{1, \ldots, L-1\})$表示“第$s$优先层次”优先于“第$s+1$优先层次”.

5.1 多目标规划的模型及其分类

若令

$$F_1(x) := (f_1^1(x), \ldots, f_{l_1}^1(x))^T,$$
$$F_2(x) := (f_1^2(x), \ldots, f_{l_2}^2(x))^T,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$F_L(x) := (f_1^L(x), \ldots, f_{l_L}^L(x))^T,$$

则分层多目标最优化问题(或称字典分层规划)的数学模型可表示为:

$$L - \min_{x \in \mathscr{F}} [P_1 F_1(x), \ldots, P_L F_L(x)] \tag{5.1.3}$$

或者

$$L - \min_{x \in \mathscr{F}} [P_s F_s(x)]_{s=1}^{L}.$$

5.1 多目标规划的模型及其分类

若问题(5.1.3)中每一优先层次中有且仅有一个分量目标函数，则称问题(5.1.3)为完全分层多目标最优化问题. 对应的数学模型即可表示为:

$$L-\min_{x\in\mathscr{F}}[P_s F_s(x)]_{s=1}^{m}.$$

若问题(5.1.3)中只有两个优先层次，且$F_1(x)=f_1(x)$和$F_2(x)=(f_2(x),\ldots,f_m(x))^T$, 则称问题(5.1.3)为重点分层多目标最优化问题，其中分量目标函数$f_1(x)$称为重点目标函数. 对应的数学模型为:

$$L-\min_{x\in\mathscr{F}}[P_1 F_1(x), P_2 F_2(x)].$$

5.1 多目标规划的模型及其分类

三、目标规划问题的数学模型

目标规划问题是一类特殊的多目标规划问题，广泛应用于实际生活中. 它的特点是在一定的约束条件下，事先给出一组目标值，要求每个分量目标函数都尽可能地逼近给定的对应目标值，而不是直接对各个目标函数极小化.

设目标规划问题中的目标函数有m $(m \geq 2)$个，分别记为$f_1(x)$, $\ldots, f_m(x)$. 决策者事先给定的目标值分别为: $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_m$, 则各个目标函数都尽可能逼近给定的目标值可表示为如下形式

$$f_i(x) \longrightarrow \bar{f}_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

5.1 多目标规划的模型及其分类

若令$\bar{F} := (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_m)^T$，则目标规划问题的数学模型可表示为:

$$V - appr_{x \in \mathscr{F}} F(x) \longrightarrow \bar{F},$$

其中符号$V - appr$表示向量逼近的意思, 并称上述问题是以$\bar{F}$为向量目标值的目标规划问题.

注. 在欧氏空间$\mathbb{R}^m$中，目标规划问题可以等价转化为单目标最优化问题, 即可以用某种范数$\|\cdot\|$来表示向量目标函数$F(x)$逼近向量目标值$\bar{F}$, 其相应单目标最优化问题的数学模型可表示为

$$\min_{x \in \mathscr{F}} \|F(x) - \bar{F}\|.$$