第二章 线性规划

本章首先介绍线性规划问题及其基本概念和结论; 然后讨论线性规划的对偶理论与最优性条件，最后介绍求解线性规划的几种流行的数值方法.

2.1 模型及基本概念

本节首先介绍线性规划的

- 数学模型,

包括标准型、一般形式等；然后介绍几个

- 基本概念,

包括基解、基可行解等.

2.1 模型及基本概念 ---- 数学模型

在最优化问题(1.1.1)中, 如果所有涉及到的函数都是线性函数, 那么所对应的优化问题被称为线性规划.

线性规划的**标准型**为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
& \cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0,
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

其中所有的$b_i \geq 0$.

若不要求所有的$b_i \geq 0$, 则称(2.1.1)式为线性规划的**一般形式**.

2.1 模型及基本概念 ---- 数学模型

任意一个线性规划都可以转化为标准型, 分以下三种情况讨论:

1. 目标函数的转化. 极大问题转化为极小问题.

2. 约束条件的转化. 情况1: 若(2.1.1)中存在某个$b_i < 0$, 则在b_i所在方程的两端同乘以-1即可. 情况2: 若(2.1.1)中存在某个约束$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$, 则通过引进非负变量$x_{n+i}$（称为松弛变量）使其变为等式约束: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$. 情况3: 若存在某个约束$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i$, 则通过引进非负变量$x_{n+i}$（称为剩余变量）使其变为等式约束$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$.

3. 变量的非负性转化. 情况1: 若(2.1.1)中存在某个变量$x_j < 0$, 则可引进变量$x'_j := -x_j$, 将$x_j = -x'_j$代入目标函数和等式约束中即可. 情况2: 若(2.1.1)式中存在某个变量x_j除等式约束外没有其它约束要求, 称之为自由变量, 那么可引进两个非负变量$x'_j \ge 0$和$x''_j \ge 0$, 并令$x_j = x'_j - x''_j$, 然后将其代入目标函数和等式约束中即可.

2.1 模型及基本概念 ---- 数学模型

(2.1.1)可简记成矩阵与向量形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \ x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

其中, 向量$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$称为价格系数向量且每个$c_i$称为价格系数, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 称为系数矩阵, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m$称为右端向量.

记线性规划(2.1.2)的可行域为

$$\mathscr{F} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

则易证: 可行域$\mathscr{F}$为凸集且目标函数为$\mathscr{F}$上的凸函数, 因此线性规划是一类特殊的凸规划.

2.1 模型及基本概念 ---- 数学模型

如果记$A := (P_1 \;\; P_2 \;\; \dots \;\; P_n)$, 其中$P_j$表示矩阵$A$的第$j$列, 那么线性规划(2.1.2)也可表示为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^\top x \\
\text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = b, \quad x_j \geq 0, \ \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.
\end{aligned}
$$

基本假设: $rank(A) = m \leq n$且矩阵A的每个列向量均为非零向量. 这些假设是平凡的, 原因如下:

第一、如果A不是行满秩, 那么等式约束中会存在系数行向量线性相关的方程, 合并这些方程并不会改变可行域$\mathscr{F}$, 但可使剩下线性等式约束的系数矩阵行满秩.

第二、如果$m > n$, 在此情况下, 若约束不相容, 则可行域$\mathscr{F} = \emptyset$; 否则总可以通过合并线性相关的约束方程使得$m \leq n$.

第三、如果矩阵A的某个列向量P_j为零向量, 那么当$c_j > 0$时, 可解得$x_j = 0$; 当$c_j = 0$时, x_j可取任意非负值; 当$c_j < 0$时, 目标函数在可行域上无下界, 此时线性规划(2.1.2)无最优解.

2.1 模型及基本概念 ---- 基本概念

因为$m \le n$且$rank(A) = m$, 所以A中必存在m阶非奇异的子矩阵B. 为了叙述方便, 不妨设$A = (B\ N)$, 其中

$$B = (P_1\ P_2\ \ldots\ P_m) \text{ 且 } N = (P_{m+1}\ P_{m+2}\ \ldots\ P_n).$$

- 称方阵B为线性规划(2.1.2)的一个**基矩阵**, 简称为**基**; 称矩阵N为对应的**非基矩阵**.
- 称基矩阵B的列向量$P_1, P_2, \ldots, P_m$为**基向量**; 非基矩阵N的列向量$P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_n$称为**非基向量**.
- 与基向量所对应的变量$x_1, x_2, \ldots, x_m$称为**基变量**; 其余变量$x_{m+1}, \ldots, x_n$称为**非基变量**.
- 令非基变量为零, 则方程组$\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = b$变为$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j = b$, 此时该方程组存在唯一解, 记为$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)^\top$. 若令

$$x^0 := (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, 0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

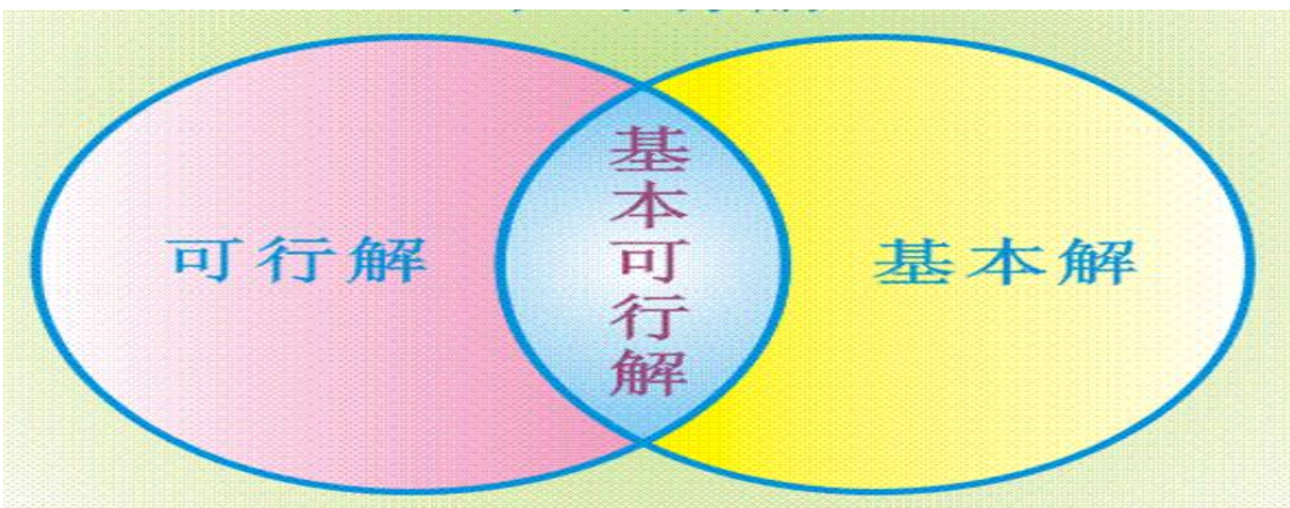
则称x^0为与基矩阵B对应的**基解**. 易知: 线性规划(2.1.2)的基解个数最多有$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$个.

2.1 模型及基本概念 ---- 基本概念

- 非负的基解被称为**基可行解**. 容易看到: 线性规划(2.1.2)的基可行解中正分量的个数最多有m个.

- 若基可行解中正分量的个数恰好为m, 则称这样的基可行解是非退化的基可行解; 否则称其为退化的基可行解.

- 若一个线性规划的所有基可行解都是非退化的, 则称该线性规划是非退化的.



2.1 模型及基本概念 ---- 作业

2.1 将下列线性规划问题化为标准型.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcr}
(1) & \min & 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & \\
 & \text{s.t.} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \leq & 12, \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \geq & 6, \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
(2) & \min & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & & \\
 & \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6, \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \geq & 12, \\
 & & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 2, \\
 & & x_1, & & & & x_3, & \geq & 0.
\end{array}
$$

2.2 设x^1，x^2是某线性规划问题的最优解，试证明：x^1和x^2连线线段上的点都是该线性规划问题的最优解.