

2012~2013 学年工程硕士考试试卷

《应用数学基础》(共 4 页)

(考试时间: 2013 年 11 月 23 日)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	成绩
得分										

一、判断题 (每小题 1 分, 共 10 分)

- 1、已知  $A \in C^{n \times n}$ , 则矩阵  $\lambda E - A$  是满秩的. [ ]
- 2、设  $A, B \in C^{n \times n}$ , 则  $A \sim B$  的充要条件是  $A$  和  $B$  具有相同的最小多项式. [ ]
- 3、Hermite 矩阵的所有特征值的模都等于 1. [ ]
- 4、若  $A \in R^{n \times n}$  正定, 则求解线性方程组  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代格式收敛. [ ]
- 5、设  $T: X \rightarrow Y$  是线性算子, 则  $T(0) = 0$ . [ ]
- 6、 $\forall A \in C^{n \times n}, x \in C^n$ , 若  $A$  可逆且  $x \neq 0$ , 则  $x^H A^H A x > 0$ . [ ]
- 7、设  $\{x_n\} \subset (X, \|\cdot\|)$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$ . [ ]
- 8、设  $X$  是内积空间, 当  $x, y \in X, \langle x, y \rangle = 0$  时, 必有  $x = 0$  或  $y = 0$ . [ ]
- 9、若  $A$  是酉矩阵, 则  $\rho(A) = 1$ . [ ]
- 10、半负定矩阵的所有特征值都是小于等于零, 所有偶数阶的顺序主子式都是大于等于零. [ ]

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

- 1、设  $p_3(x)$  是 3 次 Legendre 多项式, 则  $\int_{-1}^1 (x^2 - 1)p_3(x)dx =$ \_\_\_\_\_.
- 2、设  $f(x) = (x_1 + x_3 e^{x_2}, x_1^2 + x_2^2 \sin x_3)^T$ , 则  $f'(x) =$ \_\_\_\_\_.

3、设  $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$  是  $[a, b]$  上的以  $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$  为节点的 Lagrange 插值基函数, 则

$\sum_{k=0}^n l_k(x) =$ \_\_\_\_\_.

4、设  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ , 则  $\det e^A =$ \_\_\_\_\_.

5、设  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ , 则  $Cond_{\infty}(A) =$ \_\_\_\_\_.

三、(12 分) 设  $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ , 求  $A$  的 Jordan 标准形  $J$  和有理标准形  $C$ .

五、（12 分）根据下列插值条件

$x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255

用 3 次 Newton 插值多项式计算  $f(0.15)$  的近似值（结果保留至小数点后第 4 位）.

四、（10 分） 写出求解线性方程组  $Ax = b$  的 Gauss—Seidel 迭代格式，并判断所写格式的收敛性，其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

六、（16 分）设  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，求

- (1) 矩阵  $A$  的最小多项式  $\varphi(\lambda)$ ；
- (2) 方阵函数  $e^{At}$ 。

七、（10 分）用 *Romberg* 算法求积分  $\int_0^1 \frac{3}{1+x^2} dx$  的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后第 5 位）。

$k$	$T_{2^k}$	$S_{2^k}$	$C_{2^k}$	$R_{2^k}$
0				
1				
2				
3				
4	2.35572			

学院\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 年级\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_ 共 4 页 第 4 页

八、计算题（12 分） 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 \\ 0 & i & 2 \end{bmatrix}$ ，求  $\|A\|_1, \|A\|_F, \|A\|_\infty, \|A\|_2$ 。

九、证明题（8 分） 若正定矩阵  $A, B \in C^{n \times n}$  且  $AB = BA$ ，则  $AB$  是正定矩阵。