学院______________专业__________________ _____班 年级________学号__________________姓名______________ 共 4 页 第 1 页

2021～2022 学年第一学期工程硕士期末考试试卷

《 工程数学基础 》(共 4 页)

(考试时间：2021 年 12 月 31 日)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平时成绩	成绩	核分人签字
得分													

一、判断题（每小题 1 分，共 10 分）

1、由全体无理数组成的集合是可数集. [ ]

2、空间 $P_n[a,b]$ 上任意两种范数都是等价的. [ ]

3、若算子 $T:P[a,b]\to P[a,b]$ 定义为: $(Tf)(x):=f(x+1)$, $\forall f\in P[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$,

则算子 T 为线性算子 . [ ]

4、若 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为正定矩阵，则求解 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法收敛. [ ]

5、设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为正规矩阵，则对应于不同特征值的特征向量具有正交性. [ ]

6、若 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 的 n 阶行列式因子为一次因式乘积的形式，则矩阵 A 可对角化. [ ]

7、赋范线性空间上的线性算子 T 为有界算子. [ ]

8、对于试验方程 $y'=\lambda y$（$\lambda<0$ 为常数），则任意步长 $h>0$，则 Euler 方法是

绝对稳定的. [ ]

9、求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$，当 $f(x)$ 为 x^m 时，求积公式成为等式，则此求积

公式的代数精度为 m 次. [ ]

10、用列主元素 Guass 消去法求解 $Ax=b$ 时，只要矩阵 A 可逆，该方法就能求得问题的

近似解. [ ]

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、已知 $A(t)=\begin{bmatrix} e^t & t^2 \\ t\cos t & 1 \end{bmatrix}$，则 $\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t=$____________.

2、设 $\boldsymbol{\alpha}=(i,-1,i)^T\in\mathbf{C}^3$，$\boldsymbol{\beta}=(2-i,1-i,-1+2i)^T\in\mathbf{C}^3$，则 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=$__________.

3、设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1\cdot\|\boldsymbol{x}\|_1=$________.

4、设 $U\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为酉矩阵，则有界线性算子 $U:(\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_2)\to(\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_2)$ 的算子范数 $\|U\|_2=$______.

5、用单点 Guass-Legendre 求积公式计算积分 $\int_0^2\frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx$ 的近似值为 ______ .

三．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & -1 \end{bmatrix}$，求 A 的所有可能的 Jordan 标准形 J，并给出 A 可对角化的条件.

四、（10 分） 已知函数 $y=f(x)$ 的函数值表如下

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y	1.693147	2.008236	2.351591	2.714330	3.078628	3.418389

用三次 Newton 插值多项式求 $f(0.354)$ 的近似值；若 $\left|f^{(4)}(x)\right|\le 5.59092$，$\forall x\in[0.0,0.6]$ 请估计所得结果的误差大小.（数据保留至小数点后 6 位）

五、(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，试求：$A$ 的最小多项式，并计算 $e^{2At}+A^5$ 和 $\dfrac{d(e^{2At}+A^5)}{dt}$.

六、（8 分）写出用标准 Runge – Kutta 方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 3y + 2z - (2x^2+1)e^{2x}, \quad 0 < x \le 1 \\ z' = 4y + z - (x^2+2x+4)e^{2x}, \\ \quad y(0)=1, \quad z(0)=1. \end{cases}$$

的计算格式 .

七、（8 分）用 *Romberg* 算法求积分 $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后 6 位）.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				
4				

八、（8 分）对于线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 3a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，$x\in\mathbf{R}^3$，$a\in\mathbf{R}$.

试确定求解该方程组的 Gauss--Seidel 迭代法收敛的充分必要条件，并写出相应的 Gauss—Seidel 迭代公式。

九、(8 分) 设函数 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $-\pi \le x \le \pi$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $P_3[-\pi,\pi]$ 上的三次最佳平方逼近 $S_3^*(x)$

(2) 求误差平方 $\delta^2=\|f-S_3^*\|^2$ (结果保留到小数点后第 6 位).

十. (8 分) 证明题:

1. 设 $C\subset(X,\|\cdot\|)$，若 C 是有界集，试证: $\exists M\ge 0$ 使得 $\forall x\in C$，都有 $\|x\|\le M$.

2. 设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 可逆，$B\in\mathbf{C}^{n\times n}$. 若对某种方阵范数有 $\|B\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$，试证: $A+B$ 可逆.

学院____________专业_______________ ____班 年级_______学号_______________姓名__________

2020～2021 学年第一学期工程硕士期末考试试卷

《 工程数学基础 》（共 4 页）

（考试时间：2020 年 12 月 13 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平时成绩	成绩	核分人签字
得分													

一、判断题（每小题 1 分，共 10 分）

1、设 X 是基本集合，$A,B\subset X$，则 $A\times B=B\times A$. [ ]

2、空间 $P[a,b]$ 上任意两种范数都是等价的. [ ]

3、设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，M 是 X 的子空间，则 $spanM\subset M$. [ ]

4、设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的任意一种方阵范数，$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 可逆，则 $\|A^{-1}\|\|A\|=1$. [ ]

5、设 $A,B\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若 A 和 B 具有相同的特征多项式，则 $A\sim B$. [ ]

6、设 $\{x_n\}\subset(X,\|\cdot\|)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$. [ ]

7、设 $T:X\to Y$ 是线性算子，则 $T(0)=0$. [ ]

8、用 Euler 方法求解初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y),a<x\le b\\ y(a)=y_0\end{cases}$，只要步长 $h>0$，则 Euler 方法是绝对稳定的. [ ]

9、若求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\sum\limits_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$ 为 Gauss 型求积公式，则 $\sum\limits_{k=0}^{n}A_k=2$. [ ]

10、设 $l_0(x),\cdots,l_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上以 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 为节点的 $Lagrange$ 插值基函数，则 $\sum\limits_{k=0}^{n}l_k(x)x_k^m=x^m$， $(m\le n)$. [ ]

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、已知 $A(t)=\begin{bmatrix}e^t & 3t^2\\ te^t & 1\end{bmatrix}$，则 $\int_0^1 A(t)dt=$________________.

2、设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，则 X 可成为内积空间且 $\|\cdot\|$ 是由内积导出的范数的必要条件是：______________________________.

3、设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 A 的条件数 $cond_1A=$_________.

4、设有界线性算子 $T:l^2\to l^2$ 的定义为：$\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$，有 $Tx=(x_6,x_7,\cdots)$，则 $\|T\|=$_______.

5、设 $p_3(x)$ 是 3 次 Legendre 多项式，则 $\int_{-1}^{1}(2x^2+10x-11)p_3(x)dx=$______ .

三．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\1&-1&-1\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C .

学院____________专业________________ ____班 年级______学号________________姓名____________

四、（10 分） 已知函数 $y=f(x)$ 的函数值表如下

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
y	1.00000	1.22140	1.49182	1.82212	2.22554

（1） 用三次 Newton 插值多项式求 $f(0.65)$ 的近似值.

（2） 若 $\left|f^{(4)}(x)\right|\le 1 \quad \forall x\in[0.0,0.8]$，请估计所得结果的误差.（数据保留至小数点后 5 位）

五、（10 分） 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，试求：$A$ 的最小多项式，并计算 e^{At} 和 $A^{10}-2A^4$.

六、（8 分）写出用标准 Runge – Kutta 方法求解初值问题

$$\begin{cases} y''=2y'+y^2\cos x,\ 0<x\le 1 \\ y(0)=1,\quad y'(0)=3 \end{cases}$$

的计算格式．

七、（8 分）用 *Romberg* 算法求积分 $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后 6 位）．

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				
4				

八、（8 分）写出求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Gauss--Seidel 迭代格式，并判断其迭代格式的敛散性，其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\qquad b=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

九、(8 分) 设函数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{2}x$

(1) 求 $f(x)$ 在 $P_3[-1,1]$ 上的三次最佳平方逼近 $S_3^*(x)$;

(2) 求误差平方 $\delta^2=\|f-S_3^*\|^2$ (结果保留到小数点后 4 位).

十. (8 分) 证明题：

1. 若 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是正规矩阵，试证: $\rho(A)=\|A\|_2$.

2. 设算子 $T:(X,\|\cdot\|)\to(Y,\|\cdot\|)$ 是一个连续线性算子，试证: 算子 T 的有界性.

2019～2020 学年第一学期工程硕士期末考试试卷

《 工程数学基础 》(共 4 页)

(考试时间：2020 年 1 月 3 日)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平时成绩	成绩	核分人签字
得分													

一、判断题（每小题 1 分，共 10 分）

1、有限个或可数个可数集的并集是可数集. ( )

2、$\forall A\in \mathbf{C}^{n\times n}, x\in \mathbf{C}^n$，若 $x\neq 0$，则 $x^H A^H Ax>0$. ( )

3、设 $T:(X,\|\cdot\|)\to(Y,\|\cdot\|)$ 是线性算子，则算子 T 是一个有界算子. ( )

4、设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的任意一种算子范数，$E\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是单位矩阵，则 $\|E\|=1$. ( )

5、设 $A,B\in \mathbf{C}^{n\times n}$，若 $A\sim B$，则 $\rho(A)=\rho(B)$. ( )

6、改变 $Ax=b$ 中方程的排列顺序，不会改变迭代格式的收敛性 . ( )

7、设 $\|\cdot\|_\alpha,\|\cdot\|_\beta$ 为赋范空间 X 上的两种等价范数，$\{x_n\}$ 为 X 中的序列，

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\to x\|_\alpha=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_\beta=\|x\|_\beta$. ( )

8、若求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\sum\limits_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 为 Gauss 型求积公式，则 $\sum\limits_{k=0}^{n}|A_k|=2$. ( )

9、若矩阵 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $A^H=A$，则 e^A 是酉矩阵. ( )

10、影响插值型求积公式代数精度有求积节点和求积系数两个因素. ( )

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、设 $f(x)=(x_1+x_3e^{x_2}, x_1^2+x_2^2\sin x_3)^T$，则 $f'(x)=$________.

2、设 $M_1\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是 Jacobi 迭代矩阵，则 $\det\ e^{M_1}=$________.

3、设 $A=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&10&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 A 的条件数 $cond_\infty A=$________.

4、设 $A\in\mathbf{C}^{3\times3}$ 为酉矩阵，且 $\det(\lambda E-A)=(\lambda-1)^3$，则 $\lambda E-A$ 的不变因子 $d_2(\lambda)=$________.

5、对于 *Simpson* 求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx S$，若 $f(x)$ 为 3 次多项式函数，则 $\int_a^b f(x)dx-S=$________ .

三 .(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&1&-2\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C .

四、(10 分) 已知函数 $y=f(x)$ 的数值表如下

x	7.7	7.8	7.9	8.0	8.1
y	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

(1) 用三次 Newton 插值多项式求 $f(7.93)$ 的近似值.

(2) 若 $\left|f^{(4)}(x)\right|\le 12,\quad \forall x\in[7.7,\ 8.1]$，请估计所得结果的误差.

(计算结果保留至小数点后第 5 位)

六、(8 分) 用 *Romberg* 算法求积分 $\int_0^1 2\sqrt{1+x^2}\,dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后第 5 位）.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				
4				

五、(10 分) 求解初值问题

$$\begin{cases} x_1'(t)=3x_1(t)+3x_2(t)+x_3(t), \\ x_2'(t)=0, \\ x_3'(t)=-x_1(t)-x_2(t)+x_3(t), \\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=2,\ x_3(0)=3. \end{cases}$$

七、（8 分）写出求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Gauss—Seidel 迭代格式，并判断所写格式的收敛性，其中

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 10\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}.$$

八、（8 分）写出用标准 Runge – Kutta 法求解初值问题

$$\begin{cases} y''=-4y'+y\cos x,\\ y(0)=1,\quad y'(0)=3\end{cases}$$

的计算格式．

九、(8 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x\le 0\\ x^3+x, & 0<x\le 1\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 在 $P_2[-1,1]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$

(2) 求 $\delta^2=\|f-S_2^*\|$ (结果保留到小数点后第 5 位)

十. (8 分) 证明题:

1. 若 $A \in C^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，试证矩阵 A 对应不同特征值的特征向量都是正交的．

2. 设 $X = C[0,1]$，$\forall f \in X$ 定义 $\|f\|_\infty = \max\limits_{0\le t\le 1} |f(t)|$ 与 $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

   算子 $T:(X,\|\cdot\|_\infty) \to (X,\|\cdot\|_2)$ 定义为:

   $$(Tf)(x) = x\cdot f(x) \quad (\forall f \in X,\ x\in[0,1]),$$

   试证：T 是有界线性算子.

天津大学 2018～2019 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础 课程编号：S131A305 学院名称：＿＿＿＿ ＿＿＿＿班 学号：＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平时成绩	成绩
得分												

一、判断 （10 分）

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_F^2+\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|_F^2=2\left(\|\boldsymbol{A}\|_F^2+\|\boldsymbol{B}\|_F^2\right)$. （ ）

2. 设有算子 $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$，则 $\boldsymbol{T}(0)=0$. （ ）

3. $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,定义 $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^n$ 为 $\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{Ax}\left(\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^n\right)$ 则 $\boldsymbol{T}$ 是连续算子. （ ）

4. Legendre 多项式 $\{p_0(x),p_1(x),\ldots,p_n(x)\cdots\}$ 线性无关. （ ）

5. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可酉对角化. （ ）

6. 若求积公式为 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$，则此求积公式必为 Gauss-Legendre 型. （ ）

7. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，则 $\boldsymbol{cond}_2\boldsymbol{A}=\rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{A}^{-1})$. （ ）

8. 改进的 Euler 格式的局部截断误差 $\varepsilon_{n+1}=O(h^2)$. （ ）

9. Newton-Cotes 公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx(b-a)\sum_{k=0}^{10}C_k^{(10)}f(x_k)$ 的代数精度至少为 10 次. （ ）

10. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式无重零点. （ ）

二、填空 （10 分）

1. 已知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix}e^t & 2\\ 2t^2 & te^{2t}\end{bmatrix}$，则 $\int_0^1\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}=$＿＿＿＿＿＿.

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 条件数 $\boldsymbol{cond}_1\boldsymbol{A}=$＿＿＿＿.

3. 已知 $\sin\boldsymbol{A}t=\begin{bmatrix}\sin t+4t\cos t & -4t\cos t\\ 4t\cos t & \sin t-4t\cos t\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$＿＿＿＿＿.

4. 设求积公式为 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx f(-\sqrt{3}/3)+f(\sqrt{3}/3)$，则其余项 $R(f)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

5. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{3\times3}$，$\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{A}$，$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$ 则 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不变因子 $d_1(\lambda)=$＿＿＿＿＿.

三 .(8 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$，有理标准形 $\boldsymbol{C}$.

考试时间:2019 年 1 月 6 日

天津大学 2018～2019 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础 课程编号：S131A305 学院名称：__________ __________班 学号：__________ 姓名：__________

四. (10 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求 e^{At}

五. (8 分) 已知线性方程组为 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 6\\ 4\end{bmatrix}$

写出Seidel迭代、并判断收敛性

六.（8 分）由下列插值条件

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
$f(x)$	1.09861	1.13140	1.16315	1.19392	1.22378

用三次 Newton 插值多项式计算 $f(3.27)$ 的近似值(结果保留至小数点后第 5 位)

天津大学 2018 ~ 2019 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础 课程编号：S131A305 学院名称：__________ ________班 学号：________ 姓名：________

七. （10 分）用 *Romberg* 算法求积分 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（计算结果保留至小数点后第 5 位）

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				
1				
2				
3				
4				

八. (10 分) 用 Legendre 多项式求函数 $f(x)=\sin x$ 在 $P_2[0,\pi]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$，并求 $\delta^2=\|f-S_2^*\|_2^2$ (结果保留到小数点后第 5 位)

天津大学 2018~2019 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础 课程编号：S131A305 学院名称：________ ________班 学号：________ 姓名：________

九.(8 分) 写出用标准 Runge-Kutta 方法求解下列初值问题的计算格式：

$$\begin{cases} y'' = 2(y')^2 + 3xy + 4x \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

十. (10 分) 证明

1. 设 $\boldsymbol{l_k}(\boldsymbol{x})$，$(k = 0,1,\cdots n)$ 是以 Gauss 点 $\boldsymbol{x_k}$ $(k = 0,1,\cdots n)$ 为节点的 n 次 Lagrange 插值基函数，则 $\int_a^b l_k(x)dx > 0$.

2. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则 $\|AA^H\|_2 = \|A^H\|_2^2 = \|A\|_2^2$

考试时间:2019 年 1 月 6 日