2023～2024 学年第二学期期中考试试卷

《微积分II》(共 3 页)

(考试时间：2024 年 5 月 10 日)

题号	一	二	三	四	五	成绩	核分人签字
得分							

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 下列二重极限存在的是（　　　　）.

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{y}$　(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

2. 以下说法正确的是（　　　　）.

(A)若 $f(x_0,y)$ 在 y_0 连续，$f(x,y_0)$ 在 x_0 连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

(B)若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

(C)若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 沿任意方向的方向导数都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微

(D)若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则它的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处不一定连续

3. 设 $I_1=\iint\limits_D\dfrac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_2=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_3=\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{1}{4}\le x^2+y^2\le 1\right\}$，则 I_1,I_2,I_3 的大小顺序为（　　　　）.

(A) $I_1<I_2<I_3$　(B) $I_1<I_3<I_2$　(C) $I_2<I_3<I_1$　(D) $I_3<I_2<I_1$

4. 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$（　　　　）.

(A) $\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$　(B) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$　(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$

5. 设函数 $u(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}u=\left(2x+\mathrm{e}^x\sin y\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x+1\right)\cos y\,\mathrm{d}y$，则 $u(x,y)=$（　　　　）.

(A) $x^2+\left(\mathrm{e}^x+1\right)\sin y+C$　(B) $x^2+\left(2\mathrm{e}^x+1\right)\sin y+C$

(C) $x^2-\left(\mathrm{e}^x+1\right)\sin y+C$　(D) $x^2-\left(2\mathrm{e}^x+1\right)\sin y+C$

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 曲面 $3x^2+y^2-z^2=3$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切平面方程为__________________.

2. 函数 $f(x,y,z)=x^2+\mathrm{e}^{xy}+z^2$ 在 $M(1,0,2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}\,f\big|_M=$______________.

3. 设 L 是曲线 $y=x^3$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧，则曲线积分

$\int_L 2xy\,\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$ 的值为__________.

4. 设 $L:y=\sin x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，则曲线积分 $\int_L y\cos x\,\mathrm{d}s$ 的值为____________.

5. 设无界区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\ge 1\right\}$，反常二重积分 $\iint\limits_D\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值为________.

三、计算题（共 40 分，每小题 8 分）

1. 设方程 $x^2(y+z)-4\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0$ 确定了函数 $z=f(x,y)$，求点 $P(-2,2,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z$.

2. 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 所围成的闭区域.

3. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$.

4. 计算曲线积分 $I=\int_L\dfrac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $L:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\ (0\le t\le 1).\\ z=2t\end{cases}$

5. 已知 L 是第一象限中从点 $O(0,0)$ 沿上半圆 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 到点 $A(2,0)$，再沿圆弧 $y=\sqrt{4-x^2}$ 到点 $B(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\,\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\,\mathrm{d}y$.

四、解答题（共 24 分，每小题 8 分）

1. 计算曲线积分 $I=\int_L \frac{(2x-y)\mathrm{d}x+(x+2y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 是沿曲线 $y=-\cos\frac{\pi x}{2}$ 从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的一段弧.

2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是旋转抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 在 xOy 平面上方部分的上侧.

3. 计算曲面积分 $\iint\limits_S\left(2y^2+z\right)\mathrm{d}S$，其中 S 是平面 $x+y+z=2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截得的有限部分.

五、证明题（本题 6 分）

设分片光滑曲面 Σ 是空间有界闭区域 Ω 的边界，函数 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续的二阶偏导数，$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是函数 v 沿 Σ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数. 证明:

$$\iiint\limits_\Omega u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V=\oiint\limits_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}V.$$