2019～2020 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 2A》(A 卷)（共 3 页）

（考试时间：2020 年 1 月 6 日, 14:00-16:00）

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
得分								

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 设函数 $y(x)$ 由方程 $y = xe^{y} + ex + 1$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$______________.

2. 曲线 $y = x^2 + x$ 在点 $(-1,0)$ 处的曲率是________________.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\left(1+\dfrac{k}{n}\right) =$______________.（用数字作答）

4. 微分方程 $xy\,dx + (x^2+1)dy = 0$ 满足 $y(0)=1$ 的特解 $y =$__________________.

5. 设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，且 $|\boldsymbol{a}|=1, |\boldsymbol{b}|=2$，向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，则以 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 为邻边的平行四边形的面积等于__________________.

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列结论正确的是 (　　　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 发散　(B) 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 必无界

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必无界　(D) 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小，则 $\{y_n\}$ 也是无穷小

2. 下列反常积分收敛的是 (　　　　).

(A) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$　(B) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　(C) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　(D) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

3. 下列微分方程 $y''-4y'+8y = e^{2x}\cos 2x$ 的特解可设为 $y^* =$ (　　　　).

(A) $Axe^{2x}\cos 2x$　(B) $e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

(C) $xe^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$　(D) $x^2e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

4. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，$K=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$，则 (　　　　).

(A) $M>N>K$　(B) $M>K>N$　(C) $K>M>N$　(D) $K>N>M$

5. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x (2t-x)f(t)dt$，则 (　　　　).

(A) $F(0)$ 是极大值

(B) $F(0)$ 不是极值，但点 $(0,F(0))$ 是曲线 $y=F(x)$ 的拐点

(C) $F(0)$ 是极小值

(D) $F(0)$ 不是极值，但点 $(0,F(0))$ 不是曲线 $y=F(x)$ 的拐点

三、计算题（本题 9 分）

设曲线 C: $y=y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=3t+t^3, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$ 及曲线在 $t=1$ 处的切线方程.

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

2. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

3. 求过点 $(-1,2,3)$, 垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$ 且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

4. 设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x\ (1\le x\le e)$，求由曲线 L, 直线 $x=1$, $x=e$ 和 x 轴所围平面图形的面积.

5. 求线性微分方程 $y''-10y'+9y=e^{2x}$ 的通解.

五、解答题（共 20 分，每小题 10 分）

1. 已知 $y\left(x\right)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

(1) 求 $y\left(x\right)$； (2) 求由曲线 $y=y\left(x\right)$，直线 $x=1,x=2$ 和 x 轴所围的曲边梯形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 设函数 $f(x)=\int_1^x \dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调区间； (2) 计算定积分 $I=\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x$.

六、证明题 (本题 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，存在 $x_0\in\left(a,b\right)$，满足 $f\left(x_0\right)>f\left(a\right)$，及 $\left(b-x_0\right)f(x_0)>\int_{x_0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$. 证明：至少存在一点 $\xi\in\left(a,b\right)$，使得 $f''\left(\xi\right)<0$.