2021～2022 学年第一学期期末考试试卷参考答案

《高等数学 2A》（A 卷）（2022 年 1 月 10 日）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 2　　2. $-4e^{-2x}$　　3. -4　　4. $\dfrac{2}{27}$　　5. $y=x$

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. D　　2. A　　3. C　　4. B　　5. D

三、计算题（本题 5 分）

解：平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,-3)$，

故所求平面方程为 $x-1-2(y-2)-3(z-1)=0$，即 $x-2y-3z+6=0$.

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{2t^2+1}{e^{t^2}(1+2t^2)}=e^{-t^2}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2t\,e^{-t^2}}{e^{t^2}(1+2t^2)}=\frac{-2t}{1+2t^2}e^{-2t^2}.$$

2. 解：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}}{2x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}=-\frac{1}{6}.$$

法二：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln\left[1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{-\dfrac{1}{6}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{6}.$$

法三：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\ln\left[1+\dfrac{\sin x}{x}-1\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\dfrac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

3. 解：$\displaystyle\int_{\frac12}^{2}f(x-1)\,dx=\int_{-\frac12}^{1}f(u)\,du=\int_{-\frac12}^{1}f(x)\,dx$

$$=\int_{-\frac12}^{\frac12}x\sin(x^2)\,dx+\int_{\frac12}^{1}(-1)\,dx=-\frac{1}{2}.$$

法二：$\displaystyle\int_{\frac12}^{2}f(x-1)\,dx=\int_{\frac12}^{\frac32}(x-1)\sin(x-1)^2\,dx+\int_{\frac32}^{2}(-1)\,dx$

$$=-\frac{1}{2}\cos(x-1)^2\Big|_{\frac12}^{\frac32}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

4. 解：令 $\sqrt{1+2x}=t$，则 $x=\dfrac{t^2-1}{2}$，$dx=t\,dt$，

$$\int\frac{x}{1+\sqrt{1+2x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2-1)\cdot t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int t(t-1)\,dt=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+C$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{1+2x}\right)^3-\frac{1}{4}(1+2x)+C=\frac{1}{6}\left(\sqrt{1+2x}\right)^3-\frac{x}{2}+C'.$$

5. 解：两边同时对 x 求导，得 $f'(x)=3f(x)+2e^{2x}$，

即 $f'(x)-3f(x)=2e^{2x}$，这是一阶线性微分方程，

$$\therefore f(x)=e^{\int 3dx}\left(\int 2e^{2x}e^{\int -3dx}dx+C\right)=e^{3x}\left(\int 2e^{-x}dx+C\right)=C\,e^{3x}-2e^{2x}.$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，$\Rightarrow C=3$，故 $f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$.

五、解答题（共 24 分，每小题 8 分）

1. 解：特征方程 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1,\ r_2=2$，

所以对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

令非齐次方程的特解为 $y^*=Ax\mathrm{e}^{2x}$，则 $\left(y^*\right)'=(A+2Ax)\mathrm{e}^{2x}$，

$\left(y^*\right)''=(4A+4Ax)\mathrm{e}^{2x}$，代入原方程中，得 $A=1$，故 $y^*=x\mathrm{e}^{2x}$.

于是，所求微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}$.

2. 解：$F'(a)=(2+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2})\mathrm{e}^a$，

由 $F'(a)=0$，即 $\frac{2a^2+a-1}{a^2}=0$，得驻点 $a_1=-1$(舍去)，$a_2=\frac{1}{2}$.

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$F'(a)<0$，$F(a)$严格单调减少；当 $\frac{1}{2}<a\le 2$ 时，$F'(a)>0$，

$F(a)$严格单调增加，于是 $F(\frac{1}{2})$ 为函数 $F(a)$ 的最小值.

$$F(a)=\int_1^a 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_1^a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\left(2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x\Big|_1^a=\left(2+\frac{1}{a}\right)\mathrm{e}^a-3\mathrm{e}.$$

$$\Rightarrow\ F(\frac{1}{2})=4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-3\mathrm{e},\quad F(2)=\frac{5}{2}\mathrm{e}^2-3\mathrm{e},\ \lim_{a\to0^+}F(a)=\lim_{a\to0^+}\left(2+\frac{1}{a}\right)\mathrm{e}^a-3\mathrm{e}=+\infty,$$

所以 $F(a)$ 在 $(0,2]$ 上的最小值为 $F(\frac{1}{2})=4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-3\mathrm{e}$，不存在最大值.

3. 解：(1) $S=\int_0^4\left[4-(x-2)^2\right]\mathrm{d}x=\int_0^4\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4=\frac{32}{3}$;

法二：$S=\int_0^4\left[\left(2+\sqrt{y}\right)-\left(2-\sqrt{y}\right)\right]\mathrm{d}y=\int_0^4 2\sqrt{y}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{32}{3}$;

(2) $V_y=\pi\int_0^4\left[\left(2+\sqrt{y}\right)^2-\left(2-\sqrt{y}\right)^2\right]\mathrm{d}y=\pi\int_0^4 8\sqrt{y}\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{128}{3}\pi$.

法二：$V_y=2\pi\int_0^4 x\left[4-(x-2)^2\right]\mathrm{d}x=2\pi\int_0^4(4x^2-x^3)\,\mathrm{d}x=\frac{128}{3}\pi$.

六、证明题（本题 6 分）

证 (1) $\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)\,\mathrm{d}f'(x)$

$=\frac{1}{2}x(x-1)f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-\frac{1}{2})\,\mathrm{d}f(x)=-\int_0^1(x-\frac{1}{2})\,\mathrm{d}f(x)$

$=-(x-\frac{1}{2})f(x)\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$;

法二：$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})=(x-\frac{1}{2})f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-\frac{1}{2})f'(x)\,\mathrm{d}x$

$=-\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-x)=-(\frac{1}{2}x^2-x)f'(x)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 x(x-1)f''(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x\cdot\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|=\frac{1}{12}\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|$.

法二：由拉格朗日中值公式，$f'(x)=f'(\frac{1}{2})+f''(\xi)\ (x-\frac{1}{2})$,

$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})=(x-\frac{1}{2})f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-\frac{1}{2})f'(x)\,\mathrm{d}x$

$=-\int_0^1(x-\frac{1}{2})\left[f'(\frac{1}{2})+f''(\xi)\ (x-\frac{1}{2})\right]\mathrm{d}x=-\int_0^1 f''(\xi)(x-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}x$,

于是，$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1 f''(\xi)(x-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}x\right|\le\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}x\cdot\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|=\frac{1}{12}\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|$.

法三：$\forall x\in(0,1)$，由一阶 Taylor 公式，$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$,

两边在$[0,1]$上积分，得 $0=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)x^2\,\mathrm{d}x$.

$\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$,

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_0^1 f''(\xi)x^2\,\mathrm{d}x$.

于是，$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{4}\left|\int_0^1 f''(\xi)x^2\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{4}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\cdot\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|=\frac{1}{12}\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|$.