2023～2024 学年第一学期第一次月考试卷

《微积分Ⅰ》（共 3 页，附 2 页演算纸）

考试时间：2023 年 10 月 13 日（1 小时）

题号	一	二	三	成绩	核分人签字
得分					

一、求极限（共 40 分，每小题 10 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left((1+x^2)^{\pi}-1\right)\tan(x^2)}{(\mathrm{e}^{x\sin x}-1)(1-\cos x)}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}$，其中$[\ \ ]$表示取整函数.

二、解答题（共 30 分，每小题 10 分）

1. 当 $x\to+\infty$ 时，无穷小量 $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ 与 $\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3}$ 哪一个是高阶的？给出判断依据.

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 是否存在？若存在，求极限值. 若不存在，给出理由.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\le\dfrac{1}{\pi}, \\ \tan\dfrac{1}{2x}, & x>\dfrac{1}{\pi}. \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的所有间断点，并判断间断点的具体类型.

三、证明题（共 30 分，每小题 10 分）

1. 设 $\{a_n\}$ 为非负数列，且对任意 $n \ge 1$ 满足 $a_{n+1} \le a_n + \frac{1}{n^2}$. 令 $b_n = a_{n+1} + \frac{1}{n}$.

(1) 利用单调有界准则证明数列 $\{b_n\}$ 收敛； (2) 利用(1)的结论，给出 $\{a_n\}$ 的收敛性.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 证明方程 $f^2(x) - \frac{1}{x^2} + 1 = 0$ 在 $(0,1]$ 上至少有一个实根.

3. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $|a_{n+1} - a_n| < r^n \ (n = 1,2,3,\cdots)$, 其中 $r \in (0,1)$.

利用柯西收敛准则证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

定义(柯西数列) 设数列 $\{a_n\}$. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathrm{N}_+$, 当 $m, n > N$ 时，恒有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 成立，则称 $\{a_n\}$ 为柯西数列.

另一种定义形式: 设数列 $\{a_n\}$. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathrm{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 对任意 $p \in \mathrm{N}_+$, 恒有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ 成立，则称 $\{a_n\}$ 为柯西数列.

定理(柯西收敛准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 为柯西数列.