2018—2019 学年第二学期期末考试试卷

（考试时间：2019 年 5 月 24 日）

一、填空题（共 14 分，每空 2 分）

1. 设 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，若随机事件 A 与 B 相互独立，则 $P(A\mid A\cup B)=$______，若随机事件 A 与 B 互不相容，则 $P(B\mid A\cup B)=$______.

2. 设随机变量 $X\sim P(2)$，$Y\sim N(1,16)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $D(XY)=$______.

3. 设随机变量 $X\sim N(1,4)$，$Y\sim N(5,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $P\{5X-Y\leqslant 0\}=$______.

4. 已知随机变量 $X\sim U(1,7)$，随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且与 X 同分布，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-4n}{\sqrt{3n}}\leqslant 1.65\right\}=$______.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的简单随机样本，对于显著性水平 α，假设 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$ 的检验统计量为______，拒绝域为______.

二、选择题（共 12 分，每小题 2 分）

1. 设随机变量 $X\sim f(x;\theta)$，$(X_1,X_2\cdots,X_5)$ 是来自总体 X 的简单随机样本，记 $E(X)\triangleq\mu$，则（　　）不是参数 μ 的无偏估计量.

A. $\dfrac{1}{5}(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$　　B. $\dfrac{1}{5}(X_1+X_2-X_3+3X_4+X_5)$

C. $\dfrac{1}{10}(X_1+2X_2+3X_3+7X_4-3X_5)$　　D. $\dfrac{1}{5}(X_1-X_2+X_3-X_4+X_5)$

2. 设总体 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，参数 λ 未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体的简单随机样本，则下列选项中不是统计量的是（　　）.

A. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$　　B. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-5)^2$　　C. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\lambda)^6$　　D. $\sum\limits_{i=1}^{n}(7X_i+8)$

3. 设 X 与 Y 不相关，$E(X)=2,E(Y)=1,D(X)=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$（　　）.

A. -3　　B. 3　　C. -5　　D. 5

4. 设

X	-1	0	1
P_X	0.2	0.5	0.3

，随机变量 X 与 Y 同分布，且 $P\{XY=0\}=1$，则 $P\{X=Y\}=$（　　）.

A. 0.1　　B. 0　　C. 0.38　　D. 0.5

5. 设随机变量 $X\sim\mathrm{Exp}(5)$，则 $P\{X\geqslant 3\mid X\geqslant 1\}=$（　　）.

A. e^{-10}　　B. 1　　C. $1-\mathrm{e}^{-15}$　　D. e^{-15}

6. 设 $X\sim N(-8,\sigma^2)$，$P\{X>0\}=0.3$，则 $P\{X>-16\}=$（　　）.

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.5　　D. 0.7

三、计算题(12分)

某同学不慎将校园卡丢失. 假定他将校园卡丢在宿舍、食堂及其他地方的概率分别为0.2,0.7,0.1,而丢在宿舍、食堂及其他地方将被找到的概率分别为1,0.8,0.5.

(1)求找到校园卡的概率;

(2)已知校园卡被找到,问校园卡被丢在食堂的概率是多少?

四、计算题(12分)

设随机变量

X	-1	1
P_X	0.6	0.4

,随机变量 $Y\sim \mathrm{Exp}(2)$,且 X 与 Y 相互独立.

求:(1)(X,Y)的联合分布函数;

(2)$P\{Y\le |X|\}$.

五、计算题(24分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下,Y 的条件概率密度函数为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1)求(X,Y)的联合概率密度函数 $f(x,y)$.

(2)求 Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$.

(3)求给定 $Y=y(0<y<1)$的条件下,X 的条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

(4)判断随机变量 X 与 Y 是否相关并说明理由.

(5)求 $P\left\{Y\le \dfrac{X}{2}\right\}$.

六、计算题(10分)

现有两个年级学生,假定他们的"高等数学"月考成绩均服从正态分布,即 $X\sim N(\mu_1,100)$, $Y\sim N(\mu_2,150)$,从这两个总体中抽取容量分别为25和30的样本,计算得样本均值分别为 $\bar{X}=86,\bar{Y}=90$,对于给定的置信水平0.95,求 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧置信区间.

附:$z_{0.05}=1.65$, $z_{0.025}=1.96$;

$t_{53}(0.025)=2.006$, $t_{55}(0.025)=2.004$, $t_{53}(0.05)=1.674$, $t_{55}(0.05)=1.673$.

七、计算题(16分)

已知随机变量 $X\sim U(\theta,1)$,其中参数 $\theta(<1)$ 未知,从总体 X 中抽取简单随机样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$.

(2)估计量 $\hat{\theta}_1$ 是否为 θ 的无偏估计?请说明理由.

(3)求参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$.

2018—2019 学年第二学期期末考试试卷答案

一、填空题（共 14 分，每空 2 分）

1. $\frac{5}{7}$ $\frac{4}{9}$ 2. 98 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\Phi(1.65)=0.95$ 5. $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,|T|\geqslant t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$

二、选择题（共 12 分，每小题 2 分）

1. D 2. C 3. D 4. B 5. A 6. D

三、计算题（12 分）

解：设 A={找到校园卡}，

B_1={校园卡丢在宿舍}，

B_2={校园卡丢在食堂}，

B_3={校园卡丢在其他地方}，

则 $P(B_1)=0.2$、 $P(B_2)=0.7$、 $P(B_3)=0.1$，$P(A|B_1)=1$，$P(A|B_2)=0.8$，$P(A|B_3)=0.5$.

（1）
$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.2\times1+0.7\times0.8+0.1\times0.5=0.81;$$

（2）
$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2A)}{P(A)}=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.7\times0.8}{0.81}=\frac{56}{81}.$$

四、计算题（共 12 分）

解：
$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.6, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant1;\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-e^{-2y}, & y\geqslant0.\end{cases}$$

（1）
$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)=\begin{cases}0.6(1-e^{-2y}), & -1\leqslant x<1, y\geqslant0,\\ 1-e^{-2y}, & x\geqslant1, y\geqslant0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）
$$\begin{aligned}P\{Y\leqslant|X|\}&=P\{X=-1,Y\leqslant|X|\}+P\{X=1,Y\leqslant|X|\}\\&=P\{X=-1,Y\leqslant1\}+P\{X=1,Y\leqslant1\}\\&=P\{X=-1\}P\{Y\leqslant1\}+P\{X=1\}P\{Y\leqslant1\}\\&=0.6F_Y(1)+0.4F_Y(1)\\&=F_Y(1)=1-e^{-2}.\end{aligned}$$

或者 $P\{Y\leqslant|X|\}=P\{Y\leqslant1\}=1-e^{-2}$.

五、计算题（24分）

解：（1）因为 $0<x<1$ 时，有 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$，

故 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$

$$=\begin{cases}3x^2\cdot\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（2）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\int_y^1\dfrac{9y^2}{x}\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}9y^2\ln x\big|_y^1, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（3）当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{9y^2}{x}}{-9y^2\ln y}, & y<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{x\ln y}, & y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（4）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x(3x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$，

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1y(-9y^2\ln y)\mathrm{d}y=-\dfrac{9}{4}\int_0^1\ln y\,\mathrm{d}y^4=\dfrac{9}{16}$，

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x9y^3\mathrm{d}y=\dfrac{9}{20}$.

因为 $E(X)\cdot E(Y)=\dfrac{27}{64}\neq\dfrac{9}{20}=E(XY)$，故 X,Y 相关.

（5）$P\left\{Y\leqslant\dfrac{X}{2}\right\}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}\dfrac{9y^2}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\dfrac{9}{x}\cdot\dfrac{y^3}{3}\Big|_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}$.

六、计算题（10分）

解：因为 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$，

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

$$P\left\{-z_{0.025}<\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}<z_{0.025}\right\}=0.95,$$

所以$\mu_1-\mu_2$的双侧置信区间为$\left(\bar{X}-\bar{Y}-z_{0.025}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\bar{X}-\bar{Y}+z_{0.025}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

又已知$\bar{X}=86,\bar{Y}=90,\sigma_1^2=100,n_1=25,\sigma_2^2=150,n_2=30,z_{0.025}=1.96$,代入得

$$\bar{X}-\bar{Y}-z_{0.025}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=-4-1.96\times3=-9.88,$$

$$\bar{X}-\bar{Y}+z_{0.025}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=-4+1.96\times3=1.88,$$

故$\mu_1-\mu_2$的双侧置信区间为$(-9.88,1.88)$.

七、计算题(16分)

解:$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1)$\bar{X}=E(X)=\dfrac{\theta+1}{2}\Rightarrow\hat{\theta}_1=2\bar{X}-1.$

(2)$E(\hat{\theta}_1)=E(2\bar{X}-1)=2E(\bar{X})-1=2E(X)-1=2\dfrac{\theta+1}{2}-1=\theta,$

所以$\hat{\theta}_1$是θ的无偏估计量.

(3)$L(\theta)=\dfrac{1}{(1-\theta)^n},\theta\leqslant X_i\leqslant1,$

即$L(\theta)=\dfrac{1}{(1-\theta)^n},\theta\leqslant X_{(1)}.$

又$L(\theta)$是关于θ的单增函数,所以$\hat{\theta}_2=X_{(1)}.$