天津大学 2015～2016 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	核分人
分数											

一．判断 （10 分）

1. 设 X 是数域 K 上的线性空间, M_1, M_2 是 X 的子空间，则 M_1+M_2 是 X 的线性子空间． ✗

2．设 $l_0(x), l_1(x), \Lambda, l_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上以 $a \le x_0 < x_1 < \Lambda < x_n \le b$ 为节点的 *Lagrange* 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x_k) = 1$． ✗

3．A 是正定对称矩阵，则线性方程组 $Ax=b$ 的 Seidel 迭代格式收敛． ✓ $\Rightarrow$

4. 设 X 是内积空间，当 $\langle x,y\rangle = 0$ 时，必有 $x=0$ 或 $y=0$．(✗) $\Leftarrow$

5. 设 $A \in C^{n\times n}$，则 $\lambda E - A$ 是满秩的． ✓

6. 设 $\|\ \|$ 是 X 上任意一种算子范数， $E \in C^{n\times n}$ 是单位矩阵，则 $\|E\| = 1$．(✗) F-范

7. T 是线性算子，则 T 连续一定有界． (✓)

8. 已知 $A, B \subset E$，则 $A\times B = B \times A$． (✗)
$AB \ne BA$

9.对任意矩阵 A, $B \in C^{n\times n}$，有 $e^{A+B} = e^A e^B$．(✗)
$AB=BA$

10. 设 X 是赋范空间，则 X 中的 Cauchy 序列~~一定~~是收敛序列． (✗)
Banach

二．填空(10 分)

1．已知 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$，则 $f[0,1,2] =$ ＿2＿． $\frac{f''(x)}{2!} = \frac{4}{2} = 2$

2．已知 $F(x) = (x_1x_2, 2x_1^2, e^{x_2})^T$ 则 $\frac{dF(x)}{dx} =$ $\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 4x_1 & 0 \\ 0 & e^{x_2} \end{pmatrix}$．

3．设 $C_k^{(n)}$ 是 Cotes 系数，则 $\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} =$ ＿1＿．

4．$\|(i, 1+i, 1)\|_2 =$ ＿2＿．

5．设 A 的 Jordan 标准形为 $J = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 A 的最小多项式是＿$(\lambda-2)^2$＿ $= d_3(\lambda) = m(\lambda)$

三．(16 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 和有理标准形．

初：$(\lambda-2), (\lambda-2), (\lambda-1)$

$J = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -3 \\ -4 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda-2 & -3 \\ -4 & 0 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 互换 $r_3+(\lambda-2)r_1$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4(\lambda-2) & \lambda+1 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & -3(\lambda-2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4(\lambda-2)^2 & 12(\lambda-2) \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$ $(\lambda-2)c_3+c_2$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$

初等因子组 $= \lambda-2, \lambda-1, \lambda-2$

$J \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

不变 $d_2(\lambda) = (\lambda-2)$

$d_3(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

考试时间： 2015 年 11 月 15 日

天津大学 2015～2016 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　　课程编号：S131A035　　学院名称：________　　学号：________　　姓名：________

四．(12 分) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$，(1) 求 A 的最小多项式；(2) 计算 e^{At}．

$e^{At}=a_0(t)E+a_1(t)A$

$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5)$

$$e^{At}=\begin{pmatrix} e^t & -\frac{1}{2}(e^{5t}-e^t) & -\frac{1}{2}(e^{5t}-e^t)\\ 0 & \frac{1}{2}(e^{5t}+e^t) & \frac{1}{2}(e^{5t}-e^t)\\ 0 & \frac{1}{2}(e^{5t}-e^t) & \frac{1}{2}(e^t+e^{5t}) \end{pmatrix}$$

五．(12 分) 已知线性方程组为 $\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\ 20\\ -24\end{bmatrix}$

(1) 写出 Gauss-Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代格式，

(2) 判断迭代格式收敛性.

$$\text{U7}\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-3x_2^{(k)}+24)\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-3x_1^{(k)}+x_3^{(k)}+20)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(x_2^{(k)}-24) \end{cases}$$

$$M_1=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0\\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$|\lambda E-M_1|=\lambda(\lambda^2-\frac{5}{8})=0$

$\rho(M_1)<1$ ∴ Jacobi 收敛.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-3x_2^{(k)}+24)\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-3x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}+20)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(x_2^{(k+1)}-24) \end{cases}$$

$$M_2=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix} 0 & -48 & 0\\ 0 & 36 & 16\\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$|\lambda E-M_2|=\lambda^2(\lambda-40)$

$\rho(M_2)>1$ ∴ G-S 发散.

考试时间：2015 年 11 月 15 日

课程名称：工程数学基础　　课程编号：S131A035　　学院名称：＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿

六．(10 分) 对积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx$，用 Romberg 方法计算积分的近似值，并将结果填入下表（结果保留至小数点后第五位）．

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.75000			
1	0.81945	0.84260		
2	0.83171	0.83580	0.83535	
3	0.83468	0.83567	0.83566	0.83566

$$S_{2n} = \frac{4T_{2n}-T_n}{4-1} \qquad R_{2n} = \frac{4^3C_{2n}-C_n}{4^3-1}$$

$$C_{2n} = \frac{4^2S_{2n}-S_n}{4^2-1}$$

七．(10 分) 已知下列插值条件

x	76	77	78	79	80	81
$F(x)$	2.83267	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

用三次 Newton 插值多项式计算 $f(77.85)$ 的近似值（结果保留到小数点后第 5 位）。

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶	三阶
76	2.83267			
77	2.90256	0.06989		
78	2.97857	0.07601	0.00306	
79	3.06173	0.08316	0.00358	0.00017

$$N_3(x) = f(x_0) + 0.06989(x-76) + 0.00306(x-76)(x-77) + 0.00017(x-76)(x-77)(x-78)$$

$$f(77.85) \approx N_3(77.85) = 2.83267 + 0.06989(77.85-76) + 0.00306(77.85-76)(77.85-77) + 0.00017(77.85-76)(77.85-77)(77.85-78)$$

$$= 2.96674$$

考试时间：2015 年 11 月 15 日

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿

八.（10 分） 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&2\\0&-3&2\end{bmatrix}$，求矩阵的算子范数 $\|A\|_2$ 和 $\|A\|_F$.

$\|A\|_F=\sqrt{5^2+3^2+2^2+|-3|^2+2^2}=\sqrt{51}$

$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^HA)}$ $\quad A^H=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&-3\\0&2&2\end{pmatrix}$ $\quad A^HA=\begin{pmatrix}25&0&0\\0&18&0\\0&0&8\end{pmatrix}$

$\cancel{\rho(A^HA)}$ $|\lambda E-A^HA|=\begin{vmatrix}\lambda-25&&\\&\lambda-18&\\&&\lambda-8\end{vmatrix}$ $\quad\therefore\lambda_1=25$, $\lambda_2=18$, $\lambda_3=8$.

$\therefore\rho(A^HA)=\max\{|\lambda_i|\}=25$

$\therefore\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^HA)}=\sqrt{25}=5$

九.（10 分）已知 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的一个方阵范数，$S\in C^{n\times n}$ 是酉矩阵，

定义 $\|A\|_*=\|S^HAS\|$，证明 $\|\cdot\|_*$ 是方阵范数．

考试时间：2015 年 11 月 15 日