# 第一章主 要 内 容

- **基本概念**

1. 随机试验； 2. 样本空间； 3. 随机事件

- **事件间的关系**

1.子事件： $A \subset B$

2.和事件： $A \cup B$

3.积事件： $AB$

4. 差事件： $A-B=A-AB=A\bar{B}$

5. 互斥事件(互不相容事件):AB= Φ

6. 互逆事件: AB= Φ， 且A∪B=S

- 事件的运算法则

1. 交换律：$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ .

2. 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ .

3. 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ .

4. 德.摩根律(对偶原则)：设事件$A_i$($i$=1,2,…,n)

则 $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

5. 对必然事件的运算法则：$A\cup S=S$, $A\cap S=A$

6.对不可能事件的运算法则：$A\cup\Phi=A$, $A\cap\Phi=\Phi$ .

- 概率公理化定义

设$E$---随机试验，$S$---样本空间. 事件$A \longrightarrow P(A)$, 称为事件$A$的概率, 如果$P(\cdot)$满足下列条件:

1°　非负性：　对于每一个事件$A$，有 $P(A) \geq 0$ ；

2°　规范性:　对于必然事件$S$, 有$P(S)=1$;

3°　可列可加性: 设$A_1$，$A_2$，… 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_i A_j = \Phi, i, j = 1,2,\cdots$，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

## • 概率性质

(1) $P(\phi)=0$ .

(2) (有限可加性) 若$A_1$, $A_2$, … $A_n$ 两两不相容,

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

(3) 若$A\subset B$, 则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ ;

一般有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$

(4) 对于任一事件$A$, 有$P(A)\le 1$,

(5) 逆事件: $P(A)=1-P(\overline{A})$,

(6)(加法公式) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

等可能概型(古典概型)

**1. 定义：** 设E是试验，S是E的样本空间，若

(1) 试验的样本空间的元素只有有限个；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

这种试验称为等可能概型或古典概型 .

**2. 古典概型中事件$A$的概率的计算公式**

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}}$$

# 几个重要公式

1. 条件概率

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(A)>0$$

2. 乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(A|B)$$

3. 全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

4. 贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

# 独立性

1. 事件A,B相互独立 $\Longleftrightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$

2. $A_1, A_2, \ldots, A_n$两两相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\text{，}\quad (1\le i<j\le n)$$

3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

$$1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n,\ (k\le n),$$

**独立的性质:**

1. 设A和B是两个事件,且P(A) $>$ 0.若A和B相互独立,则

   P(B|A)=P(B).反之亦然.

2. 若事件A和B相互独立,则下列各对事件也相互独立:

   $A$与$\bar{B}$, $\bar{A}$与$B$, $\bar{A}$与$\bar{B}$

3. $P(A)>0, P(B)>0,$ 则A、B互斥与A、B相互独立不能同时存在.

4. 若事件A和 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 独立, 且 $B_iB_j=\Phi(i\neq j)$

   则事件A和 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ 独立.

# 第二章主要内容

## 1. 随机变量的引入

⁂**定义：设随机试验的样本空间为$S=\{e\}$. $X=X(e)$是定义在样本空间$S$上的实值单值函数. 称$X=X(e)$为随机变量.**

⁂**与普通实函数的区别：**

(1) 它的定义域是样本空间$S$，而$S$不一定是实数集；

(2) 它的取值是随机的，所取每一个可能值都有一定的概率.

⁂**随机变量的分类：**离散型/非离散型(连续型)

## 2. 离散型随机变量及其概率分布

⁂**定义**：取有限个或可数个值的随机变量；

⁂**分布律**：$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\ldots$

其中 $p_k$ 满足：(1) $p_k \geq 0$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

⁂**常见分布**：

1）(0-1)分布：$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1\ (0<p<1)$

2) 二项分布：$X \sim b(n, p)$

$$p_k = P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\ldots,n$$

3) 泊松分布：$X \sim \pi(\lambda)$

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\ldots$$

## 3. 随机变量的分布函数

⁂定义：设$X$是一个随机变量，$x$是任意实数，函数

$$\boxed{F(x)=P\{X\le x\}}$$ ------ 称为$X$的分布函数

对任意实数 $P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$

$$P\{X>x_1\}=1-F(x_1)$$

⁂分布函数的性质 $P\{X=x_1\}=F(x_1)-F(x_1-0)$

(1) $0\le F(x)\le 1,\ -\infty<x<+\infty$

(2) $F(x)$是单调不减的,即若 $x_1<x_2$，则$F(x_1)\le F(x_2)$

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

(4) $F(x)$是右连续的,即$F(x+0)=F(x)$

（1） 离散型随机变量$X$的分布函数

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_k\le x}P\{X=x_k\}$$

（2） 连续型随机变量

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt}$$

$f(x)$的性质
$$\begin{cases}1.\ f(x)\ge 0\\ 2.\ \int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1\\ 3.\ P\{x_1<X\le x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\\ 4.\ F'(x)=f(x),\ \text{在}f(x)\text{的连续点.}\end{cases}$$

## ⁂ 三种重要的连续型随机变量

(一) 均匀分布 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(二) 指数分布 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

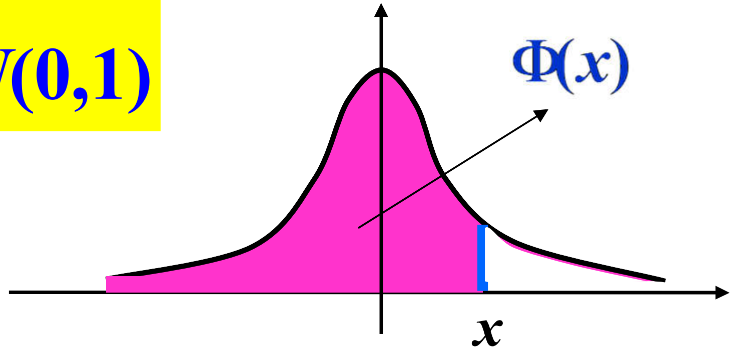
(三) 正态分布 $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$-\infty<x<\infty$$

## ⁂ 标准正态分布：$X \sim N(0,1)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$




$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \longleftrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

# 4 随机变量的函数的分布

## 一、离散型随机变量函数的分布律

## 二、连续型随机变量函数的概率密度

方法：由随机变量X的概率密度 $f_X(x)$ 去求随机变量$Y=g(X)$的概率密度.

(1) 求出$Y$的分布函数的表达式;

(2) 由分布函数求导数，即可得到.

# 第三章主要内容

## 1. 二维随机变量

设$E$一随机试验, 样本空间$S=\{e\}$, $X$、$Y$是定义在$S$上的随机变量, 向量$(X,Y)$叫做二维随机变(向)量.

## 2. 二维随机向量(X,Y)的分布函数

$$\boxed{F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)}$$

性质：(1)$F(x,y)$是变量 $x$ 和 $y$ 的不减函数;

(2) $0\le F(x,y)\le 1$, 且
$F(-\infty,y)=0$, $F(x,-\infty)=0$, $F(-\infty,-\infty)=0$, $F(\infty,\infty)=1$;

(3)$F(x,y)$关于 $x$ 和 $y$右连续;

(4) 对于任意$x_1<x_2$, $y_1<y_2$,有
$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\ge 0$ .

## 3. 边缘分布

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y \le \infty\} = F(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \le \infty, Y \le y\} = F(\infty, y)$$

## 4. 随机变量独立性的定义

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

# 离散型的二维随机变量(X, Y)

## 1. 联合分布律:

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} \triangleq p_{ij}, (i, j = 1,2,\cdots)$$

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\cdots$ | $p_{1j}$ | $\cdots$ | $p_{1\bullet}$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ | $p_{2\bullet}$ |
| $\vdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | | $\cdots$ | | $\cdots$ |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{i2}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ | $p_{i\bullet}$ |
| $\vdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | | $\cdots$ | | $\cdots$ |
| | $p_{\bullet 1}$ | $p_{\bullet 2}$ | $\cdots$ | $p_{\bullet j}$ | $\cdots$ | |

性　质:

$1^\circ$ $0 \le p_{ij} \le 1$

$2^\circ$ $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

分布函数:

$$F(x,y) = \sum_{\substack{x_i \le x \\ y_j \le y}} p_{ij}$$

2. 边缘分布律

3. 条件分布律

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i=1,2,\ldots$$

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, j=1,2,\ldots$$

4. 独立性

$$p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}, \quad (i,j=1,2,\cdots)$$

# 连续型的二维随机变量

## 1. 联合概率密度及性质

$$\boxed{F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv}$$

$1^\circ$ $f(x,y)\geq 0,$ $2^\circ$ $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1,$

$3^\circ$ $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$

$4^\circ$ $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$,在$f(x,y)$的连续点

$5^\circ$ $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy$, $G$是一平面区域.

## 2. 边缘概率密度

$X$ 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\quad -\infty<x<\infty$$

$Y$ 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx,\quad -\infty<y<\infty$$

边缘分布函数

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right]dx=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right]dy=\int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy$$

3. 条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

4.独立性

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

# 正态分布随机变量的一些常用性质

(1) 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

(2) 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,\rho)$,

则 X与Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$

(3)若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且X与Y相互独立, 则

X+Y 仍服从正态分布, 且 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

推广: 若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2),(i=1,2\cdots,n)$, 且相互独立, 则

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i{}^2\right)$$

(4)有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2\sigma_i{}^2\right)$$

# 两个随机变量的函数的分布

## (1) $Z=X+Y$ 的分布

分布函数: $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$

概率密度: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$

当$X$和$Y$相互独立:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

(2) 当$X$和$Y$相互独立时:

$M=\max(X,Y)$ 的分布函数

$$F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=F_X(z)F_Y(z)$$

$N=\min(X,Y)$ 的分布函数

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=P\{N\le z\}\\&=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\end{aligned}$$

# 连续型随机变量函数的概率密度

设随机变量X的概率密度为 $f_X(x)$，求随机变量$Y$=$g(X)$($g$连续)的概率密度.

## 1．一般方法——分布函数法

第一步　求出Y的分布函数 $F_Y(y)$的表达式；

因为$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$，设$l_y=\{x|g(x)\le y\}$

则

$$F_Y(y)=P\{X\in l_y\}=\int_{l_y} f_X(x)dx=\int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

第二步　$f_Y(y)=F'_Y(y)$

## 2. 公式法

**定理**

设随机变量 $X$ 具有概率密度 $f_X(x)$, 其中 $-\infty < x < +\infty$, 又设函数 $g(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调的可导函数, 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

## 2. 公式法

**定理**

设随机变量 $X$ 具有概率密度 $f_X(x)$，其中 $-\infty < x < +\infty$，又设函数 $g(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内严格单调的可导函数，则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$，$\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$，$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

# 第四章 主要内容

## （一） 数学期望(均值)

（1-1） $X$:离散型.

分布律: $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

（1-2） 函数：$Y=g(X)$（$g$ 为连续函数）

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$$

## （一）数学期望（均值）

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} x_i p_{ij}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} y_i p_{ij}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy$$

(1-3) 设( $X,Y$ ) 离散型随机变量.

分布律为:

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1,2,\cdots$$

若 $Z=g(X, Y)$（$g$为二元连续函数）

则 $$E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

(2-1) $X$: 连续型　概率密度为 $f(x)$.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

(2-2) 函数：$Y=g(X)$（$g$ 为连续函数）

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx$$

(2-3) 设$(X, Y)$是连续型随机变量，

概率密度为 $f(x, y)$.

若 $Z=g(X, Y)$（$g$为二元连续函数）

则
$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

## (3) 数学期望的性质:

假设以下随机变量的数学期望均存在.

1. $E(C)=C$, （$C$ 是常数）
2. $E(CX)=CE(X)$, （$C$ 是常数）
3. $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$,
4. 设 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

## (二) 方差

(1) $D(X) = Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$

计算公式：$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

1。若 $X$：离散型. $P\{X = x_k\} = p_k$，$k = 1,2,\cdots$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} [x_k - E(X)]^2 \cdot p_k$$

2。若 $X$：连续型. 概率密度为 $f(x)$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

3。均方差或标准差：$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$

## (2) 方差的性质

<u>假设下列方差均存在</u>

1。 $D(C)=0$, （$C$为常数）

2。 $D(CX)=C^2 D(X)$, （$C$为常数）

3。 设$X$与$Y$是两个随机变量，则有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}$$
$$=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$$

特别，若$X$与$Y$相互独立: $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

4。 $D(X)=0 \Leftrightarrow P\{X=E(X)\}=1.$

## （三）一些常见分布的期望与方差

1。若$X$服从两点分布，则 $E(X)=p$, $D(X)=pq$.

2。若$X\sim b(n,p)$,则 $E(X)=np$, $D(X)=npq$.

3。若$X\sim\pi(\lambda)$，则 $E(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$.

4。若$X$服从区间$(a,b)$均匀分布，

则 $E(X)=(a+b)/2$, $D(X)=(b-a)^2/12$.

5。若$X$服从指数分布，则 $E(X)=\theta$, $D(X)=\theta^2$

6。若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$.

## (四) 协方差 相关系数

- 协方差: $Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$
- 相关系数: $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}$
- X与Y不相关: $\rho_{XY}=0$

计算公式:

1。 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

2。 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

**协方差的性质：**

1。$Cov(X,X)=D(X)$

2。$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

3。$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$ $(a,b$为常数$)$

4。$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

$Cov(aX_1+bX_2,Y)=aCov(X_1,Y)+bCov(X_2,Y)$

**相关系数的性质:**

$1^\circ \quad |\rho_{xy}| \le 1.$

$2^\circ \quad |\rho_{xy}| = 1 \Leftrightarrow \exists$常数$a, b$使$P\{Y = a + bX\} = 1.$

注: 1) 若随机变量$X$与$Y$相互独立, 则$X$与$Y$一定不相关;

反之不一定成立。

2) 对二维正态随机变量$(X, Y)$:

$X$与$Y$不相关$\Leftrightarrow$ $X$与$Y$独立 $\Leftrightarrow$ $\rho = 0$

3) 二维正态分布只要知道$X$与$Y$的分布及相关系

数即可确定.

## （五）矩　协方差矩阵

设$X, Y$为随机变量，则

1）$X$的$k$阶原点矩（$k$阶矩）：$E(X^k), \quad k=1,2,\cdots$

2）$X$和$Y$的$k+l$阶混合矩：$E(X^kY^l), \quad k,l=1,2,\cdots$

3）$X$的$k$阶中心矩：$E\{[X-E(X)]^k\}, \quad k=1,2,\cdots$

4）$X$和$Y$的$k+l$阶混合中心矩：

$$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}, \quad k,l=1,2,\cdots$$

## 协方差矩阵

若$n$维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩都存在，称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\},$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$n$维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的协方差矩阵

## 切比雪夫不等式:

定理 设随机变量$X$的数学期望$E(X)=\mu$, 方差$D(X)=\sigma^2$. 则对任意的正数ε，有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

上式称为切比雪夫(chebyshev)不等式.

[注] 此不等式给出了

在随机变量的分布未知的情况下,

事件 $\{|X-\mu|<\varepsilon\}$ 的概率的一种估计方法.

# 数理统计主要内容

## 几个常用的统计量

样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i;$

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-n\bar{X}^2\right)$

样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

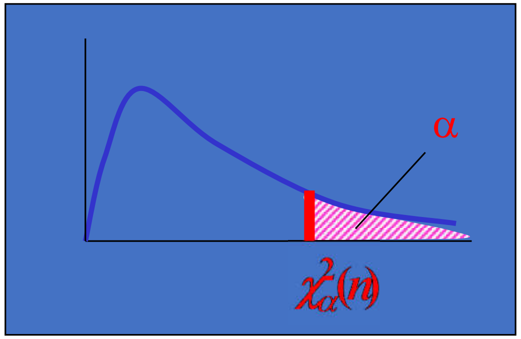
样本$k$阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \quad (k=1,2,\ldots,n)$

样本$k$阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k \quad (k=1,2,\ldots,n)$

# 几个常用统计量的分布

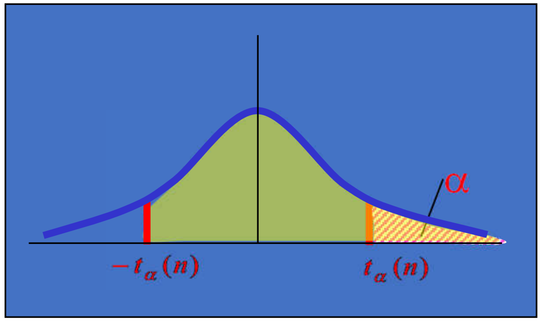
**$\chi^2$分布** 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体 $N(0,1)$的样本, 则

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$



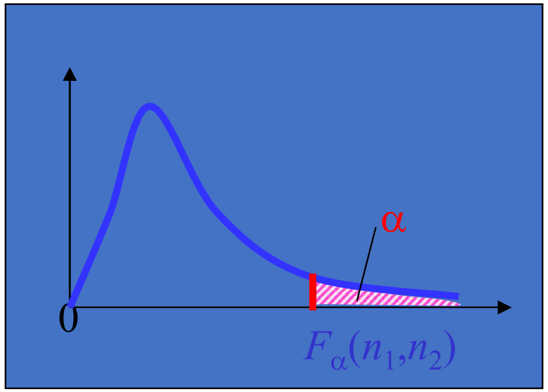

**$t$ 分布** 设$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$,且$X$与$Y$独立, 则

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$




**$F$分布** 设$U \sim \chi^2(n_1)$, $V \sim \chi^2(n_2)$,且$U$ 与$V$独立,则

$$F = \frac{U/n_1}{V/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$



## 正态总体的样本均值与样本方差的分布

结论1 总体$X$均值为 μ,方差为 $\sigma^2$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自$X$的样本,

$$\boxed{E(\overline{X})=\mu,\quad D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\quad E(S^2)=\sigma^2.}$$

结论2 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$X\sim N(\mu, \sigma^2)$的样本, 则

$$\boxed{\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)}$$

$$\boxed{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)}$$

$\boxed{\overline{X}与S^2独立}$

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim \chi^2(n-1)}$$

$$\|$$

$$\boxed{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim \chi^2(n-1)}$$

统计推断
- 参数估计
  - 点值估计
  - 区间估计
- 假设检验
  - 正态总体均值
  - 正态总体方差

总体未知参数的点估计

- 矩估计法: 用样本(原点)矩作为总体(原点)矩的估计
- 最大似然估计法.

最大似然原理的直观想法: “概率最大的事件最可能出现”.

◆似然函数:

$$L(\theta)=L(x_1,x_2\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),$$

$$L(\theta)=L(x_1,x_2\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

定理1 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\left(X_1, \ldots, X_n\right)$是来自总体$X$的样本，

则

(1) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N\left(0,1\right)$;　　(2) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

(3) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$;　　(4) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

定理2 设$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$和$\left(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m\right)$分别是来自正态总体$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$与$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$的相互独立的随机样本.

令$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S_1^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

$\overline{Y}=\dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_j,\ \ S_2^2=\dfrac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y})^2$,则

(1) $\dfrac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n-1,m-1}$ (2) $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$

(3) 若$\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2=\sigma^2$，则

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2}$$

**估计量的评选标准**：无偏性、有效性、相合性

**区间估计**：为了估计总体$X$的未知参数$\theta$,通过样本寻求一个区间，并且给出此区间包含参数$\theta$ 真值的可信程度．这就是总体未知参数的区间估计问题

**置信区间:** 设总体$X$的分布函数$F(x;\theta)$,$\theta$为未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自总体的样本. 设$\alpha$满足 $0<\alpha<1$,

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是两个统计量.

若
$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}\geq 1-\alpha$$

则称随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

- 设总体X~N(μ,σ²)，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体X的样本，

1. 均值$\mu$的置信区间

(a) $\sigma^2$为已知时，取枢轴量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$ 或 $$\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

(b) $\sigma^2$为未知时，取枢轴量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

置信区间：$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

2. 方差$\sigma^2$的置信区间

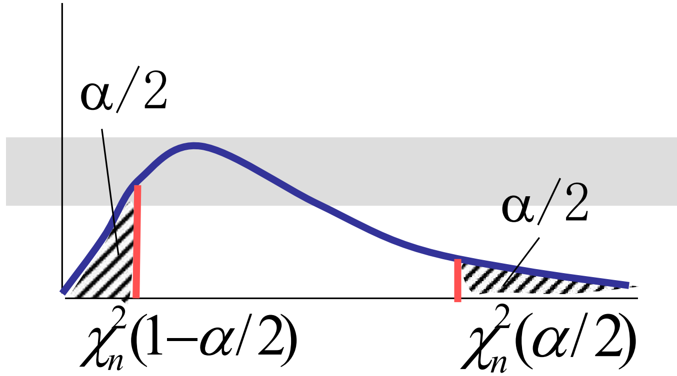
(c)取枢轴量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

(d) μ已知, 方差$\sigma^2$的置信区间

当$1-\alpha$ 给定后, 因为

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$




$$P\left\{\chi_n^2(1-\alpha/2) < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi_n^2(\alpha/2)\right\} = 1-\alpha$$

得到方差 $\sigma^2$ 的一个置信度为$1-\alpha$ 的置信区间:

(6)

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_n^2(\alpha/2)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_n^2(1-\alpha/2)}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}}{\sqrt{\chi_n^2(\alpha/2)}}, \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}}{\sqrt{\chi_n^2(1-\alpha/2)}}\right)$$

(5)

*标准差$\sigma$* 的一个置信度为$1-\alpha$ 的置信区间

## 参数假设检验

$H_0$ 原假设　是被检验的假设,通过检验可能被接受,也可能被否定。

$H_1$ 备择假设 与$H_0$对应的假设, 只有在原假设被否定后才可接受的假设。无充分理由是不能轻率接受的。

两类错误

$\alpha$ =P{第一类错误}=P{拒绝$H_0$ | $H_0$真}

$\beta$ =P{第二类错误}=P{接受$H_0$ | $H_0$伪}

## 单总体$N(\mu, \sigma^2)$均值$\mu$的检验（显著水平为α）

1. $\sigma^2$ 已知 ----Z检验法　　取统计量: $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

a) $H_0$: $\mu=\mu_0$, $H_1$: $\mu\neq\mu_0$. 拒绝域: $|z|>z_{\alpha/2}$

b) $H_0$: $\mu\leq\mu_0$, $H_1$: $\mu>\mu_0$　　拒绝域: $z>z_\alpha$

c) $H_0$: $\mu\geq\mu_0$, $H_1$: $\mu<\mu_0$　　拒绝域: $z<-z_\alpha$

2. $\sigma^2$未知 ---t 检验法　　取统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

a) $H_0$: $\mu=\mu_0$, $H_1$: $\mu\neq\mu_0$.　拒绝域: $|t|>t_{\alpha/2}(n-1)$

b) $H_0$: $\mu\leq\mu_0$, $H_1$: $\mu>\mu_0$　拒绝域: $t>t_\alpha(n-1)$

c) $H_0$: $\mu\geq\mu_0$, $H_1$: $\mu<\mu_0$　拒绝域: $t<-t_\alpha(n-1)$

## 单总体$N(\mu,\sigma^2)$方差$\sigma^2$的检验--- $\chi^2$ 检验法

(μ未知)　取检验统计量: $$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

(1) 双边检验:

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

拒绝域: $\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

(2) 右边检验:

$$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2, H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$$

拒绝域: $\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

(3) 左边检验:

$$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2, H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$$

拒绝域: $\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

## $\sigma^2$的检验问题（μ已知）

取检验统计量: $\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^{\,2}}$ --- $\chi^2$ 检验法

(1) 双边检验:

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^{\,2}, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^{\,2}$ 拒绝域: $\chi^2\leq\chi_n^2(1-\alpha/2)$

或 $\chi^2\geq\chi_n^2(\alpha/2)$

(2) 右边检验:

$H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^{\,2}, H_1:\sigma^2>\sigma_0^{\,2}$ 拒绝域: $\chi^2\geq\chi_n^2(\alpha)$

(3) 左边检验:

$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^{\,2}, H_1:\sigma^2<\sigma_0^{\,2}$ 拒绝域: $\chi^2\leq\chi_n^2(1-\alpha)$

表 7.2　两个正态总体参数的区间估计

| 参数 | 条件 | 枢轴量及分布 | 置信区间 |
| --- | --- | --- | --- |
| $\mu_1-\mu_2$ | 方差已知 | $Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}\sigma_1^2+\dfrac{1}{n}\sigma_2^2}}\sim N(0,1)$ | $\left(\overline{X}-\overline{Y}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{1}{m}\sigma_1^2+\dfrac{1}{n}\sigma_2^2},\ \overline{X}-\overline{Y}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{1}{m}\sigma_1^2+\dfrac{1}{n}\sigma_2^2}\right)$ |
| | 方差未知但相等 | $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t_{m+n-2}$ | $(\overline{X}-\overline{Y}-\lambda,\ \overline{X}-\overline{Y}+\lambda)$<br>$\lambda=t_{m+n-2}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$ |
| $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ | 均值未知 | $F=\dfrac{S_2^2}{S_1^2}\cdot\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F_{n-1,m-1}$ | $\left(F_{n-1,m-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\ F_{n-1,m-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right)$ |

续表

| 参数 | 条件 | 枢轴量及分布 | 单侧置信上限 | 单侧置信下限 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $\mu_1-\mu_2$ | 方差已知 | $Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}\sigma_1^2+\dfrac{1}{n}\sigma_2^2}}\sim N(0,\ 1)$ | $\overline{X}-\overline{Y}+z_\alpha\sqrt{\dfrac{1}{m}\sigma_1^2+\dfrac{1}{n}\sigma_2^2}$ | $\overline{X}-\overline{Y}-z_\alpha\sqrt{\dfrac{1}{m}\sigma_1^2+\dfrac{1}{n}\sigma_2^2}$ |
| $\mu_1-\mu_2$ | 方差未知但相等 | $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t_{m+n-2}$ | $\overline{X}-\overline{Y}+t_{m+n-2}(\alpha)\lambda_1$, $\lambda_1=S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$ | $\overline{X}-\overline{Y}-t_{m+n-2}(\alpha)\lambda_1$, $\lambda_1=S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$ |
| $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ | 均值未知 | $F=\dfrac{S_2^2}{S_1^2}\cdot\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F_{n-1,m-1}$ | $F_{n-1,m-1}(\alpha)\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ | $F_{n-1,m-1}(1-\alpha)\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ |

双正态总体均值差的检验

1. $\sigma_{1,}\sigma_2$已知，比较两总体的均值

**设原假设成立 ，取检验统计量**

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

---z检验

**拒绝域**:

检验假设 $H_0$: $\mu1=\mu2$,  H1: $\mu1\neq\mu2$ （双边） $|z|\geq z(\alpha/2)$

$H_0$: $\mu_1\leq\mu_2$,  $H_1$: $\mu_1>\mu_2$ （右边） $z\geq z(\alpha)$

$H_0$: $\mu_1\geq\mu_2$,  $H_1$: $\mu_1<\mu_2$ （左边） $z\leq -z(\alpha)$

双正态总体均值差的检验

2. $\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知，比较两总体的均值

**设原假设成立，取检验统计量**

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}},\ S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

---t检验

**拒绝域:**

| | | |
|---|---|---|
| **检验假设** $H_0$: $\mu 1=\mu 2$, H1: $\mu 1\neq\mu 2$ （双边） | | $\lvert t\rvert\geq t_{n_1+n_2-2}(\alpha/2)$ |
| $H_0$: $\mu_1\leq\mu_2$, $H_1$: $\mu_1>\mu_2$ （右边） | | $t\geq t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ |
| $H_0$: $\mu_1\geq\mu_2$, $H_1$: $\mu_1<\mu_2$ （左边） | | $t\leq -t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ |

## 双正态总体方差的检验（ μ1，μ2未知）

检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ （双边）

$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ （右边）

$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ （左边）

取检验统计量 $F = S_1^2 / S_2^2$ --F检验

拒绝域: $f \geq F_{n_1-1,n_2-1}(\alpha/2)$ 或 $f \leq F_{n_1-1,n_2-1}(1-\alpha/2)$

$f \geq F_{n_1-1,n_2-1}(\alpha)$ （右边）

$f \leq F_{n_1-1,n_2-1}(1-\alpha)$ （左边）