2020～2021 学年第二学期期中考试试卷

《线性代数及其应用》（共 3 页）

（考试时间：2021 年 4 月 23 日）

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
得分								

一、填空题与单项选择题（共 30 分，每小题 5 分）

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}$，则 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})^{-1}=$ ______________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,3 列对换得到 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 3 行加到第 1 行得到单位阵，

   则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ____________________

3. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -9 & 7 & 2\pi & 3 \\ 3 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$，$M_{ij}$ 和 A_{ij} 分别为 D 的 (i,j) 元的余子式和代数余子式，则 $2M_{31}+\pi A_{33}-\mathrm{e}M_{34}=$（　　　　）.

   (A) 30　　(B) 21π　　(C) $17\mathrm{e}$　　(D) $-17\mathrm{e}^2$

4. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}=0, \\ x_1+(1-a)x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}=0, \\ x_1+x_2+(2-a)x_3+\cdots+x_{n+1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+(n-a)x_{n+1}=0 \end{cases}$，其中 a 为参数，$n\ge 3$ 为正整数，则以下结论中**不正确**的是（　　　　）.

   (A) 当 $a=n-1$ 时，该方程组有非零解；　(B) 当 $a=n-2$ 时，该方程组有非零解；
   (C) 当 $a=n$ 时，该方程组仅有零解；　(D) 当 $a=n+1$ 时，该方程组有非零解.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，且 $|\boldsymbol{BA}|\ne 0$，则（　　　　）.

   (A) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=m$　　(B) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=n$
   (C) $r(\boldsymbol{A})=n, r(\boldsymbol{B})=m$　　(D) $r(\boldsymbol{A})=m, r(\boldsymbol{B})=n$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵，则下列说法一定正确的是（　　　　）.

   (A) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$；

   (B) 若 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

(C) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称阵，则 $\boldsymbol{BA}$ 也是实对称阵 ；

(D) 若 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $r(\boldsymbol{APB})=r(\boldsymbol{AB})$.

二、解答题 （共 16 分，每小题 8 分）

1、(8 分) 计算 $n+1$ 阶行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

2、(8 分) 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\in\mathbb{P}^3$ 均为 3 元列向量，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$ 是可逆矩阵，矩阵

$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\ a\boldsymbol{\beta}_1+b\boldsymbol{\beta}_2+c\boldsymbol{\beta}_3,\ bc\boldsymbol{\beta}_1+ca\boldsymbol{\beta}_2+ab\boldsymbol{\beta}_3]$，求 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|$.

三、(14 分) 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足

$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

四、(16 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^m$，其中 m 为正整数.

五、(16 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & -8 & 7 & 11 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -8 & 1 \\ -20 & 0 \\ -7 & a \end{bmatrix}$，判断当 a 为何值时，矩阵方程

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解？在有解时，求该方程的全部解 $\boldsymbol{X}$.

六、(8 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$ (其中正整数 $m>2$).

证明：(1) $\boldsymbol{A}$ 是降秩矩阵；　　(2) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.