2023～2024 学年第一学期期中考试试卷参考答案

《微积分Ⅰ》（考试时间：2023 年 11 月 10 日）

一、1. $2\mathrm{d}x$　2. 0　3. $-\dfrac{1}{2}$　4. **B**　5. $f''(a)$

二、**C　D　B　B　A**

三、计算题（本题 5 分）

设曲线 $C: y=y(x)$ 满足方程 $y-2x+1=(x-y)\ln(x-y)$，求曲线 C 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程.

解：方程两边对 x 求导，得：

$$y'-2=(1-y')\ln(x-y)+1-y',$$

在 $(0,-1)$ 处，$y'=\dfrac{3}{2}$,

于是，所求切线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-1$.

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(\sin t), \\ y=\cos t+t\sin t, \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-\sin t+\sin t+t\cos t}{\frac{\cos t}{\sin t}}=t\sin t$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cot t}=\left(\sin t+t\cos t\right)\tan t.$$

2. 设 $y=f(\sqrt{x})+x^x$，其中函数 $f(x)$ 二阶可导，求 y''.

解：$y'=f'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'+(\mathrm{e}^{x\ln x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})+x^x(\ln x+1)$,

$$y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}f'(\sqrt{x})+\frac{1}{4x}f''(\sqrt{x})+x^x\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right].$$

3. 解：$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-2x+x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-2+\cos x-x\sin x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}-2\sin x-x\cos x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{-5x}{6x}=-\frac{5}{6}.$$

或：$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)}-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}-\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{6}.$

解法二：原式$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-2x+x\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=-\frac{5}{6}.$

4. 解：$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\sin x}{3x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}.$$

解法二：原式$\displaystyle=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}.$

5. 已知当 $x\neq0$ 时，有 $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. 设函数 $y=xf(x)$，求 $y^{(n+1)}$.

解：$f^{(n+1)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{(-1)}{x^2}=\dfrac{(-1)^{n+1}\left[(n+1)x+1\right]}{x^{n+3}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

由莱布尼茨公式，得

$$y^{(n+1)}=xf^{(n+1)}(x)+(n+1)f^{(n)}(x)$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\left[(n+1)x+1\right]}{x^{n+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

五、解答题（共 24 分，每小题 8 分）

1. 求曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2x$ 的拐点坐标和渐近线方程.

解：定义域 $\{x|x\neq 0\}$. 当 $x\neq 0$ 时，

$$y'=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2,\qquad y''=\frac{1+2x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

令 $y''=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$.

当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$f''(x)<0$；当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$f''(x)>0$,

所以 $f(x)$ 的拐点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\mathrm{e}^{-2}-1\right)$.

垂直渐近线：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，所以 $x=0$ 是垂直渐近线.

斜渐近线：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$,

所以，斜渐近线为 $y=2x+1$.

2. 求 c 的取值范围，使得函数 $f(x)=cx+\frac{1}{x^2+3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

解：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，必有 $f'(x)=c-\frac{2x}{(x^2+3)^2}\geq 0$,

即 $\frac{2x}{(x^2+3)^2}\leq c$.

令 $g(x)=\frac{2x}{(x^2+3)^2}$，则 $g'(x)=\frac{2(x^2+3)-2x\cdot 4x}{(x^2+3)^3}=\frac{6(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$.

由 $g'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1$, $x_2=1$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减；当 $x\in(-1,1)$ 时，$g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增，且 $g(-1)=-\frac{1}{8}$, $g(1)=\frac{1}{8}$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{(x^2+3)^2}=0$,

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=\frac{1}{8}$，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有 $g(x)=\frac{2x}{(x^2+3)^2}\leq\frac{1}{8}$.

故当 $c\geq\frac{1}{8}$ 时，$f'(x)\geq 0$，使得 $f(x)=cx+\frac{1}{x^2+3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

3. 当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{x^2}-1-\ln(1+x^2)$ 与 ax^n 为等价无穷小，确定常数 a 与 n 的值.

解法一：$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1-\ln(1+x^2)}{ax^n}\overset{\text{泰勒公式}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)-1-\left[x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right]}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+o(x^4)}{ax^n}=1,$$

所以，$a=1$, $n=4$.

解法二：$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1-\ln(1+x^2)}{ax^n}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}-\frac{2x}{1+x^2}}{anx^{n-1}}=\frac{2}{na}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\frac{1}{1+x^2}}{x^{n-2}}$$

$$=\frac{2}{na}\lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{(n-2)x^{n-3}}=\frac{2}{na}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{(n-2)x^{n-3}}=1,$$

所以，$a=1$, $n=4$.

六、证明题（本题 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上二阶可导，且 $f(-1)=\frac{1}{3}$，$f(0)=\frac{1}{6}$，$f(2)=\frac{17}{6}$.

证明：(1) 方程 $f'(x)-x=\frac{1}{3}$ 在 $(-1,2)$ 内存在两个实根；

(2) 存在 $\xi\in(-1,2)$，使得 $f''(\xi)=1$.

证明： (1) 令 $F(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}x$，$F(x)$ 在 $[-1,2]$ 上连续，在 $(-1,2)$ 内可导，且

$F(-1)=F(0)=F(2)=\frac{1}{6}$，由罗尔定理知，至少存在 $\xi_1\in(-1,0)$ 及 $\xi_2\in(0,2)$，使得

$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，于是 $f'(x)-x-\frac{1}{3}=0$ 在 $(-1,2)$ 内存在两个实根.

(2) 由 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上二阶可导，知 $F'(x)=f'(x)-x-\frac{1}{3}$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,2)$ 上连续且可导，$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)$，由罗尔定理知,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,2)$, 使得 $F''(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)=1$.

证明二： (1) 令 $G(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$，$G(-1)=-\frac{1}{6}$, $G(0)=\frac{1}{6}$, $G(2)=\frac{5}{6}$,

由拉格朗日中值定理知，至少存在 $\xi_1\in(-1,0)$ 及 $\xi_2\in(0,2)$，使得

$$G'(\xi_1)=\frac{G(0)-G(-1)}{0-(-1)}=\frac{1}{3},\ G'(\xi_2)=\frac{G(2)-G(0)}{2-0}=\frac{1}{3}.$$