

2015 年工程硕士考试试卷

《工程数学基础》（共 4 页）

（考试时间：2015 年 7 月 12 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
得分											

一、判断题（每小题 1 分，共 8 分）

- 1、有限个或可数个可数集的并集是可数集.
- [ ]
- 2、设  $A, B \in C^{n \times n}$ , 则  $A \sim B$  的充要条件是  $A$  和  $B$  具有相同的最小多项式.
- [ ]
- 3、若  $A \in R^{n \times n}$  正定, 则求解线性方程组  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代格式收敛 .
- [ ]
- 4、 $\forall A \in C^{n \times n}, x \in C^n$ , 若  $A$  可逆且  $x \neq 0$ , 则  $x^H A^H A x > 0$ .
- [ ]
- 5、线性空间  $P_n[a, b]$  是  $n$  维的.
- [ ]
- 6、设  $\{x_n\} \subset (X, \|\cdot\|)$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n \rightarrow x\| = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$ .
- [ ]
- 7、若  $A$  是酉矩阵, 则  $\rho(A) = 1$ .
- [ ]
- 8、设  $X$  是基本集合,  $A, B \in X$ , 则  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .
- [ ]

二、填空题（每小题 2 分，共 12 分）

- 1、设  $x = (1, -i, i + 1)^T \in C^3$ , 则  $\|x\|_2 =$  \_\_\_\_\_ .
- 2、设  $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 e^{x_2}, x_2 + \sin x_3)^T$ , 则  $f'(x) =$  \_\_\_\_\_.
- 3、设  $A(t) = \begin{bmatrix} t^2 & te^t \\ \sin t & t \end{bmatrix}$ . 则  $\frac{dA(t)}{dt} =$  \_\_\_\_\_ ;

3、设  $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$  是  $[a, b]$  上的以  $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$  为节点的 Lagrange 插值基函数, 则

$\sum_{k=0}^n l_k(x_k) =$ \_\_\_\_\_.

4、设  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ , 则  $\det e^A =$  \_\_\_\_\_.

[ ] 5、设  $A = \begin{bmatrix} & 2 \\ & 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in C^{3 \times 3}$ , 则  $cond_1 A =$  \_\_\_\_\_ .

[ ] 三、（12 分）设  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , (1) 求  $\lambda E - A$  的不变因子; (2) 求  $A$  的有理标准形  $C$ .

- [ ]
- [ ]
- [ ]
- [ ]

四、(10 分) 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ , (1) 求  $\lambda E - A$  的 Smith 标准形; (2) 求  $A$  的 Jordan 标准形  $J$ .

五、(10 分) 写出求解线性方程组  $Ax = b$  的 Gauss—Seidel 迭代格式, 并判断所写格式的收敛性, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

学院\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 年级\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

六、（12 分） 已知函数  $y = f(x)$  的数值表如下

$x$	7.7	7.8	7.9	8.0	8.1
$y$	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

用三次插值多项式求  $f(7.93)$  的近似值(计算过程与结果均保留至小数点后第 5 位).

七、（13 分） 设  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 求

- （1） 矩阵  $A$  的最小多项式  $\varphi(\lambda)$  ；
- （2） 方阵函数  $e^{At}$  .

八、（10 分）用 *Romberg* 算法求积分  $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$  的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后第 6 位）。

$k$	$T_{2^k}$	$S_{2^k}$	$C_{2^k}$	$R_{2^k}$
0				
1				
2				
3				
4				

九、计算题（8 分） 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，求  $\|A\|_1, \|A\|_F, \|A\|_\infty, \|A\|_2$ 。

十、证明题（5 分） 设  $X = [0, 1], \forall f \in X$  定义算子  $T : (X, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$  为：

$$(Tf)(t) = t \cdot f(t) \quad (\forall f \in X, t \in [0,1]),$$

证明：  $T$  是线性算子.