天津大学《数值计算方法与 Matlab》

2012-2013 学年第二学期考试试卷及答案 A 卷

一、填空题：（共 42 分，每空 3 分）按要求把正确的答案填在每题中的横线上方。

1.误差的来源主要有：观测误差、舍入误差、截断误差 、模型误差（至少三种）。

2.用求解方程组$\begin{cases}2x_1+x_2=3\\ x_1+5x_2=-2\end{cases}$的 SOR 法迭代格式
$$x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\frac{\omega}{2}[3-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}]$$
$$x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\frac{\omega}{5}[-2-x_1^{(k+1)}-5x_2^{(k)}]$$

要保证此迭代格式收敛，则松弛因子 ω 满足 $0<\omega<2$ 。

3.设 $f(x)=x^5+3x^3+5$，则 $f[2^0,2^1,\dots,2^5]=$ 1 ， $f[2^0,2^1,\dots,2^6]=$ 0 。

4.三种基本方法是：数值微分法、Taylor 展开法、数值积分法；Runge-Kutta 法的基本思想是：利用 $f(x,y)$在某些点处函数值的线性组合构造差分方程，从而避免了高阶导数的计算。一个二阶 Runge-Kutta 法的公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+hf(x_n,y_n))]$ 或

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(k_1+k_2),\ \ k_1=f(x_n,y_n),k_2=f(x_n+h,y_n+hk_1)$$

5. 在三次 Hermite 的插值条件为：$H(x_k)=y_k,H'(x_k)=m_k,(k=1,2)$。

6. $f'(1.2)=$ -0.2170 ， $f''(1.2)=$ 0.3000 （保留 4 位小数）。

7.具有 $2n+1$ 次代数精度；相应的求积节点称为 Gauss 点；计算积分 $\int_1^2\cos(x^2)dx$ 的三点 Gauss-Legendre 公式为 $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{9}\cos\left(\left(\frac{3-\sqrt{0.6}}{2}\right)^2\right)+\frac{8}{9}\cos\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{5}{9}\cos\left(\left(\frac{3+\sqrt{0.6}}{2}\right)^2\right)\right)$。

二、解下列各题：（共 36 分，每小题 9 分）

1. 同 A 卷

2. 设 $y=\sin x$ 的函数数据表如下:

x_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_k	0.099 83	0.198 67	0.295 52	0.389 42	0.479 43	0.564 64

利用适当三阶的牛顿插值公式计算 $\sin(0.58)$ 的近似值（保留 5 位小数）并利用余项公式估

计误差。

解: 首先构造差分表如下:

x_k	f_k	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.1	0.099 83	0.098 84	− 0.001 99	− 0.000 96
0.2	0.198 67	0.096 85	− 0.002 95	− 0.000 94
0.3	0.295 52	0.093 90	− 0.003 89	− 0.000 91
0.4	0.389 42	0.090 01	− 0.004 80	
0.5	0.479 43	0.085 21		
0.6	0.564 64			

(3 分)

因 0.58 位于表末, 故取 $x_n = x_5 = 0.6$,此时 t = − 0.2, h=0.1 . 利用三次 Newton 后插公式有:

$$\sin 0.58 \approx N_3(0.5 + th) = f_5 + t\nabla f_5 + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_5 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f_5$$

$$= 0.56464 + (-0.2)\times 0.08521 + \frac{(-0.2)\times(-0.2+1)}{2}\times(-0.00480)$$

$$+ \frac{(-0.2)\times(-0.2+1)\times(-0.2+2)}{3!}\times(-0.00091)$$

$$= 0.54802 .$$

(7 分) .

由三次 Newton 后插公式的余项误差估计式

$$|R_3(0.58)| \le \left|\frac{(-0.2)\times(-0.2+1)\times(-0.2+2)\times(-0.2+3)}{4!}\times(0.1)^4\times\sin(0.6)\right|$$

$$\le 1.91\times 10^{-6}$$

(9 分)

3. 同 A 卷第 2 题
4. 同 A 卷

三、 应用题:(共 22 分,每小题 11 分)

1. 同 A 卷第 2 题
2. 同 A 卷第 1 题