2.2 线性规划的基本理论

本节介绍线性规划的基本理论，主要目的在于给出线性规划的最优性判别，为设计求解线性规划的算法提供理论基础，包括以下内容：

- 最优解存在性的几何刻画
  - 多面体相关性质
  - 最优性判别
- 对偶理论与最优性条件
  - 对偶问题
  - 对偶理论
  - 最优性条件

2.2 基本理论 — 几何特性

线性规划的可行域$\mathscr{F}$是由超平面和半空间围成的区域, 称之为多面体. 本小节结合$\mathscr{F}$的形状, 给出其最优解的一个判别条件.

引理 2.2.1 假设$x^0 \in \mathscr{F}$. x^0是线性规划(2.1.2)的基可行解当且仅当x^0的正分量所对应的系数列向量线性无关.

证明 由基可行解的定义, 引理的必要性易证. 下面证明引理的充分性. 不妨设x^0的前l个分量为正分量, 那么x^0可写为

$$x^0 := (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_l^0, 0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad \text{其中} x_j^0 > 0,\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, l\}.$$

设x^0的正分量对应的列向量$P_1, P_2, \ldots, P_l$线性无关. 由$rank(A) = m$, 可知$l \le m$. 根据$x^0 \in \mathscr{F}$可得$Ax^0 = b$, 所以$\sum_{j=1}^{l} x_j^0 P_j = b$.

- 若$l = m$, 则$(P_1 \ \ P_2 \ \ \ldots \ \ P_m)$是线性规划(2.1.2)的一个基, 因此$x^0$是与此基对应的基可行解.

- 若$l < m$, 则由$rank(A) = m$及线性代数的知识, 可从$P_{l+1}, P_{l+2}, \ldots, P_n$中选出$m - l$个向量, 使得它们与$P_1, P_2, \ldots, P_l$一起构成(2.1.2)的一个基, 因此$x^0$是与此基对应的基可行解.

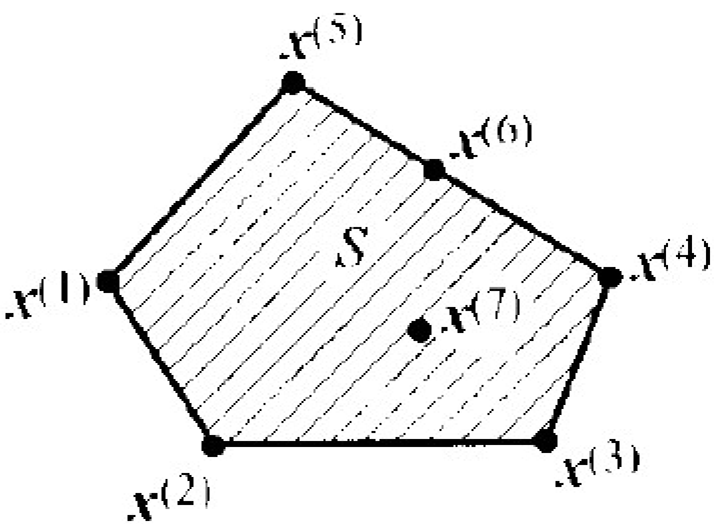
引理得证. □

2.2 基本理论 — 几何特性

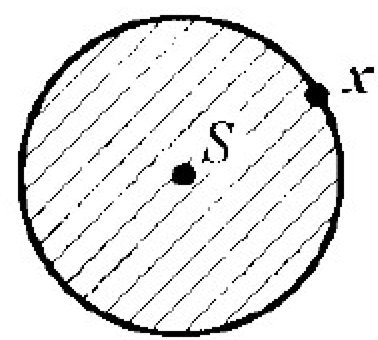
定义 2.2.1 设$\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n$为凸集且$x \in \mathscr{F}$. 若$\mathscr{F}$中不存在两个不同点$y, z$及某一实数$\alpha \in (0, 1)$使得

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z,$$

则称x为$\mathscr{F}$的一个极点.



(a)



(b)

2.2 基本理论 — 几何特性

定理 2.2.1 假设$x^0 \in \mathscr{F}$. x^0是线性规划*(2.1.2)*的基可行解当且仅当x^0为可行域$\mathscr{F}$的极点.

证明 先证必要性. 不妨设$x^0 := (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_l^0, 0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$是线性规划(2.1.2)的一个基可行解, 其中$x_j^0 > 0\ (j \in \{1, 2, \ldots, l\})$, 且$P_1, P_2, \ldots, P_l$是$x^0$中正分量所对应的基向量. 那么由引理2.2.1, 可知$P_1, P_2, \ldots, P_l$线性无关.

假设$y, z \in \mathscr{F}$, $\alpha \in (0, 1)$, 且$x^0 = \alpha y + (1 - \alpha) z$. 那么由$\alpha \in (0, 1), y, z \geq 0$及$x_j^0 = 0\ (j \in \{l+1, l+2, \ldots, n\})$, 可得

$$y_j = z_j = 0, \quad \forall j \in \{l+1, l+2, \ldots, n\}. \tag{2.2.1}$$

因此, 再由$y, z \in \mathscr{F}$得: $\sum_{j=1}^{l} y_j P_j = b$和$\sum_{j=1}^{l} z_j P_j = b$. 两式相减得

$$\sum_{j=1}^{l} (y_j - z_j) P_j = 0.$$

由于向量组$P_1, P_2, \ldots, P_l$是线性无关的, 因而由上式可得: 对任意的$j \in \{1, 2, \ldots, l\}$都有$y_j = z_j$. 这与(2.2.1)式相结合可得$y = z$. 所以, 由定义2.2.1可知: x^0为$\mathscr{F}$的极点.

2.2 基本理论 — 几何特性

再证充分性. 不妨设$x^0 := (x_1^0, \ldots, x_l^0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ 是$\mathscr{F}$的极点, 其中$x_j^0 > 0 \ (j \in \{1, \ldots, l\})$, 且$P_1, \ldots, P_l$是$x^0$中正分量对应的系数列向量. 设$x^0$不是(2.1.2)的基可行解, 则由引理2.2.1可知$P_1, P_2, \ldots, P_l$线性相关, 即存在不全为零的数$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$使得$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j P_j = 0$. 又由$x^0 := (x_1^0, \ldots, x_l^0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathscr{F}$得$\sum_{j=1}^{l} x_j^0 P_j = b$. 由以上两式可得

$$\sum_{j=1}^{l} (x_j^0 + \epsilon\alpha_j) P_j = b \quad 和 \quad \sum_{j=1}^{l} (x_j^0 - \epsilon\alpha_j) P_j = b, \tag{2.2.2}$$

其中$\epsilon > 0$. 记

$$\begin{aligned} x^+ &:= (x_1^0 + \epsilon\alpha_1, x_2^0 + \epsilon\alpha_2, \ldots, x_l^0 + \epsilon\alpha_l, 0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n, \\ x^- &:= (x_1^0 - \epsilon\alpha_1, x_2^0 - \epsilon\alpha_2, \ldots, x_l^0 - \epsilon\alpha_l, 0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

那么由(2.2.2)式可得$Ax^+ = Ax^- = b$. 另外, 当$\epsilon > 0$充分小时, 显然有$x^+ \geq 0$和$x^- \geq 0$. 所以, 当$\epsilon > 0$充分小时, 可得到

$$x^+, x^- \in \mathscr{F}, \quad x^+ \neq x^-, \quad 且\ x^0 = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}x^-.$$

这与x^0为$\mathscr{F}$的极点相矛盾. 所以x^0是(2.1.2)的基可行解. □

2.2 基本理论 — 几何特性

命题 2.2.1 若$\mathscr{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, 则$\mathscr{F}$有极点.

证明 任意取定$z^0 \in \mathscr{F}$. 若z^0不是$\mathscr{F}$的极点, 则存在两个不同点$u^1, v^1 \in \mathscr{F}$和一个$\lambda_0 \in (0,1)$使得$z^0 = \lambda_0 u^1 + (1-\lambda_0)v^1$. 下面构造一个点使其比$z^0$的零分量要多. 显然，对任意的实数$\lambda$, 若记$z := \lambda u^1 + (1-\lambda)v^1$, 则有$Az = b$; 同时, 若$z^0$ 的某个分量为零, 则u^1, v^1, z的对应分量均零. 不妨设v^1至少有一个分量大于u^1的对应分量, 并且记

$$\lambda_1 := \min\left\{ \frac{v_i^1}{v_i^1 - u_i^1} \;\middle|\; v_i^1 > u_i^1 \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \right\}.$$

那么$z^1 := \lambda_1 u^1 + (1-\lambda_1)v^1 = v^1 + \lambda_1(u^1 - v^1) \geq 0$, 且$z^1$ 比z^0至少增加一个零分量. 若z^1是$\mathscr{F}$的极点, 得证; 否则, 重复以上过程, 由于$\mathscr{F}$中点的零分量个数不能无限增加, 因此, 以上过程, 或者在有限步内终止于$\mathscr{F}$的一个极点; 或者在第k步终止于$z^k := 0$. 在后一种情况，有$b = Az^k = 0$, 且由$0 = z^k = \lambda_k u^k + (1-\lambda_k)v^k$和$u^k, v^k \geq 0$可得: $u^k = v^k$, 因此0是此种情况下的$\mathscr{F}$的极点. □

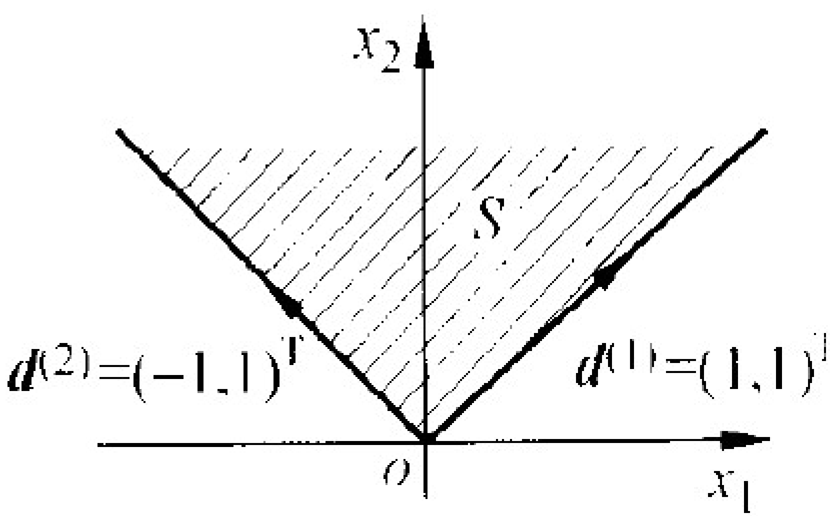
结合定理2.2.1和命题2.2.1可得以下结论.

定理 2.2.2 假设$\mathscr{F} \neq \emptyset$, 那么线性规划*(2.1.2)*存在基可行解.

2.2 基本理论 — 几何特性

假设$C \subseteq \mathbb{R}^n$是一个凸集且$d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 若对任意的$x \in C$和$\lambda > 0$, 均有$x+\lambda d \in C$, 则称$d$为$C$的一个**方向**. 显然, 若$d$是$C$的方向, 则对任意的$\alpha > 0$, $d^1 = \alpha d$也是C的方向, 这是称d与d^1为相同的方向. 如果方向$d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$, 必有$d^1 = \alpha d^2$, 即当方向$d$不能表示成两个方向的正的线性组合时, 则称$d$为$C$的**极方向**.

对于$\mathscr{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, $\mathscr{F}$是无界集当且仅当它有极方向, 且它的极方向个数是有限的.



2.2 基本理论 — 几何特性

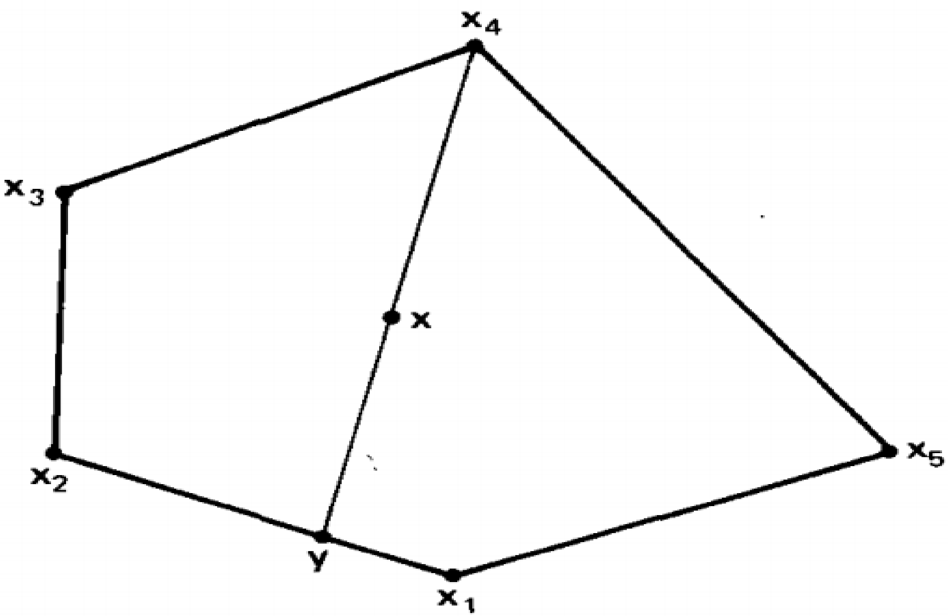
下面的定理被称为线性规划的**表示定理**.

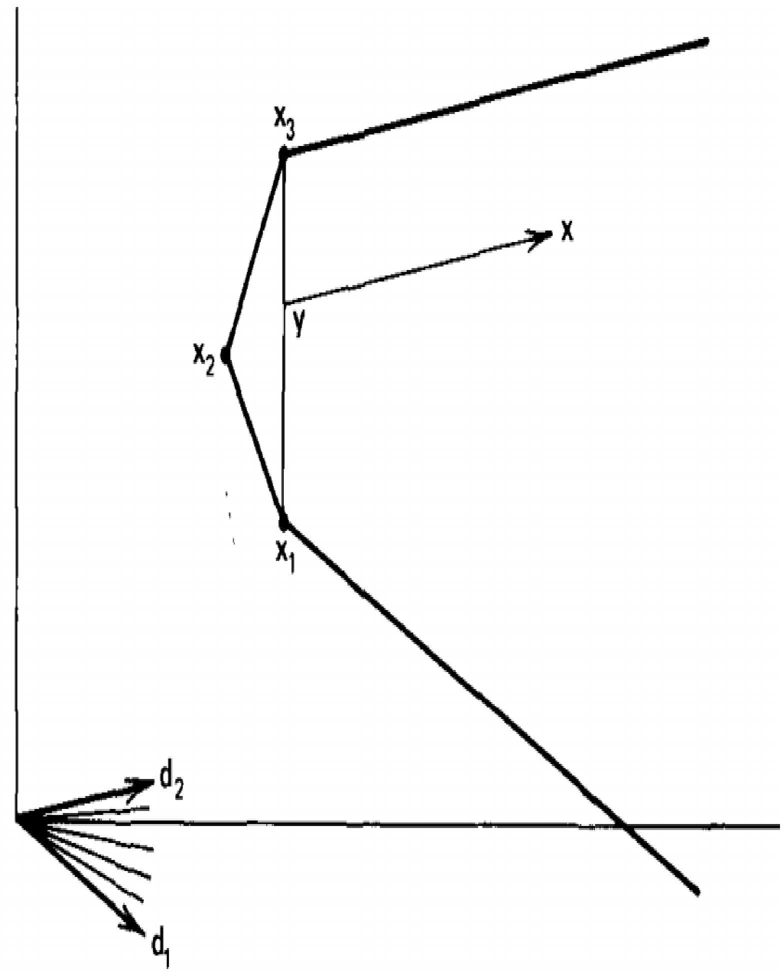
定理 2.2.3 假设$\mathscr{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$的所有极点为$x^1, x^2, \ldots, x^k$, 极方向为$d^1, d^2, \ldots, d^l$, 则任意的$x \in \mathscr{F}$当且仅当存在一组$\lambda_i$和$\mu_j$, 使得

$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d^j,$

$\lambda_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

$\mu_j \geq 0 \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, l\}.$





2.2 基本理论 — 几何特性

定理 2.2.4 若线性规划(2.1.2)存在最优解, 那么它必定存在某个基可行解是其最优解. 线性规划(2.1.2)有最优解当且仅当对可行域$\mathscr{F}$的所有极方向d, 均有$c^\top d \geq 0$.

证明 假设$\mathscr{F}$的所有极点为$x^1, x^2, \ldots, x^k$ $(k \geq 1)$, 极方向为d^1, $d^2, \ldots, d^l$ $(l \geq 0)$, 则对任意的一点$x \in \mathscr{F}$, 存在一组λ_i和μ_j, 使得

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d^j,$$

$$\lambda_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

$$\mu_j \geq 0 \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, l\}.$$

因此, 线性规划(2.1.2)可转化为以λ_i和μ_j为变量的线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{k}(c^\top x^i)\lambda_i + \sum_{j=1}^{l}(c^\top d^j)\mu_j \\ \text{s.t.} \quad & \lambda_i \geq 0 \ \forall i \in \{1,2,\ldots,k\}, \quad \textstyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \\ & \mu_j \geq 0 \ \forall j \in \{1,2,\ldots,l\}. \end{aligned}$$

由于μ_j可以任意地大, 所以对某个极方向d^j有$c^\top d^j < 0$, 则该线性规划的目标函数无下界. 若对所有的$j \in \{1,2,\ldots,l\}$均有$c^\top d^j \geq 0$, 或者不存在极方向, 记

$$c^\top x^p := \min\{c^\top x^i \mid i \in \{1,2,\ldots,k\}\},$$

则(2.1.2)的目标函数值不小于$c^\top x^p$. 令$\lambda_p = 1$且其余的λ_i和所有的μ_j都为0, 显然就得到了线性规划(2.1.2)的最优值$c^\top x^p$. □

2.2 基本理论 — 几何特性

注 (1) 定理2.2.4的第一个结论表明: 若线性规划(2.1.2)存在最优解, 那么可以从其可行域$\mathscr{F}$的顶点中来找最优解. (2) 由于可行域$\mathscr{F}$的任意一个方向可以表示成它的极方向的正的线性组合, 所以由定理2.2.4的第二个结论可得: 线性规划(2.1.2)有最优解当且仅当对可行域$\mathscr{F}$的所有方向d, 均有$c^\top d \geq 0$.

回忆可行域$\mathscr{F}$的顶点个数最多为C_n^m个. 当n, m较小时, C_n^m也较小, 可先找出所有的基可行解, 然后比较基可行解对应的目标函数值来获得最优解. 然而, 当n, m较大时, C_n^m也很大, 以上穷举法是不可行的, 需要按照一定的规则从基可行解中找线性规划(2.1.2)的最优解.

定理2.2.4为下一节求解线性规划的单纯形算法提供了理论基础.

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

一、对偶规划问题 考虑以下线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \ge b, \quad x \ge 0. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

假设问题(2.2.3)的可行域$\mathscr{F}$非空, 一个重要的问题是: 如何系统地找目标函数在可行域上尽可能大的下界?

对任意的$y \in \mathbb{R}^m_+$, 由$Ax \ge b$可得: $b^\top y \le (Ax)^\top y = x^\top(A^\top y)$. 如果$A^\top y \le c$, 那么$b^\top y \le c^\top x$. 这表明: $b^\top y$是问题(2.2.3)中目标函数的一个下界. 进而, 以下线性规划问题的最优值是问题(2.2.3)中目标函数在其可行域上的最大下界:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A^\top y \le c, \quad y \ge 0. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

称问题(2.2.4)为线性规划问题(2.2.3)的对偶问题, 其中每个y_i $(i = 1, \cdots, m)$称为对偶变量. 称问题(2.2.3)为原问题.

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

原问题(2.2.3)与对偶问题(2.2.4)具有以下五个特点:

- 从目标函数和线性不等式约束来看, “min, $\geq$”与“max, $\leq$”相对应;
- 两个问题约束条件的系数矩阵互为转置;
- 价格系数向量和右端向量在两个问题中的位置互换;
- 每个问题的变量个数等于另一个问题中不等式约束条件的个数;
- 两个问题中的变量皆为非负.

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

定理 2.2.5 *(对合性) 线性规划(2.2.4)的对偶规划是问题(2.2.3).*

证明 考虑线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & (-b)^\top y \\ \text{s.t.} \quad & (-A)^\top y \geq -c, \quad y \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

显然, 问题(2.2.5)与对偶问题(2.2.4)有相同的最优解集且最优值互为相反数. 按照对偶规划的定义知: 问题(2.2.5)的对偶规划为

$$\begin{aligned} \max \quad & (-c)^\top x \\ \text{s.t.} \quad & (-A)x \leq -b, \quad x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

易知问题(2.2.6)与原问题(2.2.3)具有相同的最优解集并且最优值互为相反数. 因此, 对偶规划(2.2.4)的对偶问题是原规划(2.2.3). □

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

定理 2.2.6 如果线性规划问题(2.2.3)的第k $(1 \le k \le m)$个约束为等式约束，即$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{km}x_m = b_k$，那么对偶规划问题(2.2.4)中对应的第$k$个变量$y_k$为自由变量.

证明 线性规划问题(2.2.3)等价于

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\
& \cdots\cdots \\
& a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{km}x_m \ge b_k, \\
& -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \cdots - a_{km}x_m \ge -b_k, \\
& \cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m, \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0,
\end{aligned}
$$

其对偶规划为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & b_1y_1 + \cdots + b_{k-1}x_{k-1} + b_k(y_k' - y_k'') + b_{k+1}y_{k+1} + \cdots + b_my_m \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}y_1 + \cdots + a_{(k-1)1}y_{k-1} + a_{k1}(y_k' - y_k'') + a_{(k+1)1}y_{k+1} + \cdots + a_{m1}y_m \le c_1, \\
& \cdots\cdots \\
& a_{1n}y_1 + \cdots + a_{(k-1)n}y_{k-1} + a_{kn}(y_k' - y_k'') + a_{(k+1)n}y_{k+1} + \cdots + a_{mn}y_m \le c_n, \\
& y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k', y_k'', y_{k+1}, \ldots, y_m \ge 0,
\end{aligned}
$$

令$y_k := y_k' - y_k''$，则y_k就是自由变量. □

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

定理 2.2.7 若线性规划(2.2.3)的第l $(1 \le l \le n)$个变量为自由变量, 那么对偶规划(2.2.4)中对应的第l个约束为等式约束.

利用对偶规划的定义, 结合定理2.2.6和定理2.2.7, 对任意的连续型线性规划可直接写出其对偶规划. 例如: 线性规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^\top x \\
\text{s.t.} \quad & Ax \ge b
\end{aligned}
\tag{2.2.7}
$$

的对偶规划为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & b^\top y \\
\text{s.t.} \quad & A^\top y = c, \quad y \ge 0;
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

一般线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

的对偶规划为

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A^\top y \leq c. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

例 2.2.1 写出以下线性规划问题的对偶规划:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
s.t. & 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & \geq & 10, \\
 & -4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 6, \\
 & -2x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & \geq & 2,
\end{array}
$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3$ 为自由变量, $x_4 \geq 0$.

解 设对偶变量为y_1, y_2, y_3, 那么所求对偶规划为

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 10y_1 & + & 6y_2 & + & 2y_3 & & \\
\text{s.t.} & 3y_1 & - & 4y_2 & - & 2y_3 & \leq & 1, \\
 & -2y_1 & + & y_2 & & & \leq & -2, \\
 & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & = & -3, \\
 & & & -y_2 & + & 2y_3 & \leq & 4,
\end{array}
$$

$y_1 \geq 0, y_2$为自由变量, $y_3 \geq 0$.

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

二、对偶理论 由于不同形式的线性规划之间可以相互转化，所以，不失一般性，下面以原线性规划(2.2.7) 和对偶线性规划(2.2.8)这一对问题为例，讨论线性规划的对偶理论.

定理 2.2.8 *(弱对偶定理)* 线性规划*(2.2.7)*中任一可行解对应的目标函数值不小于其对偶规划*(2.2.8)*中任一可行解对应的目标函数值.

证明 设x^*是问题(2.2.7)的任一可行解，则$Ax^* \geq b$. 设y^*是问题(2.2.8)的任一可行解，则$A^\top y^* = c$且$y^* \geq 0$. 所以,

$$b^\top y^* \leq (Ax^*)^\top y^* = (x^*)^\top A^\top y^* = (x^*)^\top c.$$

结论得证. $\square$

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

推论 2.2.1 假设x^*, y^*分别是原线性规划(2.2.7)和其对偶线性规划(2.2.8)的可行解且$c^\top x^* = b^\top y^*$, 那么x^*, y^*分别是原线性规划(2.2.7)和对偶线性规划(2.2.8)的最优解.

证明 设x是问题(2.2.7)的任一可行解, 由弱对偶定理, 则有$c^\top x \geq b^\top y^*$. 于是可得$c^\top x \geq c^\top x^*$. 故x^*是原线性规划(2.2.7)的最优解. 类似可证: y^*是对偶线性规划(2.2.8)的最优解. □

推论 2.2.2 *(i)* 如果原线性规划(2.2.7)可行但无下界, 那么其对偶线性规划(2.2.8)无可行解.

(ii) 如果对偶线性规划(2.2.8)可行但无上界, 那么原线性规划问题(2.2.7)无可行解.

证明 只证(i),类似可证(ii). 用反证法. 假设对偶线性规划(2.2.8)存在可行解, 令为y^0, 那么对原线性规划(2.2.7)的任一可行解x, 由弱对偶定理可知: $c^\top x \geq b^\top y^0$. 这与原线性规划(2.2.7)无下界相矛盾. □

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

定理 2.2.9 (强对偶定理) 考虑原问题(2.2.7)和对偶问题(2.2.8). 下面五个命题是等价的:

(i) 原线性规划(2.2.7)可行且有下界.

(ii) 对偶线性规划(2.2.8)可行且有上界.

(iii) 原线性规划(2.2.7)存在最优解.

(iv) 对偶线性规划(2.2.8)存在最优解.

(v) 原线性规划(2.2.7)和对偶线性规划(2.2.8)均可行.

另外, 在任何一种情况下, 原、对偶线性规划的最优值相等.

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

证明 首先证明“$(i) \Longrightarrow (iv)$”: 令$c^* := \inf_x\{c^\top x \mid Ax \geq b\}$. 由于原规划(2.2.7)可行且有下界, 因而对任意满足$Ax \geq b$的x都有$c^\top x \geq c^*$. 进而, 不等式组$-c^\top x > -c^*$, $Ax \geq b$ 无解, 即: 不等式组

$$[-A\ b]\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} -c \\ c^* \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \qquad \begin{array}{l} Ax \leq 0, \quad b^\top x > 0; \\ A^\top y = b, \quad y \geq 0. \end{array}$$

无解. 由Farkas引理(引理1.3.1), 可知存在非负向量$y^* \in \mathbb{R}^m$使得

$$[-A\ b]^\top y^* = \begin{pmatrix} -c \\ c^* \end{pmatrix}, \quad \text{即：} \quad A^\top y^* = c, \quad b^\top y^* = c^*$$

成立. 这表明: y^*是对偶线性规划(2.2.8)的一个可行解且对应的目标函数值等于c^*; 再由弱对偶定理, 可知对偶线性规划(2.2.8)的任一个可行解对应的目标函数值小于等于c^*. 因此, y^*是对偶线性规划(2.2.8)的一个最优解, 即(iv)成立.

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

注意到: "$(iv) \Longrightarrow (ii)$"是显然的; 由对合性定理和结论"$(i) \Longrightarrow (iv)$"知: "$(ii) \Longrightarrow (iii)$"成立; 且"$(iii) \Longrightarrow (i)$"是显然的, 所以得到命题$(i), (ii), (iii), (iv)$是等价的.

现在证明(iii)与(v)等价. 一方面, 如果(iii)成立, 那么(iv)也成立, 由(iii)和(iv)显然得到(v)成立, 即"$(iii) \Longrightarrow (v)$"成立; 另一方面, 假设$(v)$成立, 由于对偶线性规划(2.2.8)的任一个可行解对应的目标函数值是原线性规划的一个下界, 因而(i)成立, 进而(iii)成立, 即"$(v) \Longrightarrow (iii)$"成立. 由此，可证得上述五个命题等价.

最后证明原、对偶线性规划的最优值相等. 由于五个命题是等价的, 因此只需证明在命题(i)下的结论成立即可. 由命题(i)成立, 则原、对偶线性规划均存在最优解. 在此情况下, 在"$(i) \Longrightarrow (iv)$"的证明中定义的c^*是原线性规划的最优值, 再由"$(i) \Longrightarrow (iv)$"的证明, 可知原、对偶线性规划的最优值相等. $\square$

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

三、最优性条件 由于线性规划之间可以相互转化, 不失一般性, 下面以原线性规划(2.2.9)和对偶线性规划(2.2.10) 这一对优化问题为例, 讨论线性规划最优解的判别条件.

定理 2.2.10 *(互补松弛条件)* 设x^*, y^*分别是原线性规划*(2.2.9)*和对偶线性规划*(2.2.10)*的可行解. 则x^*, y^*分别是原线性规划*(2.2.9)*和对偶线性规划*(2.2.10)*的最优解当且仅当$(x^*)^\top(A^\top y^* - c) = 0$.

证明 先证必要性. 由于原、对偶线性规划存在最优解, 因而由强对偶定理可知它们的最优值相等, 即$c^\top x^* = b^\top y^*$. 将$b = Ax^*$代入上式, 即可得到$(x^*)^\top(A^\top y^* - c) = 0$.

再证充分性. 由$(x^*)^\top(A^\top y^* - c) = 0$和$Ax^* = b$可得

$$c^\top x^* = (x^*)^\top A^\top y^* = (Ax^*)^\top y^* = b^\top y^*.$$

再由推论2.2.1, 可得x^*, y^*分别是原线性规划(2.2.9)和对偶线性规划(2.2.10)的最优解. □

定理2.2.10实际上给出了线性规划最优解的判别条件.

定理 2.2.11 *(最优性条件)*　设$\mathscr{F}$, $\mathscr{D}$分别表示原线性规划 *(2.2.9)* 和对偶线性规划*(2.2.10)*的可行域. 则$x^* \in \mathbb{R}^n$, $y^* \in \mathbb{R}^m$分别是原线性规划*(2.2.9)*和对偶线性规划*(2.2.10)*的最优解当且仅当$x^* \in \mathbb{R}^n$, $y^* \in \mathbb{R}^m$满足以下条件:

$$x^* \in \mathscr{F}, \quad y^* \in \mathscr{D}, \quad (x^*)^\top (A^\top y^* - c) = 0.$$

通过引入松弛变量s, 对偶线性规划(2.2.10)可转化为:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A^\top y + s = c, \quad s \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

因此，定理2.2.11可叙述如下:

2.2 基本理论 — 对偶理论与最优性条件

定理 2.2.12 (最优性条件) $x^* \in \mathbb{R}^n, (y^*, s^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 分别是原线性规划(2.2.9)和对偶线性规划(2.2.11)的最优解当且仅当下面的等式与不等式组成立:

$$\begin{cases} Ax^* = b, \\ A^\top y^* + s^* = c, \\ x^* \geq 0, \quad s^* \geq 0, \quad (x^*)^\top s^* = 0. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

最优性条件为求解原、对偶线性规划的最优解提供了理论基础. 例如: 可以通过求解等式与不等式组(2.2.12)式来求解原线性规划(2.2.9)和对偶线性规划(2.2.11)的最优解.

2.2 基本理论 — 作业

2.5 写出下列线性规划问题的对偶规划.

$$
\text{(2)}\quad \begin{array}{llllllllll}
\min & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6, \\
 & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & \geq & 3, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$$
\text{(4)}\quad \begin{array}{ll}
\min & c^\top x \\
\text{s.t.} & Ax = b, l \leq x \leq u,
\end{array}
$$

其中l, u是变量x的上下界向量.

2.6 设x^*, y^*分别为以下两个问题的可行解:

$$
\text{(I)}\quad \begin{array}{ll}
\min & c^\top x \\
\text{s.t.} & Ax \geq b, x \geq 0.
\end{array}
\qquad\qquad
\text{(II)}\quad \begin{array}{ll}
\min & b^\top y \\
\text{s.t.} & A^\top y \leq c, y \geq 0.
\end{array}
$$

试证明：$c^\top x^* \geq b^\top y^*$.

2.2 基本理论 — 作业

2.7 设z^*, s^*分别为以下两个优化问题的最优值：

$$
\text{(I)}\quad \begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax = b, x \geq 0. \end{array} \qquad \text{(II)}\quad \begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax = b + d, x \geq 0. \end{array}
$$

若y^*是问题(I)对偶问题的最优解. 试证明：$z^* + d^\top y^* \leq s^*$.

2.9 给定一个线性规划问题:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 1, \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \geq & 2, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

假设已知该问题的对偶问题的最优解为$(y_1, y_2)^\top = (5/3, 7/3)^\top$.
试利用线性规划的最优性条件求出原问题的最优解.