2019 ～2020 学年第二学期期中考试试卷

《 线性代数及其应用 》

（考试时间：2020 年 4 月 10 日）

题号	一	二	三	成绩	核分人签字
得分					

第 I 卷　客观题卷

一、　单项选择题与多项选择题（共 40 分，每题 5 分，多选题如果少选按比例得部分分数，如果存在错选不得分）

1、已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 9x & x & 2 & 1 \\ -2 & x & 2 & -2 \\ 2 & 0 & x & 1 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix}$，则 D 中 x^3 项的系数为(　　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) −2　　(D) 6

2、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵， $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶初等矩阵，且 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$，则一定有(　　　).

(A) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　(B) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则一定有 $|\boldsymbol{B}|=0$

(C) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$　　(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵

3、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则齐次线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ (　　　).

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解　　(B) 当 $n>m$ 时必有非零解

(C) 当 $m>n$ 时仅有零解　　(D) 当 $m>n$ 时必有非零解

4、下列命题中，不一定正确的有(　　　).

(A)如果 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 必可逆.

(B)如果 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵， $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 必可逆.

(C)如果 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶不可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 必不可逆.

(D)如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则必有 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

5、非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_4 = a_3, \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} - x_n = a_{n-1}, \\ x_n - x_1 = a_n \end{cases}$有解的充分必要条件是（　　　）.

(A) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$　　　　(B) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

(C) $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$　　　　(D) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}$

6、已知行列式$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1+1 \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_2+1 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3+1 & a_3 & a_3 \\ a_4 & a_4+1 & a_4 & a_4 & a_4 \\ a_5+1 & a_5 & a_5 & a_5 & a_5 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$为$D$中$(i, j)$元的代数余子式，则$\sum_{j=1}^{5} A_{5j} =$（　　　）.

（A） 5　　（B） 4　　（C）1　　（D）0

7、设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$均为$n \times n$矩阵，则下列叙述一定正确的有（　　　）.

(A) $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$　　　　(B) $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{BA})$

(C) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$　　　　(D) $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{BA})$

8、设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$均为$n$阶方阵，且$|\boldsymbol{A}| = 1, |\boldsymbol{B}| = 2,$ 则行列式

$$\left| \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} + 2\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}} - \left((\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1} \right| =（　　　）.$$

（A） -2^n （B） 2^{n+1} （C） -2 （D） 1

第 II 卷　主观题卷

二、解答题（共 4 个小题，合计 52 分）

1、（7 分）设线性方程组 $\begin{cases} (\lambda-4)x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + (\lambda+1)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 6x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$ 有非零解，求参数 λ 的取值范围.

2、（16 分）当 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_4 = a, \\ -x_1 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = b \end{cases}$$

无解？有解？有解时求出其向量形式通解.

3、（14 分）设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

4、（15 分）设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^{2m}$，其中 m 为正整数.

三、证明题 （8 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = m$.

(1) 证明：存在 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{D}$，使得 $\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{E}_m$.

(2) 若还存在 m 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$，满足 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{CB} = \boldsymbol{O}$，求 $|\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{B}|$.