学院__________ 专业_____________ ____班 年级______ 学号_____________ 姓名_________ A卷 共三页 第1页

2008~2009学年第一学期期末考试试卷

《数值计算方法与Matlab》（A卷 共三页）

（考试时间：2008年12月30日）

题　号	一	二	三	成　绩	核分人签字
得　分					

一、填空题：（共42分，每空3分）按要求把正确的答案填在每题中的横线上方。

1. 在科学与工程计算中，不可避免地要遇到各种误差中，其中数值计算方法可以处理的误差是______________________。舍入与截断误差

2. 已知函数 $y=f(x)$ 的三对数据 (0,1)，(-1，5)（2，-1），则二阶差商 $f[0,-1,2]=$______，过此三点的Lagrange插值多项式为__________。

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=2.5, 2.7$ 和 2.9 处的函数值分别为 $12.1825, 14.8797$ 和 18.1741。若用三点数值微分公式计算，则在 $x=2.7$ 处的函数一阶和二阶导数的近似值分别为__________和__________（保留5位有效数字）。

4. 建立常微分方程初值问题 $y'(x)=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ 的计算格式有三种基本方法，它们是______________________；改进 Euler 公式为______________，它是____阶方法。

5. 若用线性最小二乘法拟合数学模型 $y=\dfrac{t}{at+b}$，其中 a,b 是待定参数，那么如何将其线性化：______________________。

$y^{-1}=a+bt^{-1}$，令 $u=y^{-1}, x=t^{-1}$，用 $u=a+bx$ 来拟合

6. 利用三点 Gauss-Legendre 求积公式计算积分 $\int_1^2 x\,e^{-x}\,dx$ 的数值计算公式为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{5}{9}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3/5}+\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{-\sqrt{3/5}+3}{2}}+\frac{8}{9}\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)+\frac{5}{9}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3/5}+\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{\sqrt{3/5}+3}{2}}\right]。$$

7. 在科学与工程计算中，常常使用分段低次插值，这是为了避免______。

8. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，则 $cond_\infty(A)=$ 3______（写出精确值)。当 b 有误差 $\delta b=\begin{pmatrix}\varepsilon^2\\ \varepsilon\end{pmatrix}$ 时，其中 $0<\varepsilon<1$，引起解向量 x 的为误差 δx，则 $\dfrac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ 的上界为 3ε______。

二、解下列各题：（共36分，每小题9分）

1. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指出所确定的求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(-1)+A_1 f(x_1)$$

解：分别取 $f(x)=1, x, x^2$ 代入上面的积分公式使之准确成立，（1分）

得到：
$$\begin{cases}2=A_0+A_1\\ 0=-A_0+A_1x_1\\ \frac{2}{3}=A_0+A_1x_1^2\end{cases}$$
（3分）

解得：$x_1=\frac{1}{3}, A_0=\frac{1}{2}, A_1=\frac{3}{2}$。（3分）

将 $f(x)=x^3$ 代入上面的积分公式，左边等于0，而右边等于 $-4/9$，积分公式不准确成立，所以代数精度为2。（3分）

2.写出用 Gauss-Seidel 迭代法求解线性代数方程组 $\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ 的迭代格式，并判断它的敛散性。

解：Gauss-Seidel 迭代格式的分量形式

$$x_1^{(k+1)}=1-2x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)}=1-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)} \qquad (5分)$$

$$x_3^{(k+1)}=1-2x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}$$

其迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_{GS}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad (7分)$$

其特征方程为

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}_{GS})=\det\begin{bmatrix}\lambda & 2 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 3\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$$

故特征值 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=2$ 其谱半径 $\rho(\mathbf{B}_{GS})=2$，所以 Gauss-Seidel 迭代法发散。(9分)

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0,1,2,3$ 处的数值分别为1,3,5,12。试用3次Newton插值公式计算 $f(0.5)$ 和 $f(2.5)$ 的近似值。

解：因为是等距节点（步长h=1），所以先构造差分表如下：

x	f(x)	一阶差分	二阶差分	三阶差分
0	1			
1	3	2		
2	5	2	0	
3	12	7	5	5

由于 $x=0.5$ 介于0与1之间（在表头），故取 $x_0=0$。此时 $t=(x-x_0)/h=0.5$，利用三次 Newton 前插公式有：

$$N_3(x_0+th)=f_0+t\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$f(0.5)\approx N_3(0.5)=1+0.5\times2+\frac{1}{2}\times0.5\times(0.5-1)\times0+\frac{1}{6}\times0.5\times(0.5-1)(0.5-2)\times5$$

$$=2.3125$$

由于 $x=2.5$ 介于2与3之间（在表末），故取 $x_3=0$。此时 $t=(x-x_3)/h=-0.5$，利用三次 Newton 后插公式有：

$$N_3(x_3+th)=f_3+t\nabla f_3+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_3+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f_3$$

$$f(2.5)\approx N_3(2.5)=12+(-0.5)\times7+\frac{(-0.5)\times(-0.5+1)}{2}\times5+\frac{(-0.5)\times(-0.5+1)\times(-0.5+2)}{3!}\times5$$

$$=12-3.5-\frac{0.5\times0.5}{2}\times5-\frac{0.5\times0.5\times1.5}{6}\times5$$

$$=7.5625$$

4.用 n=4 的复化 Simpson 公式计算积分 $\int_1^9\sqrt{x}\,dx$ 的近似值；与真值比较它有几位有效数字。

解：依题意将区间[1,9]四等分，$h=2$，节点为 $x_k=x_0+kh=1+2k$，$k=0,1,2,3,4$．由复化 Simpson 公式，得

$$S_4=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right] \qquad (4分)$$

$$=\frac{1}{3}\left[f(1)+4\sum_{k=0}^{3}f(2k+2)+2\sum_{k=1}^{3}f(2k+1)+f(9)\right]$$

$$=\frac{1}{18}\left[\sqrt{1}+4\left(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}\right)+2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{9}\right]\approx17.332087 \qquad (7分)$$

其真值为 $\int_1^9\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=1}^{x=9}=\frac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{52}{3}=17.\dot{3}$

绝对误差满足：$\left|17.332087-17.\dot{3}\right|\le0.00125=0.125\times10^{-2}=0.125\times10^{2-4}$，

根据有效数字的定义，知近似值有4位有效数字。 (9分)

三、应用题：（共22分，每小题11分）

1.已知离散数据如下：

x_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_k	80.4	53.9	36.1	24.2	16.2

试用最小二乘法求出经验公式 $y=a\mathrm{e}^{-bx}$ 中的 a, b。（结果保留3位小数）

解：对 $y=a\mathrm{e}^{-bx}$ 两边取自然对数，得 $\ln y=\ln a-bx$。令 $u=\ln y$，$a_0=\ln a$ 和 $a_1=-b$，则知原问题等价于在空间 $span\{1, x\}$ 中求拟合函数 $u(x)=a_0+a_1x$。　　（2分）

x_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
u_k	4.38701	3.98713	3.58629	3.18635	2.78501

此时 n=1，m=4，权函数 $\omega(x)\equiv 1, \varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$。则拟合函数中的系数 a_0 和 a_1 满足正规方程组：

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0)\\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(u,\varphi_0)\\ (u,\varphi_1)\end{pmatrix}。（7分）$$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}1=5,\qquad (\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}x_i=1.5,$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}x_i^2=0.55,\ (u,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}u_i=17.9318\ 和\ (u,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}u_ix_i=4.97906。$$

$$故有\begin{cases}5a_0+1.5a_1=17.9318\\ 1.5a_0+0.55a_1=4.97906\end{cases}\qquad（10分）$$

解得 a_0=4.7878, a_1=-4.0048,

由此 $a=\exp(a_0)\approx 120.0370$，$b=-a_1=4.0048$，

所以最小二乘解为 $y=120.037\mathrm{e}^{-4.0048x}$。(11分)

2. 隧道二极管电路的状态模型由下式给出：

$$\dot{x}_1=0.5[-h(x_1)+x_2]$$

$$\dot{x}_2=0.2[-x_1-1.5x_2+1.2]$$

其中 $\dot{x}_k, k=1,2$ 表示 x_k 对时间 t 的导数，该系统的右边项不显含时间 t，称之为自治系统，$h(x_1)$ 是一给定函数。初始条件取 x0=[1,0]。写出用经典四阶 Runge-Kutta 方法解此初值问题的计算格式。

解：

记 $x_n=\begin{pmatrix}x_{1,n}\\ x_{2,n}\end{pmatrix}$ 为精确解 $x(t_n)=\begin{pmatrix}x_1(t_n)\\ x_2(t_n)\end{pmatrix}$ 的数值近似，t_n 为节点。设

$$K_j=\begin{pmatrix}k_{1,j}\\ k_{2,j}\end{pmatrix}, j=1,2,3,4,\ f(t,x)=\begin{bmatrix}0.5\left(-h(x_1)+x_2\right)\\ 0.2\left(-x_1-Rx_2+u\right)\end{bmatrix},\ 初值\ x_0=x(0)=\begin{pmatrix}x_{1,0}\\ x_{2,0}\end{pmatrix}。(3分)$$

由标准四阶 Runge-Kutta 公式，得

$$x_{n+1}=x_n+\frac{\delta t}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4),$$

$$\begin{pmatrix}x_{1,n+1}\\ x_{2,n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{1,n}\\ x_{2,n}\end{pmatrix}+\frac{\delta t}{6}\left(\begin{pmatrix}k_{1,1}\\ k_{2,1}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}k_{1,2}\\ k_{2,2}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}k_{1,3}\\ k_{2,3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_{1,4}\\ k_{2,4}\end{pmatrix}\right)$$

$$K_1=\begin{pmatrix}k_{1,1}\\ k_{2,1}\end{pmatrix}=f(t_n,x_n)=\begin{bmatrix}0.5\left(-h(x_{1,n})+x_{2,n}\right)\\ 0.2\left(-x_{1,n}-Rx_{2,n}+1.2\right)\end{bmatrix},$$

$$K_2=\begin{pmatrix}k_{1,2}\\ k_{2,2}\end{pmatrix}=f(t_n+\frac{\delta t}{2},x_n+\frac{\delta t}{2}K_1)=\begin{bmatrix}0.5\left(-h\left(x_{1,n}+\frac{\delta t}{2}k_{1,1}\right)+x_{2,n}+\frac{\delta t}{2}k_{2,1}\right)\\ 0.2\left(-\left(x_{1,n}+\frac{\delta t}{2}k_{1,1}\right)-R\left(x_{2,n}+\frac{\delta t}{2}k_{2,1}\right)+u\right)\end{bmatrix},$$

$$K_3=\begin{pmatrix}k_{1,3}\\ k_{2,3}\end{pmatrix}=f(t_n+\frac{\delta t}{2},x_n+\frac{\delta t}{2}K_2)=\begin{bmatrix}0.5\left(-h\left(x_{1,n}+\frac{\delta t}{2}k_{1,2}\right)+x_{2,n}+\frac{\delta t}{2}k_{2,2}\right)\\ 0.2\left(-\left(x_{1,n}+\frac{\delta t}{2}k_{1,2}\right)-R\left(x_{2,n}+\frac{\delta t}{2}k_{2,2}\right)+1.2\right)\end{bmatrix},$$

$$K_4=\begin{pmatrix}k_{1,4}\\ k_{2,4}\end{pmatrix}=f(t_n+\delta t,x_n+\delta t\cdot K_3)=\begin{bmatrix}0.5\left(-h(x_{1,n}+\delta t\cdot k_{1,3})+(x_{2,n}+\delta t\cdot k_{2,3})\right)\\ 0.2\left(-(x_{1,n}+\delta t\cdot k_{1,3})-R(x_{2,n}+\delta t\cdot k_{2,3})+u\right)\end{bmatrix}.$$

$$x_{1,n+1}=x_{1,n}+\frac{\delta t}{6}(k_{1,1}+2k_{1,2}+2k_{1,3}+k_{1,4}),$$

$$x_{2,n+1}=x_{2,n}+\frac{\delta t}{6}(k_{2,1}+2k_{2,2}+2k_{2,3}+k_{2,4}),$$

$$k_{1,1}=0.5\left(-h(x_{1,n})+x_{2,n}\right),k_{2,1}=0.2\left(-x_{1,n}-Rx_{2,n}+1.2\right)$$

$$k_{1,2}=0.5\left(-h\left(x_{1,n}+\frac{\delta t}{2}k_{1,1}\right)+x_{2,n}+\frac{\delta t}{2}k_{2,1}\right),$$

$$k_{2,2}=0.2\left(-\left(x_{1,n}+\frac{\delta t}{2}k_{1,1}\right)-R\left(x_{2,n}+\frac{\delta t}{2}k_{2,1}\right)+1.2\right),$$

$$k_{1,3}=0.5\left(-h\left(x_{1,n}+\frac{\delta t}{2}k_{1,2}\right)+x_{2,n}+\frac{\delta t}{2}k_{2,2}\right),$$

$$k_{2,3}=0.2\left(-\left(x_{1,n}+\frac{\delta t}{2}k_{1,2}\right)-R\left(x_{2,n}+\frac{\delta t}{2}k_{2,2}\right)+1.2\right),$$

$$k_{1,4}=0.5\left(-h(x_{1,n}+\delta t\cdot k_{1,3})+(x_{2,n}+\delta t\cdot k_{2,3})\right),$$

$$k_{2,4}=0.2\left(-(x_{1,n}+\delta t\cdot k_{1,3})-R(x_{2,n}+\delta t\cdot k_{2,3})+1.2\right).$$

将初值 x_0，$n=0$ 代入上面各式，可依次计算出函数 x_1 和 x_2 的数值解 $x_{1,n},x_{2,n}$，$n=1,2,3,\ldots$。

（11 分）