天津大学 2017～2018 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：　S131A305　学院名称：__________ 专业名称:__________班 ____ 学号：__________　姓名：__________

一. 判断 （10 分）

1. 设X,Y是$\mathbf{K}$上的线性空间,算子$T:X\to Y$则$\{x\in X|Tx=0\}$是X的子空间.　(√)
2. $\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$线性无关.　(T)
3. 对 Legendre 多项式$p_0(x),p_1(x),\dots,p_n(x)$,有 $span\{p_0(x),p_1(x),\dots,p_n(x)\}=\mathrm{span}\{1,x,\dots,x^n\}$.　(T)
4. $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则$A^HA$可对角化.　(T)
5. 设$R(x)$是 Hermite 插值余项，则节点$x_k,k=0,1,\cdots,n$为$R(x)$的二重零点.　(T)
6. Cotes 系数$C_k^{(n)}$只与求积节点的个数有关而与被积函数和积分区间无关.　(√)
7. 设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\|\cdot\|$是$\mathbf{C}^{n\times n}$上的任意方阵范数，则
$$\|\boldsymbol{A}\|\le\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon,\forall\varepsilon>0.$$
(×)
8. $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则$(e^A)^H=e^{A^H}$.　(√)
9. 若$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$为 Gauss 型求积公式，则$\sum_{i=0}^{n}|A_i|=2$.　(×)
10. 若正规矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，其特征值均为实数，则$A$为酉矩阵.　(×)

二、填空 （10 分）

1. 已知$A=\begin{bmatrix} i & 1\\ -1 & i\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_2=$ __0__ .

2. $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_3e^{x_2},x_1+x_2^2\sin x_3)^T$,则$f'(x)=$ $\begin{bmatrix} 2 & x_3e^{x_2} & e^{x_2}\\ 1 & 2x_2\sin x_3 & x_2^2\cos x_3\end{bmatrix}$

3. 设$M_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$是 Seidel 迭代矩阵，则$M_2$的所有特征值中绝对值最小的为 __0__ .(第一列元素均为 0)

4. 若$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$为插值型求积公式，$l_k(x)$，$(k=0,1,\cdots.n)$是 n 次 Lagrange 插值基函数，令$f(x)=l_k(x)$则$\int_a^b l_k(x)dx=$ __$b-a$__ .

5. 设酉矩阵$A\in\mathbb{C}^{3\times3}$，且$det(\lambda E-A)=(\lambda-1)^3$则$\lambda E-A$的不变因子$d_3(\lambda)=$ __$\lambda-1$__ .

三．(8 分) 设$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$，求$A$的有理标准形$C$.

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0\\ 4 & \lambda+2 & 0\\ -2 & -1 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & \lambda\\ 0 & \lambda & 2\lambda\\ \lambda-2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & \lambda\\ 0 & \lambda & 2\lambda\\ \lambda & 0 & -\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & \lambda\\ 0 & \lambda & 2\lambda\\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda^2}{2}-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & -1 & \lambda\\ 0 & \lambda & 2\lambda\\ 0 & -\lambda & \lambda^2-2\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$$

$d_1(\lambda)=1$　$d_2(\lambda)=\lambda$　$d_3(\lambda)=\lambda^2$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

天津大学 2017～2018 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：　S131A305　学院名称：________ 专业名称：________班 ____ 学号：________　姓名：________

四 .(8 分)求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}=2\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t})+4\boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t}),\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}=2\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t}),\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}=3\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t}),\\ \boldsymbol{x}_1(0)=1,\boldsymbol{x}_2(0)=0,\boldsymbol{x}_3(0)=1.\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&16&12\\0&4&0\\0&9&1\end{bmatrix}$$

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-2&-1&-4\\0&\lambda-2&0\\0&-3&\lambda-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-2&1&-4\\0&-3&\lambda-1\\0&0&(\lambda-2)(\lambda-1)\end{bmatrix}$$

$D_3(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

$D_1(\lambda)=1$

$$(A-2E)(A-E)=\begin{bmatrix}0&1&4\\0&0&0\\0&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&4\\0&1&0\\0&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&13&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\neq 0$$

$m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$　　$e^{At}=a_0(t)E+a_1(t)A+a_2(t)A^2.$

$e^{\lambda t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda+a_2(t)\lambda^2$

$$\begin{cases}e^{t}=a_0(t)+a_1(t)+a_2(t)\\ e^{2t}=a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t).\\ te^{2t}=a_1(t)+4a_2(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0(t)=(2t-3)e^{2t}+4e^{t}\\ a_1(t)=(4-3t)e^{2t}-4e^{t}\\ a_2(t)=(t-1)e^{2t}+e^{t}\end{cases}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}a_0&&\\&a_0&\\&&a_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2a_1&a_1&4a_1\\0&2a_1&0\\0&3a_1&a_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4a_2&16a_2&12a_2\\0&4a_2&0\\0&9a_2&a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}&(13t-12)e^{2t}+12e^{t}&4(e^{2t}-e^{t})\\0&e^{2t}&0\\0&3(e^{2t}-e^{t})&e^{t}\end{bmatrix}$$

$$x=e^{At}\cdot C=\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}+4(e^{2t}-e^{t})\\0\\e^{t}\end{bmatrix}$$

五. (8 分) 已知线性方程组为$\begin{bmatrix}4&0&3\\1&2&-5\\8&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}$

(1)写出 Seidel 迭代格式，(2) 判断迭代格式收敛性.

(1)
$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(-3x_3^{(k)}+3\right)\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{2}\left(-x_1^{(k+1)}+5x_3^{(k)}+3\right)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{6}\left(-8x_1^{(k+1)}-3x_2^{(k+1)}+2\right)\end{cases}$$

(2) $A=D-L-U$　$D=\begin{bmatrix}4&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}$　$L=\begin{bmatrix}0&&\\-1&0&\\-8&-3&0\end{bmatrix}$　$U=\begin{bmatrix}0&0&-3\\&0&5\\&&0\end{bmatrix}$

$$M_2=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}4&&\\1&2&\\8&3&6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&0&-3\\&0&5\\&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\-\frac{1}{8}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{13}{48}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-3\\&0&5\\&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-\frac{3}{4}\\0&0&\frac{23}{8}\\0&0&-\frac{7}{16}\end{bmatrix}$$

$$\lambda E-M_2=\begin{bmatrix}\lambda&0&\frac{3}{4}\\&\lambda&-\frac{23}{8}\\&&\lambda+\frac{7}{16}\end{bmatrix}$$

$0,0,-\frac{7}{16}$

$\rho(M_2)=\frac{7}{16}<1$　收敛.

考试时间：2018 年 1 月 8 日

六.（8 分）由下列插值条件

x_k	1.63	1.73	1.95　2.10	2.28	2.53
$f(x_k)$	14.094	16.844	18.475	20.963	23.135

用三次 Newton 插值多项式计算$f(2.10)$的近似值(结果保留至小数点后第 3 位)

x	f(x)	一次	二次	三次
1.73	16.844			
1.95	18.475	7.414		
2.28	20.963	7.539	0.227	
2.53	23.135	8.688	1.981	2.193

$$f(2.10) = 16.844 + 7.414 \times (2.10-1.73) + 0.227 \times 0.37 \times 0.15 + 2.193 \times 0.37 \times (-0.18) \times 0.15$$

$$= 19.578$$

七.（10 分）用$Romberg$算法求积分$\int_0^4 \frac{1}{2+x^2}dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（计算结果保留至小数点后第 5 位）

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1.11111			
1	0.88889	0.81482		
2	0.86869	0.86196	0.86510	
3	0.86991	0.87032	0.87088	0.87097
4	0.87029	0.87042	0.87043	0.87042

$$T_{2^0} = \frac{4}{2}\left(f(0)+f(4)\right) = 1.11111$$

$$T_{2^1} = \frac{1}{2} \times 1.11111 + \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{6} = 0.88889$$

$$T_{2^2} = \frac{1}{2} \times 0.88889 + \frac{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{11}\right) = 0.86869$$

$$T_{2^3} = \frac{1}{2} \times 0.86869 + \frac{4}{8} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{17} + \frac{4}{33} + \frac{4}{57}\right) = 0.86991$$

$$T_{2^4} = \frac{1}{2} \times 0.86991 + \frac{4}{16} \times \left(\frac{16}{33} + \frac{16}{41} + \frac{16}{57} + \frac{16}{81} + \frac{16}{113} + \frac{16}{153} + \frac{16}{201} + \frac{16}{257}\right)$$

$$= 0.87029$$

$$S_{2^0} = \frac{4T_{2^1} - T_{2^0}}{4-1} =$$

天津大学 2017～2018 学年第一学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础 课程编号： S131A305 学院名称：________ 专业名称：________班 ____ 学号：________ 姓名：________

八. (10 分) 用 Legendre 多项式求函数 $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ 在 $P_3[-1,1]$ 上的三次最佳平方逼近 $S_3^*(x)$，并求 $\delta^2 = \left\| f - S_2^* \right\|_2^2$（结果保留到小数点后第 5 位，取 $e \approx 2.71828$）

$S_3^*(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{2i+1}{2} \langle f, P_i \rangle P_i$

$= \frac{1}{2}\langle f, P_0\rangle P_0 + \frac{3}{2}\langle f, P_1\rangle P_1 + \frac{5}{2}\langle f, P_2\rangle P_2 + \frac{7}{2}\langle f, P_3\rangle P_3$

$\langle f, P_0\rangle = \int_{-1}^{1} \sin\frac{\pi x}{2} dx = 0$

$\langle f, P_1\rangle = \int_{-1}^{1} x \sin\frac{\pi x}{2} dx = -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x d\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{8}{\pi^2} = 0.81057$

$\langle f, P_2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (3x^2-1) \sin\frac{\pi x}{2} dx = 0$

$\langle f, P_3\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (5x^3-3x) \sin\frac{\pi x}{2} dx$

$= \frac{1}{2}\left[5\int_{-1}^{1} x^3 \sin\frac{\pi x}{2} dx - 3\int_{-1}^{1} x\sin\frac{\pi x}{2} dx \right.$

$= \frac{48}{\pi^2} - \frac{480}{\pi^4} = -0.06425$

$S_3^*(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{8}{\pi^2} x + \frac{7}{2}\left(\frac{48}{\pi^2} - \frac{480}{\pi^4}\right)\cdot\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$\int_{-1}^{1} \sin^2\frac{\pi x}{2} dx$

$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-\cos\pi x) dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{\pi}\sin\pi x\right)\Big|_{-1}^{1} = 1$

$\delta^2 = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(\frac{48}{\pi^2} - \frac{480}{\pi^4}\right)^2$

$= 0.00002$

九.(8 分)写出用标准 Runge-Kutta 方法解下列初值问题的计算公式.

$$\begin{cases} y'' - x^2 - yy' = 0, & 0 < x \le 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \end{cases}$$

令 $z = y'$

$\begin{cases} z = y' \\ z' = x^2 + yz \\ y(0) = 0,\ z(0) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \\ k_1 = z_n \\ L_1 = x_n^2 + y_n z_n \\ k_2 = z_n + \frac{h}{2}L_1 \\ L_2 = (x_n + \frac{h}{2})^2 + (y_n + \frac{h}{2}k_1)(z_n + \frac{h}{2}L_1) \\ k_3 = z_n + \frac{h}{2}L_2 \\ L_3 = (x_n + \frac{h}{2})^2 + (y_n + \frac{h}{2}k_2)(z_n + \frac{h}{2}L_2) \\ k_4 = z_n + hL_3 \\ L_4 = (x_n + h)^2 + (y_n + hk_3)(z_n + hL_3) \\ y(0) = 0,\ z(0) = 2 \end{cases}$

十.(10 分) 证明

1. 内积空间X中的任何正交系M都是线性无关的.
2. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则$\|A\|_2 \le \|A\|_F$