1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸集

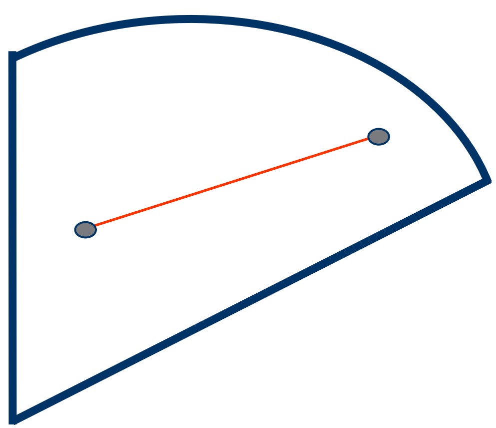
定义 1.3.1 给定非空集合$\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n$. 如果对任意的$x, y \in \mathscr{F}$以及任意的实数$\alpha \in [0, 1]$都有

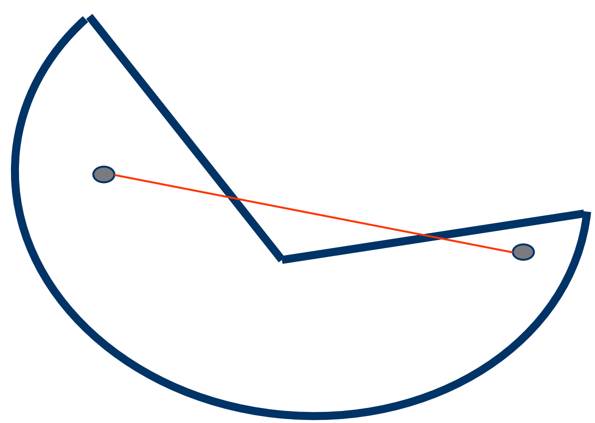
$$\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathscr{F},$$

则称$\mathscr{F}$为$\mathbb{R}^n$中的凸集. 称$\alpha x + (1-\alpha)y$为两点x和y的一个凸组合.

几何意义: 集合$\{\alpha x+(1-\alpha)y \mid \alpha \in [0, 1]\}$ 是两点x和y的连线段. 所以, 集合$\mathscr{F}$为凸集当且仅当$\mathscr{F}$中任意两点的连线段属于该集合.

单元素的集合和整个空间$\mathbb{R}^n$为凸集. 为了方便规定空集$\emptyset$为凸集.





1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸集

例 1.3.1 假设$w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$且$\beta$为实数. 证明下面的集合为凸集.

- 超平面$\mathscr{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid w^\top x = \beta\}$;
- 闭半空间$\{x \in \mathbb{R}^n \mid w^\top x \geq \beta\}$和$\{x \in \mathbb{R}^n \mid w^\top x \leq \beta\}$;
- 开半空间$\{x \in \mathbb{R}^n \mid w^\top x > \beta\}$和$\{x \in \mathbb{R}^n \mid w^\top x < \beta\}$;
- 超球$\mathscr{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \beta\}$, 其中$\beta \geq 0$.

证明 只证明第四个结论, 其它留做作业. 设x, y为$\mathscr{B}$中任意两点及$\beta \geq 0$. 任取$\alpha \in [0, 1]$, 则有

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1 - \alpha)\|y\| \leq \alpha\beta + (1 - \alpha)\beta = \beta,$$

即$\alpha x + (1 - \alpha)y \in \mathscr{B}$. 由定义1.3.1知: 超球$\mathscr{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \beta\}$为凸集. □

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸集

命题 1.3.1 假设$\mathscr{F}_i \subseteq \mathbb{R}^n$为凸集且$\beta_i \in \mathbb{R}$, 其中$i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. 则

- 交集$\mathscr{F} := \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cdots \cap \mathscr{F}_p$为凸集;
- 集合$\beta_1 \mathscr{F}_1 := \{\beta_1 x \mid x \in \mathscr{F}_1\}$为凸集;
- 和集$\mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2 := \{x + y \mid x \in \mathscr{F}_1, y \in \mathscr{F}_2\}$为凸集;
- 集合$\sum_{i=1}^{p} \beta_i \mathscr{F}_i$为凸集.

证明 只证明第一个结论. 设x, y为$\mathscr{F}$中任意两点, 任取$\alpha \in [0, 1]$, 则由$x, y \in \mathscr{F}$知: 对任意的$i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, 有$x, y \in \mathscr{F}_i$. 由于每个$\mathscr{F}_i$为凸集, 所以对任意的$i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, 有$\alpha x + (1 - \alpha) y \in \mathscr{F}_i$. 进而, $\alpha x + (1 - \alpha) y \in \mathscr{F}$. 所以$\mathscr{F} := \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cdots \cap \mathscr{F}_p$为凸集. □

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸集

定理 1.3.1 $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n$为凸集当且仅当对任意的$x^i \in \mathscr{F}$及任意满足$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$的非负实数$\alpha_i$ $(i \in \{1,\dots,p\}$且p为不小于2的正整数)都有$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i \in \mathscr{F}$.

证明 取$p = 2$, 由定义1.3.1可得定理的充分性结论成立. 下面用数学归纳法证明定理的必要性. 由定义1.3.1, 可得定理的必要性结论在$p = 2$时显然成立. 假设定理的必要性结论在$p = k$时成立, 下面证明它在$p = k + 1$时也成立. 设$x^i \in \mathscr{F}$且任取满足$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$的非负实数$\alpha_i$ $(i \in \{1,\dots,p\})$, 则

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i + \alpha_{k+1} x^{k+1} = (1 - \alpha_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} x^i + \alpha_{k+1} x^{k+1}.$$

因此, 由归纳假设可得$y := \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}} x^i \in \mathscr{F}$. 进而, 再由凸集的定义可得

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x^i = (1 - \alpha_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} x^i + \alpha_{k+1} x^{k+1} = (1 - \alpha_{k+1}) y + \alpha_{k+1} x^{k+1} \in \mathscr{F}.$$

再由归纳法原理, 定理的必要性结论得证. □

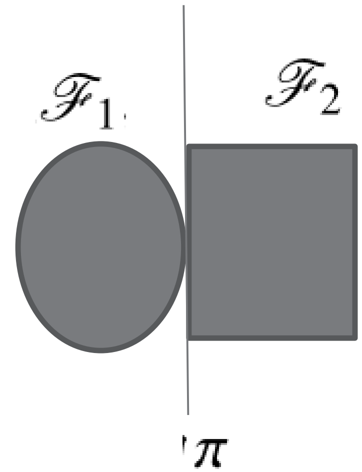
1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸集

定义 1.3.2 假设$\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$为两个非空凸集. 如果存在非零向量$w \in \mathbb{R}^n$和实数$t$, 使得

- 对任意的$x \in \mathscr{F}_1$和$y \in \mathscr{F}_2$, 都有

$$w^\top x \geq t \quad 且 \quad w^\top y \leq t,$$

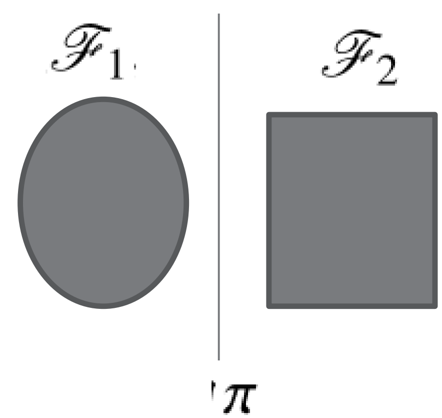
则称超平面$\pi := \{x \in \mathbb{R}^n \mid w^\top x = t\}$ 分离集合$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$;



- 对任意的$x \in \mathscr{F}_1$和$y \in \mathscr{F}_2$, 都有

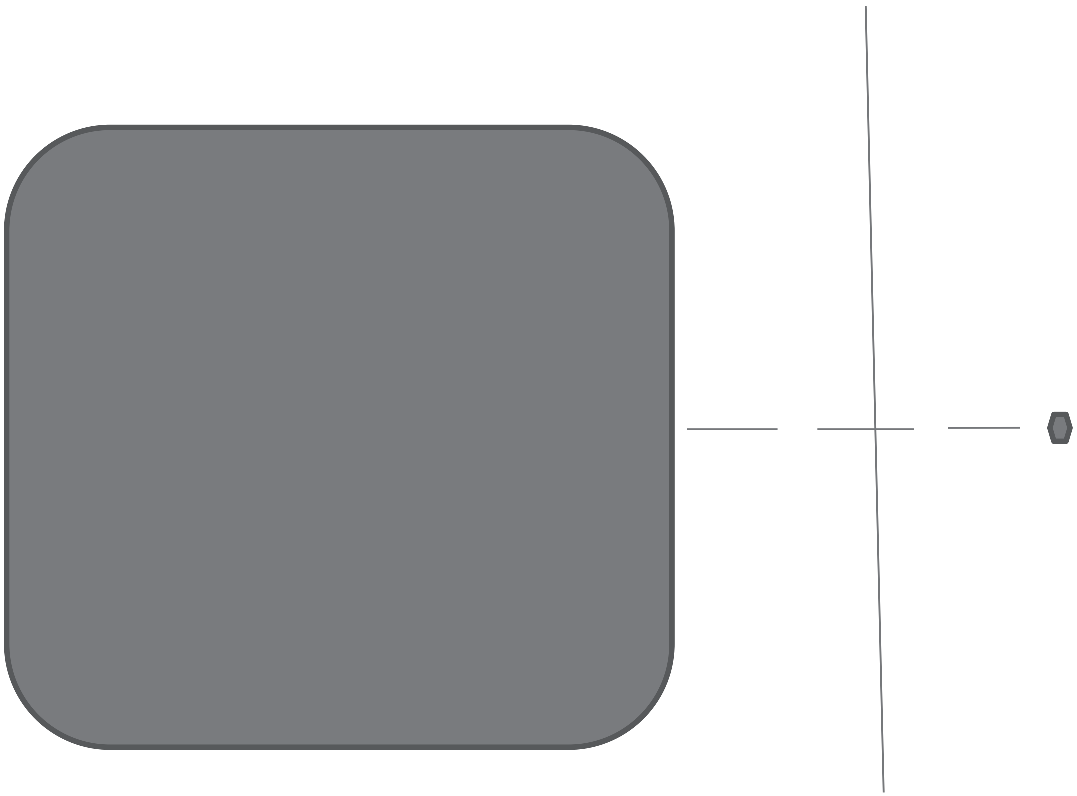
$$w^\top x > t \quad 且 \quad w^\top y < t,$$

则称超平面$\pi := \{x \in \mathbb{R}^n \mid w^\top x = t\}$ 严格分离集合$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$.



1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸集

定理 1.3.2 设$\mathscr{F}$为$\mathbb{R}^n$中的非空闭凸集，$x^0 \in \mathbb{R}^n$且$x^0 \notin \mathscr{F}$，则存在$\mathbb{R}^n$中的超平面严格分离集合$\mathscr{F}$和点x^0.



1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸集

引理 1.3.1 (*Farkas引理*) 设$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$且$b \in \mathbb{R}^n$, 考虑不等式组

$$Ax \le 0, \quad b^\top x > 0; \tag{1.3.1}$$

$$A^\top y = b, \quad y \ge 0. \tag{1.3.2}$$

那么, *(1.3.1)*和*(1.3.2)*有且仅有一组有解.

证明 假设(1.3.2)式有解, 即存在$y \in \mathbb{R}^m$使得$A^\top y = b$且$y \ge 0$. 若存在$x \in \mathbb{R}^n$使得$Ax \le 0$, 那么结合$A^\top y = b$和$y \ge 0$可得: $b^\top x = y^\top Ax \le 0$. 这表明: 当(1.3.2)式有解时, (1.3.1)式无解.

反之, 设(1.3.2)无解, 下证(1.3.1)有解. 记$\Omega := \{z := A^\top y \mid y \ge 0\}$, 那么$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$为非空闭凸集且$b \notin \Omega$. 由定理1.3.2知: 存在非零向量$w \in \mathbb{R}^n$和实数$t$使得$w^\top b > t$ 且$w^\top z < t, \quad \forall z \in \Omega$. 因为$0 \in \Omega$, 所以由上式知$t > 0$. 从上式还可以得到$t > w^\top z = w^\top A^\top y = y^\top Aw, \quad y \ge 0$. 由于$y$中的分量可以任意大, 由上式必有$Aw \le 0$, 再与$b^\top w > 0$相结合可得: w是(1.3.1)的一个解. □

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸集

定理 1.3.3 设p, q为非负整数, $u_0, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q \in \mathbb{R}^n$, 则

$$d^\top u_0 < 0,\ d^\top u_i = 0\ (i \in \{1, \ldots, p\}),\ d^\top v_i \geq 0\ (i \in \{1, \ldots, q\}) \tag{1.3.3}$$

无解 $\Longleftrightarrow$ $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}\ (i \in \{1, \ldots, p\})$ 和$\exists \beta_i \in \mathbb{R}_+\ (i \in \{1, \ldots, q\})$使得

$$u_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i v_i. \tag{1.3.4}$$

证明 $d^\top u_i = 0$可写成$-d^\top u_i \leq 0$ 和$d^\top u_i \leq 0$ $(i \in \{1, \cdots, p\})$. 若记 $A = [-u_1\ \cdots\ -u_p\ u_1\ \cdots\ u_p\ -v_1\ \cdots\ -v_q]^\top$, 那么, (1.3.3)可写成

$$Ad \leq 0, \quad -u_0^\top d > 0. \tag{1.3.5}$$

若(1.3.5)无解, 由引理1.3.1知: $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^q$使得

$$-u_0 = A^\top (x^\top, y^\top, z^\top)^\top = \sum_{i=1}^{p} x_i(-u_i) + \sum_{i=1}^{p} y_i u_i + \sum_{i=1}^{q} z_i(-v_i).$$

令$\alpha_i := x_i - y_i\ (i \in \{1, 2, \ldots, p\})$且$\beta_i := z_i \geq 0\ (i \in \{1, 2, \ldots, q\})$, 由上式可得: (1.3.4)式成立. $\square$

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸函数

定义 1.3.3 设$\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n$为非空凸集, 给定函数$f: \mathscr{F} \to \mathbb{R}$.

(i) 如果对任意的$x, y \in \mathscr{F}$及任意的$\alpha \in [0,1]$, 有

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y),$$

那么称函数f为凸集$\mathscr{F}$上的凸函数.

(ii) 如果对任意的$x, y \in \mathscr{F}$且$x \neq y$, 以及任意的$\alpha \in (0,1)$, 有

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y),$$

那么称函数f为凸集$\mathscr{F}$上的严格凸函数.

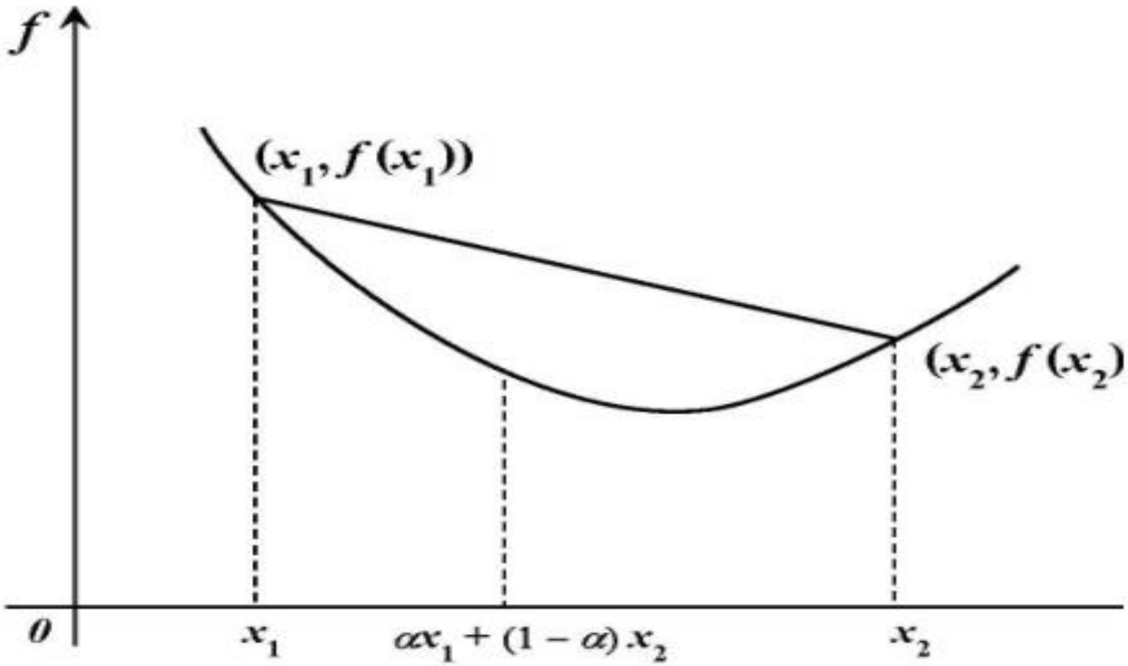
(iii) 如果$\exists c > 0$, 使得对$\forall x, y \in \mathscr{F}$及$\forall \alpha \in [0,1]$, 有

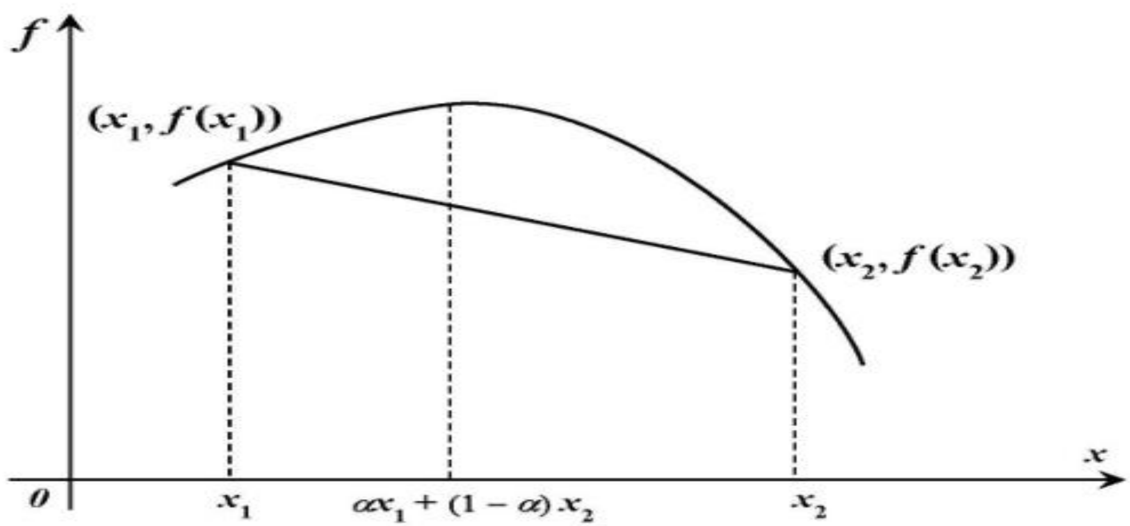
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - c\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2,$$

那么称函数f为凸集$\mathscr{F}$上的强凸函数(或称为一致凸函数).

在(i)至(iii)中, 若不等式中不等号的方向是反过来的, 则对应的函数分别称为凸集$\mathscr{F}$上的凹函数、严格凹函数及强凹函数.

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸函数





命题 1.3.2 假设$\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n$是凸集.

(i) 函数f是$\mathscr{F}$上的(严格)凸函数当且仅当函数$-f$是$\mathscr{F}$上的(严格)凹函数.

(ii) 设函数f_1, f_2是$\mathscr{F}$上的凸函数, 实数$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, 则函数$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$是$\mathscr{F}$上的凸函数.

(iii) 设函数f是$\mathscr{F}$上的凸函数, t为实数, 则水平集$\mathscr{L}_t(f) := \{x \in \mathscr{F} \mid f(x) \leq t\}$是凸集.

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸函数

证明 (i)的结论是显然的. 下面先证(ii)的结论. 由f_1, f_2是凸集$\mathscr{F}$上的凸函数, 可知: 对任意的$x, y \in \mathscr{F}$及任意的$\alpha \in [0,1]$, 有

$$f_1(\alpha x+(1-\alpha)y) \le \alpha f_1(x)+(1-\alpha)f_1(y), \quad f_2(\alpha x+(1-\alpha)y) \le \alpha f_2(x)+(1-\alpha)f_2(y).$$

注意到对任意的$z \in \mathscr{F}$, 有$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(z) = \alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)$. 所以,

$$\begin{aligned}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \alpha_1 f_1(\alpha x + (1-\alpha)y) + \alpha_2 f_2(\alpha x + (1-\alpha)y)\\ &\le \alpha_1(\alpha f_1(x) + (1-\alpha)f_1(y)) + \alpha_2(\alpha f_2(x) + (1-\alpha)f_2(y))\\ &= \alpha(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) + (1-\alpha)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(y).\end{aligned}$$

这表明: 函数$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$是凸集$\mathscr{F}$上的凸函数.

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸函数

再证(iii)中的结论. 任取$x, y \in \mathscr{L}_t(f)$和$\alpha \in [0,1]$, 那么由水平集的定义, 可得

$$f(x) \le t \ \text{ 且 } \ f(y) \le t, \quad \forall x, y \in \mathscr{F}.$$

由$\mathscr{F}$为凸集, 故$\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathscr{F}$. 再由函数$f$是$\mathscr{F}$上的凸函数, 进而有

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \le \alpha t + (1-\alpha)t = t.$$

这表明: $\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathscr{L}_t(f)$. 因此, 水平集$\mathscr{L}_t(f)$是凸集. □

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸函数

定理 1.3.4 (一阶判别定理) 设函数f在凸集$\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n$上可微, 则

(i) f为$\mathscr{F}$上凸函数 $\Longleftrightarrow$ 对$\forall x, y \in \mathscr{F}$有$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^\top (y - x)$.

(ii) f在$\mathscr{F}$上为严格凸函数当且仅当对任意不同的两点$x, y \in \mathscr{F}$, 有$f(y) - f(x) > \nabla f(x)^\top (y - x)$.

证明 证明结论(*i*). 先证必要性. 若f在$\mathscr{F}$上为凸函数, 则对任意的$x, y \in \mathscr{F}$及$\alpha \in (0, 1]$, 有$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x)$, 即:

$$f(x + \alpha(y - x)) \leq f(x) + \alpha[f(y) - f(x)]. \tag{1.3.6}$$

由一阶Taylor展开式, 可得

$$f(x + \alpha(y - x)) = f(x) + \alpha \nabla f(x)^\top (y - x) + o(\|\alpha(y - x)\|). \tag{1.3.7}$$

将(1.3.7)式代入(1.3.6)式, 整理可得

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{o(\|\alpha(y - x)\|)}{\alpha}.$$

令$\alpha \to 0$, 由上式可得$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^\top (y - x)$. 必要性得证.

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸函数

再证充分性. 对任意的$x, y \in \mathscr{F}$和$\alpha \in [0,1]$, 有$z := \alpha x + (1-\alpha)y \in \mathscr{F}$. 由假设条件, 可得

$$f(x) - f(z) \geq \nabla f(z)^\top (x - z), \quad f(y) - f(z) \geq \nabla f(z)^\top (y - z).$$

两式分别乘以α和$1-\alpha$, 再相加得$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - f(z) \geq 0$, 即: $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$. 因此, f在$\mathscr{F}$上为凸函数.

证明结论(ii). 充分性的证明类似于(i)中充分性的证明. 下证必要性. 对任意不同的两点$x, y \in \mathscr{F}$, 取$z = \frac{1}{2}(x+y)$, 那么$z \in \mathscr{F}$. 由于f为严格凸函数, 一方面由结论(i)知: $f(z) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (z - x)$, 另一方面由严格凸函数的定义有$f(z) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) < \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$. 结合上述两式, 可得

$$\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) > f(x) + \nabla f(x)^\top (z - x).$$

由此式整理可得$f(y) - f(x) > \nabla f(x)^\top (y - x)$. 必要性得证. □

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸函数

定理 1.3.5 (二阶判别) 设f在开凸集$\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n$内二次连续可微, 则

(i) f在$\mathscr{F}$内为凸函数当且仅当在$\forall x \in \mathscr{F}$处, f的$Hesse$阵$\nabla^2 f(x)$为对称半正定矩阵.

(ii) 若在$\mathscr{F}$内$\nabla^2 f(x)$为对称正定矩阵, 则f在$\mathscr{F}$内为严格凸函数.

证明 证明结论(i). 先证必要性. 任取$x \in \mathscr{F}$及$y \in \mathbb{R}^n$ $(y \neq 0)$, 由于$\mathscr{F}$是开集, 存在$\epsilon > 0$使得当$\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$时有$x + \alpha y \in \mathscr{F}$. 由定理1.3.4得$f(x + \alpha y) \geq f(x) + \alpha \nabla f(x)^\top y$. 另由二阶Taylor展开式有

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha \nabla f(x)^\top y + \frac{1}{2}\alpha^2 y^\top \nabla^2 f(x) y + o(\|\alpha y\|^2).$$

结合以上两式可得$y^\top \nabla^2 f(x) y + \frac{o(\|\alpha y\|^2)}{\alpha^2/2} \geq 0$. 令$\alpha \to 0$, 由上式可得$y^\top \nabla^2 f(x) y \geq 0$. 所以, $\nabla^2 f(x)$是对称半正定的, 必要性得证.

再证充分性. 任取$x, y \in \mathscr{F}$, 因为$\nabla^2 f(x)$是对称半正定矩阵, 所以由二阶Taylor展开式, 可得

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top \nabla^2 f(\xi)(y - x) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x),$$

其中$\xi = x + t(y - x)$且$t \in (0, 1)$. 由定理1.3.4得: f在$\mathscr{F}$上为凸函数.

证明结论(ii). 由(i)中充分性的证明, 易得结论(ii)成立. □

定理 1.3.6 (强凸函数判别定理) 设函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 二次连续可微, 则它是强凸函数的充要条件是其Hesse阵 $\nabla^2 f(x)$ 一致正定, 即存在常数 $c^* > 0$ 使得对任意的 $x, d \in \mathbb{R}^n$, 都有

$$d^\top \nabla^2 f(x) d \geq c^* \|d\|^2. \tag{1.3.8}$$

证明思路 首先，对任意的 $x, d \in \mathbb{R}^n$ 及 $\alpha \in [0, 1]$, 记 $y := x + d, z := \alpha x + (1 - \alpha)y$, 由Taylor公式得到 $f(x)$ 和 $f(y)$ 在 z 处的展开式.

其次, 结合两个展开式可得

$$\begin{aligned} & \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \\ = \;& f(z) + \tfrac{1}{2}\alpha(1 - \alpha)(x - y)^\top [(1 - \alpha)\nabla^2 f(u) + \alpha \nabla^2 f(v)](x - y), \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

其中，$u := z + \alpha_1(x - z)$ 且 $v := z + \alpha_2(y - z)$.

最后, 利用(1.3.9)和强凸函数的定义来完成证明. □

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸规划

定义 1.3.4 设$\mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n$为凸集, $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ 为凸函数. 则称

$$\min_{x \in \mathscr{F}} f(x) \tag{1.3.11}$$

为凸规划问题.

下面的定理给出凸规划问题几个好的性质.

定理 1.3.7 *(i)* 凸规划问题*(1.3.11)*的任一局部最优解x^*为其全局最优解.

(ii) 凸规划问题*(1.3.11)*的最优解集S为凸集.

(iii) 若函数f为非空凸集$\mathscr{F}$上的严格凸函数, 且凸规划问题*(1.3.11)*存在全局最优解, 则其全局最优解唯一.

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸函数

证明 证明结论(i). 用反证法. 假设凸规划问题(1.3.11)的局部最优解x^*不是其全局最优解, 那么至少存在一个$y^* \in \mathscr{F}$使得$f(y^*) < f(x^*)$. 由于f为凸集$\mathscr{F}$上的凸函数, 因而对任意的$\alpha \in (0, 1]$, 有

- $\alpha y^* + (1-\alpha)x^* \in \mathscr{F}$;
- $f(\alpha y^* + (1-\alpha)x^*) \le \alpha f(y^*) + (1-\alpha)f(x^*) < f(x^*)$.

显然, 当$\alpha \to 0^+$时, 有$\alpha y^* + (1-\alpha)x^* \to x^*$. 因此, 存在充分靠近$x^*$的可行点, 其目标函数值严格小于$f(x^*)$, 这与$x^*$为问题(1.3.11)的局部最优解相矛盾. 所以, x^*为问题(1.3.11)的全局最优解.

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 凸函数

再证明结论(ii). 由于空集和单元素集合都是凸集, 所以不失一般性可设问题(1.3.11)的最优解集$\mathcal{S}$ 至少含有两个元素. 任取$x^*, y^* \in \mathcal{S}$及$\alpha \in [0,1]$, 则只需证明$\alpha x^* + (1-\alpha)y^* \in \mathcal{S}$. 根据$\mathscr{F}$为凸集, 于是有$\alpha x^* + (1-\alpha)y^* \in \mathscr{F}$. 再由$x^*, y^* \in \mathcal{S}$, 可得$f(x^*) = f(y^*) = \min_{x\in\mathscr{F}} f(x)$. 所以,

$$\min_{x\in\mathscr{F}} f(x) \le f(\alpha x^* + (1-\alpha)y^*) \le \alpha f(x^*) + (1-\alpha)f(y^*) = \min_{x\in\mathscr{F}} f(x),$$

即$f(\alpha x^* + (1-\alpha)y^*) = \min_{x\in\mathscr{F}} f(x)$. 这表明: $\alpha x^* + (1-\alpha)y^* \in \mathcal{S}$. 结论得证.

最后采用反证法证明结论(*iii*). 假设问题(1.3.11)的全局最优解不唯一, 那么存在$x^*, y^* \in S$且$x^* \neq y^*$. 显然, $x^*, y^* \in \mathscr{F}$且$f(x^*) = f(y^*)$. 对任意的$\alpha \in [0,1]$, 由$\mathscr{F}$为凸集, 可得$\alpha x^* + (1-\alpha)y^* \in \mathscr{F}$. 再由$f$为严格凸函数, 因而有

$$f(\alpha x^* + (1-\alpha)y^*) < \alpha f(x^*) + (1-\alpha)f(y^*) = f(x^*).$$

这与$x^* \in S$相矛盾. 于是可得问题(1.3.11)的最优解唯一. □

1.3 凸集、凸函数、凸规划 — 总结与作业

小结：

本节介绍了凸集、凸函数及凸规划的定义与性质。这是本章的重点。不但要会根据定义及性质进行判断与计算，还要掌握一些重要的证明技巧。

作业：

1.11 判别下列函数是否为(严格)凸函数:

(1) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 1000x_1 + 1001x_2 + 10;$

1.12 设$\mathscr{F}$为凸集且函数$f : \mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 若对任意的点$x \in \mathscr{F}$及正数$\alpha$都有$f(\alpha x) = \alpha f(x)$, 则称$f$为$\mathscr{F}$上的正齐次函数. 试证明: $\mathscr{F}$上的正齐次函数f是凸函数的充要条件是对任意的$x, y \in \mathscr{F}$都有$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

1.16 判断下列优化问题是否是凸规划问题:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \min\quad & f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 9, \\
& 5x_1 + x_3 = 10, \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$