**2021～2022 学年第一学期期末考试试卷参考答案**

**《高等数学 2A》（ A 卷，共 3 页）**

**（考试时间：2022 年 1 月 10 日, 14:00-16:00）**

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 成绩 | 核分人签字 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | |

**一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）**

1. 已知 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, 则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$ _____2___________.

2. 若 $x-e^{-2x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f'(x)=$ ______$-4e^{-2x}$____________.

3. 若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ ____$-4$________.

4. 曲线 $y=4x-x^2$ 在点 $(2-\sqrt{2},\,2)$ 处的曲率是 ______$\dfrac{2}{27}$_________.

5. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 ______$y=x$_____________.

**二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）**

1. 下列反常积分发散的是 (　　D　　).

(A) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$　(B) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$　(C) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\,dx$　(D) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3+1}}\,dx$

2. 已知 $y_1=\frac{1}{5}x^3$, $y_2=\frac{1}{5}x^3+x^2$, $y_3=\frac{1}{5}x^3+x^{-2}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解，则此微分方程的通解为 (　　A　　).

(A) $C_1x^2+C_2x^{-2}+\frac{1}{5}x^3$　　(B) $C_1x^2+C_2x^{-2}+\frac{3}{5}x^3$

(C) $\frac{C_1}{5}x^3+C_2x^2+x^{-2}$　　(D) $\frac{C_1}{5}x^3+C_2x^{-2}+x^2$

3. 若 $(0,1)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点，则必有 (　　C　　).

(A) $a=1,\ b=-3,\ c=1$　　(B) $a=1,\ b=0,\ c$ 是任意实数

(C) $a\neq 0,\ b=0,\ c=1$　　(D) $c=1,\ a,b$ 是任意实数

4. 微分方程 $y''-y=\sin x+e^{2x}$ 的特解 $y^*$ 的形式为(其中 $A,B,C$ 为常数) (　　B　　).

(A) $A\sin x+Bxe^{2x}$　　(B) $A\cos x+B\sin x+Ce^{2x}$

(C) $x(A\cos x+B\sin x)+Ce^{2x}$　　(D) $x(A\cos x+B\sin x)+Cxe^{2x}$

5. 设函数 $f(x)$ 存在二阶导函数，且 $f(0)=0$, 函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$

则下述结论正确的是 (　　D　　).

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　(B) $x=0$ 是 $F'(x)$ 的无穷间断点

(C) $x=0$ 是 $F'(x)$ 的可去间断点　　(D) 导函数 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

**三、计算题（本题 5 分）**

求过点 $A(1,2,1)$ 且与直线 $L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ x-y+z-1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

解: 平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,-3)$,

故所求平面方程为 $x-1-2(y-2)-3(z-1)=0$, 即 $x-2y-3z+6=0$.

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 设参量函数 $\begin{cases} x = t\,\mathrm{e}^{t^2}, \\ y = \dfrac{2}{3}t^3 + t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{2t^2+1}{\mathrm{e}^{t^2}(1+2t^2)} = \mathrm{e}^{-t^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-2t\,\mathrm{e}^{-t^2}}{\mathrm{e}^{t^2}(1+2t^2)} = \frac{-2t}{1+2t^2}\mathrm{e}^{-2t^2}.$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

解: $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x - \ln x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

法二: $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln\frac{x - \dfrac{1}{3!}x^3 + o(x^3)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln\left[1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{1}{6}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{6}.$$

法三: $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln\left[1 + \frac{\sin x}{x} - 1\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\sin x}{x} - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x\sin(x^2), & -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ -1, & x > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}.$$

法二: $$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (x-1)\sin(x-1)^2\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{2}(-1)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x-1)^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

4. 计算不定积分 $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}x$.

解: 令 $\sqrt{1+2x} = t$, 则 $x = \dfrac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{(t^2-1)\cdot t}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t(t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + C$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{1+2x}\right)^3 - \frac{1}{4}(1+2x) + C = \frac{1}{6}\left(\sqrt{1+2x}\right)^3 - \frac{x}{2} + C'.$$

5. 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \int_0^{3x} f(\dfrac{t}{3})\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{2x}$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解: 两边同时对 $x$ 求导，得 $f'(x) = 3f(x) + 2\mathrm{e}^{2x}$,

即 $f'(x) - 3f(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$，这是一阶线性微分方程,

$$\therefore f(x) = \mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}\left(\int 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\int -3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = \mathrm{e}^{3x}\left(\int 2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + C\right) = C\,\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^{2x}.$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，$\Rightarrow C=3$，故 $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^{2x}$.

**五、解答题（共 24 分,每小题 8 分）**

1. 求二阶线性微分方程 $y''-3y'+2y=e^{2x}$ 的通解.

解： 特征方程 $r^2-3r+2=0$, 特征根 $r_1=1,\ r_2=2$,

所以对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

令非齐次方程的特解为 $y^*=Axe^{2x}$，则 $(y^*)'=(A+2Ax)e^{2x}$,

$(y^*)''=(4A+4Ax)e^{2x}$，代入原方程中，得 $A=1$, 故 $y^*=xe^{2x}$.

于是，所求微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^{2x}$.

2. 求函数 $F(a)=\int_1^a\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x\,dx\ (0<a\le 2)$ 的最大值与最小值.

解： $F'(a)=(2+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2})e^a$,

由 $F'(a)=0$, 即 $\frac{2a^2+a-1}{a^2}=0$, 得驻点 $a_1=-1$(舍去), $a_2=\frac{1}{2}$.

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$F'(a)<0$, $F(a)$ 严格单调减少; 当 $\frac{1}{2}<a\le 2$ 时，$F'(a)>0$,

$F(a)$ 严格单调增加，于是 $F(\frac{1}{2})$ 为函数 $F(a)$ 的最小值.

$$F(a)=\int_1^a 2e^x dx+\int_1^a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x dx=\left(2+\frac{1}{x}\right)e^x\Big|_1^a=\left(2+\frac{1}{a}\right)e^a-3e.$$

$$\Rightarrow\quad F(\frac{1}{2})=4e^{\frac{1}{2}}-3e,\quad F(2)=\frac{5}{2}e^2-3e,\ \lim_{a\to0^+}F(a)=\lim_{a\to0^+}\left(2+\frac{1}{a}\right)e^a-3e=+\infty,$$

所以 $F(a)$ 在 $(0,2]$ 上的最小值为 $F(\frac{1}{2})=4e^{\frac{1}{2}}-3e$，不存在最大值.

3. 设 $D$ 是由抛物线 $y=(x-2)^2$ 与直线 $y=4$ 所围成的平面闭区域. 求:
 (1) $D$ 的面积; (2) $D$ 绕 $y$ 轴旋转一周而得的旋转体的体积.

解： (1) $S=\int_0^4\left[4-(x-2)^2\right]dx=\int_0^4(4x-x^2)\,dx=\left(2x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4=\frac{32}{3}$;

法二： $S=\int_0^4\left[\left(2+\sqrt{y}\right)-\left(2-\sqrt{y}\right)\right]dy=\int_0^4 2\sqrt{y}\,dx=\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{32}{3}$;

(2) $V_y=\pi\int_0^4\left[\left(2+\sqrt{y}\right)^2-\left(2-\sqrt{y}\right)^2\right]dy=\pi\int_0^4 8\sqrt{y}\,dx=\frac{16}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{128}{3}\pi$.

法二： $V_y=2\pi\int_0^4 x\left[4-(x-2)^2\right]dx=2\pi\int_0^4(4x^2-x^3)\,dx=\frac{128}{3}\pi$.

**六、证明题（本题 6 分）**

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶连续导数，且满足 $f(0)=f(1)=0$.

证明：(1) $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\,dx$; (2) $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\le\frac{1}{12}\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|$.

证 (1) $\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)\,d f'(x)$

$=\frac{1}{2}x(x-1)f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-\frac{1}{2})\,df(x)=-\int_0^1(x-\frac{1}{2})\,df(x)$

$=-(x-\frac{1}{2})f(x)\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)\,dx\ \int_0^1 f(x)\,dx$;

法二： $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,d(x-\frac{1}{2})=(x-\frac{1}{2})f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-\frac{1}{2})f'(x)\,dx$

$=-\int_0^1 f'(x)\,d(\frac{1}{2}x^2-x)=-(\frac{1}{2}x^2-x)f'(x)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\,dx$;

(2) $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 x(x-1)f''(x)\,dx\right|\le\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\,dx\cdot\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|=\frac{1}{12}\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|$.

法二： 由拉格朗日中值公式， $f'(x)=f'(\frac{1}{2})+f''(\xi)\ (x-\frac{1}{2})$,

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,d(x-\frac{1}{2})=(x-\frac{1}{2})f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-\frac{1}{2})f'(x)\,dx$

$=-\int_0^1(x-\frac{1}{2})\left[f'(\frac{1}{2})+f''(\xi)\ (x-\frac{1}{2})\right]dx=-\int_0^1 f''(\xi)(x-\frac{1}{2})^2\,dx$,

于是， $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^1 f''(\xi)(x-\frac{1}{2})^2\,dx\right|\le\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2\,dx\cdot\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|=\frac{1}{12}\max\limits_{0\le x\le1}|f''(x)|$.