天津大学 2011 ～2012 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：＿＿＿＿＿＿　教学班＿＿　学号：＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	成绩
得分											

一. 判断 （10 分）

1. 设 $A,B \in C^{n\times n}$，则 $A \sim B$ 的充分必要条件是 A 与 B 有相同的最小多项式．　（×）

2. $\forall A \in C^{n\times n}, k \in N$，则 $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$．　（√）

3. 设复幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 的收敛半径为 R，若方阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ 绝对收敛，则必有 $\rho(X) < R$ ．　（×）

4. 若 $A \in R^{n\times n}$ 正定，则求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛.　（×）

5. 求积公式 $\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 具有 $2n+1$ 次代数精度，当且仅当求积节点 x_k 是 Gauss 点 ．　（√）

6. 区间 $[a,b]$ 上正交多项式 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中有 n 个零点.　（√）

7. 在赋范线性空间中 Cauchy 序列与收敛序列是等价的 ．　（×）

8. $\forall A \in C^{n\times n}$ 则 $\|A\|_2 \le \|A\|_F$ ．　（√）

9. 试验方程 $y' = \lambda y$ $(\lambda < 0)$，当步长 $h \in (0, -\frac{2}{\lambda}]$ 时，改进 Euler 格式是绝对稳定的 ．　（√）

10. 设 $A,B \in C^{n\times n}$，若存在可逆阵 $P \in C^{n\times n}$，使得 $P^{-1}AP = B$ 则 A,B 等价 ．　（√）

二. 填空(10 分)

1. 已知 4 阶矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda^2-4)$，则 A 的初等因子组为 $\lambda+i, \lambda-i, \lambda+2, \lambda-2$ ．

2. 已知 $A(t) = \begin{bmatrix} e^t & t^2 \\ t\cos t & 1 \end{bmatrix}$ 则 $\int_0^1 A(t)dt =$ $\begin{bmatrix} e-1 & \frac{1}{3} \\ \sin 1+\cos 1-1 & 1 \end{bmatrix}$

3. 解非线性方程组 $\begin{cases} x_1^2 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2^2 = 5 \end{cases}$ 的实用 Newton 格式为

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

4. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 则 $Cond_\infty A =$ $\frac{4}{3}$ ．

5. $span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\} =$ $P_n[a,b]$.

考试时间: 2012 年 1 月 6 日

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________　教学班 ___ 学号 0,-1,-1 ___ 姓名：________

三．(10分) 设 $A=\begin{bmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C．

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1&2&-6\\1&\lambda&-3\\1&1&\lambda-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&\lambda-4\\0&\lambda-1&-\lambda+1\\0&-\lambda+1&-(\lambda-1)(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&\lambda-4\\0&\lambda-1&-\lambda+1\\0&0&-(\lambda-1)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

初等因子组 $\lambda-1,\ (\lambda-1)^2$　　$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

不变因子 $\lambda-1,\ \lambda^2-2\lambda+1$　　$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$

四．(10分) 设 $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&1&-2\end{bmatrix}$，(1)求 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$；(2)求 e^{At}．

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&-1&\lambda+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&-1&\lambda+2\\0&0&(\lambda+1)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&0&2\\0&1&0\\0&0&(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda&0&2\\0&1&0\\\lambda(\lambda+1)^2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\lambda(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-1&2\\0&-2&3\end{bmatrix}$$

$m(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2$.

$e^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A+a_2(t)A^2$.

$e^{\lambda t}$ 与 $T(\lambda t)=a_0(t)+a_1(t)\lambda+a_2(t)\lambda^2$ 有相同的谱值

$$\begin{cases}1=a_0(t)\\e^{-t}=a_0(t)-a_1(t)+a_2(t)\\te^{-t}=a_1(t)-2a_2(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0(t)=1\\a_1(t)=2-(2+t)e^{-t}\\a_2(t)=1-(1+t)e^{-t}\end{cases}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}a_0(t)&&\\&a_0&\\&&a_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-a_1&0\\0&0&-a_1\\0&a_1&-2a_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&a_2\\0&-a_2&2a_2\\0&-2a_2&3a_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_0&-a_1&a_2\\0&a_0-a_2&-a_1+2a_2\\0&a_1-2a_2&a_0-2a_1+3a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2+(2+t)e^{-t}&1-(1+t)e^{-t}\\0&(1+t)e^{-t}&-te^{-t}\\0&te^{-t}&(1-t)e^{-t}\end{bmatrix}$$

五．(10 分) 写出求解线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=2\\x_1+x_2+x_3=1\\2x_1+2x_2+x_3=3\end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代格式，并判断所写格式的收敛性.

$A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}$　$b=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-2x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}+2\\x_2^{(k+1)}=-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)}+1\\x_3^{(k+1)}=-2x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}+3\end{cases}$$

$A=D-L-U$

$D=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$　$L=\begin{bmatrix}0&&\\-1&0&\\-2&-2&0\end{bmatrix}$　$U=\begin{bmatrix}0&-2&2\\&0&-1\\&&0\end{bmatrix}$

课程名称：**工程数学基础**　课程编号：S131A035　学院名称：＿＿＿＿　教学班＿＿　学号：＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿

$$M_2=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ & 0 & -1\\ & & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ & 0 & -1\\ & & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\lambda E-M_2=\begin{bmatrix}\lambda & 2 & -2\\ & \lambda-2 & 3\\ & & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$\rho(M_2)=2>1$ 发散.

六．(10 分) 已知下列插值条件

x	0.30	0.45	0.55	0.70	0.80
$f(x)$	4	1	0	1	1

(1) 用 2 次 Newton 插值多项式计算 $f(0.59)$ 的近似值(结果保留到小数点后第 6 位)

(2) 若 $|f'''(x)|\le 1 \quad \forall x\in[0.30,0.80]$，试估计所得结果的截断误差（结果保留到小数点后第 6 位）

(1)

x_i	$f(x_i)$	一次差商	二次差商
0.45	1		
0.55	0	−10	
0.70	1	4	56

$f(0.59)=1-10\times(0.59-0.45)+56\times(0.59-0.45)\times(0.59-0.55)$

$=-0.086400$

(2) $|R_2(0.59)|=|f(0.45,0.55,0.70,0.59)\times(0.14)\times(0.04)\times(-0.11)|$

$=\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\times0.14\times0.04\times0.11\right|\le\frac{1}{3!}\times0.14\times0.04\times0.11=0.000103$

七．(10 分) 用 *Romberg* 算法求积分 $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后第 5 位）

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1.20711			
1	1.16257	1.14772		
2	1.15148	1.14778	1.14778	
3	1.14871	1.14779	1.14779	1.14779
4	1.14802	1.14779	1.14779	1.14779

八. (10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x\le 0\\ x^3+x, & 0<x\le 1\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 在 $P_2[-1,1]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$

(2) 求 $\delta^2=\|f-S_2^*\|^2$(结果保留到小数点后第 5 位)

　考试时间: 2012 年 1 月 6 日

1 x $\frac{1}{2}(3x^2-1)$

课程名称：**工程数学基础** 课程编号：S131A035 学院名称：________ 教学班___ 学号：________ 姓名：________

(1) $S_2^*(x)=\sum_{i=0}^{2}\frac{2i+1}{2}\langle f(x),P_i(x)\rangle P_i(x)$

$=\frac{1}{2}\langle f(x),P_0(x)\rangle P_0(x)+\frac{3}{2}\langle f(x),P_1(x)\rangle P_1(x)+\frac{5}{2}\langle f(x),P_2(x)\rangle P_2(x)$

5

$\langle f(x),P_0(x)\rangle=\int_{-1}^{0}x^2dx+\int_0^1(x^3+x)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{13}{12}$

$\langle f(x),P_1(x)\rangle=\int_{-1}^{0}x^3dx+\int_0^1(x^4+x^2)dx=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{17}{60}$

$\langle f(x),P_2(x)\rangle=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}(3x^2-1)x^2dx+\int_0^1\frac{1}{2}(3x^2-1)(x^3+x)dx$

$=\frac{2}{15}+\frac{1}{4}=\frac{23}{60}$

$S_2^*(x)=\frac{13}{24}+\frac{17}{40}x+\frac{23}{48}(3x^2-1)=1.4375x^2+0.425x+0.0625$

$\|f(x)\|^2=\int_{-1}^{0}x^4dx+\int_0^1(x^3+x)^2dx=\frac{113}{105}$

$\delta^2=\frac{b-a}{2}\left[\|f(x)\|^2-\sum_{i=0}^{2}\frac{2i+1}{2}\langle f(x),P_i(x)\rangle^2\right]$

$=\frac{113}{105}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{3}{2}\times\left(\frac{17}{60}\right)^2-\frac{5}{2}\times\left(\frac{23}{60}\right)^2=0.00161$

九. (10 分) 写出用标准 Runge – Kutta 法求解初值问题

$$\begin{cases} y''-\cos(y+y')=0, & 0<x\le 1 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=3 \end{cases}$$

的计算公式．

令 $z=y'$ $\begin{cases} z=y' \\ z'=\cos(y+z) \\ y(0)=1, \quad z(0)=3. \end{cases}$

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ z_{n+1}=z_n+\frac{h}{6}(L_1+2L_2+2L_3+L_4) \\ k_1=z_n \\ L_1=\cos(y_n+z_n) \\ k_2=z_n+\frac{h}{2}L_1 \\ L_2=\cos(y_n+\frac{h}{2}k_1+z_n+\frac{h}{2}L_1) \\ k_3=z_n+\frac{h}{2}L_2 \\ L_3=\cos(y_n+\frac{h}{2}k_2+z_n+\frac{h}{2}L_2) \end{cases}$$

$k_4=z_n+hL_3$

$L_4=\cos(y_n+hk_3+z_n+hL_3)$

$y(0)=1, \ z(0)=3$

十. (10 分) 证明

1． 设 n 阶单元函数矩阵 $A(t)$ 在 $[t_0,t]$ 上可积，试证：

$$\left\|\int_{t_0}^{t}A(s)ds\right\|_1\le\int_{t_0}^{t}\|A(s)\|_1 ds$$

2．试用数值积分法导出求解初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(a)=y_0 \end{cases}$， $a<x\le b$ ，的梯形格式，

并证明用梯形格式解初值问题 $\begin{cases} y'+y=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 所得数值解为 $y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$．

考试时间: 2012 年 1 月 6 日