天津大学 2012 ~2013 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________ 教学班 ___ 学号：________ 姓名：________

[2] [1 2]

9. 设 $A\in C^{3\times 3}$ 的 Jordan 标准形 $J=\begin{bmatrix}2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，则 $(A-2E)^2=0$　（√）

由 Jordan 标准形可知 A 的初等因子为 $(\lambda-2)^2,(\lambda-2)$，可推出最小多项式为 $(\lambda-2)^2$。所以 $(A-2E)^2=0$，结论正确。

10. 设 $A,B\in C^{n\times n}$，若存在可逆阵 $P\in C^{n\times n}$，使得 $P^{-1}AP=B$ 则 A,B 等价.

（√）

说 A,B 相似或者 A,B 等价都是正确的。

二、填空(10分)

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ & 2 & 6\\ & & -1\end{bmatrix}$，则 $\rho(A^{-1})=$ __1__.

A 是三角形矩阵，其对角线元素即为特征值，即特征值为 $1,2,-1$。A 的逆矩阵 A^{-1} 的特征值即为 A 的特征值的倒数，即为 $1,\frac{1}{2},-1$。所以 $\rho(A^{-1})=1$。

绝对值的最大值.

2. 已知 $A(t)=\begin{bmatrix}e^t & 3t^2\\ te^t & 1\end{bmatrix}$ 则 $\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t=$ ___（如下）___.

由定义 5.2，可知单元函数矩阵的积分为：

$$\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t & \int_0^1 3t^2\,\mathrm{d}t\\ \int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t & \int_0^1 1\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^t\big|_0^1 & t^3\big|_0^1\\ (te^t-e^t)\big|_0^1 & t\big|_0^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

3. 设 $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$，则 $Cond_\infty(A)=$ __5__. $=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty$ ×

由定义 7.2，可知公式 $\mathrm{Cond}_\infty(A)=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty$，而 $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$。

由初等行变换求出 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

可得 $\|A\|_\infty=4$，$\|A^{-1}\|_\infty=\frac{5}{4}$，所以 $\mathrm{Cond}_\infty(A)=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty=5$

4. 设插值型求积公式为 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=f(x_0)+f(x_1)$

确定参数 $x_0=$ $-\sqrt{\frac{1}{3}}$，$x_2=$ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 使其代数精度尽量高.

代精
的
$1,x,x^2$..

令 $f(x)=1$，等式左边为 $x\big|_{-1}^{1}=2$，右边为 $1+1=2$。等式成立。

令 $f(x)=x$，等式左边为 $\frac{1}{2}x^2\big|_{-1}^{1}=0$，右边为 x_0+x_1，得方程 $x_0+x_1=0$。

令 $f(x)=x^2$，等式左边为 $\frac{1}{3}x^3\big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$，右边为 $x_0^2+x_1^2$，得方程 $x_0^2+x_1^2=\frac{2}{3}$。

联立上面两个方程解得 $x_0=-\sqrt{\frac{1}{3}}$，$x_1=\sqrt{\frac{1}{3}}$。

5. 已知矩阵 $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ 的 3 个特征值为 $-1,1,2$，则 A 的最小多项式为____. $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)$

由特征值可写出 A 的特征多项式为 $(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$。因为特征多项式无重零点，所以最小多项式为 $(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$。

考试时间：　年　月　日

天津大学 2012 －2013 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：＿＿＿＿＿　教学班＿＿　学号：＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿

A 正定 ⟹ $Ax=b$. G-S 收

声明

1. 非标准答案，仅供参考。不保证正确，请帮忙改正。
2. 解题方法不是唯一的，该答案只是给出一种思路。
3. 虚线框内为判断理由或者计算方法（考试时不用写）。

一．判断 （10 分）

子空间 √　非空子集 ×

1．设 X 是数域 K 上的线性空间，M 是 X 的子空间，则 $spanM \subset M$ 　（√）

结论是正确的。要注意下面几种说法：

① M 是 X 的子空间，则 $spanM \subset M$ 。　（√）

② M 是 X 的子空间，则 $spanM = M$ 。　（√）

③ M 是 X 的非空子集，则 $spanM \subset M$ 。　（×）

④ M 是 X 的非空子集，则 $spanM = M$ 。　（×）

$X \perp M$

2．设 $A \in C^{n\times n}$，A 相似于对角阵的充分必要条件是其特征多项式~~无重~~零点.（×）

是充分条件但不是必要条件，所以结论是错误的。要注意下面几种说法：

① A 可对角化的充分必要条件是其最小多项式无重零点。　（√）

② A 可对角化的充分必要条件是其特征多项式无重零点。　（×）

③ A 可对角化的充分必要条件是 A 存在一个无重零点的零化多项式。　（√）

④ A 可对角化的充分必要条件是 A 的初等因子都是一次的。　（√）

3．设 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上以 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为节点的 $Lagrange$ 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x_k) = 1$. 　（×）

$\sum l_k(x_k)^{n+1} = 1(x)$

$\sum l_k(x) = 1$ (√)

应为 $n+1$，所以结论错误。注意下面几个结论：

① $\boxed{l_k(x_k) = 1}$　② $\boxed{\sum_{k=0}^{n} l_k(x_k) = n+1}$　③ $\boxed{\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1}$

$l_k(x_k) = 1$　$\sum_{k=0}^{n} l_k(x_k) = n+1$　$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$

4．解线性方程组 $Ax = b$ 的 G-S 迭代格式收敛的充分必要条件是 A 是正定矩阵（×）

是充分条件但非必要条件。只要 G-S 迭代矩阵的谱值小于 1，则 G-S 迭代格式收敛，不是非得是正定矩阵，所以结论错误。

5．设 $x \in (X, \|\cdot\|)$，当 $x \ne 0$ 时，必有 $\|x\| > 0$． 　（√）

根据定义 3.1 范数的正定性"$\|x\| \ge 0$，且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$"可知结论正确。

6．设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上任意一种方阵范数，单位矩阵 $E \in C^{n\times n}$，则 $\|E\| = 1$．（×）

F 范数. √

F 范数是方阵范数，但 $\|E\|_F = \sqrt{n} \ne 1$，所以结论错误。$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$

注意：如果 $\|\cdot\|$ 是算子范数，则结论正确。

7．若求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，当 $f(x)$ 为 x^m 时，求积公式成为等式，则此求积公式代数精度为 m 次． 　（×）

前几项都为 0.

$1, x, x^2, \cdots, x^{m-1}, x^m$

只有当 $f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^m$ 时等式都成立，而当 $f(x) = x^{m+1}$ 时，等式不成立，才能说其代数精度为 m 次。

~~8．设初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) & a < x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 中 $f(x,y)$ 在 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件，则求解该问题的改进 Euler 格式收敛．~~

~~（*** 忽略，第十章不考 ***）~~

考试时间：　年　月　日

课程名称：工程数学基础 课程编号：S131A035 学院名称：________ 教学班___ 学号：________ 姓名：________

三．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C ．

解：先求不变因子

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-(\lambda-2)\\4&\lambda-3&0\\\lambda+1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-(\lambda-2)\\0&\lambda-3&4(\lambda-2)\\0&-1&(\lambda+1)(\lambda-2)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-(\lambda-2)\\0&1&-(\lambda+1)(\lambda-2)\\0&\lambda-3&4(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-(\lambda-2)\\0&1&-(\lambda+1)(\lambda-2)\\0&0&4(\lambda-2)+(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

不变因子为：$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

初等因子为：$\lambda-2$，$(\lambda-1)^2$

属于 $\lambda-2$ 的 Jordan 块为 $[2]$，属于 $(\lambda-1)^2$ 的 Jordan 块为 $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$，

所以 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

$d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$ 的相伴矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&-5\\0&1&4\end{bmatrix}$，

所以 A 的有理标准形为 $C=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&-5\\0&1&4\end{bmatrix}$

四．(10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}$，（1）求 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$；（2）求 e^{At}．

解：先求 A 的特征值及最小多项式．因

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-2&-3\\-4&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$．

经检验 $(A-2E)(A-E)=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\4&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&3\\4&0&0\end{bmatrix}\neq 0$，

故 A 的最小多项式为 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$，$\deg\varphi(\lambda)=3$

设 $f(At)=e^{At}=a_0(t)E+a_1(t)A+a_2(t)A^2=T(At)$．

考试时间： 年 月 日

由于 $f(\lambda t)=e^{\lambda t}$ 与 $T(\lambda t)=a_0(t)+a_1(t)\lambda+a_2(t)\lambda^2$ 在 A 上谱值相等，

得方程组 $\begin{cases} a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)=e^{2t} \\ a_0(t)+a_1(t)+a_2(t)=e^{t} \\ a_1(t)+4a_2(t)=te^{2t} \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} a_0(t)=(2t-3)e^{2t}+4e^{t} \\ a_1(t)=(4-3t)e^{2t}-4e^{t} \\ a_2(t)=(t-1)e^{2t}+e^{t} \end{cases}$

又因 $A^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}4&0&0\\16&4&9\\12&0&1\end{bmatrix}$.

所以

$$e^{At}=a_0(t)E+a_1(t)A+a_2(t)A^2$$

$$=a_0(t)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+a_1(t)\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}+a_2(t)\begin{bmatrix}4&0&0\\16&4&9\\12&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)&0&0\\a_1(t)+16a_2(t)&a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)&3a_1(t)+9a_2(t))\\4a_1(t)+12a_2(t))&0&a_0(t)+a_1(t)+a_2(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{2t}&0&0\\(13t-12)e^{2t}+12e^{t}&e^{2t}&3e^{2t}-3e^{t}\\4e^{2t}-4e^{t}&0&e^{t}\end{bmatrix}$$

五. (10 分) 已知线性方程组为 $\begin{bmatrix}2&1&3\\1&4&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-8\\2\end{bmatrix}$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式，(2) 判断迭代格式收敛性；

解：

(1) Gauss-Seidel 迭代格式为：$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{2}(6-x_2^{(k)}-3x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(-8-x_1^{(k+1)}) \\ x_3^{(k+1)}=2-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)} \end{cases}$

(2) Gauss-Seidel 迭代矩阵为：

$$M_2=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&4&0\\2&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{7}{8}&-\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&\frac{7}{8}&\frac{21}{8}\end{bmatrix}$$

由 $\det(\lambda E-M_2)=\begin{vmatrix}\lambda&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&\lambda-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}\\0&-\frac{7}{8}&\lambda-\frac{21}{8}\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-\frac{1}{8})(\lambda-\frac{21}{8})-\frac{21}{64}\lambda=\lambda^2(\lambda-\frac{11}{4})$

可知 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\frac{11}{4}$，$\rho(M_2)=\dfrac{11}{4}>1$，故 Gauss-Seidel 迭代格式发散。

天津大学 2012 ~2013 学年第一 学期研究生课程考试试卷

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________　教学班____　学号：________　姓名：________

六．(10 分) 已知下列插值条件

x	76	77	78	79	81	82
$f(x)$	2.83267	2.90256	2.97857	3.06173	3.25530	3.36987

(1)用 3 次 Newton 插值多项式计算 $f(76.40)$ 的近似值（结果保留到小数点后第 5 位)。

解：取 76.40 周围的四个节点 76，77，78，79，构造差商表如下：

k	x_k	$f(x_k)$	$f[x_0,x_k]$	$f[x_0,x_1,x_k]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_k]$
0	76	2.83267	-	-	-
1	77	2.90256	0.06989	-	-
2	78	2.97857	0.07295	0.00306	-
3	79	3.06173	0.07635	0.00323	0.00017

所以三次 Newton 插值多项式为：

$$N_3(x)=2.83267+0.06989(x-76)+0.00306(x-76)(x-77)+0.00017(x-76)(x-77)(x-78)$$

计算得：

$$f(76.40)\approx N_3(76.40)=2.83267+0.06989(76.40-76)+0.00306(76.40-76)(76.40-77)+0.00017(76.40-76)(76.40-77)(76.40-78)=2.85996$$

注：

题目要求用三次 Newton 插值公式所以选择四个节点做差商表，节点选择应尽量把要求的值包在中间。

差商计算方法如下

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{2.90256-2.83267}{77-76}=0.06989$$

$$f[x_0,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=\frac{2.97857-2.83267}{78-76}=0.07295$$

$$f[x_0,x_3]=\frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}=\frac{3.06173-2.83267}{79-76}=0.07635$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}=\frac{0.07295-0.06989}{78-77}=0.00306$$

$$f[x_0,x_1,x_3]=\frac{f[x_0,x_3]-f[x_0,x_1]}{x_3-x_1}=\frac{0.07635-0.06989}{79-77}=0.00323$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_0,x_1,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_2}=\frac{0.00323-0.00306}{79-78}=0.00017$$

三次 Newton 插值公式为：

$$N_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

课程名称：工程数学基础　课程编号：S131A035　学院名称：________　教学班 ___ 学号：________ 姓名：________

七．(10 分) 对积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx$，用 Romberg 方法计算积分的近似值，并将结果填入下表（结果保留至小数点后第五位）.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.75000			
1	0.81945	0.84260		
2	0.83171	0.83580	0.83535	
3	0.83468	0.83567	0.83566	0.83566
4	0.83541	0.83565	0.83565	0.83565

注：计算过程如下

$$f(x)=\frac{1}{1+x^3}$$

$$T_1=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=0.75$$

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\tfrac{1}{2})=0.375+0.44445=0.81945$$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\tfrac{1}{4})+f(\tfrac{3}{4})]=0.40973+\frac{1}{4}(0.98462+0.7033)=0.83171$$

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}[f(\tfrac{1}{8})+f(\tfrac{3}{8})+f(\tfrac{5}{8})+f(\tfrac{7}{8})]=$$

$$=0.41586+\frac{1}{8}(0.99805+0.94991+0.80377+0.59883)=0.83468$$

$$T_{16}=\frac{1}{2}T_8+\frac{1}{16}[f(\tfrac{1}{16})+f(\tfrac{3}{16})+f(\tfrac{5}{16})+f(\tfrac{7}{16})+f(\tfrac{9}{16})+f(\tfrac{11}{16})+f(\tfrac{13}{16})+f(\tfrac{15}{16})]$$

$$=0.41734+\frac{1}{16}(0.99976+0.99345+0.97039+0.92273+0.84891+$$

$$0.75474+0.65088+0.54825)=0.83541$$

$$S_1=\frac{4T_2-T_1}{3}=\frac{3.2778-0.75}{3}=0.8426$$

$$S_2=\frac{4T_4-T_2}{3}=\frac{3.32684-0.81945}{3}=0.8358$$

$$S_4=\frac{4T_8-T_4}{3}=\frac{3.33872-0.83171}{3}=0.83567$$

$$S_8=\frac{4T_{16}-T_8}{3}=\frac{3.34164-0.83468}{3}=0.83565$$

$$C_1=\frac{16S_2-S_1}{15}=\frac{13.3728-0.8426}{15}=0.83535$$

$$C_2=\frac{16S_4-S_2}{15}=\frac{13.37072-0.8358}{15}=0.83566$$

$$C_4=\frac{16S_8-S_4}{15}=\frac{13.3704-0.83567}{15}=0.83565$$

$$R_1=\frac{64C_2-C_1}{63}=\frac{53.48224-0.83535}{63}=0.83566$$

$$R_2=\frac{64C_4-C_2}{63}=\frac{53.4816-0.83566}{63}=0.83565$$

考试时间：　年　月　日

八.(10 分) 设函数 $f(x)=e^x$，用 Legendre 多项式求 $f(x)=e^x$ 在 $P_2[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近 $S_2^*(x)$，并求 $\delta^2=\|f-S_2^*\|_2^2$ (结果保留到小数点后第 5 位，取 $e=2.71828$)

（*** 忽略，老师没有讲这部分内容，应该不会考吧 ***）

九. (10 分) 写出用标准 Runge-Kutta 方法解初值问题

$$\begin{cases} y''=2y'+y^2+\cos x, & 0<x\le 1 \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$$

的计算格式 .

（*** 忽略，第十章不考 ***）

十. (10 分) 证明

1. 若 Hermite 矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 是可逆阵，则 A^2 是正定矩阵 .

证：A 是 Hermite 矩阵，可知 $A^H=A$。于是 $(A^2)^H=(A^H)^2=A^2$，所以 A^2 是 Hermite 矩阵。

又由 A 可逆，可知 A 的特征值 $\lambda_i\neq 0\ (i=1,2,\ldots,n)$。于是 A^2 的特征值 $\lambda_i^2>0\ (i=1,2,\ldots,n)$，所以 A^2 是正定矩阵。

2. 赋范空间 l^2 上的右移算子 $T_n: l^2\to l^2$ 的定义为：对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$，

$$T_n x=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n},x_1,x_2,\cdots)$$

试证：(1) T_n 是有界线性算子, (2) 计算 $\|T_n\|$.

证：(1) $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots), y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$ ä l^2，及 $\forall\lambda,\mu$ ä K。

$$\begin{aligned} T_n(\lambda x+\mu y) &= T_n(\lambda\xi_1+\mu\eta_1,\lambda\xi_2+\mu\eta_2,\cdots) \\ &= (\underbrace{0,\cdots,0}_{n},\lambda\xi_1+\mu\eta_1,\lambda\xi_2+\mu\eta_2,\cdots) \\ &= \lambda(\underbrace{0,\cdots,0}_{n},\xi_1,\xi_2,\cdots)+\mu(\underbrace{0,\cdots,0}_{n},\eta_1,\eta_2,\cdots) \\ &= \lambda T_n(x)+\mu T_n(y) \end{aligned}$$

故 $T_n: l^2\to l^2$ 是线性的。

$\|T_n(x)\|=\left\|(\underbrace{0,\cdots,0}_{n},\xi_1,\xi_2,\cdots)\right\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|$，故 T_n 有界，且 $\|T_n\|=1$。

所以 T_n 是有界线性算子。

(2) 由上面证明可知，$\|T_n\|=1$。

考试时间： 年 月 日