2019–2020 学年第二学期《工程数学基础》试卷
标准答案及评分标准

考试时间:2020-9-12

一、判断题

1.× 2.× 3.× 4.✓ 5.× 6.✓ 7.✓ 8.× 9.× 10.✓ 11.× 12.✓ 13.× 14.✓ 15.×
16.✓ 17.✓ 18.× 19.× 20.×

二、填空题

1. $A^c \bigcap B^c$ 2. -3 3. Y 4. 0 5. $b-a$ 6. 0 7. $\lambda-1$ 8. 0 9. 1 10. $2+\sqrt{2}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & \cos x_3 & -x_2\sin x_3 \\ e^{x_2} & x_1e^{x_2} & 0 \end{bmatrix}$ 12. 2 13. $-2/5<\alpha<0$ 14. $16/45$

15. $\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)]$ 16. $\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-2)^2, \xi\in(0,2)$ 17. 6 18. $\frac{21}{26}x+\frac{2}{13}$ 19. $\frac{1}{5}(b^5-a^5)$

20. $(0, 0.278]$

三、解:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 14 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ \underline{\mathbf{4}} & -2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{4}} & -2 & -1 & -8 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 14 \end{bmatrix} \qquad (1\text{ 分})$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \underline{\mathbf{3}} & -\frac{1}{2} & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & \underline{\mathbf{3}} & -\frac{1}{2} & 18 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 18 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 4 \end{bmatrix} \qquad (3\text{ 分})$$

回代解得 $x_3=24, x_2=10, x_1=9$, 即 $x=(9,10,24)^T$. (4 分)

Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\cdot(\quad -2x_2^{(k)} \quad -2x_3^{(k)} \quad +1), \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot(-x_1^{(k)} \quad -x_3^{(k)} \quad +3), \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot(-x_1^{(k)} \quad -x_2^{(k)} \quad +7), \end{cases} \qquad k=0,1,\cdots. \qquad (6\text{ 分})$$

Jacobi 迭代矩阵为

$$M=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

由 $|\lambda E-M|=\lambda^3-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{2})^2=0$ 解得 M 的特征值为 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}, \lambda_3=-1$,

所以 $\rho(M)=1$, 从而 Jocobi 迭代发散. (8 分)

四、解： 构造差商表如下 (3 分)

表 1: 差商表

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	1			
2	-3	-2		
3	-4	-1	$\frac{1}{3}$	
5	2	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{5}$

三次 Newton 插值多项式

$$\begin{aligned} N_3(x) &= 1-2(x-0)+\frac{1}{3}(x-0)(x-2)+\frac{1}{5}(x-0)(x-2)(x-3) \\ &= \frac{1}{5}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{22}{15}x+1, \end{aligned} \qquad (4\text{ 分})$$

Newton 插值公式的余项

$$R_3(x) = f[0,2,3,5,x]x(x-2)(x-3)(x-5). \qquad (6\text{ 分})$$

五、 解：(1)

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+(\lambda-3)\cdot\lambda \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix}, \qquad (4\text{ 分})$$

所以 A 的最小多项式 $m(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)$, 且

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (7\text{ 分})$$

(2) 由 A 的最小多项式为 $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$, 设

$$\mathrm{e}^{tA} = a_0(t)+a_1(t)A = T(tA), \qquad (2\text{ 分})$$

因为 $T(tA)$ 与 e^{tA} 在 $\sigma(A)=\{1,2\}$ 上的值相同，故有

$$\begin{cases} a_0(t)+a_1(t) = \mathrm{e}^t, \\ a_0(t)+2a_1(t) = \mathrm{e}^{2t}, \end{cases} \qquad (4\text{ 分})$$

解得 $a_1(t)=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t, a_0(t)=2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}$, 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA}&=(2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t})E+(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t)A\\&=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}&0&2\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^{2t}\\0&\mathrm{e}^t&0\\\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t&0&2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t\end{bmatrix}\end{aligned}\qquad(6\text{ 分})$$

所以初值问题的解

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA}&=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}&0&2\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^{2t}\\0&\mathrm{e}^t&0\\\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t&0&2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}4\mathrm{e}^t-3\mathrm{e}^{2t}\\0\\3\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^t\end{bmatrix}.\end{aligned}\qquad(8\text{ 分})$$

六、解: 做变换 $x=\frac{1}{2}(1+t), t\in[-1,1]$, 故 $t=2x-1$. 代入得

$$f(x)=\frac{1}{4}(1+t)^2\triangleq\varphi(t).\qquad(2\text{ 分})$$

对 $\varphi(t)$ 在 $[-1,1]$ 上用 Legendre 多项式做最佳平方逼近, 设其为

$$\bar{S}_1^*(t)=a_0P_0(t)+a_1P_1(t)$$

则

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(t+1)^2dt=\frac{1}{3},\\a_1&=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(t+1)^2\cdot tdt=\frac{1}{2},\end{aligned}\qquad(4\text{ 分})$$

因此有

$$\begin{aligned}\bar{S}_1^*(t)&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}t,\\S_1^*(x)&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(2x-1)=x-\frac{1}{6}.\end{aligned}\qquad(6\text{ 分})$$

平方误差为

$$\begin{aligned}\delta^2&=\frac{1}{2}\|\varphi(t)-\bar{S}_1^*(t)\|_2^2\\&=\frac{1}{2}\int_{1}^{1}\frac{1}{4^2}(t+1)^4dt-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{2}{2k+1}a_k^2\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}-2\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^2}\right)\\&=\frac{1}{180}\approx5.56\times10^{-3}.\end{aligned}\qquad(8\text{ 分})$$

七、解:

$$S_{2^2}=\frac{4T_{2^3}-T_{2^2}}{4-1},$$

从而有

$$①\ = T_{2^3} = (3S_{2^2} + T_{2^2})/4 \approx 0.401812.$$

其它的有

$$②\ = S_{2^1} = \frac{4T_{2^2} - T_{2^1}}{4-1} \approx 0.400432, \quad ③\ = C_{2^1} = \frac{4^2 S_{2^2} - S_{2^1}}{4^2-1} \approx 0.400053.$$

八、解： 令 $z = y'$, 初值问题化为

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = (1+x^2)y + 1, \quad (0 < x \le 1), \\ y(0) = 1, z(0) = 3. \end{cases} \qquad (2\text{ 分})$$

解此问题的标准 Runge-Kutta 格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \\ k_1 = z_n, \\ l_1 = (1 + x_n^2)y_n + 1, \\ k_2 = z_n + \dfrac{h}{2} l_1, \\ l_2 = \left[1 + (x_n + \dfrac{h}{2})^2\right](y_n + \dfrac{h}{2}k_1) + 1, \quad (n = 0, 1, \cdots, N-1) \\ k_3 = z_n + \dfrac{h}{2} l_2, \\ l_2 = \left[1 + (x_n + \dfrac{h}{2})^2\right](y_n + \dfrac{h}{2}k_2) + 1, \\ k_4 = z_n + hl_3, \\ l_4 = [1 + (x_n + h)^2](y_n + hk_3) + 1, \\ y_0 = 1, z_0 = 3, \end{cases} \qquad (6\text{ 分})$$

九、证明： (1) 由于 (x_n) 和 (y_n) 都是 X 中的 Cauchy 序列，则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, 使得当 $m, n > N_1$ 时, $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$; 当 $m, n > N_2$ 时, $\|y_m - y_n\| < \varepsilon$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $m, n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \|x_m - y_m\| - \|x_n - y_n\| \right| &\le \|(x_m - y_m) - (x_n - y_n)\| \\ &\le \|x_m - y_m\| + \|x_n - y_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

这表明 $(\|x_n - y_n\|)$ 是 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 的序列, 由 $\mathbb{R}$ 的完备性知, 数列 $(\|x_n - y_n\|)$ 收敛. (5 分)

(2) 由 A 为 Hermite 正定矩阵知, 存在 n 阶酉矩阵 U 使得

$$U^H A U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

由于 A 为正定矩阵, 因此 $\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$. 令

$$P_1 = U \cdot \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \cdots, 1/\sqrt{\lambda_n}),$$

则 P_1 非奇异, 且 $P_1^H A P_1 = E$. (3 分)

同时, 显然 $P_1^H B P_1$ 是 Hermite 矩阵, 因此存在 n 阶酉矩阵 P_2, 使得

$$P_2^H (P_1^H B P_1) P_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n),$$

这里 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 为 Hermite 矩阵 $P_1^H B P_1$ 的特征值, 故为实数. (4 分)

令 $P = P_1 P_2$, 则 P 非奇异, 且

$$P^H A P = P_2^H (P_1^H A P_1) P_2 = E, \quad P^H B P = P_2^H (P_1^H B P_1) P_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n). \qquad (5 分)$$