2015～2016 学年第一学期期末考试试卷答案

(2016 年 1 月 15 日，2 个小时)

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

A 卷：1. B 2. C 3. C 4. A 5. D

B 卷：1. $2\sin 1$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. 2 5. 24

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

A 卷：1. $\frac{1}{2}$ 2. $2\sin 1$ 3. 2 4. 1 5. 24

B 卷：1. B 2. D 3. D 4. A 5. C

三、解答题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 解：由原题知，当 $t=0$ 时，$x=0, y=\frac{\pi}{2}$.

在 $t\sin y - y+\frac{\pi}{2}=0$ 两边对 t 求导，得 $\sin y + t\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,$ 令 $t=0$ 得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=1$.

在 $\mathrm{e}^x=3t^2+2t+1$ 两边对 t 求导，得 $\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2,$ 令 $t=0$ 得 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=2$.

所以，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\dfrac{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}}=\frac{1}{2}.$

2. 解：令 $t=\sqrt{1-\mathrm{e}^x}$，则 $x=\ln(1+t^2)$；$x=0$ 时，$t=0$; $x=\ln 2$ 时，$t=1$, 从而

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=2\left(t-\arctan t\right)\Big|_0^1=2(1-\frac{\pi}{4})=2-\frac{\pi}{2}.$$

3. 解：

$$\int x^2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2(1+\cos x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(x^2+x^2\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3}+\int x^2\,\mathrm{d}\sin x)$$

$$=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}(x^2\sin x-2\int x\sin x\mathrm{d}x)=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}(x^2\sin x+2\int x\mathrm{d}\cos x)$$

$$=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}(x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos x\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C.$$

4. 解：因为 $\lim\limits_{x\to0}\left(bx-\sin x\right)=0,\ \lim\limits_{x\to0}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=0,$ 所以原式是 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限，可以使用洛必达法则. 所以，

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{b-\cos x},$$

要使得上述极限存在且等于 4，则分母的极限必然是零，即 $b=\lim\limits_{x\to0}\cos x=1,$

原式 $=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{a}}=4,$ 从而，$a=\frac{1}{4},b=1.$

四、解答题（每小题 7 分，共 21 分）

1.解：$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(1-\cos t\right)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4-2\sqrt{2}.$$

2. 解法一：由题意知 Π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,-1,0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$，则平面 Π 的法向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=\left(1,1,3\right),$$

故平面 Π 的点法式方程 $(x-1)+(y-4)+3(z-1)=0$，整理得一般式方程 $x+y+3z=8.$

解法二：设平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$, 由题意知 Π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,-1,0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$，则 $\begin{cases}a-b=0,\\2a+b-c=0\end{cases}$，解得 $b=a,c=3a$. 可取 $\boldsymbol{n}=(1,1,3)$.

3. 解：在 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(s)\sin s\,\mathrm{d}s=x+1$ 两边对 x 求导得 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1,$

即 $f'(x)+f(x)\tan x=\sec x,$ 这是一阶线性非齐次方程，其中 $P(x)=\tan x, Q(x)=\sec x,$

所以，

$$f(x)=C\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\cdot\int\sec x\,\mathrm{e}^{\tan\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$=C\cos x+\cos x\cdot\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x=C\cos x+\sin x,$$

由题意知 $f(0)=1,$ 所以 $f(x)=\sin x+\cos x.$

五、解答题（每小题**8**分，共**16**分）

1. 解法一：原方程对应的齐次方程为$y''-3y'=0$，其特征方程为$r^2-3r=0$，解得$r_1=0$，$r_2=3$.所以齐次方程的通解为$\overline{y}=C_1+C_2\mathrm{e}^{3x}$，其中$C_1,C_2$为任意实数.

方程的自由项为$P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$型，其中$P_n(x)=1-12x,n=1,\ \lambda=0$.因$\lambda=0$是单特征根，故$y''-3y'=0$有形如$y^*=ax^2+bx$的特解. 将其带入原方程得

$-6ax+(2a-3b)=-12x+1$，解得$a=2$，$b=1$，从而$y^*=2x^2+x$.

故原方程的通解为$y=\overline{y}+y^*=C_1+C_2\mathrm{e}^{3x}+2x^2+x$.

由$y(0)=C_1+C_2=2$，$y'(0)=3C_2+1=4$，解得$C_1=C_2=1$.

所以$y=\mathrm{e}^{3x}+2x^2+x+1$.

解法二：设$p=y'$，则$y''=p'$，原方程变为$p'-3p=1-12x$，利用一阶线性非齐次方程的通解公式得到

$$p=C\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}\cdot\int(1-12x)\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=C\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{3x}\cdot\int(1-12x)\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$$

$$=C\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}+4\mathrm{e}^{3x}\cdot\int x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-3x}=C\mathrm{e}^{3x}+4x+1,$$

即$y'=C\mathrm{e}^{3x}+4x+1$，从而

$$y=\int\left(C\mathrm{e}^{3x}+4x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}C\mathrm{e}^{3x}+2x^2+x+C_1=C_1+C_2\mathrm{e}^{3x}+2x^2+x.$$

由$y(0)=C_1+C_2=2$，$y'(0)=3C_2+1=4$，解得$C_1=C_2=1$.

所以$y=\mathrm{e}^{3x}+2x^2+x+1$.

2. 解：联立$\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ y^2=x,\end{cases}$解得圆与抛物线的交点是$(1,-1),(1,1)$，故

(1) 解法一：$$S=2\left(\int_0^1 y_{抛}\,\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}y_{圆}\,\mathrm{d}x\right)=2\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}+2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}-1=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

解法二：$S=2\,(S_1+S_{扇})=2\int_0^1(y_{抛}-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}S_{圆}=2\int_0^1(\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}.$

(2) $$V_y=\pi\int_{-1}^1(x_{圆}^2-x_{抛}^2)\mathrm{d}y=\pi\int_{-1}^1(2-y^2-y^4)\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1(2-y^2-y^4)\mathrm{d}y$$

$$=2\pi(2-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5)\Big|_0^1=\frac{44\pi}{15}.$$

六、证明题（共**5**分）

证法一： 记$c=\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\,\mathrm{d}t$，则$\int_0^a\varphi(t)\,\mathrm{d}t=ac$，将$f(x)$在点$c$处展开得

$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2\ge f(c)+f'(c)(x-c),\ \forall x\in\mathbf{R}$,故

$f(\varphi(t))\ge f(c)+f'(c)(\varphi(t)-c),\ \forall t\in[0,a]$,两边对$t$在$[0,a]$上积分得

$$\int_0^a f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t\ge f(c)a+f'(c)\int_0^a(\varphi(t)-c)\mathrm{d}t=f(c)a+f'(c)\left[\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t-ac\right]=f(c)a,$$

即$f(c)\le\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$,原不等式得证.

证法二：对于$\forall x\in(0,+\infty)$,由积分中值定理知，存在$\xi\in(0,x)$，使得$\varphi(\xi)=\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t$,

令$F(x)=\begin{cases}xf\left(\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)-\int_0^x f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t, & x>0,\\ 0 & x=0,\end{cases}$则有$F(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且

$$F'(x)=xf'\left(\varphi(\xi)\right)\frac{\varphi(x)x-\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}+f\left(\varphi(\xi)\right)-f\left(\varphi(x)\right)$$

$$=f'\left(\varphi(\xi)\right)\left(\varphi(x)-\varphi(\xi)\right)-\left[f\left(\varphi(x)\right)-f\left(\varphi(\xi)\right)\right]$$

(1) 若$\varphi(\xi)=\varphi(x)$，则此时函数$\varphi(t)$是常值函数，结论得证；

(2) 若$\varphi(\xi)\ne\varphi(x)$，对$f(x)$在区间$[\varphi(\xi),\varphi(x)]$或$[\varphi(x),\varphi(\xi)]$上使用拉格朗日中值定理知，存在$\eta$介于$\varphi(x)$与$\varphi(\xi)$之间，$\tau$介于$\eta$与$\varphi(\xi)$之间，使得

$$F'(x)=f'\left(\varphi(\xi)\right)\left(\varphi(x)-\varphi(\xi)\right)-f'(\eta)\left(\varphi(x)-\varphi(\xi)\right)$$

$$=\left[f'\left(\varphi(\xi)\right)-f'(\eta)\right]\left(\varphi(x)-\varphi(\xi)\right)$$

$$=f''(\tau)\left(\varphi(\xi)-\eta\right)\left(\varphi(x)-\varphi(\xi)\right)\quad (对f(x)再次使用拉格朗日中值定理)$$

$$\le 0,$$

所以$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，故$F(x)\le F(0)=0$，即

$xf\left(\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\le\int_0^x f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t\ (x>0)$，令$x=a$，整理可得结论.