天津大学工程硕士研究生

《应用数学基础》试卷 （共 8 页）

______ 学院 ______________专业________ 班，姓名____________学号____________

一. **填空 (每小题 1 分,共 10 分)**

1. 设 $A=\left(2,\sqrt{5}\right]$ 则 $\inf A=$_________.

2. 已知 4 阶矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-4)$，则 A 的初等因子组为____________________________.

3. 设 $A\in C^{3\times 3}$ 的 Jordan 标准形 $J=\begin{bmatrix}2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，则 A 的有理标准形 $C=$_______________.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i} & 0\\ 2 & -1 & 1\\ \mathrm{i} & 0 & 1\end{bmatrix}$ 则 $\|A\|_F=$________.

5. $A(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$ 可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}A^T(t)}{\mathrm{d}t}=$___________________.

6. 已知 $A(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t & t^2\\ t & 1\end{bmatrix}$ 则 $\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t=$________________.

7. 设 M 求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代矩阵，则 Jacobi 迭代格式收敛的充要条件是 $\rho(M)$_______________.

8. 设 $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$ 是 $[a,b]$ 上的以 $a\le x_0<x_1,\cdots,x_n\le b$ 为节点的 Lagrange 插值函数则 $\sum_{k=0}^n l_k(x)=$_______.

9. $n+1$ 个求积节点的插值型求积公式的代数精度最高为__________.

10. 方阵 A 可对角化的充要条件是: A 的最小多项式__________________.

二．计算题 （每小题 10 分，共 60 分）

1. 设

$$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix},$$

（1）求 $\lambda E-A$ 的初等因子组；(2) 求 A 的 Jordan 标准形 J.

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix},$$

（1）求 $\lambda E-A$ 的不变因子；（2）求 A 的有理标准形 C.

3. 设

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix},$$

（1）求 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$；（2）求 e^{At}.

4. 已知函数 $y=f(x)$ 的数值如下：

x	1949	1959	1964	1982	1990
y	402.54	555.48	624.92	776.41	878.54

用 3 次插值多项式计算 $f(73)$ 的近似值（计算过程及结果均保留至小数点后第 2 位）。

5. 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin At)$.

6. 用 Romberg 算法填写下表（计算过程及结果均保留至小数点后第 6 位）：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.173287			
1	0.248829			
2	0.266458			
3	0.270769			
4	0.271841			

三．解下列各题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 对于线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 \quad\ = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

（1）写出 Gauss-Seidel 迭代格式(分量形式);（2）讨论所写格式的收敛性.

2. 写出用标准 Runge—Kutta 法求解初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x + y'), \qquad 0 < x \le 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{cases}$$

的计算公式.

四． 证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 设 X 是数域 K 上的内积空间，则 $\forall x, x, z \in X$ 及 $\forall \alpha, \beta \in K$ ，有

$$< x,\ \alpha y + \beta z > = \overline{\alpha} < x,\ y > + \overline{\beta} < x,\ z > .$$

2. 若 $A \in C^{n \times n}$ 是正规矩阵, 则 $\rho(A) = \|A\|_2$.