0422

3. 用标准的 Runge-Kutta 方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3y}{1+x} \text{ ,} & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 & . \end{cases}$$

取步长$h = 0.2$（结果保留 5 为小数）

解：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = \dfrac{3y_n}{1+x_n} \\ k_2 = \dfrac{3(y_n + \frac{h}{2}k_1)}{1 + x_n + \frac{h}{2}} \\ k_3 = \dfrac{3(y_n + \frac{h}{2}k_2)}{1 + x_n + \frac{h}{2}} \\ k_4 = \dfrac{3(y_n + hk_3)}{1 + x_n + h} \end{cases}$$

计算结果如下表：

| $x_n$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_n$ | 1.00000 | 1.72755 | 2.74295 | 4.09418 | 5.82921 | 7.99601 |

8. 写出用 Euler 方法和改进的 Euler 方法解初值问题

$$\begin{cases} y'' = \cos y \text{ ,} & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \text{ ,} & y'(0) = 3 \end{cases}$$

的计算值

解：

(1)利用 Euler 方法，令$y' = z$，原问题变为：

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \cos y \\ y(0) = 1, z(0) = 3 \end{cases}$$

利用公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n \\ z_{n+1} = z_n + h\cos y_n \\ y_0 = 1, z_0 = 3 \end{cases}$$

取步长$h = 0.2$，得下表：

| $x_n$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_n$ | 1.0000 | 1.6000 | 2.2216 | 2.8421 | 3.4383 | 3.9963 |
| $z_n$ | 3.0000 | 3.1081 | 3.1022 | 2.9811 | 2.7900 | 2.5987 |

(2)用改进的 Euler 方法，利用公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(z_n + z_n + h\cos y_n) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}[\cos y_n + \cos(y_n + hz_n)] \end{cases}$$

仍取步长$h = 0.2$，得下表：

| $x_n$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_n$ | 1.0000 | 1.6108 | 2.2202 | 2.8054 | 3.3528 | 3.8612 |
| $z_n$ | 3.0000 | 3.0511 | 2.9866 | 2.8313 | 2.6395 | 2.4679 |

0424

5. 讨论解初值问题

$$\begin{cases} y' = -10y\ ,\ \ a < x < b \\ y(a) = \ y_0\ \ . \end{cases}$$

的二阶 Runge-Kutta 方法的绝对稳定性对步长的限制。

解：在该题条件的二阶方法下：

$$k_1 = -10y_n\,, \qquad k_2 = (100\beta h - 10)y_n$$

则：

$$y_{n+1} = [100\beta\lambda_2 h^2 - 10(\lambda_1 + \lambda_2)h + 1]y_n$$

由于有条件：

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1\,, \qquad \beta\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

得到：

$$y_{n+1} = (50h^2 - 10h + 1)y_n$$

稳定性条件需要满足：

$$|50h^2 - 10h + 1| \le 1$$

则：

$$0 \le h \le 0.2$$

6. 证明用单步法

$$y_{n+1} = y_n + hf[x_n + \frac{h}{2}\,, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)]$$

解方程$y' = -2ax$的初值问题，可以给出准确解

解：单步法的增量函数：

$$\varphi(x, y, h) = f\left[x + \frac{h}{2}\,, y + \frac{h}{2}f(x, y)\right] = -2ax - ah$$

由$y' = -2ax$得其原函数：

$$y(x_k) = -a(x_k^2 - x_0^2) + y_0$$

则有：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) - 2ahx_n - ah^2$$

由数学归纳法：

①初值时有$y(x_0) = y_0$ ，截断误差为零

②设存在$y(x_n) = y_n$，即：$\varepsilon_{n+1} = y(x_n) - y_n$，则：

$$\varepsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= y(x_n) - 2ahx_n - ah^2 - y_n - h(-2ahx_n - ah^2) = 0$$

$(\cdots)/h$

则$e_n = 0$，该题能给出准确解。

补充题：讨论初值问题

$$\begin{cases} y' = -10y \text{ ，} & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 & . \end{cases}$$

的最简隐格式、最简显格式、梯形法格式的绝对稳定性对步长的限制。

解：

（1）最简显格式为：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + y_n) = (1 - 10h)y_n$$

令：

$$|1 - 10h| \leq 1$$

则：

$$0 \leq h \leq 0.2$$

（2）最简显格式为：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1} + y_{n+1}) = y_n - 10hy_{n+1}$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{1}{1 + 10h}\right)y_n$$

对任意的$h>0$均满足

（3）梯形法格式为：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n+y_n)+f(x_{n+1}+y_{n+1})]$$

化简得：

$$y_{n+1}=\left(\frac{1-5h}{1+5h}\right)y_n$$

对任意的$h>0$均满足