2018～2019 学年第二学期期末考试试卷

《工程数学基础》（共 6 页）

（考试时间：2019 年 6 月 18 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	成绩	核分人签字
得分											

一、判断题（共 20 分，每小题 1 分）

1、由全体无理数构成的集合是可数的。 ( )

2、设 $E \subset \mathrm{P}$，则 $\sup E \in E$。 ( )

3、设 M_1, M_2 是线性空间 X 的子空间，则 $M_1 \mathrm{Y} M_2$ 也是 X 的子空间。 ( )

4、设 $T: X \to X, S: X \to X$ 都是线性算子，则 $S \mathrm{o} T: X \to X$ 也是线性算子。 ( )

5、线性算子 $T: X \to Y$ 的值域 $\mathscr{R}(T)$ 是 Y 的线性子空间。 ( )

6、设 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是内积空间 X 的正交系，则 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是线性无关集。 ( )

7、设 $A \in \mathrm{X}^{n\times n}$，则 $\lambda E - A$ 是可逆的 (即单模态的)。 ( )

8、若 $A \in \mathrm{X}^{n\times n}$ 满足 $A^2 + E = 0$，则 A 可对角化。 ( )

9、设 $A \in \mathrm{X}^{n\times n}$，若 $A^H = -A$，则 A 是正规矩阵。 ( )

10、设 $A = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$，$C^{(1)}$，$C^{(2)}$ 分别是 A_1，A_2 的有理标准形，则 $\begin{bmatrix} C^{(1)} & \\ & C^{(2)} \end{bmatrix}$ 是 A 的有理标准形。 ( )

11、Cauchy 序列收敛于 $x \in (X, \|\cdot\|)$，当且仅当它有一个子序列收敛于 x。 ( )

12、设 W 是赋范空间 X 的完备子空间，(x_n) 是 W 中的序列。若 $x_n \to x \in X$，则 $x \in W$。 ( )

13、在 Banach 空间中，Cauchy 序列与收敛序列是等价的。 ( )

14、$(l^\infty, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间。 ( )

15、$\forall A \in \mathrm{X}^{n\times n}$ 可逆，则 $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{A^{-1}}$。 ( )

16、设 X, Y 是同一数域上的赋范空间，若 Y 是有限维的，则 $\mathscr{B}(X, Y)$ 是完备的。 ( )

17、$\forall A \in \mathrm{X}^{n\times n}$，$\|A\|_2^2 \le \|A\|_1 \|A\|_\infty$。 ( )

18、若 $A \in \mathrm{P}^{n\times n}$ 对称正定，则求解 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛。 ( )

19、奇数个求积节点的 Newton-Cotes 公式的代数精度至少等于节点的个数。 ( )

20、若 $f(x, y)$ 在域 $D = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in \mathrm{P}\}$ 上连续且关于 y 满足 Lipschits 条件，则解初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y), & a < x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 的二阶和四阶 Runge-Kutta 方法是收敛的。 ( )

二、填空题（共 20 分，每空 1 分）

1、设 $E=[-\sqrt{2},3)$，则 $\sup E=$_____。

2、设 $V=\{\Lambda=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},...,a_{nn})\,|\,a_{ii}\in \mathrm{P}, i=1,2,...,n\}$，则 $\dim V=$_______。

3、 设 A 是赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的非空子集，则______是包含 A 的最小子空间。

4、设 $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ 是内积空间 X 的标准正交系，则 $\forall x\in \mathrm{span}\,\{e_1,e_2,...,e_n\}$，有 $x=$_______________。

5、设有界线性算子 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ 的定义为：$\forall f\in C[a,\mathrm{b}]$，$(Tf)(x)=\int_a^x t^2 f(t)dt$，$(\forall x\in[a,b])$，则 $\|T\|=$_____________。

6、设 $A\in \mathrm{X}^{3\times3}$ 的有理标准形 $C=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&-4\\0&1&4\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{tr}A=$_________。

7、设 $A\in \mathrm{X}^{n\times n}$，若 $\left\|2A^T\right\|_1=1$，则 $\|A\|_\infty=$_______。

8、设 Hermite 矩阵 $A\in \mathrm{X}^{3\times3}$ 的特征值为 2、3、3。若 $B\sim A$，则 $\lambda E-B$ 的第二个不变因子 $d_2(\lambda)=$________。

9、设 $A\in \mathrm{X}^{3\times3}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$，则 $\det(\mathrm{e}^A)=$___。

10、设 $f(x)=f(x_1,x_2,x_3)=[x_1e^{x_2},x_2\sin x_3]^T$，则 $f'(x)=$________________。

11、设 $A=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\3&0&0\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{cond}_1 A=$_______。

12、设 M 是求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代矩阵，则 $\det(e^M)=$_____。

13、设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix}$，用迭代法 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(Ax^{(k)}-b)$，$k=0,1,2,...$，求解时迭代法收敛的充分必要条件是 α 的取值在区间______________中。

14、已知 Newton-Cotes 公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx(b-a)\sum_{k=0}^{3}C_k^{(3)}f(x_k)$ 中的 $C_0^{(3)}=\frac{1}{8}$，则 $C_2^{(3)}=$______。

15、若 $f(x)=5x^4+6x^3+3x^2+1$，则差商 $f[2,4,8,16,32]=$_______。

16、设 $f(x)\in C^4[1,2]$，三次插值多项式 $H(x)$ 满足插值条件 $f(1)=2$，$f(2)=3$，$f(3)=1$，$f'(2)=-1$，则插值余项 $R(x)=f(x)-H(x)=$ ______________________。

17、已知函数 $S(x)$ 为 $[0,2]$ 上的三次样条函数，$S(x)=\frac{1}{2}x^3+ax^2$，$0\le x\le1$，

$S(x)=(x-1)^3+\frac{1}{2}(x-1)^2+b(x-1)+c$，$1\le x\le 2$，则 $a=$______。

18、已知一组实验数据 $\{(x_k,y_k)\}=\{(-2,-1),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,1)\}$，则拟合这些数据的一次多项式 $S_1^*=$______________。

19、已知数值积分公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 是 Gauss 求积公式，$l_k(x)\,(k=0,...,n)$ 为 Lagrange 基函数，则 $\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b l_k^2(x)dx\right)\cdot x_k^{2n}=$________________。

20、当步长 $h\in$____________时，求解初值问题 $\begin{cases}y'=-50y,\ 0<x\le1\\ y(0)=1\end{cases}$ 的改进 Euler 方法是绝对稳定的。

三、(8 分) (1)用列主元 Gauss 消去法求解下列线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(2)判断求解上述方程组的 Sidel 迭代格式的收敛性。

四、(6 分) 已知 $f(x)$ 的数据表

x	−1	0	1	3
$f(x)$	4	−1	2	6

求 $f(x)$ 的 3 次 Newton 插值多项式，并给出相应的插值余项。

五、(1) (8 分)已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，用初等变换求 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准型，并写出 A 的最小多项式 $m(\lambda)$，Jordan 标准型 J 和有理标准型 C。

(2) (8 分)求解以 A 为系数矩阵的初值问题 $\begin{cases} x'(t)=A\cdot x(t), \\ x(0)=(1,0,1)^T, \end{cases}$ 这里 $x(t)=(x_1,x_2,x_3)^T$。

六、(8 分) 用 Legendre 多项式求出 $f(x)=e^x$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式 $S_1^*(x)$，并求出平方误差(计算结果精确到小数点后四位)。

七、(6 分) 用 Romberg 算法计算积分 $I=\int_0^4 \frac{16}{16+x^2}\,dx$，将计算结果填入以下表格(精确到小数点后五位)。

k	T_{2^k}	S_{2^k}	C_{2^k}	R_{2^k}
0	3.00000	3.13333	3.14212	
1	3.10000	3.14157		
2	3.13118			
3				

八、（6 分）写出用标准 Runge-Kutta 方法解初值问题

$$\begin{cases} y'' - (\sqrt{x} - 1)y = 0, \quad x \in (0,1], \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$$

的计算格式。

九、(1) (5 分) 设 T 为从赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 到赋范空间 $(Y, \|\cdot\|)$ 的有界线性算子，(x_n) 是 $\mathrm{N}(T) = \{x \in X \mid Tx = 0\}$ 中的序列，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，证明：$x_0 \in \mathrm{N}(T)$。

(2) (5 分) 设 $A \in \mathrm{P}^{n\times n}$ 是实对称正定阵，证明：存在 n 阶实对称正定阵 B，使得 $A = B^2$。