2018—2019 学年第一学期期末考试试卷

（考试时间：2018 年 12 月 21 日）

一、填空题（共 20 分，每空 2 分）

1. 在区间$(0,1)$中随机取两个数，则两数之和小于$\frac{7}{5}$的概率为$\underline{\frac{41}{50}}$.

2. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_5)$是取自总体$X\sim N(0,\sigma^2)$的样本，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_6)$是取自总体$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，X与Y相互独立，若$\dfrac{k(\bar{X})^2}{\sum\limits_{i=1}^{6}(Y_i-\bar{Y})^2}$服从$F$分布，则$k=\underline{25}$.

3. 已知二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$上服从均匀分布，则$P\{X^2<Y\}=\underline{\frac{5}{6}}$.

4. 设随机变量X服从参数为 1 的泊松分布，则$P\{X=E(X^2)\}=\underline{\frac{1}{2}e^{-1}}$.

5. 设随机变量X的概率密度函数为$\varphi(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 $Y=2X$的概率密度函数为$\underline{\frac{2}{\pi(4+y^2)}}$

6. 设总体X服从参数为λ的指数分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体X的简单随机样本，则未知参数λ的矩估计量为$\underline{\frac{1}{\bar{x}}}$.

7. 设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a,\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a,\\ 1, & x>a,\end{cases}$则$A=\underline{\frac{1}{2}}$，$B=\underline{\frac{1}{\pi}}$.

8. 一个复杂系统由 100 个独立的元件组成，在系统运行期间每个元件损坏的概率为 0.10，又知为使系统正常工作，至少必须有 85 个元件工作，则系统正常运行的概率为$\underline{\Phi(\frac{5}{3})}$（结果用标准正态分布的分布函数表示）.

9. 设$X\sim N(\mu,1)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体X的简单随机样本，则μ的置信水平为 0.95 的单侧置信上限为______.

二、选择题（共 10 分，每小题 2 分）

1. 设X,Y是两个独立的随机变量，则下列结论正确的是（ C ）.

A. $D(XY)=D(X)D(Y)$　　B. $D(XY)=D(X)+2\sqrt{D(X)D(Y)}$

C. $D(XY)\ge D(X)D(Y)$　　D. $D(XY)<D(X)D(Y)$

2. 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若σ^2增大，则$P\{|X-\mu|<\sigma\}$（ C ）.

A. 增大　　B. 减小　　C. 保持不变　　D. 增减不定

3. 若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，当函数$f(x)$满足（ B ）条件时，$f(\hat{\theta})$一定是$f(\theta)$的无偏估计.

A. 在 $x=\theta$ 处可导　B. 为线性函数　　C. 在 $x=\theta$ 处连续　　D. 具有单值反函

4. 设 A,B 为互斥事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$，下面四个结论中，正确的是(C).

A. $P(B|A)>0$　　　　B. $P(A|B)=P(A)$

C. $P(A|B)=0$　　　　D. $P(AB)=P(A)P(B)$

5. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $Y=e^{-2X}$ 在区间 $(0,\ e^{-1})$ 内取值的概

(A).

A. $e^{-\frac{1}{2}}$　　B. $1-e^{-\frac{1}{2}}$　　C. $e^{-\frac{1}{2}}-1$　　D. $\frac{1}{2}e-1$

三、计算题(12 分)

若某段高速公路上载重汽车和其他汽车的数量之比为 2 : 3，在途中发生故障需要停

修理的概率分别为 0.03 和 0.01.

(1)求该段公路上有汽车途中发生故障需要停车修理的概率；0.018

(2)若现有一辆汽车途中发生故障需要停车修理，求这辆汽车是载重汽车的概率. $\frac{2}{3}$

四、计算题(10 分)

设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求

$Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数.

五、计算题(14 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}ax, & 0<x<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

求：(1)参数 a 的值；$\frac{3}{4}$

(2) $f_X(x), f_Y(y)$；

(3) $f_{X|Y}(x|y)$；

(4) $E\left(\dfrac{Y}{X}\right)$.

六、计算题(12 分)

某超市一种水产品的销售量 X(kg) 是一个随机变量，在区间[10，20]上服从均匀分布. 超市每售出 1 kg 水产品将获利 3 元，若当天未销售出去，1 kg 亏损 1 元. 超市每天应进多少货才能使期望收益值最大？最大期望值是多少？41.25

七、计算题(12 分) $\frac{35}{2}$

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 是未知参数，任取样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.(1)求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$；(2)判断 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计.

八、计算题(10 分)

某门统考课程，两个学校的考生成绩分别服从 $N(\mu_1,12^2), N(\mu_2,14^2)$. 现分别从两个学校

随机抽取 36 位和 49 位学生的成绩，算得平均成绩分别为 72 分和 78 分. 问在显著性水平 α =0.05 下，两个学校考生的平均成绩是否有显著差异？

附：$\Phi(1.29)=0.9$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$；

$t_{15}(0.05)=1.7531$，$t_{16}(0.05)=1.7459$，$t_{15}(0.025)=2.1315$，$t_{16}(0.025)=2.1199$；

$\chi^2_{15}(0.025)=27.488$，$\chi^2_{15}(0.975)=6.262$，$\chi^2_{16}(0.025)=28.845$，$\chi^2_{16}(0.975)=6.908$.

2018—2019 学年第一学期期末考试试卷答案

一、填空题(共 20 分,每空 2 分)

1. $\frac{41}{50}$　2. 25　3. $\frac{5}{6}$　4. $\frac{1}{2}e^{-1}$　5. $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$　6. $\frac{1}{\overline{X}}$　7. $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{\pi}$

8. $\Phi\left(\frac{5}{3}\right)\left(\text{或}\Phi(2)\text{或}\Phi\left(\frac{10}{3}\right)+\Phi\left(\frac{5}{3}\right)-1\right)$　9. $\overline{X}+1.645\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\text{或}\overline{X}+z_{0.05}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

二、选择题(共 10 分,每小题 2 分)

1. C　2. C　3. B　4. C　5. A

三、计算题(12 分)

解:设 A={该段公路上有汽车途中发生故障停车},

B={载重汽车},$\overline{B}$={其他汽车},

$P(B)=\frac{2}{5}$, $P(\overline{B})=\frac{3}{5}$, $P(A|B)=0.03$, $P(A|\overline{B})=0.01$.

(1)$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$

$$=\frac{2}{5}\times 0.03+\frac{3}{5}\times 0.01=0.018.$$

(2)$P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{2}{5}\times 0.03}{0.018}=\dfrac{2}{3}.$

四、计算题(10 分)

解:先求 X 的分布函数. 当 $x<0$ 时,$F_X(x)=0$;当 $x\geqslant 1$ 时,$F_X(x)=1$;

当 $0\leqslant x<1$ 时,$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\int_0^x dx\int_x^1 8xydy=\int_0^x 4x(1-x^2)dx$$

$$=2x^2-x^4.$$

所以 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x^2-x^4, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

再求 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\{\min(X,Y)\leqslant z\}=P\{X\leqslant z\}=F_X(z).$$

所以 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 2z^2-z^4, & 0\leqslant z<1,\\ 1, & z\geqslant 1.\end{cases}$

五、计算题(14 分)

解:(1)$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^y axdx=\frac{4}{3}a,$

所以 $a=\frac{3}{4}$.

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x\frac{3}{4}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}x(2-x), & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y\frac{3}{4}x\mathrm{d}x=\frac{3}{8}y^2, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(3) 当 $0<y<2$ 时, $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$,

所以 $f_{X|Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{2x}{y^2}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(4) $E\left(\frac{Y}{X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{x}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^y\frac{y}{x}\cdot\frac{3}{4}x\mathrm{d}x$

$=\int_0^2\frac{3}{4}y^2\mathrm{d}y=2.$

六、计算题(12 分)

解:设每天的进货量为 n, $10\leqslant n\leqslant 20$.

利润 $Y=g(X)=\begin{cases}3X-(n-X), & 10\leqslant X\leqslant n,\\ 3n, & n<X\leqslant 20.\end{cases}$

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & 10\leqslant x\leqslant 20,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{10}^{n}\frac{1}{10}(4x-n)\mathrm{d}x+\int_n^{20}\frac{1}{10}3n\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{10}\left[2x^2\big|_{10}^{n}-n(n-10)+3n(20-n)\right]$

$=\frac{1}{10}(-2n^2+70n-200)=-\frac{1}{5}n^2+7n-20.$

由 $\frac{\mathrm{d}E(Y)}{\mathrm{d}n}=-\frac{2}{5}n+7=0$,解得 $n=\frac{35}{2}$.

所以当进货量为 $\frac{35}{2}$ kg 时,期望收益值最大.

$E(Y)=-\frac{1}{5}\times\left(\frac{35}{2}\right)^2+7\times\frac{35}{2}-20=41.25.$

故最大期望值为 41.25 元.

七、计算题(12 分)

解:(1) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$,

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-2n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$,

解得 $\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{2}\bar{X}$.

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\theta\Gamma(3)=2\theta$,

$$E(\hat{\theta})=E\left(\frac{1}{2}\bar{X}\right)=\frac{1}{2}EX=\theta,$$

所以 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计.

八、计算题(10分)

解:假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$,

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

所以拒绝域 $W=\left\{\begin{matrix}(x_1,x_2,\cdots,x_{36})\\(y_1,y_2,\cdots,y_{49})\end{matrix}:|U|>z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$, $z_{0.025}=1.96$,

$$|U|=\frac{|72-78|}{\sqrt{\frac{12^2}{36}+\frac{14^2}{49}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}>1.96,$$

故拒绝 H_0,认为平均成绩有显著差异.