3.6 非单调线搜索算法

前几节所介绍求解无约束优化问题(3.0.1)的算法中, 保证目标函数的值随着迭代的进行不断下降, 属于单调下降算法. 本节简单介绍非单调下降算法，即在算法中，允许目标函数在部分迭代点处的函数值有所上升，但总的趋势保证函数值下降. 相比于单调下降算法，这类算法往往能找到更好的局部最优解, 改进算法的执行效果. 特别地，当目标函数是高度非凸非线性函数时，这类算法往往更有效.

Grippo, Lampariello和Lucidi (见文献[14]) 提出了第一个非单调一维线搜索准则(见(1.4.3)), 即: 寻找步长$\lambda_k = \rho\gamma^{h_k}$使得$h_k$是满足下式的最小非负整数:

$$f(x^k + \rho\gamma^{h_k} d^k) \leq \max_{0\leq j\leq m_k} f(x^{k-j}) + \sigma\rho\gamma^{h_k}\nabla f(x^k)^\top d^k, \qquad (3.6.1)$$

其中, $m_0 = 0$且对于$k \geq 1$有: m_k是一个正整数且满足$0 \leq m_k \leq \min\{m_{k-1}, M\}$, ρ是一个给定的正实数, σ和γ是满足$\sigma, \gamma \in (0,1)$的两个常数.

3.6 非单调线搜索算法

算法 3.6.1 *(GLP非单调线搜索算法)* 选取初始点$x^0 \in \mathbb{R}^n$, 初始参数: 正实数ρ, 实数$\sigma, \gamma \in (0,1)$和整数$M > 1$. 置$m_0 := 0$. 对于$k \geq 1$, 选取正整数m_k使其满足$0 \leq m_k \leq \min\{m_{k-1}, M\}$. 置$k := 0$.

步*1* 若$g_k = 0$, 算法终止, 得到解x^k.

步*2* 置$x^{k+1} := x^k + \lambda_k d^k$, 其中$d^k$是一个给定的下降方向且$\lambda_k$是由线搜索*(3.6.1)*得到的迭代步长.

步*3* 置$k := k + 1$, 转步*1*.

3.6 非单调线搜索算法

在一定条件下，算法3.6.1具有全局收敛性.

定理 3.6.1 令序列$\{x^k\}$由算法*3.6.1*产生. 假设水平集

$$\mathscr{L}(f) := \{x \in \mathscr{F} \mid f(x) \le f(x^0)\}$$

是紧的, 并且存在正常数c_1, c_2使得

$$g_k^\top d^k \le -c_1\|g_k\|^2 \quad 且 \quad \|d^k\| \le c_2\|g_k\|. \tag{3.6.2}$$

那么,

(i) $\{x^k\} \subseteq \mathscr{L}(f)$且$\{x^k\}$的每个聚点$x^*$满足$g(x^*) = 0$;

(ii) $\{x^k\}$没有聚点是f的极大值点.