5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 概述

由于多目标规划的目标函数是一个向量函数，也就造成了多目标规划最优解的概念要比单目标规划最优解的概念复杂的多, 因而产生了各种意义下最优解的概念. 多目标规划解的概念通常与向量集有效点的概念有着较为密切的关系.

考察一般多目标规划问题(5.1.2), 即:

$$
\text{(VMP)} \quad \begin{array}{ll} V-\min & F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T \\ \text{s.t.} & x \in \mathscr{F}, \end{array} \tag{5.2.1}
$$

其中 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 且

$$
\mathscr{F} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, & \forall j \in \{1, 2, \ldots, p\}, \\ h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & \forall j \in \{1, 2, \ldots, q\}, \end{array} \right\}.
$$

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 概念

定义 5.2.1 对于多目标规划问题*(5.2.1)*，设$x^* \in \mathscr{F}$，若对任意的$x \in \mathscr{F}$和任意的$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$，都有$f_i(x^*) \leq f_i(x)$成立，则称$x^*$为问题*(5.2.1)* 的绝对最优解，而对应的向量函数值

$$F^* := F(x^*) := (f_1(x^*), \ldots, f_m(x^*))^T$$

称为问题*(5.2.1)*的绝对最优值。问题*(5.2.1)*所有绝对最优解的集合称为绝对最优解集，一般记为$Z^*[F, \mathscr{F}]$或者Z^*.

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 概念

例如：对于单变量多目标规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_1(x) = x^2, \\
\min \quad & f_2(x) = x^2 + 1, \\
\text{s.t.} \quad & -4 \le x \le 4,
\end{aligned}
$$

其绝对最优解为$x^* = 0$, 绝对最优值为$F^* = (0, 1)^T$.

注. 对于一般多目标规划问题，绝对最优解不一定存在. 例如，对于上述单变量多目标规划问题，若目标函数分别为：$f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x-1)^2$, 则对应的多目标规划问题不存在绝对最优解. 这也是多目标最优化问题与单目标最优化问题一个本质的区别.

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 概念

对于多目标最优化问题，为了寻找另外意义下的“最优解”，在欧氏空间$\mathbb{R}^m$中，我们需要引入向量比较关系的概念.

定义 5.2.2 设$a, b \in \mathbb{R}^m$, 若记$a = (a_1, \ldots, a_m)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$,

(i) 向量a等于向量b是指$a_i = b_i$ $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\})$, 记为$a = b$.

(ii) 向量a小于等于向量b是指$a_i \leq b_i$ $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\})$, 记为$a \leq b$或$b \geq a$.

(iii) 向量a小于向量b是指$a_i \leq b_i$ $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\})$, 且至少存在一个$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$使得$a_i < b_i$. 记为$a \preccurlyeq b$或$b \succcurlyeq a$.

(iv) 向量a严格小于向量b是指$a_i < b_i$ $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\})$, 记为$a < b$或$b > a$.

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 概念

利用向量的几种比较关系，我们可以给出多目标规划问题另外两种“最优解”的概念.

定义 5.2.3 对于多目标规划问题(5.2.1), 设$x^* \in \mathscr{F}$, 若不存在$x \in \mathscr{F}$ 使得$F(x) \preccurlyeq F(x^*)$, 则称x^*为问题(5.2.1) 的有效解(或称为*Pareto*最优解), 又称为非劣解. 问题(5.2.1) 所有有效解的集合称为有效解集，一般记为P或$P[F, \mathscr{F}]$.

注. 由有效解的概念可知，若点x^* 是问题(5.2.1)的有效解，则在序“$\preccurlyeq$”的意义下, 在可行域$\mathscr{F}$内找不到比x^*更好的解. 一般来说有效解不是“最好”的解，但也是“不坏”的解, 由此有效解又称为非劣解或可接受解.

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 概念

定义 5.2.4 对于多目标规划问题(5.2.1), 设$x^* \in \mathscr{F}$, 若不存在$x \in \mathscr{F}$ 使得$F(x) < F(x^*)$, 则称x^*为问题(5.2.1) 的弱有效解(或称为弱*Pareto*最优解), 又称为弱非劣解. 问题(5.2.1) 所有弱有效解的集合称为弱有效解集, 一般记为P_w或$P_w[F, \mathscr{F}]$.

注. 由弱有效解的概念表明，若点x^* 是问题(5.2.1)的弱有效解，则在序 “$<$” 的意义下, 在可行域$\mathscr{F}$内找不到另一个可以 “改进” 的可行解. 一般地，当我们求解多目标规划问题时，最后得到的最优解应该是有效解，或至少应该是一个弱有效解.

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 性质

定理 5.2.1 对于多目标规划问题(5.2.1), 若用Z_i^* $(i \in \{1, \ldots, m\})$表示第i个分量目标函数$f_i(x)$ 在可行域$\mathscr{F}$上的最优解集，则多目标规划问题(5.2.1)的绝对最优解集为$Z^* = \cap_{i=1}^m Z_i^*$.

证明 根据绝对最优解的概念，则$\cap_{i=1}^m Z_i^* \subseteq Z^*$ 显然成立.

反之, 若绝对最优解集$Z^* = \emptyset$, 则集合$\cap_{i=1}^m Z_i^*$必定为空集$\emptyset$. 否则，可设$x^* \in \cap_{i=1}^m Z_i^* \neq \emptyset$. 于是对任意的$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 都有$x^* \in Z_i^*$. 因而，对任意的$x \in \mathscr{F}$都有 $f_i(x^*) \leq f_i(x)$. 这与绝对最优解集$Z^* = \emptyset$相矛盾. 所以, 当绝对最优解集$Z^* = \emptyset$时, 可证得$Z^* = \cap_{i=1}^m Z_i^*$.

若绝对最优解集$Z^* \neq \emptyset$, 设$x^* \in Z^*$. 由绝对最优解的概念，则对任意的$x \in \mathscr{F}$有

$$f_i(x^*) \leq f_i(x), \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

即对任意的$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, 都有$x^* \in Z_i^*$，进而$Z^* \subset Z_i^*$, 于是有$Z^* \subseteq \cap_{i=1}^m Z_i^*$. 定理得证. □

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 性质

定理 5.2.2 对于多目标规划问题(5.2.1), 则

(i) 绝对最优解为有效解，有效解为弱有效解，即$Z^* \subseteq P \subseteq P_w$;

(ii) 当$Z^* \neq \emptyset$时, 有$Z^* = P$;

(iii) 若可行域$\mathscr{F}$为凸集，f_i $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\})$都是可行域$\mathscr{F}$上的严格凸函数，则$P = P_w$.

证明 (i) 先证$Z^* \subseteq P$. 若$Z^* = \emptyset$，结论显然成立. 若$Z^* \neq \emptyset$，用反证法证明. 假设$x^* \in Z^*$但是$x^* \notin P$, 则根据有效解的定义，可知存在$\bar{x} \in \mathscr{F}$, 使得$F(\bar{x}) \preccurlyeq F(x^*)$. 这也说明$x^*$不是多目标规划问题(5.2.1) 的绝对最优解，即$x^* \notin Z^*$, 这与$x^* \in Z^*$相矛盾. 于是有$Z^* \subseteq P$.

下证$P \subseteq P_w$. 若$P = \emptyset$，结论显然成立. 若$P \neq \emptyset$，设$x^* \in P$但$x^* \notin P_w$, 由弱有效解的概念，存在$\hat{x} \in F$, 使得$F(\hat{x}) < F(x^*)$. 进而有$F(\hat{x}) \preccurlyeq F(x^*)$. 这说明$x^* \notin P$, 这与$x^* \in P$相矛盾. 于是$P \subseteq P_w$.

综上所证，所以$Z^* \subseteq P \subseteq P_w$.

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 性质

(ii) 根据结论(i), 则只需证明$P \subseteq Z^*$. 假设$x^* \in P$ 但是$x^* \notin Z^*$. 由于$Z^* \neq \emptyset$, 因而存在$\bar{x} \in Z^*$ 使得$F(\bar{x}) \leq F(x^*)$. 又因为$x^* \notin Z^*$, 所以$F(\bar{x}) \neq F(x^*)$. 于是有$F(\bar{x}) \preccurlyeq F(x^*)$. 再由有效解的定义，可知$x^* \notin P$，这与$x^* \in P$相矛盾, 所以$P \subseteq Z^*$成立.

(iii) 根据结论(i), 只需证明$P_w \subseteq P$. 假设$x^* \in P_w$ 但是$x^* \notin P$. 根据有效解的定义，因而存在$\bar{x} \in \mathscr{F}$使得$F(\bar{x}) \preccurlyeq F(x^*)$. 又因为$\bar{x} \neq x^*$, 并且可行域$\mathscr{F}$为凸集，所以对任意的$\alpha \in (0,1)$, 都有$\alpha\bar{x} + (1-\alpha)x^* \in \mathscr{F}$. 再根据$F$是可行域$\mathscr{F}$上严格凸的向量值函数，于是有

$$F(\alpha\bar{x} + (1-\alpha)x^*) < \alpha F(\bar{x}) + (1-\alpha)F(x^*) \preccurlyeq F(x^*).$$

结合弱有效解的定义，可知$x^* \notin P_w$, 这与$x^* \in P_w$相矛盾.

定理得证. □

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 性质

定理 5.2.3 对于多目标规划问题*(5.2.1)*, 则各个分量目标函数f_i在可行域$\mathscr{F}$上的最优解必是弱有效解，即

$$Z_i^* \subseteq P_w, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

其中Z_i^* $(i \in \{1, \ldots, m\})$表示第i个分量目标函数f_i在可行域$\mathscr{F}$上的最优解集.

证明 根据弱有效解的概念，不难验证此定理的结论成立. 在此省略其证明. □

结合定理5.2.2和定理5.2.3, 则有下述结论.

推论 5.2.1 对于多目标规划问题*(5.2.1)*, 则有

$$P \cup (\cup_{i=1}^m Z_i^*) \subseteq P_w.$$

综合以上各种情况，多目标规划问题各种解集之间的关系如下：

$$\cap_{i=1}^m Z_i^* = Z^* \subseteq P \subseteq P_w \subseteq \mathscr{F}.$$

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 性质

例 5.2.1 对于多目标规划问题

$$\begin{aligned}
\min \quad & f_1(x) = x + \frac{2}{2x-1}, \\
\min \quad & f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}|x-3| \le 1\text{时}, \\ (x-3)^2, & \text{当}|x-3| > 1\text{时}, \end{cases} \\
\text{s.t.} \quad & x \ge 1.
\end{aligned}$$

则可验证: 此多目标规划问题的最优解集、有效解集以及弱有效解集分别为: $Z^* = \emptyset$, $P = [\frac{3}{2}, 2]$以及$P_w = [\frac{3}{2}, 4]$.

解 根据题意, 易证分量目标函数f_1和f_2在可行域$\mathscr{F} = \{x \mid x \ge 1\}$上是凸函数, 并且分量目标函数$f_1$和$f_2$在可行域上的最优解集分别为$Z_1^* = \{\frac{3}{2}\}$和$Z_2^* = [2, 4]$. 于是有$Z_1^* \cap Z_2^* = \emptyset$, 如下图所示:

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 性质

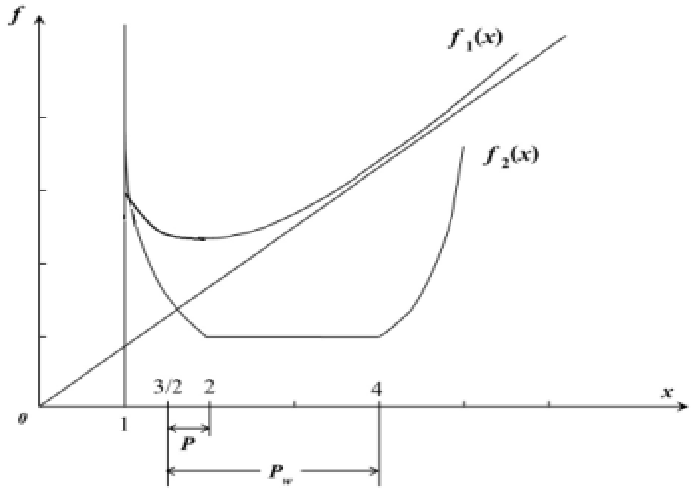

图 5-2-1

根据定理5.2.1, 因而可得绝对最优解集$Z^* = \emptyset$.

在区间$[1, \frac{3}{2})$内任取一点$\bar{x}$，对充分小的正数$\varepsilon > 0$, 都有

$$f_1(\bar{x}) > f_1(\bar{x} + \varepsilon), \quad f_2(\bar{x}) > f_2(\bar{x} + \varepsilon),$$

根据弱有效解的概念，所以$\bar{x}$不是问题的弱有效解. 再根据有效解和弱有效解的关系，可得$\bar{x}$ 也不是问题的有效解. 同理可证：在区间$(4, +\infty)$内也不存在有效解和弱有效解.

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 性质

下面考虑区间$[\frac{3}{2}, 2]$, 在区间$[\frac{3}{2}, 2]$中任取一点z，则对任意的$x \in \mathscr{F}$且$x > z$，都有$f_1(x) > f_1(z)$. 然而对任意的$x \in \mathscr{F}$且$x < z$，都有$f_2(x) > f_2(z)$, 这说明在可行域$\mathscr{F}$中不会存在x使得$F(x) \preccurlyeq F(z)$, 其中$F(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, 即可说明$z$为该问题的有效解，因此该问题的有效解集为：$P = [\frac{3}{2}, 2]$. 再由有效解和弱有效解的关系，则区间$[\frac{3}{2}, 2]$也是该问题的弱有效解集的一部分.

最后，考虑区间$[2, 4]$, 在区间$[2, 4]$中任取一点w，则对任意的$x \in \mathscr{F}$且$x > w$，都有$f_1(x) > f_1(w)$; 然而对任意的$x \in \mathscr{F}$且$x < w$，都有$f_2(x) \geq f_2(z)$. 这意味着在可行域$\mathscr{F}$中不会存在x使得$F(x) < F(z)$, 其中$F(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, 即可说明$z$为该问题的弱有效解. 由此区间$[2, 4]$也为该问题弱有效解集的一部分. 综上所证，所以可得该问题的弱有效解集为: $P_w = [\frac{3}{2}, 2] \cup [2, 4] = [\frac{3}{2}, 4]$. $\square$

5.2 多目标规划解的概念及其性质 — 作业

5.1 试求解下列单变量双目标无约束最优化问题的绝对最优解集Z^*、有效解集P 以及弱有效解集P_w.

(1) $V-\min F(x)=(x+1, x-1)^T$;

(2) $V-\min F(x)=(f_1(x), f_2(x))^T$,

其中

$$f_1(x)=\begin{cases} x^2, & 若|x|>1, \\ 1, & 若|x|\le 1, \end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} |x-1|, & 若|x-1|>1, \\ 1, & 若|x-1|\le 1. \end{cases}$$

5.2 对于多目标最优化问题(VMP):

$$\begin{aligned} V-\min \quad & F(x)=(f_1(x), f_2(x))^T \\ \text{s.t.} \quad & x\ge 0, \quad x\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

其中

$$f_1(x)=(x-1)^2+1, \qquad f_2(x)=\begin{cases} -x+4, & 若x\le 3, \\ 1, & 若3\le x\le 4, \\ x-3, & 若x\ge 4. \end{cases}$$

(1) 试求Z_1^*、Z_2^*、P和P_w;

(2) 用图形表示$P_w=P\cup(\cup_{i=1}^2 Z_i^*)$.