2020～2021 学年第一学期期中考试试卷

《线性代数及其应用》（共 3 页）

（考试时间：2020 年 11 月 06 日）

一、填空题与单项选择题（共 35 分，每小题 5 分）

1. 设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$，$\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b$，则$\begin{vmatrix} a_{11}-2b_{11} & a_{13} & 3a_{12} \\ a_{21}-2b_{21} & a_{23} & 3a_{22} \\ a_{31}-2b_{31} & a_{33} & 3a_{32} \end{vmatrix} =$（　　　　）.

   (A) $-3a+2b$；　（B）$-3a+6b$；　（C）$3a-6b$；　(D) $3a-2b$

2. 设行列式$D=\begin{vmatrix} 1+a & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1+a & 3+a & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4+a \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$，其中 a 为常数，记M_{ij} 为行列式D的(i,j)元的余子式，则$-4M_{41}+4M_{42}-4M_{43}+M_{44}=$__________________________.

3. 设$\boldsymbol{A}$是 n 阶方阵，则以下说法正确的是（　　　　）.

   (A) 如果齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$仅有零解，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$不一定有解；

   (B) 如果齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$一定有解；

   (C) 如果$\boldsymbol{A}$是满秩矩阵，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$必有唯一解；

   (D) 如果$\boldsymbol{A}$是降秩矩阵，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$必有无穷多解

4. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & \lambda & 4 & 8 \\ 25 & \lambda^2 & 16 & 32 \end{bmatrix}$，若矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为 3，则参数$\lambda$的取值范围为______________.

5. 已知把可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的第 3 行的 5 倍加到第 2 行上可得到矩阵$\boldsymbol{B}$，记矩阵$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$的逆矩阵分别为$\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}$，则（　　　　）.

   (A) 将$\boldsymbol{A}^{-1}$的第 2 行的 1/5 倍加到第 3 行上可以得到$\boldsymbol{B}^{-1}$；

   (B) 将$\boldsymbol{A}^{-1}$的第 3 列的 1/5 倍加到第 2 列上可以得到$\boldsymbol{B}^{-1}$；

   (C) 将$\boldsymbol{B}^{-1}$的第 2 列的 5 倍加到第 3 列上可以得到$\boldsymbol{A}^{-1}$；

   (D) 将$\boldsymbol{B}^{-1}$的第 3 行的(-5)倍加到第 2 行上可以得到$\boldsymbol{A}^{-1}$

6. 设矩阵$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为 3 元列向量．令矩阵$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, 6\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3, 7\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3]$．若$|\boldsymbol{A}|=1$，则$|10(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}|=$ ________________.

7. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$均为$n$阶方阵，且满足$(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_n$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{E}_n$为单位矩

阵，则以下叙述中正确的有（　　　　）个.

① $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵；　② $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}_n$；　③ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{C})$；　④ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相抵 .

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

二、解答题 （共计 39 分）

1、（12 分）设 k 为正整数，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&8&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^k$（k 为正整数）.

2、（12 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&2\\4&2&3\\2&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}$ 满足 $2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}_3$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

3、（15 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}0&0&2&0&0\\0&0&2&2&0\\0&0&2&2&2\\2&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\end{bmatrix}$，若 $|\boldsymbol{A}|>0$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

三、(16 分) 讨论当 a 取何值时线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=2,\\2x_1+5x_2+ax_3=5,\\3x_1+(a+5)x_2+(a-1)x_3=7,\end{cases}$$

(1) 有唯一解;　(2) 无解;　(3) 有无穷多解, 并求其向量形式的通解.

四、证明题（本题 10 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 元列向量, 且满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-8\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 又矩阵 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}]$ 是分块可逆矩阵, 求证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且存在 3 阶方阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 成立.