2023～2024 学年第一学期《微积分Ⅰ》第一次月考试卷参考答案

考试时间：2023 年 10 月 13 日（1 小时）

一、求极限（共 40 分，每小题 10 分）

1. 解: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}\cdot\frac{3(2x-1)}{3x-1}}=\mathrm{e}^2.$

解法二: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\ln\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\ln\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\cdot\frac{3}{3x-1}}=\mathrm{e}^2.$

2. 解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left((1+x^2)^{\pi}-1\right)\tan(x^2)}{(\mathrm{e}^{x\sin x}-1)(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\pi x^2\cdot x^2}{x\sin x\cdot\frac{1}{2}x^2}=2\pi.$

3. 解: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n-\sqrt{3n^4+2}}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n-\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3+\dfrac{2}{n^4}}=0-\sqrt{3}=-\sqrt{3},$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n=0$ (由无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小).

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}$, 其中[ ]表示取整函数.

解: 由 $[na_n]\le na_n<[na_n]+1$, 得 $na_n-1<[na_n]\le na_n$,

于是, $a_n-\dfrac{1}{n}<\dfrac{[na_n]}{n}\le a_n$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,

由迫敛准则, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a.$

二、解答题（共 30 分，每小题 10 分）

1. 当 $x\to+\infty$ 时, 无穷小量 $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ 与 $\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3}$ 哪一个是高阶的？给出判断依据.

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\arctan x}{1+x^2}}{\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^3}}{-(1+x^2)}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{-\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}=\dfrac{\pi}{2}\cdot0=0,$

故 $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ 是比 $\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3}$ 高阶的无穷小量.

解法二: 当 $x\to+\infty$ 时, $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\sim\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}$, $\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1-x^{-3}}-1\right)\sim-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$,

故 $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ 是比 $\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3}$ 高阶的无穷小量.

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 是否存在？若存在, 求极限值. 若不存在, 给出理由.

解: (1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^{2n}}+\frac{1}{x^{2n-1}}}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ 0, & x=-1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}0=0$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(1+x)=0$,

所以, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$;

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(1+x)=2$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}0=0$,

由于 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, 所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\le\dfrac{1}{\pi}, \\ \tan\dfrac{1}{2x}, & x>\dfrac{1}{\pi}. \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的所有间断点，并判断间断点的具体类型.

解：$f(x)$ 在 $(-\infty,0),\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right),\left(\dfrac{1}{\pi},+\infty\right)$ 上都连续，故 $f(x)$ 的可能间断点为 $x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{\pi}$.

(1) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)=0+1=1$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+0=1,$$

所以，$x_1=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\pi}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{\pi}^-}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{\pi}\arctan\pi+\dfrac{2}{\pi}\cdot\sin\pi=\dfrac{2}{\pi}\arctan\pi$,

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{\pi}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{\pi}^+}\tan\dfrac{1}{2x}=\lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}^-}\tan u=\infty$,

所以，$x_2=\dfrac{1}{\pi}$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

注： $f(x)$ 在 $x_2=\dfrac{1}{\pi}$ 的右侧为无穷间断.

三、证明题（共 30 分，每小题 10 分）

1. 设 $\{a_n\}$ 为非负数列，且对任意 $n\ge1$ 满足 $a_{n+1}\le a_n+\dfrac{1}{n^2}$. 令 $b_n=a_{n+1}+\dfrac{1}{n}$.

(1) 利用单调有界准则证明数列 $\{b_n\}$ 收敛； (2) 利用(1)的结论，给出 $\{a_n\}$ 的收敛性.

证明: (1) 由 $a_n\ge0$，得 $b_n=a_{n+1}+\dfrac{1}{n}>0$.

又 $a_{n+1}\le a_n+\dfrac{1}{n^2}$，于是

$$b_n=a_{n+1}+\frac{1}{n}\le a_n+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}=a_n+\frac{n+1}{n^2}<a_n+\frac{1}{n-1}=b_{n-1},$$

所以，数列 $\{b_n\}$ 单调递减且有下界. 由单调有界准则，知 $\{b_n\}$ 收敛.

(2) $a_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，由数列极限的性质，可得 $\{a_{n+1}\}$ 收敛，

于是，$\{a_n\}$ 收敛.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 证明方程 $f^2(x)-\dfrac{1}{x^2}+1=0$ 在 $(0,1]$ 上至少有一个实根.

证明: 设 $F(x)=f^2(x)-\dfrac{1}{x^2}+1$，则 $F(x)$ 在 $(0,1]$ 上连续.

$$F(1)=f^2(1)\ge0,\quad \lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\left(f^2(x)-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty,$$

由极限的保号性，在 $\overset{o}{U}_+(0)$ 内 $F(x)<0$，存在 $a\in(0,1)$，$F(a)<0$.

(1) 当 $f(1)=0$ 时，$F(1)=f^2(1)=0$，$x=1$ 是方程 $f^2(x)-\dfrac{1}{x^2}+1=0$ 的根;

(2) 当 $f(1)\ne0$ 时，$F(1)=f^2(1)>0$，$F(x)$ 在 $[a,1]$ 上连续，且 $F(a)\cdot F(1)<0$，

由零值点定理，至少存在一点 $\xi\in(a,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f^2(\xi)-\dfrac{1}{\xi^2}+1=0$.

综上，方程 $f^2(x)-\dfrac{1}{x^2}+1=0$ 在 $(0,1]$ 上至少有一个实根.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 证明方程 $f^2(x)-\dfrac{1}{x^2}+1=0$ 在 $(0,1]$ 上至少有一个实根.

证法二： 设 $F(x)=x^2f^2(x)+x^2-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

$F(0)=-1<0$，$F(1)=f^2(1)\ge 0$.

(1) 当 $f(1)=0$ 时，$F(1)=f^2(1)=0$；

(2) 当 $f(1)\ne 0$ 时，$F(1)=f^2(1)>0$，于是 $F(0)\cdot F(1)<0$，由零值点定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$.

综上，至少存在一点 $\xi\in(0,1]$，使得 $F(\xi)=0$，ξ 即方程 $F(x)=0$ 的根，所以方程 $f^2(x)-\dfrac{1}{x^2}+1=0$ 在 $(0,1]$ 上至少有一个实根.

3. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $|a_{n+1}-a_n|<r^n\ (n=1,2,3,\cdots)$, 其中 $r\in(0,1)$.
利用柯西收敛准则证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明： 对任意 $p\in\mathrm{N}_+$，由 $|a_{n+1}-a_n|<r^n$, 得

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &= |(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+2}-a_{n+1})+\cdots(a_{n+p}-a_{n+p-1})|\\ &\le |a_{n+1}-a_n|+|a_{n+2}-a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|\\ &\le r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{n+p-1}\\ &= r^n(1+r+r^2+\cdots+r^{p-1})<\frac{r^n}{1-r}.\end{aligned}$$

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\dfrac{r^n}{1-r}<\varepsilon$，得 $n>\log_r(1-r)\varepsilon$，取 $N=\max\{1,\log_r(1-r)\varepsilon\}$，

则当 $n>N$ 时, 对任意 $p\in\mathrm{N}_+$，恒有 $|a_{n+p}-a_n|<\dfrac{r^n}{1-r}<\varepsilon$，故 $\{a_n\}$ 为柯西数列.

由柯西收敛准则，知 $\{a_n\}$ 收敛.

证法二： 设 $m>n$，由 $|a_{n+1}-a_n|<r^n$, 得

$$\begin{aligned}|a_m-a_n| &= |(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+2}-a_{n+1})+\cdots(a_m-a_{m-1})|\\ &\le |a_{n+1}-a_n|+|a_{n+2}-a_{n+1}|+\cdots+|a_m-a_{m-1}|\\ &\le r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{m-1}\\ &= r^n(1+r+r^2+\cdots+r^{m-n-1})<\frac{r^n}{1-r}.\end{aligned}$$

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\dfrac{r^n}{1-r}<\varepsilon$，得 $n>\log_r(1-r)\varepsilon$，取 $N=\max\{1,\log_r(1-r)\varepsilon\}$，

则当 $m\ge n>N$ 时，恒有 $|a_m-a_n|<\dfrac{r^n}{1-r}<\varepsilon$，故 $\{a_n\}$ 为柯西数列.

由柯西收敛准则，知 $\{a_n\}$ 收敛.