

2021~2022 学年第一学期期末考试试卷

《算法设计与分析》

(考试时间：2021 年 12 月 17 日)

一、简答

1. 简述渐近记号的含义。
2. 应用 Master 方法解递归方程 $T(n) = 5T\left(\frac{n}{5}\right) + n \lg n$ 。
3. 什么是类 P、类 NP、NP 难、NP 完全问题？画图说明它们的关系。

二、算法分析

1. 分析下列算法的最好、最坏和平均情形的时间复杂度：

```
for(int i = n - 1; i >= 0 && x < a[i]; i--)  
    a[i + 1] = a[i];  
a[i + 1] = x;
```

2. 分析求解 Hanoi 问题的算法的渐近复杂度：

```
void Hanoi(A, C, n){  
    if n = 1  
        move(A, C);  
    else{  
        Hanoi(A, B, n - 1);  
        move(A, C);  
        Hanoi(B, C, n - 1);  
    }  
}
```

三、贪心法

已知 n 个任务的执行序列。假设任务 i 需要 t_i 个时间单位。如果任务完成的顺序为 $1, 2, \dots, n$

，则任务完成的时间为 $c_i = \sum_{j=1}^i t_j$ 。任务的平均完成时间(Average Completion Time, ACT)为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$ 。生成一个任务序列使得 ACT 最小，生成的方法是：分 n 步生成一个任务序列，每一步从剩下的任务里选择时间最少的任务。

1. 写出上述算法的伪代码，并分析其复杂性。
2. 证明利用该算法生成的任务序列具有最小的 ACT。

四、分治法

对数组 $A[1:n]$ 进行排序。使用快速排序的方法，每次选择 $A[3]$ 作为支点元素。写出该排序算法的伪代码，并分析其最好和最坏情形下的时间复杂度。

五、动态规划法

设 $g(i, x)$ 为剩余物品为 $1, 2, \dots, i$ ，剩余背包容量 $c = x$ 的 0/1 背包问题的最大效益值。

1. 写出 $g(i, x)$ 与 $g(i - 1, x)$ 的递归关系。
2. 有以下 0/1 背包问题： $n = 4, c = 20, p = (2, 5, 8, 1), w = (10, 15, 6, 9)$ 。用元组法计算 $g(4, 20)$ ，并回溯得到最优解。

六、回溯-分支限界法

有以下 TSP 问题：

	北京	上海	广州	南京
北京	0	500	600	100
上海	100	0	800	500
广州	1000	200	0	2000
南京	400	400	100	0

分别使用回溯法和分支限界法，写出相应的限界条件，画出展开的状态空间树，求出问题的优化解和优化值。

注意：在打印试卷时可以选择不打印此页！

关于使用本资料的须知：

1. 本资料为个人整理，不建议广泛传播。
2. 本资料使用了天津大学试卷的模板制作，但**并非正式考试试卷**，仅作为个人复习使用。
3. 本资料为往年考试真题回忆版，可能与实际真题有出入，也不一定反映了您使用该资料当年试题的题型、难度、知识点覆盖范围。
4. 资料中**标红处**为试题内容有关重要提醒，**标黄底处**为本资料与实际真题有出入的部分。
5. 绝大多数资料不提供相应的答案，请您**务必不要直接**拿这份资料向任课老师寻求题目解答等。

关于这门课程的**个人**提醒和建议：

1. 本课程为《算法设计与分析》，是 2020 级工科试验班（智能与计算类）第三学期的大类基础课。
2. 这门课在数据结构课的基础上延伸出去，介绍了算法性能分析的基本方法以及五种基本算法。对于学习了算法竞赛的同学来说内容还是相当基础的，但如果没有 OI/ACM 的经历的话这门课可能会有一定的难度。
3. 这门课针对每一类算法讲的东西都不少，但是延展性的内容只会出现在作业和实验中，考试中不会涉及从来没见过的算法和问题，都是上课讲过的经典题型的变式。
4. 在平时上课和复习的过程中尤其需要关注每类算法能够解决的几种经典问题，比如分治算法对应的是归并排序和快速排序，DP 算法对应的是 0/1 背包问题等等。
5. 最后祝大家考试顺利啦！