# 2.4 线性规划的对偶单纯性算法

用单纯形算法求解线性规划的过程：从一个基可行解(保证基变量$x_B = B^{-1}b \geq 0$)出发，检验它的判别数$\sigma_j$ ($j \in \{1, 2, \ldots n\}$)是否全部非负. 如果所有判别数非负，那么当前的基可行解就是最优解；如果存在负的判别数，或者判断出问题没有最优解，或者则迭代到另一基可行解，不断重复迭代直到算法结束.

在单纯形算法迭代中，在保证$B^{-1}b \geq 0$的条件下，使得负的判别数逐步减少，直到所有的判别数非负为止.

对称地，人们也可采用如下方式进行迭代：从一个基解(即不保证基变量$x_B = B^{-1}b \geq 0$)开始迭代，保证在每步迭代中所有的判别数非负，并且在迭代过程中使得$B^{-1}b$中负的分量逐步减少，直到$B^{-1}b \geq 0$为止. 这种方法称为对偶单纯形算法.

值得提到的是：对偶单纯形算法不是求解对偶规划问题的算法，而是根据对偶原理求解原线性规划问题的另一种单纯形算法.

# 2.4 线性规划的对偶单纯性算法

第一步: 最优性的判定 如果

$$x_B = B^{-1}b \geq 0,$$

那么令 $x_N = 0$, 由 $x_B$ 和 $x_N$ 构成的基解为线性规划(2.4.1)的最优解, 算法终止.

若 $B^{-1}b \geq 0$ 不成立, 则记

$$b' := B^{-1}b, \quad \begin{pmatrix} a'_{1j_{m+1}} & a'_{1j_{m+2}} & \cdots & a'_{1j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{mj_{m+1}} & a'_{mj_{m+2}} & \cdots & a'_{mj_n} \end{pmatrix} := B^{-1}N,$$

查看矩阵 $B^{-1}N$ 中与向量 $B^{-1}b$ 的负元所对应的行中是否存在所有元素非负的行 (即是否存在 $j_l \in \{i \mid b'_i < 0, \forall i \in S\}$ 使得对 $\forall j_k \in T$ 有 $a'_{j_l j_k} \geq 0$), 若存在, 则线性规划无可行解; 否则进行迭代.

# 2.4 线性规划的对偶单纯性算法

**第二步: 确定主元** 首先确定出基变量: 令

$$b'_{j_l} := \min\{b'_i \mid b'_i < 0,\ \forall i \in S\},$$

则$x_{j_l}$为出基变量. 再确定进基变量: 令

$$\frac{\sigma_{j_k}}{a'_{j_l j_k}} := \max\left\{\frac{\sigma_j}{a'_{j_l j}} \,\middle|\, a'_{j_l j} < 0,\ \forall j \in T\right\},$$

则$x_{j_k}$为进基变量. 因此, 确定$a'_{j_l j_k}$为主元.

**第三步: 进行迭代** 以$a'_{j_l j_k}$为主元做旋转变换, 得到下一个迭代点, 转回第一步.

至于对偶单纯形算法中最优性判别的理论推导以及迭代公式的推导等类似于单纯形算法的对应部分, 在此不再做介绍.

# 2.4 线性规划的对偶单纯性算法

**例 2.4.1**　用对偶单纯形法求解下面的线性规划问题:

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 12x_1 & + & 8x_2 & + & 16x_3 & + & 12x_4 & & \\
s.t. & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & & \geq & 2, \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & \geq & 3, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

**解**　引入松弛变量$x_5, x_6$, 原线性规划问题变为

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
\min & 12x_1 & + & 8x_2 & + & 16x_3 & + & 12x_4 & & & & & \\
\text{s.t.} & -2x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & & & + & x_5 & & = & -2, \\
 & -2x_1 & - & 2x_2 & & & - & 4x_4 & & & + \; x_6 & = & -3, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & x_6 & \geq & 0.
\end{array}
$$

那么, 用单纯形表求解以上线性规划问题, 计算过程如下:

# 2.4 线性规划的对偶单纯性算法

**例2.4.1的表1**

| $c_j$ | | | 12 | 8 | 16 | 12 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | B | $b'$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
| 0 | $P_5$ | -2 | -2 | -1 | -4 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $P_6$ | -3 | -2 | -2 | 0 | (-4) | 0 | 1 |
| $\sigma_j$ | | | 12 | 8 | 16 | 12 | 0 | 0 |
| $\sigma_j/a'_{lj}\ (a'_{lj}<0)$ | | | -6 | -4 | / | -3 | / | / |
| 0 | $P_5$ | -2 | -2 | (-1) | -4 | 0 | 1 | 0 |
| 12 | $P_4$ | 3/4 | 1/2 | 1/2 | 0 | 1 | 0 | -1/4 |
| $\sigma_j$ | | | 6 | 2 | 16 | 0 | 0 | 3 |
| $\sigma_j/a'_{lj}\ (a'_{lj}<0)$ | | | -3 | -2 | -4 | / | / | / |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | $P_2$ | 2 | 2 | 1 | 4 | 0 | -1 | 0 |
| 12 | $P_4$ | -1/4 | -1/2 | 0 | (-2) | 1 | 1/2 | -1/4 |
| $\sigma_j$ | | | 2 | 0 | 8 | 0 | 2 | 3 |
| $\sigma_j/a'_{lj}\ (a'_{lj}<0)$ | | | -4 | / | -4 | / | / | / |
| 8 | $P_2$ | 3/2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | -1/2 |
| 16 | $P_3$ | 1/8 | 1/4 | 0 | 1 | -1/2 | -1/4 | 1/8 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 2 |

因此, 原线性规划问题的最优解为$(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0)^\top$, 最优值为14.

# 2.4 线性规划的对偶单纯性算法— 作业

2.18 用对偶单纯形算法求解下列线性规划问题.

(1)
$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -5x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & \geq & 9, \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 6, \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & -3, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 6, \\
 & 2x_1 & - & x_2 & & & \geq & 4, \\
 & x_1 & & x_2, & & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$