2021～2022 学年第二学期数学系本科生期末考试试卷

《最优化理论与方法》（共 4 页）

（考试时间：2022 年 6 月 14 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	成绩
得分								

一、不定项选择题（共 20 分，每小题 2 分）

1、任给一个单目标约束优化问题，以下结论正确的有（ A、D ）

(A) 每个全局最优解一定是局部最优解。 (B) 若局部最优解存在，则全局最优解一定存在。

(C) 若全局最优解存在，则一定唯一。 (D) 若全局最优解存在，则最优值一定唯一。

2、记 $[p]=\{1,\ldots,p\}$，令 $C_i\subseteq R^n (i\in[p])$ 为凸集，对任意的 $i\in[p]$，$f_i: R^n\to R$ 为 C_i 上的凸函数，设 $\lambda_i (i\in[p])$ 为实数，则以下结论正确的有（ A、B、~~C~~、D ）

(A) $\bigcap_{i=1}^{p}\lambda_i C_i$ 为凸集。 (B) $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i C_i$ 为凸集。

(C) $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i$ 为 $\bigcap_{i=1}^{p} C_i$ 上的凸函数。 (D) $\sum_{i=1}^{p} f_i$ 为 $\bigcap_{i=1}^{p} C_i$ 上的凸函数。

3、关于线性规划，以下结论正确的有（ A、B ）

(A) 任意一个线性规划都可以转化为标准型。

(B) 若线性规划有两个相邻顶点是最优解，则这两点连线段上的点都是最优解。

(C) 求解线性规划的对偶单纯形算法，是求解该问题对偶规划的单纯形算法。

(D) 若一个线性规划存在最优解，则其最优解是该问题可行域的某个顶点。

4、给定线性规划(LP): $\min\{c^Tx: Ax=b, x\ge 0\}$，及其对偶规划(DLP): $\max\{b^Ty: A^Ty\le c\}$，以下结论正确的有（ ~~A、C、D~~ A、B、C、D ）

(A) 若 x^0, y^0 分别是(LP)和(DLP)的可行解，则 $c^Tx^0\ge b^Ty^0$。

(B) 若(LP)和(DLP)都有可行解，则它们都有最优解。

(C) 若(LP)可行但无下界，则(LP)和(DLP)都没有最优解。

(D) 若(LP)的可行解 x^0 与(DLP)的可行解 y^0 满足 $(x^0)^T(c-A^Ty^0)=0$，则 x^0 一定是(LP)的最优解。

①

5、对于求解线性规划(LP)的单纯形算法，以下结论正确的有（ A、C、D ）

②

(A) 算法设计的理论基础是：若(LP)有最优解，则存在某个顶点是最优解。

(B) 迭代点对应的目标函数值序列是严格单调下降的。

0 (C) 在求解(LP)的大 M 法中，若辅助问题无最优解，则(LP)也无最优解。

0 (D) 在求解(LP)的二阶段法中，第一阶段的目的是求出(LP)的一个基可行解。

6、对于无约束优化问题(UO): $\min_{x\in R^n} f(x)$，以下结论正确的有（ A、B、C ）

(A) 求解(UO)的最速下降法中，相邻两步的迭代方向一定垂直。

0 (B) 若 f 是一个严格凸二次函数，则求解(UO)的 DFP 拟牛顿法至多迭代 n 步可达极小值点。

0 (C) 若 f 是严格凸二次函数，则求解(UO)的 FR 共轭梯度法和 PRP 共轭梯度法都属于共轭方向法；

(D) 求解(UO)的牛顿法、共轭梯度法、拟牛顿法都具有二次终止性。

7、考虑无约束优化问题(UO)，以下结论正确的有（ ）

(A) 求解(UO)的非单调下降算法中，迭代点对应的目标函数值序列的整体趋势是下降的。

(B) 求解(UO)的非单调线搜索下降算法中，使用的是非单调线搜索。

(C) 求解(UO)的信赖域算法不是线搜索下降算法。

(D) 对于线性方程 $Ax=b$，其中 $A\in R^{m\times n}$ 且 $b\in R^m$，若 $Ax=b$ 有解，则 $Ax=b$ 的最小二乘解也是该方程组的一个解。

8、对 (NLP): $\min_{x\in D} f(x)$ 其中 $D=\{x\in R^n: c_i(x)\ge 0, i\in I 且 c_i(x)=0, i\in E\}$，其 Lagrange 对偶问题记为(DNLP)，以下结论正确的有（ A、B ）

(A) (DNLP)是一个凸规划问题。

(B) 令 $x\in D$，则 $f(x)$ 大于等于(DNLP)的任一可行点对应的目标函数值。

X (C) 用内、外罚函数法求解(NLP)时，得到的近似最优解不是(NLP)的可行解。

X (D) 用外罚函数法求解(NLP)时，罚函数序列是单调减少的。

9、对于(VMP): $V-\min_{x\in D} F(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))^T$，以下结论正确的有（ A、C ）

③

X (A) 若(VMP)有绝对最优解，则(VMP)的每个有效解是其绝对最优解。

X (B) (VMP)不一定存在绝对最优解，但它一定存在弱有效解。

0 (C) 若每个 f_i 在 D 上有相同的最优解，则(VMP)一定存在有效解。

0 (D) 若每个 f_i 在 D 上有相同的最优解，则(VMP)的弱有效解是其有效解。

10、使用评价函数将(MVP): $V-\min_{x\in D} F(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))^T$ 转化为单目标优化问题(UP): $\min_{x\in D} u(F(x))$ 来求解，以下结论正确的有（ A、B、C ）

(A) 若 u 为严格单调增函数，则(UP)的最优解一定是(MVP)的有效解。

(B) 若 u 为单调增函数，则(UP)的最优解一定是(MVP)的弱有效解。

(C) 若 $u(F(x))=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)$，其中 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ 且每个 $\lambda_i>0$，则(UP)的最优解一定是(MVP)的有效解。

(D) 若 $u(F(x))=\max_{i\in\{1,\ldots,m\}}\{\lambda_i f_i(x)\}$，其中 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ 且每个 $\lambda_i>0$，则(UP)的最优解一定是(MVP)的有效解。

二、填空题（共 10 分，每个空 1 分）

P4-P5：向量范数、矩阵范数

1、令 $A=(a_{ij})\in R^{2\times 2}$，其中对任意的 $i,j\in\{1,2\}$，有 $a_{ij}=i+j$，则 $\|A\|_1=$ __7__.

2、设函数 $f: R^n\to R$ 一阶连续可微，则 $d\in R^n$ 为 f 在 $u\in R^n$ 处的下降方向当且仅当 $\nabla f(u)^Td<$ __0__.

3、给定线性规划 $\min\{c^Tx: Ax=b, x\ge 0\}$，其中 $A\in R^{p\times q}$，$b\in R^p$ 且 $p\le q$，则该线性规划的基解的个数最多为 __~~[illegible]~~ C_q^p__ 个.

4、设 x^* 为线性规划(LP): $\min\{c^Tx: Ax\ge b\}$ 的最优解，则(LP)的对偶规划的最优值为 __~~[illegible]~~ $(b^T)^{-1}c^Tx^*$__.

5、令 $f(x)=2(x_1^2+x_2^2)-4x_1x_2+1, \forall x\in R^2$，则 $\min_{x\in R^2} f(x)$ 的最优值为 __1__.

6、令 $A\in R^{m\times n}$，$b\in R^m$，且 x^* 是 $Ax=b$ 的一个解，则 $Ax=b$ 的最小二乘问题的最优值为______.

7、对 (NLP): $\min_{x\in D} f(x)$ 其中 $D=\{x\in R^n: c_i(x)\ge 0, i\in I 且 c_i(x)=0, i\in E\}$，求解它的外罚函数法中，惩罚函数为 $P(x,\sigma)=$ ~~[illegible]~~ $f(x)+\sigma[\sum_{i\in E}|c_i(x)|^\beta+\sum_{i\in I}|\min\{0,c_i(x)\}|^\alpha]$

8、考虑单变量的多目标优化问题(MVP): $V-\min F(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$，其中，

①④

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & 若 |x|\le 1,\\ x^2 & 若 |x|>1,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}1 & 若 |x-1|\le 1,\\ |x-1| & 若 |x-1|>1,\end{cases}$$

则(VMP)的绝对最优解集为 __[0,1]__，有效解集为 __[0,1]__，弱有效解集为 __[-1,2]__.

三、（本题 18 分）用二阶段法求解下面的线性规划的问题

$$\begin{aligned}
\min\ & -3x_1+x_2+x_3\\
\text{s.t.}\ & x_1-2x_2+x_3\le 11,\\
& -4x_1+x_2+2x_3\ge 6,\\
& -2x_1+x_3=1,\\
& x_1, x_2, x_3\ge 0.
\end{aligned}$$

解：标准型：

$$\begin{aligned}
\min\ & -3x_1+x_2+x_3\\
\text{s.t.}\ & x_1-2x_2+x_3+x_4=11,\\
& -4x_1+x_2+2x_3-x_5=6,\\
& -2x_1+x_3=1,\\
& x_1, x_2, x_3\ge 0
\end{aligned}$$

为了得到单位基矩阵，引入 x_6、x_7 即可。

$$\begin{aligned}
\min\ & x_6+x_7\\
\text{s.t.}\ & x_1-2x_2+x_3+x_4=11\\
& -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6=6\\
& -2x_1+x_3+x_7=1\\
& x_1, x_2, x_3\ge 0.
\end{aligned}$$

x_4、x_6、x_7 为基变量，$C_B^T=(0,1,1)$，$C_N^T=(0,0,0)$.

$$N=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\-4&1&2&-1\\-2&0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I=B^{-1}.$$

初始判别数 $\sigma_B^T=C_B^T-C_B^TB^{-1}B=(0,0,0)$，$\sigma_N^T=C_N^T-C_B^TB^{-1}N$

列表，初等行变换

	c_j		0	0	0	0	0	1	1	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ_i
	σ_i									

列表，初等变换，至 $\sigma_j'\ge 0$

还原、

⇒计算原规划问题系数阵与右端向量.

四、(本题 12 分) 用精确一维线搜索的 FR 共轭梯度法求解无约束优化问题:

$$\min\ f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2+2x_1-4,$$

其中初始点取为 $x^0=(0,0)^T$.

解: $g(x)=(2x_1-x_2+2,\ -x_1+2x_2)^T$, $g_0=(2,0)^T\neq(0,0)^T$

$d_0=-g_0=(-2,0)^T$

$\min\limits_{\lambda\geq0} f(x^0+\lambda d_0)=f(x^0+\lambda_0 d_0)$

$\lambda_0=\frac{1}{2}$

$x^1=x^0+\lambda_0 d_0=(-1,0)^T$, $g_1=(0,1)^T\neq(0,0)^T$

$d_1=-g_1+\beta_0 d^0$. 其中, $\beta_0=\dfrac{g_1^Tg_1}{g_0^Tg_0}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow d_1=(-\frac{1}{2}\ -1)^T$

$\min\limits_{\lambda\geq0}(x^1+\lambda d_1)=f(x^1+\lambda_1 d_1)$

$\Rightarrow \lambda_1=\frac{2}{3}$

$x^2=x^1+\lambda_1 d_1=(-\frac{4}{3}\ -\frac{2}{3})^T$

$\Rightarrow g_2=(0,0)^T$

F为凸集, $G(x)=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ 对称正定. $\Rightarrow$ f凸函数

$\Rightarrow$ 凸规划

稳定点 $(-\frac{4}{3}\ -\frac{2}{3})^T$ 为极小值点.

五、(本题 15 分) 求约束优化问题

$$\begin{aligned}\min\quad & g(x)=2x_1+2x_2\\ \text{s.t.}\quad & h(x):=2-x_1^2-x_2^2\geq0\end{aligned}$$

的 K-T 点, 并证明它是该问题的一个严格全局最优解.

解. 其广义 Lagrange 函数为:

$L(x,\lambda)=g(x)-\lambda h(x)$

$=2x_1+2x_2-2\lambda+\lambda x_1^2+\lambda x_2^2$

由 K-T条件: $\begin{cases}2+2\lambda x_1=0\\2+2\lambda x_2=0\\2\lambda-\lambda x_1^2-\lambda x_2^2=0\\\lambda\geq0\end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1=0$(舍), $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$(舍) $\Rightarrow$ K-T点: $(-1,-1)$

显然, $g(x)$为凸函数. $h(x)$为凹函数

且 $g(x)$、$h(x)$在 $(-1,-1)$ 处可微.

$\Rightarrow$ 全局最优解.

六、(本题 15 分) 用乘子法求解下列约束优化问题:

$$\begin{aligned}\min\quad & f(x)=x_1^2-3x_2-x_2^2\\ \text{s.t,}\quad & c(x)=x_2=0.\end{aligned}$$

解: 构造 Lagrange 乘子为:

$L(x,\lambda)=f(x)-c(x)\cdot\lambda=x_1^2-3x_2-x_2^2-\lambda x_2=x_1^2-(3+\lambda)x_2-x_2^2$

~~$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1$; $\frac{\partial L}{\partial x_2}=-(3+\lambda)-2x_2$, $L(x,\lambda)$在 $\forall x\in F$ 可微.~~

~~由一阶必要条件. $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\\\frac{\partial L}{\partial x_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-\frac{3+\lambda}{2}\end{cases}$~~

构造增广 Lagrange 函数:

$M(x_1,x_2,\lambda,\sigma)=L(x,\lambda)+\frac{\sigma}{2}c(x)^Tc(x)=x_1^2-(3+\lambda)x_2-x_2^2+\frac{\sigma}{2}x_2^2$

$\frac{\partial M}{\partial x_1}=2x_1$, $\frac{\partial M}{\partial x_2}=-(3+\lambda)-2x_2+\sigma x_2$, $M(x_1,x_2,\lambda,\sigma)$在$\forall(x_1,x_2)\in F$可微.

由一阶必要条件. $\begin{cases}\frac{\partial M}{\partial x_1}=2x_1=0\\\frac{\partial M}{\partial x_2}=-(3+\lambda)+(\sigma-2)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=\frac{3+\lambda}{\sigma-2}\end{cases}$ --- (1)

令 $x_1^k=0$, $x_2^k=\frac{3+\lambda_k}{\sigma_k-2}$, 代入乘子迭代公式: $\lambda^{k+1}=\lambda^k-\sigma_k\cdot\frac{3+\lambda_k}{\sigma_k-2}$, 收敛.

令 σ_k 趋于一适当正数, 两边对 λ^k 取极限, 得, $\lambda_*=-3$, 代回(1),

得. $\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$ 故, $(0,0)$为原约束优化问题最优解.

七、(本题 10 分) 设 $f(x)=\frac{1}{2}x^TGx+p^Tx+q$, 其中G是对称正定矩阵. 证明: 从任意点 x^0 出发, 使用精确一维线搜索的牛顿法至多一步迭代可达到函数f的全局极小值点.

证明: $\min\limits_{x\in F} f(x)$

设全局极小值点为 x^*.

$g(x)=Gx+p^T$.

$G(x)=G$.

~~~~

~~$d^0=-g_0=-(Gx^0+p^T)$~~

对于迭代步长 λ_0,

$\min\limits_{\lambda\geq0} f(x^0+\lambda d^0)=f(x^0+\lambda_0 d^0)$.

$0=\nabla f(x^0+\lambda_0 d^0)^Td^0$

$=[G(x^0+\lambda_0 d^0)+p^T]^Td^0$

$=[G(x^0)^T+\lambda_0 G(d^0)^T+p]d^0$

$\Leftrightarrow 0=(d^0)^T[Gx^0+\lambda_0 Gd^0+p^T]$

$=(d^0)^TGx^0+\lambda_0(d^0)^TGd^0+(d^0)^Tp^T$

$\Rightarrow \lambda_0=-\dfrac{(d^0)^TGx^0+(d^0)^Tp^T}{(d^0)^TGd^0}=-\dfrac{(d^0)^T[Gx^0+p^T]}{(d^0)^TGd^0}$

$=-\dfrac{(d^0)^Tg_0}{(d^0)^TGd^0}=1$

d^0为牛顿方向,

s.t. $Gd^0=-g_0$

$\Rightarrow d^0=-G^{-1}\cdot g_0=-G^{-1}(Gx^0+p^T)$

$=-(x^0+G^{-1}p^T)$

由G对称正定,

$\Rightarrow$ f为严格凸函数. $\Rightarrow x^*=-G^{-1}p^T$.

若 $x^0\neq x^*$,

则, $x^1=x^0+\lambda_0 d^0$

~~$=x^0+\frac{(d^0)^Tg_0}{(d^0)^TGd^0}\cdot(x^0+G^{-1}p^T)$~~

$=x^0+d^0$

$=x^0-x^0-G^{-1}p^T$

$=-G^{-1}p^T=x^*$

#.
~~~~