2011～2012 学年工程硕士考试试卷

《应用数学基础》（共 4 页）

（考试时间：2012 年 12 月 23 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	成绩
得分										

一、判断题（每小题 1 分，共 10 分）

1、有限个或可数个可数集的并集是可数集. [ ]

2、设 $A,B\in C^{n\times n}$，则 $A\sim B$ 的充要条件是 A 和 B 具有相同的最小多项式. [ ]

3、设 X 是任一内积空间，$x,y\in X$，则 $x\perp y\Leftrightarrow \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$. [ ]

4、若 $A\in R^{n\times n}$ 正定，则求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛. [ ]

5、线性空间 $P_n[a,b]$ 是 n 维的. [ ]

6、求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 具有 $2n+1$ 次代数精度，当且仅当求积节点 $\{x_k\}_{k=0}^{n}$

是 Hauss 点. [ ]

7、设 $\{x_n\}\subset(X,\|\cdot\|)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\to x\|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$. [ ]

8、设 $T:(X,\|\cdot\|)\to(Y,\|\cdot\|)$ 是线性算子，则算子 T 是一个有界算子. [ ]

9、 若 A 是酉矩阵，则 $\rho(A)=1$. [ ]

10、半负定矩阵的所有特征值都是小于等于零，所有偶数阶的顺序主子式都是大于等于零. [ ]

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、设 $p_3(x)$ 是 3 次 Legendre 多项式，则 $\int_{-1}^{1}(x^2-1)p_3(x)dx=$_______ .

2、设 $f(x)=f(x_1,x_2,x_3)=\left[x_1e^{x_2}\quad,\quad x_1\sin x_3\right]^T$，则 $f'(x)=$_________________ .

3、设 $\{l_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 是 $[a,b]$ 上的以 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则

$\sum_{k=0}^{n}l_k(x_k)=$___________.

4、设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}$，则 $\det e^A=$_______________.

5、设 $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&4\end{bmatrix}$，则 $Cond_\infty(A)=$_________.

三、（12 分） 设 $A=\begin{bmatrix}-1&4&3\\0&2&0\\0&3&-1\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C .

四、(10 分) 写出求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Gauss—Seidel 迭代格式，并判断所写格式的收敛性，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}5\\ 6\\ 7\end{bmatrix}.$$

五、(10 分) 写出用标准 Runge – Kutta 法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=\dfrac{3y}{1+x}, & 0<x<1 \\ y(0)=1, & \end{cases}$$

的计算公式．

六、（12 分）根据下列插值条件

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255

用 3 次 Newton 插值多项式计算 $f(0.15)$ 的近似值（结果保留至小数点后第 4 位）.

七、（16 分）设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}$，求

（1） 矩阵 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$；

（2） 方阵函数 e^{At}.

八、**（10 分）**用 *Romberg* 算法求积分 $\int_0^1 \frac{3}{1+x^2}dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后第 5 位）.

k	T_{2^k}	S_{2^k}	C_{2^k}	R_{2^k}
0	2.25000			
1	2.32500			
2	2.34837			
3	2.35425			
4	2.35572			

九、计算题（10 分） 设 $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$，求 $\|A\|_1$, $\|A\|_F$, $\|A\|_\infty$.