

学院_____专业_____班 年级_____学号_____姓名_____ 共 3 页 第 1 页

2020~2021 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 2A》(A 卷, 共 3 页)

(考试时间: 2020 年 12 月 25 日, 14:00-16:00)

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
满分	15	15	6	35	24	5	100	
得分								

一、选择题 (共 15 分, 每小题 3 分)

1. 下列反常积分发散的是 ().
 (A) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$ (B) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ (C) $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ (D) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
2. 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = e^x \sin x$ 的特解 y^* 的形式是 ().
 (A) $e^x [A \sin x + B \cos x]$ (B) $(Ax + B)e^x \cos x$
 (C) $e^x [Ax \sin x + Bx \cos x]$ (D) $(Ax + B)e^x \sin x$
3. 曲线 $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$ 与 x 轴, $x = -1$ 所围图形的面积等于 ().
 (A) $\frac{\pi}{2} + 2$ (B) $\int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} + \arccos x) dx$ (C) π (D) $2 \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} + \arccos x) dx$
4. 下列命题正确的是 ().
 (A) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一定有极小值点
 (B) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一定有极大值点
 (C) 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上 $f''(x) > 0$, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上 $f''(x) < 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 一定是 $f(x)$ 的拐点
 (D) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定取得最大值和最小值

5. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有 ().

- (A) $\lim_{t \rightarrow x} f(t) < \lim_{t \rightarrow x} g(t)$ (B) $f'(x) < g'(x)$
 (C) $f(-x) > g(-x)$ (D) $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$

二、填空题 (共 15 分, 每小题 3 分)

1. 函数 $y = 4\sqrt{x} - \ln x$ 的凹区间是_____.
2. 曲线 $y = x + \arctan x$ 有_____条渐近线.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-x^2} dx =$ _____.
4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{3x^2 + 5x^3}, & x > 0, \\ \ln(a - x), & x \leq 0 \end{cases}$ ($a > 0$) 连续, 则常数 $a =$ _____.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) =$ _____ (用数值作答).

三、计算题 (共 6 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 满足 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = e^x(x^2 - 2x) + 2x$, 求 $f(x)$ 的表达式.

学院_____专业_____班 年级_____学号_____姓名_____ 共 3 页 第 2 页

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 设 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \int_0^{\sin t} (1 + e^{u^2}) du \end{cases} (t > 0)$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及曲线 $y = y(x)$ 在 $t = \pi$ 处的切线方程.

4. 计算定积分 $\int_0^{2\pi} x |\sin x| dx$.

2. 计算不定积分 $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right) dx$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上可导, 且满足 $f'(x) \int_0^2 f(x) dx = 8$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$,
求 $\int_0^2 f(x) dx$ 及 $f(x)$.

3. 计算定积分 $\int_{-1}^1 \left[\frac{x}{1+x^6} + \ln(2-x) \right] dx$.

五、解答题（共 24 分,每小题 8 分）

1. 设函数 $y(x)$ 是一阶微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 满足 $y(0) = 0$ 的特解.
(1) 求 $y(x)$; (2) 求 $y(x)$ 的极值.

2. 求二阶微分方程 $y'' - 4y' = x$ 的通解.

3. 设曲线 L 的方程为 $y = 2 + x^2$, 将曲线 L 与它在点 $(1,3)$ 处的法线、 x 轴和 y 轴所围成的图形记为 D . 求 D 绕 x 轴旋转一周而得的旋转体体积.

六、证明题（本题 5 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 证明: (1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $\int_0^\xi f(t) dt = (1-\xi)f(\xi)$;
(2) 若 $f(x) > 0$, 且单调减少, 则这种 ξ 是唯一的.