2020-2021-02 学期 期中试题参考答案

一、填空题与单项选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1、$\frac{1}{3}(A+E)$；　　2、$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$；　　3、A；　　4、D；　　5、B；　　6、B

二、解答题（共 16 分，每题 8 分）

1、（8 分）**解：**

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\1&x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\1&x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&1&1&\cdots&1\\0&x_1&x_2&\cdots&x_n\\0&x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=V(1,x_1,x_2,\cdots,x_n)+(a\prod_{i=1}^{n}x_i)V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)+a\prod_{i=1}^{n}x_i\right]\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

2、（8 分）**解：** $B=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix}1&a&bc\\1&b&ca\\1&c&ab\end{bmatrix}$，**记为** $B=AC$

则 $A^{-1}B=A^{-1}AC=C$，**则**

$$\left|A^{-1}B\right|=|C|=\begin{vmatrix}1&a&bc\\1&b&ca\\1&c&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&bc\\0&b-a&ca-bc\\0&c-a&ab-bc\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a&-c(b-a)\\c-a&-b(c-a)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

三、（14 分）

解： $\left|A^*\right|=|A|^3=-1$，则 $|A|=-1$，$AA^*=|A|E=-E$

方程两边左乘 A^*，得到 $A^*X(A^*+E)=-E-A^*=-(A^*+E)$

由于 $\left|A^*+E\right|=\begin{vmatrix}0&2&0&0\\3&-4&0&0\\0&0&6&2\\0&0&7&4\end{vmatrix}=(-6)(10)=-60\neq 0$，所以 A^*+E 可逆，且

$A^*X=-E \Rightarrow X=-(A^*)^{-1}$

$$X=-\begin{bmatrix}5&2&0&0\\3&1&0&0\\0&0&3&-2\\0&0&-7&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-2&0&0\\-3&-1&0&0\\0&0&-3&2\\0&0&7&-5\end{bmatrix}$$

四、（16 分）

解：令 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2]$，$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2]$，则

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow \boldsymbol{A}[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2]=[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2]\Leftrightarrow \boldsymbol{AX}_i=\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,2.$$

对分块矩阵 $[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}]$ 做初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行简化阶梯形矩阵，

$$[\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{cccc:cc}1&-2&2&3&-5&0\\2&-3&4&5&-8&1\\3&-8&7&11&-20&0\\1&-3&2&4&-7&a\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_3-r_1-r_2\\ r_2-2r_1}}\left[\begin{array}{cccc:cc}1&-2&2&3&-5&0\\0&1&0&-1&2&1\\0&-3&1&3&-7&-1\\0&-1&0&1&-2&a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+3r_2}\left[\begin{array}{cccc:cc}1&-2&2&3&-5&0\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&1&0&-1&2\\0&0&0&0&0&a+1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2-2r_3}\left[\begin{array}{cccc:cc}1&0&0&1&1&-2\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&1&0&-1&2\\0&0&0&0&0&a+1\end{array}\right]$$

当 $a=-1$ 时，$r(A)=r(A,B)$，方程有解，

两个方程组的同解方程组分别为

$$\text{(I)}\begin{cases}x_1=1-x_4\\x_2=2+x_4\\x_3=-1\end{cases}\qquad\qquad \text{(II)}\begin{cases}y_1=-2-y_4\\y_2=1+y_4\\y_3=2\end{cases}$$

得到方程的解为

$$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2]=\begin{bmatrix}1-k_1&-2-k_2\\2+k_1&1+k_2\\-1&2\\k_1&k_2\end{bmatrix},\text{ 其中，} k_1,k_2 \text{ 为任意常数.}$$

五、（16 分）

解：记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&O\\O&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^m=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^m&O\\O&\boldsymbol{A}_2^m\end{bmatrix}$

$$r(\boldsymbol{A}_1)=1,\ \boldsymbol{A}_1^m=(\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_1)^{m-1}\boldsymbol{A}_1=5^{m-1}\begin{bmatrix}1&-4\\-1&4\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{A}_2 = 5\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$, 其中$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$， $B^k = O(k \geq 3)$

由于 $5E_3$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，则由二项式定理有

$$\boldsymbol{A}_2^m = (5\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^m = (5\boldsymbol{E})^m + m(5\boldsymbol{E})^{m-1}\boldsymbol{B} + \frac{m(m-1)}{2}(5\boldsymbol{E})^{m-2}\boldsymbol{B}^2$$

$$= 5^m\boldsymbol{E} + m5^{m-1}\boldsymbol{B} + \frac{m(m-1)}{2}5^{m-2}\boldsymbol{B}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 5^m & 2m5^{m-1} & m(m-1)5^{m-2} \\ 0 & 5^m & m5^{m-1} \\ 0 & 0 & 5^m \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}^m = \begin{bmatrix} 5^{m-1} & -4 \cdot 5^{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ -5^{m-1} & 4 \cdot 5^{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^m & 2m5^{m-1} & m(m-1)5^{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & 5^m & m5^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5^m \end{bmatrix}$

六、证明题（8 分）

证明：(1) $\boldsymbol{A}^m = O \Rightarrow |\boldsymbol{A}^m| = 0 \Rightarrow |\boldsymbol{A}|^m = 0 \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = 0$，

则 $r(A) < 2$, 即 A 是降秩矩阵；

(2) 由于 A 是 2 阶降秩矩阵，所以 A 的秩为 0 或 1.

若 A 的秩为 0，则 A 为零矩阵，则 $A^2 = O$.

若 A 的秩为 1，则 $\boldsymbol{A}^m = (\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A} = O$，由于 A 的秩为 1，则 A 不是零矩阵，所以 $trA = 0$，

故 $\boldsymbol{A}^2 = (\mathrm{tr}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = O$.