天津大学《数值计算方法与 Matlab》
2011-2012 学年第二学期考试试卷及答案 A 卷

一、填空题：（共 42 分，每空 3 分）

1. 数值计算方法可以处理的误差是<u>舍入误差与截断误差</u>。若 6.32 与 6.32000 都是经四舍五入得到的近似值，则它们分别具有<u>3， 6</u>位有效数字。

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 l_k(x) =$ <u>x^2</u>，$\sum\limits_{j=0}^{n} j^2 l_k(j) =$ <u>k^2</u>。

3. $f'(1.0) =$ <u>3.52</u> 和 $f''(1.0) =$ <u>11.000</u>（保留 3 位小数）。

4. 差商 $p[2^0, 2^1, 2^2] =$ <u>49</u> 和 $p[2^0, 2^1, \ldots, 2^5] =$ <u>0</u>。

5.从几何角度上看，$S_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的<u>正交投影</u>。

6. <u>$g_0(x) = 1$</u> 和 $\int_0^1 x \cdot g_k(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & k = 0; \\ \int_0^1 x \cdot (x - \dfrac{1}{2})\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{12}, & k = 1; \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$。

7. SOR 法迭代格式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{3}[5 - 3x_1^{(k)} - x_2^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{2}[5 - x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k)}] \end{cases}$，$\omega$ 满足<u>$0 < \omega < 2$</u>。

8 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，则 A 的条件数 $\mathrm{Cond}_1(A) =$ <u>20</u>。

二、解下列各题：（共 36 分，每小题 9 分）

1. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指出所确定的求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x \approx A_1 f(-1) + A_2 f(0) + A_3 f(1)$$

解：首先令 $f(x) = 1, x, x^2$，分别代入求积公式中，使其精确地成立，得关于系数 A_1, A_2, A_3 的方程：

$$
\begin{aligned}
0 &= A_1 + A_2 + A_3 \\
\frac{2}{3} &= -A_1 + 0 + A_3 \\
0 &= A_1 + 0 + A_3
\end{aligned}
$$
（6 分）

解得 $A_1 = -\frac{1}{3}$，$A_2 = 0$，$A_3 = \frac{1}{3}$。将 A_1, A_2, A_3 的上述值代回积分公式，得

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x \approx -\frac{1}{3}f(-1) + \frac{1}{3}f(1)。$$
（8 分）

再令 $f(x) = x^3$，代入积分公式得：左边 = 2/5，右边 = $\frac{2}{3}$，左边不等于右边，所以求积公式的代数精度是 2。 （9 分）

2. 利用 Romberg 数值积分公式计算积分 $\int_0^1 (1+x)^{-1}\mathrm{d}x$，取初始步长为 1（保留 5 位小数）。

解：被积函数 $f(x) = (1+x)^{-1}$，首先在区间[0，1]上使用梯形公式计算，有

$$T_1 = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\right] = 0.75$$

将 $[0,1]$ 对分，它的中点函数值 $f(0.5) = \frac{2}{3}$，则由变步长的梯形公式，有

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}f(0.5) = \frac{0.75}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = 0.708333。$$

因为 $|T_2 - T_1| > 10^{-5}$，则利用外推公式，得 $S_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1$=0.694444。

因为 $|T_2 - S_1| > 10^{-5}$，则步长折半，取 h = 1/2 ，再利用变步长的梯形公式计算

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{h}{2}[f(0.25) + f(0.75)]=0.697024。$$

因为 $|T_2 - T_4| > 10^{-5}$，则由外推公式，得：$S_2 = \frac{4}{3}T_4 - \frac{1}{3}T_2$=0.693254。

因为 $|S_2 - T_4| > 10^{-5}$，再由外推公式，得 $C_1 = \frac{16}{15}S_2 - \frac{1}{15}S_1$=0.693175。

由于不满足终止条件，再将步长折半，取 h = 1/4，继续利用变步长的梯形公式计算

$$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{h}{2}\left[f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{7}{8})\right]=0.694122。$$
（6 分）

再由外推公式，得：$S_4 = \frac{4}{3}T_8 - \frac{1}{3}T_4$=0.693155，$C_2 = \frac{16}{15}S_4 - \frac{1}{15}S_2$=0.693148，

$R_1 = \frac{64}{63}C_2 - \frac{1}{63}C_1$=0.693148。

因为 $|R_1 - C_2| < 10^{-5}$，所以终止计算，取 0.69315 为积分的近似值。 （9 分）

另解：求出T_1, T_2, T_4, T_8,然后利用 Romberg 算法对其进行计算,计算结果列于下表：

k	$T_{2^k}(R_{(k,1)})$	$S_{2^{k-1}}(R_{(k,2)})$	$C_{2^{k-2}}(R_{(k,3)})$	$R_{2^{k-3}}(R_{(k,4)})$
0	0.75			
1	0.708333	0.694444		
2	0.697024	0.693254	0.693175	
3	0.694122	0.693155	0.693148	0.693148

（9 分）

3. 已知函数 $f(x)$ 的函数值表

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	0.564642	0.644218	0.717356	0.783327	0.841471

用适当的四阶 Newton 插值公式计算 $f(0.63)$ 的近似值（至少保留 6 位小数）。

解：因为数据点是等距的，所以使用等距节点的 Newton 插值公式。首先写出差分表

	x	f(x)	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0.6	0.564642	0.079576	-0.006438	-0.000729	0.000069
1	0.7	0.644218	0.073138	-0.007167	-0.000666	
2	0.8	0.717356	0.065971	-0.007827		
3	0.9	0.783327	0.058144			
4	1.0	0.841471				

因为插值点 $x = 0.63$ 在表前，故采用牛顿前插公式，$h = 0.1$，$x = 0.6 + th$，$t = 0.3$。利用四阶 Newton 前插公式得

$$N_4(1.0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 f_0$$

（6 分）

$$N_4(0.63) = 0.564642 + 0.3 \times 0.079576 - \frac{0.3 \div (0.3-1)}{2!} \times 0.006438 - \frac{0.3(0.3-1)(0.3-2)}{3!} 0.000729 + \frac{0.3(0.3-1)(0.3-2)(0.3-3)}{4!} 0.000069$$

（8 分）

$f(0.63) \approx N_4(0.63) = 0.589145$ 。 **（9 分）**

4.计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 11 & 20 \end{bmatrix}$ 的 LU 分解（要求写出详细分解过程）。

解：

$$A=\begin{bmatrix}4&2&1&5\\8&7&2&10\\4&8&3&6\\12&6&11&20\end{bmatrix}\xrightarrow{l_{21}=2,l_{31}=1,l_{41}=3}\begin{bmatrix}4&2&1&5\\0&3&0&0\\0&6&2&1\\0&0&8&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_{32}=2,l_{42}=0}\begin{bmatrix}4&2&1&5\\0&3&0&0\\0&0&2&1\\0&0&8&5\end{bmatrix}\xrightarrow{l_{43}=4}\begin{bmatrix}4&2&1&5\\0&3&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$ （7分）

得到 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&2&1&0\\3&0&4&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&2&1&5\\0&3&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ （9分）

三、 应用题：（共22分，每小题11分）

1. 已知一组实验数据

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4.00	6.40	8.00	8.80	9.22	9.50	9.70	9.86

试用最小二乘法求出经验公式 $y=\dfrac{t}{at+b}$ 中的 a,b。（结果保留3位小数）

解：先将其线性化得 $y^{-1}=a+bt^{-1}$，令 $u=y^{-1},x=t^{-1}$，则用 $u=a+bx$ 来拟合原始数据。

由 $u_k=1/y_k$， $x_k=1/t_k$ 得到新的数据关系表如下：

x_k	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
u_k	0.2500	0.15625	0.1250	0.1136	0.1085	0.1053	0.1031	0.1014

（3分）

即在 $\Phi=span\ \{1,x\}$ 中求函数u。权函数 $\omega(x)\equiv1,\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x$。法方程形如：

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&(\varphi_1,\varphi_0)\\(\varphi_0,\varphi_1)&(\varphi_1,\varphi_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(u,\varphi_0)\\(u,\varphi_1)\end{pmatrix}$$

这里 $(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{7}1=8$，$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{7}x_i=2.717857$ ，

$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{7}x_i^2=1.527422$ ，$(u,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{7}u_i=1.0631$ 和 $(u,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{7}u_ix_i=0.4648$ 。

故有 $\begin{cases}8a+2.717857\quad b=1.0631\\2.717857\quad a+1.527422\quad b=0.4648\end{cases}$， （9分）

解得 $a=0.0746$，$b=0.172$，所以最小二乘解为 $y=\dfrac{t}{0.0746\ t+0.172}$。　　　　　　**（11 分）**

2.一个捕食系统的模型为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1(1-x_1-ax_2),\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=bx_2(x_1-x_2),$$

其中 x_1 和 x_2 是个无量纲的量，是时间 t 的函数，分别与猎物和捕食者的数量成正比，a 和 b 是正常数。利用标准四阶 Runge-Kutta 法，写出求解函数 x_1 和 x_2 数值解的计算公式。设初始值为 $x_1(0)=x_{1,0}$ 和 $x_2(0)=x_{2,0}$，步长为 h。

解： 记 $y_n=\begin{pmatrix}x_{1,n}\\x_{2,n}\end{pmatrix}$ 为精确解 $y(t_n)=\begin{pmatrix}x_1(t_n)\\x_2(t_n)\end{pmatrix}$ 的数值近似，t_n 为节点 。设

$K_j=\begin{pmatrix}k_{1,j}\\k_{2,j}\end{pmatrix},\ j=1,2,3,4$，初值 $y_0=y(0)=\begin{pmatrix}x_{1,0}\\x_{2,0}\end{pmatrix}$。　　　　**（3 分）**

由标准四阶 Runge-Kutta 公式，得

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4),$$

$$\begin{pmatrix}x_{1,n+1}\\x_{2,n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{1,n}\\x_{2,n}\end{pmatrix}+\frac{h}{6}\left(\begin{pmatrix}k_{1,1}\\k_{2,1}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}k_{1,2}\\k_{2,2}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}k_{1,3}\\k_{2,3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_{1,4}\\k_{2,4}\end{pmatrix}\right)$$

$$K_1=\begin{pmatrix}k_{1,1}\\k_{2,1}\end{pmatrix}=f(t_n,y_n)=\begin{pmatrix}x_{1,n}(1-x_{1,n}-ax_{2,n})\\bx_{2,n}(x_{1,n}-x_{2,n})\end{pmatrix},$$

$$K_2=\begin{pmatrix}k_{1,2}\\k_{2,2}\end{pmatrix}=f(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1)=\begin{pmatrix}(x_{1,n}+\frac{h}{2}k_{1,1})\left(1-(x_{1,n}+\frac{h}{2}k_{1,1})-a(x_{2,n}+\frac{h}{2}k_{2,1})\right)\\b(x_{2,n}+\frac{h}{2}k_{2,1})\left((x_{1,n}+\frac{h}{2}k_{1,1})-(x_{2,n}+\frac{h}{2}k_{2,1})\right)\end{pmatrix},$$

$$K_3=\begin{pmatrix}k_{1,3}\\k_{2,3}\end{pmatrix}=f(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2)=\begin{pmatrix}(x_{1,n}+\frac{h}{2}k_{1,2})\left(1-(x_{1,n}+\frac{h}{2}k_{1,2})-a(x_{2,n}+\frac{h}{2}k_{2,2})\right)\\b(x_{2,n}+\frac{h}{2}k_{2,2})\left((x_{1,n}+\frac{h}{2}k_{1,2})-(x_{2,n}+\frac{h}{2}k_{2,2})\right)\end{pmatrix},$$

$$K_4=\begin{pmatrix}k_{1,4}\\k_{2,4}\end{pmatrix}=f(t_n+h,y_n+hK_3)=\begin{pmatrix}(x_{1,n}+hk_{1,3})\left(1-(x_{1,n}+hk_{1,3})-a(x_{2,n}+hk_{2,3})\right)\\b(x_{2,n}+hk_{2,3})\left((x_{1,n}+hk_{1,3})-(x_{2,n}+hk_{2,3})\right)\end{pmatrix}.$$

由此得到分量计算格式为

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + \frac{h}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}),$$

$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + \frac{h}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}),$$

$$k_{1,1} = x_{1,n}(1 - x_{1,n} - ax_{2,n}), k_{2,1} = bx_{2,n}(x_{1,n} - x_{2,n}),$$

$$k_{1,2} = (x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,1})\left(1 - x_{1,n} - ax_{2,n} - \frac{h}{2}(k_{1,1} + ak_{2,1})\right),$$

$$k_{2,2} = b(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,1})\left(x_{1,n} - x_{2,n} + \frac{h}{2}(k_{1,1} - k_{2,1})\right),$$

$$k_{1,3} = (x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,2})\left(1 - x_{1,n} - ax_{2,n} - \frac{h}{2}(k_{1,2} + ak_{2,2})\right),$$

$$k_{2,3} = b(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,2})\left(x_{1,n} - x_{2,n} + \frac{h}{2}(k_{1,2} - k_{2,2})\right),$$

$$k_{1,4} = (x_{1,n} + hk_{1,3})\left(1 - x_{1,n} - ax_{2,n} - h(k_{1,3} + ak_{2,3})\right),$$

$$k_{2,4} = b(x_{2,n} + hk_{2,3})\left(x_{1,n} - x_{2,n} + h(k_{1,3} - k_{2,3})\right).$$

（11 分）

将初值 y_0， $n = 0$ 代入上面各式，可依次计算出函数 x_1 和 x_2 的数值解 $x_{1,n}, x_{2,n}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$ 。