2020～2021 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 2A》(A 卷，共 3 页) 参考答案

（考试时间：2020 年 12 月 25 日, 14:00-16:00）

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
满分	15	15	6	35	24	5	100	
得分								

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 下列反常积分发散的是 (　　C　　).

(A) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$　(B) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$　(C) $\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$　(D) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2. 微分方程 $y''+2y'+5y=e^x\sin x$ 的特解 y^* 的形式是 (　　A　　).

(A) $e^x[A\sin x+B\cos x]$　　(B) $(Ax+B)e^x\cos x$

(C) $e^x[Ax\sin x+Bx\cos x]$　　(D) $(Ax+B)e^x\sin x$

3. 曲线 $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$ 与 x 轴, $x=-1$ 所围图形的面积等于 (　　B　　).

(A) $\frac{\pi}{2}+2$　(B) $\int_{-1}^1\left(\sqrt{1-x^2}+\arccos x\right)dx$　(C) π　(D) $2\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}+\arccos x\right)dx$

4. 下列命题正确的是 (　　D　　).

(A) 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一定有极小值点

(B) 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一定有极大值点

(C) 若在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上 $f''(x)>0$, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上 $f''(x)<0$, 则 $(x_0,f(x_0))$ 一定是 $f(x)$ 的拐点

(D) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定取得最大值和最小值

5. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且 $f(x)<g(x)$, 则必有 (　　A　　).

(A) $\lim\limits_{t\to x}f(t)<\lim\limits_{t\to x}g(t)$　　(B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $f(-x)>g(-x)$　　(D) $\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 函数 $y=4\sqrt{x}-\ln x$ 的凹区间是_____$(0,1)$ 或 $(0,1]$_______.

2. 曲线 $y=x+\arctan x$ 有____2_____条渐近线.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^{\frac{1}{n}}e^{-x^2}dx=$_____1_____.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{3x^2+5x^3}, & x>0,\\ \ln(a-x), & x\le 0\end{cases}$ $(a>0)$ 连续, 则常数 $a=$ _____$e^{\frac{1}{6}}$_______.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=$_______2_________ (用数值作答).

三、计算题（共 6 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 满足 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=e^x\left(x^2-2x\right)+2x$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解：原方程等价于 $x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^x\left(x^2-2x\right)+2x$,

两边对 x 求导，得：$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=e^x\left(x^2-2\right)+2$,

整理得：$\int_0^x f(t)dt=e^x\left(x^2-2\right)+2$,

两边再对 x 求导，得：$f(x)=e^x\left(x^2+2x-2\right)$.

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 设 $\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=\int_0^{\sin t}\left(1+e^{u^2}\right)du \end{cases}$ $(t>0)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及曲线 $y=y(x)$ 在 $t=\pi$ 处的切线方程.

解：$\dfrac{dx}{dt}=2t$，$\dfrac{dy}{dt}=\left(1+e^{\sin^2 t}\right)\cos t$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left(1+e^{\sin^2 t}\right)\cos t}{2t}$.

当 $t=\pi$ 时，$x(\pi)=\pi^2+1$，$y(\pi)=\int_0^{\sin\pi}\left(1+e^{u^2}\right)du=0$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\pi}=-\dfrac{1}{\pi}$，

则曲线 $y=y(x)$ 在 $t=\pi$ 处的切线方程为 $y=-\dfrac{1}{\pi}\left(x-\pi^2-1\right)$.

2. 计算不定积分 $\int\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$.

解：方法一 $\int\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx=\arcsin(2x-1)+C.$$

$\left(\text{或}\quad =2\int\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}d\sqrt{x}=2\arcsin\sqrt{x}+C.\right)$

方法二 令 $t=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$，$x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$，则

$$\int\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=2\int\frac{1}{1+t^2}dx$$

$$=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$$

3. 计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left[\dfrac{x}{1+x^6}+\ln(2-x)\right]dx$.

解：因为 $\dfrac{x}{1+x^6}$ 是奇函数，所以 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{1+x^6}dx=0$.

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{x}{1+x^6}+\ln(2-x)\right]dx=\int_{-1}^{1}\ln(2-x)dx=x\ln(2-x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x}{x-2}dx$$

$$=\ln 3-\int_{-1}^{1}\frac{x-2+2}{x-2}dx=\ln 3-\left(x+2\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^{1}=3\ln 3-2.$$

4. 计算定积分 $\int_0^{2\pi}x|\sin x|dx$.

解：$\int_0^{2\pi}x|\sin x|dx=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin x\,dx$

$$=\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx\right)-\left(-x\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}\cos x\,dx\right)$$

$$=4\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}-\sin x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4\pi.$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导，且满足 $f'(x)\int_0^2 f(x)dx=8$，$f(0)=0$，$f(2)=4$，

求 $\int_0^2 f(x)dx$ 及 $f(x)$.

解：令 $A=\int_0^2 f(x)dx$，则有 $Af'(x)=8$，即 $f'(x)=\dfrac{8}{A}$，则

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{8}{A}dt=\frac{8}{A}x,$$

由 $f(2)=4$，得 $4=\dfrac{16}{A}$，$A=4$. 所以 $\int_0^2 f(x)dx=4$，$f(x)=2x$.

五、解答题（共 24 分,每小题 8 分）

1. 设函数 $y(x)$ 是一阶微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ 满足 $y(0)=0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$; (2) 求 $y(x)$ 的极值.

解：(1) 由微分方程得 $y(x)=\mathrm{e}^{\int -x\,\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{\int x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$,

于是 $y(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int \mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x+C)$.

由 $y(0)=0$，得 $C=0$，故 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

(2) $y'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$,

令 $y'=0$，得驻点 $x=-1$ 和 $x=1$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 及 $x\in(1,+\infty)$ 时 $y'(x)<0$，当 $x\in(-1,1)$ 时 $y'(x)>0$，

故 $y(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 $-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，在 $x=1$ 处取得极大值 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2. 求二阶微分方程 $y''-4y'=x$ 的通解.

解：特征方程为 $r^2-4r=0$，解得特征根为 $r_1=0,\ r_2=4$,

则该方程对应齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1+C_2\mathrm{e}^{4x}$.

设该方程的特解为 $y^*=x(ax+b)$,

将 $y^*=x(ax+b)$ 代入微分方程得

$2a-4(2ax+b)=x$，求得 $a=-\frac{1}{8},b=-\frac{1}{16}$,

故特解 $y^*=-\frac{1}{16}(2x^2+x)$.

于是微分方程的通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{16}(2x^2+x)$.

3. 设曲线 L 的方程为 $y=2+x^2$,将曲线 L 与它在点 $(1,3)$ 处的法线、x 轴和 y 轴所围成的图形记为 D. 求 D 绕 x 轴旋转一周而得的旋转体体积.

解： 曲线 L 在点 $(1,3)$ 处切线的斜率为 $y'\big|_{x=1}=2x\big|_{x=1}=2$, 所以曲线 L 在点 $(1,3)$ 处的法线方程为 $y-3=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

则所求旋转体体积

$$V=\pi\int_0^1\left(2+x^2\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_1^7\left(\frac{7-x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(4x+\frac{4}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1+\frac{\pi}{12}(7-x)^3\Big|_1^7=4\frac{23}{15}\pi+18\pi=23\frac{8}{15}\pi.$$

六、证明题（本题 5 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 证明: (1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $\int_0^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t=(1-\xi)f(\xi)$; (2) 若 $f(x)>0$,且单调减少, 则这种 ξ 是唯一的.

证明: (1) 设 $F(x)=(x-1)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$F'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+(x-1)f(x)$.

已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导. 又因为 $F(0)=F(1)=0$.

由罗尔定理知, 存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$, 即 $\int_0^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t=(1-\xi)f(\xi)$.

(2) 方法一 令 $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+(x-1)f(x)$, 任取 $0<x_1<x_2<1$, 则由 $f(x)>0$, 且单调减少，得 $g(x_2)-g(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t+\left[(1-x_1)f(x_1)-(1-x_2)f(x_2)\right]>0$,

即 $g(x)=F'(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调增加, 故 (1)中的 ξ 是唯一的.

方法二(反证法) 假设 (1)中的 ξ 不唯一. 不妨设存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,1),\xi_1<\xi_2$，使得 $\int_0^{\xi_1} f(t)\,\mathrm{d}t=(1-\xi_1)f(\xi_1)$，$\int_0^{\xi_2} f(t)\,\mathrm{d}t=(1-\xi_2)f(\xi_2)$.

则有 $\int_0^{\xi_2} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\xi_1} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t)\,\mathrm{d}t=(1-\xi_2)f(\xi_2)-(1-\xi_1)f(\xi_1)$.

因为 $f(x)>0$, $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t)\,\mathrm{d}t>0$, 而 $f(x)$ 单调减少, 则 $f(\xi_1)\ge f(\xi_2)$，于是 $(1-\xi_2)f(\xi_2)-(1-\xi_1)f(\xi_1)\le 0$. 二者矛盾, 所以假设错误, 故 (1)中的 ξ 是唯一的.