2022～2023 学年《高等数学 2A》第一次月考参考答案 （2022 年 9 月 30 日）

一、求下列极限（每小题 10 分，共 50 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解法一：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

解法二：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-\sin x}{2x^2+\sin^2 x}$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin^2 x=0$，原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\sin x}{2+\frac{1}{x^2}\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{(1+\cos x)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}$.

解法一：应用等价无穷小代换，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+\cos x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2=1$.

解法二：原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2=1$.

解法三：应用洛必达法则，

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}2\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{e}^{x^2}=1.$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解： 令 $u_n=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$，则

$$\frac{n(1+n)}{2(n^2+2n)}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}\le u_n\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{n(1+n)}{2(n^2+n+1)},$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+n)}{2(n^2+n+n)}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+n)}{2(n^2+n+1)}=\dfrac{1}{2}$，由迫敛准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$.

注：本题 $v_n\le u_n\le w_n$ 的缩放形式不唯一， 只需 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\dfrac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\arctan\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{\pi}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}+1}\right)$.

解： 令 $f(x)=\arctan\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{\pi}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}+1}$，

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{u\to-\infty}\left(\arctan 2u+\frac{\pi}{\mathrm{e}^u+1}\right)=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2},$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{u\to+\infty}\left(\arctan 2u+\frac{\pi}{\mathrm{e}^u+1}\right)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}.$$

$$\because f(1-0)=f(1+0)=\frac{\pi}{2},\quad\therefore\lim_{x\to 1}\left(\arctan\frac{2}{x-1}+\frac{\pi}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}+1}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

二、计算和解答题（共 10 分，每小题 30 分）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\ln(1+bx), & x<0.\end{cases}$ 确定常数a,b，使 $f(x)$在点$x=0$处连续.

解：$f(x)$在$x=0$处连续，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{ax}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\sqrt{2}a,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\ln(1+bx)=\lim_{x\to0^-}\frac{bx}{x}=b,$$

于是，有 $\sqrt{2}a=b=1$， $\therefore\ a=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ b=1.$

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并判断每个间断点的类型.

解： $f(x)$仅在$x=0$，$x=1$和$x=-1$处无定义，故间断点为 $x=0$，$x=1$和$x=-1$.

(1) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(1+x)\sin x}{-x(x^2-1)}=1$， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1+x)\sin x}{x(x^2-1)}=-1$，

所以$x=0$是 $f(x)$的第一类间断点，且为跳跃间断点；

(2) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x^2-1)}=\infty$， 所以$x=1$是 $f(x)$的第二类间断点，且为无穷间断点；

(3) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin x}{|x|(x-1)}=\dfrac{\sin1}{2}$，

所以$x=-1$是 $f(x)$的第一类间断点，且为可去间断点.

3. 当$x\to0$时，$\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}$与$x^\alpha$是同阶无穷小量，求常数$\alpha$的值.

解： 当$x\to0$时，$\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}$与$x^\alpha$是同阶无穷小量，

故有 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^\alpha}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^\alpha\left(\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2+\sin x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{8}\lim_{x\to0}x^{3-\alpha}=C\neq0,$$

所以 $3-\alpha=0$， 即 $\alpha=3$.

解法二：

当$x\to0$时， $$\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}=\frac{\tan x-\sin x}{\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2+\sin x}}$$

$$\sim\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan x(1-\cos x)\ \sim\ \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot x\cdot\frac{x^2}{2}\ \sim\frac{\sqrt{2}}{8}x^3,$$

因为$\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}$与$x^\alpha$是同阶无穷小量，所以 $\alpha=3$.

三、证明题（共 20 分，每小题 10 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，$a<c<d<b$, 且常数 $k_1,k_2>0$.

证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $k_1 f(c)+k_2 f(d)=(k_1+k_2)f(\xi)$.

证明： 因为函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[c,d]\subseteq(a,b)$ 上连续，

由闭区间上连续函数的最值定理，$f(x)$ 在 $[c,d]$ 上存在最大值 M 和最小值 m.

于是，有 $m\le f(c)\le M$，$m\le f(d)\le M$， 故 $m\le \mu=\dfrac{k_1 f(c)+k_2 f(d)}{k_1+k_2}\le M$.

根据介值定理，至少存在一点 $\xi\in[c,d]\subseteq(a,b)$，使得

$$f(\xi)=\frac{k_1 f(c)+k_2 f(d)}{k_1+k_2},$$

即 $k_1 f(c)+k_2 f(d)=(k_1+k_2)f(\xi)$.

解法二： 设 $F(x)=k_1 f(c)+k_2 f(d)-(k_1+k_2)f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[c,d]\subseteq(a,b)$ 上连续，$F(c)=k_2[f(d)-f(c)]$, $F(d)=k_1[f(c)-f(d)]$, $F(c)\cdot F(d)\le 0$.

(i) 若 $f(c)=f(d)$，则 $F(c)=F(d)=0$，可取 $\xi=c$ 或 $\xi=d$;

(ii) 若 $f(c)\ne f(d)$，则 $F(c)\cdot F(d)<0$，由闭区间上连续函数的零值定理，至少存在一点 $\xi\in(c,d)$，使得 $F(\xi)=0$.

综上，至少存在一点 $\xi\in[c,d]\subseteq(a,b)$，使得 $k_1 f(c)+k_2 f(d)=(k_1+k_2)f(\xi)$.

2. 设常数 $a>b>0$，$a_1=\dfrac{a+b}{2}$，$b_1=\sqrt{ab}$，且 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$ ($n\in\mathrm{N}_+$).

证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛，并且它们的极限相等.

证明： (1) 由于 $0<b<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<a$，即 $0<b<b_1<a_1<a$，现假设

$0<b_{k-1}<b_k<a_k<a_{k-1}$，则有 $0<b_k<\sqrt{a_k b_k}<\dfrac{a_k+b_k}{2}<a_k$，即

$$0<b_k<b_{k+1}<a_{k+1}<a_k,$$

所以 $\{b_n\}$ 是单调递增数列，$\{a_n\}$ 是单调递减数列，且 $b<b_1<b_n<a_n<a_1<a$，

于是 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为有界数列，根据单调有界准则，数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, 对 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 两边取极限，得 $A=\dfrac{A+B}{2}$，

于是 $A=B$, 即数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 极限相等.