«Разделяй и властвуй»: рекуррентные соотношения

Александр Куликов

Онлайн-курс «Алгоритмы: теория и практика. Методы»
http://stepic.org/217

Теорема

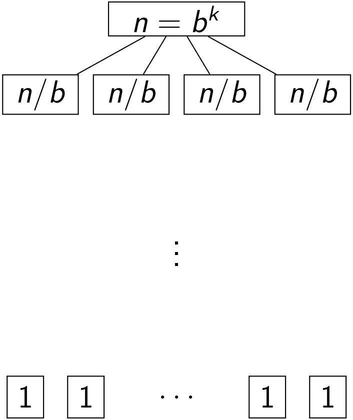
Рассмотрим алгоритм, основанный на методе «разделяй и властвуй», который для решения задачи размера n делает a рекурсивных вызовов для задач размера n/b и тратит время $O(n^d)$ на то, чтобы подготовить рекурсивные вызовы и чтобы собрать из их ответов ответ для исходной задачи:

$$T(n) = aT\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + O(n^d)$$

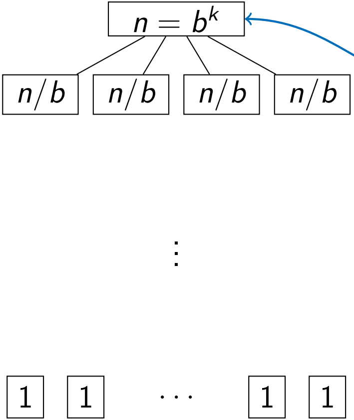
где $a > 0$, $b > 1$, $d \geq 0$. Тогда

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d), & \text{если } d > \log_b a \\ O(n^d \log n), & \text{если } d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}), & \text{если } d < \log_b a \end{cases}$$

Доказательство

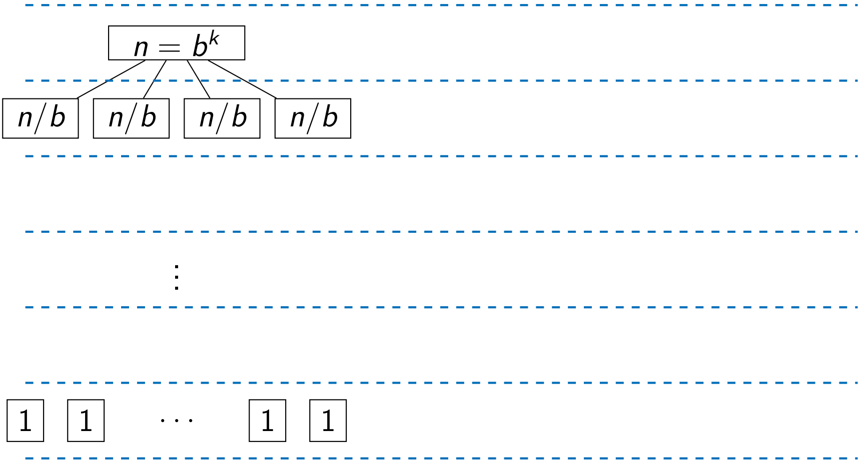


Доказательство

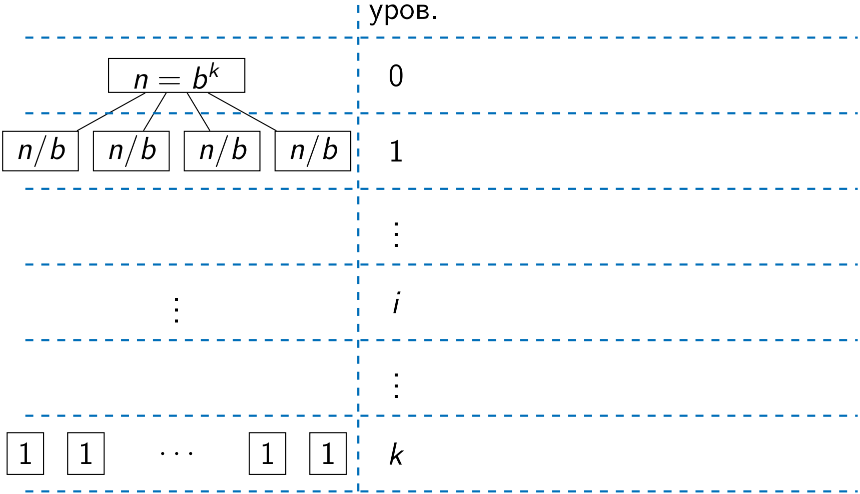


опять же, считаем, что $n = b^k$

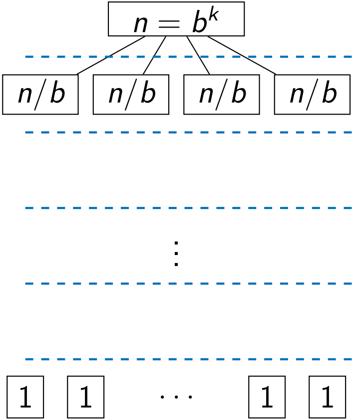
Доказательство



Доказательство

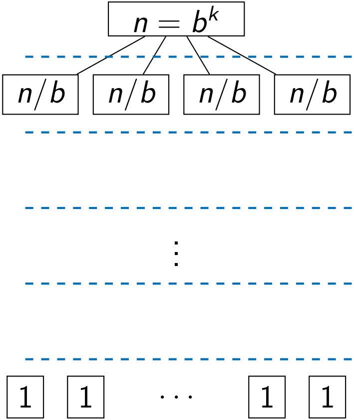


Доказательство



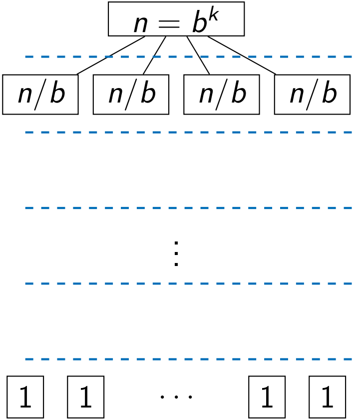
уров.	разм.
0	n
1	n/b
$\vdots$	$\vdots$
i	n/b^i
$\vdots$	$\vdots$
k	1

Доказательство



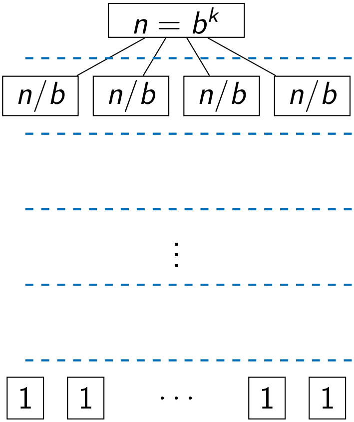
уров.	разм.	$\#$
0	n	1
1	n/b	a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	n/b^i	a^i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1	a^k

Доказательство



уров.	разм.	$\#$	работа
0	n	1	cn^d
1	n/b	a	$a \cdot c \cdot (n/b)^d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	n/b^i	a^i	$a^i \cdot c \cdot (n/b^i)^d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1	a^k	$a^k \cdot c \cdot n/b^k$

Доказательство



уров.	разм.	#	работа
0	n	1	cn^d
1	n/b	a	$a \cdot c \cdot (n/b)^d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	n/b^i	a^i	$a^i \cdot c \cdot (n/b^i)^d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1	a^k	$a^k \cdot c \cdot n/b^k$

$$\sum_{i=0}^{k} a^i \cdot c \cdot (n/b^i)^d$$

Оценка суммы

$$\sum_{i=0}^{k} a^i \cdot c \cdot (n/b^i)^d = cn^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i$$

- если $b^d = a$ (то есть $d = \log_b a$):

$$cn^d \cdot \log_b n = \Theta(n^d \log n)$$

Оценка суммы

$$\sum_{i=0}^{k} a^i \cdot c \cdot (n/b^i)^d = cn^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i$$

- если $b^d = a$ (то есть $d = \log_b a$):

$$cn^d \cdot \log_b n = \Theta(n^d \log n)$$

- если $b^d > a$ (то есть $d > \log_b a$):

$$cn^d \cdot \Theta(1) = \Theta(n^d)$$

Оценка суммы

$$\sum_{i=0}^{k} a^i \cdot c \cdot (n/b^i)^d = cn^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i$$

- если $b^d = a$ (то есть $d = \log_b a$):

$$cn^d \cdot \log_b n = \Theta(n^d \log n)$$

- если $b^d > a$ (то есть $d > \log_b a$):

$$cn^d \cdot \Theta(1) = \Theta(n^d)$$

- если $b^d < a$ (то есть $d < \log_b a$):

$$cn^d \cdot \Theta\left(\frac{a^{\log_b n}}{b^{d \log_b n}}\right) = cn^d \cdot \Theta\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^d}\right) = \Theta(n^{\log_b a})$$

Пример

- $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$: $T(n) = O(n \log n)$ ($a = 2$, $b = 2$, $d = 1$)

Пример

- $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$: $T(n) = O(n \log n)$ ($a = 2$, $b = 2$, $d = 1$)
- $T(n) = T(n/2) + O(1)$: $T(n) = O(\log n)$ ($a = 1$, $b = 2$, $d = 0$)

Пример

- $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$: $T(n) = O(n \log n)$ ($a = 2$, $b = 2$, $d = 1$)
- $T(n) = T(n/2) + O(1)$: $T(n) = O(\log n)$ ($a = 1$, $b = 2$, $d = 0$)
- $T(n) = 5T(n/4) + O(n)$: $T(n) = O(n^{\log_4 5})$

Пример

- $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$: $T(n) = O(n \log n)$ ($a = 2$, $b = 2$, $d = 1$)
- $T(n) = T(n/2) + O(1)$: $T(n) = O(\log n)$ ($a = 1$, $b = 2$, $d = 0$)
- $T(n) = 5T(n/4) + O(n)$: $T(n) = O(n^{\log_4 5})$
- $T(n) = 5T(n/4) + O(n^2)$: $T(n) = O(n^2)$

Примеры рекуррентных соотношений, не покрываемых теоремой

- $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n)$

  $T(n) = O(n \log n)$

Примеры рекуррентных соотношений, не покрываемых теоремой

- $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n)$

  $T(n) = O(n \log n)$
- $T(n) = 2T(n-1) + O(1)$

  $T(n) = O(2^n)$

Примеры рекуррентных соотношений, не покрываемых теоремой

- $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n)$

  $T(n) = O(n \log n)$
- $T(n) = 2T(n-1) + O(1)$

  $T(n) = O(2^n)$
- $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1)$

  $T(n) = O(\log \log n)$