入試正解デジタル

数学Ⅲ 演習プリント

旺文社
Obunsha

240930020108

10 Ⅲ （複素数の極形式）

解答 (1)　方程式 $g(x)=0$ の解を α とおくと
$\alpha^2+\alpha+1=0$ が成り立つ.

$$\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$$

（$\alpha^2+\alpha+1=0$ より）

よって $\alpha^3-1=0$ が成り立つので，方程式 $g(x)=0$ の解は $x^3-1=0$ を満たしている.
次に方程式 $h(x)=0$ の解を β とおくと
$\beta^2-\beta+1=0$ が成り立つ.

$$\beta^3+1=(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$$

（$\beta^2-\beta+1=0$ より）

よって $\beta^3+1=0$ が成り立つので，方程式 $h(x)=0$ の解は $x^3+1=0$ を満たしている.

(2)　$r(x)=ax+b$ とおくと

$$x^{6n}+x^{3n}-2=(x^2+x+1)q(x)+ax+b$$

この式に $g(x)=0$ の解，すなわち (1) での $x=\alpha$ を代入すると

$$\alpha^{6n}+\alpha^{3n}-2=(\alpha^2+\alpha+1)g(\alpha)+a\alpha+b$$

$$(\text{左辺})=(\alpha^3)^{2n}+(\alpha^3)^n-2=1+1-2=0$$

（$\alpha^3=1$ より）

$$(\text{右辺})=0\cdot g(\alpha)+a\alpha+b=a\alpha+b$$

よって $a\alpha+b=0$
ここで $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$，すなわち α は虚数で，a，b は実数なので $a\alpha+b=0$ となるのは $a=0$ かつ $b=0$ のとき.
よって $r(x)=0$，つまり $f(x)$ は $g(x)$ で割り切[illegible]

(3)　$f(x)$ を $h(x)$ で割ったときの商を $s(x)$，余りを $t(x)=cx+d$ とおくと

$$x^{6n}+x^{3n}-2=(x^2-x+1)s(x)+cx+d$$

この式に $h(x)=0$ の解，すなわち (1) での $x=\beta$ を代入すると

$$\beta^{6n}+\beta^{3n}-2=(\beta^2-\beta+1)s(\beta)+c\beta+d$$

$$(\text{左辺})=(\beta^3)^{2n}+(\beta^3)^n-2=(-1)^{2n}+(-1)^n-2$$

（$\beta^3=-1$ より）

$$(\text{右辺})=0\cdot s(\beta)+c\beta+d=c\beta+d$$

よって $(-1)^{2n}+(-1)^n-2=c\beta+d$
割り切れるのは $c\beta+d=0$ のときなので

$$(-1)^{2n}+(-1)^n-2=0$$

$$1+(-1)^n-2=0$$

$(-1)^n=1$ となるのは n が偶数のとき.
したがって，$f(x)$ が $h(x)$ で割り切れるならば，n は偶数である.

(4)　$f(x)=x^6+x^3-2=(x^3+2)(x^3-1)=0$ より

$$x^3=-2,\ 1$$

まず $x^3=-2$ を解く．$x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=2(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$r^3=2,\ 3\theta=\pi+2k\pi\quad(k=0,\ 1,\ 2)$$

よって $r=\sqrt[3]{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k}{3}\pi$
$0\leqq x<2\pi$ の範囲で，x が虚数となるのは $k=0$，2 のときである.
次に $x^3=1$ のときも同様にして

$$r=1,\ \theta=\frac{2l}{3}\pi$$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，x が虚数となるのは $l=1$，2 のときである.
以上により

$$x=\sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k}{3}\pi\right)\right\}$$

（$k=0$，2）

$$x=\cos\frac{2l}{3}\pi+i\sin\frac{2l}{3}\pi\quad(l=1,\ 2)$$

11 B III (確率と漸化式，ド・モアブルの定理)

解答 (1) 2回の試行で作られる文字列は

AA，AB，BA，BB

であり，AAとなる確率が p_2，BAとなる確率が q_2，ABとなる確率が r_2 だから

$$p_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{4}{9}}$$
$$q_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{2}{9}}$$
$$r_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

$n+1$ 文字の文字列が可でかつ右端の2文字がAAとなるのは，n 文字の文字列が可でかつ右端の2文字がBAとなっているところに文字Aを付け加える場合だから

$$\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n} \qquad \cdots\cdots①$$

$n+1$ 文字の文字列が可でかつ右端の2文字がBAとなるのは，n 文字の文字列が可でかつ右端の文字がBとなっているところに文字Aを付け加える場合だから

$$\boldsymbol{q_{n+1} = \frac{2}{3}r_n} \qquad \cdots\cdots②$$

$n+1$ 文字の文字列が可でかつ右端の2文字がABとなるのは，n 文字の文字列が可でかつ右端の2文字がAAまたはBAとなっているところに文字Bを付け加える場合だから

$$\boldsymbol{r_{n+1} = \frac{1}{3}(p_n + q_n)} \qquad \cdots\cdots③$$

(2) ①，②，③から

$$\begin{aligned} & p_{n+1} + 2q_{n+1} + 2r_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}q_n + 2\cdot\frac{2}{3}r_n + 2\cdot\frac{1}{3}(p_n + q_n) \\ &= \frac{2}{3}(p_n + 2q_n + 2r_n) \end{aligned}$$

とできるので，2以上の整数 n に対して

$$\begin{aligned} p_n + 2q_n + 2r_n &= (p_2 + 2q_2 + 2r_2)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ &= \mathbf{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

(3) ①，②，③から

$$\begin{aligned} & p_{n+1} + iq_{n+1} - (1+i)r_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}q_n + i\cdot\frac{2}{3}r_n - (1+i)\cdot\frac{1}{3}(p_n + q_n) \\ &= -\frac{1+i}{3}\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\} \end{aligned}$$

とできるので，2以上の整数 n に対して

$$\begin{aligned} & p_n + iq_n - (1+i)r_n \\ &= \{p_2 + iq_2 - (1+i)r_2\}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2} \\ &= \mathbf{\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}} \end{aligned}$$

(4) (3)の結果とド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} & (p_n - r_n) + (q_n - r_n)i \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n-2} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n\left\{\cos\frac{(n-2)\pi}{4} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{4}\right\} \end{aligned}$$

とできる．ここで，p_n，q_n，r_n は実数だから

$$p_n - r_n = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n\cos\frac{(n-2)\pi}{4}$$

したがって，$p_n = r_n$ を満たすための必要十分条件は

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{4} = 0$$

が成り立つこと，すなわち

$$\frac{(n-2)\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

となる整数 k が存在すること．これより

$$n - 2 = 2 + 4k \qquad \therefore\ n = 4 + 4k$$

とできるので，求める必要十分条件は

n が4の倍数であること

である．

IV 微分法とその応用

10 関数の極限と連続

76 Ⅲ（複素数の図形への応用）

解答　C_t: $|3z+it|=|(t+2i)z-1|$　……$(*)$

$(*)$ より，

$$3\left|z+\frac{t}{3}i\right|=|t+2i|\left|z-\frac{1}{t+2i}\right|$$

よって，C_t が円でないのは，$|t+2i|=3$ のときである．

このとき，$t^2+4=3^2$ より $t^2=\mathbf{5}$

$t^2 \neq 5$ のとき $(*)$ より

$$(3z+it)(3\overline{z}-it)=\{(t+2i)z-1\}\{(t-2i)\overline{z}-1\}$$

$$\therefore\quad (5-t^2)z\overline{z}+\{t+(2-3t)i\}z+\{t-(2-3t)i\}\overline{z}+t^2-1=0$$

$$\therefore\quad \left(z+\frac{t+(3t-2)i}{5-t^2}\right)\left(\overline{z}+\frac{t-(3t-2)i}{5-t^2}\right)=\frac{t^2+(3t-2)^2}{(5-t^2)^2}-\frac{t^2-1}{5-t^2}$$

$$\therefore\quad \left|z+\frac{t+(3t-2)i}{5-t^2}\right|^2=\frac{t^4+4t^2-12t+9}{(5-t^2)^2}$$

$$\frac{t^4+4t^2-12t+9}{(5-t^2)^2}=\frac{t^4+(2t-3)^2}{(5-t^2)^2}>0$$

であるから C_t は円であり，この中心 w は

$$w=\frac{t+(3t-2)i}{t^2-5}$$

w の虚部が 0 となるのは $t=\mathbf{\frac{2}{3}}$ のときであり，このときの w の実部は

$$\frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2-5}=-\mathbf{\frac{6}{41}}$$

$\tan\theta=\dfrac{3t-2}{t}$ であるから

$$\lim_{t\to\infty}\tan\theta=\lim_{t\to\infty}\frac{3t-2}{t}=\mathbf{3}$$

また，$|w|=\dfrac{\sqrt{t^2+(3t-2)^2}}{|t^2-5|}$ であるから

$$\lim_{t\to\infty}t|w|=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2\sqrt{1+\left(3-\frac{2}{t}\right)^2}}{|t^2-5|}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{t^2-5}\sqrt{1+\left(3-\frac{2}{t}\right)^2}=\mathbf{\sqrt{10}}$$

12接線・法線

85 (1) Ⅲ（複素数平面）

解答　$|z|=2$ であるから，

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

である．また，

$iz=-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ であるから，

$\theta=\mathbf{\frac{2}{3}\pi}$ である．

(2) Ⅲ（楕円）

解答　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$ の点 $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$ における接線の方程式は，

$$\frac{\sqrt{3}x}{4}+\left(\frac{3}{2}-1\right)(y-1)=1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+(y-1)=2$$

$$\therefore\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+3$$

したがって，$a=-\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，$b=\mathbf{3}$

(3) Ⅲ（定積分）

解答　$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

192の解答は
現在見つかっていません

V 積分法とその応用　26 体積

198 (体積，曲線の媒介変数表示，関数の増減と極値)

解 答　(1)

$$\frac{dy}{dt}=\sin t+\sin 2t=\sin t(1+2\cos t)$$

であるから，$0\leqq t\leqq\pi$ での y の増減は次の通り．

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\frac{dy}{dt}$	(0)	$+$	0	$-$	(0)
y		↗		↘	

$t=0$ のとき $y=-2$，$t=\frac{2\pi}{3}$ のとき $y=\frac{1}{4}$，$t=\pi$ のとき $y=0$ であることに注意して，y の**最大値は** $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$，**最小値は** $\boldsymbol{-2}$ とわかる．

(2)　(1) の通り，$\frac{dy}{dt}<0$ となる t の値の範囲は $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi<t<\pi}$ である．一方，

$$\frac{dx}{dt}=\cos t+\cos 2t=(\cos t+1)(2\cos t-1)$$

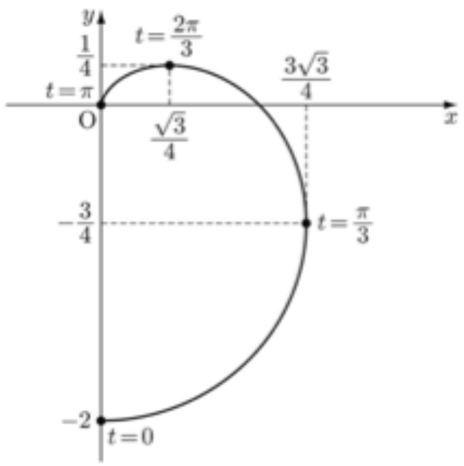
であるから，$0\leqq t\leqq\pi$ での x の増減は次の通り．

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	(0)
x		↗		↘	

$t=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi$ のときの $(x,\ y)$ がそれぞれ

$$(0,\ -2),\ \left(\frac{3\sqrt{3}}{4},\ -\frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{4}\right),\ (0,\ 0)$$

であることと合わせ，C の概形は次の通り．



(3)　y 軸に垂直な断面の面積を考えて，計算を進めて

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\pi x^2\frac{dy}{dt}\,dt-\int_\pi^{\frac{2\pi}{3}}\pi x^2\frac{dy}{dt}\,dt\\
&=\int_0^{\pi}\pi x^2\frac{dy}{dt}\,dt\\
&=\int_0^{\pi}\pi\left(\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\cdot\sin t(1+2\cos t)\,dt\\
&=\int_0^{\pi}\pi\sin^2 t(1+\cos t)^2\sin t(1+2\cos t)\,dt\\
&=\int_0^{\pi}\pi(1-\cos^2 t)(1+\cos t)^2(1+2\cos t)\cdot\sin t\,dt
\end{aligned}$$

を得る．ここで変数変換 $u=\cos t$ を行うと，$\frac{du}{dt}=-\sin t$ にも注意して

$$\begin{aligned}
V&=\int_1^{-1}\pi(1-u^2)(1+u)^2(1+2u)\cdot(-1)\,du\\
&=\int_{-1}^{1}\pi(1-u^2)(1+u)^2(1+2u)\,du\\
&=\pi\int_{-1}^{1}(1+4u+4u^2-2u^3-5u^4-2u^5)\,du\\
&=2\pi\int_0^{1}(1+4u^2-5u^4)\,du\\
&=2\pi\left[u+\frac{4}{3}u^3-u^5\right]_0^1\\
&=\boldsymbol{\frac{8\pi}{3}}
\end{aligned}$$

を得る．