

求GCD

辗转相除法

著名的辗转相除法求两个数的GCD是被我们所熟知的，其思路是：

对于任意两个正整数 a , b 假设 $a > b$

设 $r = a \% b$

若 $r = 0$

则 $GCD = b$

若 $r \neq 0$

则令 $a = b$, $b = r$ 并重复上述操作

直到 $r = 0$ 便可得到GCD

为了便于操作，我们用一个实例演示：

求18和30的GCD

$a = 30$, $b = 18$

$r = a \% b = 12$ 不为0

则 $a = 18$ $b = 12$

$r = a \% b = 6$ 不为0

则 $a = 12$ $b = 6$

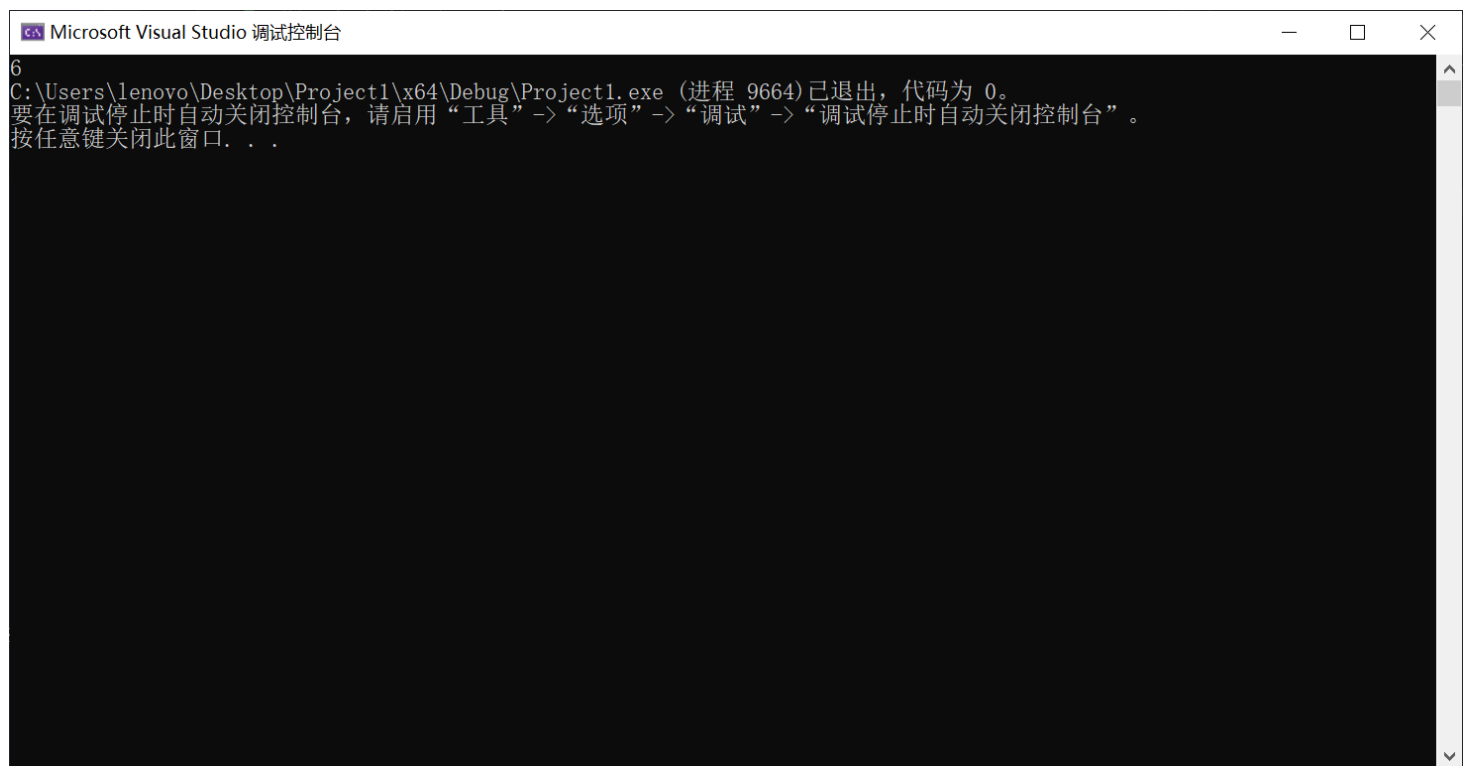
$r = a \% b = 0$

所以GCD为6

代码演示：

```
#include<iostream>
using namespace std;
int GCD(int a,int b) {
    int r;
    while (b)
    {
        r = a % b;
        a = b;
        b = r;
    }
    return a;
}
void main() {
    cout << GCD(30, 18);
}
```

结果展示



算法分析：

正如课上同学所讲

%的运算速度远大于 + -

所以我们可以认为减小我们的运算量

- 如果 a, b都是偶数

肯定都有2为因子，那么很容易想到

$$G(a,b)=2G(a/2, b/2)$$

比如 $G(2, 8) = 2G(1, 4)$

- a, b 一个为奇数，一个为偶数

那么肯定没有2因子，所以对偶数除以2参与运算并不会改变最后的结果

- a, b 都是奇数， $a-b$ 一定是偶数。设 d 是 a 和 b 的一个公约数，那么 d 也是 $a-b$ 的约数。因为如果 d 能够整除 a 和 b ，那么它也能够整除它们的差。设 d 是 $a-b$ 和 b 的一个公约数，那么 d 也是 a 的约数。因为如果 d 能够整除 $a-b$ 和 b ，那么它也能够整除它们的和。所以 $G(a,b) = G(a,a-b)$

更相减损法

更相减损法求GCD的思路如下：

对于任意两个正整数 a, b 假设 $a > b$

设 $r = a - b$

若 $r = 0$

则 $GCD = a$

若 $r \neq 0$

则 $a = \max(b, r)$

$b = \min(b, r)$

再重复上述操作即可以得到GCD

举例说明：

求30, 18 的GCD

$a = 30, b = 18$

$r = a - b = 12$ 不为零

$a = 18, b = 12$

$r = 6$ 不为零

$a = 12$ $b = 6$

$r = 6$ 不为零

$a = 6$ $b = 6$

$r = 0$

$\text{GCD} = 6$

实际上上述操作可以写成递归形式

代码演示：

```
#include<iostream>
using namespace std;
int GCD(int a, int b) {

    if (a == b)
        return a;
    else {
        int big = max(a, b);
        int small = min(a, b);
        return GCD(big - small, small);
    }
}

void main() {
    cout << GCD(30, 18);
}
```

结果展示

```
Microsoft Visual Studio 调试控制台
6
C:\Users\lenovo\Desktop\Project1\x64\Debug\Project1.exe (进程 4708) 已退出，代码为 0。
要在调试停止时自动关闭控制台，请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。
按任意键关闭此窗口。 . . .
```

算法分析：

我个人感觉更相减损法和辗转相除法几乎一致

不过一个是除法一个是减法

在时间复杂度上来讲：

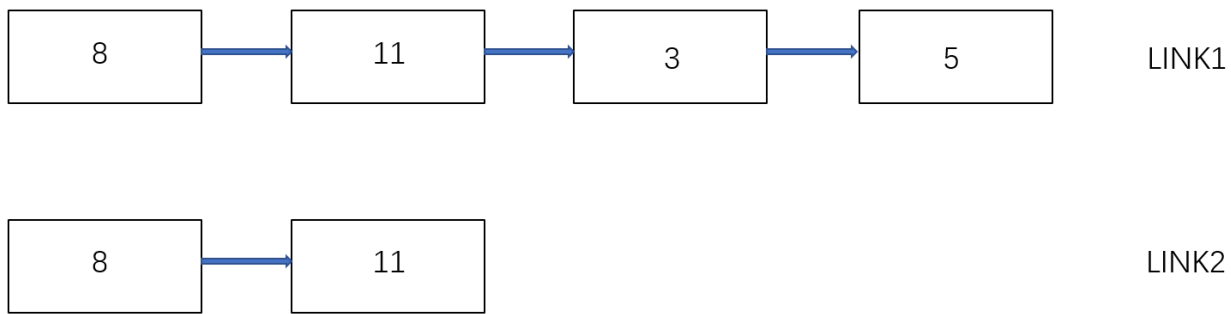
辗转相除法的时间复杂度为 $O(\log(\min(a,b)))$ ，而更相减损术的时间复杂度取决于 a 和 b 的差值。在最坏情况下，更相减损术的时间复杂度可能达到 $O(\max(a,b))$ 。

因此，在大多数情况下，**辗转相除法比更相减损术更快。**

给出方案返回一可以动态变化的序列（可增可减）中的最大值，并对你的方案进行分析。

根据我们第一次的思考题，我们可以创造一链表（存放所有元素）和一链表（存放最大值）去解决这个问题

算法思路：



假设一个动态序列目前是8 11 3 5

则按照顺序得到的最大链表的顺序为8 11

若LINK1里面删掉11

我们可以在LINK2里面删除11

若LINK1里面删掉8

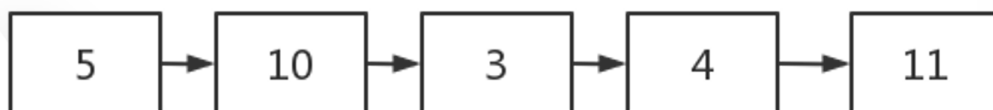
则LINK2里面删除左边的8

可以实现LINK2中最右边元素始终为最大元素

对于课上同学问题的思考

算法思路：要实现一个可增可减的动态序列，最合适的数据结构应为链表，借鉴上节课的思考题，额外设置一个最大值栈，栈底初值设置为INT_MIN，根据链表元素的增减，更新栈顶元素。

示例：



11

10

5

INT_MIN

上图是课上同学分享的方法

我有一些质疑：

假设我们在原序列中删除10

(1) 右边栈中若不弹出，始终保持原状态

那么我们在原序列删除11的时候，将栈中11弹出，10被留下，10将没有意义是错误的。

(2) 若右边栈中将11和10全部弹出，再压入11这种方法是十分繁琐的。因为在考虑到一个较长的序列，这种只为了删除栈中间某个元素的行为是非常费力的，不如利用链表更加方便。

鉴于该同学课上的时候，仅通过一张简单的PPT来演示这个过程，并没有细细说明具体算法，因此我在这里提出了一些质疑，并提议用链表去记录最大元素更好。

代码实现：

...因为我是转专业来到计算机学院的，数据结构还没有学（目前我在老师您的数据结构班上学习），所以对于一些结构的代码实现并不太了解，因此只用图的形式给出了算法思路。