華中科技大学

数字电路与逻辑设计

第二章　逻辑代数基础

主讲教师：何云峰

提 纲

1 逻辑代数的基本概念

2 逻辑代数的基本定理和规则

3 逻辑函数表达式的形式与变换

4 逻辑函数化简

逻辑代数

□定义

逻辑代数L是一个封闭的代数系统，它由一个逻辑变量集K，常量0和1以及“或”、“与”、“非”三种基本运算所构成，记为

$$L=\{ K ,+ ,\cdot ,- ,0 ,1 \}$$

逻辑代数公理

◘公理 1：交 换 律

– 对于任意逻辑变量A、B，有

- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$

逻辑代数公理

- 公理 2：结 合 律
  - 对于任意的逻辑变量A、B、C，有
    - $(A + B) + C = A + (B + C)$
    - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- 公理 3：分 配 律
  - 对于任意的逻辑变量A、B、C，有
    - $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$；
    - $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

逻辑代数公理

- **公 理 4　　0—1 律**
  - 对于任意逻辑变量A，有
    - $A+0=A$；　　$A\cdot 1=A$
    - $A+1=1$；　　$A\cdot 0=0$
- **公 理 5　　互补律**
  - 对于任意逻辑变量A，存在唯一的$\bar{A}$，使得
    - $A+\bar{A}=1$
    - $A\cdot\bar{A}=0$

逻辑代数的基本概念

□逻辑变量

- 用字母表示其值可以变化的量
  - 逻辑变量的取值：0，1
  - 逻辑值0和1无大小、正负之分

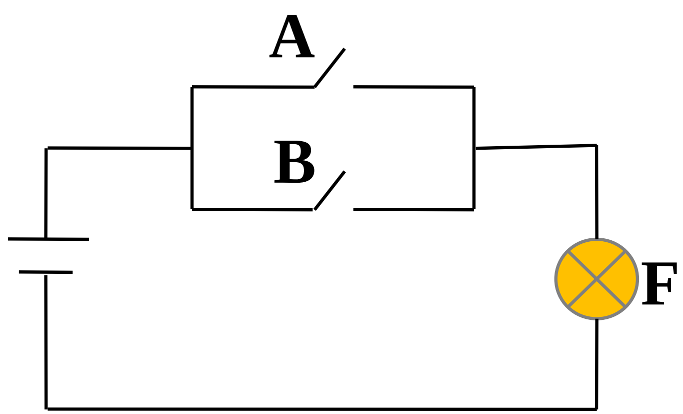
□逻辑代数的基本运算

- 基本运算：“或”、“与”、“非”

逻辑代数的基本运算

■ 或运算

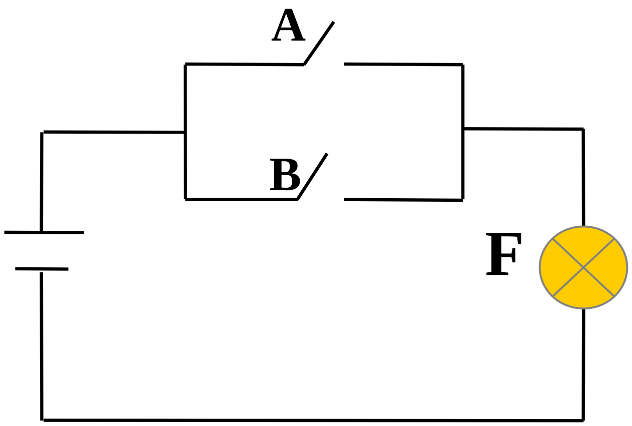
- “或”逻辑：决定某一事件是否发生的多个条件中，只要有一个或一个以上条件成立，事件便可发生



或运算

- 逻辑代数中，“或”逻辑用“或”运算描述
- 运算符号：“+”或“∨”
- 描述方式
  - $F = A + B$ 或者 $F = A \vee B$
  - 读：“F等于A或B”

或运算



A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

"或"运算的运算法则:

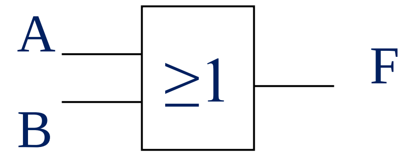
$0+0=0 \qquad 1+0=1$

$0+1=1 \qquad 1+1=1$

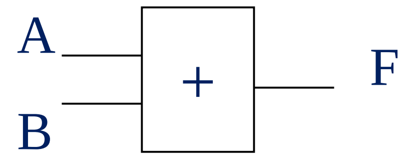
或运算

- 实现“或”运算关系的逻辑电路称为“或”门
- “或”门的逻辑功能是实现或运算

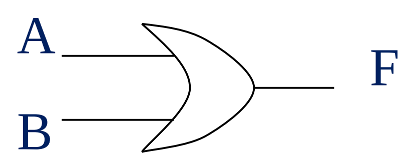
“或”门的新标准符号：



“或”门的惯用符号：



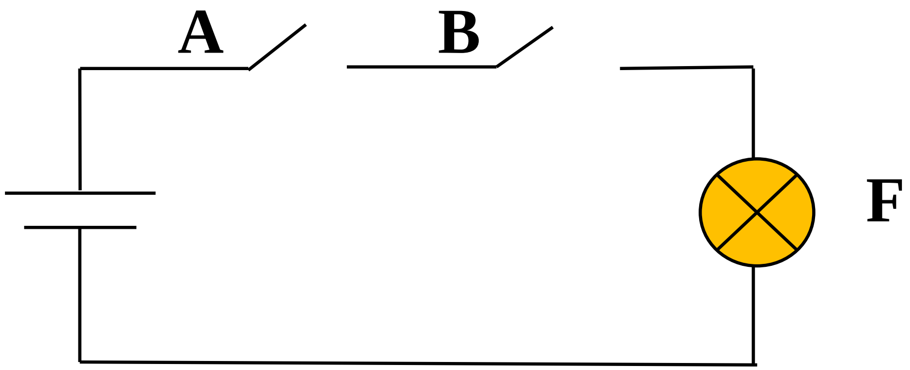
“或”门的国外符号：



逻辑代数的基本运算

与运算

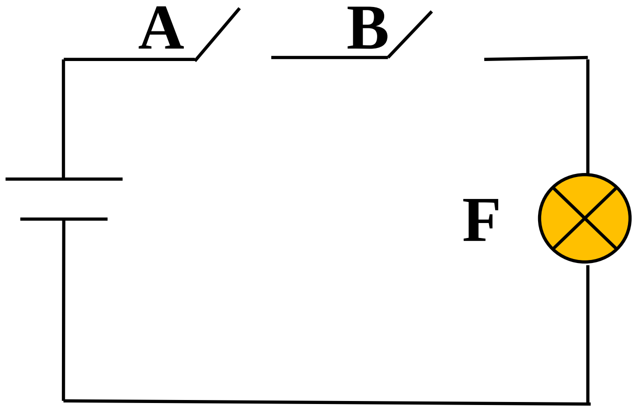
- “与”逻辑：决定某一事件发生的多个条件必须同时具备，事件才能发生



与运算

- 逻辑代数中，“与”逻辑用“与”运算描述
- 运算符号：“·”或“∧”
- 描述方式：
  - $F = A \cdot B$ 或者 $F = A \wedge B$
  - 读：“F等于A与B”

与运算



A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	**1**	**1**

“与”运算的运算法则:

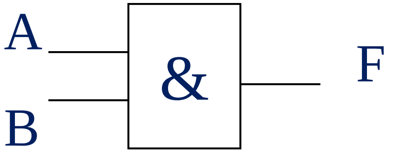
$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 1 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1$$

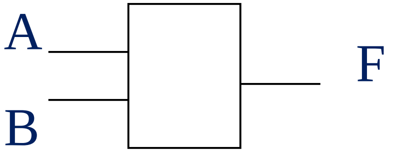
与运算

- 实现“与”运算关系的逻辑电路称为“与”门
- “与”门的逻辑功能是实现与运算

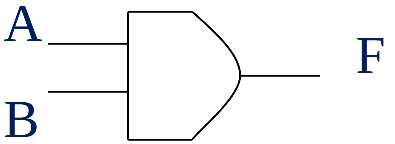
“与”门的新标准符号：



“与”门的惯用符号：



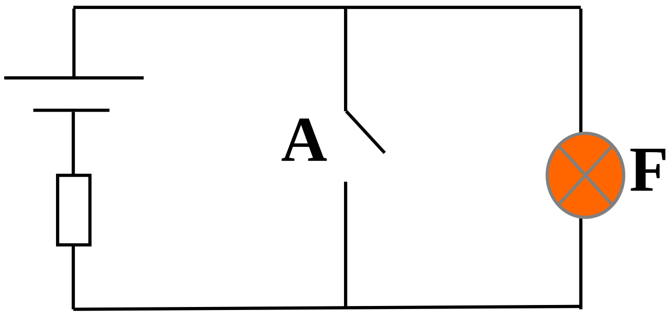
“与”门的国外符号：



逻辑代数的基本运算

非运算

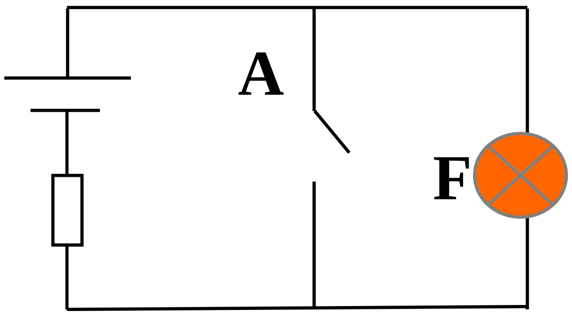
- 非逻辑：某一事件的发生取决于条件的否定，即事件与事件发生的条件之间构成矛盾



非运算

- “非”逻辑用“非”运算描述
- 运算符号：“$\overline{\ \ }$”或“¬”
- 描述方式
  - $\mathrm{F} = \overline{\mathrm{A}}$ 或 $\mathrm{F} = \neg A$
  - 读：F等于A非

逻辑代数的基本概念



A	F
0	1
1	0

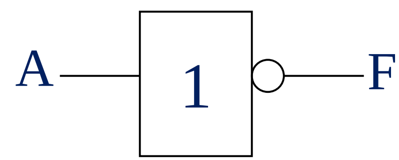
"非"运算的运算法则：

$$\overline{0} = 1 \qquad \overline{1} = 0$$

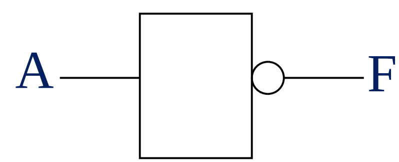
非运算

- 实现“非”运算功能的逻辑电路称为“非”门或“反相器”
- “非”门的逻辑功能是实现非运算

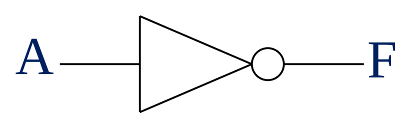
“非”门的新标准符号：



“非”门的惯用符号：



“非”门的国外符号：



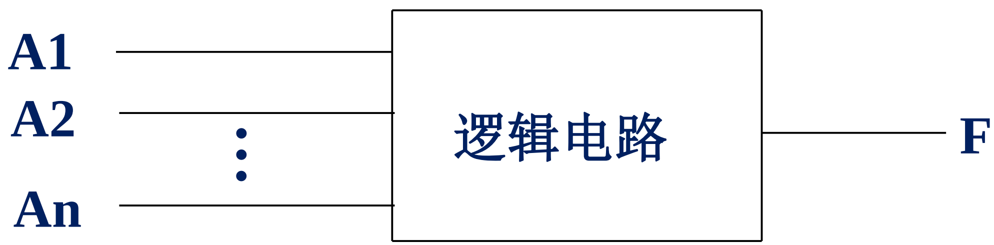
逻辑代数的基本概念

◘ 逻辑函数

- 定义：随自变量变化的因变量
- 普通代数中函数的概念相比，逻辑函数具有如下特点：
  - 逻辑函数和逻辑变量一样，取值只有0和1两种可能
  - 函数和变量之间的关系是由“或”、“与”、“非”三种基本运算决定的

逻辑函数

◻ 数字系统研究的角度的定义



– 设某一逻辑电路的输入逻辑变量为A_1，A_2，…，A_n，输出逻辑变量为F

– 如果当A_1，A_2，…，A_n的值确定下来，F的值就唯一的确定下来，则F被称为A_1，A_2，…，A_n的逻辑函数

– 记为 $\mathbf{F = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)}$

逻辑函数

- 逻辑电路输出取决于：
  - 逻辑变量的取值
  - 电路本身的结构
- 电路的逻辑功能：可由相应的逻辑函数完全描述
- 对电路的分析研究：借助抽象的代数表达式

逻辑函数的基本概念

- 逻辑函数的相等
  - 设有两个相同变量的逻辑函数

$$F_1 = f_1(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

$$F_2 = f_2(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

若对应于逻辑变量 A_1, A_2，…，A_n的任何一组取值，F_1和F_2的值都相同，则称函数F_1和F_2相等，记作

$$F_1 = F_2$$

逻辑函数

- 判断函数相等方法
  - 真值表法
  - 代数法
- 逻辑功能的表示法
  - 逻辑表达式
  - 真值表
  - 卡诺图

逻辑函数的表示法

逻辑表达式

- 逻辑表达式由逻辑变量和“或”、“与”、“非”3种运算符以及括号所构成
- 例如， $F=f(A,B)=\overline{A}B+A\overline{B}$
  - 逻辑关系：
    - $A \neq B$，$F=1$
    - $A=B$，$F=0$

逻辑表达式

□逻辑表达式的简写

- “非”运算符下可不加括号
  - 如$\overline{A \cdot B}$，$\overline{A + B}$
- “与”运算符一般可省略
  - A·B 可写成 AB
- 在一个表达式中，如果既有“与”运算又有“或”运算，则按**先“与”后“或”**的规则进行运算，可省去括号
  - (A·B)+(C·D)可写为AB+CD

逻辑表达式

□ 逻辑函数的简写

- 运算优先法则：

$$(\ ) \longrightarrow \overline{\ \ } \longrightarrow \cdot \longrightarrow \oplus \longrightarrow +$$

高 ⟶ 低

- 与运算和或运算均满足结合律
  - (A+B)+C或者A+(B+C)可用A+B+C代替
  - (AB)C或者A(BC)可用ABC代替。

$$(A+B)\cdot(C+D) = A+B\cdot C+D \quad \text{X}$$

逻辑函数的表示法

□ 真值表

- 依次列出一个逻辑函数的所有输入变量取值组合及其相应函数值的表格
- 一个n个变量的逻辑函数，其真值表有2^n行
  - n个逻辑变量共有2^n种可能的取值组合

逻辑函数的表示法

函数 $\mathrm{F} = A\bar{B} + \bar{A}C$ 的真值表

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

真值表

例：用真值表法判断下列函数之间的关系。

$$F = A\bar{B} + \bar{A}C \qquad G = A\bar{B} + \bar{A}C + \bar{B}C$$

A	B	C	F	G

真值表

例：用真值表法判断下列函数之间的关系。

$$\mathrm{F} = A\bar{B} + \bar{A}C \qquad G = A\bar{B} + \bar{A}C + \bar{B}C$$

A	B	C	F	G
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

真值表

例：用真值表法判断下列函数之间的关系。

$$F = A\bar{B} + \bar{A}C \qquad G = A\bar{B} + \bar{A}C + \bar{B}C$$

A	B	C	F	G
0	0	0	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

真值表

例：用真值表法判断下列函数之间的关系。

$$F = A\bar{B} + \bar{A}C \qquad G = A\bar{B} + \bar{A}C + \bar{B}C$$

A	B	C	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

$\Rightarrow$ F＝G

逻辑函数的表示法

❑ 卡诺图

- 由表示逻辑变量所有取值组合的小方格所构成的平面图
- 图形描述逻辑函数
- 后面结合函数化简问题进行详细介绍

逻辑函数的表示法

- 逻辑函数、真值表和卡诺图
  - 各有特点
  - 可用于不同场合
  - 同一问题的不同描述形式
  - 相互之间可以很方便地进行变换

提纲

1 逻辑代数的基本概念

2 逻辑代数的基本定理和规则

3 逻辑函数表达式的形式与变换

4 逻辑函数化简

逻辑代数的基本定理

■定理1

- $0+0=0 \quad 0+1=1 \quad 1+0=1 \quad 1+1=1$
- $0 \cdot 0=0 \quad 0 \cdot 1=0 \quad 1 \cdot 0=0 \quad 1 \cdot 1=1$
- 证明：
  - 在公理4中，A表示集合K中的任意元素，因而可以是0或1。用0和1代入公理4中的A
- 推论：
  - $\bar{0}=1 \quad \bar{1}=0$

公理5

逻辑代数的基本定理

定理2

- $A + A = A$；　　$A \cdot A = A$
- 证明：

$$A + A$$

$$= (A + A) \cdot 1 \qquad \text{公理4}$$

$$= (A + A)(A + \overline{A}) \qquad \text{公理5}$$

$$= A + (A \cdot \overline{A}) \qquad \text{公理3}$$

$$= A + 0 \qquad \text{公理5}$$

$$= A \qquad \text{公理4}$$

逻辑代数的基本定理

◻ 定理3

- $A + A \cdot B = A$
- $A \cdot (A + B) = A$
- 证明：

$A+A\cdot B$	
$= A\cdot 1+A\cdot B$	公理4
$= A\cdot(1+B)$	公理3
$= A(B+1)$	公理1
$= A\cdot 1$	公理4
$= A$	公理4

逻辑代数的基本定理

□ 定理4

- $A + \bar{A}B = A + B$
- $A \cdot (\bar{A} + B) = AB$
- 证明:

$$A + \bar{A}B$$

$$= (A + \bar{A})(A + B) \quad \text{公理3}$$

$$= 1 \cdot (A + B) \quad \text{公理5}$$

$$= A + B \quad \text{公理4}$$

逻辑代数的基本定理

□定理5

- $\bar{\bar{A}} = A$
- 证明:

令 $\bar{\bar{A}}$ =x

$\bar{A} \cdot X = 0 \quad \bar{A} + X = 1$ 公理5

$\bar{A} \cdot A = 0 \quad \bar{A} + A = 1$ 公理5

由于X和A都满足公理5。因此，根据公理5的唯一性，得到A = X。

逻辑代数的基本定理

定理6

- $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ $\quad\quad$ $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
- 证明:

$$
\begin{aligned}
& \bar{\mathrm{A}} \cdot \bar{\mathrm{B}} + (\mathrm{A} + \mathrm{B}) \\
&= (\bar{\mathrm{A}} \cdot \bar{\mathrm{B}} + \mathrm{A}) + \mathrm{B} && \text{公理2} \\
&= (\bar{\mathrm{B}} + \mathrm{A}) + \mathrm{B} && \text{定理4} \\
&= (\bar{\mathrm{B}} + \mathrm{B}) + \mathrm{A} && \text{公理1,2} \\
&= 1 + \mathrm{A} && \text{公理5} \\
&= 1 && \text{公理4}
\end{aligned}
$$

华中科技大学 Huazhong University of Science & Technology

逻辑代数的基本定理

■ 定理6

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (A + B)$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot B \qquad \text{公理3}$$

$$= 0 + 0 \qquad \text{公理1,5}$$

$$= 0 \qquad \text{定理1}$$

根据公理5的唯一性可得

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

逻辑代数的基本定理

定理7

- $\mathrm{AB}+A\bar{B}=A$ $\quad\quad (\mathrm{A}+\mathrm{B})(A+\bar{B})=A$
- 证明:

$$\mathrm{AB}+A\bar{B}$$

$$=\mathrm{A}\cdot(\mathrm{B}+\bar{B})$$ 公理

$$=\mathrm{A}\cdot 1$$ 公理5

$$=\mathrm{A}$$ 公理4

逻辑代数的基本定理

◻ 定理8

- $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\bar{A}\cdot C+B\cdot C=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\bar{A}\cdot C$
- $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot(\bar{A}+C)\cdot(B+C)=(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot(\bar{A}+C)$
- 证明:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\bar{A}\cdot C+B\cdot C\\
&=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\bar{A}\cdot C+B\cdot C\cdot(\mathrm{A}+\bar{A})\\
&=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\bar{A}\cdot C+B\cdot C\cdot\mathrm{A}+B\cdot C\cdot\bar{A}\\
&=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\mathrm{A}\cdot B\cdot C+\bar{A}\cdot C+\bar{A}\cdot B\cdot C\\
&=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\bar{A}\cdot C
\end{aligned}
$$

逻辑代数的规则

- 代入规则
- 反演规则
- 对偶规则

代入规则

- 定义：任何一个含有变量A的逻辑等式，如果将所有出现A的位置都代之以同一个逻辑函数F，则等式仍然成立
  - 例：
    - A(B+C)=AB+AC
    - A〔B+(C+D)〕= AB+A(C+D)
  - 任何逻辑函数都和逻辑变量一样，只有0和1两种可能的取值

代入规则

◻意义

– 利用代入规则可以将逻辑代数公理、定理中的变量用任意函数代替，从而推导出更多的等式

$$\bar{f}(A_1, A_2, \cdots, A_n) + f(A_1, A_2, \cdots, A_n) = 1$$

◻注意

– 等式中所有出现同一变量的地方均以同一函数代替

反演规则

- 若将逻辑函数表达式F中所有的“$\cdot$”变成“+”，“+”变成“$\cdot$”，“0”变成“1”，“1”变成“0”，原变量变成反变量，反变量变成原变量，并保持原函数中的运算顺序不变，则所得到的新的函数为原函数F的反函数$\overline{F}$

即： $\bullet \rightleftarrows +$ ， $0 \rightleftarrows 1$ ， 原变量 $\rightleftarrows$ 反变量

反演规则

- 定理6的推广，可通过定理6和代入规则得到证明
- 注意: 保持原函数式中运算符号的优先顺序不变
- 例1：求函数 $F = \bar{A}B + C\bar{D}$的反函数。

$$\bar{F} = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{C} + D)$$

- 例2：求函数 $F = \bar{A} + \bar{B}\ (C + D\bar{E})$ 的反函数。

$$\bar{F} = A \cdot B + \bar{C} \cdot \bar{D} + E$$ ~~?~~ !

反演规则

- 定理6的推广，可通过定理6和代入规则得到证明
- 注意: 保持原函数式中运算符号的优先顺序不变
- 例1：求函数 $F = \bar{A}B + C\bar{D}$的反函数。

$$\overline{F} = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{C} + D)$$

- 例2：求函数 $F = \bar{A} + \bar{B}\ (C + D\bar{E})$ 的反函数。

$$\overline{F} = A \cdot [B + \overline{C} \cdot (\overline{D} + E)]$$ √

对偶规则

□对偶式

- 如果将逻辑函数表达式F中所有的“·”变成“+”，“+”变成“·”，“0”变成“1”，“1”变成“0”，并保持原函数中的运算顺序不变，则所得到的新的逻辑表达式称为函数F的对偶式，并记作F'

$$F = AB + \overline{B}(C + 0)$$

$$F' = (A + B)(\overline{B} + C \cdot 1)$$

华中科技大学 Huazhong University of Science & Technology

对偶规则

- 注意
  - 如果F的对偶式是F'，则F'的对偶式就是F。即 (F')' =F
  - F和F'互为对偶式
- F' =F，**自对偶函数。**

对偶规则

- 例：证明函数 $F=(A+\bar{C})\bar{B}+A(\bar{B}+\bar{C})$ 是一自对偶函数。

$$
\begin{aligned}
F' &= (A\cdot\bar{C}+\bar{B})(A+\bar{B}\cdot\bar{C}) \\
&= (A+\bar{B})(\bar{C}+\bar{B})(A+\bar{B})(A+\bar{C}) \\
&= (A+\bar{B})(\bar{B}+\bar{C})(A+\bar{C}) \\
&= [A(\bar{B}+\bar{C})+\bar{B}(\bar{B}+\bar{C})](A+\bar{C}) \\
&= A(\bar{B}+\bar{C})(A+\bar{C})+\bar{B}(\bar{B}+\bar{C})(A+\bar{C}) \\
&= (\bar{B}+\bar{C})(A+A\bar{C})+(\bar{B}+\bar{B}\cdot\bar{C})(A+\bar{C}) \\
&= (A+\bar{C})\bar{B}+A(\bar{B}+\bar{C}) = F
\end{aligned}
$$

对偶规则

- 注意
  - 保持原函数的运算顺序不变
- 对偶规则：若两个逻辑函数表达式F和G相等，则其对偶式F’和G’也相等
  - $F=G \rightarrow F'=G'$
  - 利用对偶规则可以使定理、公式的证明减少一半
    - $A \cdot B+\overline{A} \cdot C+B \cdot C=A \cdot B+\overline{A} \cdot C$
    - $(A+B) \cdot (\overline{A}+C) \cdot (B+C)=(A+B) \cdot (\overline{A}+C)$

复合逻辑

- 实际应用中广泛采用“与非”门、“或非”门、“与或非”门、“异或”门等门电路
- 这些门电路输出和输入之间的逻辑关系可由3种基本运算构成的复合运算来描述，故通常将这种逻辑关系称为复合逻辑，相应的逻辑门则称为复合门

复合逻辑

◘ 与非逻辑

- 与非逻辑是由与、非两种逻辑复合形成的，可用逻辑函数表示为

$$\mathrm{F} = \overline{A \cdot B \cdot C \cdots}$$

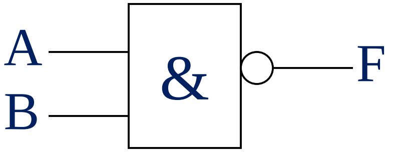
- 逻辑功能
  - 只要变量A、B、C、...中有一个为0，则函数F为1
  - 仅当变量A、B、C、...全部为1时，函数F为0

复合逻辑

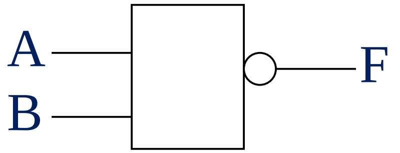
◻ 与非逻辑

– 实现“与非”运算功能的逻辑电路称为“与非”门

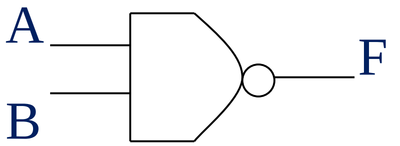
“与非”门的新标准符号：



“与非”门的惯用符号：



“与非”门的国外符号：



复合逻辑

□ 与非逻辑

- 根据 $\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}$，“与”之“非”可以产生“或”的关系
- 与非逻辑可实现与、或、非3种基本逻辑
- 通用门

与: $F=\overline{\overline{A\cdot B}\cdot 1}=\overline{\overline{A\cdot B}}=A\cdot B$

或: $F=\overline{\overline{A\cdot 1}\cdot\overline{B\cdot 1}}=\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}}=A+B$

非: $F=\overline{A\cdot 1}=\bar{A}$

复合逻辑

□或非逻辑

- 或非逻辑是由或、非两种逻辑复合形成的，可用逻辑函数表示为

$$F = \overline{A + B + C \cdots}$$

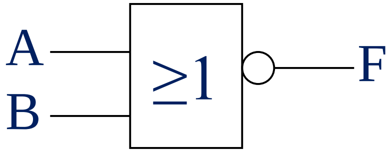
- 逻辑功能：
  - 只要变量A、B、C、...中有一个为1，则函数F为0
  - 仅当变量A、B、C、...全部为0时，函数F为1

复合逻辑

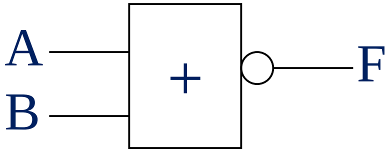
◘ 或非逻辑

– 实现“或非”运算功能的逻辑电路称为“或非”门

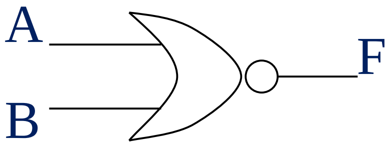
“或非”门的新标准符号：



“或非”门的惯用符号：



“或非”门的国外符号：



复合逻辑

◻ 或非逻辑

- 根据 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$， “或”之“非”可以产生“与”的关系
- 或非逻辑可实现与、或、非3种基本逻辑
- 通用门

与: $F=\overline{\overline{A+0}+\overline{B+0}}=\overline{\overline{A}+\overline{B}}=A\cdot B$

或: $F=\overline{\overline{A+B}+0}=\overline{\overline{A+B}}=A+B$

非: $F=\overline{A+0}=\overline{A}$

复合逻辑

□与或非逻辑

- 与或非逻辑是由与、或、非两种逻辑复合形成的，可用逻辑函数表示为

$$\mathrm{F}=\overline{AB+BC+CD\cdots}$$

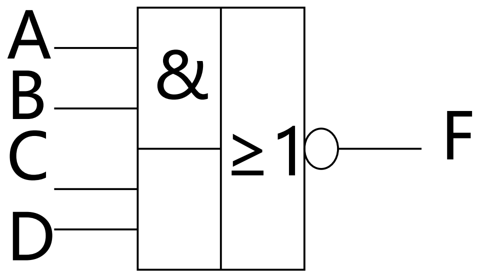
- 逻辑功能：
  - 仅当每一个“与项”均为0时，才能使F为1，否则F为0

复合逻辑

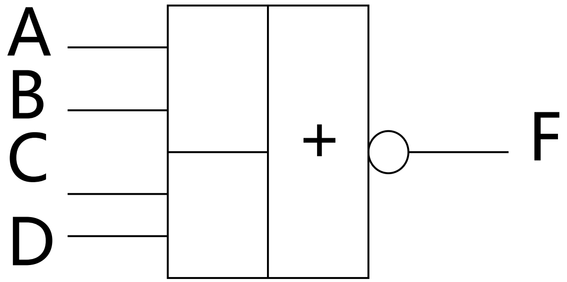
◻与或非逻辑

– 实现“与或非”运算功能的逻辑电路称为“与或非”门

“与或非”门的新标准符号：



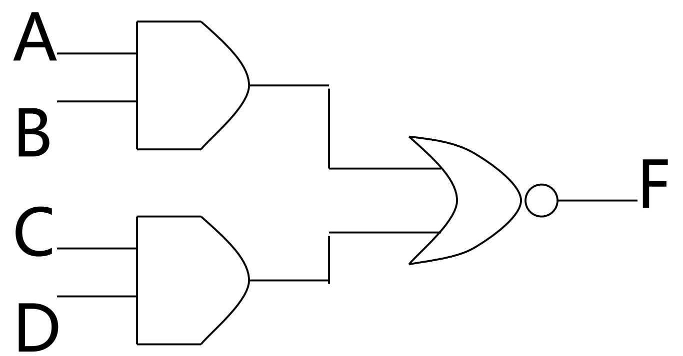
“与或非”门的惯用符号：



复合逻辑

◻ 与或非逻辑

“与或非”门的国外符号：



– 通用门
  - 不经济，不常用

复合逻辑

□异或逻辑

- 两变量逻辑关系，可用逻辑函数表示为

$$F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

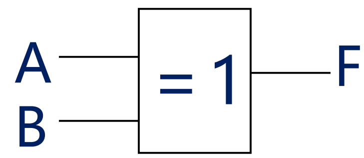
- 逻辑功能：
  - 变量A、B取值相同，F为0
  - 变量A、B取值相异，F为1

复合逻辑

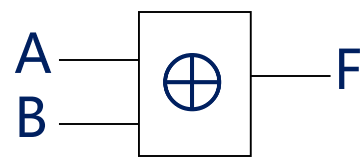
异或逻辑

– 实现“异或”运算功能的逻辑电路称为“异或”门

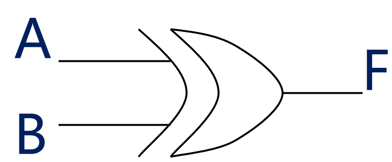
“异或”门的新标准符号：



“异或”门的惯用符号：



“异或”门的国外符号：



异或逻辑

性质

① $A \oplus A = 0$

② $A \oplus \overline{A} = 1$

③ $A \oplus 0 = A$

④ $A \oplus 1 = \overline{A}$

⑤ $A \oplus \overline{B} = \overline{A \oplus B} = A \oplus B \oplus 1$

⑥ $A \oplus B = B \oplus A$

⑦ $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

⑧ $A \cdot (B \oplus C) = (A \cdot B) \oplus (A \cdot C)$

异或逻辑

- 当多个变量进行异或运算时，可用两两运算的结果再运算，也可两两依次运算。
  – 例

$$F = A \oplus B \oplus C \oplus D$$

$$= (A \oplus B) \oplus (C \oplus D)$$

$$= [(A \oplus B) \oplus C] \oplus D$$

异或逻辑

▫注意

- 进行异或运算的多个变量中，若有奇数个变量的值为1，则运算结果为1；若有偶数个变量的值为1，则运算结果为0
- 应用
    - 奇偶校验

复合逻辑

□ 同或逻辑

- 两变量逻辑关系，可用逻辑函数表示为

$$F = A \odot B = \overline{A} \cdot \overline{B} + AB$$

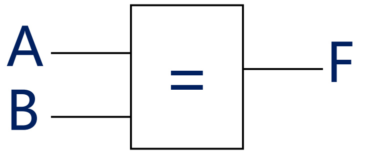
- 逻辑功能：
  - 变量A、B取值相同，F为1
  - 变量A、B取值相异，F为0

复合逻辑

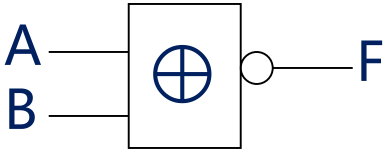
同或逻辑

– 实现“同或”运算功能的逻辑电路称为“同或”门

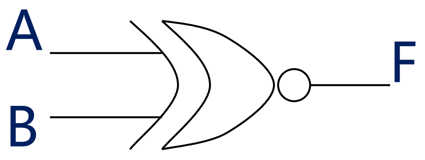
“同或”门的新标准符号：



“同或”门的惯用符号：



“同或”门的国外符号：



复合逻辑

- 同或逻辑和异或逻辑**互为相反，又互为对偶**

$$\overline{A \oplus B} = \overline{A\bar{B} + \bar{A}B} = AB + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$= (\bar{A} + B)(A + \bar{B})$$

$$= A \odot B$$

$$(A \oplus B)' = (A\bar{B} + \bar{A}B)'$$

$$= (A + \bar{B})(\bar{A} + B)$$

$$= \bar{A} \cdot \bar{B} + AB$$

$$= A \odot B$$

同或逻辑

注意

- 进行同或运算的多个变量中，若有奇数个变量的值为0，则运算结果为0；若有偶数个变量的值为0，则运算结果为1
- 同或实际上是异或之非，所以实际应用中通常用异或门加非门实现同或运算

提纲

1 逻辑代数的基本概念

2 逻辑代数的基本定理和规则

3 逻辑函数表达式的形式与变换

4 逻辑函数化简

逻辑函数表达式的形式与变换

逻辑表达式的基本形式

- 任何一个逻辑函数，其表达式的形式都不是唯一的
- 两种基本形式
  - “与-或”表达式
  - “或-与”表达式

逻辑函数表达式的基本形式

“与-或”表达式

- 是指由若干“与项”进行“或”运算构成的表达式
  - “与项”
    - 单个变量的原变量
    - 单个变量的反变量
    - 多个原变量或者反变量相“与”
  - “与项” = “积项”
  - “与-或”表达式 = “积之和”表达式
  - 例

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + \overline{C}$$

逻辑函数表达式的基本形式

□ “或-与”表达式

- 是指由若干“或项”进行“与”运算构成的表达式
  - “或项”
    - 单个变量的原变量
    - 单个变量的反变量
    - 多个原变量或者反变量相“或”
  - “或项” = “和项”
  - “或-与”表达式 = “和之积”表达式
  - 例

$$F(A,B,C,D)=(\overline{A}+B)(B+\overline{C})D$$

逻辑函数表达式的基本形式与变换

- 逻辑表达式可以被表示成任意的混合形式
- 都可以变换成两种基本形式

$$
\begin{aligned}
F(A, B, C) &= (A\overline{B} + C)(A + B\overline{C}) + B \\
&= A\overline{B} + AC + B \\
&= (B + A\overline{B} + C)(B + A + B\overline{C}) \\
&= (A + B + C)(A + B)
\end{aligned}
$$

逻辑函数表达式的标准形式

- 逻辑表达式的基本形式不唯一
- 逻辑表达式的标准形式
  - 使逻辑功能能和唯一的逻辑表达式对应
  - 最小项
  - 最大项

最小项

- 定义
  - 如果一个具有n个变量的函数的“与项”包含全部n个变量，每个变量都以原变量或反变量形式出现一次，且仅出现一次，则该“与项”被称为最小项
  - 标准“与项”
- 最小项的数目：n个变量可以构成2^n个最小项
  - 例如，3个变量A、B、C可以构成$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$、$\bar{A}\bar{B}C$等8个最小项

最小项

- 简写：m_i
  - 下标i的取值规则是：按照变量顺序将最小项中的原变量用1表示，反变量用0表示，由此得到一个二进制数，与该二进制数对应的十进制数即下标i的值

最小项

例如，3变量A、B、C构成的最小项$A\bar{B}C$可用 m_5 表示

$$
\begin{array}{cccl}
A & \bar{B} & C & \longrightarrow m_5 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
1 & 0 & 1 & \longrightarrow (5)_{10}
\end{array}
$$

例如，用最小项表示函数：$F = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC$

$$
\begin{array}{l}
F = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC \\
\quad = m_2 + m_3 + m_6 + m_7 \\
\quad = \sum m(2,3,6,7)
\end{array}
$$

最小项

☐ 性质

- 性质1：
  - 任意一个最小项，其相应变量有且仅有一种取值使这个最小项的值为1。并且，最小项不同，使其值为0的变量取值不同
    - 在由n个变量构成的任意“与项”中，最小项是使其值为1的变量取值组合数最少的一种“与项”
    - 最小项名字的由来

最小项

◻ 性质

- 性质2：
  - 相同变量构成的两个不同最小项相“与”为0
    - 因为任何一种变量取值都不可能使两个不同最小项同时为1，故相“与”为0，即 mi ·mj = 0

例如： $m_i = \bar{A}B$ ， $m_j = \mathrm{AB}$

$$m_i \cdot m_j = \bar{A}B \cdot AB = 0$$

最小项

性质

– 性质3：

- n个变量的全部最小项相“或”为1。通常借用数学中的累加符号“Σ”，将其记为

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

最小项

◘ 性质

- 性质4：
  - n个变量构成的最小项有n个相邻最小项
    - 相邻最小项：是指除一个变量互为相反外，其余部分均相同的最小项
    - 例如，三变量最小项A B C和$\bar{A}$BC 、A$\bar{B}C$ 、AB$\bar{C}$ 相邻。

华中科技大学 Huazhong University of Science & Technology

最大项

- 定义
  - 如果一个具有n个变量的函数的“或项”包含全部n个变量，每个变量都以原变量或反变量形式出现一次，且仅出现一次，则该“或项”被称为最大项
  - 标准“或项”
- 最大项的数目：n个变量可以构成2^n个最大项
  - 例如，3个变量A、B、C可以构成$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$、$A+B+\bar{C}$、…、$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$等8个最大项

最大项

- 简写：M_i
  - 下标i的取值规则是：按照变量顺序将最小项中的原变量用0表示，反变量用1表示，由此得到一个二进制数，与该二进制数对应的十进制数即下标i的值

最大项

例如，3变量A、B、C构成的最小项$A+\bar{B}+C$可用 M_2 表示

$$\begin{array}{ccccc} A+ & \overline{B} & +C & \longrightarrow & M_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 0 & 1 & 0 & \longrightarrow & (2)_{10} \end{array}$$

例如：用最大项表示函数

$$F=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$ 。

解：

$$F=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

$$=\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1\mathrm{M}_4\mathrm{M}_5$$

$$=\prod \mathrm{M}(0,1,4,5)$$

最大项

□ 性质

- 性质1：
  - 任意一个最大项，其相应变量有且仅有一种取值使这个最大项的值为0。并且，最大项不同，使其值为0的变量取值不同
    - 在由n个变量构成的任意“或项”中，最大项是使其值为1的变量取值组合数最多的一种“或项”
    - 最大项名字的由来

最大项

性质

- 性质2：
  - 相同变量构成的两个不同最大项相“或” 为1
    - 因为任何一种变量取值都不可能使两个不同最大项同时为0，故相“或”为0， 即 Mi +Mj = 1

例如： $M_0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}$，$M_2 = \bar{A} + B$,

$M_0 + M_2 = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \bar{A} + B$ =1

最大项

□ 性质

– 性质3：

  - n个变量的全部最大项相“与”为0。通常借用数学中的累加符号“Π”，将其记为

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

最大项

□性质

- 性质4：
  - n个变量构成的最大项有n个相邻最大项
    - 相邻最大项：是指除一个变量互为相反外，其余部分均相同的最大项。
    - 例如，三变量最大项A+ B+ C和$\bar{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$、$\mathrm{A}+\bar{B}+C$ 、$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\bar{C}$ 相邻

逻辑函数表达式的形式与变换

逻辑表达式的标准形式

2变量最小项、最大项真值表								
变量	最小项				最大项			
AB	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	AB	$A + B$	$A + \bar{B}$	$\bar{A} + B$	$\bar{A} + \bar{B}$
	m_0	m_1	m_2	m_3	M_0	M_1	M_2	M_3
00	1	0	0	0	0	1	1	1
01	0	1	0	0	1	0	1	1
10	0	0	1	0	1	1	0	1
11	0	0	0	1	1	1	1	0

逻辑函数表达式的标准形式

□ 最小项和最大项的关系

- 在同一问题中，下标相同的最小项和最大项互为反函数
- 相同变量构成的最小项m_i和最大项M_i之间存在互补关系
- $\overline{m_i} = M_i$，或 $\overline{M_i} = m_i$ 。

例如，由3变量A、B、C构成的最小项m_3和最大项M_3

$$\overline{m_3} = \overline{\bar{A}BC} = A + \bar{B} + \bar{C} = M_3$$

$$\overline{M_3} = \overline{A + \bar{B} + \bar{C}} = \bar{A}BC = m_3$$

逻辑函数表达式的标准形式

- 标准“与-或”表达式
  - 由若干最小项相“或”构成的逻辑表达式
  - 最小项表达式
- 标准“或-与”表达式
  - 由若干最大项相“与”构成的逻辑表达式
  - 最大项表达式

逻辑函数表达式的标准形式

- 例如，

$$F(A,B,C)=\bar{A}\cdot\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\cdot\bar{C}+ABC$$

$$=m_1+m_2+m_4+m_7$$

$$=\sum m\,(1,2,4,7)$$

- 例如

$$F(A,B,C)=(A+B+\bar{C})(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

$$=M_1M_5M_7$$

$$=\prod M\,(1,5,7)$$

逻辑函数表达式的变换

逻辑函数表达式的变换方法

- 代数转换法
  - 利用逻辑代数的公理、定理和规则进行逻辑变换，将函数表达式从一种形式变换为另一种形式
- 真值表转化法
  - 利用逻辑函数表达式和真值表之间的一一对应关系，将函数表达式从一种形式变换为另一种形式

代数转换法

- 求标准“与-或”式
  - 将函数表达式变换成一般“与-或”表达式
  - 反复使用$X = X(Y + \bar{Y})$将表达式中所有非最小项的“与项”扩展成最小项
  - 当给出函数表达式已经是“与-或”表达式时，可直接进行第二步

代数转换法

例: 将逻辑函数表达式转换成标准“与-或”表达式

$$F(A,B,C) = \overline{(A\bar{B} + B\bar{C}) \cdot \overline{AB}}$$

解　1：将函数表达式变换成“与-或”表达式。

$$F(A, B, C) = \overline{(A\bar{B} + B\bar{C}) \cdot \overline{AB}}$$

$$= \overline{A\bar{B} + B\bar{C}} + AB$$

$$= (\bar{A} + B)(\bar{B} + C) + AB$$

$$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A}C + BC + AB$$

代数转换法

2：把“与-或”式中非最小项的“与项”扩展成最小项

$$F(A,B,C)=\overline{A}\cdot\overline{B}(\overline{C}+C)+\overline{A}C(\overline{B}+B)+(\overline{A}+A)BC+AB(\overline{C}+C)$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}BC+\overline{A}BC+ABC+AB\overline{C}+ABC$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}BC+AB\overline{C}+ABC$$

$$=m_0+m_1+m_3+m_6+m_7$$

$$=\sum m(0,1,3,6,7)$$

代数转换法

□求标准“或-与”式

定理7

- 将函数表达式转换成一般“或-与”表达式
- 反复利用定理 $X=(X+Y)(X+\bar{Y})$ 把表达式中所有非最大项的“或项”扩展成最大项
- 当给出函数表达式已经是“或-与”表达式时，可直接进行第二步

代数转换法

例：将逻辑函数表达式 $F(A,B,C)=\overline{AB+\bar{A}C}+\bar{B}C$ 变换成标准“或-与”表达式。

解 1：将函数表达式变换成“或-与”表达式

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= \overline{AB+\bar{A}C}+\bar{B}C \\
&= \overline{AB}\cdot\overline{\bar{A}C}+\bar{B}C \\
&= (\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{C})+\bar{B}C \\
&= [(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{C})+\bar{B}][(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{C})+C] \\
&= (\bar{A}+\bar{B}+\bar{B})(A+\bar{C}+\bar{B})(\bar{A}+\bar{B}+C)\underbrace{(A+\bar{C}+C)}_{=1} \\
&= (\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)
\end{aligned}
$$

逻辑函数表达式的形式与变换

2. 将所得“或-与”表达中的非最大项扩展成最大项

$$F(A,B,C) = (\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$= (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\underline{(\overline{A}+\overline{B}+C)}(A+\overline{B}+\overline{C})\underline{(\overline{A}+\overline{B}+C)}$$

$$= (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$= M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$$

$$= \prod M(3,6,7)$$

逻辑函数表达式的变换

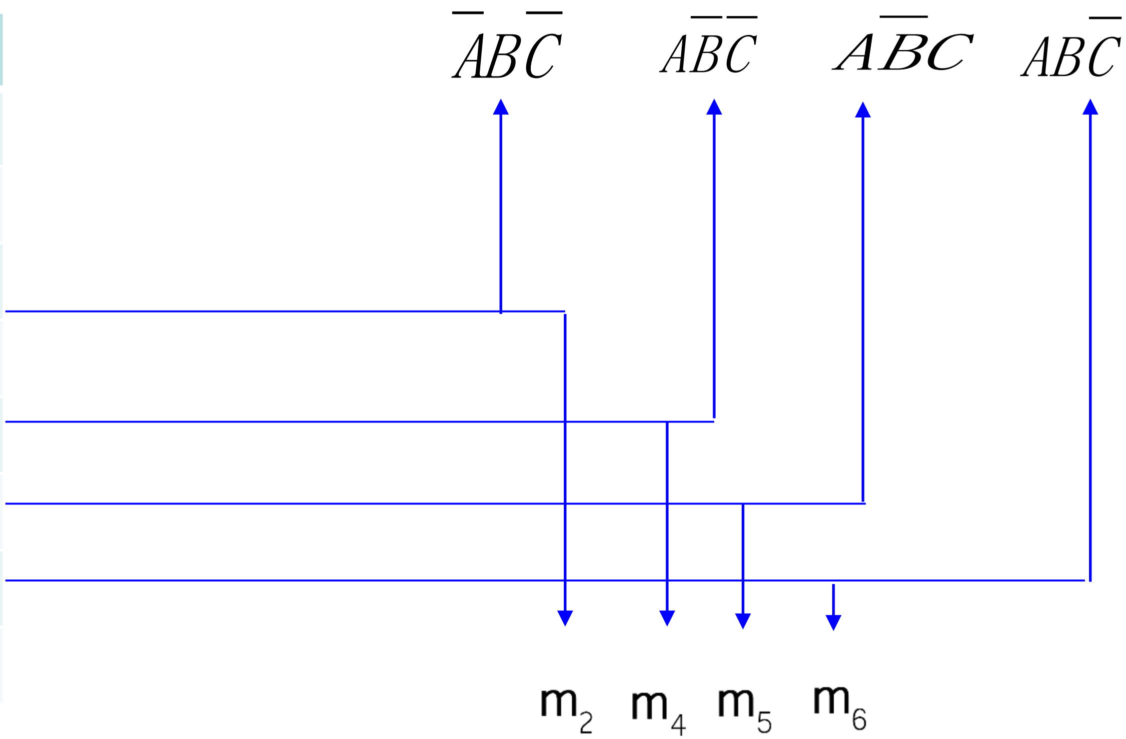
□ 真值表转换法

- 逻辑函数的最小项表达式与真值表具有一一对应的关系
- 假定函数F的真值表中有k组变量取值使F的值为1，其他变量取值下F的值为0，那么，函数F的最小项表达式由这k组变量取值对应的k个最小项相或组成
- 可以通过函数的真值表写出最小项表达式
- 标准“与-或” 式
  - 真值表上使函数值为1的变量取值组合对应的最小项相“或”,即可构成一个函数的标准“与-或”式

逻辑函数表达式的形式与变换

- **例：**将函数表达式$\mathrm{F(A, B, C)} = A\bar{B} + B\bar{C}$变换成标准"与-或"表达式。

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



逻辑函数表达式的形式与变换

例： 将函数表达式$F(A, B, C) = A\bar{B} + B\bar{C}$变换成标准“与-或”表达式。

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$F(A,B,C) = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}$$

$$= \sum m(2,4,5,6)$$

真值表转换法

◻ 求标准“或-与”式

- 逻辑函数的最大项表达式与真值表之间具有一一对应的关系
- 假定在函数F的真值表中有p组变量取值使F的值为0，其他变量取值下F的值为1，那么，函数F的最大项表达式由这p组变量取值对应的p个最大项“相与”组成

真值表转换法

例： 将函数表达式$F(\mathrm{A,B,C}) = \bar{A}C + A\bar{B}\bar{C}$表示成最大项表达式的形式。

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$M_0 \quad M_2 \quad M_5 \quad M_6 \quad M_7$

真值表转换法

例： 将函数表达式$F(\mathrm{A,B,C})=\bar{A}C+A\bar{B}\bar{C}$表示成最大项表达式的形式。

$$F(A,B,C)=\prod M(0,2,5,6,7)$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

逻辑函数表达式的形式与变换

- 函数的真值表与函数的两种标准表达式之间存在一一对应的关系，而任何一个逻辑函数的真值表是唯一的。可见，任何一个逻辑函数的两种标准形式也是唯一的
- 逻辑函数表达式的唯一性给我们分析和研究逻辑问题带来了很大的方便

提纲

1 逻辑代数的基本概念

2 逻辑代数的基本定理和规则

3 逻辑函数表达式的形式与变换

4 逻辑函数化简

逻辑函数表达式的化简

- 实现某一逻辑功能的逻辑电路的复杂性与描述该功能的逻辑表达式的复杂性直接相关
- 一般来说，逻辑函数表达式越简单，设计出来的相应逻辑电路也就越简单
- 为了降低系统成本、减小复杂度、提高可靠性，必须对逻辑函数进行化简

逻辑函数表达式的化简

- "与-或"表达式和"或-与"表达式可以很方便地转换成任何其他所要求的形式
- 从这两种基本形式出发讨论函数化简问题
  - 重点："与-或"表达式的化简
- 逻辑函数化简有3种常用方法
  - 代数化简法
  - 卡诺图化简法
  - 列表化简法

代数化简法

- 运用逻辑代数的公理、定理和规则对逻辑函数进行化简的方法
- 没有固定的步骤可以遵循
- 主要取决于对逻辑代数中公理、定理和规则的熟练掌握及灵活运用的程度

代数化简法

- “与-或”表达式的化简
  - 什么是最简“与-或”表达式
    - 表达式中的“与”项个数最少
    - 每个“与”项中的变量个数最少
    - 满足上述两个条件，相应逻辑电路中所需门的数量以及门的输入端个数均为最少，电路最经济

“与-或”表达式的化简

常用的化简方法

– 并项法：利用定理7中的$A\overline{B}+AB=A$，将两个“与”项合并成一个“与”项，合并后消去一个变量

例：$\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}$

$=\overline{A}B$

– 吸收法：利用定理3中$A+AB=A$，吸收多余的项

例：$\overline{A}B+\overline{A}B\overline{C}$

$=\overline{A}B$

“与-或”表达式的化简

□ 常用的化简方法

– 消去法：利用定理4中的$A+\overline{A}B=A+B$，消去多余变量

例：

$$AB+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}$$

$$=AB+(\overline{A}+\overline{B})\,\overline{C}$$

$$=AB+\overline{AB}\,\overline{C}$$

$$=AB+\overline{C}$$

– 配项法：利用公理4和公理5中的 $A\cdot 1=A$及$A+\overline{A}=1$，先从函数式中适当选择某些“与”项，配上其所缺的合适的变量，然后利用并项、吸收和消去等方法进行化简

“与-或”表达式的化简

常用的化简方法

– 例：

$$A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B$$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+(A+\overline{A})\overline{B}C+\overline{A}B(C+\overline{C})$$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}$$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}\,C$$

– 实际应用中遇到的逻辑函数往往比较复杂，化简时应灵活使用所学的公理、定理及规则，综合运用各种方法

"与-或"表达式的化简

- 例1 化简 $F=BC+D+\overline{D}\cdot(\overline{B}+\overline{C})\cdot(AD+B\overline{C})$

解: $F=BC+D+\overline{D}\cdot(\overline{B}+\overline{C})\cdot(AD+B\overline{C})$

$=BC+D+(\overline{B}+\overline{C})\cdot(AD+B\overline{C})$ 定理·4

$=BC+D+\overline{BC}\cdot(AD+B\overline{C})$ 定理6

$=BC+D+AD+B\overline{C}$ 定理3

$=B+D$

“与-或”表达式的化简

- 例2 化简 $F=AD+A\overline{D}+AB+\overline{A}C+BD+\overline{B}EF+DEF$

解: $F=AD+A\overline{D}+AB+\overline{A}C+BD+\overline{B}EF+DEF$

$=A(D+\overline{D})+AB+\overline{A}C+(BD+\overline{B}EF+DEF)$

$=A+AB+\overline{A}C+BD+\overline{B}EF$

$=A+\overline{A}C+BD+\overline{B}EF$

$=A+C+BD+\overline{B}EF$

“与-或”表达式的化简

- 例3 化简$F=AB+A\bar{C}+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}+ADE(F+G)$

解: $F=AB+A\bar{C}+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}+ADE(F+G)$

$$=A\overline{\bar{B}C}+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}+ADE(F+G)$$

$$=A+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}+ADE(F+G)$$

$$=A+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}$$

$$=A+\bar{B}C(D+\bar{D})+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}(C+\bar{C})$$

$$=A+\bar{B}CD+\boxed{\bar{B}C\bar{D}}+B\bar{C}+\bar{B}D+\boxed{B\bar{D}C}+B\bar{D}\,\bar{C}$$

$$=A+\bar{B}D+C\bar{D}+B\bar{C}$$

代数化简法

- “或-与”表达式的化简
  - 什么是最简“或-与”表达式
    - 表达式中的“或”项个数最少
    - 每个“或”项中的变量个数最少
  - 可直接运用公理、定理中的“或-与”形式，并综合运用前面介绍“与-或”表达式化简时提出的各种方法进行化简

“或-与”表达式的化简

- 例1 化简 $F=(A+B)\cdot(\overline{B}+C)\cdot(A+C+\overline{D})\cdot(A+C)$

解: $F=(A+B)\cdot(\overline{B}+C)\cdot(A+C+\overline{D})\cdot(A+C)$

$=(A+B)\cdot(\overline{B}+C)\cdot(A+C)$

$=(A+B)\cdot(\overline{B}+C)$

"或-与"表达式的化简

- 例2 化简 $F=\overline{\overline{A}(B+\overline{C})}\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$

解: $F=\overline{\overline{A}(B+\overline{C})}\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$

$=(A+\overline{B+\overline{C}})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(A+B+C)$

$=(A+\overline{B}C)\cdot(A+C)$

$=A+\overline{B}CC$

$=A+\overline{B}C$

$=(A+\overline{B})\cdot(A+C)$

“或-与”表达式的化简

- 两次对偶法
  - 对“或-与”表达式表示的函数F求对偶，得到“与-或”表达式F’
  - 求出F’的最简“与-或”表达式
  - 对F’再次求对偶，即可得到F的最简“或-与”表达式

“或-与”表达式的化简

- 例 化简 $F=(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)\cdot(B+C)\cdot(\overline{A}+C)$
  - 求F的对偶式F′

    $$F' = A\overline{B}+\overline{A}B+BC+\overline{A}C$$

  - 化简F′

    $$\begin{aligned} F' &= A\overline{B}+\overline{A}B+BC+\overline{A}C \\ &= A\overline{B}+\overline{A}B+(B+\overline{A})C \\ &= A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A\overline{B}}C \\ &= A\overline{B}+\overline{A}B+C \end{aligned}$$

  - 对F'求对偶, 得到F的最简“或-与”表达式

    $$F=(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)\cdot C$$

代数化简法

□ 优点

- 不受变量数目的约束
- 当对公理、定理和规则十分熟练时，化简比较方便

□ 缺点

- 没有一定的规律和步骤
- 技巧性很强
- 难以判断化简结果是否最简

逻辑函数表达式的化简

卡诺图化简法

- 简单、直观、容易掌握
- 卡诺图构成：一种平面方格图，每个小方格代表一个最小项，故又称为最小项方格图
- 卡诺图特点
  - n个变量的卡诺图由2^n个小方格构成
  - 几何图形上处在**相邻、相对、相重**位置的小方格所代表的最小项为相邻最小项
  - 卡诺图中最小项的排列方案不是唯一的

卡诺图化简法

■ 2变量、3变量函数的卡诺图

B \ A	0	1
0	m_0	m_2
1	m_1	m_3

(a)

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

(b)

卡诺图化简法

◻4变量函数的卡诺图

CD \ AB	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

卡诺图化简法

- 在n个变量的卡诺图中，能从图形上直观便地找到每个最小项的n个相邻最小项。

CD \ AB	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

相对相邻

卡诺图化简法

□重叠相邻

DE \ ABC	000	001	011	010	100	101	111	110
00	0	4	12	8	16	20	28	24
01	1	5	13	9	17	21	29	25
11	**3**	7	15	11	19	23	31	27
10	2	6	14	10	18	22	30	26

卡诺图化简法

卡诺图的特点

- n个变量的卡诺图由2^n个小方格组成，每个小方格代表一个最小项
- 卡诺图上处在相邻、相对、相重位置的小方格所代表的最小项为相邻最小项

卡诺图化简法

- 卡诺图的性质：可以从图形上直观地找出相邻最小项合并
  - 合并的理论依据是并项定理$A\bar{B}+AB=A$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01		m_5	m_{13}	
11		m_7	m_{15}	
10				

$$\underline{\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD}+\underline{AB\bar{C}D+ABCD}$$

$$\underline{\bar{A}BD}+\underline{ABD}$$

$$BD$$

卡诺图化简法

◻ 卡诺图化简的基本原理

- 通过把卡诺图上表征相邻最小项的相邻小方格“圈”在一起进行合并，达到用一个简单“与”项代替若干最小项的目的
- **卡诺圈**:用来包围那些能由一个简单“与”项代替的若干最小项的“圈”

卡诺图化简法

- 标准“与-或”表达式在卡诺图上的表示
  - 在卡诺图上找出和表达式中最小项对应的小方格填上1，其余小方格填上0
  - **1方格:**卡诺图上填1的小方格
  - **0方格:**卡诺图上填0的小方格。0方格有时用空格表示
  - d**方格:**卡诺图上填d的小方格，表示逻辑函数的无关项

卡诺图化简法

□ 例：3变量函数$F(A,B,C)=\sum m(1,2,3,7)$的卡诺图

C \ AB	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	0

$F(A,B,C)=\sum m(1,2,3,7)$的卡诺图

卡诺图化简法

□一般“与-或”表达式的卡诺图

- 运用配项法，将一般“与-或”表达式转换成标准“与-或”表达式
- 在卡诺图上找出和表达式中最小项对应的小方格填上1，其余小方格填上0

卡诺图化简法

- 例：函数$F(A,B,C,D)=\overline{A}B+\overline{C}D+BC\overline{D}$的卡诺图

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}B+\overline{C}D+BC\overline{D}$$
$$=\overline{A}B\overline{C}\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}BCD$$
$$+\overline{A}\overline{B}\overline{C}D+A\overline{B}\overline{C}D+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}$$
$$=\sum m(1,4,5,6,7,9,13,14)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	1	0	0
10	0	1	1	0

卡诺图化简法

一般“与-或”表达式的卡诺图

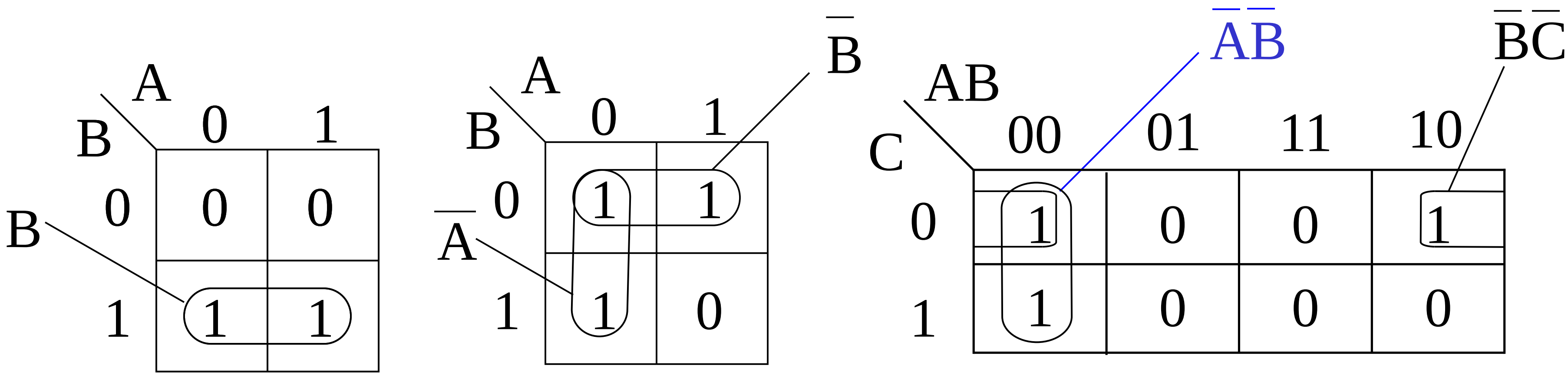
- 当逻辑函数为一般“与-或”表达式时，可根据“与”的公共性和“或”的叠加性作出相应卡诺图
- 例：函数$F(A,B,C,D)=AB+CD+\overline{A}\overline{B}C$的卡诺图

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	0	1	0

卡诺图化简法

□ 卡诺图上最小项的合并规律

– 两个小方格相邻, 或处于某行(列)两端时，所代表的最小项可以合并，合并后可消去一个变量

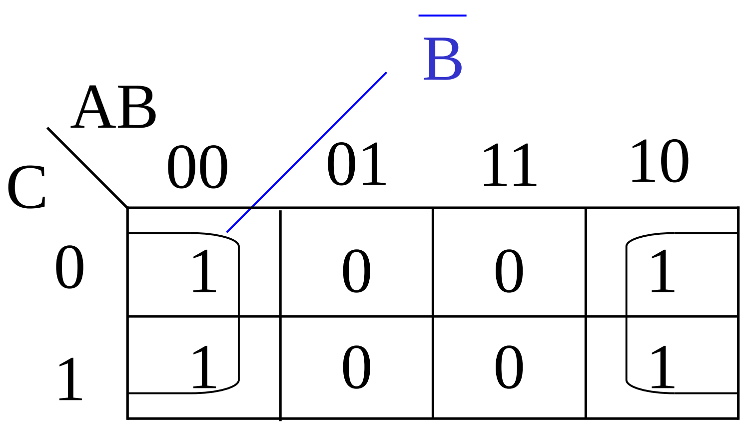


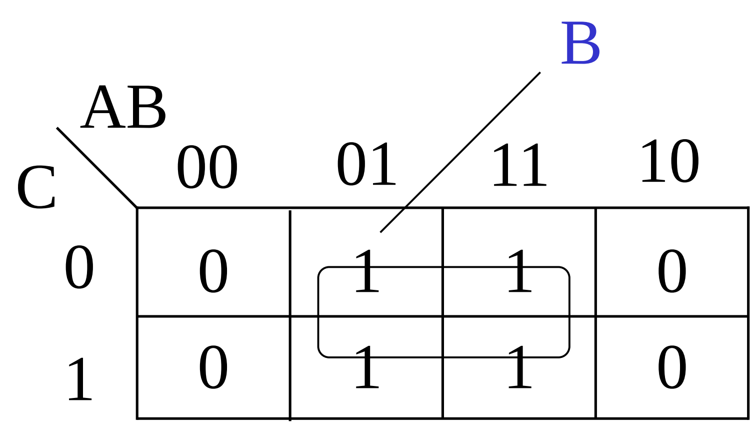
两个相邻最小项合并的情况

卡诺图化简法

卡诺图上最小项的合并规律

– 四个小方格组成一个大方格、或组成一行（列）、或处于相邻两行（列）的两端、或处于四角时，所的表的最小项可以合并，合并后可消去两个变量





卡诺图化简法

$\bar{B}\bar{D}$　BD

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

$\bar{B}D$　$B\bar{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

$\bar{A}B$　CD

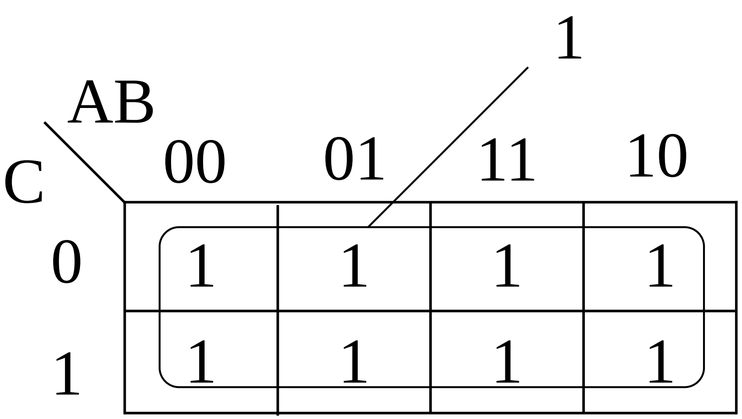
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

四个相邻最小项合并的几种情况

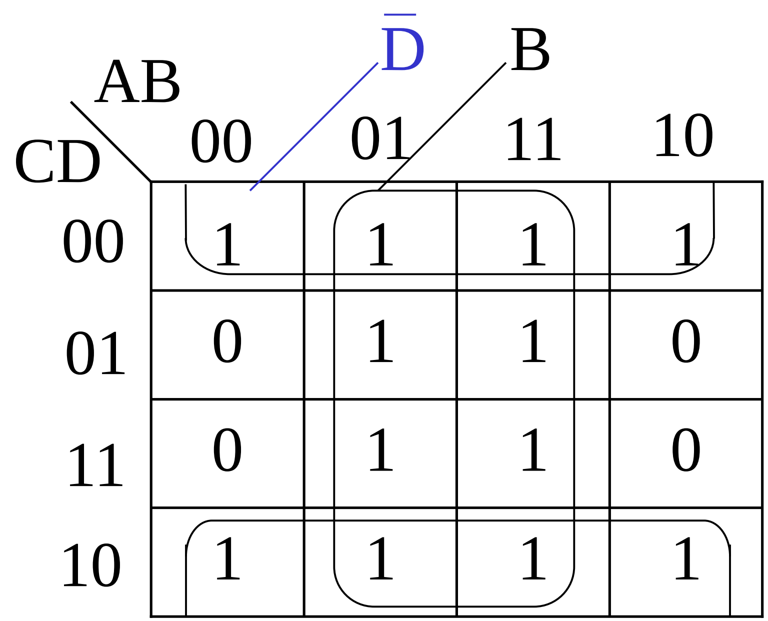
卡诺图化简法

◻ 卡诺图上最小项的合并规律

– 八个小方格组成一个大方格、或组成相邻的两行(列)、或处于两个边行(列)时，所代表的最小项可以合并，合并后可消去三个变量



(a)



(b)

卡诺图化简法

- n个变量卡诺图中最小项的合并规律
  - 卡诺圈中小方格的个数必须为2^m个，m为小于或等于n的整数
  - 卡诺圈中的2^m个小方格含有m个不同变量，(n-m)个相同变量
  - 卡诺圈中的2^m个小方格对应的最小项可用(n-m)个变量的“与”项表示，该“与”项由这些最小项中的相同变量构成
  - 当m = n 时，卡诺圈包围了整个卡诺图，可用1表示，即n个变量的全部最小项之和为1

卡诺图化简法

□ 卡诺图化简中的几个定义

- 蕴涵项：在函数的“与-或”表达式中，每个“与”项被称为该函数的蕴涵项(Implicant)
- 在函数卡诺图中，任何一个1方格所对应的最小项或者卡诺圈中的2^m个1方格所对应的“与”项都是函数的蕴涵项

卡诺图化简法

卡诺图化简中的几个定义

- 质蕴涵项：若函数的一个蕴涵项不是该函数中其他蕴涵项的子集，则此蕴涵项称为质蕴涵项(Prime Implicant)，简称为质项。
- 在函数卡诺图中，按照最小项合并规律，如果某个卡诺圈不可能被其他更大的卡诺圈包含，那么，该卡诺圈所对应的“与”项为质蕴涵项

卡诺图化简法

◻ 卡诺图化简中的几个定义

- 必要质蕴涵项：若函数的一个质蕴涵项包含有不被函数的其他任何质蕴涵项所包含的最小项，则此质蕴涵项被称为必要质蕴涵项(Essential Prime Implicant)，简称为必要质项。
- 在函数卡诺图中，若某个卡诺圈包含了不可能被任何其他卡诺圈包含的1方格，那么，该卡诺圈所对应的“与”项为必要质蕴涵项

卡诺图化简法

- 求逻辑函数最简“与-或”表达式的一般步骤
  - 作出函数的卡诺图
  - 在卡诺图上圈出函数的全部质蕴涵项
  - 从全部质蕴涵项中找出所有必要质蕴涵项
  - 求函数的最简质蕴涵项集

  当函数的所有必要质蕴涵项尚不能覆盖卡诺图上的所有1方格时，则从剩余质蕴涵项中找出最简的所需质蕴涵项，使它和必要质蕴涵项一起构成函数的最小覆盖

卡诺图化简法

- 例1：函数F(A,B,C,D)=∑m(0,3,5,6,7,10,11,13,15)的最简“与-或”表达式

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	1

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BC+\overline{B}C+BD+CD$$

卡诺图化简法

- 例2：求函数$F(A,B,C,D)=\sum m(2,3,6,7,8,10,12)$的的最简“与-或”表达式

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01				
11	1	1		
10	1	1		1

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}C+A\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{D}$$

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}C+A\overline{C}\overline{D}+\overline{B}C\overline{D}$$

华中科技大学 Huazhong University of Science & Technology

卡诺图化简法

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}C+A\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{D}$$

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}C+A\overline{C}\overline{D}+\overline{B}C\overline{D}$$

- 两个“与-或”式的复杂程度相同。
- 一个函数的最简“与-或”表达式不一定是唯一的

卡诺图化简法

□ 卡诺图化简的原则

- 在覆盖函数中所有最小项的前提下，卡诺圈的个数应达到最少
- 在满足合并规律的前题下卡诺圈应达到最大
- 根据合并的需要，每个最小项可以被多个卡诺圈包围

卡诺图化简法

- 求逻辑函数最简“或–与”表达式的一般步骤
  - 当给定逻辑函数为“与—或”表达式或标准“与—或”表达式时采用“两次取反法”
    - 作出F的卡诺图，求出反函数$\bar{F}$的最简“与-或”表达式(合并卡诺图上的0方格)
    - 对$\bar{F}$的最简“与-或”表达式取反，得到函数F的最简“或-与”表达式

卡诺图化简法

- 例：函数$F(A,B,C,D)=\sum m(0,1,2,5,8,9,10)$的最简 “或-与” 表达式

解

$B\overline{D}$

AB

CD

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$$\overline{F}=AB+CD+B\overline{D}$$

$$F=\overline{\overline{F}}=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})(\overline{B}+D)$$

卡诺图化简法

- 求逻辑函数最简“或-与”表达式的一般步骤
  - 当给定逻辑函数为“或—与”表达式或标准“或—与”表达式时，通常采用“两次对偶法”
    - 作出F对偶式F′的卡诺图，并求出F′的最简“与-或”表达式
    - 对F′的最简“与-或”表达式取对偶，得到F的最简“或-与”表达式

卡诺图化简法

- 例：求函数F(A,B,C,D)= ∏ M(2,4,5,10)的最简“或-与”表达式

  解：1. 求对偶式F′

$$F(A,B,C,D)=\prod M(2,4,5,10)$$

$$=(A+B+\overline{C}+D)\cdot(A+\overline{B}+C+D)\cdot$$

$$(A+\overline{B}+C+\overline{D})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C}+D)$$

$$F'(A,B,C,D)=AB\overline{C}D+A\overline{B}CD+A\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D$$

$$=\sum m(5,10,11,13)$$

卡诺图化简法

2. 进行卡诺图化简

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	0	1
10	0	0	0	1

$$F' = A\bar{B}C + B\bar{C}D$$

3. 对F′的最简“与-或”表达式取对偶

$$F=(F')'=(A+\bar{B}+C)\cdot(B+\bar{C}+D)$$

卡诺图化简法

□例3：求出函数的最简**“与-或”**表达式以及最简**“或-与”**表达式

$$F(A,B,C,D)=\sum m(0,2,5,6,8,10,15)+\sum d(1,4,7,11,13)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	d		1
01	d	1	d	
11		d	1	d
10	1	1		1

$\bar{F}=\bar{B}D+AB\bar{D}$

$F=(B+\bar{D})(\bar{A}+\bar{B}+D)$

卡诺图化简法

- 卡诺图化简逻辑函数具有方便、直观、容易掌握等优点
- 但受到变量个数的约束，当变量个数大于6时，画图以及对图形的识别都变得相当复杂
- 为了克服卡诺图的不足，引入了另一种化简方法
  - 列表化简法

華中科技大學

数字电路与逻辑设计

Thank You!