Einführung in die Informatik 2 - Repetitorium WS 2016/17
Technische Universität München

Kevin Kappelmann 21. März 2017

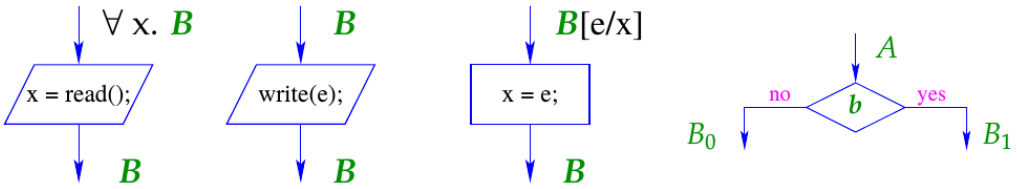
wp-Kalkül

1 Theorie

Das wp-Kalkül dient zur Verifikation der Semantik von Programmen und fällt in den Bereich der axiomatischen Semantik. Es werden Schlussregeln (Axiome) festgelegt, mit welchen sich Aussagen zu Programmpunkten in Abhängigkeit von nachfolgenden Operationen berechnen lassen. Die Verifikation von Programmen ist ein sehr wichtiges Themengebiet der Informatik. Die größte Fehlerquelle der Welt ist der Mensch und somit sollten wir auch Programme, die von Menschen geschrieben sind, mit Skepsis betrachten und sie verifizieren, anstatt ihnen blind zu vertrauen, denn das hat schon zu oft in der Geschichte zu unschönen Ereignissen geführt[1].
Die Idee des wp-Kalküls ist folgende:

1. Annotiere das gewünschte Verhalten des Programmes im Kontrollflussgraphens des Programmes an den geeigneten Stellen (jeweils an den Kanten). Immer, wenn das Programm an den jeweiligen Punkt ankommt, muss die Annotation/Zusicherung erfüllt sein.
2. Beginne vom Stopknoten und berechne durch die vom wp-Kalkül gegebenen Schlussregeln die Vorbedingung zur aktuellen Annotation.
3. Verifiziere, ob die annotierte und die berechnete Annotation zueinander konsistent sind. Was "konsistent" hier bedeutet, erläutern wir noch im Laufe dieses Blattes im Fallbeispiel.
4. Wiederhole diesen Schritt, bis zum Startknoten und überprüfe somit das ganze Programm.

Diese Vorgehensweise ist einfach, solange keine Schleifen im Spiel sind. Diese erschweren, wie wir später sehen werden, das Leben. Wir betrachten nun die Schlussregeln des wp-Kalküls aus der Vorlesung.



$$
\begin{aligned}
\mathbf{WP}[\![\texttt{;}]\!](B) &\equiv B \\
\mathbf{WP}[\![\texttt{x = e;}]\!](B) &\equiv B[e/x] \\
\mathbf{WP}[\![\texttt{x = read();}]\!](B) &\equiv \forall x.\, B \\
\mathbf{WP}[\![\texttt{write(e);}]\!](B) &\equiv B
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{WP}[\![b]\!]\,(B_0, B_1) &\equiv ((\neg b) \Rightarrow B_0) \wedge (b \Rightarrow B_1) \\
&\equiv (\neg b \wedge B_0) \vee (b \wedge B_1)
\end{aligned}
$$

Quelle: VL-Folien von Prof. Seidl

B stellt dabei stets einen logischen Ausdruck dar. $B[e/x]$ bedeutet "ersetze jedes Vorkommen von x in B mit e". Die Regeln sollten einen (hoffentlich) recht intuitiv vorkommen.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_software_bugs

Beispiel 1.1.

- $(i > 41 \wedge j = -1)[k/i] \equiv (k > 41 \wedge j = -1)$.
- $(i > 41 \wedge j = -1)[j/i] \equiv (j > 41 \wedge j = -1) \equiv false$.
- $0[i/j] = 0$
- $WP[\![(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1]\!](x = read();) \equiv \forall x.(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Wie bereits gesagt, stellen Schleifen ein Problem dar, da diese uns hindern sequentiell vom Stop- zum Startknoten unsere Annotation zu verifizieren. Wir könnten ja theoretische öfter die Schleife durchlaufen und müssen dies bei unserer Verifikation berücksichtigen. Um dies zu tun, müssen wir eine Zusicherung I am Schleifenkopf annotieren, die vor jedem Eintritt der Schleife, als auch vor dem Verlassen des Schleifenabschnitts gelten muss. Die Zusicherung I nennt man dann **Schleifeninvariante**.
Damit nicht genug, mit Schleifen kommt noch ein zweites Problem auf uns zu: Terminierung. Vielleicht kommen wir am Stopknoten unseres Programmes an, sondern verlieren uns in einer sich unaufhaltsam wirrenden Schleife? Wie können wir sicher gehen, dass dies nicht passiert? Wir geben wieder ein Vorgehensweise an:

- Für jede Schleife, füge eine Messgröße r in das Programm ein, die vor dem ersten Antreffen der Schleife initialisiert wird.
- Bei jedem Betreten der Schleife, stelle sicher, dass r größer als eine von dir festgelegte untere Schranke bleibt (meist $r \geq 0$).
- Vor dem Verlassen der Schleife, stelle sicher, dass r strikt kleiner gesetzt wird.

2 Fallbeispiel

2.1 Ente, Ente, Ente, Gauß!

Wir betrachten folgendes Programm

```
1: x ← read()
2: i ← 0
3: s ← i
4: while i ≤ x do
5: |   s ← s + i
6: |   i ← i + 1
7: write(s)
```

und zeichnen den Kontrollflussgraphen (siehe Abbildung 1).

2.1.1 Semantische Analyse: Was berechnet das Programm?

Diejenigen, die sich das Grundlagenblatt über Induktion gut durchgelesen haben bzw. ein gutes Gespür haben, bemerken sofort, was dieses Programm berechnet. Wir vermuten, dass am Ende des Programmes $s = \frac{x*(x+1)}{2}$, falls $x \geq 0$, gilt (wir werden sogar sehen, dass auch der Fall $x = -1$ funktioniert). Der Fall $x < -1$ liefert allerdings falsche Ergebnisse. Wem die Formel für s jetzt merkwürdig vorkommt, der sollte sich kurz genanntes Blatt durchlesen.

Beweis. Wir setzen also zunächst $G \coloneqq s = \frac{x*(x+1)}{2}$ und berechnen dann F:

$$WP[\![write(s);]\!](G) \equiv G =: F$$

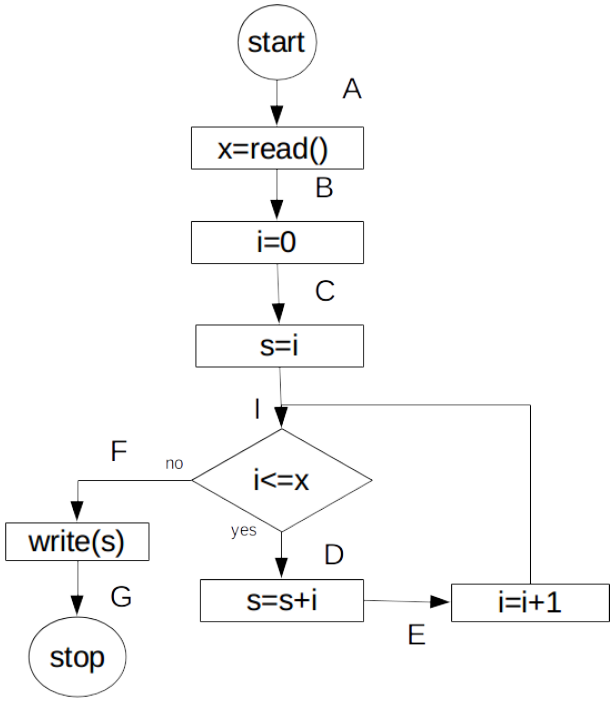


Abbildung 1: Kontrollflussgraph des Algorithmus

Jetzt kommt der schwierige Teil: Wir sind bei der Schleife angelangt und können nun nicht einfach mehr sequentiell unsere Zusicherungen berechnen, sondern müssen eine geeignete Schleifeninvariante I finden. Um dies zu tun, gibt es ein paar Tipps:

- Die Schleifeninvariante hängt im Normalfall irgendwie von der Laufvariable ab.
- Oft hängt die Invariante stark mit der Aussage am "Ausstiegspunkt" (hier E) zusammen und beschreibt diesen in Abhängigkeit der Laufvariable (hier i).
- Es ist besser, eine gültige Aussage zu viel in die Invariante zu packen, als zu wenig (z.B. scheint hier $i \geq 0$ vielleicht zunächst überflüssig; manchmal ist dies aber eine entscheidende Notwendigkeit in der Verifikation).
- Wenn man keine gute Vermutung hat, hilft es oft sich den Programmablauf (d.h. den Verlauf der Variablenwerte) für eine Beispieleingabe aufzuschreiben.

Wir tun so, als hätten wir keine gute Vermutung und schreiben uns den Programmablauf für x=3 auf (links strikt nach VL, rechts verkürzt tabellarisch nur am Programmpunkt I):

$$
\begin{aligned}
\pi = &((A, \{x \mapsto \top, i \mapsto \top, s \mapsto \top\}),\\
&(B, \{x \mapsto \top, i \mapsto \top, s \mapsto \top\}),\\
&(C, \{x \mapsto 3, i \mapsto 0, s \mapsto \top\}),\\
&(I, \{x \mapsto 3, i \mapsto 0, s \mapsto 0\}),\\
&(D, \{x \mapsto 3, i \mapsto 0, s \mapsto 0\}),\\
&(E, \{x \mapsto 3, i \mapsto 0, s \mapsto 0\}),\\
&(I, \{x \mapsto 3, i \mapsto 1, s \mapsto 0\}),\\
&(D, \{x \mapsto 3, i \mapsto 1, s \mapsto 0\}),\\
&(E, \{x \mapsto 3, i \mapsto 1, s \mapsto 1\}),\\
&(I, \{x \mapsto 3, i \mapsto 2, s \mapsto 1\}),\\
&(D, \{x \mapsto 3, i \mapsto 2, s \mapsto 1\}),\\
&(E, \{x \mapsto 3, i \mapsto 2, s \mapsto 3\}),\\
&(I, \{x \mapsto 3, i \mapsto 3, s \mapsto 3\}),\\
&(D, \{x \mapsto 3, i \mapsto 3, s \mapsto 3\}),\\
&(E, \{x \mapsto 3, i \mapsto 3, s \mapsto 6\}),\\
&(I, \{x \mapsto 3, i \mapsto 4, s \mapsto 6\}),\\
&(F, \{x \mapsto 3, i \mapsto 4, s \mapsto 6\}),\\
&(G, \{x \mapsto 3, i \mapsto 4, s \mapsto 6\}))
\end{aligned}
$$

#Iteration	x	i	s
0	3	0	0
1	3	1	0
2	3	2	1
3	3	3	3
4	3	4	6

Vor allem die Zustände am Punkt I sind für uns interessant. Wir erkennen, dass zum Punkt I stets $s = \sum_{k=0}^{i-1} k$, also auch $s = 0.5 * (i-1) * (i)$ gilt (Bemerkung: $\sum_{k=0}^{-1} k = 0$, da 0 das neutrale Element der Addition ist).
Mit dieser Erkenntnis und der Berücksichtigung der weiteren Tipps, setzen wir

$$I \coloneqq s = \frac{(i-1) * i}{2} \wedge 0 \leq i \leq x + 1$$

Nun gilt es, unsere Invariante zu verifizieren. Hierfür beginnen wir von I und laufen rückwärts einmal die ganze Schleife entlang.

$$
\begin{aligned}
WP[\![i = i + 1;]\!](I) &\equiv s = \frac{i * (i+1)}{2} \wedge 0 \leq i + 1 \leq x + 1\\
&\equiv s = \frac{i * (i+1)}{2} \wedge -1 \leq i \leq x\\
&\Leftarrow s = \frac{i * (i+1)}{2} \wedge 0 \leq i \leq x =: E
\end{aligned}
$$

Hier haben wir im letzten Schritt unsere Zusicherung verstärkt, d.h. strikter gemacht. Dies kann manchmal hilfreich sein, um Terme zu vereinfachen. Wir haben es hier gemacht, da wir uns sicher sind, dass der Fall $i = -1$ nie auftritt und werfen daher diese Information weg. Wir können unsere Annahmen immer strikter machen als die berechnete Vorbedingung. Wir müssen dabei immer sicher gehen, dass die Implikation gültig ist, d.h. in unserem Fall muss immer, wenn E erfüllt ist, auch die ursprünglich berechnete Vorbedingung erfüllt sein (vgl. Blatt "Grundlagen der Logik"). Wenn unsere Annotation die berechnete Zusicherung impliziert, nennen wir die Annotation **konsistent**.

Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned}
WP[\![s = s + i;]\!](E) &\equiv s + i = \frac{i * (i+1)}{2} \wedge 0 \leq i \leq x \\
\text{(Gaußsche Summenformel, } 0 \leq i) &\equiv s = \frac{(i-1) * i}{2} \wedge 0 \leq i \leq x =: D \\
WP[\![i \leq x;]\!](F, D) &\equiv (i > x \wedge s = \frac{x * (x+1)}{2}) \vee (s = \frac{(i-1) * i)}{2} \wedge 0 \leq i \leq x) \\
&\Leftarrow (i = x + 1 \wedge s = \frac{x * (x+1)}{2}) \vee (s = \frac{(i-1) * i}{2} \wedge 0 \leq i \leq x) \\
&\equiv (i = x + 1 \wedge s = \frac{(i-1) * i}{2}) \vee (s = \frac{(i-1) * i}{2} \wedge 0 \leq i \leq x) \\
&\equiv s = \frac{(i-1) * i}{2} \wedge (i = x + 1 \vee 0 \leq i \leq x) \\
&\equiv s = \frac{(i-1) * i}{2} \wedge 0 \leq i \leq x + 1 \equiv I
\end{aligned}$$

Unsere Schleife ist also lokal konsistent annotiert! Bemerke, wie wir schrittweise die beiden Oder-Bedingungen auf eine gemeinsame Form gebracht haben, um dann mit Distributivität die Gemeinsamkeit auszuklammern und so schrittweise sich der Invariante I zu nähern. Jetzt sind wir fast fertig, wir müssen nur noch sequentiell zum Start zurückrechnen.

$$\begin{aligned}
WP[\![s = i;]\!](I) &\equiv i = \frac{(i-1) * i}{2} \wedge 0 \leq i \leq x + 1 =: C \\
WP[\![i = 0;]\!](C) &\equiv 0 = \frac{(0-1) * 0}{2} \wedge 0 \leq x + 1 := B \\
WP[\![x = read();]\!](B) &\equiv \forall x.\ 0 \leq x + 1 \equiv \forall x.\ -1 \leq x =: A
\end{aligned}$$

□

Wir haben somit bewiesen, dass alle Annotationen lokal konsistent sind, falls $-1 \leq x$ zu Start des Programmes gilt, d.h. wir müssten zum Start des Programmes sicher stellen, dass $-1 \leq x$ gilt, damit das Programm korrekt wie erwartet die Summe bis x berechnet. Für $x < -1$ gelten gelten die Zusicherungen nicht.

2.1.2 Lieber ein Ende mit Schrecken als ein Schrecken ohne Ende

Wir betrachten nun ein etwas modifizierte Programm, dessen Terminierung wir beweisen wollen

```
1: i ← 0
2: s ← i
3: while x < −1 || i ≤ x do
4: |   s ← s + i
5: |   i ← i + 1
6: write(s)
```

Das Programm berechnet offensichtlich erneut die Summe bis x, allerdings verlaufen wir uns im Fall $x < -1$ in einer Endlosschleife. Wir wollen nun zeigen, dass das Programm für $x \geq -1$ terminiert.

Beweis. Zunächst fügen wir die eine Variable r in unser Programm ein, die wir für den Terminierungsbeweis benötigen. Was das Programm berechnet, ist uns für den Terminierungsbeweis egal, das haben wir schließlich schon in der vorherigen (leicht modifizierten) Aufgabe bewiesen. Uns ist nur wichtig, dass die Programmpunkte F und G erreichbar sind und wir setzen deshalb möglichst einfach $F := true =: G$. Achtung: $F := false =: G$ wäre falsch. Wird an einem Punkt false annotiert und dessen Konsistenz bewiesen, muss der Punkt unerreichbar sein. Als Schleifeninvariante setzen wir

$$I := r = x - i \wedge 0 \leq i \leq x + 1$$

Die Größe von s ist für die Terminierung irrelevant.

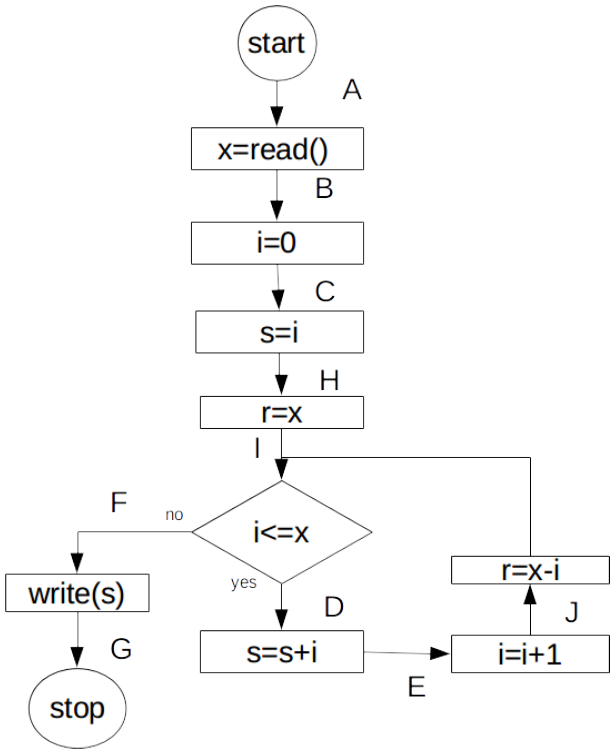


Abbildung 2: Modifizierter Kontrollflussgraph für Terminierungsbeweis

Wir überprüfen die Konsistenz

$$\begin{aligned} WP[\![r = x - i;]\!](I) &\equiv x - i = x - i \wedge 0 \leq i \leq x + 1 \\ &\equiv 0 \leq i \leq x + 1 \\ &\Leftarrow r = x - i + 1 \wedge 0 \leq i \leq x + 1 =: J \end{aligned}$$

Die letzte Implikation war notwendig, damit wir zusichern, dass r strikt kleiner wird (d.h. $J \Rightarrow r > x - i$).

$$\begin{aligned} WP[\![i = i + 1;]\!](J) &\equiv r = x - (i + 1) + 1 \wedge 0 \leq i + 1 \leq x + 1 \\ &\equiv r = x - i \wedge -1 \leq i \leq x \\ &\Leftarrow r = x - i \wedge 0 \leq i \leq x =: E \\ WP[\![s = s + i;]\!](E) &\equiv E =: D \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $D \Rightarrow r \geq 0$, somit haben wir eine untere Grenze für r bei Betreten der Schleife. Zusammen mit J folgt, dass die Schleife nur endlich oft durchlaufen werden kann, vorausgesetzt, unsere Schleifeninvariante ist lokal konsistent. Wir überprüfen den letzten Schritt der Schleife

$$\begin{aligned} WP[\![x < -1 \;||\; i \leq x;]\!](F, E) &\equiv (x \geq -1 \wedge i > x) \vee (r = x - i \wedge 0 \leq x \wedge 0 \leq i \leq x) \\ &\Leftarrow (-1 \leq x \wedge x < i \wedge r = x - i) \vee (r = x - i \wedge 0 \leq i \leq x) \\ &\Leftarrow r = x - i \wedge (-1 \leq x \wedge i = x + 1) \vee (0 \leq i \leq x) \\ &\Leftarrow r = x - i \wedge 0 \leq i \wedge (-1 \leq x \wedge i = x + 1) \vee (i \leq x) \\ &\Leftarrow r = x - i \wedge 0 \leq i \leq x + 1 \equiv I \end{aligned}$$

Die Schleife ist also lokal konsistent annotiert, wir bewegen uns Richtung Startknoten

$$\begin{aligned} WP[\![r = x;]\!](I) &\equiv x - i = x - i \land 0 \leq i \leq x + 1 \\ &\equiv 0 \leq i \leq x + 1 =: H \\ WP[\![s = i;]\!](H) &\equiv H =: C \\ WP[\![i = 0;]\!](C) &\equiv 0 \leq x + 1 =: B \end{aligned}$$

Das Programm terminiert also, falls $0 \leq x + 1$ gilt. □

3 Übungen

Semester 2016/17

- Blatt 2: Aufgabe 2, 3, 6, 7
- Blatt 3: Aufgabe 1, 2, 3, (4)
- Blatt 4: Aufgabe 1, 2, 4, (5)

Semester 2015/16

- Blatt 4: Aufgabe 1, 2

Semester 2008/09

- Blatt 2: Aufgabe 4

Von Kevin (Lösungen am Ende des Blatts)

1. Ordnen Sie die folgenden Zusicherungen mittels Implikationen und Äquivalenzen.
   - $i = a$
   - $i = a \land b \neq c \land i - 2 * a = -9$
   - $i = 9 \land i = a \land c \neq b$
   - $b = 42 \land c = 33 \land a = b - c \land i = 9$
   - $i = a \lor (a = 9 \land c > b)$
   - $i = a \lor a > a$
2. Gegeben folgendes Programm

```
1: while x ≤ 0 do
2: |   x ← x * x + 2 * x
```

   Welche Startzusicherungen sind hinreichend für die Zusicherung $x > 1$ am Ende des Programms?

   (a) $x = 0$
   (b) $x > 0$
   (c) $false$
   (d) $x < -2$
   (e) $x - 1 \geq 1$
   (f) $true$
   (g) $x > x * x \land x \in [2, 100]$
   (h) $x \leq 0$

Lösungen:
1. $(b = 42 \wedge c = 33 \wedge a = b - c \wedge i = 9) \Rightarrow (i = 9 \wedge i = a \wedge c \neq b) \equiv (i = a \wedge b \neq c \wedge i - 2 * a = -9)$
$\Rightarrow (i = a) \equiv (i = a \vee a > a) \Rightarrow (i = a \vee (a = 9 \wedge c > b))$
2. $(a), (c), (d), (e), (g), (h)$