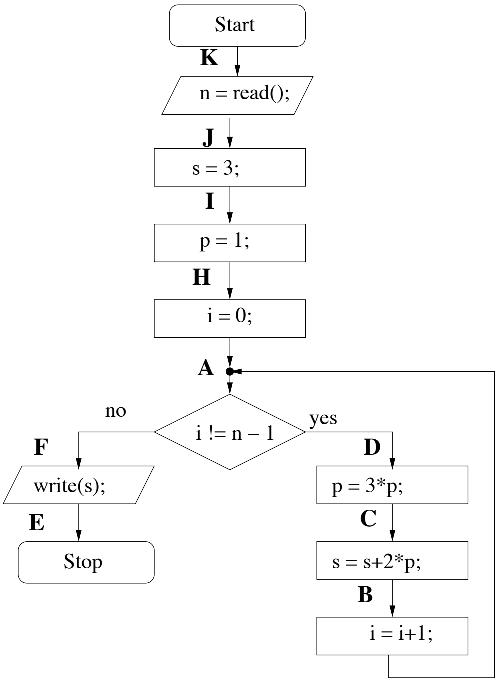
Einführung in die Informatik 2

Prof. Dr. Seidl, J. Kranz, N. Hartmann J. Brunner WS 2016/17

Übungsblatt 3 Abgabefrist: 14.11.2016

Aufgabe 3.1 (P) Eine alte, vereinfachte Klausuraufgabe

Gegeben sei folgendes Kontrollflussdiagramm:



1. Bestimmen Sie alle Zustände, die angenommen werden, falls die Zahl 3 eingegeben wird.
2. Zeigen Sie, dass am Ende des Programms die Zusicherung $\mathtt{s} = 3^{\mathtt{n}}$ stets erfüllt ist.

Hinweis: Als Hilfestellung sei Ihnen folgende Rechenregel gegeben:

$$3^{n+1} = 1 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} 3^i, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

Lösungsvorschlag 3.1

1. Wir nahmen an, dass im Punkt K mit dem Zustand $\{\mathtt{n} \mapsto x_1, \mathtt{s} \mapsto x_2, \mathtt{p} \mapsto x_3, \mathtt{i} \mapsto x_4\}$ gestartet wird (wobei $x_i \in \mathbb{Z}$ beliebig für $i = 1, \ldots, 4$). Unter der Annahme, dass 3 eingelesen wird, wird folgender Pfad durchlaufen:

$$
\begin{array}{rlllll}
\pi = & (\mathtt{K}, & \{\mathtt{n} \mapsto x_1, & \mathtt{s} \mapsto x_2, & \mathtt{p} \mapsto x_3, & \mathtt{i} \mapsto x_4\}) \quad \mathtt{n} = \mathtt{read}(); \\
& (\mathtt{J}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto x_2, & \mathtt{p} \mapsto x_3, & \mathtt{i} \mapsto x_4\}) \quad \mathtt{s} = 3; \\
& (\mathtt{I}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 3, & \mathtt{p} \mapsto x_3, & \mathtt{i} \mapsto x_4\}) \quad \mathtt{p} = 1; \\
& (\mathtt{H}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 3, & \mathtt{p} \mapsto 1, & \mathtt{i} \mapsto x_4\}) \quad \mathtt{i} = 0; \\
& (\mathtt{A}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 3, & \mathtt{p} \mapsto 1, & \mathtt{i} \mapsto 0\}) \quad \mathtt{i}! = \mathtt{n} - 1 \\
& (\mathtt{D}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 3, & \mathtt{p} \mapsto 1, & \mathtt{i} \mapsto 0\}) \quad \mathtt{p} = 3 * \mathtt{p}; \\
& (\mathtt{C}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 3, & \mathtt{p} \mapsto 3, & \mathtt{i} \mapsto 0\}) \quad \mathtt{s} = \mathtt{s} + 2 * \mathtt{p}; \\
& (\mathtt{B}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 9, & \mathtt{p} \mapsto 3, & \mathtt{i} \mapsto 0\}) \quad \mathtt{i} = \mathtt{i} + 1; \\
& (\mathtt{A}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 9, & \mathtt{p} \mapsto 3, & \mathtt{i} \mapsto 1\}) \quad \mathtt{i}! = \mathtt{n} - 1 \\
& (\mathtt{D}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 9, & \mathtt{p} \mapsto 3, & \mathtt{i} \mapsto 1\}) \quad \mathtt{p} = 3 * \mathtt{p}; \\
& (\mathtt{C}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 9, & \mathtt{p} \mapsto 9, & \mathtt{i} \mapsto 1\}) \quad \mathtt{s} = \mathtt{s} + 2 * \mathtt{p}; \\
& (\mathtt{B}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 27, & \mathtt{p} \mapsto 9, & \mathtt{i} \mapsto 1\}) \quad \mathtt{i} = \mathtt{i} + 1; \\
& (\mathtt{A}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 27, & \mathtt{p} \mapsto 9, & \mathtt{i} \mapsto 2\}) \quad !(\mathtt{i}! = \mathtt{n} - 1) \\
& (\mathtt{F}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 27, & \mathtt{p} \mapsto 9, & \mathtt{i} \mapsto 2\}) \quad \mathtt{write}(\mathtt{s}); \\
& (\mathtt{E}, & \{\mathtt{n} \mapsto 3, & \mathtt{s} \mapsto 27, & \mathtt{p} \mapsto 9, & \mathtt{i} \mapsto 2\})
\end{array}
$$

2. Wir raten als erstes die Schleifen-Invariante $\mathtt{A}$. Dabei versuchen wir $\mathtt{s}$ und $\mathtt{p}$ mit $\mathtt{i}$ auszudrücken.

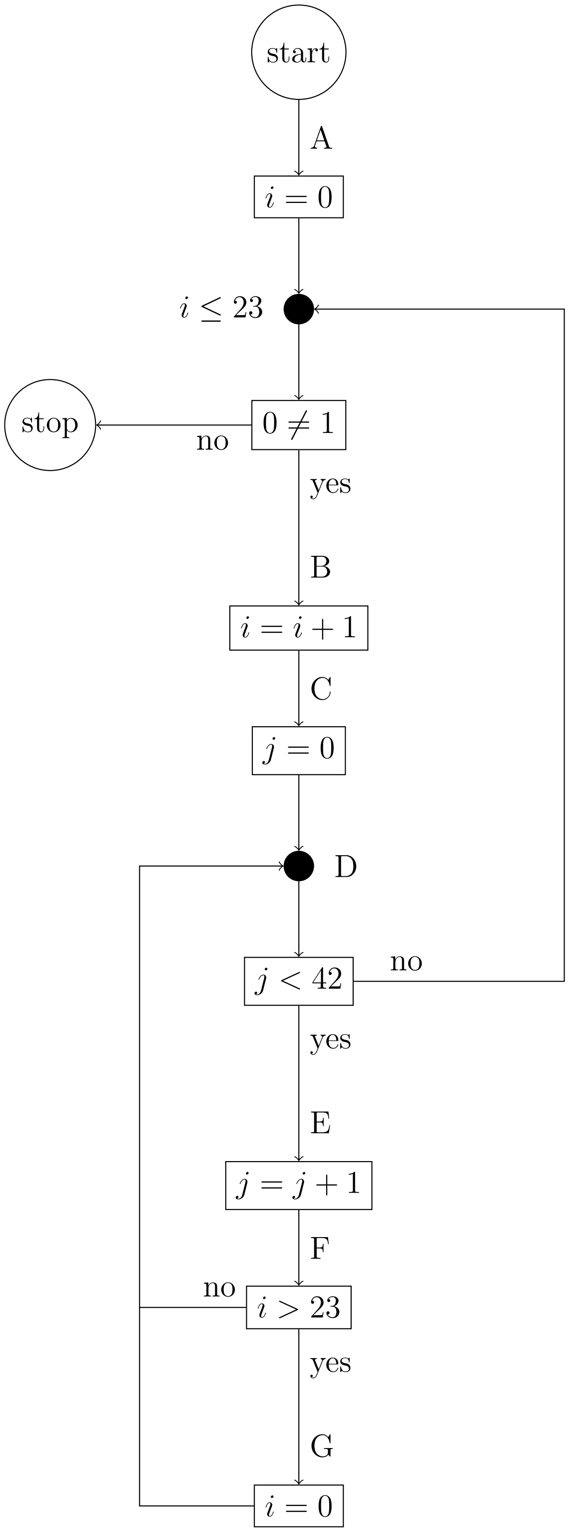
$$\mathtt{A} :\equiv \mathtt{p} = 3^{\mathtt{i}} \wedge \mathtt{s} = 3^{\mathtt{i}+1}$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{WP}[\![\mathtt{i = i + 1}]\!](\mathtt{A}) &\equiv \mathtt{p} = 3^{\mathtt{i}+1} \wedge \mathtt{s} = 3^{\mathtt{i}+2} \equiv: \mathtt{B} \\
\mathsf{WP}[\![\mathtt{s = s + 2*p}]\!](\mathtt{B}) &\equiv \mathtt{p} = 3^{\mathtt{i}+1} \wedge \mathtt{s} + 2 \cdot \mathtt{p} = 3^{\mathtt{i}+2} \equiv: \mathtt{C} \\
\mathsf{WP}[\![\mathtt{p = 3*p}]\!](\mathtt{C}) &\equiv 3 \cdot \mathtt{p} = 3^{\mathtt{i}+1} \wedge \mathtt{s} + 2 \cdot 3 \cdot \mathtt{p} = 3^{\mathtt{i}+2} \\
&\Leftarrow \mathtt{p} = 3^{\mathtt{i}} \wedge \mathtt{s} = 3^{\mathtt{i}+2} - 2 \cdot 3^{\mathtt{i}+1} = 3 \cdot 3^{\mathtt{i}+1} - 2 \cdot 3^{\mathtt{i}+1} = 3^{\mathtt{i}+1} \\
&\equiv \mathtt{A} \equiv: \mathtt{D} \\
\mathsf{WP}[\![\mathtt{write(s)}]\!](\mathtt{E}) &\equiv \mathtt{E} \equiv: \mathtt{F} \\
\mathsf{WP}[\![\mathtt{i\ !=\ n\ -\ 1}]\!](\mathtt{F}, \mathtt{A}) &\equiv (\mathtt{i} = \mathtt{n} - 1 \wedge \mathtt{F}) \vee (\mathtt{i} \neq \mathtt{n} - 1 \wedge \mathtt{A}) \\
&\equiv (\mathtt{i} = \mathtt{n} - 1 \wedge \mathtt{s} = 3^{\mathtt{n}}) \vee (\mathtt{i} \neq \mathtt{n} - 1 \wedge \mathtt{A}) \\
&\Leftarrow (\mathtt{i} = \mathtt{n} - 1 \wedge \mathtt{s} = 3^{\mathtt{i}+1} \wedge \mathtt{p} = 3^{\mathtt{i}}) \vee (\mathtt{i} \neq \mathtt{n} - 1 \wedge \mathtt{A}) \\
&\equiv (\mathtt{i} = \mathtt{n} - 1 \wedge \mathtt{A}) \vee (\mathtt{i} \neq \mathtt{n} - 1 \wedge \mathtt{A}) \\
&\equiv (\mathtt{i} = \mathtt{n} - 1 \vee \mathtt{i} \neq \mathtt{n} - 1) \wedge \mathtt{A} \\
&\equiv \mathtt{true} \wedge \mathtt{A} \\
&\equiv \mathtt{A} \\
\mathsf{WP}[\![\mathtt{i = 0}]\!](\mathtt{A}) &\equiv \mathtt{p} = 3^0 = 1 \wedge \mathtt{s} = 3^1 = 3 \equiv: \mathtt{H} \\
\mathsf{WP}[\![\mathtt{p = 1}]\!](\mathtt{H}) &\equiv \mathtt{s} = 3^1 = 3 \equiv: \mathtt{I} \\
\mathsf{WP}[\![\mathtt{s = 3}]\!](\mathtt{I}) &\equiv \mathtt{true} \equiv: \mathtt{J} \\
\mathsf{WP}[\![\mathtt{n = read()}]\!](\mathtt{J}) &\equiv \forall \mathtt{n}.\mathtt{true} \equiv \mathtt{true} \equiv: \mathtt{K}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.2 (P)

Gegeben sei folgendes Programm:



Zeigen Sie, dass am ersten join-Knoten $i \leq 23$ gilt, indem Sie für die Variable i Bedingungen (A, B, C, D, E, F, G) der Kanten angeben. Prüfen Sie Ihre Bedingungen durch Rechnung.

Lösungsvorschlag 3.2

Wir setzen:

$$D := j \geq 42 \Rightarrow i \leq 23$$

Beweis lokaler Konsistenz:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{j < 42}]\!](i \leq 23, \texttt{true}) \\
&\quad \equiv (j \geq 42 \Rightarrow i \leq 23) \land (j < 42 \Rightarrow \texttt{true}) \\
&\quad \equiv (j \geq 42 \Rightarrow i \leq 23) \land \texttt{true} \\
&\quad \equiv j \geq 42 \Rightarrow i \leq 23 \equiv D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{j = 0}]\!](D) \\
&\quad \equiv 0 \geq 42 \Rightarrow i \leq 23 \\
&\quad \equiv \texttt{false} \Rightarrow i \leq 23 \\
&\quad \equiv \texttt{true}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i = i + 1}]\!](\texttt{true}) \\
&\quad \equiv \texttt{true}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{0 != 1}]\!](\texttt{false}, \texttt{true}) \\
&\quad \equiv (0 = 1 \Rightarrow \texttt{false}) \land (0 \neq 1 \Rightarrow \texttt{true}) \\
&\quad \equiv (0 \neq 1 \lor \texttt{false}) \land (0 = 1 \lor \texttt{true}) \\
&\quad \equiv \texttt{true} \Leftarrow i \leq 23
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i = 0}]\!](D) \\
&\quad \equiv j \geq 42 \Rightarrow \leq 0 \leq 23 \\
&\quad \equiv j \geq 42 \Rightarrow \texttt{true} \\
&\quad \equiv \texttt{true} := G
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i > 23}]\!](D, \texttt{true}) \\
&\quad \equiv (i \leq 23 \Rightarrow (j \geq 42 \Rightarrow i \leq 23)) \land (i > 23 \Rightarrow \texttt{true}) \\
&\quad \equiv (i \leq 23 \Rightarrow (j \geq 42 \Rightarrow \texttt{true})) \land \texttt{true} \\
&\quad \equiv i \leq 23 \Rightarrow (j \geq 42 \Rightarrow \texttt{true}) \\
&\quad \equiv i \leq 23 \Rightarrow \texttt{true} \\
&\quad \equiv \texttt{true} := F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{j = j + 1}]\!](\texttt{true}) \\
&\quad \equiv \texttt{true} := E
\end{aligned}$$

Allgemeine Hinweise zur Hausaufgabenabgabe

Die Hausaufgabenabgabe bezüglich dieses Blattes erfolgt ausschließlich über Moodle. Die Abgabefrist finden Sie ebenfalls in Moodle. Bitte vergewissern Sie sich nach der Abgabe selbstständig, dass alle Dateien erfolgreich auf Moodle eingestellt wurden. Die Abgaben der Theorieaufgaben[1] müssen in Form einer einzigen PDF-Datei erfolgen. Nutzen Sie z.B. ImageMagick[2], um aus eingescannten Bildern ein PDF zu erzeugen. Achten Sie bei eingescannten Bildern darauf, dass diese im PDF-Dokument eine korrekte Orientierung haben. **Abgaben, die sich nicht in beschriebenen Formaten befinden, können nicht korrigiert oder bewertet werden!**

Aufgabe 3.3 (H) Veronika [10 Punkte]

Gegeben sei das folgende MiniJava-Programm, welches aus zwei Zahlen $n > 0$ und $k > 0$ den Term $3(k2^k)^n$ berechnet:

```
int n = read();
int k = read();
if(n <= 0 || k <= 0) {
  write("Ihre Wahl fuer n bzw. k ist leider ungluecklich!");
  return;
}
int e = 3;
int i = 0;
while (i != n) {
  int j = 0;
  while (j != k) {
    e = e + e;
    j = j + 1;
  }
  e = e * j;
  i = i + 1;
}
write(e);
```

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben.

1. Zeichnen Sie einen Kontrollflussgraphen des Programms.

2. Bestimmen Sie alle Zustände des Programms, wenn angenommen wird, dass für n und k jeweils die Zahl 2 eingegeben wird.

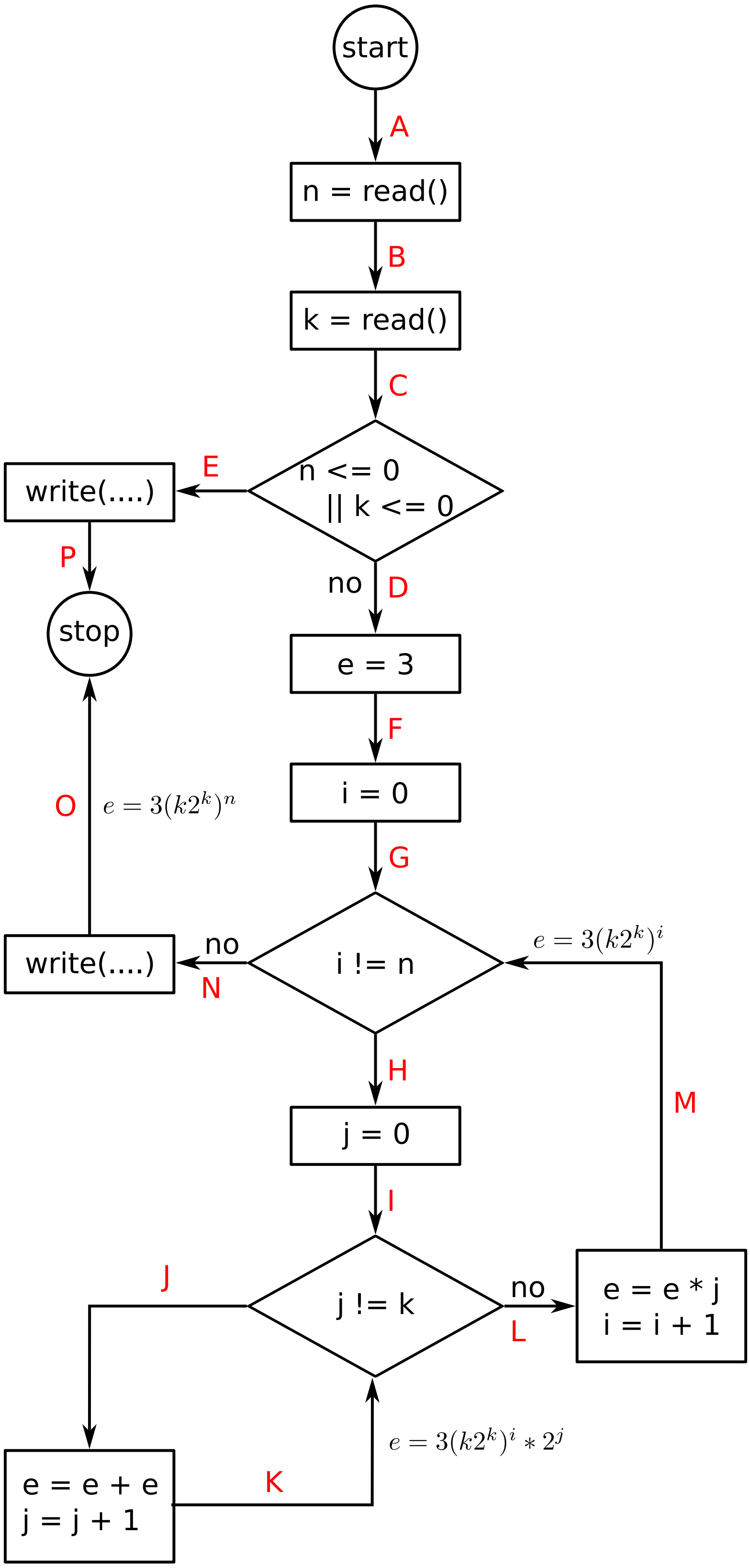
3. Überlegen Sie sich eine passende Schleifeninvariante. Nutzen Sie Ihre Invariante, um zu zeigen, dass am Ende des Programms tatsächlich $3(k2^k)^n$ ausgegeben wird!

Lösungsvorschlag 3.3

[1] Theorieaufgaben sind Aufgaben, deren Lösung nicht programmiert wird

[2] `http://www.imagemagick.org/script/index.php`

1.



start
A
n = read()
B
k = read()
C
n <= 0
|| k <= 0
E
write(....)
P
stop
no
D
e = 3
F
i = 0
G
O
$e = 3(k2^k)^n$
write(....)
no
N
i != n
$e = 3(k2^k)^i$
H
M
j = 0
I
J
j != k
no
L
e = e * j
i = i + 1
$e = 3(k2^k)^i * 2^j$
e = e + e
j = j + 1
K

2.

$$
\begin{aligned}
\pi = ((&A, \{n \mapsto \top, k \mapsto \top, e \mapsto \top, i \mapsto \top, j \mapsto \top\}),\\
&(B, \{n \mapsto 2, k \mapsto \top, e \mapsto \top, i \mapsto \top, j \mapsto \top\}),\\
&(C, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto \top, i \mapsto \top, j \mapsto \top\}),\\
&(D, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto \top, i \mapsto \top, j \mapsto \top\}),\\
&(F, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 3, i \mapsto \top, j \mapsto \top\}),\\
&(G, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 3, i \mapsto 0, j \mapsto \top\}),\\
&(H, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 3, i \mapsto 0, j \mapsto \top\}),\\
&(I, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 3, i \mapsto 0, j \mapsto 0\}),\\
&(J, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 3, i \mapsto 0, j \mapsto 0\}),\\
&(K, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 6, i \mapsto 0, j \mapsto 1\}),\\
&(J, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 6, i \mapsto 0, j \mapsto 1\}),\\
&(K, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 12, i \mapsto 0, j \mapsto 2\}),\\
&(L, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 12, i \mapsto 0, j \mapsto 2\}),\\
&(M, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 24, i \mapsto 1, j \mapsto 2\}),\\
&(H, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 24, i \mapsto 1, j \mapsto \top\}),\\
&(I, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 24, i \mapsto 1, j \mapsto 0\}),\\
&(J, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 24, i \mapsto 1, j \mapsto 0\}),\\
&(K, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 48, i \mapsto 1, j \mapsto 1\}),\\
&(J, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 48, i \mapsto 1, j \mapsto 1\}),\\
&(K, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 96, i \mapsto 1, j \mapsto 2\}),\\
&(L, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 96, i \mapsto 1, j \mapsto 2\}),\\
&(M, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 192, i \mapsto 2, j \mapsto 2\}),\\
&(N, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 192, i \mapsto 2, j \mapsto \top\}),\\
&(O, \{n \mapsto 2, k \mapsto 2, e \mapsto 192, i \mapsto 2, j \mapsto \top\}))
\end{aligned}
$$

3. Der folgende Beweis setzt voraus, dass $k > 0$ innerhalb der Schleifen gilt. Dies lässt sich über einen einfachen Beweis zeigen, auf den hier verzichtet wird.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{write(...)}]\!](e = 3(k2^k)^n)\\
&\quad \equiv e = 3(k2^k)^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i = i + 1}]\!](e = 3(k2^k)^i)\\
&\quad \equiv e = 3(k2^k)^{i+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{e = e*j}]\!](e = 3(k2^k)^{i+1})\\
&\quad \equiv e * j = 3(k2^k)^{i+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{j = j + 1}]\!](e = 3(k2^k)^i * 2^j)\\
&\quad \equiv e = 3(k2^k)^i * 2^{j+1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{e = e + e}]\!](e = 3(k2^k)^i * 2^{j+1})\\
&\quad\equiv e + e = 3(k2^k)^i * 2^{j+1}\\
&\quad\equiv 2e = 3(k2^k)^i * 2^{j+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{j != k}]\!](2e = 3(k2^k)^i * 2^{j+1}, e * j = 3(k2^k)^{i+1})\\
&\quad\equiv (j \neq k \Rightarrow 2e = 3(k2^k)^i * 2^{j+1}) \land (\neg(j \neq k) \Rightarrow e * j = 3(k2^k)^{i+1})\\
&\quad\equiv (j \neq k \Rightarrow 2e = 3(k2^k)^i * 2^{j+1}) \land (j = k \Rightarrow e * j = 3(k2^k)^{i+1})\\
&\quad\equiv (j \neq k \Rightarrow 2e = 3(k2^k)^i * 2^{j+1}) \land (j = k \Rightarrow e * k = 3(k2^k)^i * k * 2^k)\\
&\quad\equiv (j \neq k \Rightarrow e = 3(k2^k)^i * 2^j) \land (j = k \Rightarrow e = 3(k2^k)^i * 2^k)\\
&\quad\equiv (j \neq k \Rightarrow e = 3(k2^k)^i * 2^j) \land (j = k \Rightarrow e = 3(k2^k)^i * 2^j)\\
&\quad\equiv e = 3(k2^k)^i * 2^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{j = 0}]\!](e = 3(k2^k)^i * 2^j)\\
&\quad\equiv e = 3(k2^k)^i * 2^0\\
&\quad\equiv e = 3(k2^k)^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i != n}]\!](e = 3(k2^k)^n, e = 3(k2^k)^i)\\
&\quad\equiv (i = n \Rightarrow e = 3(k2^k)^n) \land (i \neq n \Rightarrow (e = 3(k2^k)^i))\\
&\quad\equiv (i = n \Rightarrow e = 3(k2^k)^i) \land (i \neq n \Rightarrow (e = 3(k2^k)^i))\\
&\quad\equiv e = 3(k2^k)^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i = 0}]\!](e = 3(k2^k)^i)\\
&\quad\equiv e = 3(k2^k)^0\\
&\quad\equiv e = 3 \land k \neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{e = 3}]\!](e = 3 \land k \neq 0)\\
&\quad\equiv 3 = 3 \land k \neq 0\\
&\quad\equiv k \neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{n <= 0 || k <= 0}]\!](k \neq 0, \texttt{true})\\
&\quad\equiv (\neg(n \leq 0 \lor k \leq 0) \Rightarrow k \neq 0) \land ((n \leq 0 \lor k \leq 0) \Rightarrow \texttt{true})\\
&\quad\equiv ((n > 0 \land k > 0) \Rightarrow k \neq 0) \land \texttt{true}\\
&\quad\equiv ((n > 0 \land k > 0) \Rightarrow k \neq 0)\\
&\quad\equiv \texttt{true}
\end{aligned}$$

Punkteschema

1. 1 Punkt
2. 3 Punkte
3. 6 Punkte

Punkteschema

- Der Beweis für $k > 0$ muss nicht explizit geführt werden.

Aufgabe 3.4 (H) Binomialifikation [10 Punkte]

Gegeben sei das folgende MiniJava-Programm, welches aus zwei Zahlen n und k (mit $n \geq k > 0$) den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ berechnet:

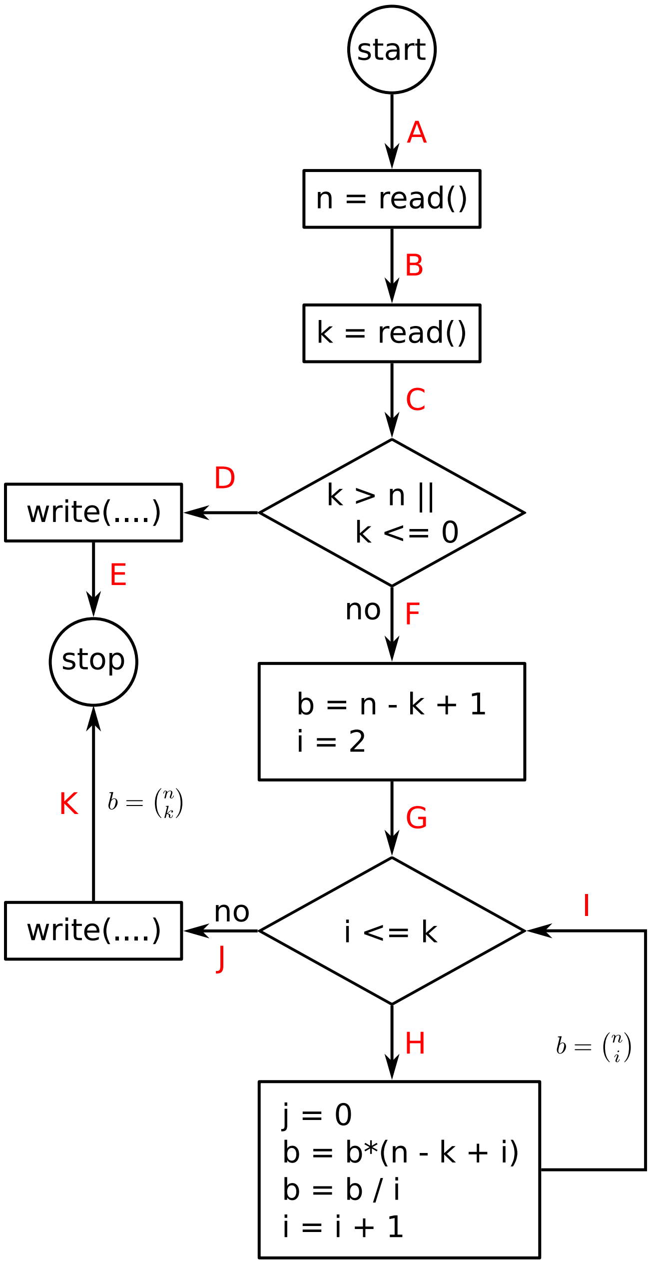
```
int n = read();
int k = read();
if(k > n || k <= 0) {
  write("So nicht!");
  return;
}
int b = n - k + 1;
int i = 2;
while(i <= k) {
  b = b*(n - k + i);
  b = b / i;
  i = i + 1;
}
write(b);
```

Der Algorithmus verwendet dabei, dass $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} * \frac{n}{k}$ gilt. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben.

1. Zeichnen Sie einen Kontrollflussgraphen des Programms.
2. Bestimmen Sie alle Zustände des Programms, wenn angenommen wird, dass für n die Zahl 5 und für k die Zahl 3 eingegeben wird.
3. Überlegen Sie sich eine passende Schleifeninvariante. Nutzen Sie Ihre Invariante, um zu zeigen, dass am Ende des Programms tatsächlich der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ausgegeben wird!

Lösungsvorschlag 3.4

1.



start
A
n = read()
B
k = read()
C
D
write(....)
k > n ||
k <= 0
E
no
F
stop
b = n - k + 1
i = 2
K
$b = \binom{n}{k}$
G
I
write(....)
no
i <= k
J
H
$b = \binom{n}{i}$
j = 0
b = b*(n - k + i)
b = b / i
i = i + 1

2.

$$
\begin{aligned}
\pi = (&(A, \{n \mapsto \top, k \mapsto \top, b \mapsto \top, i \mapsto \top\}),\\
&(B, \{n \mapsto 5, k \mapsto \top, b \mapsto \top, i \mapsto \top\}),\\
&(C, \{n \mapsto 5, k \mapsto 3, b \mapsto \top, i \mapsto \top\}),\\
&(F, \{n \mapsto 5, k \mapsto 3, b \mapsto \top, i \mapsto \top\}),\\
&(G, \{n \mapsto 5, k \mapsto 3, b \mapsto 3, i \mapsto 2\}),\\
&(H, \{n \mapsto 5, k \mapsto 3, b \mapsto 3, i \mapsto 2\}),\\
&(I, \{n \mapsto 5, k \mapsto 3, b \mapsto 6, i \mapsto 3\}),\\
&(H, \{n \mapsto 5, k \mapsto 3, b \mapsto 6, i \mapsto 3\}),\\
&(I, \{n \mapsto 5, k \mapsto 3, b \mapsto 10, i \mapsto 4\}),\\
&(J, \{n \mapsto 5, k \mapsto 3, b \mapsto 10, i \mapsto 4\}),\\
&(K, \{n \mapsto 5, k \mapsto 3, b \mapsto 10, i \mapsto 4\}))
\end{aligned}
$$

3. Beweis:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{write(...)}]\!](b = \binom{n}{k})\\
&\equiv b = \binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i = i + 1}]\!](i \leq k + 1 \wedge b = \binom{n-k+i-1}{i-1})\\
&\equiv i + 1 \leq k + 1 \wedge b = \binom{n-k+i+1-1}{i+1-1}\\
&\equiv i \leq k \wedge b = \binom{n-k+i}{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{b = b / i}]\!](i \leq k \wedge b = \binom{n-k+i}{i})\\
&\equiv i \leq k \wedge \frac{b}{i} = \binom{n-k+i}{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{b = b*(n - k + i)}]\!](i \leq k \wedge \frac{b}{i} = \binom{n-k+i}{i})\\
&\equiv i \leq k \wedge \frac{b * (n-k+i)}{i} = \binom{n-k+i}{i}\\
&\equiv i \leq k \wedge b = \frac{i}{n-k+i}\binom{n-k+i}{i}\\
&\equiv i \leq k \wedge b = \binom{n-k+i-1}{i-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i <= k}]\!](b = \binom{n}{k}, i \leq k \land b = \binom{n-k+i-1}{i-1})\\
&\quad\equiv (i > k \Rightarrow b = \binom{n}{k}) \land (i \leq k \Rightarrow (i \leq k \land b = \binom{n-k+i-1}{i-1}))\\
&\quad\equiv (i > k \Rightarrow b = \binom{n}{k}) \land (i \leq k \Rightarrow \land b = \binom{n-k+i-1}{i-1})\\
&\quad\Leftarrow i \leq k+1 \land (i > k \Rightarrow b = \binom{n}{k}) \land (i \leq k \Rightarrow b = \binom{n-k+i-1}{i-1})\\
&\quad\equiv i \leq k+1 \land (i = k+1 \Rightarrow b = \binom{n}{k}) \land (i \leq k \Rightarrow b = \binom{n-k+i-1}{i-1})\\
&\quad\equiv i \leq k+1 \land (i = k+1 \Rightarrow b = \binom{n-k+i-1}{i-1}) \land (i \leq k \Rightarrow b = \binom{n-k+i-1}{i-1})\\
&\quad\equiv i \leq k+1 \land (i \leq k+1 \Rightarrow b = \binom{n-k+i-1}{i-1})\\
&\quad\equiv i \leq k+1 \land b = \binom{n-k+i-1}{i-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i = 2}]\!](i \leq k+1 \land b = \binom{n-k+i-1}{i-1})\\
&\quad\equiv 2 \leq k+1 \land b = \binom{n-k+2-1}{2-1}\\
&\quad\equiv 1 \leq k \land b = \binom{n-k+1}{1}\\
&\quad\equiv 1 \leq k \land b = n-k+1 \land 1 \leq n-k+1\\
&\quad\equiv 1 \leq k \land b = n-k+1 \land k \leq n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{b = n - k + 1}]\!](1 \leq k \land b = n-k+1 \land k \leq n)\\
&\quad\equiv 1 \leq k \land n-k+1 = n-k+1 \land k \leq n\\
&\quad\equiv 1 \leq k \land k \leq n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{k > n || k <= 0}]\!](1 \leq k \land k \leq n, \texttt{true})\\
&\quad\equiv (k \leq n \land k > 0 \Rightarrow 1 \leq k \land k \leq n) \land (k > n \lor k \leq 0 \Rightarrow \texttt{true})\\
&\quad\equiv (k \leq n \land k > 0 \Rightarrow 1 \leq k \land k \leq n)\\
&\quad\equiv \texttt{true}
\end{aligned}
$$

Punkteschema

1. 1 Punkt
2. 3 Punkte
3. 6 Punkte