

Aufgabe 2.1 Präsenzaufgabe: Aussagenlogik

Vereinfachen Sie folgende Aussagen:

1. $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$
2. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$

Lösungsvorschlag 2.1

1.

$$\begin{aligned}(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) \\ &\equiv A \wedge (B \vee \neg B) \\ &\equiv A\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A) \\ &\equiv (\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A) \\ &\equiv \neg A \vee B \vee \neg B \vee A \\ &\equiv \neg A \vee A \vee \neg B \vee B \\ &\equiv (\neg A \vee A) \vee (\neg B \vee B) \\ &\equiv \text{true} \vee \text{true} \\ &\equiv \text{true}\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 Präsenzaufgabe: Schwächste Vorbedingung

1. Geben Sie die schwächste Vorbedingung für die Nachbedingung $x > 42$ hinsichtlich der Zuweisung $x = y + z$ an, also

$$\text{WP}[\![x = y + z]\!](x > 42)$$

2. Kreuzen Sie die folgenden Vorbedingungen an, die die schwächste Vorbedingung aus 1 implizieren:

- | | | | |
|--|---|--|-----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> true | <input checked="" type="checkbox"/> false | <input type="checkbox"/> $x = 32$ | <input type="checkbox"/> $x > 43$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $y = 40 \wedge z = 10$ | <input type="checkbox"/> $y > z > 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> $z > y > 21$ | |
| <input checked="" type="checkbox"/> $a + b > y + z \wedge z = y^2 \wedge y < -7$ | | | |

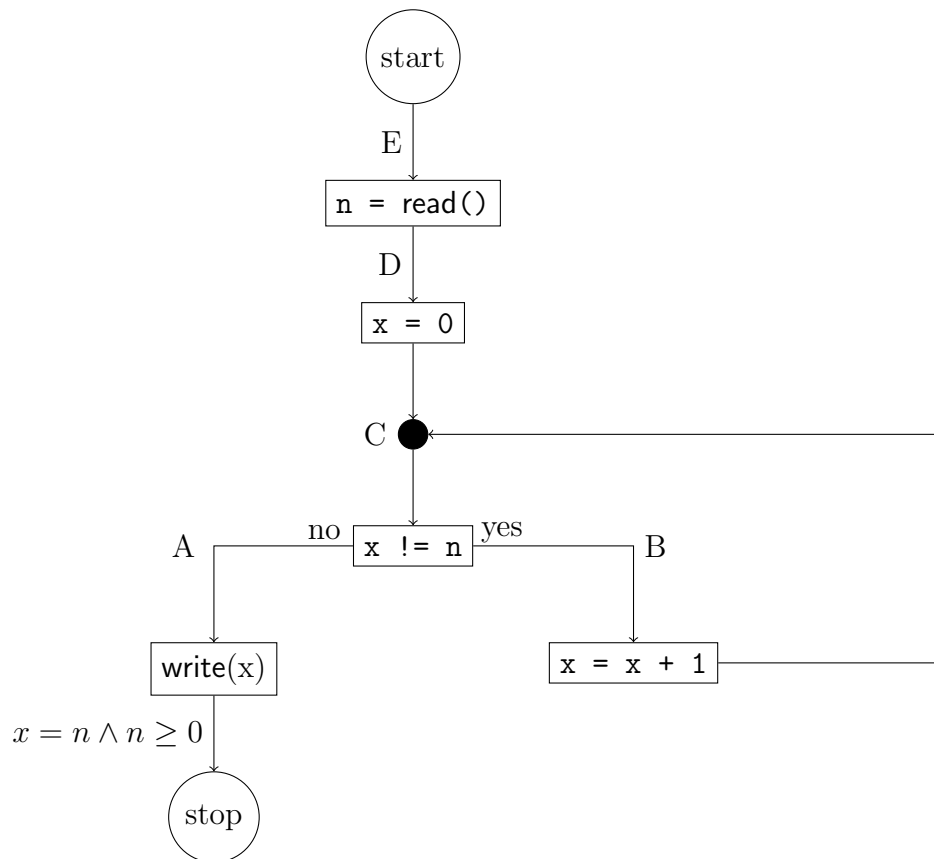
Diskutieren Sie mit Ihrem Tutor, wieso obige Vorbedingungen sich qualifizieren bzw. sich nicht qualifizieren!

Lösungsvorschlag 2.2

1. $WP[x = y + z](x > 42) = y + z > 42$
2. Die Lösung ist oben.

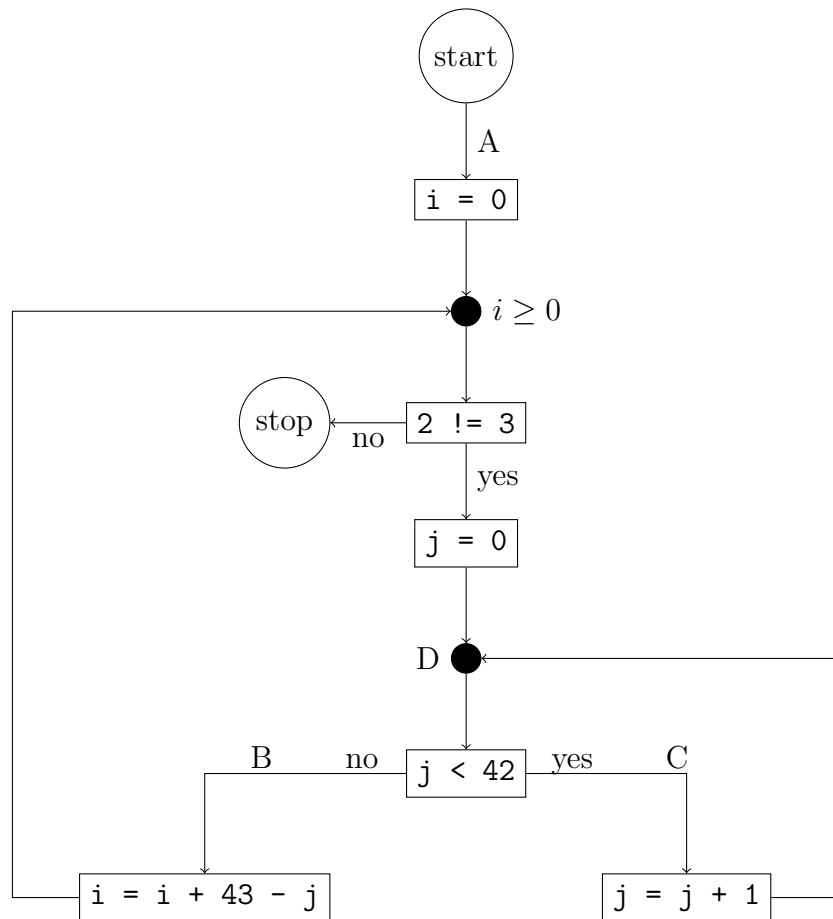
Aufgabe 2.3 Präsenzaufgabe: Verifikation

Gegeben sei folgendes Programm:



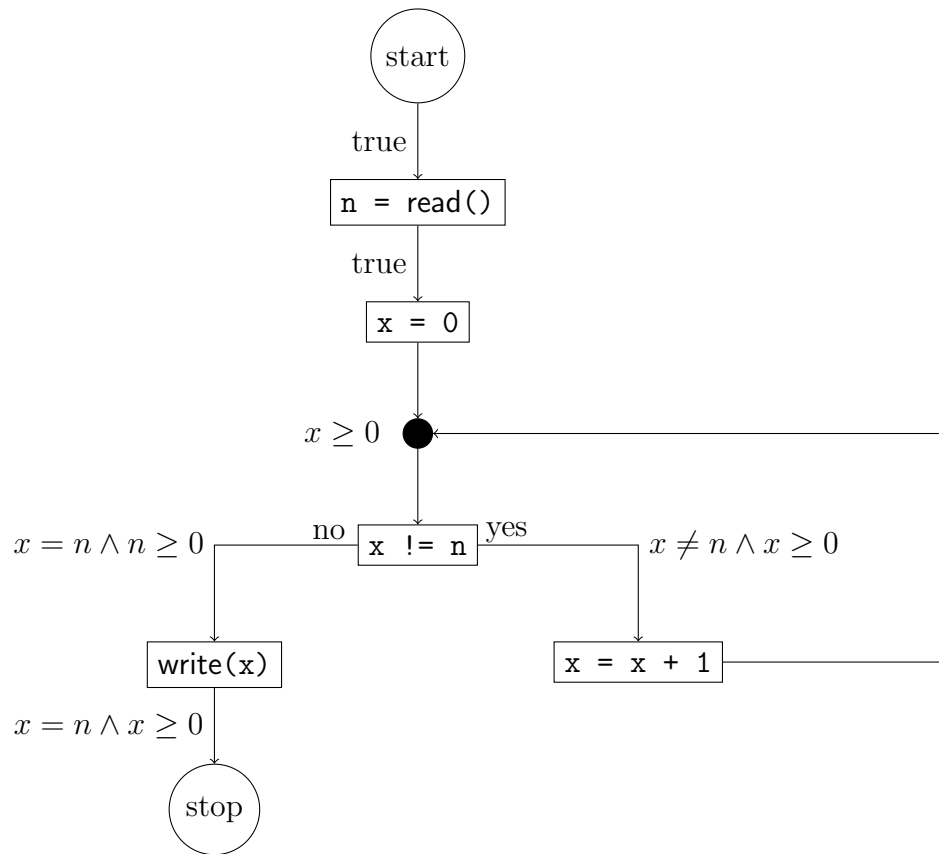
Zeigen Sie, dass am Programmende $x = n$ und $n \geq 0$ gilt, indem Sie Bedingungen (A, B, C, D, E) der Kanten angeben. Terminiert das Programm immer (Begründung!)?

Betrachten Sie nun folgendes Program:

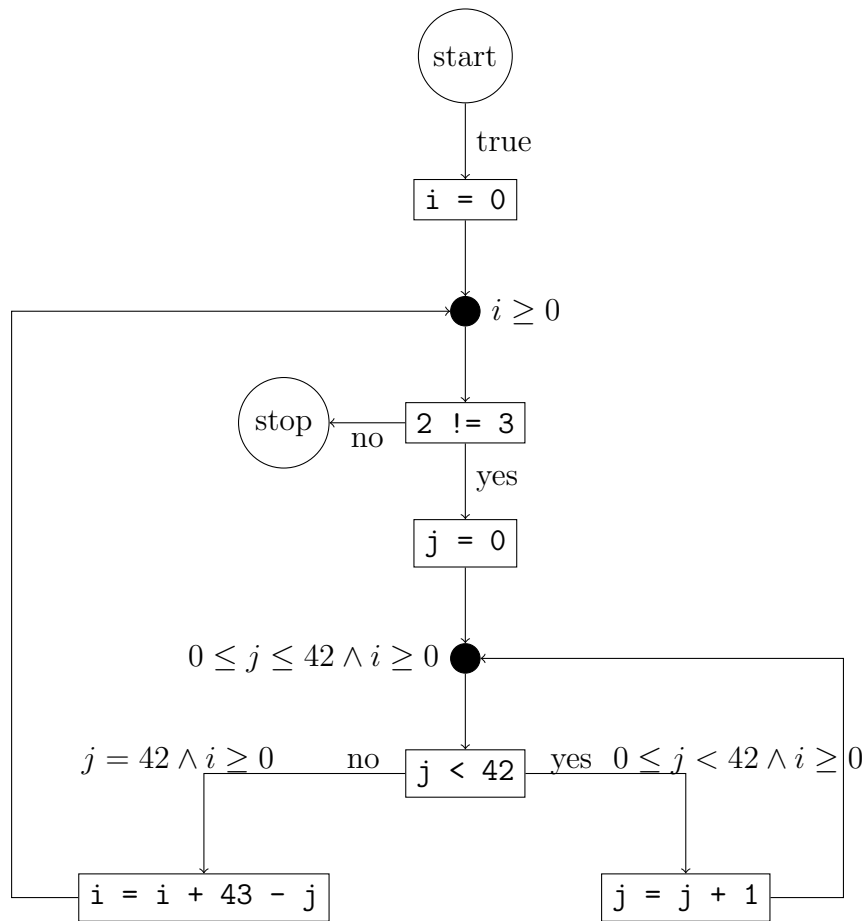


Zeigen Sie, dass an dem ersten join-Knoten $i \geq 0$ gilt, indem Sie Bedingungen (A, B, C, D) der Kanten angeben.

Lösungsvorschlag 2.3



Ob das Programm terminiert, hängt vom Typ der Variablen ab, der im Programm nicht gegeben ist. Handelt es sich um ganze Zahlen, so terminiert das Programm nicht immer! Beispiel: Für ein $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ terminiert das Programm nicht. Handelt es sich dagegen um eine auf eine bestimmte Stellenzahl beschränkte Zahl (wie z.B. ein `int` in Java), kommt es irgendwann zu einem Überlauf und das Programm terminiert.



Beweis:

1.

$$\begin{aligned}
 & \text{WP}[\text{i} = \text{i} + 43 - \text{j}](\text{i} \geq 0) \\
 & \equiv \text{i} + 43 - \text{j} \geq 0 \\
 & \equiv \text{i} - \text{j} \geq -43 \\
 & \Leftarrow \text{j} = 42 \wedge \text{i} \geq 0
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 & \text{WP}[\text{j} < 42](\text{j} = 42 \wedge \text{i} \geq 0, 0 \leq \text{j} < 42 \wedge \text{i} \geq 0) \\
 & \equiv (\neg(\text{j} < 42) \Rightarrow (\text{j} = 42 \wedge \text{i} \geq 0)) \wedge (\text{j} < 42 \Rightarrow (0 \leq \text{j} < 42 \wedge \text{i} \geq 0)) \\
 & \equiv (\text{j} < 42 \vee (\text{j} = 42 \wedge \text{i} \geq 0)) \wedge (\neg(\text{j} < 42) \vee (0 \leq \text{j} < 42 \wedge \text{i} \geq 0)) \\
 & \equiv (\text{j} < 42 \vee (\text{j} = 42 \wedge \text{i} \geq 0)) \wedge (\text{j} \geq 42 \vee (0 \leq \text{j} < 42 \wedge \text{i} \geq 0)) \\
 & \Leftarrow ((\text{j} < 42 \wedge \text{i} \geq 0) \vee (\text{j} = 42 \wedge \text{i} \geq 0)) \wedge ((\text{j} \geq 42 \wedge \text{i} \geq 0) \vee (0 \leq \text{j} < 42 \wedge \text{i} \geq 0)) \\
 & \equiv (\text{j} < 42 \vee \text{j} = 42) \wedge (\text{j} \geq 42 \vee 0 \leq \text{j} < 42) \wedge \text{i} \geq 0 \\
 & \equiv \text{j} \leq 42 \wedge \text{j} \geq 0 \wedge \text{i} \geq 0 \\
 & \equiv 0 \leq \text{j} \leq 42 \wedge \text{i} \geq 0
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
& \text{WP}[\![j = j + 1]\!](0 \leq j \leq 42 \wedge i \geq 0) \\
& \equiv 0 \leq j + 1 \leq 42 \wedge i \geq 0 \\
& \equiv 0 \leq j + 1 \wedge j + 1 \leq 42 \wedge i \geq 0 \\
& \equiv -1 \leq j \wedge j < 42 \wedge i \geq 0 \\
& \equiv -1 \leq j < 42 \wedge i \geq 0 \\
& \Leftarrow 0 \leq j < 42 \wedge i \geq 0
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
& \text{WP}[\![j = 0]\!](0 \leq j \leq 42 \wedge i \geq 0) \\
& \equiv 0 \leq 0 \leq 42 \wedge i \geq 0 \\
& \equiv i \geq 0
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
& \text{WP}[\![2 \neq 3]\!](\text{false}, i \geq 0) \\
& \equiv (\neg(2 \neq 3) \Rightarrow \text{false}) \wedge (2 \neq 3 \Rightarrow i \geq 0) \\
& \equiv (2 = 3 \Rightarrow \text{false}) \wedge (2 \neq 3 \Rightarrow i \geq 0) \\
& \equiv (\neg(2 = 3) \vee \text{false}) \wedge (\neg(2 \neq 3) \vee i \geq 0) \\
& \equiv (2 \neq 3 \vee \text{false}) \wedge (2 = 3 \vee i \geq 0) \\
& \equiv (\text{true} \vee \text{false}) \wedge (\text{false} \vee i \geq 0) \\
& \equiv \text{true} \wedge i \geq 0 \\
& \equiv i \geq 0
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
& \text{WP}[\![i = 0]\!](i \geq 0) \\
& \equiv 0 \geq 0 \\
& \equiv \text{true}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.4 Präsenzaufgabe: Mehr Aussagenlogik

Zeigen oder widerlegen Sie (verwenden Sie dabei für Teilaufgabe 1 eine Wahrheitstabelle, für alle anderen Aufgaben die Äquivalenzregeln der Aussagenlogik):

1. $A \iff B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
2. $A \iff B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
3. $(\neg A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg B \equiv \text{true}$

Lösungsvorschlag 2.4

1. Beweis über Wertetabelle:

A	B	$A \iff B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1

2.

$$\begin{aligned}
& (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
& \equiv (A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \\
& \equiv \mathbf{true} \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A) \wedge \mathbf{true} \\
& \equiv (B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B) \\
& \equiv (A \iff B)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
& (\neg A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg B \\
& \equiv \neg(\neg A \wedge (\neg A \vee B)) \vee \neg B \\
& \equiv \neg(\neg A) \vee \neg B \quad (\text{Absorptionsregel}) \\
& \equiv A \vee \neg B \\
& \neq \mathbf{true}
\end{aligned}$$

Allgemeine Hinweise zur Hausaufgabenabgabe

Die Hausaufgabenabgabe bezüglich dieses Blattes erfolgt ausschließlich über Moodle. Die Abgabefrist finden Sie ebenfalls in Moodle. Bitte vergewissern Sie sich nach der Abgabe selbstständig, dass alle Dateien erfolgreich auf Moodle eingestellt wurden. Die Abgaben der Theorieaufgaben¹ müssen in Form einer einzigen PDF-Datei erfolgen. Nutzen Sie z.B. Image-Magick², um aus eingescannten Bildern ein PDF zu erzeugen. Achten Sie bei eingescannten Bildern darauf, dass diese im PDF-Dokument eine korrekte Orientierung haben. **Abgaben, die sich nicht in beschriebenen Formaten befinden, können nicht korrigiert oder bewertet werden!**

Aufgabe [6 Punkte] Hausaufgabe: Aussagenlogik

Zeigen oder widerlegen Sie mittels der Äquivalenzregeln der Aussagenlogik:

1. $(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A \equiv \mathbf{true}$
2. $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$
3. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \equiv \mathbf{true}$
4. $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \equiv A \Rightarrow (B \wedge C)$

Lösungsvorschlag 2.5

1.

$$\begin{aligned}
 &(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A \\
 &\equiv \neg(\neg B \wedge (\neg A \vee B)) \vee \neg A \\
 &\equiv (B \vee (A \wedge \neg B)) \vee \neg A \\
 &\equiv ((B \vee A) \wedge (B \vee \neg B)) \vee \neg A \\
 &\equiv ((B \vee A) \wedge \mathbf{true}) \vee \neg A \\
 &\equiv B \vee A \vee \neg A \\
 &\equiv B \vee \mathbf{true} \\
 &\equiv \mathbf{true}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 &A \Rightarrow B \\
 &\equiv \neg A \vee B \\
 &\equiv \neg(\neg B) \vee (\neg A) \\
 &\equiv \neg B \Rightarrow \neg A
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 &(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \\
 &\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow (\neg A \vee C) \\
 &\equiv \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C) \\
 &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee C \\
 &\equiv \neg A \vee (A \wedge \neg B) \vee C \vee (B \wedge \neg C) \\
 &\equiv ((\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee ((C \vee B) \wedge (C \vee \neg C)) \\
 &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee (C \vee B) \\
 &\equiv B \vee \neg B \vee C \vee \neg A \\
 &\equiv \mathbf{true}
 \end{aligned}$$

¹Theorieaufgaben sind Aufgaben, deren Lösung nicht programmiert wird

²<http://www.imagemagick.org/script/index.php>

4.

$$\begin{aligned}
& (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \\
& \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \\
& \equiv \neg A \vee (B \wedge C) \\
& \equiv A \Rightarrow (B \wedge C)
\end{aligned}$$

Bemerkungen zu Aufgabe 2.5

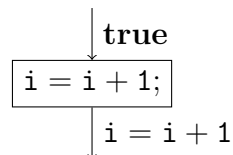
Punkteverteilung:

1. 2 Punkte
2. 1 Punkt
3. 2 Punkte
4. 1 Punkt

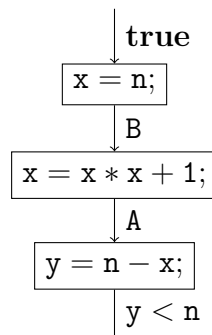
Aufgabe [7 Punkte] Hausaufgabe: Verifikation

Überprüfen Sie, ob die Annotationen in den folgenden Kontrollflussdiagrammen lokal konsistent sind. Unter Umständen müssen fehlende Zusicherungen (mit A, B und C bezeichnet) ergänzt werden. Falls lokale Konsistenz gegeben ist, dann ist ein Beweis dafür anzugeben. Andernfalls ist anzugeben an welcher Stelle die lokale Konsistenz verletzt ist.

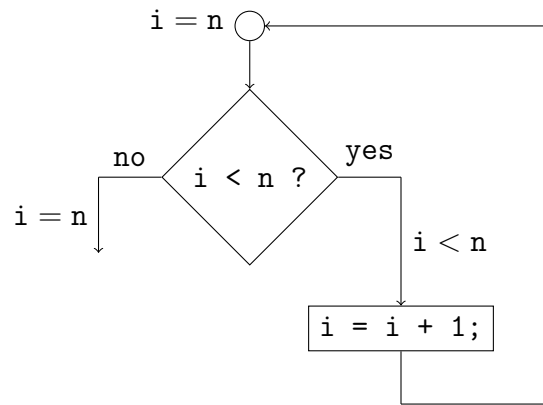
1.



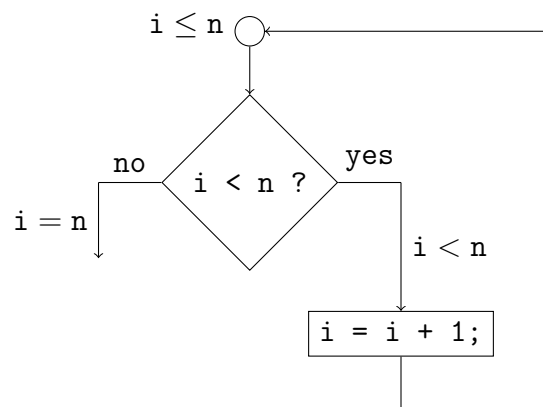
2.



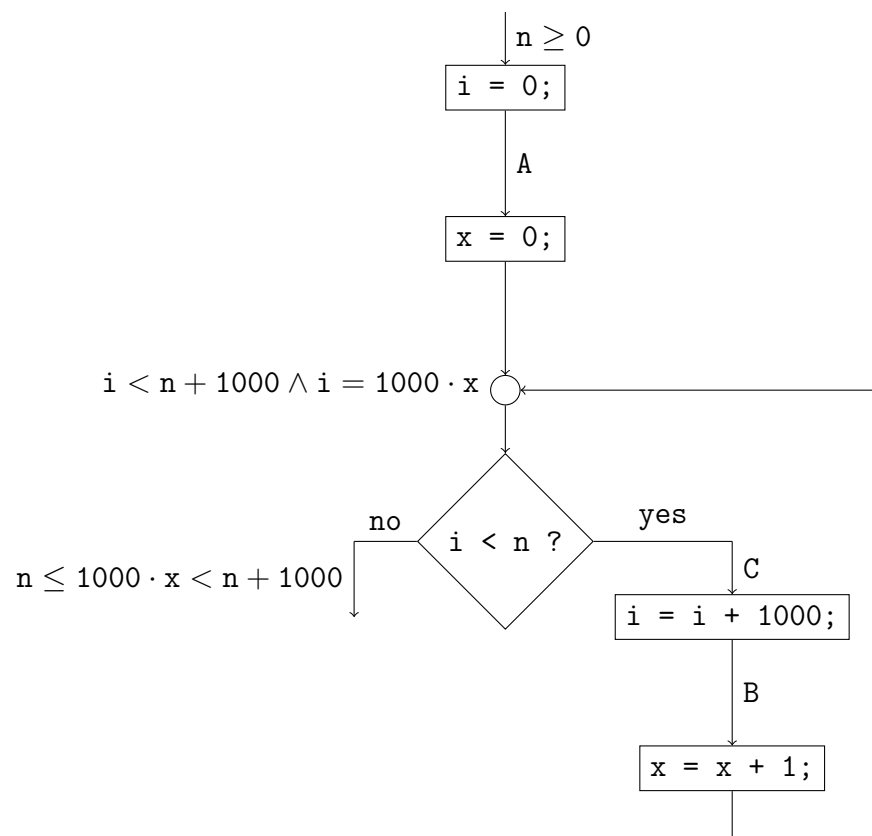
3.



4.



5.



1. Die Annotationen sind nicht lokal konsistent, denn

$$\begin{aligned}
 \mathbf{WP} \llbracket i = i + 1 \rrbracket (i = i + 1) \\
 &\equiv (i = i + 1)[i + 1/i] \\
 &\equiv i + 1 = i + 2 \\
 &\equiv \mathbf{false}
 \end{aligned}$$

und $\mathbf{true} \not\equiv \mathbf{false}$.

2. Die Annotationen sind lokal konsistent, da folgende Aussagen gelten:

$$\mathbf{WP} \llbracket y = n - x \rrbracket (y < n) \equiv (y < n)[n - x/y] \equiv n - x < n \Leftarrow x > 0 \equiv: A$$

$$\mathbf{WP} \llbracket x = x * x + 1 \rrbracket (A) \equiv A[x * x + 1/x] \equiv x \cdot x + 1 > 0 \equiv \mathbf{true} \equiv: B$$

$$\mathbf{WP} \llbracket x = n \rrbracket (B) \equiv \mathbf{true}[n/x] \equiv \mathbf{true}$$

3. Die Annotationen sind nicht lokal konsistent, denn

$$\mathbf{WP} \llbracket i = i + 1 \rrbracket (i = n) \equiv (i = n)[i + 1/i] \equiv i + 1 = n \not\equiv i < n$$

gilt, da zum Beispiel

$$\begin{aligned}
 (i + 1 = n \not\equiv i < n)[0/i, 2/n] \\
 &\equiv \mathbf{false} \not\equiv \mathbf{true} \\
 &\equiv \neg(\mathbf{false} \Leftarrow \mathbf{true}) \\
 &\equiv \neg \mathbf{false} \\
 &\equiv \mathbf{true}
 \end{aligned}$$

gilt.

4. Die Annotationen sind lokal konsistent, da folgende Aussagen gelten:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{WP} \llbracket i = i + 1; \rrbracket (i \leq n) \\
 &\equiv i + 1 \leq n \\
 &\equiv i < n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{WP} \llbracket i < n \rrbracket (i = n, i < n) \\
 &\equiv (\neg(i < n) \wedge i = n) \vee (i < n \wedge i < n) \\
 &\equiv (i \geq n \wedge i = n) \vee i < n \\
 &\equiv i = n \vee i < n \\
 &\equiv i \leq n
 \end{aligned}$$

5. Die Annotationen sind lokal konsistent, da folgende Aussagen gelten:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{WP} \llbracket x = 0; \rrbracket (i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot x) \\
 &\equiv i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot 0 \\
 &\equiv i < n + 1000 \wedge i = 0 \\
 &\equiv: A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[i = 0;](A) &\equiv 0 < n + 1000 \wedge \mathbf{true} \\ &\Leftarrow 0 \leq n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[x = x + 1;](i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot x) \\ &\equiv i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot (x + 1) \\ &\equiv i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot x + 1000 \\ &\equiv: B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[i = i + 1000;](B) \\ &\equiv i + 1000 < n + 1000 \wedge i + 1000 = 1000 \cdot x + 1000 \\ &\equiv i < n \wedge i = 1000 \cdot x \\ &\equiv: C\end{aligned}$$

Sei $Z \equiv n \leq 1000 \cdot x < n + 1000$. Es ist zu zeigen, dass

$$i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot x \Rightarrow \mathbf{WP}[i < n](Z, C)$$

gilt. Da $\mathbf{WP}[i < n](Z, C) \equiv (i \geq n \wedge Z) \vee (i < n \wedge C)$ gilt, ist zu zeigen, dass

$$i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot x \Rightarrow (i \geq n \wedge Z) \vee (i < n \wedge C)$$

gilt. Dazu nehmen wir an, dass $i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot x$ gilt. Ziel ist es jetzt zu zeigen, dass $(i \geq n \wedge Z) \vee (i < n \wedge C)$ gilt. Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $i < n$. Unter diesen Voraussetzungen gilt also $i < n \wedge i = 1000 \cdot x$. D.h. es gilt $i < n \wedge C$. Damit gilt $(i \geq n \wedge Z) \vee (i < n \wedge C)$.

Fall 2: $i \geq n$. Unter diesen Voraussetzungen gilt also $i \geq n \wedge i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot x$. Damit gilt insbesondere $i \geq n \wedge n \leq 1000 \cdot x < n + 1000$. Damit gilt $i \geq n \wedge Z$. Damit gilt $(i \geq n \wedge Z) \vee (i < n \wedge C)$.

Bemerkungen zu Aufgabe 2.6

Anmerkungen:

- c) Wie in der Bemerkung zu Aufgabe 2.1 erklärt, wird hier in der Lösung der Bezug zwischen der logischen Implikation und der semantischen ausgenutzt.
- e) Bei der ersten Bedingung ($\mathbf{WP}[x = 0;](i < n + 1000 \wedge i = 1000 \cdot x)$) gilt nicht $i < n + 1000 \wedge i = 0 \equiv 0 < n + 1000$, da dann keine Aussage mehr über i getroffen wird.
- e) Bei der zweiten Bedingung ($\mathbf{WP}[i = 0;](A)$) gilt nur die Implikation $0 < n + 1000 \wedge \mathbf{true} \Leftarrow 0 \leq n$, nicht die Äquivalenz $0 < n + 1000 \wedge \mathbf{true} \equiv 0 \leq n$. Mehr wird für die Verifikation aber auch nicht benötigt.

Punkteverteilung:

1. 1 Punkt
2. 1 Punkt
3. 1 Punkt
4. 2 Punkt
5. 2 Punkt

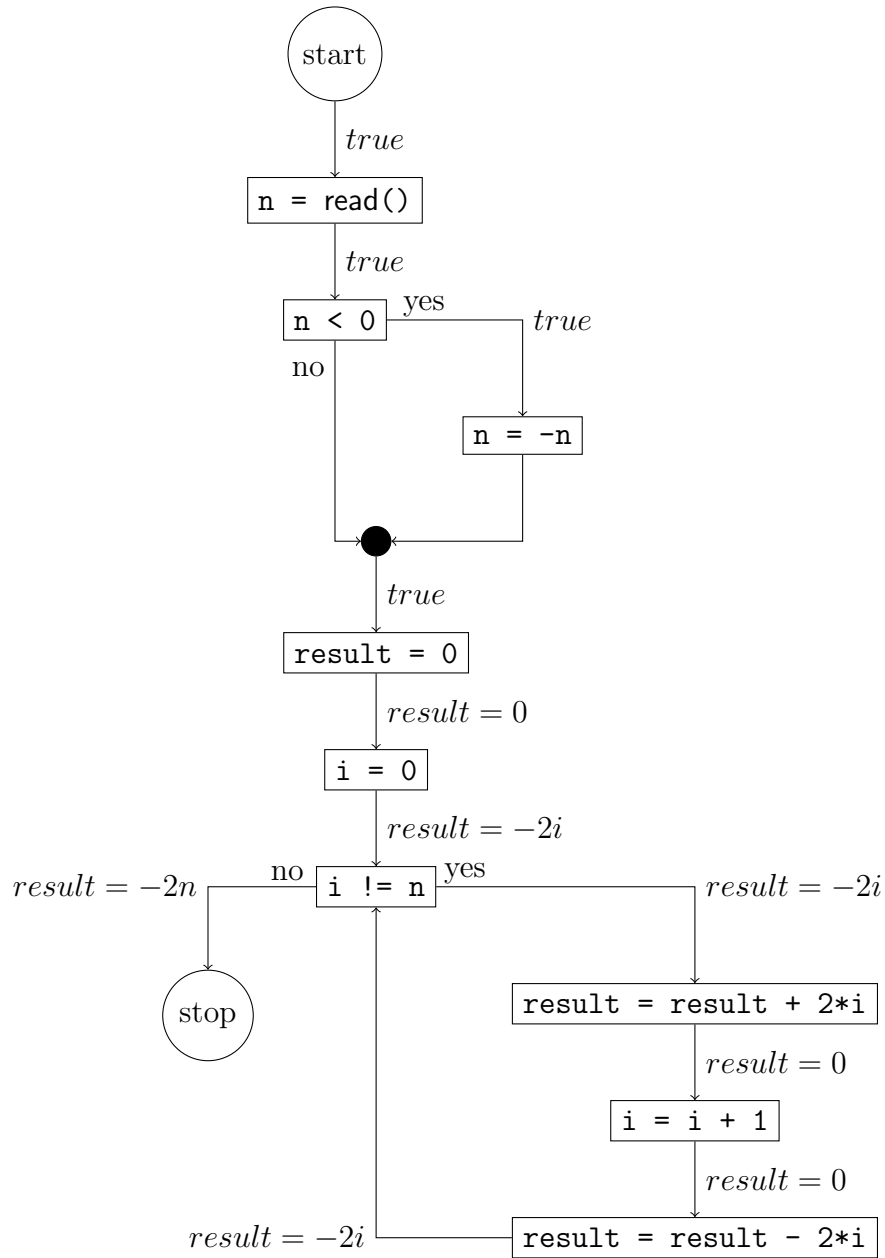
Aufgabe [7 Punkte] Hausaufgabe: Verifikation eines Nützlichen Programms

Gegeben sei folgendes MiniJava-Programm:

```
1 int n, i, result;  
2  
3 n = read();  
4 if (n < 0)  
5     n = -n;  
6  
7 result = 0;  
8 i = 0;  
9 while (i != n) {  
10     result = result + 2*i;  
11     i = i + 1;  
12     result = result - 2*i;  
13 }
```

1. Erstellen Sie das Kontrollfluss-Diagramm!
2. Zeigen Sie, dass am Stop-Knoten die Zusicherung $\text{result} = -2n$ stets erfüllt ist.

Lösungsvorschlag 2.7



Beweis:

1.

$$\begin{aligned}
 & \text{WP}[\mathbf{i} \neq \mathbf{n}](\text{result} = -2n, \text{result} = -2i) \\
 & \equiv (\neg(i \neq n) \Rightarrow \text{result} = -2n) \wedge ((i \neq n) \Rightarrow \text{result} = -2i) \\
 & \equiv ((i = n) \Rightarrow \text{result} = -2n) \wedge ((i \neq n) \Rightarrow \text{result} = -2i) \\
 & \equiv ((i = n) \Rightarrow \text{result} = -2i) \wedge ((i \neq n) \Rightarrow \text{result} = -2i) \\
 & \equiv \text{result} = -2i
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 & \text{WP}[\mathbf{result} = \mathbf{result} - 2*\mathbf{i}](\text{result} = -2i) \\
 & \equiv \text{result} - 2i = -2i \\
 & \equiv \text{result} = 0
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} & \text{WP}[\![i = i + 1]\!](result = 0) \\ & \equiv result = 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} & \text{WP}[\![result = result + 2*i]\!](result = 0) \\ & \equiv result + 2i = 0 \\ & \equiv result = -2i \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} & \text{WP}[\![i = 0]\!](result = -2i) \\ & \equiv result = -2 * 0 \\ & \equiv result = 0 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} & \text{WP}[\![result = 0]\!](result = 0) \\ & \equiv 0 = 0 \\ & \equiv \text{true} \end{aligned}$$

Bemerkungen zu Aufgabe 2.7

Punkteverteilung:

1. 1 Punkt
2. 6 Punkte (jeweils 1 Punkt für jeden der 6 Schritte in der Lösung)