Einführung in die Informatik 2

Prof. Dr. Seidl, J. Kranz, N. Hartmann J. Brunner WS 2016/17

Übungsblatt 4 Abgabefrist: 21.11.2016

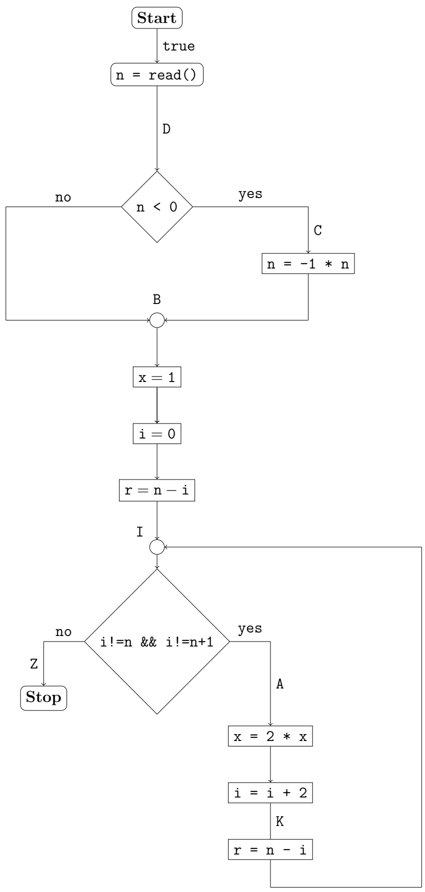
Aufgabe 4.1 (P) Terminator

Zeigen Sie, dass folgendes MiniJava-Programm stets terminiert.

```
int i, x, n;
n = read();
if (n < 0)
  n = -1 * n;
x = 1;
i = 0;
while (i != n && i != n+1) {
  x = 2 * x;
  i = i + 2;
}
```

Lösung 4.1

Wir erstellen zunächst das instrumentierte Kontrollflussdiagramm:



Wir setzen

$$\mathsf{Z} :\equiv \mathtt{true}.$$

Wir raten

$$\mathtt{I} :\equiv \mathtt{r} = \mathtt{n} - \mathtt{i} \wedge \mathtt{i} \leq \mathtt{n} + \mathtt{1}.$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{r = n - i}]\!](I)\\
&\quad\equiv n - i = n - i \wedge i \leq n + 1\\
&\quad\equiv i \leq n + 1\\
&\quad\Leftarrow i \leq n + 1 \wedge n - i < r\\
&\quad\Leftarrow i \leq n + 1 \wedge n - i + 1 < r =: K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{x = 2*x; i = i + 2}]\!](K)\\
&\quad\equiv i + 2 \leq n + 1 \wedge n - i - 1 < r\\
&\quad\equiv i < n \wedge n - i - 1 < r =: A
\end{aligned}$$

Wir überprüfen:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i != n \&\& i != n + 1}]\!](Z, A)\\
&\quad\equiv (i \in \{n, n + 1\}) \vee (i \notin \{n, n + 1\} \wedge i < n \wedge n - i - 1 < r)\\
&\quad\equiv i \in \{n, n + 1\} \vee (i < n \wedge n - i - 1 < r)\\
&\quad\Leftarrow i \in \{n, n + 1\} \vee (i < n \wedge n - i = r)\\
&\quad\Leftarrow i \leq n + 1 \wedge n - i = r\\
&\quad\equiv I
\end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{x = 1; i = 0; r = n - i;}]\!](I)\\
&\quad\equiv n - 0 = n - 0 \wedge 0 \leq n + 1\\
&\quad\Leftarrow 0 \leq n =: B
\end{aligned}$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{n=-1*n;}]\!](B) \equiv \mathtt{n} \leq \mathtt{0} =: \mathtt{C}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{n < 0}]\!](B, C)\\
&\quad\equiv (n \geq 0 \wedge n \geq 0) \vee (n < 0 \wedge n \leq 0)\\
&\quad\equiv n \geq 0 \vee n < 0\\
&\quad\equiv \texttt{true} =: D
\end{aligned}$$

Wichtig: Es gelten folgende Aussagen:

1. $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{r} > \mathtt{0}$

2. $\mathtt{K} \Rightarrow \mathtt{n} - \mathtt{i} < \mathtt{r}$

Aufgabe 4.2 (P) Divisionsverrestung

Schreiben Sie ein MiniJava-Programm, das zwei ganze Zahlen `a` und `b` einliest und dann folgende Berechnung ausführt: Falls eine der beiden Zahlen negativ ist, dann soll 0 ausgegeben werden. Andernfalls soll sowohl `a` **div** `b` als auch `a` **mod** `b` ausgegeben werden. Werden beispielsweise 14 und 3 eingeben, so sollen 4 und 2 ausgegeben werden, da $14 = 4 \cdot 3 + 2$ gilt.

Bei der Implementierung dürfen jedoch Multiplikationen und Divisionen **nicht** verwendet werden. An arithmetischen Operationen sind lediglich Additionen und Subtraktionen erlaubt.

1. Schreiben Sie das MiniJava-Programm! (Dabei sind erklärende Kommentare selbstverständlich!)
2. Testen Sie Ihr MiniJava-Programm! Sie können das MiniJava-Programm auch dazu benutzen, um die Gültigkeit von Zusicherungen mithilfe von `assert`-Anweisungen zu testen.
3. Erstellen Sie das Kontrollflussdiagramm!
4. Zeigen Sie, dass Ihr Programm korrekt ist!

Lösung 4.2

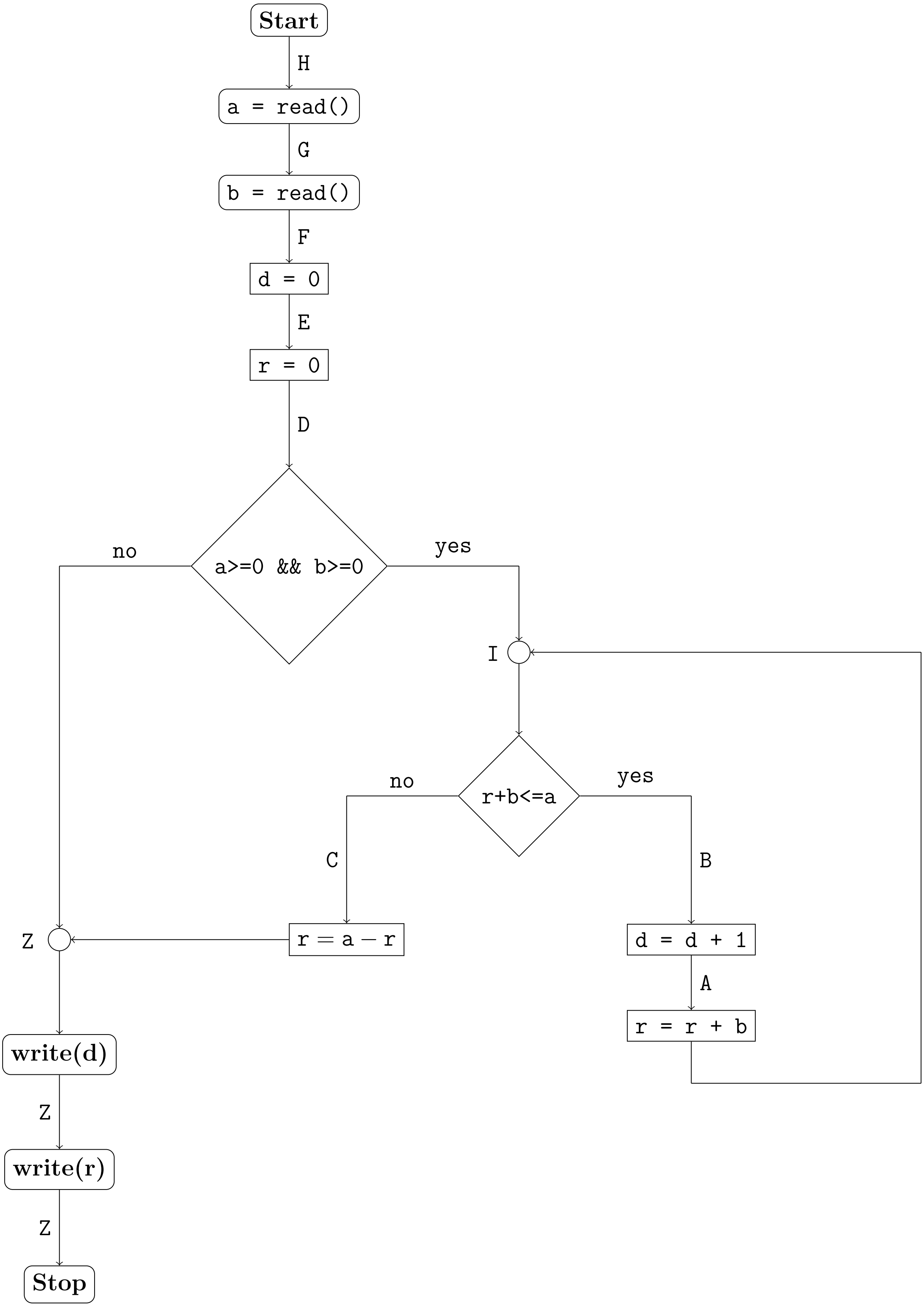
1.

```
int a, b, d, r;

a = read();
b = read();
d = 0;
r = 0;
if (a >= 0 && b >= 0) {
  while(r + b <= a) {
    d = d + 1;
    r = r + b;
  }
  r = a - r;
}
write(d);
write(r);
```

2. Funktioniert!

3.



4. Wir setzen

$$\texttt{Z} :\equiv (\texttt{a},\texttt{b} \geq 0 \wedge \texttt{d} \cdot \texttt{b} + \texttt{r} = \texttt{a} \wedge 0 \leq \texttt{r} < \texttt{b}) \vee (\neg(\texttt{a},\texttt{b} \geq 0) \wedge \texttt{d} = 0 \wedge \texttt{r} = 0).$$

Anmerkung: Es gilt

$$Z \equiv (a, b \geq 0 \Rightarrow (d \cdot b + r = a \wedge 0 \leq r < b)) \wedge (\neg(a, b \geq 0) \Rightarrow (d = 0 \wedge r = 0)).$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{r = a - r;}]\!](Z) \\
&\quad \equiv (a, b \geq 0 \wedge d \cdot b + a - r = a \wedge 0 \leq a - r < b) \\
&\qquad\quad \vee (\neg(a, b \geq 0) \wedge d = 0 \wedge a - r = 0) \\
&\quad \Leftarrow (a, b \geq 0 \wedge d \cdot b + a - r = a \wedge 0 \leq a - r < b) \\
&\quad \equiv (a, b \geq 0 \wedge d \cdot b = r \wedge r + b > a \geq r) := C
\end{aligned}$$

Wir raten die Schleifen-Invariante:

$$I :\equiv a, b \geq 0 \wedge r \leq a \wedge d \cdot b = r$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{r = r + b}]\!](I) \\
&\quad \equiv a, b \geq 0 \wedge r + b \leq a \wedge d \cdot b = r + b =: A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{d = d + 1}]\!](A) \\
&\quad \equiv a, b \geq 0 \wedge r + b \leq a \wedge (d + 1) \cdot b = r + b \\
&\quad \equiv a, b \geq 0 \wedge r + b \leq a \wedge d \cdot b = r \\
&\quad \equiv: B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{r + b <= a}]\!](C, B) \\
&\quad \equiv (r + b > a \wedge r \leq a \wedge a, b \geq 0 \wedge d \cdot b = r) \\
&\qquad\qquad \vee (r + b \leq a \wedge a, b \geq 0 \wedge d \cdot b = r) \\
&\quad \Leftarrow (r + b > a \wedge r \leq a \wedge a, b \geq 0 \wedge d \cdot b = r) \\
&\qquad\quad \vee (r + b \leq a \wedge r \leq a \wedge a, b \geq 0 \wedge d \cdot b = r) \\
&\quad \equiv (r + b > a \vee r + b \leq a) \wedge r \leq a \wedge a, b \geq 0 \wedge d \cdot b = r \\
&\quad \equiv r \leq a \wedge a, b \geq 0 \wedge d \cdot b = r \\
&\quad =: I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{a >= 0 \&\& b >= 0}]\!](Z, I) \\
&\quad \equiv (\neg(a, b \geq 0) \wedge Z) \vee (a, b \geq 0 \wedge I) \\
&\quad \Leftarrow (\neg(a, b \geq 0) \wedge d = 0 \wedge r = 0) \vee (a, b \geq 0 \wedge r \leq a \wedge d \cdot b = r) \\
&\quad \Leftarrow (\neg(a, b \geq 0) \wedge d = 0 \wedge r = 0) \vee (a, b \geq 0 \wedge d = 0 \wedge r = 0) \\
&\quad \equiv d = 0 \wedge r = 0 =: D
\end{aligned}$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{r = 0}]\!](D) \equiv d = 0 =: E$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{d = 0}]\!](E) \equiv \texttt{true} =: F$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{b = read()}]\!](F) \equiv \texttt{true} =: G$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{a = read()}]\!](G) \equiv \texttt{true} =: H$$

Aufgabe 4.3 (P) Termiten

Zeigen Sie, dass folgendes Programm stets terminiert:

```
while(true) {
}
```

Lösung 4.3

Alles vergeht irgendwann, so auch dieses Programm.

Allgemeine Hinweise zur Hausaufgabenabgabe

Die Hausaufgabenabgabe bezüglich dieses Blattes erfolgt ausschließlich über Moodle. Die Abgabefrist finden Sie ebenfalls in Moodle. Bitte vergewissern Sie sich nach der Abgabe selbstständig, dass alle Dateien erfolgreich auf Moodle eingestellt wurden. Die Abgaben der Theorieaufgaben[1] müssen in Form einer einzigen PDF-Datei erfolgen. Nutzen Sie z.B. ImageMagick[2], um aus eingescannten Bildern ein PDF zu erzeugen. Achten Sie bei eingescannten Bildern darauf, dass diese im PDF-Dokument eine korrekte Orientierung haben. **Abgaben, die sich nicht in beschriebenen Formaten befinden, können nicht korrigiert oder bewertet werden!**

Aufgabe 4.4 (H) Termara [10 Punkte]

Zeigen Sie, dass jede Ausführung des folgenden Programms terminiert.

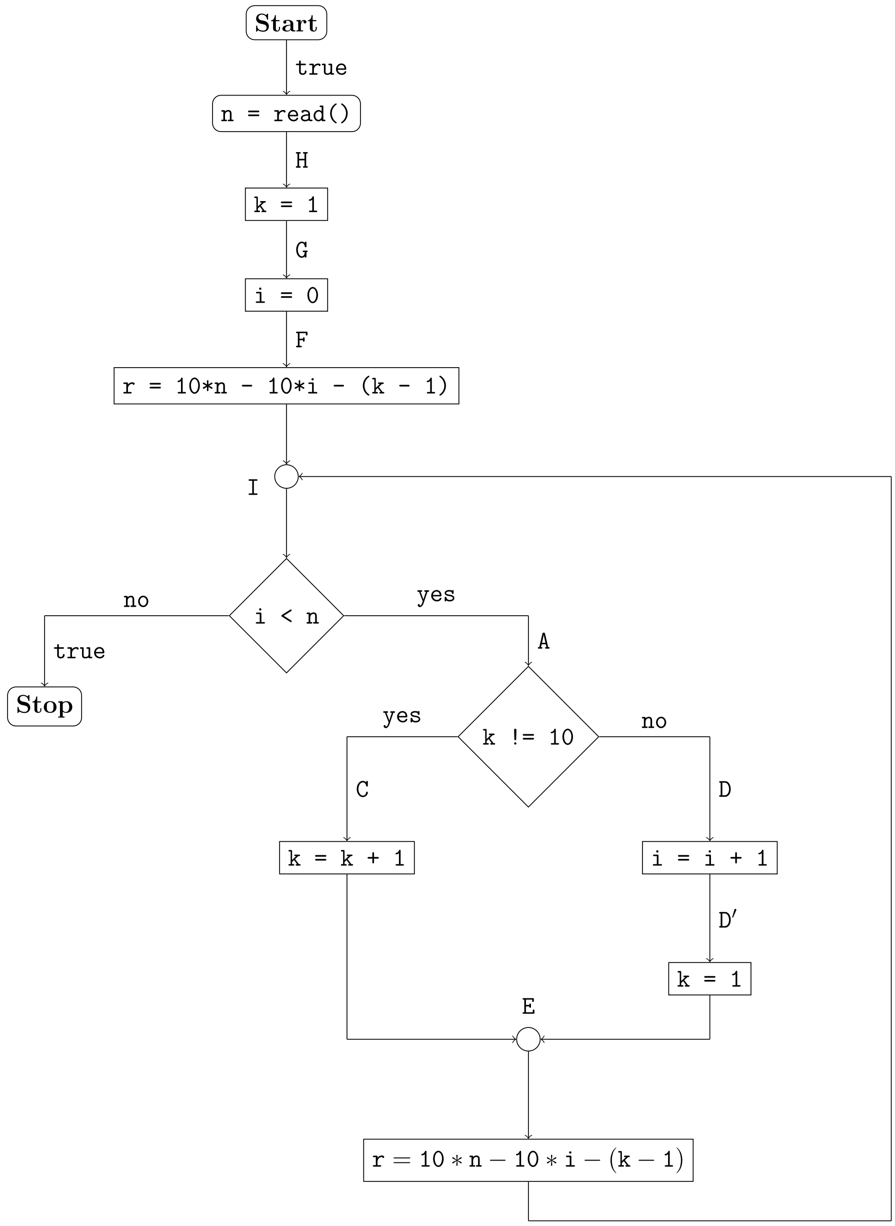
```
int n = read();
int k = 1;
int i = 0;
while (i < n)
  if (k != 10)
          k = k + 1;
  else {
          i = i + 1;
          k = 1;
  }
```

Lösung 4.4

Wir erstellen zunächst das *instrumentierte* Kontrollflussdiagramm.

[1] Theorieaufgaben sind Aufgaben, deren Lösung nicht programmiert wird

[2] `http://www.imagemagick.org/script/index.php`



Wir raten die Schleifen-Invariante

$$I := r = 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1) \wedge k \leq 10.$$

Entsprechend setzen wir

$$A :\equiv i < n \wedge I.$$

Für die Terminierung ist wichtig, dass

$$A \Rightarrow r > 0 \tag{1}$$

gilt. Dies bedeutet, dass `r` $>$ `0` immer dann gilt, wenn die Schleife betreten wird. Dies wird wie folgt bewiesen:

$$\begin{aligned}
A &\equiv r = 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1) \wedge k \leq 10 \wedge i < n \\
&\Rightarrow r > 10 \cdot n - 10 \cdot i - 10 \wedge i < n \\
&\Rightarrow r > 10 \cdot (n - i - 1) \wedge i < n \\
&\Rightarrow r > 0
\end{aligned}$$

Die lokale Konsistenz am ersten Bedingungsknoten gilt, denn es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{i < n}]\!](\texttt{true}, A)\\
&\quad\equiv (i \geq n \wedge \texttt{true}) \vee (i < n \wedge A)\\
&\quad\equiv i \geq n \vee (i < n \wedge I)\\
&\quad\Leftarrow (i \geq n \wedge I) \vee (i < n \wedge I)\\
&\quad\equiv (i \geq n \vee i < n) \wedge I\\
&\quad\equiv \texttt{true} \wedge I\\
&\quad\equiv I.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{r = 10*n - 10*i - (k - 1)}]\!](I) \equiv k \leq 10.$$

Wir setzen

$$E := r > 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1) \wedge k \leq 10.$$

Für die Terminierung ist wichtig, dass offensichtlich

$$E \Rightarrow r > 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1) \tag{2}$$

gilt. Dies bedeutet, dass die Variable `r` in jedem Schleifen-Durchlauf kleiner wird.

Entsprechend setzen wir:

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{k = 1}]\!](E) \equiv r > 10 \cdot n - 10 \cdot i \wedge 1 \leq 10 \equiv r > 10 \cdot n - 10 \cdot i =: D'$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{i = i + 1}]\!](D') \equiv r > 10 \cdot n - 10 \cdot i - 10 =: D$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{k = k + 1}]\!](E) \equiv r \geq 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1) \wedge k < 10 =: C$$

Als nächstes zeigen wir die lokale Konsistenz am zweiten Bedingungsknoten.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{k != 10}]\!](D, C)\\
&\quad\equiv (k = 10 \wedge D) \vee (k \neq 10 \wedge C)\\
&\quad\equiv (k = 10 \wedge r > 10 \cdot n - 10 \cdot i - 10)\\
&\qquad\quad \vee (k \neq 10 \wedge r \geq 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1) \wedge k < 10)\\
&\quad\equiv (k = 10 \wedge r > 10 \cdot n - 10 \cdot i - 10) \vee (k < 10 \wedge r \geq 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1))\\
&\quad\equiv (k = 10 \wedge r \geq 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1)) \vee (k < 10 \wedge r \geq 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1))\\
&\quad\equiv (k = 10 \vee k < 10) \wedge r \geq 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1)\\
&\quad\equiv k \leq 10 \wedge r \geq 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1)\\
&\quad\Leftarrow k \leq 10 \wedge r \geq 10 \cdot n - 10 \cdot i - (k-1) \wedge i < n\\
&\quad\equiv A
\end{aligned}$$

Weiter geht's wie folgt:

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{r = 10*n - 10*i - (k - 1)}]\!](I) \equiv k \leq 10 =: F$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{i = 0}]\!](F) \equiv k \leq 10 =: G$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{k = 1}]\!](G) \equiv 1 \leq 10 \equiv \texttt{true} =: H$$

$$\mathsf{WP}[\![\texttt{n = read()}]\!](\texttt{H}) \equiv \forall \texttt{n.true} \equiv \texttt{true}$$

Zusammenfassend sind folgende Aussagen gezeigt:

1. Die so gewählten Zusicherungen sind lokal konsistent.
2. Der Start-Knoten ist mit `true` annotiert.
3. Beim Betreten der Schleife gilt stets $\texttt{r} > \texttt{0}$ (siehe (1)).
4. Mit jedem Schleifen-Durchlauf wird `r` kleiner (siehe (2)).

Aufgabe 4.5 (H) Paarung mit Cantor [10 Punkte + 5 Bonus]

Die *Cantorsche Paarungsfunktion* ist definiert wie folgt:

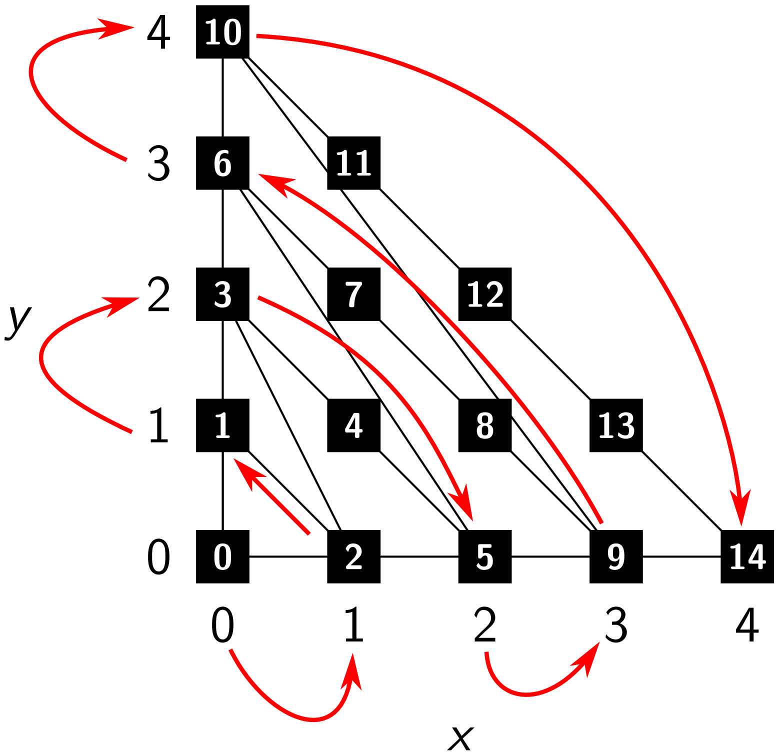
$$\pi(y, x) := x + \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1)$$

Eine besonders elegante Weise, den Wert der Umkehrfunktion $\pi^{-1}(y, x)$ zu berechnen, ist in folgendem Programm implementiert.

```
int p = read();
int x = 0;
int y = 0;
int k = 0;
outer: while(k != p) {
  int d;
  if(y == 0) {
    k = k + x + 2;
    x = x + 1;
    d = 1;
  } else {
    k = k + y + 1;
    y = y + 1;
    d = -1;
  }
  do {
    if(k == p)
      break outer;
    x = x - d;
    y = y + d;
    k = k - d;
  } while(x != 0 && y != 0);
}
write(x);
write(y);
```

Der Wert $\pi(y, x)$ kodiert den Punkt (x, y) im Koordinatensystem entsprechend der weiter unten gezeigten Abbildung[3]. Die Abbildung zeigt auch, wie das Programm entlang der Diagonalen das Koordinatensystem abläuft, bis es den gesuchten Wert gefunden hat.

[3] Quelle: Wikipedia

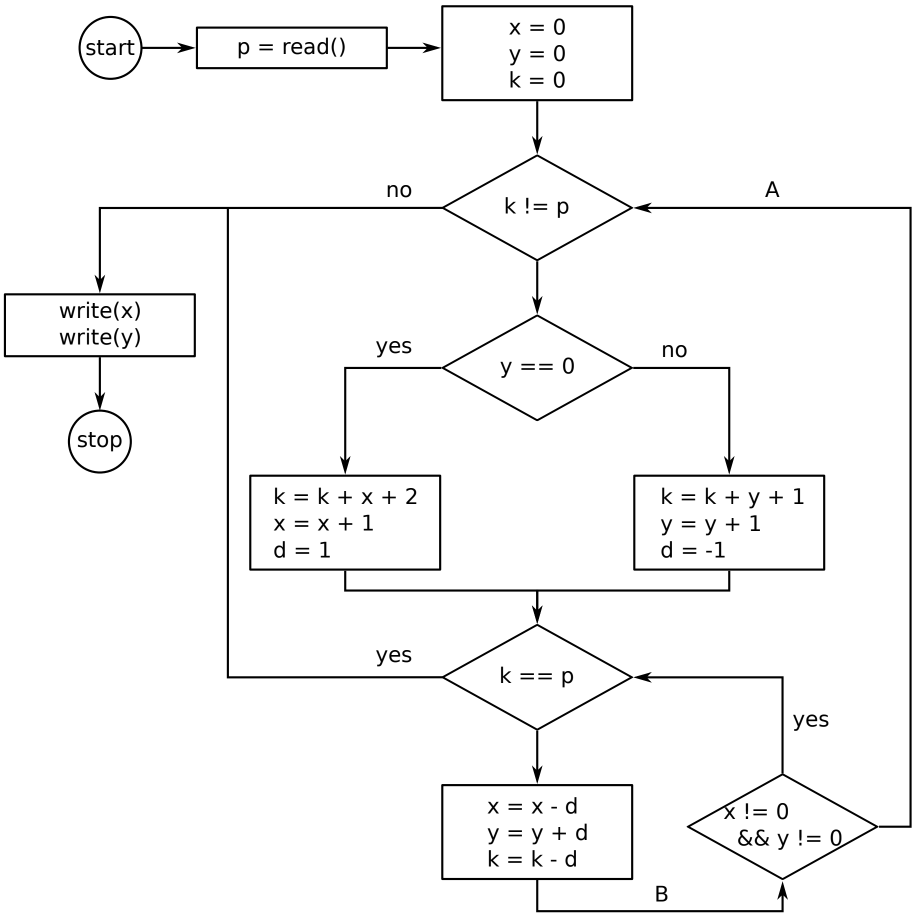


Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben.

1. Zeigen Sie, dass das Programm nichts anderes als die Koordinaten x und y ausgibt, wenn der Benutzer eine Zahl aus $\mathbb{N}_0$ für $\pi(y, x)$ eingegeben hat.

2. (*Bonusaufgabe, keine Lösung*) Zeigen Sie, dass das Programm stets terminiert, wenn der Benutzer eine Zahl aus $\mathbb{N}_0$ für $\pi(y, x)$ eingegeben hat.

Hinweis: Nutzen Sie zur Lösung der Aufgabe den gegebenen Kontrollflussgraphen.



Lösung 4.5

1. Da der Beweis etwas umfangreicher ist, teilen wir ihn in zwei Teile auf:

   - Wir zeigen, dass $d \in \{-1, 1\}$ überall gilt.
   - Wir zeigen die geforderte Aussage.

   Wir beginnen mit dem Beweis von $d \in \{-1, 1\}$. Wir wählen die Schleifeninvarianten entsprechend:

   $$A := d \in \{-1, 1\}$$
   $$B := A$$

   Wir prüfen lokale Konsistenz:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{k = k - d}]\!](A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{y = y + d}]\!](A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{x = x - d}]\!](A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{k == p}]\!](A, A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{x != 0 \&\& y != 0}]\!](A, A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{x = x + 1}]\!](A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{k = k + x + 2}]\!](A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{y = y + 1}]\!](A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{k = k + y + 1}]\!](A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{y == 0}]\!](A, A)\\
&\quad\equiv \mathsf{WP}[\![\texttt{k != p}]\!](A, A)\\
&\quad\equiv A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{d = 1}]\!](d \in \{-1, 1\})\\
&\quad\equiv 1 \in \{-1, 1\}\\
&\quad\equiv \texttt{true}\\
&\quad\Leftarrow A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{d = -1}]\!](d \in \{-1, 1\})\\
&\quad\equiv -1 \in \{-1, 1\}\\
&\quad\equiv \texttt{true}\\
&\quad\Leftarrow A
\end{aligned}$$

Nun können wir die Aussage der Teilaufgabe zeigen. Wir wählen folgende Invarianten für die Schleifen[4]:

$$\begin{aligned}
A &:= k = \pi(y, x) \wedge (x = 0 \vee y = 0)\\
B &:= (d = 1 \Rightarrow k = \pi(y, x)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k = \pi(y, x))
\end{aligned}$$

Wir prüfen lokale Konsistenz:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{k = k - d}]\!]((d = 1 \Rightarrow k = \pi(y, x)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k = \pi(y, x)))\\
&\quad\equiv (d = 1 \Rightarrow k - d = \pi(y, x)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k - d = \pi(y, x))\\
&\quad\equiv (d = 1 \Rightarrow k - 1 = \pi(y, x)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k + 1 = \pi(y, x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{y = y + d}]\!]((d = 1 \Rightarrow k - 1 = \pi(y, x)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k + 1 = \pi(y, x)))\\
&\quad\equiv (d = 1 \Rightarrow k - 1 = \pi(y + d, x)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k + 1 = \pi(y + d, x))\\
&\quad\equiv (d = 1 \Rightarrow k - 1 = \pi(y + 1, x)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k + 1 = \pi(y - 1, x))
\end{aligned}$$

[4]Die Unterteilung nach d kann auch später im Beweis folgen; für B funktioniert also äquivalent auch $k = \pi(y, x)$.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{x = x - d}]\!]((d = 1 \Rightarrow k - 1 = \pi(y+1, x)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k + 1 = \pi(y-1, x)))\\
&\quad \equiv (d = 1 \Rightarrow k - 1 = \pi(y+1, x-d)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k + 1 = \pi(y-1, x-d))\\
&\quad \equiv (d = 1 \Rightarrow k - 1 = \pi(y+1, x-1)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k + 1 = \pi(y-1, x+1))\\
&\quad \equiv (d = 1 \Rightarrow k - 1 = \pi(y+1, x-1) \wedge x > 0)\\
&\qquad\quad \wedge (d = -1 \Rightarrow k + 1 = \pi(y-1, x+1) \wedge y > 0)\\
&\quad \equiv (d = 1 \Rightarrow k = \pi(y, x) \wedge x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow k = \pi(y, x) \wedge y > 0)\\
&\quad \equiv (d = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{k == p}]\!]((d = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x), p = \pi(y, x))\\
&\quad \equiv (k \neq p \Rightarrow (d = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x)\\
&\qquad\quad \wedge (k = p \Rightarrow p = \pi(y, x))\\
&\quad \equiv (k \neq p \Rightarrow (d = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x)\\
&\qquad\quad \wedge (k = p \Rightarrow k = \pi(y, x))\\
&\quad \Leftarrow (d = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{x != 0 \&\& y != 0}]\!](k = \pi(y, x) \wedge (x = 0 \vee y = 0),\\
&\qquad (d = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x))\\
&\quad \equiv (x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow k = \pi(y, x) \wedge (x = 0 \vee y = 0))\\
&\qquad\quad \wedge (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow ((d = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x)))\\
&\quad \equiv (x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow k = \pi(y, x)) \wedge (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow k = \pi(y, x))\\
&\quad \equiv k = \pi(y, x)\\
&\quad \Leftarrow (d = 1 \Rightarrow k = \pi(y, x)) \wedge (d = -1 \Rightarrow k = \pi(y, x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{d = 1}]\!]((d = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x))\\
&\quad \equiv (1 = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (1 = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x))\\
&\quad \equiv x > 0 \wedge k = \pi(y, x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{x = x + 1}]\!](x > 0 \wedge k = \pi(y, x))\\
&\quad \equiv x + 1 > 0 \wedge k = \pi(y, x+1)\\
&\quad \equiv x > -1 \wedge k = \pi(y, x+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{k = k + x + 2}]\!](x > -1 \wedge k = \pi(y, x+1))\\
&\quad \equiv x > -1 \wedge k + x + 2 = \pi(y, x+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{d = -1}]\!]((d = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (d = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x))\\
&\quad \equiv (-1 = 1 \Rightarrow x > 0) \wedge (-1 = -1 \Rightarrow y > 0) \wedge k = \pi(y, x))\\
&\quad \equiv y > 0 \wedge k = \pi(y, x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{y = y + 1}]\!](y > 0 \land k = \pi(y,x)) \\
&\quad\equiv y + 1 > 0 \land k = \pi(y+1,x) \\
&\quad\equiv y > -1 \land k = \pi(y+1,x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{k = k + y + 1}]\!](y > -1 \land k = \pi(y+1,x)) \\
&\quad\equiv y > -1 \land k + y + 1 = \pi(y+1,x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{y == 0}]\!](y > -1 \land k + y + 1 = \pi(y+1,x), x > -1 \land k + x + 2 = \pi(y,x+1)) \\
&\quad\equiv (y \neq 0 \Rightarrow (y > -1 \land k + y + 1 = \pi(y+1,x))) \\
&\qquad\quad \land (y = 0 \Rightarrow x > -1 \land k + x + 2 = \pi(y,x+1)) \\
&\quad\Leftarrow x > -1 \land y > -1 \land (y \neq 0 \Rightarrow k + y + 1 = \pi(y+1,x)) \\
&\qquad\quad \land (y = 0 \Rightarrow k + x + 2 = \pi(y,x+1) \land (x = 0 \lor y = 0) \\
&\quad\equiv x > -1 \land y > -1 \land (y \neq 0 \Rightarrow k + y + 1 = \pi(y+1,0)) \\
&\qquad\quad \land (y = 0 \Rightarrow k + x + 2 = \pi(0,x+1) \land (x = 0 \lor y = 0) \\
&\quad\equiv x \geq 0 \land y \geq 0 \land (y \neq 0 \Rightarrow k = \pi(y,0)) \\
&\qquad\quad \land (y = 0 \Rightarrow k = \pi(0,x) \land (x = 0 \lor y = 0) \\
&\quad\Leftarrow A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{k != p}]\!](p = \pi(y,x), A) \\
&\quad\equiv (k = p \Rightarrow p = \pi(y,x)) \land (k < p \Rightarrow A) \\
&\quad\equiv (k = p \Rightarrow k = \pi(y,x)) \land (k < p \Rightarrow A) \\
&\quad\Leftarrow A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{k = 0}]\!](A) \\
&\quad\equiv 0 = \pi(y,x) \land (x = 0 \lor y = 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{y = 0}]\!](0 = \pi(y,x) \land (x = 0 \lor y = 0)) \\
&\quad\equiv 0 = \pi(0,x) \land (x = 0 \lor 0 = 0) \\
&\quad\equiv 0 = \pi(0,x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{WP}[\![\texttt{x = 0}]\!](0 = \pi(0,x)) \\
&\quad\equiv 0 = \pi(0,0) \\
&\quad\equiv \texttt{true}
\end{aligned}
$$

Punkteschema

1. 10 Punkte
2. 5 Bonuspunkte