Wir sehen $l_1 @ l_2 = \text{append } l_1\ l_2$ nach Def., somit gilt Lemma 2 auch für äquivalente @-Aufrufe

1) Induktion über $n := \text{length } l$

<u>1. Basis:</u> $n = 0$, also $l = []$, dann gilt

$$\text{reverse (fold\_left (fun a x} \to f x :: a) [a] []) \overset{\text{Def. fold}}{=} \text{reverse } [a]$$

$$\overset{\text{Lemma 1}}{=} \text{reverse } [a] @ [] \overset{\text{Def. map}}{=} \text{reverse } [a] @ (\text{map } f\ [])$$

<u>1. Schritt:</u> Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert und l eine beliebige Liste mit length $l = n$ und x ein Element, sodass length $(x::l) = n+1$

<u>I. H.:</u> Die Aussage gelte für $l =: xs$

<u>I. Behauptung:</u> Die Aussage gilt dann auch für $(x::l)$

<u>Beweis:</u> $\text{reverse (fold\_left (fun a x} \to f x :: a) [a]\ (x::xs))$

$$\overset{\text{Def. fold}}{=} \text{reverse} (\text{———} \ " \ \text{———} [f x; a]\ xs)$$

$$\overset{\text{I. H.}}{=} \text{reverse} [f x; a] @ \text{map } f\ xs$$

$$\overset{\text{Def rev}}{=} (\text{reverse } [a] @ [f x]) @ \text{map } f\ xs$$

$$\overset{\text{Lemma 2}}{=} \text{reverse } [a] @ ([f x] @ \text{map } f\ xs)$$

$$\overset{\text{Def @}}{=} \text{———} \ " \ \text{———} ([\,] @ f x :: \text{map } f\ xs)$$

$$\overset{\text{Def @}}{=} \text{———} \ " \ \text{———} (f x :: \text{map } f\ xs)$$

$$\overset{\text{Def map}}{=} \text{reverse} [a] @ \text{map } f\ (x::xs) \qquad \square$$

2) $\text{reverse (fold\_left (fun a x} \to f x :: a) []\ l)$

$$\overset{\text{Aufgabe 1}}{=} \text{reverse } [] @ \text{map } f\ l \overset{\text{Def. rev}}{=} [\,] @ \text{map } f l \overset{\text{Def @}}{=} \text{map } f\ l \qquad \square$$

3) Wir führen Induktion über $n := \text{length } l$ und beliebige $i \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen nur den Beweis des I. Schritts. Der Rest erfolgt analog zu allen anderen Induktionsbeweisen (übersetzt: Kevin ist zu faul für Formalismus ;))

<Formalismus>

⋮

<u>Beweis:</u> $\text{fold\_left (fun a x} \to x+a)\ i\ (x::xs)$

$$\overset{\text{Def. fold}}{=} \text{———} \ " \ \text{———} (x+i)\ xs$$

$$\overset{\text{I. H.}}{=} \text{sum } (x+i)\ xs \overset{\text{Def. sum}}{=} \text{sum } i\ (x::xs)$$

<u>Beachte:</u> Einsetzen der I. H. nur möglich, da i beliebig im Beweis. Hätte man etwa $\text{fold\_left (fun a x} \to x+a)\ 0\ l = \text{sum } 0\ l$ zeigen sollen, hätte man zuerst Aufgabe 3 beweisen müssen.