TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Lehrstuhl für Sprachen und Beschreibungsstrukturen WS 2015/16
Einführung in die Informatik 2 **Übungsblatt 12**
Prof. Dr. Helmut Seidl, Ralf Vogler, Stefan Schulze Frielinghaus

Aufgabe 12.1 [3+3+3 Punkte] **Terminierung**

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden abgeleiteten Regeln:

a)
$$\frac{e = [\,]}{(\texttt{match}\ e\ \texttt{with}\ [\,]\ \texttt{->}\ e_1 \mid x :: xs\ \texttt{->}\ e_2) = e_1}$$

b)
$$\frac{e\ \texttt{terminiert} \qquad e = e' :: e''}{(\texttt{match}\ e\ \texttt{with}\ [\,]\ \texttt{->}\ e_1 \mid x :: xs\ \texttt{->}\ e_2) = e_2[e'/x, e''/xs]}$$

c) Gegeben sei nun $e_1 := (\texttt{fun}\ x\ \texttt{->}\ \texttt{match}\ x\ \texttt{with}\ [\,]\ \texttt{->}\ 1 \mid x :: xs\ \texttt{->}\ 42)\ [1; 2; 3]$ und $e_2 := (\texttt{fun}\ x\ \texttt{->}\ 42)\ 5$. Zeigen Sie, dass $e_1 = e_2$ gilt.

Lösungsvorschlag 12.1
Im Folgenden sei $\pi := (\texttt{match}\ e\ \texttt{with}\ [\,]\ \texttt{->}\ e_1 \mid x :: xs\ \texttt{->}\ e_2)$.

a) Es sei angenommen, dass $e = [\,]$ gilt.

Fall 1: Die Auswertung des Ausdrucks e_1 terminiert. Dann existiert ein Wert v_1, sodass $e_1 \Rightarrow v_1$ gilt. Da $e = [\,]$ gilt, gilt $e \Rightarrow [\,]$. Es folgt

$$\text{PM}\ \frac{e \Rightarrow [\,] \qquad e_1 \Rightarrow v_1}{\pi \Rightarrow v_1}$$

Daraus folgt $\pi = e_1$.

Fall 2.a: Die Auswertung des Ausdrucks e_1 terminiert nicht und die Auswertung des Ausdrucks π terminiert. Es existiert also ein Beweis der Form

$$\text{PM}\ \frac{e \Rightarrow [\,] \qquad e_1 \Rightarrow v_1}{\pi \Rightarrow v_1}$$

Daraus folgt, dass die Auswertung des Ausdruck e_1 terminiert — Widerspruch.

Fall 2.b: Die Auswertung der Ausdrücke e_1 und π terminieren nicht. Aus dem Lemma der Nicht-Terminierung folgt, dass diese Ausdrücke trivialerweise gleich sind, d.h. $\pi = e_1$ gilt.

b) Es sei angenommen, dass

$$e \texttt{ terminiert} \quad \text{und} \quad e = e' :: e''$$

gelten. Daraus folgt, dass ein Wert v exisitiert, so dass $e \Rightarrow v$ und $e' :: e'' \Rightarrow v$ gelten. Notwendigerweise muss $v = v' :: v''$ mit

$$e' \Rightarrow v' \quad \text{und} \quad e'' \Rightarrow v''$$

gelten. Daraus folgt, dass

$$e' = v' \quad \text{und} \quad e'' = v''$$

gelten. Aus dem Substitutionslemma folgt

$$e_2[e'/x, e''/xs] = e_2[v'/x, v''/xs]. \tag{1}$$

Fall 1: Die Auswertung des Ausdrucks $e_2[e'/x, e''/xs]$ terminiert. Es existiert also ein Wert v_2 mit $e_2[e'/x, e''/xs] \Rightarrow v_2$ und wegen (1) gilt $e_2[v'/x, v''/xs] \Rightarrow v_2$. Es folgt

$$\text{PM}\ \frac{e \Rightarrow v' :: v'' \equiv x :: xs[v'/x, v''/xs] \qquad e_2[v'/x, v''/xs] \Rightarrow v_2}{\pi \Rightarrow v_2}$$

Daraus folgt $\pi = e_2[e'/x, e''/xs]$.

Fall 2.a: Die Auswertung des Ausdrucks $e_2[e'/x, e''/xs]$ terminiert nicht und die Auswertung des Ausdrucks π terminiert. Es existiert also ein Wert v_2 mit

$$\text{PM}\ \frac{e \Rightarrow v' :: v'' \equiv x :: xs[v'/x, v''/xs] \qquad e_2[v'/x, v''/xs] \Rightarrow v_2}{\pi \Rightarrow v_2}$$

Aus (1) folgt, dass

$$e_2[e'/x, e''/xs] \Rightarrow v_2$$

gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass der Ausdruck $e_2[e'/x, e''/xs]$ nicht terminiert.

Fall 2.b: Die Auswertung der Ausdrücke $e_2[e'/x, e''/xs]$ und π terminieren nicht. Aus dem Lemma der Nicht-Terminierung folgt, dass diese Ausdrücke trivialerweise gleich sind, d.h. $\pi = e_2[e'/x, e''/xs]$ gilt.

c) Um die Beweisbäume möglichst lesbar zu halten, wurde weitestgehend auf die Benutzung von $v \Rightarrow v$ für alle Werte v verzichtet. Sei $\pi := \texttt{match}\ x\ \texttt{with}\ [\,]\ \texttt{->}\ 1 \mid x :: xs\ \texttt{->}\ 42$. Angenommen die Ausdrücke e_1, e_2 terminieren, d.h. es existieren v_1, v_2 sodass $e_1 \Rightarrow v_1$ und $e_2 \Rightarrow v_2$. Wir schliessen

$$\text{T}\ \frac{\text{App}\ \dfrac{\text{PM}\ \dfrac{42 \Rightarrow 42}{\pi[[1;2;3]/x] \Rightarrow 42}}{e_1 = (\texttt{fun}\ x\ \texttt{->}\ \pi)\ [1;2;3] \Rightarrow 42} \qquad \text{App}\ \dfrac{42 \Rightarrow 42}{e_2 \Rightarrow 42} \qquad 42 = 42}{e_1 = e_2}$$

Die Fälle in denen wir annehmen, dass e_1 oder e_2 nicht terminieren, können wir durch den obigen Fall zu einem Widerspruch führen. Damit ist diese Teilaufgabe bewiesen.

$\square$

Aufgabe 12.2 Tutoraufgabe: Terminierung

Es sei die folgende abgeleitete Regel betrachtet.

$$\frac{\mathtt{e}_0 = \mathtt{fun\ x} \to \mathtt{e} \qquad \mathtt{e}_1 \text{ terminiert}}{\mathtt{e}_0\ \mathtt{e}_1 = \mathtt{e}[\mathtt{e}_1/\mathtt{x}]}$$

a) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass auf die Voraussetzung „$\mathtt{e}_1$ terminiert“ nicht verzichtet werden kann.

b) Zeigen Sie die Gültigkeit obiger Regel.

Lösungsvorschlag 12.2

a)
```
let rec f = fun x -> f (x+1)
let e0 = fun y -> 0
```
Offensichtlich terminiert die Auswertung des Ausdrucks `f 0` nicht.

Die Auswertung des Ausdrucks `e0 (f 0)` terminiert nicht (*). Andernfalls hätte ein Beweis für `e0 (f 0)` folgende Form:

$$\textsc{App}\ \frac{\mathtt{e0} \Rightarrow \mathtt{fun\ y} \to \mathtt{0} \qquad \mathtt{f\ 0} \Rightarrow \mathtt{v}_1 \qquad \mathtt{0}[\mathtt{v}_1/\mathtt{y}] \Rightarrow \mathtt{v}}{\mathtt{e0\ (f\ 0)} \Rightarrow \mathtt{v}}$$

Dies würde bedeuten, dass die Auswertung des Ausdrucks `f 0` terminiert.

Die Auswertung des Ausdrucks $\mathtt{0}[(\mathtt{f\ 0})/\mathtt{y}]$ terminiert (**).

Aus (*) und (**) folgt, dass $\mathtt{e0\ (f\ 0)} = \mathtt{0}[(\mathtt{f\ 0})/\mathtt{y}]$ nicht gilt.

b) Es sei angenommen, dass die Prämissen gelten. Aus $\mathtt{e}_0 = \mathtt{fun\ x} \to \mathtt{e}$ folgt $\mathtt{e}_0 \Rightarrow \mathtt{fun\ x} \to \mathtt{e}$. Aus $\mathtt{e}_1$ terminiert folgt, dass ein Wert $\mathtt{v}_1$ exisitiert, so dass $\mathtt{e}_1 \Rightarrow \mathtt{v}_1$ und damit $\mathtt{e}_1 = \mathtt{v}_1$ gelten.

1. Fall: Die Auswertung des Ausdrucks $\mathtt{e}[\mathtt{e}_1/\mathtt{x}]$ terminiert. Daraus folgt, dass ein Wert $\mathtt{v}$ exisitiert, so dass $\mathtt{e}[\mathtt{e}_1/\mathtt{x}] \Rightarrow \mathtt{v}$ und damit auch $\mathtt{e}[\mathtt{e}_1/\mathtt{x}] = \mathtt{v}$ gelten. Mit dem Substitutionslemma und $\mathtt{e}_1 = \mathtt{v}_1$ folgt, dass $\mathtt{e}[\mathtt{v}_1/\mathtt{x}] \Rightarrow \mathtt{v}$ gilt. Der folgende Beweis zeigt, dass sich $\mathtt{e}_0\ \mathtt{e}_1$ unter diesen Voraussetzungen auch zu $\mathtt{v}$ auswertet:

$$\textsc{App}\ \frac{\mathtt{e}_0 \Rightarrow \mathtt{fun\ x} \to \mathtt{e} \qquad \mathtt{e}_1 \Rightarrow \mathtt{v}_1 \qquad \mathtt{e}[\mathtt{v}_1/\mathtt{x}] \Rightarrow \mathtt{v}}{\mathtt{e}_0\ \mathtt{e}_1 \Rightarrow \mathtt{v}}$$

2. Fall: Die Auswertung des Ausdrucks $\mathtt{e}[\mathtt{e}_1/\mathtt{x}]$ terminiert nicht. Um zu zeigen, dass die Auswertung des Ausdrucks $\mathtt{e}_0\ \mathtt{e}_1$ ebenfalls nicht terminiert, sei zur Herleitung eines Widerspruchs angenommen, dass ein Wert $\mathtt{v}$ mit $\mathtt{e}_0\ \mathtt{e}_1 \Rightarrow \mathtt{v}$ existiert. Damit muss ein Beweis der Form

$$\textsc{App}\ \frac{\mathtt{e}_0 \Rightarrow \mathtt{fun\ x} \to \mathtt{e} \qquad \mathtt{e}_1 \Rightarrow \mathtt{v}_1 \qquad \mathtt{e}[\mathtt{v}_1/\mathtt{x}] \Rightarrow \mathtt{v}}{\mathtt{e}_0\ \mathtt{e}_1 \Rightarrow \mathtt{v}}$$

exisitieren. Da $\mathtt{e}_1 = \mathtt{v}_1$ gilt, folgt mit dem Substitutionslemma, dass die Auswertung des Ausdrucks $\mathtt{e}[\mathtt{e}_1/\mathtt{x}] = \mathtt{v}$, d.h., da $\mathtt{v}$ ein Wert ist, dass die Auswertung des Ausdrucks $\mathtt{e}[\mathtt{e}_1/\mathtt{x}]$ terminiert — Widerspruch. $\square$

Aufgabe 12.3 Tutoraufgabe: Gleichheit von `fact`, `map` und `comp`

a) Es seien folgende, bekannte Definitionen gegeben:

```
let rec fact = fun n ->
  match n with
    0 -> 1
  | n -> n * fact (n-1)

let rec fact_aux = fun x n ->
  match n with
    0 -> x
  | n -> fact_aux (n*x) (n-1)

let fact_iter = fact_aux 1
```

Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung, dass alle Aufrufe terminieren,

$$\texttt{fact\_iter}\,\texttt{n} = \texttt{fact}\,\texttt{n}$$

für alle nicht-negativen ganzen Zahlen $\texttt{n} \in \mathbf{N}_0$ gilt.

b) Es seien folgende, bekannte Definitionen gegeben:

```
let comp = fun f g x -> f (g x)

let rec map = fun op l ->
  match l with
    [] -> []
  | x::xs -> op x :: map op xs
```

Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung, dass alle Aufrufe terminieren,

$$\texttt{map}\,(\texttt{comp}\,\texttt{f}\,\texttt{g}) = \texttt{comp}\,(\texttt{map}\,\texttt{f})\,(\texttt{map}\,\texttt{g})$$

für alle `f` und `g` gilt.

Lösungsvorschlag 12.3

a) Per Induktion über `n` wird gezeigt, dass

$$\texttt{fact\_aux}\,\texttt{x}\,\texttt{n} = \texttt{x} * \texttt{fact}\,\texttt{n} \tag{2}$$

für alle $\texttt{n} \in \mathbb{N}_0$ und alle $\texttt{x} \in \mathbb{Z}$ gilt.

Induktionsverankerung: Es gilt $\texttt{n} = 0$. Es folgt

$$\texttt{fact\_aux}\,\texttt{x}\,\texttt{n} = \texttt{fact\_aux}\,\texttt{x}\,0 = \texttt{x} = \texttt{x} * 1 = \texttt{x} * \texttt{fact}\,0.$$

Induktionsschritt: Es gilt $\texttt{n} > 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\texttt{fact_aux}\,\texttt{x}\,\texttt{n} &= \texttt{fact_aux}\,(\texttt{n} * \texttt{x})\,(\texttt{n} - 1) && \text{(Def. } \texttt{fact_aux}\text{)}\\
&= \texttt{n} * \texttt{x} * \texttt{fact}\,(\texttt{n} - 1) && \text{(Induktionsannahme)}\\
&= \texttt{x} * (\texttt{n} * \texttt{fact}\,(\texttt{n} - 1)) && \\
&= \texttt{x} * \texttt{fact}\,\texttt{n} && \text{(Def. } \texttt{fact}\text{)}
\end{aligned}$$

Damit ist (2) gezeigt. Mithilfe von (2) folgt schließlich:

$$\texttt{fact\_iter n} = \texttt{fact\_aux 1 n} = \texttt{1} * \texttt{fact n} = \texttt{fact n}$$

b) Es ist zu zeigen, dass

$$\texttt{map (comp f g) l} = \texttt{comp (map f) (map g) l}$$

für alle Werte `l` gilt. Dies geschieht per Induktion:

Induktionsverankerung: Es gilt `l` = []. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\texttt{map (comp f g) l} &= \texttt{map (comp f g) []} \\
&= \texttt{[]} && \text{(Def. } \texttt{map}\text{)} \\
&= \texttt{map f []} && \text{(Def. } \texttt{map}\text{)} \\
&= \texttt{map f (map g [])} && \text{(Def. } \texttt{map}\text{)} \\
&= \texttt{comp (map f) (map g) []} && \text{(Def. } \texttt{comp}\text{)} \\
&= \texttt{comp (map f) (map g) l}
\end{aligned}$$

Induktionsschritt: Es gilt `l` = `v :: vs` und damit folgt:

$$\texttt{map (comp f g) vs} = \texttt{comp (map f) (map g) vs}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\texttt{map (comp f g) l} &= \texttt{map (comp f g) (v :: vs)} \\
&= \texttt{comp f g v :: map (comp f g) vs} && \text{(Def. } \texttt{map}\text{)} \\
&= \texttt{comp f g v :: comp (map f) (map g) vs} && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \texttt{f (g v) :: map f (map g vs)} && \text{(Def. } \texttt{comp}\text{)} \\
&= \texttt{map f (g v :: map g vs)} && \text{(Def. } \texttt{map}\text{)} \\
&= \texttt{map f (map g (v :: vs))} && \text{(Def. } \texttt{map}\text{)} \\
&= \texttt{map f (map g l)} \\
&= \texttt{comp (map f) (map g) l} && \text{(Def. } \texttt{comp}\text{)}
\end{aligned}$$